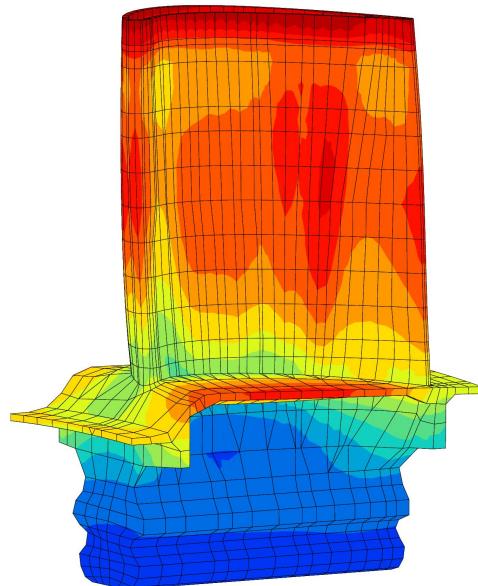


# Mécanique des Milieux Continus

*Théorie et Pratique*

Samuel Forest

avec le concours de Michel Amestoy



Edition 2022



Presses des Mines

© Presses des MINES - TRANSVALOR, 2022  
60, boulevard Saint-Michel - 75272 Paris Cedex 06 - France  
[presses@mines-paristech.fr](mailto:presses@mines-paristech.fr)  
[www.pressesdesmines.com](http://www.pressesdesmines.com)

Illustration de couverture: champ de dilatation thermique dans une aube de turbine de moteur d'avion, calculée par la méthode des éléments finis (Cardona, 2000). © S. Forest

ISBN : 978-2-35671-840-2

Dépôt légal : 2022  
Achevé d'imprimer en 2022 (Paris)

Cette publication a bénéficié du soutien de l'Institut Carnot M.I.N.E.S

Tous droits de reproduction, de traduction, d'adaptation et d'exécution réservés pour tous les pays.

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>7</b>
<b>I THEORIE</b>	<b>11</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>13</b>
1.1 Les différentes échelles de la matière, des matériaux et des structures . . . . .	13
1.1.1 Structures, microstructures, nanostructures . . . . .	13
1.1.2 Microstructures cristallines, granulaires, cellulaires . . . . .	14
1.2 Milieux continus ou presque... . . . . .	16
1.2.1 Le rêve de Laplace et la phénoménologie . . . . .	16
1.2.2 Volume élémentaire pour la thermomécanique, représentation ponctuelle . . . . .	21
1.2.3 Fissures, discontinuités et singularités . . . . .	23
1.2.4 La vraie nouveauté : le tenseur des contraintes . . . . .	23
1.3 Le problème de fermeture et la variété des comportements . . . . .	24
1.3.1 Corps indéformables . . . . .	24
1.3.2 Lois de comportement . . . . .	24
1.4 Plan du cours . . . . .	25
1.4.1 Plan du cours oral . . . . .	25
1.4.2 Plan du cours écrit . . . . .	25
1.4.3 Liens avec les autres cours de l'Ecole des Mines de Paris . . . . .	25
<b>2 Transformations du milieu continu</b>	<b>27</b>
2.1 Enjeux physiques et faits expérimentaux . . . . .	27
2.2 Géométrie et cinématique du milieu continu . . . . .	29
2.2.1 Observateurs et référentiels . . . . .	29
2.2.2 Placement du corps matériel . . . . .	31
2.2.3 Descriptions matérielle et spatiale du mouvement . . . . .	32
2.2.4 Le gradient de la transformation . . . . .	33
2.2.5 Transports convectifs . . . . .	37
2.2.6 Décomposition polaire du gradient de la transformation . . . . .	39
2.2.7 Exemples de transformations homogènes . . . . .	40
2.3 Métriques et mesures de déformation . . . . .	44
2.3.1 Interprétation géométrique des tenseurs de Cauchy-Green . . . . .	44
2.3.2 Mesures de déformation . . . . .	46
2.3.3 Transformations infinitésimales . . . . .	51
2.3.4 Etude des déformations homogènes . . . . .	57
2.3.5 Conditions de compatibilité . . . . .	59
2.3.6 Changement de référentiel euclidien / de configuration de référence	64
2.4 Vitesses de déformation . . . . .	66

2.4.1	Dérivées par rapport au temps : champs de vitesses et d'accélération	66
2.4.2	Champ de gradient des vitesses . . . . .	67
2.4.3	Vitesses d'évolution des longueurs, angles et volumes . . . . .	70
2.4.4	Conditions de compatibilité pour le champ taux de déformation .	74
2.4.5	Changement de référentiel euclidien . . . . .	76
2.4.6	Exemples de champs de vitesses . . . . .	78
<b>3 Equations de bilan</b>		<b>81</b>
3.1	Conservation de la masse . . . . .	81
3.1.1	Masse d'un corps matériel et sa conservation . . . . .	81
3.2	Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique . . . . .	82
3.2.1	Quantité de mouvement et moment cinétique d'un corps matériel	82
3.2.2	Application de la loi fondamentale de la dynamique . . . . .	82
3.2.3	Partition des efforts appliqués à un corps matériel . . . . .	83
3.2.4	Les lois d'Euler du mouvement . . . . .	85
3.3	Analyse des contraintes : la méthode de Cauchy . . . . .	86
3.3.1	Insuffisance de la représentation pression des efforts intérieurs .	86
3.3.2	Le postulat et le théorème de Cauchy . . . . .	86
3.3.3	Les lois de Cauchy du mouvement . . . . .	90
3.3.4	Le théorème des puissances virtuelles . . . . .	93
3.4	Conservation de l'énergie . . . . .	96
3.4.1	Premier principe de la thermodynamique des milieux continus .	96
3.4.2	Formulation locale du premier principe . . . . .	97
3.5	Equations de bilan en présence de discontinuités . . . . .	99
3.5.1	Un théorème de transport . . . . .	99
3.5.2	Surface de discontinuité . . . . .	100
3.5.3	Bilan de masse . . . . .	101
3.5.4	Bilan de quantité de mouvement . . . . .	102
3.5.5	Bilan d'énergie . . . . .	104
<b>4 Le tenseur des contraintes dans tous ses états</b>		<b>105</b>
4.1	Les tenseurs de contraintes . . . . .	105
4.1.1	Représentation lagrangienne des équations d'équilibre . . . . .	105
4.1.2	Contraintes et déformations conjuguées . . . . .	106
4.1.3	Changement de base . . . . .	107
4.2	Valeurs et directions principales des contraintes . . . . .	108
4.2.1	Décomposition spectrale du tenseur des contraintes . . . . .	108
4.2.2	Contraintes normale et tangentielle, cisaillement . . . . .	109
4.2.3	Représentation de Mohr . . . . .	111
4.3	Etats de contraintes remarquables . . . . .	113
4.3.1	Etat de traction/compression simple : $(\sigma, 0, 0)$ . . . . .	113
4.3.2	Etat de cisaillement simple : $(\tau, -\tau, 0)$ . . . . .	115
4.3.3	Etat de contraintes bi-axial / contraintes planes : $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$ . . . . .	116
4.3.4	Etat de contrainte tri-axial : $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . . . . .	117
4.4	Critères en contrainte pour les matériaux isotropes . . . . .	117
4.4.1	Fonctions isotropes du tenseur des contraintes . . . . .	117
4.4.2	Pression, déviateur des contraintes . . . . .	119
4.4.3	Critère de contrainte normale maximale . . . . .	119
4.4.4	Critère de contrainte tangentielle maximale (Tresca) . . . . .	120
4.4.5	Critère de von Mises . . . . .	121

<b>5 Ecoulement des fluides parfaits incompressibles</b>	<b>123</b>
5.1 Equations d'Euler pour les fluides parfaits . . . . .	123
5.2 Théorèmes généraux pour les fluides parfaits . . . . .	124
5.2.1 Théorème d'Euler . . . . .	124
5.2.2 Théorèmes de Bernoulli . . . . .	125
5.3 Ecoulements plans irrotationnels : potentiel complexe . . . . .	126
5.4 Application à l'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	127
5.4.1 Lignes de courant . . . . .	129
5.4.2 Lignes de courant et trajectoires dans un autre référentiel . . . . .	130
5.4.3 Paradoxe de D'Alembert . . . . .	134
5.5 Obstacle sphérique dans un écoulement de fluide parfait incompressible . . . . .	134
5.5.1 Champ des vitesses autour de la sphère . . . . .	135
5.5.2 Lignes de courant autour de la sphère . . . . .	136
5.5.3 Champ de pression dans le fluide et calcul de la trainée . . . . .	136
5.6 Tourbillons libres dans un écoulement ; Portance . . . . .	136
5.6.1 Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation . . . . .	137
5.6.2 Ecoulement autour d'un cylindre avec tourbillons libres . . . . .	141
<b>6 Formulation des lois de comportement</b>	<b>147</b>
6.1 Nécessité des lois de comportement . . . . .	147
6.1.1 Décompte des inconnues et des équations . . . . .	147
6.1.2 Variété des comportements . . . . .	148
6.2 Mécanique statistique et lois de comportement macroscopiques . . . . .	150
6.2.1 Théorie cinétique des gaz . . . . .	151
6.3 Les principes de construction des lois de comportement mécanique . . . . .	153
6.3.1 Structure de l'espace physique . . . . .	153
6.3.2 Structure de l'espace matériel . . . . .	154
6.3.3 Déterminisme galiléen pour la loi de comportement viscoélastique	156
6.3.4 Les jeux de variables de la loi de comportement . . . . .	161
6.3.5 Covariance de la loi de comportement . . . . .	163
6.3.6 Mise en évidence de la propriété d'indifférence matérielle . . . . .	165
6.4 Respect des symétries matérielles . . . . .	165
6.4.1 Une définition des fluides et des solides . . . . .	166
6.5 Loi de comportement thermomécanique . . . . .	169
6.5.1 Variables thermomécaniques . . . . .	169
6.5.2 Formulation de la loi de conduction thermique . . . . .	172
6.6 Le crible de la thermodynamique des milieux continus . . . . .	172
6.6.1 Premier principe de la thermodynamique . . . . .	173
6.6.2 Second principe de la thermodynamique des milieux continus . . . . .	173
6.6.3 Loi de conduction thermique . . . . .	176
6.7 Exemples de lois de comportement illicites . . . . .	178
<b>7 Corps élastiques</b>	<b>179</b>
7.1 Elasticité . . . . .	179
7.1.1 Loi de comportement élastique . . . . .	179
7.1.2 Loi de comportement thermoélastique . . . . .	179
7.1.3 Invariance de configuration pour les corps élastiques . . . . .	181
7.1.4 Thermoélasticité isotrope . . . . .	183
7.2 Hyperélasticité . . . . .	184
7.2.1 Exploitation du second principe ; lois d'état . . . . .	184
7.2.2 Formulation lagrangienne de l'hyperélasticité . . . . .	185
7.2.3 Loi de Doyle-Ericksen . . . . .	187

7.2.4	Propriétés caractéristiques des matériaux hyperélastiques . . . . .	187
7.2.5	Hyperélasticité isotrope . . . . .	189
7.2.6	Potentiel dual $\psi_0^*$ pour les corps hyperélastiques . . . . .	193
7.3	Formulation eulérienne directe de l'hyperélasticité anisotrope . . . . .	195
7.3.1	Dérivées convectives des arguments eulériens du potentiel . . . . .	195
7.3.2	Exploitation de l'inégalité de Clausius-Duhem . . . . .	196
7.4	Hyperélasticité dans le cas de l'isotropie transverse . . . . .	197
7.4.1	Retour sur l'hyperélasticité isotrope . . . . .	197
7.4.2	Jeu de variables dans le cas isotrope transverse . . . . .	199
7.4.3	Loi d'hyperélasticité eulérienne isotrope transverse . . . . .	200
7.4.4	Loi d'hyperélasticité lagrangienne isotrope transverse . . . . .	201
7.5	Liaisons internes dans les corps élastiques . . . . .	202
7.5.1	Prise en compte de la liaison interne lors de l'exploitation du second principe . . . . .	202
7.5.2	Incompressibilité . . . . .	203
7.5.3	Rigidité . . . . .	204
7.5.4	Inextensibilité dans une direction . . . . .	204
<b>8</b>	<b>Thermoélasticité linéarisée</b>	<b>205</b>
8.1	Linéarisation de la loi des corps thermoélastiques . . . . .	205
8.1.1	Cas des déformations infinitésimales . . . . .	206
8.1.2	Cas des transformations infinitésimales . . . . .	207
8.2	Etude du tenseur d'élasticité anisotrope . . . . .	209
8.2.1	Changement de base pour les tenseurs des propriétés thermoélastiques	209
8.2.2	Rigidités et souplesses ; notation de Voigt pour les modules d'élasticité . . . . .	210
8.2.3	Analyse des symétries matérielles pour le tenseur des modules d'élasticité . . . . .	213
8.2.4	Inversion de la relation d'élasticité isotrope : module de Young et coefficient de Poisson . . . . .	217
8.2.5	Caractère défini positif du tenseur d'élasticité . . . . .	219
8.2.6	Analyse des symétries matérielles pour le tenseur des dilatations thermiques . . . . .	221
8.2.7	Notation alternative : algèbre des tenseurs d'ordre deux symétriques	222
8.3	Couplages thermoélastiques . . . . .	223
8.3.1	Contraintes d'origine thermique . . . . .	223
8.3.2	Équation de la chaleur . . . . .	226
8.3.3	Quelques conséquences du couplage thermoélastique . . . . .	229
<b>9</b>	<b>Problème d'équilibre thermoélastique linéarisé</b>	<b>233</b>
9.1	Formulation du problème d'équilibre thermoélastique linéaire . . . . .	233
9.1.1	Linéarisation des équations d'équilibre . . . . .	233
9.1.2	Formulation du problème aux limites . . . . .	234
9.1.3	Schémas de résolution . . . . .	235
9.1.4	Superposition . . . . .	240
9.1.5	Existence et unicité des solutions . . . . .	240
9.2	Exemples : traction simple et flexion pure . . . . .	242
9.2.1	Essai de traction/compression simple . . . . .	242
9.2.2	Flexion . . . . .	246
9.2.3	Principe de Saint-Venant . . . . .	252
9.3	Problèmes bidimensionnels . . . . .	255
9.3.1	Déformations planes . . . . .	255

9.3.2	Contraintes planes . . . . .	256
9.3.3	Fonctions de contraintes . . . . .	257
9.3.4	Le cas 2D et demi... . . . . .	259
9.3.5	Cas axisymétrique . . . . .	259
9.3.6	Cas antiplan . . . . .	260
<b>10</b>	<b>Théorèmes de l'énergie et encadrement</b>	<b>261</b>
10.1	Elasticité non linéaire dans le contexte infinitésimal . . . . .	261
10.1.1	Potentiel d'élasticité et potentiel dual . . . . .	261
10.1.2	Formulation du problème aux limites d'élasticité non linéaire infinitésimale . . . . .	262
10.2	Théorèmes de l'énergie en élasticité non linéaire infinitésimale . . . . .	262
10.2.1	Une application du théorème des travaux virtuels . . . . .	262
10.2.2	Formulation variationnelle du problème aux limites en déplacement	263
10.2.3	Régularité des solutions . . . . .	264
10.2.4	Théorème de l'énergie potentielle . . . . .	265
10.2.5	Formulation variationnelle du problème en contraintes . . . . .	266
10.2.6	Théorème de l'énergie complémentaire . . . . .	267
10.2.7	Encadrement de la solution . . . . .	267
10.3	Théorèmes de l'énergie dans le cas de l'élasticité linéarisée . . . . .	268
10.4	Module de Young apparent d'un cylindre encastré . . . . .	269
10.4.1	Position du problème . . . . .	269
10.4.2	Un premier encadrement du module apparent . . . . .	270
10.4.3	Améliorations de la borne supérieure . . . . .	271
<b>11</b>	<b>Fluides viscoélastiques</b>	<b>279</b>
11.1	Fluides viscoélastiques . . . . .	279
11.2	Fluides différentiels . . . . .	279
11.3	Fluides de type taux . . . . .	281
11.4	Fluides newtoniens . . . . .	282
11.5	Équations de Navier-Stokes . . . . .	283
11.6	Quelques applications aux fluides newtoniens incompressibles . . . . .	285
11.6.1	Ecoulements de Poiseuille et de Couette . . . . .	285
11.6.2	Ecoulement de Couette . . . . .	285
11.6.3	Ecoulement de Couette-Taylor entre deux cylindres . . . . .	288
11.6.4	Premier problème de Stokes . . . . .	289
11.7	Obstacle sphérique dans un écoulement de fluide de Stokes . . . . .	291
11.7.1	Champ de pression . . . . .	291
11.7.2	Détermination du champ des vitesses . . . . .	292
11.7.3	Le gradient des vitesses et contraintes déviatoriques dans le fluide	294
11.7.4	Force de trainée . . . . .	295
11.7.5	Epilogue malheureux . . . . .	297
<b>II</b>	<b>ANNEXES</b>	<b>299</b>
<b>12</b>	<b>Tenseurs</b>	<b>301</b>
12.1	Algèbre tensorielle . . . . .	301
12.1.1	Tenseurs sur un espace vectoriel $E$ . . . . .	302
12.1.2	Tenseurs euclidiens . . . . .	309
12.1.3	Algèbre extérieure et pseudo-tenseurs . . . . .	313
12.1.4	Transformations orthogonales et rotations . . . . .	317

12.2 Applications linéaires entre deux espaces vectoriels . . . . .	321
12.2.1 Déterminant (intrinsèque) d'une application linéaire . . . . .	321
12.2.2 Opérateur adjoint d'une application linéaire sur deux espaces vectoriels . . . . .	321
12.2.3 Transposition d'une application linéaire sur deux espaces vectoriels euclidiens . . . . .	323
12.2.4 Opérations de transport : images directe et réciproque . . . . .	324
12.2.5 Prenons acte de l'identification entre un espace euclidien et son dual	326
12.3 Analyse tensorielle . . . . .	327
12.3.1 Champs de tenseurs . . . . .	327
12.3.2 Opérateurs différentiels . . . . .	328
12.3.3 Intégration des champs de tenseurs . . . . .	333
12.4 Quelques résultats importants d'algèbre et analyse tensorielles en mécanique des milieux continus . . . . .	334
12.4.1 Théorème de Cayley-Hamilton et invariants d'un tenseur . . . . .	334
12.4.2 Lemme de Poincaré . . . . .	335
12.4.3 La différentielle de la fonction inverse sur les tenseurs d'ordre 2 .	335
12.4.4 La différentielle du déterminant d'un tenseur du second ordre inversible . . . . .	336
12.5 Théorèmes de représentation . . . . .	337
12.5.1 Rappels sur les groupes de symétrie . . . . .	337
12.5.2 Fonctions isotropes . . . . .	340
<b>13 Formulation des lois de conservation</b>	<b>345</b>
13.1 Forme générale d'une équation de bilan . . . . .	345
13.2 Théorèmes de transport (forme intégrale) . . . . .	345
13.2.1 Cas d'une fonction $f$ continue . . . . .	345
13.2.2 Cas d'un volume matériel . . . . .	346
13.2.3 Cas d'un volume présentant une surface singulière . . . . .	347
13.3 Equations de champ et équations aux discontinuités . . . . .	348
<b>14 Variance fondamentale des tenseurs en mécanique</b>	<b>351</b>
14.1 Gradient de la transformation et déformations . . . . .	351
14.2 Histoire des déformations . . . . .	352
14.3 Vitesses et gradient des vitesses . . . . .	352
14.4 Forces et contraintes . . . . .	353
14.5 Changements de base . . . . .	353
14.6 Déivation temporelle convective . . . . .	355
14.7 Variance et loi de comportement . . . . .	356
14.8 Variance, isotropie de l'espace et seconde loi de Newton . . . . .	356
<b>15 De Newton à Cauchy : dynamique newtonienne</b>	<b>359</b>
15.1 Définition et propriétés de la fonction fenêtre d'observation . . . . .	360
15.2 Equations de bilan déduites de la dynamique newtonienne . . . . .	361
15.3 Non-objectivité des contraintes . . . . .	364
<b>16 Invariance galiléenne et interaction entre particules</b>	<b>365</b>

<b>17 Formulaire d'analyse tensorielle</b>	<b>367</b>
17.1 Coordonnées cylindriques . . . . .	367
17.1.1 Définition des coordonnées . . . . .	367
17.1.2 Champ scalaire . . . . .	367
17.1.3 Champ de vecteurs . . . . .	367
17.1.4 Champ de tenseurs d'ordre 2 . . . . .	368
17.2 Coordonnées sphériques . . . . .	368
17.2.1 Définition des coordonnées . . . . .	368
17.2.2 Champ scalaire . . . . .	369
17.2.3 Champ de vecteurs . . . . .	369
17.2.4 Champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques . . . . .	370
<b>18 Eléments bibliographiques par thèmes</b>	<b>371</b>
<b>III PRATIQUE</b>	<b>373</b>
<b>19 Quelques transformations finies</b>	<b>375</b>
19.1 Distorsion simple . . . . .	375
19.2 Le glissement simple . . . . .	376
19.2.1 Directions propres des déformations de Cauchy-Green . . . . .	376
19.2.2 Fibres matérielles allongées et raccourcies lors du glissement . . . . .	378
19.2.3 Un festival de rotations . . . . .	380
19.2.4 Rotation relative dans le glissement de deux lignes matérielles initialement orthogonales . . . . .	382
19.3 La flexion circulaire . . . . .	388
19.3.1 Déformations et rotations par flexion circulaire . . . . .	388
19.3.2 Cas d'une transformation isochore . . . . .	390
19.3.3 Cas d'une plaque mince . . . . .	391
19.4 Gonflement et cavitation . . . . .	392
<b>20 Quelques tourbillons</b>	<b>395</b>
20.1 Le vorticimètre . . . . .	395
20.2 Le tourbillon ponctuel . . . . .	396
20.2.1 Le vorticimètre et le tourbillon ponctuel . . . . .	396
20.2.2 Cinématique du tourbillon simple . . . . .	397
20.2.3 Cas d'un assemblage rigide faisant un angle donné . . . . .	401
20.2.4 Cas d'un assemblage articulé . . . . .	403
<b>21 Déformations libres</b>	<b>405</b>
21.1 Compatibilité des déformations d'origine thermique . . . . .	405
21.1.1 Déformations infinitésimales d'origine thermique . . . . .	405
21.1.2 Déformée d'un corps soumis à un gradient de température . . . . .	407
21.2 Effet bilame . . . . .	412
21.2.1 Etat de contraintes équi-biaxiales . . . . .	413
21.2.2 Déformations des couches . . . . .	414
21.2.3 Equations de compatibilité . . . . .	414
21.2.4 Déplacements . . . . .	414
21.2.5 Contraintes dans chaque couche . . . . .	415
21.2.6 Torseur des efforts résultant . . . . .	417
21.2.7 Comparaison avec un modèle numérique . . . . .	419
21.2.8 Résolution du système . . . . .	419

21.2.9 Bilame de laiton et d'invar . . . . .	420
21.3 Mécanique des microsystèmes . . . . .	422
21.3.1 La formule de Stoney . . . . .	422
21.3.2 Contraintes dans un film mince sur un substrat . . . . .	424
21.3.3 Contraintes résiduelles dans un dépôt d'aluminium sur un substrat de silicium . . . . .	425
21.3.4 Contraintes d'épitaxie . . . . .	426
21.4 Mécanique et changement de phase à l'état solide . . . . .	427
21.4.1 Morphologie lamellaire . . . . .	428
21.4.2 Assemblage de sphères concentriques . . . . .	434
21.4.3 Plasticité dans la matrice . . . . .	440
21.4.4 Prise en compte de l'énergie d'interface . . . . .	441
21.4.5 Effet d'une charge appliquée . . . . .	443
21.4.6 Epilogue . . . . .	446
<b>22 Réservoirs sous pression</b>	<b>447</b>
22.1 Statique du réservoir sous pression . . . . .	447
22.1.1 Conditions à la frontière du tube . . . . .	447
22.1.2 Equilibre des efforts appliqués . . . . .	449
22.1.3 Considérations de symétrie . . . . .	449
22.1.4 Etablissement de quelques informations sur les contraintes au sein du tube . . . . .	450
22.1.5 Cas d'un tube fermé par une calotte de forme quelconque . . . . .	451
22.1.6 Cas d'un tube mince . . . . .	454
22.2 Elastostatique du réservoir sous pression . . . . .	455
22.2.1 Distribution des déplacements, déformations et contraintes . . . . .	455
22.2.2 Différentes conditions aux extrémités du tube . . . . .	458
22.2.3 Cas d'un tube mince . . . . .	458
22.2.4 Respect du contexte infinitésimal . . . . .	461
22.2.5 Cavité dans un massif infini . . . . .	461
22.2.6 Dimensionnement du réservoir sous pression . . . . .	461
22.3 Frettage . . . . .	465
22.3.1 Opération de frettage de deux tubes . . . . .	465
22.3.2 Caractéristiques de l'assemblage fretté . . . . .	466
22.3.3 Contraintes initiales dans l'assemblage fretté . . . . .	467
22.3.4 Assemblage fretté chargé . . . . .	468
22.3.5 Optimisation de l'assemblage fretté . . . . .	469
22.4 Sphère sous pression . . . . .	470
<b>23 Torsion</b>	<b>473</b>
23.1 Introduction . . . . .	473
23.1.1 Problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques . . . . .	473
23.1.2 Problème de Neumann pour les fonctions harmoniques . . . . .	473
23.2 Torsion élastostatique d'un barreau cylindrique . . . . .	474
23.2.1 Méthode des déplacements . . . . .	476
23.2.2 Force résultante . . . . .	478
23.2.3 Rigidité de torsion . . . . .	479
23.2.4 Méthode des contraintes . . . . .	480
23.2.5 Barre de section circulaire . . . . .	486
23.3 Au-delà du régime élastique . . . . .	487
23.3.1 Rupture fragile d'une barre de section circulaire . . . . .	487
23.3.2 Limite d'élasticité d'une barre à section circulaire en torsion . . . . .	488

23.4 Torsion de barres à sections elliptiques et triangulaires . . . . .	488
23.4.1 Préliminaire : retour sur les fonctions de gauchissement et fonction de contrainte . . . . .	489
23.4.2 Torsion d'une barre de section elliptique . . . . .	490
23.4.3 Torsion d'une barre de section triangulaire . . . . .	497
<b>24 Le problème de Saint-Venant</b>	<b>503</b>
24.1 Statique du problème de Saint-Venant . . . . .	504
24.1.1 Une propriété remarquable des contraintes . . . . .	504
24.1.2 Forme des contraintes dans le problème de Saint-Venant . . . . .	505
24.1.3 Détermination des contraintes de cisaillement . . . . .	506
24.1.4 Condition sur les surfaces latérales de la poutre . . . . .	508
24.1.5 Centre de torsion . . . . .	509
24.2 Poutre de section quelconque soumise à un effort tranchant . . . . .	510
24.2.1 Contraintes dans la poutre en flexion simple . . . . .	512
24.2.2 Détermination des déplacements . . . . .	515
24.2.3 Cas d'une poutre de section circulaire . . . . .	518
24.2.4 Epilogue : retour sur le problème de Saint-Venant . . . . .	524
<b>25 Machines tournantes</b>	<b>525</b>
25.1 Expressions simplifiées de la réponse élastique linéarisée d'un disque mince en rotation . . . . .	525
25.1.1 Efforts centrifuges . . . . .	526
25.1.2 Forme du tenseur des contraintes . . . . .	528
25.1.3 Une condition de compatibilité . . . . .	528
25.1.4 Détermination des contraintes . . . . .	529
25.1.5 Déformations et déplacements . . . . .	529
25.1.6 Contexte infinitésimal . . . . .	532
25.1.7 Contact avec le carter et prise en compte de l'aubage . . . . .	533
25.2 Critères de plasticité et de rupture . . . . .	534
25.2.1 Seuil de plasticité et vitesse critique pour le disque mince alésé . . . . .	534
25.2.2 Vitesse critique pour un disque en superalliage à base de nickel . . . . .	536
25.2.3 Rupture brutale . . . . .	536
25.2.4 Cas où le rayon de l'alésage est très faible . . . . .	536
25.2.5 Cas d'un disque mince non alésé . . . . .	539
25.3 Solution au sens de Saint-Venant du problème du disque . . . . .	541
25.3.1 Expressions générales des contraintes . . . . .	541
25.3.2 Équations de compatibilité . . . . .	541
25.3.3 Détermination complète des contraintes . . . . .	544
25.3.4 Déformations et déplacements . . . . .	546
25.3.5 Comparaison avec une solution numérique obtenue par la méthode des éléments finis . . . . .	548
25.4 Contraintes planes pour un cylindre de longueur finie . . . . .	549
25.4.1 Approche par les équations de Beltrami en coordonnées cylindriques . . . . .	549
25.4.2 Interprétation des termes de la solution . . . . .	555
25.4.3 Complément à l'étude des contraintes planes . . . . .	556
25.5 Arbres en rotation . . . . .	557
25.5.1 Mise en œuvre de la méthode de déplacements . . . . .	557
25.5.2 Vitesse critique pour un arbre en rotation . . . . .	559
25.5.3 Epilogue . . . . .	560

<b>26 Concentrations de contraintes</b>	<b>561</b>
26.1 Préliminaire : fonction de contraintes et coordonnées cylindriques . . . . .	561
26.2 Contraintes dans une plaque trouée en traction . . . . .	562
26.2.1 Champ de contraintes loin du trou . . . . .	563
26.2.2 Forme générale des contraintes . . . . .	564
26.2.3 Prise en compte des conditions à la frontière . . . . .	564
26.3 Concentration de contrainte au bord du trou . . . . .	566
26.3.1 Facteur de concentration de contrainte . . . . .	566
26.3.2 Plasticité et rupture . . . . .	569
26.4 Déformations et déplacements . . . . .	570
26.4.1 Détermination partielle des déformations et des déplacements . . . . .	572
26.4.2 Précision du contexte infinitésimal . . . . .	574
26.4.3 Déformée du trou . . . . .	574
26.5 Plaque trouée sollicitée en traction plane . . . . .	575
26.5.1 Etude de la traction plane . . . . .	576
26.5.2 Plaque trouée en déformations planes . . . . .	577
26.6 Comparaison avec des simulations numériques 3D . . . . .	578
26.7 Trou elliptique dans une plaque . . . . .	585
26.7.1 Contrainte au bord du trou elliptique . . . . .	585
26.7.2 Cas d'une sollicitation perpendiculaire au grand axe de l'ellipse . . . . .	586
26.7.3 Cas d'une sollicitation parallèle au grand axe de l'ellipse . . . . .	588
26.7.4 Cas d'une ellipse infiniment aplatie sollicitée en traction dans une direction quelconque $0 < \alpha < \pi/2$ . . . . .	588
26.7.5 Expérience de mécanique de la rupture . . . . .	590
26.8 Différence entre le trou elliptique aplati et la fissure . . . . .	593
26.8.1 Champ de contraintes en pointe de fissure . . . . .	594
26.8.2 Quelques paradoxes liés à la rupture . . . . .	595
26.8.3 Un critère simple de bifurcation de fissure . . . . .	597
26.8.4 Trou elliptique infiniment aplati chargé en mode II . . . . .	599
26.8.5 Comportement asymptotique de trous de formes plus générales . . . . .	601
26.9 Cavités sphériques et ellipsoïdales dans un massif . . . . .	601
26.10 Epilogue . . . . .	602
<b>27 Matériaux composites</b>	<b>603</b>
27.1 Inclusion cylindrique hétérogène dans une matrice élastique et application aux composites à fibres longues . . . . .	603
27.1.1 Contraintes et déformations dans l'inclusion pour la traction transverse . . . . .	603
27.1.2 Concentration de contraintes dans la matrice pour la traction transverse . . . . .	606
27.1.3 Extension au chargement biaxial quelconque . . . . .	608
27.1.4 Application aux composites à fibres longues . . . . .	608
<b>28 Dislocations de Volterra</b>	<b>613</b>
28.1 Dislocation-vis . . . . .	614
28.1.1 Champ de déplacements . . . . .	615
28.1.2 Vecteur de Burgers . . . . .	615
28.1.3 Champs de contraintes et de déformations . . . . .	616
28.1.4 Equilibre et conditions aux limites en contraintes . . . . .	616
28.1.5 Energie élastique d'une dislocation-vis . . . . .	617
28.1.6 Cas où $r_i \rightarrow 0$ . . . . .	617
28.1.7 Influence du choix du plan de coupure . . . . .	617

28.1.8	Torseur résultant . . . . .	618
28.1.9	Solution exacte au sens de Saint-Venant . . . . .	619
28.2	Dislocation-coin . . . . .	620
28.2.1	Equilibre local et conditions aux limites . . . . .	620
28.2.2	Contraintes réduites . . . . .	621
28.2.3	Contexte des déformations planes . . . . .	621
28.2.4	Moment résultant . . . . .	621
28.2.5	Déformations et déplacements . . . . .	622
28.2.6	Energie d'une dislocation-coin . . . . .	624
28.2.7	Dislocation-coin équivalente . . . . .	625
28.3	Dislocations mixtes . . . . .	626
28.4	Compatibilité générale . . . . .	627
28.4.1	Retour sur la compatibilité . . . . .	627
28.4.2	Domaines non simplement connexes . . . . .	629
28.5	Dislocations dans les cristaux . . . . .	630
<b>29</b>	<b>Forces concentrées, forces distribuées</b>	<b>633</b>
29.1	Distribution de pression appliquée le long d'une gouttière . . . . .	633
29.1.1	Conditions aux limites . . . . .	633
29.1.2	Champ de contraintes . . . . .	634
29.1.3	Champ de déformations . . . . .	634
29.1.4	Expression des déplacements dans le plan . . . . .	635
29.1.5	Conditions aux limites en déplacements et déplacements finaux .	636
29.1.6	Respect du contexte infinitésimal . . . . .	637
29.1.7	Energie élastique stockée . . . . .	638
29.1.8	Limite d'élasticité . . . . .	638
29.2	Le problème de Flamant . . . . .	638
29.2.1	Formulation du problème . . . . .	638
29.2.2	Contraintes de Flamant . . . . .	639
29.2.3	Visualisation par photoélasticité . . . . .	639
29.2.4	Caractère pathologique de la solution de Flamant . . . . .	640
29.3	Distribution de pression sur un massif . . . . .	640
29.3.1	Question préliminaire . . . . .	640
29.3.2	Champ de contraintes dans le massif . . . . .	640
29.3.3	Régularité des contraintes . . . . .	643
29.3.4	Respect du contexte infinitésimal . . . . .	643
29.3.5	Limite d'élasticité . . . . .	644
29.3.6	Déformée de la surface . . . . .	645
29.4	Le problème de Flamant général . . . . .	645
29.5	L'essai brésilien de compression diamétrale . . . . .	647
29.5.1	Champ de contrainte dans un disque en compression diamétrale .	648
29.5.2	Etude du champ des déformations . . . . .	656
29.5.3	Considération de conditions aux limites plus réaliste . . . . .	658
<b>30</b>	<b>Gravitation et électromagnétisme</b>	<b>663</b>
30.1	Dimensionnement d'un barrage-poids . . . . .	663
30.1.1	Critère de non glissement du barrage . . . . .	663
30.1.2	Etude du barrage dans le cas $\alpha = 0$ . . . . .	665
30.1.3	Etude du barrage dans le cas général . . . . .	673
30.2	Contraintes dans les bobines de champs magnétiques . . . . .	677
30.2.1	Forces de volume d'origine électromagnétique . . . . .	678
30.2.2	Solénoïde renforcé par une frette en acier . . . . .	685

30.3	Contraintes dans les corps célestes . . . . .	689
30.3.1	Préliminaires . . . . .	689
30.3.2	Planète fluide . . . . .	692
30.3.3	Planète solide . . . . .	693
30.3.4	Détermination complète du déplacement . . . . .	694
30.3.5	Étude des déformations de la planète . . . . .	696
30.3.6	Planète possédant un noyau fluide et un manteau solide . . . . .	699
30.3.7	Discussion des résultats . . . . .	701
30.3.8	Complément : aplatissement aux pôles . . . . .	704
<b>31</b>	<b>Aubes de turbines monocrystallines</b>	<b>707</b>
31.1	Préliminaire : le tenseur d'élasticité cubique . . . . .	708
31.1.1	Le groupe d'invariance de configuration pour la classe de symétrie cubique . . . . .	708
31.1.2	Tenseur de structure de l'élasticité cubique . . . . .	708
31.1.3	Potentiel d'élasticité cubique linéarisée . . . . .	709
31.1.4	Le tenseur d'élasticité linéaire cubique . . . . .	710
31.1.5	Équivalence avec la notation matricielle usuelle . . . . .	711
31.2	Traction simple d'une barre monocrystalline en élasticité cubique . . . . .	712
31.2.1	Calcul de la déformation de traction . . . . .	713
31.2.2	Module de Young dans la direction $\underline{d}$ . . . . .	713
31.2.3	Module de Young selon trois directions du cristal . . . . .	714
31.2.4	Modules de Young extrêmaux . . . . .	715
31.3	Torsion d'une barre monocrystalline en élasticité cubique . . . . .	717
31.3.1	Torsion d'une barre parallèle à $\underline{k}$ . . . . .	717
31.3.2	Torsion d'une barre d'axe parallèle à $\underline{i} + \underline{k}$ . . . . .	719
31.4	Critère de plasticité cubique . . . . .	721
31.4.1	Limite d'élasticité en traction simple . . . . .	722
31.4.2	Limite d'élasticité en torsion . . . . .	724
<b>Références bibliographiques</b>		<b>727</b>
<b>Index</b>		<b>737</b>

## Avant-propos

*La seconde rencontre avec le fouet à crème eut lieu après un quart de tour à droite exécuté par Ida, tandis que Franz restait dans la position initiale. Après quoi, Ida ne souffla mot, elle avait la bouche ouverte et les deux bras levés en l'air.*

*Ce qui, à l'instant, venait de se passer avec le thorax de cette fille, était en rapport avec les lois de la fixité et de l'élasticité, du choc et de la résistance. Quiconque ne connaît pas ces lois, n'y comprendra goutte. Aussi nous faut-il recourir aux formules suivantes :*

*La première loi de Newton (se prononce Ni-ou-tone) qui s'énonce ainsi : chaque corps reste en repos tant qu'une force extérieure n'intervient pas pour modifier cet état (se rapporte aux côtes d'Ida). La seconde loi newtonienne sur les mouvements des corps dit que la variation d'un mouvement est proportionnelle à la force qui en est la cause et dont cette variation partage la direction (en l'occurrence la force agissante est Franz, c'est-à-dire son bras et son poing plus l'arme qu'il brandit).*

*On calcule cette force d'après la formule suivante :*

$$f = c \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = c w.$$

*L'accélération, fonction de la force, autrement dit, le degré de variation, est exprimée par la formule :*

$$\Delta v = \frac{1}{c} f \Delta t.$$

*D'après cela, il faut s'attendre à une chose qui, en effet, eut lieu par la suite : le ressort du fouet se comprime, le manche en bois frappe. Dans le camp adverse : – celui de l'inertie et de la résistance – fracture de la septième et de la huitième côte dorsale gauche.*

*Cette façon bien moderne d'envisager la question nous dispense de recourir aux Euménides et nous sommes à même de nous rendre compte, point par point, de l'attitude de Franz et des souffrances d'Ida. Pas d'inconnue dans l'équation.*

Alfred Döblin, Berlin Alexanderplatz<sup>a</sup>, 1929.

---

<sup>a</sup>. Edition Folio, traduit de l'allemand par Zoya Motchane.

*Depuis cinquante ans les mathématiciens s'abattent sur notre malheureuse Université comme une armée de criquets néfastes et encombrants. On n'a même pas la consolation de les manger au court-bouillon, comme les criquets d'Algérie. Fourrés dans tous les coins, ils remplissent toutes les places avec une égale compétence. Ils mettent partout le désordre, grâce à leur ignorance foncière de ce qui n'est pas x plus y moins z. Ils ont tout gâché, déversant leur incomparable bêtise sur les sciences les plus étrangères à leurs habituelles occupations, y compris la philosophie des sciences.*

*Ils ont perverti les enseignements fondamentaux. Celui de la Mécanique n'existe plus en France, parce que les professeurs de Mécanique ne sont que des mathématiciens camouflés, connaissant peut-être les équations de la Mécanique, mais ignorants comme des carpes des phénomènes qu'elles représentent. Nulle part en France la Théorie de l'Elasticité n'est exposée d'une façon raisonnable, parce que les mathématiciens qui s'en chargent ignorent ses relations avec la Théorie de la Résistance des Matériaux. L'Hydrostatique, l'Hydrodynamique deviennent prétexte à des développements mathématiques n'ayant avec le réel pas le moindre rapport. Bref, toutes les sciences qui sont à la base de l'art de l'Ingénieur sont en France des repaires à équations, des antres à théorèmes, des formes vides, des caricatures du bon sens.*

Henri Bouasse, *Théorie de l'élasticité*, éditions Delagrave, 1947.

Le cours s'adresse aux étudiants d'écoles d'ingénieurs, de licence et de master, et ne sera pas inutile aux doctorants, enseignants-chercheurs et ingénieurs. Il résulte de l'enseignement réalisé en première année de l'Ecole des Mines de Paris depuis 2005. Il a trois objectifs :

- décrire quelques phénomènes physiques observés dans les milieux continus déformables (ordres de grandeur, méthodes de mesure de ces grandeurs) ;
- mettre à profit les acquis d'algèbre linéaire des élèves pour proposer une lecture ambitieuse et rigoureuse du problème de la formulation des lois de comportement des solides et des fluides, en fournissant un cadre systématique à l'établissement de ces lois ;
- formuler et entreprendre la résolution d'un problème aux limites de physique des milieux continus.

Le pari consiste à aborder ces points en un nombre très réduit de séances orales. On a choisi de présenter le cours écrit comme un *handbook* qui pourra être consulté au-delà du tronc commun lors des stages, séjours à l'étranger, voire recherches futures des étudiants, en espérant qu'ils y trouvent des débuts de réponse à des questions qu'ils n'auront pas eu le temps de se poser en première année d'école d'ingénieurs.

Il existe de nombreux livres en français sur la mécanique des milieux continus déformables. On voit deux originalités principales au présent ouvrage. D'abord un soin tout particulier est dévolu à la question de la formulation des lois de comportements, traitée de manière souvent confuse et mystérieuse dans la littérature. Ensuite, les ouvrages existants proposent en général un nombre limité d'exercices et de problèmes traités de manière trop brève. Au contraire, le second volume de ce cours fait la part belle à des problèmes explorés en profondeur et donnant lieu à des remarques détaillées et des prolongements multiples. Les résultats analytiques sont illustrés par des calculs numériques

par éléments finis.

La première partie du cours écrit contient des résultats majeurs obtenus essentiellement dans les 200 dernières années par des mécaniciens, physiciens, thermodynamiciens et mathématiciens, depuis les briques fondamentales posées dans la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle (on notera en particulier la remarquable contribution française dans ce domaine grâce aux Navier, Cauchy et autres Saint-Venant) jusqu'aux développements de la fin du XX<sup>e</sup> siècle en particulier dans le domaine des lois de comportement en liaison avec le développement de la science des matériaux. La mécanique des milieux continus a connu un renouveau au début des années 1960 lorsque des auteurs comme Clifford Truesdell aux USA, et Paul Germain en France, ont entrepris d'axiomatiser cette discipline, non sans excès et défaillances qu'il s'agit aujourd'hui encore de surmonter. Le caractère systématique de leur construction a permis de conférer à la discipline une grande unité notamment en ce qui concerne la présentation des comportements fluides et solides. Dans la préface de son cours (Truesdell, 1977) (ou sa version française (Truesdell and Euvrard, 1974)), Truesdell écrit<sup>1</sup>

*"As Lagrange wrote<sup>2</sup>, "On ne trouvera point de Figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose, ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme." This claim is as true—or as false—of the present book as of Lagrange's. Of course, many proofs are easier to grasp if a figure is drawn, and both teacher and student should illuminate and enrich the regular and uniform course by sketches."* Il va sans dire que les applications et illustrations dans le domaine de la mécanique des structures et des matériaux jouent ici un rôle essentiel et devront augmenter en nombre dans le futur de cet ouvrage.

La démarche de modélisation est illustrée dans le cas du comportement viscoélastique des matériaux solides et fluides qui s'appuie sur la représentation d'une fonctionnelle héréditaire de la déformation. L'approche dite par variables internes des lois de comportement pour les milieux continus, plus pragmatique, développée notamment par des auteurs comme Jean Mandel, Paul Germain, NGuyen Quoc Son et Jean-Louis Chaboche, a marqué l'essor de la mécanique non linéaire de la fin du siècle dernier. Elle sera abordée dans des cours ultérieurs de mécanique des solides.

Le second volume présente des applications étendues de la mécanique des milieux continus à la thermoélasticité des structures. Y sont abordés des problèmes fondamentaux tels que la déformation des barres, l'application de forces concentrées et le calcul des concentrations de contrainte. S'y ajoutent quelques éléments de cinématique des transformations finies et d'écoulement des fluides parfaits ou visqueux. Quelques problèmes de grande importance industrielle concernent certains aspects de la mécanique des réservoirs sous pression, des disques de turbine, des barrages en génie civil et des couplages électromagnétiques.

Ces problèmes sont présentés sous la forme de questions suivies des réponses précédées du signe ►. Le livre est imprimé en noir et blanc mais il existe une version pdf associée dans laquelle les figures sont en couleur et les corrigés sont en bleu. Le signe □ en bout de ligne indique la fin d'une preuve.

Le contenu du présent document tire très largement profit de l'enseignement de Michel Amestoy, professeur de mécanique des milieux continus à l'Ecole des Mines de 1989 à

1. Voir aussi le commentaire de R.W. Cahn sur la contribution de Truesdell dans (Cahn, 2001).

2. dans son ouvrage *Mécanique analytique*, 1788.

2004, succédant à Louis Brun et Jean Mandel dans ce cours. J'ai assisté deux fois au cours de Michel Amestoy, en 1989 puis en 2003. On en retrouvera de très nombreux aspects tout au long du cours écrit. Par ailleurs, les chapitres consacrés à la question de la formulation des lois de comportement s'appuient largement sur les résultats de ses profondes réflexions dans les quinze dernières années, alimentées par des discussions régulières et stimulantes. Je remercie également Patrick Ballard qui a mis à disposition ses rédactions des corrigés d'exercices du cours de M. Amestoy.

Il n'en demeure pas moins que l'ouvrage n'aborde qu'une partie limitée des problèmes de la mécanique des milieux continus, laissant de côté par exemple les théories de poutres et de plaques, la question de la plasticité des matériaux ou des applications plus étendues aux transformations finies, et bien d'autres richesses de la discipline. De même les applications en mécanique des fluides sont encore trop peu nombreuses dans l'ouvrage.

L'équipe enseignante pour le cours oral a corrigé et alimenté à maintes reprises le texte de ce livre. Qu'ils en soient tous chaleureusement remerciés : Moubine Al Kotob (Safran AeroEngines), Anna Ask (ONERA), Sabine Cantournet (Mines Paris), Gilles Damamme (CEA-DAM), Sylvia Feld-Payet (ONERA), Serge Kruch (ONERA), Laurent Lacourt (Mines Paris), Aldo Marano (ONERA), Vincent Maurel (Mines Paris), Matthieu Mazière (Mines Paris) et Vladislav Yastrebov (Mines Paris).

Il subsiste cependant encore de nombreux défauts dans ce texte. Je remercie le lecteur de me les signaler. Une nouvelle version sera éditée chaque année permettant de corriger les bêtises les plus criantes mais aussi d'enrichir le contenu.

Samuel Forest  
Paris, juin 2022 pour la préface à la première édition

**Première partie**

**THEORIE**



# 1 Introduction

Les objets de la mécanique des milieux continus sont la matière sous ses formes fluides (liquides, gaz, plasmas...) et solides (cristallins ou amorphes), les matériaux et les structures qui sont des assemblages d'éléments de matériaux ou de sous-structures. On étudie leurs mouvements sous l'action de forces, et les variations de mouvement d'un point matériel à un autre. La variable température influence aussi le mouvement de ces objets et doit donc être prise en compte dans le cadre plus général de la thermomécanique des milieux continus.

La modélisation en mécanique des milieux continus est un dialogue incessant et subtile entre **le discret et le continu** dans le but de trouver l'outil de modélisation le plus efficace pour un objectif donné.

## 1.1 Les différentes échelles de la matière, des matériaux et des structures

On rencontre ces objets à différentes échelles allant du nanomètre (assemblages atomiques) au kilomètre, voire au-delà (écorce et manteau terrestres, planètes et étoiles). Chaque objet, même s'il a l'air tout à fait homogène, est en fait une **structure multi-échelles**, c'est-à-dire qu'il présente des niveaux d'hétérogénéité à différentes échelles que l'on pourra ou non modéliser par la mécanique des milieux continus selon les objectifs poursuivis. Les mêmes outils, développés dans le cadre conceptuel de la mécanique des milieux continus, pourront être utilisés pour un grand nombre problèmes à des échelles très variées.

### 1.1.1 Structures, microstructures, nanostructures

L'inventaire des structures dont s'occupent les ingénieurs et les chercheurs en mécaniques est aujourd'hui très large. Il s'étend sur toutes les échelles d'observation. On distingue

- Les **structures** à proprement parler : structures du génie civil qui font appel souvent au béton et à l'acier (figure 1.1(a)), composants et pièces industriels qu'il soient en alliages métalliques (aubes de turbines d'alternateurs ou de moteurs d'avion, figure 1.1(b), polymères (pièces moulées ou injectées de la vie courante), ou céramiques (fours, filtres...)). Ces structures sont omniprésentes dans le transport, l'énergie, etc., et posent les problèmes de leur construction, fabrication, élaboration ou mise en forme, mais aussi de leur tenue en service (vibrations, charges limites, fatigue...). En particulier, on s'intéresse à l'équilibre de ces structures pour connaître les charges qu'elles supportent. On peut alors envisager s'il est possible d'optimiser la forme des pièces et le type de matériau utilisé en minimisant le coût et l'impact sur l'environnement. Pour chacune de ces questions la mécanique des milieux continus est mise à contribution.
- Les **sols**, c'est-à-dire des **géomatériaux** mais aussi leurs revêtements. On peut aussi mentionner les problèmes de tenue à long terme de chaussées, de cavités de stockage ou d'extraction (mines, enfouissement des déchets...).
- Les **MEMS** (*micro-electro-mechanical systems*) représentent depuis une dizaine d'années un domaine d'investigation affiché de la mécanique des milieux continus. Il s'agit d'assurer une élaboration de précision (contraintes résiduelles...) et de prévoir la tenue en service de composants de l'électronique par exemple, qui sont soumises à des sollicitations de fatigue thermomécanique sévères. Dans une large mesure, estimer la durée de vie d'un microprocesseur relève de la même science mécanique que le dimensionnement d'un joint de culasse automobile ! On rencontre en particulier des circuits d'interconnexion en cuivre (figure 1.1).
- Les **nanostructures** apparaissent comme l'aboutissement de la miniaturisation de nombreux systèmes mécaniques (figure 1.1(e)). Certaines molécules géantes,

comme les nano-tubes de carbone de la figure 1.1(f) dont le panel d'applications possibles ne cesse de s'élargir, peuvent être traitées comme des objets de la mécanique des milieux continus (en l'occurrence des coques en grandes transformations élastiques) pour prévoir leur modes de déformation.

La connaissance des propriétés des matériaux et des structures nécessite la réalisation d'essais mécaniques dont la complexité et la richesse de l'exploitation augmente d'année en année. On distingue les essais sur **éprouvettes** dont l'objectif est la caractérisation des propriétés thermomécaniques d'un matériau, des essais sur structures dont on cherche à déterminer les points faibles. On donne en général une forme simple aux éprouvettes pour faciliter l'interprétation des résultats tandis que les essais instrumentés sont aujourd'hui possibles sur des structures très complexes. Le passage des informations de l'éprouvette à la structure est parfois délicat en raison de l'existence d'**effets d'échelles**. La rupture de pièces en béton ou en acier dépend en général du volume de matière sollicité en raison de la présence inévitable de défauts dont la répartition statistique doit être connue. Les questions de **fiabilité des structures** sont aujourd'hui au cœur des démarches de normalisation avec pour objectif des composants plus sûr dans les transports, l'énergie... Des notions probabilistes doivent alors être associées à la mécanique des milieux continus purement déterministe présentée dans ce cours.

### 1.1.2 Microstructures cristallines, granulaires, cellulaires

La notion de milieu continu envisagée contraste avec la nature intrinsèquement **discrète** des objets techniques ou naturels qui nous entourent. Le passage au continu est souhaité dans la mesure où il évite de considérer une multitude de détails au bénéfice de la connaissance de quelques fonctions présentant autant de régularité que possible. Il résulte d'abord d'un pari fait sur la matière mais aussi de conditions statistiques bien identifiées qui ne seront qu'évoquées dans cette introduction. Le caractère discret de la matière se manifeste sous la forme d'**hétérogénéités** présentes à toutes les échelles :

- **Structure cristalline.** Les atomes constituent l'échelle d'hétérogénéité indiscutable commune à tous les matériaux. Ils sont arrangés de manière ordonnée dans de nombreux matériaux métalliques et céramiques, ou désordonnée dans les verres, la plupart des polymères, les liquides et les gaz. La structure cristalline joue un rôle fondamental sur la déformation de ces solides aussi bien dans le cas de comportements linéaires que non linéaires. La figure 1.2(a) montre des rangées d'atomes observées au microscope électronique à transmission, qui définissent des orientations privilégiées du cristal. Lorsque cet ordre s'étend à l'ensemble du solide, il s'agit d'un monocristal. On retrouve alors au travers des propriétés physiques macroscopiques (optiques, thermiques, électriques, mécaniques...) des symétries issues de la structure de la matière.
- **Structure granulaire.** En général les matériaux cristallins sont plutôt des assemblages de cristaux appelés grains, chaque grain possédant une orientation cristalline privilégiée. Il s'agit de **polycristaux**. Les grains sont séparés par des joints qui, en l'absence d'endommagement, garantissent la continuité du mouvement de la matière et la transmission d'efforts (figure 1.2(a)). La taille des grains varie en général entre  $1\mu\text{m}$  et quelques mm voire centimètres. On en voit d'ailleurs souvent les reflets sur certaines pièces métalliques revêtues d'un dépôt de zinc par galvanisation (figure 1.2(b)). On cherche aujourd'hui à produire et utiliser des alliages à grains ultra-fins, voir nanométriques, en raison de leur extrême dureté et résistance à l'usure. La structure granulaire se retrouve aussi dans les roches et même, avec une structure plus complexe toutefois, dans les polymères semi-cristallins (figure 1.2(c) et (d)).
- **Structure cellulaire.** Les grains ne représentent pas la seule façon de pavir l'espace tridimensionnel. On y parvient aussi à l'aide de l'assemblage de cellules

(polyèdres) comme dans les mousses liquides ou solides. Les matériaux obtenus sont très légers mais considérablement plus souples. Cela permet de concevoir des structures légères comme les structures en nid d'abeilles (en aluminium sur la figure 1.2(e)), très utilisées dans l'aéronautique, dont la microstructure est strictement périodique et offre une forte rigidité selon l'axe des cellules. Pour absorber des chocs sous des charges limitées, on préférera les mousses de polyuréthane très employées pour l'emballage et dont la microstructure est identique à celle présentée sur la figure 1.2(f) (cellules de dimension 0.5mm).

Les niveaux d'hétérogénéités imbriqués atomique et granulaire jouent chacun à sa façon un rôle décisif sur le comportement mécanique résultant. Par exemple, les cristaux individuels ont des propriétés **anisotropes**, c'est-à-dire dépendantes de la direction selon laquelle on les sollicite. Le polycristal, quant à lui, s'il contient de très nombreux grains avec des orientations très variées, pourra avoir des propriétés **isotropes**, i.e. indépendantes de la direction de sollicitation. Il est important alors de savoir statuer sur le degré de connaissance de la microstructure requis pour l'application mécanique visée.

On verra dans ce cours que la connaissance des propriétés de symétrie que présente le milieu étudié permet de préciser et de simplifier l'écriture des lois de comportement des matériaux. Les symétries des propriétés physiques et mécaniques sont étroitement liées aux symétries géométriques que peut présenter la microstructure du matériau. On montre par exemple que la symétrie hexagonale qui caractérise le nid d'abeilles de la figure 1.2(e) implique que le comportement élastique dans le plan de la figure est isotrope.

#### *Ecoulements multiphasiques et fluides chargés*

Les niveaux d'hétérogénéités sont différents mais existent bel et bien dans les fluides. Au-delà du niveau atomique, on est souvent confronté à l'écoulement de fluides possédant plusieurs constituants : mélanges liquides-gaz (sous forme de bulles), suspensions (particules transportées par un liquide, notamment dans les problèmes de filtration), émulsions (mélange de deux liquides, mayonnaise...), gels, états pâteux lors de la solidification... De tels mélanges peuvent être abordés par la mécanique des milieux continus avec un raffinement et une complexité de la théorie dépendant du type d'informations attendues. Les écoulement de fluides chargés de particules ou de fibres sont mis à contribution pour fabriquer de nombreuses pièces en composites par injection de polymère fondu chargé par exemple de fibres de verre. Les propriétés de telles écoulements sont très complexes mais doivent être connues avec suffisamment de précision pour éviter les défauts majeurs dans les pièces. Des modèles continus existent aujourd'hui capables de prévoir l'apparition d'orientations privilégiées des fibres lors de l'écoulement dans certaines parties du moule. On verra qu'un tel polymère chargé est un milieu qui tient à la fois du solide et du fluide...

#### *Structures naturelles, matériaux du vivant, biomécanique*

Les matériaux issus du monde du vivant (bois, cellulose...) ont des propriétés mécaniques séduisantes souvent associées à des microstructures complexes multi-échelles. La nature donne des idées aux élaborateurs de matériaux nouveaux. On mentionne le cas de composites polymères renforcés par des fibres de cellulose.

Les substituts des matériaux du vivant, appelés **biomatériaux**, ont été conçus pour remplacer des organes ou os défectueux. Il s'agit de matériaux du vivant (collagène, cellulose...) ou synthétiques biocompatibles (polymères, alliages de titane ou céramiques pour les prothèses de hanche...).

La bio-mécanique est une discipline bien établie qui s'appuie, d'une part sur la mécanique des solides rigides (modélisation des articulations et des mouvement du squelette par exemple) et, d'autre part, sur la mécanique des milieux continus déformables lorsqu'il

s'agit par exemple de prévoir les déformations du corps humain lors d'un choc automobile. La figure 1.5 illustre une étude de l'élasticité de l'os trabéculaire à partir de la microstructure réelle tridimensionnelle de l'os.

L'écoulement du sang est quant à lui un problème redoutable puisqu'il s'agit d'un fluide chargés de globules dont la taille devient parfois non négligeable devant le diamètre de certains vaisseaux. Il existe dès lors toute une hiérarchie de modèles de fluide visqueux permettant de modéliser l'écoulement du sang avec un degré de précision variable et dans des conditions saines ou accidentelles.

## 1.2 Milieux continus ou presque...

La notion de point ou particule matérielle joue un rôle essentiel dans la modélisation du milieu continu. Il faut donc la définir aussi précisément que possible par rapport à la connaissance que l'on a acquise sur la microstructure des matériaux.

### 1.2.1 Le rêve de Laplace et la phénoménologie

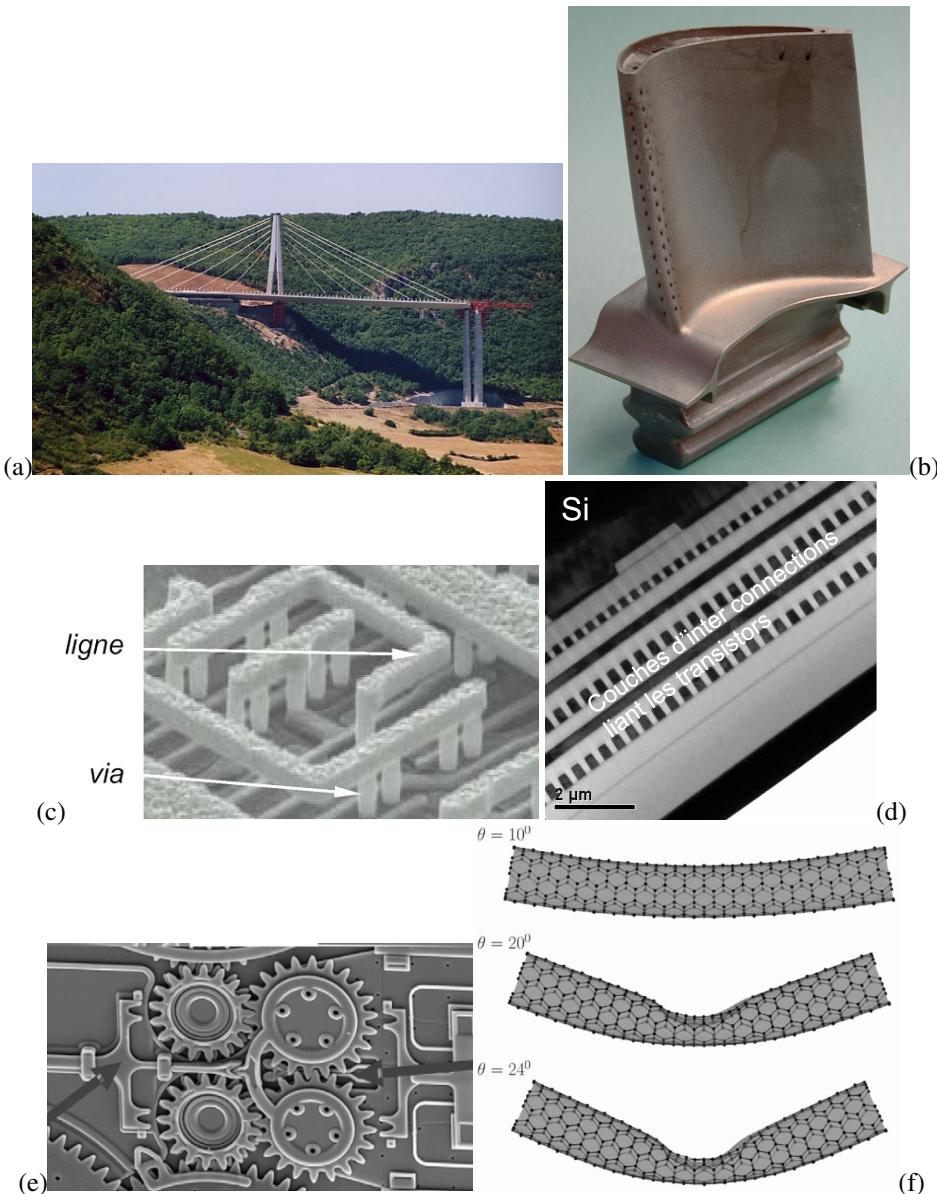
L'idée de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), énoncée à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, selon laquelle il doit être possible de décrire les phénomènes de la nature à partir de la connaissance des efforts à distance de molécule à molécule, a fortement marqué le développement exceptionnel de la mécanique des milieux continus en France dans la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. Claude Navier (1785-1836) et Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) ont adopté cette démarche pour établir les équations d'équilibre dans les milieux élastiques. Sans une vision claire de la structure et des interactions entre atomes dans les solides cristallins (on parlait alors de "l'hypothèse moléculaire")<sup>1</sup>, ces deux géants de la mécanique ont pensé qu'il fallait déduire les équations de la mécanique macroscopique à partir de l'analyse des interactions entre particules élémentaires. A l'opposé, l'anglais Georges Green (1793-1841) propose une théorie purement **phénoménologique** du mouvement des solides élastiques qui consiste à relier directement les grandeurs de force et de mouvement définies à l'échelle du solide étudié, sans se soucier de la microstructure sous-jacente. On renvoie à l'ouvrage (Timoshenko, 1983) pour le récit de cette controverse des élasticiens du XIX<sup>e</sup> siècle. L'approche phénoménologique grâce à son pragmatisme est finalement celle adoptée en général dans les cours et la pratique de la mécanique des milieux continus depuis lors. Ses succès sont évidents dans la pratique.

Il est toutefois tentant aujourd'hui de remettre à l'ordre du jour la proposition de Laplace. La connaissance de la structure atomique ou moléculaire de la matière a atteint des raffinements inédits. Les ordinateurs offrent aujourd'hui des capacités de calcul vertigineuses, en particulier grâce au calcul parallèle. Les tentatives de construction mécanique du macroscopique à partir des informations issues des échelles micro et nanoscopiques se multiplient aujourd'hui sur les plans théoriques et numériques. Elles apportent indéniablement des informations fondamentalement nouvelles. Elles ne sauraient détrôner cependant la démarche phénoménologique pour les deux raisons explicitées ci-dessous. Les approches "mécanistes" et phénoménologiques doivent donc se développer de concert avec leurs lots d'élucidations et de nouveaux concepts.

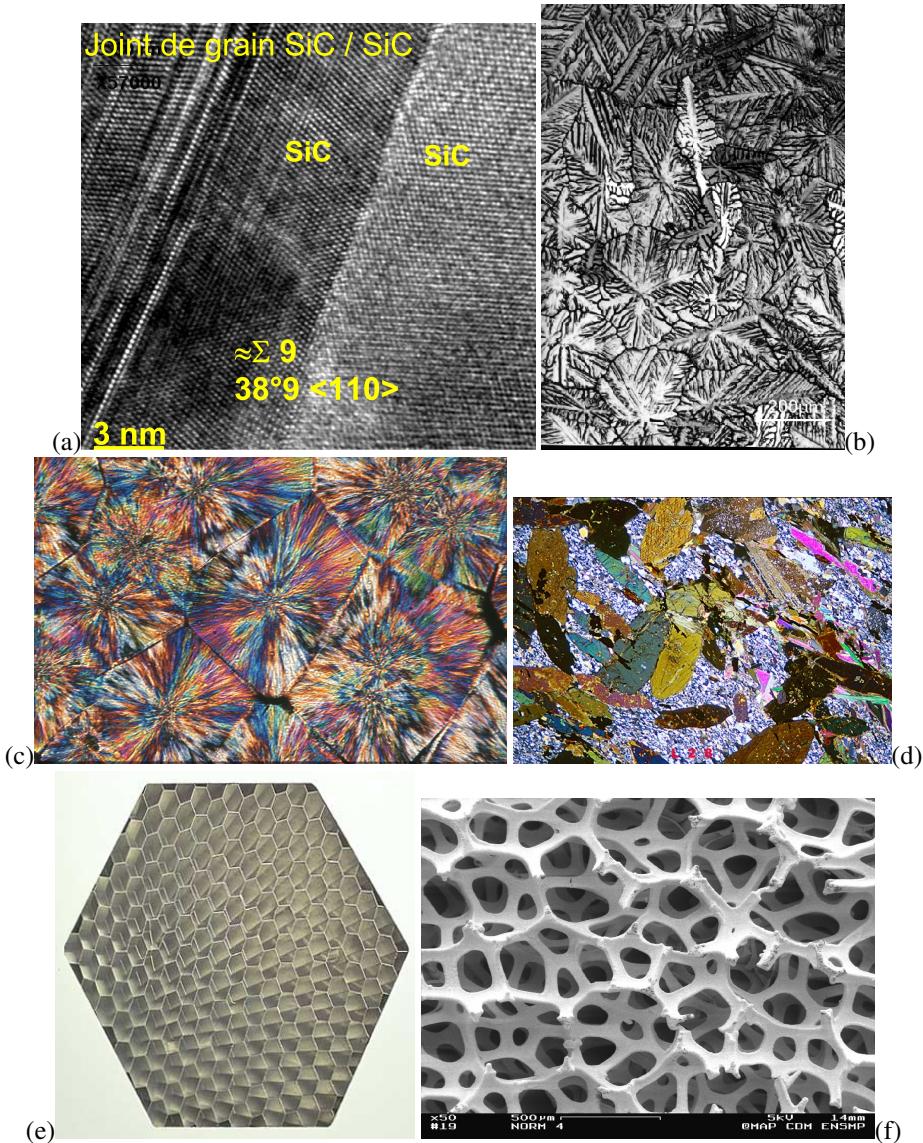
### Ordres de grandeur et fléau de la dimension

Les moyens de calculs actuels permettent de traiter plus de  $10^9$  atomes en dynamique moléculaire en utilisant des machines massivement parallèles (Fivel and Forest, 2004a). Les volumes correspondants restent néanmoins petits puisque, si l'on considère un volume atomique typique des métaux (cubiques à faces centrées) de  $0.01\text{nm}^3$ , un milliard d'atomes sont contenus dans une boîte de  $215\text{nm}$  de côté. On est encore loin de pouvoir

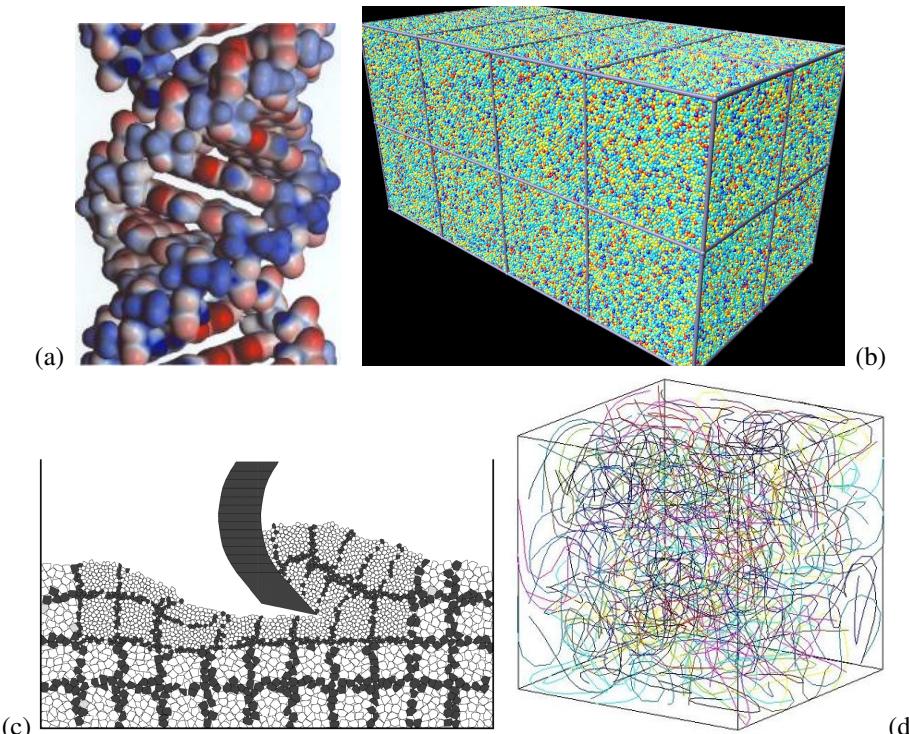
1. Concernant l'histoire de la mécanique des milieux continus, on renvoie aux références (Timoshenko, 1983; Dugas, 1996).



**Figure 1.1 : Structures :** (a) une pile du viaduc de Millau (pont à haubans), (b) aube de turbine haute pression de moteur d'avion. **Micro-structures :** composant électronique, (c) réseau de connections en cuivre, (d) structure multicouches d'un microprocesseur (source : M.-H. Berger, Centre des Matériaux). **Nano-structures :** (e) nanoengrenages en polysilicium (diamètre des engrenages : 7 μm, d'après (Romig et al., 2003)), (f) déformation en flexion de nanotubes de carbone (les points désignent les atomes de carbone et les traits les liaisons covalentes, d'après (Arroyo and Belytschko, 2002)).



*Figure 1.2 : Microstructures de quelques matériaux solides granulaires : (a) joint de grains dans un carbure de silicium, les rangées atomiques sont clairement visibles de part et d'autre du joint de grain (source : M.-H. Berger, Centre des Matériaux), (b) grains de zinc d'un revêtement d'une tôle d'acier galvanisée pour l'automobile (on voit aussi les dendrites de solidification), (c) sphérolites dans un polymère semi-cristallin (microscopie optique en lumière polarisée, source N. Billon, Cemef), (d) coupe minéralogique d'une roche (microscopie optique en lumière polarisée, source <http://users.skynet.be/jm-derochette/>), (e) nid d'abeilles en aluminium, (f) mousse de nickel à porosité ouverte utilisée dans le batteries de téléphone portable.*

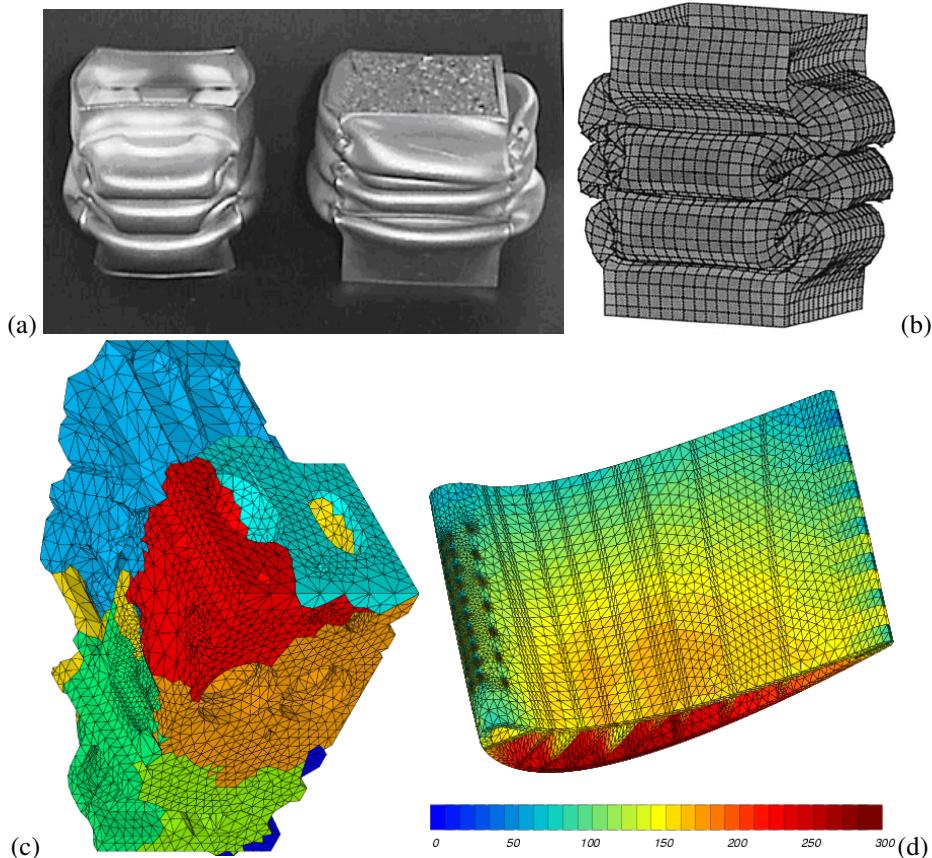


*Figure 1.3 : Modélisations mécaniques discrètes de la matière : (a) mécanique quantique (calcul *ab initio* d'une portion d'ADN, les couleurs indiquent l'intensité de la fonctionnelle densité électronique), (b) dynamique moléculaire (interaction entre des millions d'atomes d'un milieu amorphe, la couleur indiquant le niveau d'énergie cinétique), (c) milieux granulaires (simulation de l'action d'une pelle sur un milieu granulaire formé de grains polygonaux anguleux, certains grains sont marqués pour pouvoir suivre leur mouvement (source C. Nouguier, LTDS, Ecole Centrale de Lyon)), (d) simulation de l'enchevêtrement de fibres élastiques (feutres) soumises à une compression simple (source R. Dendievel, GPM2-INPG, Grenoble).*

calculer ne serait-ce qu'un grain d'un polycristal métallique dont le volume dépasse en général  $1\mu\text{m}^3$ ...

Les potentiels atomiques décrivant les interactions entre l'atome et son environnement sont en fait peu connus, en tout cas pour un nombre limité d'éléments et pour des régimes de températures limités. Il n'est pas encore possible de simuler de manière prédictive les propriétés mécaniques (modules d'élasticité, dilatation thermique) d'un acier inoxydable d'emploi pourtant quotidien... Les potentiels atomiques peuvent être calibrés sur des simulations de mécanique quantique (on parle de simulation *ab initio*) mais on reste alors au niveau de quelques dizaines d'atomes ou de molécules géantes comme l'ADN de la figure 1.3(a).

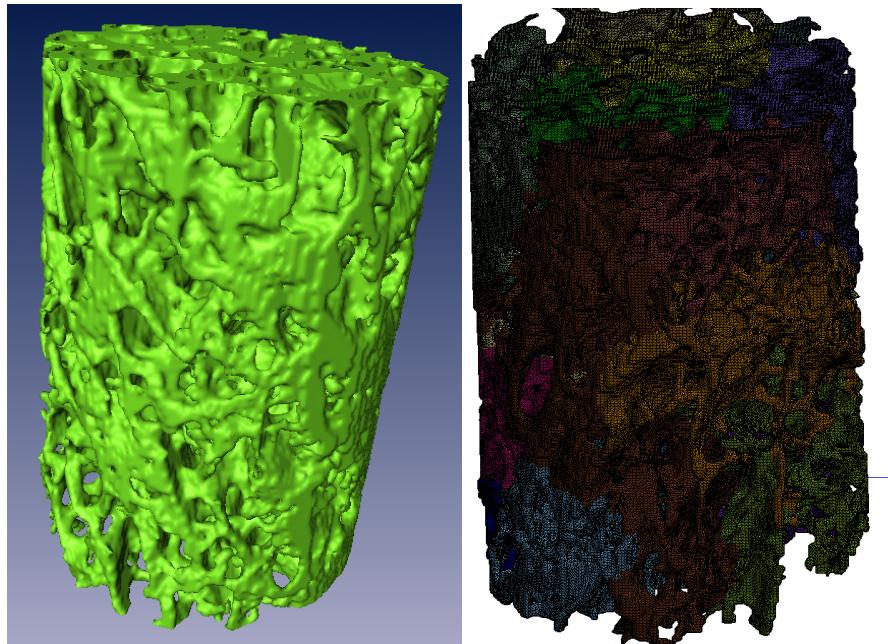
Il est donc hors de question de calculer la réponse d'une aube de turbine en service à l'aide de la dynamique moléculaire ! Il faudra donc avoir recours à des champs continus faisant abstraction des oscillations locales liées à la présence des atomes, mais aussi des grains de l'alliage polycristallin qui le constituent...



*Figure 1.4 : Simulations numériques et modèles mécaniques continus des matériaux et des structures : (a) champ de contraintes dans un composite à fibres longues et parallèles, (b) ruine par flambage d'un profilé métallique, (c) calcul d'une culasse automobile (les couleurs indiquent la décomposition du maillage pour le calcul parallèle, source S. Quilici, Centre des Matériaux), (d) calcul thermomécanique d'une pale d'aube de turbine avec son circuit de refroidissement (champ de contrainte équivalente de von Mises, valeurs en MPa). Les structures sont divisées en éléments au sommet desquels les grandeurs mécaniques sont calculées. Pour connaître leurs valeurs en tout point, on utilise des fonctions d'interpolation (polynômes de Lagrange par exemple). On renvoie à l'enseignement spécialisé (Kern, 2004) pour la description détaillée de ces méthodes numériques en mécanique des milieux continus (méthode des éléments finis).*

#### Systèmes dynamiques et instabilités

Les systèmes dynamiques sont des systèmes non linéaires d'équations différentielles. Les équations newtoniennes du mouvement de particules soumises à des forces extérieures telles qu'on les rencontre en dynamique moléculaire constituent des exemples de systèmes dynamiques. Depuis Poincaré au moins, on sait qu'à partir de trois corps en présence même soumis à des efforts relativement simples, il n'est pas possible de prévoir la position à long



*Figure 1.5 : Biomécanique et mécanique du vivant : vue tomographique 3D d'une portion d'os trabéculaire (à gauche) et sa modélisation par éléments finis en vue de la détermination des propriétés élastiques de l'os à différents stades de l'ostéoporose (à droite, source, Kamel Madi, Centre des Matériaux, et Alain Gasser, Polytech'Orléans). Les couleurs sur le maillage correspondent aux sous-domaines pour le calcul parallèle (6 millions d'inconnues). Le diamètre de l'échantillon est de 2.2 mm.*

terme des particules à partir de conditions initiales forcément entachées d'incertitude. De même, deux particules initialement infiniment proches pourront ne plus rester dans le voisinage l'une de l'autre au bout d'un temps fini. Les notions de bifurcation et de chaos ont défrayé la chronique scientifique dans les vingt dernières années. Elles jouent un rôle fondamental pour suivre l'évolution de systèmes discrets de particules tels que les molécules en dynamique moléculaire et les milieux granulaires tels que les cailloux de la figure 1.3. Ces bifurcations successives conduisent à une auto-organisation du mouvement en structures dissipatives telles que les hiérarchies de tourbillons dans les fluides turbulents. De telles structures de déformations périodiques apparaissent aussi en plasticité dans les métaux. Il est alors vain de vouloir suivre le détail des mouvements de chaque particule et il est plus commode de chercher à remplacer le système discret par un système d'équations aux dérivées partielles portant sur un nombre fini limité de fonctions mais définies partout avec une régularité suffisante (continuité pour le moins, différentiabilité par morceaux). La modélisation continue n'exclut nullement les bifurcations et les instabilités. Bien au contraire, la stabilité de l'équilibre d'une structure est un enjeu essentiel pour statuer sur sa tenue mécanique. Elle nécessite en général des analyses non linéaires.

### 1.2.2 Volume élémentaire pour la thermomécanique, représentation ponctuelle

On renonce donc à suivre individuellement les hétérogénéités et on introduit un volume élémentaire “glissant”  $dV$  centré autour de la position géométrique  $\underline{X}$  dans une espace

affine euclidien, à un instant donné  $t_0$ . On distinguera alors deux situations :

- **cas des milieux à microstructure (sous-jacente)**, i.e. plutôt des solides. Alors on peut considérer que toutes les particules présentes à l'instant  $t_0$  dans le volume élémentaire  $dV$  restent dans un même volume  $dv$  au cours du mouvement dont le centre de gravité  $\underline{x}(t)$  caractérise la position de la **particule abstraite**, appelée aussi **point matériel** aux instants ultérieurs  $t$ . Il est possible en principe de définir géométriquement la microstructure autour du point  $\underline{X}$ . Pour un milieu granulaire par exemple, ce volume  $dV$  doit contenir suffisamment de grains pour être représentatif de la microstructure. Le milieu sera dit **homogène**, ou plus précisément **statistiquement homogène** si les voisinages  $dV$  de tous les points  $\underline{X}$  sont semblables ou statistiquement indiscernables (autrement dit, même "nombre" de grains, même forme moyenne des grains, et autres fonctions morphologiques identiques). Le volume  $dV$  est donc un **volume élémentaire représentatif** du matériau. L'élément de volume  $dv$  doit cependant rester suffisamment petit devant les dimensions de l'objet macroscopique étudié afin de pouvoir appliquer les règles du calcul différentiel. Les inégalités suivantes doivent donc être vérifiées pour garantir la pertinence de l'approche continue proposée :

$$d \ll L_{VER} \ll L \quad (1.1)$$

où  $d, L_{VER}, L$  désigne respectivement la taille des hétérogénéités du milieu étudié, la taille du volume élémentaire représentatif, et une dimension caractéristique de la structure étudiée<sup>2</sup>. C'est l'approche dite lagrangienne du mouvement.

- **cas des milieux sans microstructure**, i.e. plutôt des fluides. Les particules sont non identifiées et interchangeables. On ne cherchera pas alors à suivre la transformation d'un volume initial  $dV$ . On considérera plutôt à chaque instant la moyenne des vitesses des particules se situant à chaque instant dans un voisinage  $dv$  de tout point géométrique  $\underline{x}$ . Dans ce cas, des particules matérielles entrent et sortent constamment du volume élémentaire  $dv$ . On reconnaît l'approche eulérienne utilisée en mécanique des fluides.

Dans le cas des écoulements laminaires, on verra que l'approche eulérienne et l'approche proposée pour les milieux à microstructures sont équivalentes de sorte que ces deux démarches ne peuvent pas servir à définir les fluides et les solides en mécanique des milieux continus. On précisera cette distinction dans ce cours plutôt au niveau du comportement du milieu étudié. Dans le cas turbulent, le cadre de ce cours restera insuffisant. Lorsque le milieu matériel possède une microstructure bien identifiée, on peut se demander s'il sera suffisant de ne considérer que la transformation qui fait passer de  $\underline{X}$  à  $\underline{x}$  pour décrire les propriétés mécaniques du milieu. Dans de nombreuses situations, cette approche simplifiée s'avère effectivement satisfaisante. Toutefois, on peut être amené à enrichir la description du milieu continu en ajoutant ce que l'on appellera des **variables internes** sensées caractériser certaines propriétés de la microstructure sous-jacente (tensor d'orientation pour un composite à fibre par exemple, représentant les orientations privilégiées des fibres), ou bien de véritables degrés de liberté supplémentaires comme dans le cas des cristaux liquides pour lesquels il faut suivre non seulement le mouvement mais aussi l'évolution des orientations privilégiées. On ne présentera pas ces raffinements dans ce cours. Le cas des variables internes sera abordé dans le cours de mécanique des solides (Caillietaud, 2003).

2. Il serait plus correct en fait de remplacer la longueur  $L$  par la longueur d'onde minimale  $L_\omega$  des sollicitations macroscopiques imposées. Cela exclut par exemple la validité de l'approche continue si l'on fait se propager dans un polycristal des ondes élastiques dont la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur de la taille de grain. On y reviendra lors de l'étude de la propagation des ondes dans les milieux élastiques.

### 1.2.3 Fissures, discontinuités et singularités

En mécanique des milieux continus, on va donc suivre la transformation du milieu  $\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$  en exigeant certaines régularités pour la fonction  $\Phi$ , à savoir continuité et différentiabilité (par rapport aux variables d'espace et de temps). On supposera aussi que la transformation est bijective de sorte que  $\underline{X} = \Phi^{-1}(\underline{x}, t)$ , ce qui permet d'identifier les deux approches introduites au paragraphe précédent. Ces hypothèses sont précisées et commentées dans le chapitre suivant. Les grandeurs mécaniques seront alors définies comme des **champs**, c'est-à-dire des fonctions scalaires (densité de masse), vectorielles (directions et forces) ou tensorielles d'ordre plus élevé prenant des valeurs en tout point matériel  $\underline{X}$  ou  $\underline{x}$ .

Ce modèle continu n'exclut cependant pas l'existence de discontinuités ou de singularités. Mais celles-ci ne seront possibles qu'en des points, lignes ou surfaces isolées, i.e. des ensembles de mesure nulle. La présence d'un trou dans un milieu homogène ne remet pas en cause la continuité de la transformation du milieu qui suivra. Des conditions aux limites spécifiques devront simplement être vérifiées au bord du trou. Le problème de l'apparition spontanée d'un trou (cavitation) est plus délicat mais s'intègre tout à fait dans le modèle continu proposé, on le verra.

Une fissure représente une surface de discontinuité de la transformation mais son traitement reste dans le champ d'application de la mécanique des milieux continus. La pointe de la fissure peut constituer une singularité des champs (certaines variables deviennent infinies), mais une telle singularité le long d'une ligne peut être décrite en restant dans le cadre de ce cours. C'est l'objet de la mécanique de la rupture.

Les discontinuités existent aussi dans les fluides. On peut mentionner le cas du **sillage** d'un corps dans fluide en mouvement, constitué d'une portion de fluide au repos (ou tourbillonnaire) à l'arrière de l'obstacle, sur laquelle vient glisser le fluide en mouvement contournant l'obstacle. En particulier, les particules ne traversent pas la surface de discontinuité. Au contraire, au travers d'une **onde de choc**, les particules acquièrent une violente accélération.

Dans la réalité physique, les discontinuités au travers d'une surface sont en fait associées à des variations brutales des grandeurs mécaniques mais continues. Ils s'agit de **couches limites** correspondant à de forts gradients des grandeurs mécaniques. Dans certains cas, une étude détaillée de la couche limite pourra être nécessaire. L'idéalisation de la présence de gradients intenses par une discontinuité représente en général une simplification efficace dans la pratique.

Plus généralement, certains champs mécaniques pourront subir des discontinuités au travers d'interfaces entre différents matériaux ou phases en présence. Les équations de bilan permettront d'ailleurs d'établir des relations que doivent satisfaire les discontinuités possibles.

### 1.2.4 La vraie nouveauté : le tenseur des contraintes

La démarche atomistique a effectivement guidé Cauchy pour construire une représentation continue des efforts de cohésion dans un milieu continu. Les interactions entre molécules étaient modélisées alors par de simples ressorts. La représentation vectorielle classique des efforts n'est pas suffisante, on le verra, et c'est d'un tenseur d'ordre deux (identifiable à une application linéaire ou à une forme bilinéaire, voir l'annexe 12) dont on aura besoin. La notion de tenseur des contraintes (on a dit *tenseur des tensions* encore jusqu'au milieu des années 1950) est radicalement nouvelle et représente la difficulté majeure de ce cours. Cela explique qu'elle n'ait émergé qu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle c'est-à-dire bien après les révolutions galiléenne et newtonienne de la mécanique, et après les premiers développements de l'hydrodynamique.

### 1.3 Le problème de fermeture et la variété des comportements

#### 1.3.1 Corps indéformables

Le mouvement de corps rigide, composition d'une rotation et d'une translation, est un exemple de transformation simple du milieu continu. Il conserve bien entendu les longueurs et les angles de tous les segments matériels considérés sur le solide. On étudiera en détail cette cinématique au paragraphe 2.2.7. Le mouvement de corps rigide dans son ensemble est entièrement décrit par 6 degrés de liberté : 3 composantes de translation et 3 angles de rotation. Ces grandeurs interviennent alors explicitement dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique, i.e. 6 équations scalaires. Lorsque le torseur des efforts appliqués est connu, on est donc en mesure de déterminer sans ambiguïté le mouvement du corps rigide. Ces mouvements sont les seuls possibles pour les solides indéformables et la théorie mécanique correspondante est donc "fermée".

Il n'en va pas de même en général lorsque les corps sont déformables. En effet, l'expérience courante nous apprend qu'un même torseur des efforts appliqués à deux composants de géométrie identique mais constitués de matériaux différents (caoutchouc et acier pour fixer les idées) ne conduit pas aux mêmes changements de forme. On en déduit que les équations de bilan (quantité de mouvement et moment cinétique, mais aussi, plus généralement, bilans de masse et d'énergie) ne suffisent pas pour déterminer la déformation du milieu continu. C'est le problème dit de fermeture de la mécanique des milieux continus. Les équations manquantes sont appelées **lois de comportement**.

On pourrait se dire qu'il suffit d'appliquer les lois de Newton à un petit domaine autour de chaque point matériel d'un corps déformable. L'approche est correcte. Encore faut-il pouvoir décrire alors les efforts d'interaction avec le voisinage du domaine. On a déjà évoqué le fait que la description de ces efforts intérieurs est la difficulté majeure de l'approche et qu'elle a été surmonté pour la première fois par Cauchy. L'introduction du tenseur des contraintes confirme en fait, on le verra, la nécessité de lois de comportement.

#### 1.3.2 Lois de comportement

Le comportement thermomécanique des matériaux présente de multiples facettes : élasticité de l'acier d'un ressort, viscosité d'un fluide visqueux tel que l'huile, plasticité d'un alliage d'aluminium pour boîte boisson... Une démarche axiomatique et systématique qui guide l'écriture des lois de comportement est esquissée dans le cours. Il s'agit d'une approche récente datant du début des années 1960 pour l'introduction de la notion de fonctionnelle d'histoire du matériau, et des années 1980 pour l'introduction du concept de variable interne qui a déjà été évoqué. Les développements dans le domaine du développement des lois de comportement pour les matériaux les plus variés foisonnent aujourd'hui et témoignent de la vitalité de cette branche de la mécanique aujourd'hui.

Il n'existe pas de loi de comportement unique et intrinsèque mais bien plutôt toutes une panoplie de lois qui pourront être alternativement pertinentes pour le matériau étudié selon les conditions de sollicitations et les échelles de temps et d'espace considérées. Une même roche par exemple pourra être traitée comme un solide élastique pour un problème de génie civil et comme un fluide visqueux en tectonique... Le verre à froid sera traité comme un solide élastique fragile pour le dimensionnement à l'impact d'un pare-brise de voiture, tandis qu'il sera traité comme un fluide visqueux non linéaire lors du calcul de la mise en forme du même pare-brise à plus haute température...

On proposera une définition purement phénoménologique des notions de fluide et de solide, définition qui n'épuise pas l'ensemble des comportements observés dans les matériaux de l'ingénieur et de la nature. Il existera en particulier des comportements complexes de matériaux pourtant très répandus qui tiennent à la fois du fluide et du solide.

Les lois de comportement sont intégrées au calcul de structures et composants industriels

grâce à la méthode des éléments finis, dont quelques exemples sont illustrés sur la figure 1.4.

## 1.4 Plan du cours

### 1.4.1 Plan du cours oral

La présentation orale introduit en premier lieu la notion de contrainte car c'est le concept le plus nouveau du cours. La description de la cinématique du milieu continu et donc de sa déformation est plus descriptive. On montre ensuite la nécessité d'introduire des lois de comportement et les règles à respecter lorsqu'on les écrit. Les exemples de lois de comportement concernent essentiellement les corps élastiques et les fluides viscoélastiques dans ce cours, d'abord dans le cas général, puis dans le cas des transformations infinitésimales en ce qui concerne l'élasticité.

C'est seulement arrivé à ce point du cours que l'on peut commencer à résoudre de vrais problèmes d'équilibre linéarisé des corps thermoélastiques et certains problèmes de Navier-Stokes. Il faudra donc s'armer de patience et en apprécier le suspense... Les problèmes incontournables de traction, flexion, torsion et de réservoirs sous pression constituent les applications fondamentales du cours et sont traités en Petites Classes. Quelques applications élémentaires de la mécanique des fluides sont également abordées pour les fluides parfait incompressibles et quelques écoulements de fluides newtoniens. Des ouvertures sur des problèmes plus ambitieux encore seront évoqués et une base de données de problèmes a été constituée que les lecteurs pourront explorer à loisir.

### 1.4.2 Plan du cours écrit

Le cours écrit suit une démarche désormais classique en mécanique des milieux continus. Les deux premiers chapitres sont en fait indépendants l'un de l'autre. L'un analyse les déformations des milieux continus, l'autre le tenseur des contraintes. Un chapitre complet est ensuite consacré à la manipulation du tenseur des contraintes. Le chapitre 6 est sans doute le plus difficile d'accès mais a une portée très générale : il détaille les grands principes qui président à l'écriture des lois de comportement en transformations finies.

Pour illustrer le cours de mécanique des milieux continus, on se concentre sur l'analyse du comportement élastique des matériaux et des structures, d'abord dans le cas général (chapitre 7) puis dans le cas linéarisé (chapitre 8). L'accent est mis sur l'analyse du problème de l'équilibre des corps thermoélastiques linéaires. L'enjeu est de taille puisqu'il s'agit de la question de la tenue en service des composants et structures industriels. Le comportement des fluides et la résolutions de quelques problèmes aux limites correspondants fait l'objet du chapitre 5 en ce qui concerne les écoulements de fluides parfaits incompressibles et du chapitre 11 pour les écoulements de fluides visqueux.

Le cours écrit se veut un *handbook*, c'est-à-dire qu'il présente une certaine exhaustivité que ne pourra avoir le cours oral dans le nombre de séances limité imparié. Téléchargeable depuis le site web [mms2.ensmp.fr](http://mms2.ensmp.fr), il peut être consulté à chaque instant par un étudiant en stage rencontrant un problème de mécanique des milieux continus. Notre espoir est qu'il y trouve un élément de réponse ou une référence bibliographique qui puissent débloquer une situation et amorcer la démarche de résolution.

Il est par conséquent de lecture difficile à certains endroits. Une première lecture se limitera aux éléments vus explicitement dans le cours oral.

### 1.4.3 Liens avec les autres cours de l'Ecole des Mines de Paris

Le cours de mécanique des milieux continus nourrit des liens avec de nombreux cours proposés aux élèves-ingénieurs de l'Ecole de Mines de Paris. Le cours s'inscrit dans l'unité d'enseignement **Mécanique-Matériaux-Energétique**. Il se déroule en parallèle des deux cours suivants :

- Génie énergétique ;
- Matériaux pour l'ingénieur.

Il fait appel à des notions qui seront développées dans le détail en

- Mathématiques (calcul différentiel, calcul des variations, équations aux dérivées partielles, fonctions de la variable complexe, théorie des distributions...);
- Thermodynamique ;
- Cristallographie.

Des prolongements importants pour la pratique se trouvent dans les enseignements spécialisés

- Eléments finis ; Dynamique des constructions ;
- Mise en œuvre des polymères ;
- Géomécanique et géologie de l'ingénieur ; Hydrogéologie ;
- Physique des solides ;
- Géométrie différentielle.

## 2 Transformations du milieu continu

### 2.1 Enjeux physiques et faits expérimentaux

Les changements de forme des matériaux ou des structures jouent un rôle essentiel dans les procédés de fabrication de composants industriels mais aussi dans leur tenue en service. La figure 2.1a montre un réseau régulier de cercles tracés sur une tôle d'acier galvanisé destinée à l'emboutissage de pièces dans l'industrie automobile (portières, ailes...). Un exemple d'embouti obtenu à partir de cette tôle par poinçonnage est donné sur la figure 2.1. On constate sur cette pièce que les cercles ont gardé leur forme initiale dans certaines zones et sont devenues des ellipses dans d'autres. La “déformation” de la pièce n'a donc pas été homogène. L'objectif de ce chapitre est de mettre des concepts et des chiffres derrière le mot déformation. L'enjeu est alors de déterminer quelles sont les déformations critiques que peut supporter une telle tôle avant de rompre localement.

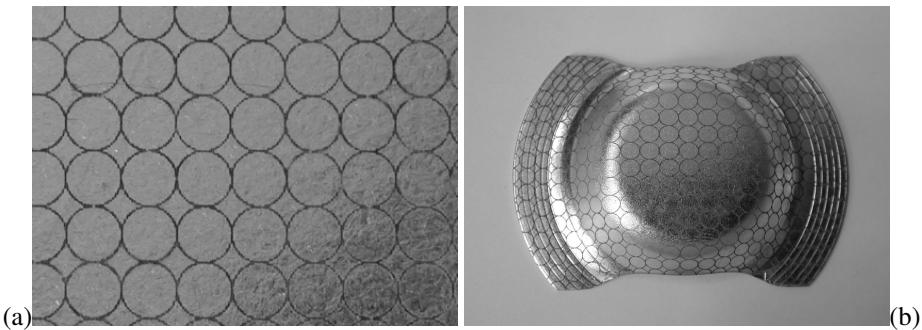


Figure 2.1 : Mesures de déformations à l'aide d'un réseau de cercles gravés par un procédé électrolytique sur une tôle en acier galvanisé : (a) réseau initial au centre la tôle, (b) échantillon déformé par emboutissage.

Pour mieux étudier les changements de formes de l'acier qui constitue la pièce précédente, on fait appel à des essais mécaniques plus simples que le précédent, et notamment l'essai de traction de la figure 2.2 qui consiste à allonger une bande de métal d'une certaine quantité à l'aide d'une machine de traction. La figure 2.2a montre la machine et l'électronique de contrôle nécessaires. La machine possède un vérin horizontal qui sous pression hydraulique, peut se déplacer vers le bas et allonger une éprouvette fixée à deux mors d'amarrage. Le montage de l'éprouvette est sur la figure 2.2b. Il s'agit d'une bande de tôle avec des têtes élargies permettant de l'amarrer par simple serrage à l'aide de vis. Deux méthodes de mesures de déplacement de la matière sont illustrées sur la figure. Une mesure ponctuelle d'abord, à l'aide d'un extensomètre constitué d'un boîtier solidaire de l'échantillon par l'intermédiaire de deux tiges en contact avec l'éprouvette. On voit d'ailleurs des élastiques assurant ce contact sans déformer ni endommager l'éprouvette. Dans le boîtier se trouve un filament parcouru par un courant, en général à tension imposée et qui va s'allonger en même temps que l'éprouvette par l'intermédiaire des tiges rigides. Cette variation de forme du filament s'accompagne d'une variation de courant qui est proportionnelle à l'allongement et qui permet donc, après calibration, de le mesurer. L'objectif de cette mesure ponctuelle est de connaître le déplacement relatif entre les deux points de contact au cours de l'essai de traction. La figure 2.2c montre l'état initial de la bande de métal et la figure 2.2d illustre un état déformé. On voit que l'éprouvette s'est allongée : la longueur entre les élastiques a varié d'environ 10% et on note une légère réduction de section.



*Figure 2.2 : Mesure de déplacement relatif lors d'un essai de traction : (a) vue d'ensemble de la machine de traction (électronique, bâts, appareil photo avec zoom, fond en carton+métal pour améliorer la qualité des photos), (b) vue du montage : éprouvette, mors d'amarrage et extensomètre deux points (les élastiques assurent le bon contact entre les bras de l'extensomètre et l'éprouvette plate sans déformer ni endommager l'éprouvette), (c) état initial de la zone utile de l'éprouvette, (d) état final. La largeur de l'éprouvette est de 12mm.*

La deuxième méthode de mesure de déplacements est une mesure de champ à partir d'images de l'éprouvette obtenues à l'aide de la caméra visible sur la figure 2.2a. L'objet est d'obtenir non pas le déplacement relatif de deux points seulement mais de tout un champ situé sur l'image. Pour cela on sélectionne un réseau de points sur l'image initiale. Ces points sont marqués d'une croix sur la figure 2.3a. Pour pouvoir suivre ces points pendant la déformation, l'éprouvette est recouverte d'une peinture contenant des pigments noirs et blancs. Le résultat est une distribution aléatoire de niveaux de gris sur l'éprouvette (voir figure 2.2c par exemple). Un programme numérique de traitement d'images permet d'associer à chaque croix le motif de niveaux de gris autour de chaque point et de le retrouver sur les images déformées. Il est alors possible de reconstruire la grille après une déformation de 10% par exemple et de la superposer sur la grille initiale (figure 2.3b). Ces deux états correspondent exactement aux états des figures 2.2c et d. Par interpolation, on peut reconstruire le champ de déplacement sur l'ensemble de la zone observée.

Les figures 2.3c et d donnent les champs de déplacement vertical  $u_2$  et horizontal  $u_1$ . On constate que les lignes de niveaux du déplacement vertical sont quasiment des droites parallèles et horizontales, i.e. presqu'indépendantes de la position  $x_1$ . De même, on constate que les lignes de niveaux du déplacement horizontal sont quasiment des droites parallèles et verticales, i.e. presqu'indépendantes de la position  $x_2$ . Pour conforter cette impression, on trace  $u_2$  (resp.  $u_1$ ) en fonction de la position  $x_2$  (resp.  $x_1$ ) sur la figure 2.4a (resp. 2.4b). Les profils obtenus sont quasiment linéaires :

$$u_2(x_1, x_2) = Ax_2 + \text{Cste}, \quad u_1(x_1, x_2) = Bx_1 + \text{Cste} \quad (2.1)$$

Dans l'exemple, la constante  $A$  est positive et vaut 0.08, la constante  $B$  est négative et vaut -0.045. L'intérêt d'introduire ces grandeurs  $A = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$  et  $B = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$  est que le déplacement varie d'un point à l'autre tandis que les composantes  $A, B$  du gradient du déplacement par rapport aux coordonnées sont quasiment uniformes et caractérisent donc tout la zone étudiée. Plutôt que de parler du déplacement de points particuliers, il suffira pour décrire l'essai réalisé d'indiquer les valeurs de  $A$  et  $B$ . Cette opération de gradient appliquée au champ de déplacement dû à un changement de forme d'un corps matériel est effectivement la notion essentielle qui va être utilisée dans la suite pour définir et étudier la déformation de la matière.

## 2.2 Géométrie et cinématique du milieu continu

### 2.2.1 Observateurs et référentiels

La description détaillée des phénomènes physiques est soumise à la possibilité d'effectuer des mesures. Celles-ci sont rendues possibles par l'introduction de **référentiels** d'espace et de temps. Dans le cadre de la mécanique classique (non relativiste), temps et espace physiques sont considérés comme indépendants : le temps est paramétré sur l'axe des réels et l'espace physique est assimilé à un espace affine euclidien  $\mathcal{E}$ , d'espace vectoriel associé  $E$  de dimension 3. Un référentiel ou **observateur**  $\mathcal{R}$  est alors le choix d'une "vision rigidifiée" de l'espace et d'une chronologie. Choisir un référentiel c'est en effet choisir un trièdre rigide servant de poste d'observation. On distinguera le choix d'un référentiel du choix du système de coordonnées dans lequel on souhaite exprimer les composantes des grandeurs mathématiques introduites. Des référentiels privilégiés sont **les référentiels galiléens** dits aussi **référentiels d'inertie**, dont l'existence est postulée par la première loi de Newton. On se réserve la possibilité de changer d'observateur à volonté quand cela peut faciliter la modélisation. On distingue deux classes de changements de référentiels privilégiés :

- les **transformations galiléennes** : on passe d'un référentiel  $\mathcal{R}$  à un autre  $\mathcal{R}'$  par une transformation de la forme

$$\underline{x}' = \underline{Q}_0^{-1} \cdot \underline{x} + \underline{v}_0 t, \quad t' = t - t_0 \quad (2.2)$$

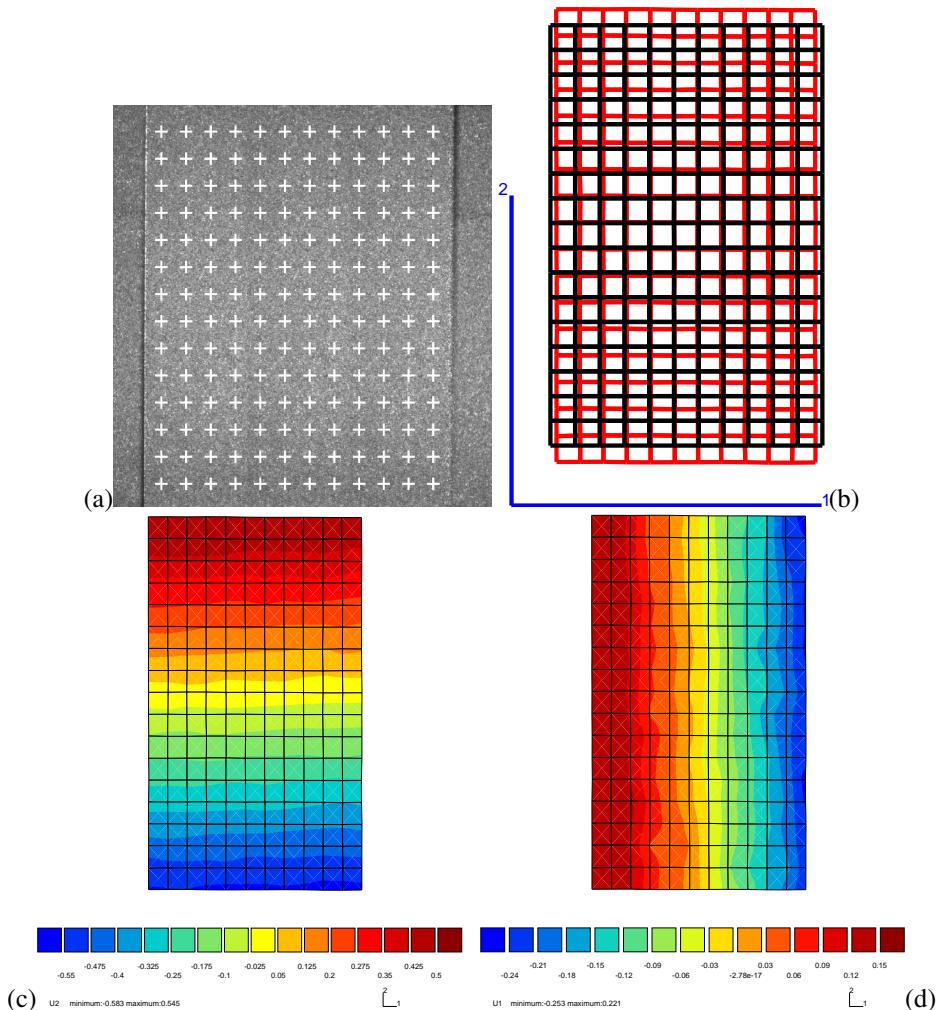
où  $\underline{x}$  et  $\underline{x}'$  désignent un point de l'espace vu par  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  respectivement. Le vecteur vitesse  $\underline{v}_0$  et la rotation  $\underline{Q}_0$  sont uniformes et constants.

- les **transformations euclidiennes**, pour lesquelles

$$\underline{x}' = \underline{Q}(t)^{-1} \cdot \underline{x} + \underline{c}(t), \quad t' = t - t_0 \quad (2.3)$$

où  $\underline{Q}$  est une rotation dépendant du temps.

Ces changements de référentiel préservent les distances et les intervalles de temps. On se limite en général aux transformations euclidiennes qui préservent aussi l'orientation : la



*Figure 2.3 : Mesure de champ de déplacement lors d'un essai de traction par corrélation d'images : (a) repérage régulier de motifs sur la surface de la zone utile de l'éprouvette de la figure 2.2, à l'aide d'une grille virtuelle, les niveaux de gris variables sur l'image sont dus au dépôt d'un peinture (b) superposition de la grille en fin d'essai (grille rouge) sur la grille initiale (grille noire) ; les déplacements des nœuds de la grille ont été déterminés par un algorithme de corrélation d'images ; (c) isovaleurs du champ de déplacement  $u_2$ , (d) isovaleurs du champ de déplacement  $u_1$ . La zone étudiée est un rectangle de largeur 10 mm et de longueur 15 mm. Une alternative à la méthode de corrélation d'images consiste à déposer ou à graver directement une grille sur la surface de l'échantillon comme sur la figure 2.1.*

transformation orthogonale  $\mathbf{Q}$  directe ( $\det \mathbf{Q} = 1$ ) est une rotation et appartient au groupe spécial orthogonal  $SO(E)$  (lire le paragraphe 12.5.1). On sera amené au paragraphe 6.3.3 à considérer une classe de transformations galiléennes étendues.

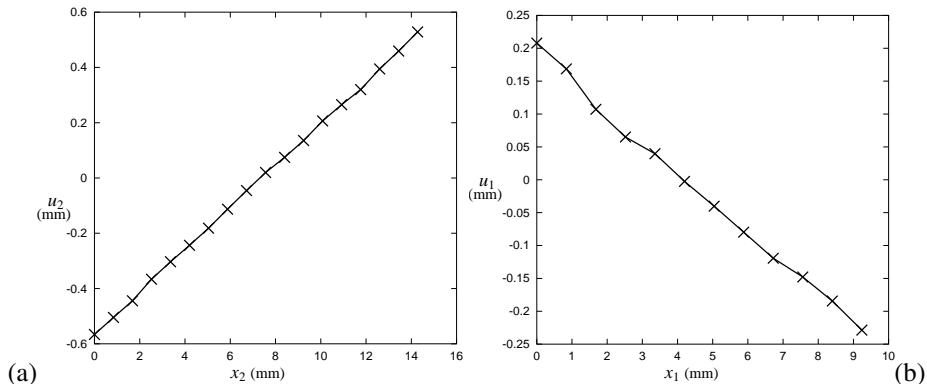


Figure 2.4 : Mesure de champ de déplacement lors d'un essai de traction par corrélation d'images : (a) profil de déplacement  $u_2$  le long d'une ligne verticale tracée sur la figure 2.2c ; (b) profil de déplacement  $u_1$  le long d'une ligne horizontale tracée sur la figure 2.2d.

### 2.2.2 Placement du corps matériel

La mécanique des milieux continus a pour objet l'étude du mouvement dans l'espace physique de **corps matériels** en satisfaisant des conditions de continuité mentionnées au chapitre 1. Du point de vue physique, un corps matériel  $\mathcal{M}$  est un ensemble de **particules ou points matériels**. Du point de vue mathématique, il s'agit d'une **variété** munie d'un bord, c'est-à-dire d'un sous-ensemble de  $\mathcal{E}$  muni d'un paramétrage local, que l'on supposera presque partout différentiable, à l'aide de 1, 2 ou 3 paramètres indépendants selon que l'on s'intéresse à des corps à 1, 2 ou 3 dimensions. Le bord de  $\mathcal{M}$  sera noté  $\partial\mathcal{M}$ . En tant qu'ensemble de particules physiques (mais aussi en tant que variété différentiable), un corps matériel existe indépendamment de la région de l'espace  $\Omega$  qu'il occupe à un instant donné de son évolution. Toutefois, on peut se contenter de suivre les positions successives dans l'espace  $\mathcal{E}$  muni d'un référentiel  $\mathcal{R}$  du corps matériel à différents instants. On appelle **placement**  $p_t$  l'application qui, à un instant donné  $t$ , associe à chaque point matériel  $M$  du corps matériel  $\mathcal{M}$  sa position  $\underline{x}(M, t)$  dans l'espace  $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ . On note  $\Omega_t$  l'image de  $\mathcal{M}$  par  $p_t$ , c'est-à-dire la région qu'occupe  $\mathcal{M}$  dans  $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$  à l'instant  $t$ . On donne à  $\Omega_t$  le nom de **configuration**.

$$\begin{aligned} p_t : & \mathcal{M} \longrightarrow \Omega_t \\ & M \mapsto \underline{x} \end{aligned}$$

On privilégie souvent une configuration particulière dite **configuration de référence**  $\Omega_0$  à un instant  $t_0$  choisi. On appelle **configuration actuelle ou courante** la région  $\Omega_t$  prise à l'instant courant  $t$  par le corps matériel. Pour un temps  $t_0 < \tau < t$ ,  $\Omega_\tau$  représente une **configuration intermédiaire** du corps matériel. Les positions du point matériel  $M$  dans la configuration de référence et dans la configuration actuelle sont notées respectivement  $\underline{X}$  et  $\underline{x}$ . Ces notions sont illustrées sur la figure 2.5.

La cinématique a pour objet la description dans l'espace-temps des mouvements des corps matériels indépendamment des causes et des lois qui les régissent. Elle peut se restreindre à l'étude de la **transformation**  $\Phi_t$  qui, à chaque instant  $t$ , met en correspondance les

positions d'un point matériel dans  $\Omega_0$  et  $\Omega_t$  :

$$\begin{aligned}\Phi_t : \quad & \Omega_0 \longrightarrow \Omega_t \\ & \underline{\mathbf{X}} \mapsto \underline{\mathbf{x}} \\ & \Phi_t = p_t \circ p_0^{-1} \\ & \underline{\mathbf{x}} = \Phi_t(\underline{\mathbf{X}}) = \Phi(\underline{\mathbf{X}}, t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Dans un système de coordonnées quelconque, la définition précédente revient à se donner trois fonctions  $\Phi_i(X_1, X_2, X_3, t)$  ( $i \in 1, 2, 3$ ) des coordonnées  $X_i$  de  $\underline{\mathbf{X}}$ . On demande à chaque  $\Phi_t$  d'être une application bijective<sup>1</sup> et bicontinue (i.e. un homéomorphisme). On écrira donc :

$$\underline{\mathbf{X}} = \Phi^{-1}(\underline{\mathbf{x}}, t)\tag{2.5}$$

On admet aussi que  $\Phi$  est bijective et bicontinue par rapport au temps. Il sera même nécessaire à plusieurs endroits d'admettre que  $\Phi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme (voire un  $C^2$ -difféomorphisme), c'est-à-dire une fonction de classe  $C^1$  (voire  $C^2$ ) :  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont alors une (voire deux) fois continûment différentiables. Comme on l'a vu au chapitre 1, ces conditions de régularité peuvent ne pas être vérifiées en certains points isolés particuliers ou le long de lignes ou surfaces de discontinuité. La régularité est donc simplement requise "presque partout".

### 2.2.3 Descriptions matérielle et spatiale du mouvement

Dans la pratique, deux points de vue particuliers et distincts sont généralement adoptés pour suivre l'évolution de grandeurs physiques et mécaniques d'un corps matériel dans son mouvement.

#### Description lagrangienne du mouvement

La **configuration initiale** à  $t = 0$  est choisie comme configuration de référence. Considérons un point matériel particulier  $M_0$  occupant la position  $\underline{\mathbf{X}}_0$  dans  $\Omega_0$ . La **trajectoire** du point  $M_0$  est la courbe

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \Phi(\underline{\mathbf{X}}_0, t)\tag{2.6}$$

La description lagrangienne du mouvement consiste à considérer les grandeurs physiques et mécaniques étudiées comme des fonctions de la variable  $\underline{\mathbf{X}} \in \Omega_0$ . Les 3 composantes du vecteur  $\underline{\mathbf{X}}$ , i.e. les coordonnées de  $M$  dans  $\Omega_0$ , ainsi que le temps  $t$  sont appelées **variables de Lagrange**. Pour suivre la trajectoire d'un point matériel, on observe son **déplacement**  $\underline{\mathbf{u}}$  défini par

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t)\tag{2.7}$$

Les composantes du déplacement ont donc la dimension d'une longueur ( $m$ ).

La méthode de corrélation d'images présentée au paragraphe 2.1 permet de construire le champ de déplacement dans une zone du corps étudié et donc de reconstituer la trajectoire de chaque point à partir du film du mouvement.

L'utilisation de traceurs pour suivre un écoulement fluide permet de visualiser en instantané un autre type de lignes dites **lignes d'émission**. Une ligne d'émission à un instant  $t$  est l'ensemble des positions de toutes les particules qui sont passées par un point géométrique  $P$  donné depuis l'instant  $t_0 < t$ .

---

1. L'injectivité de  $\Phi_t$  interdit la fusion de deux points matériels tandis que le fait-même que  $\Phi$  soit une application exclut la fission d'un point matériel en plusieurs points matériels.

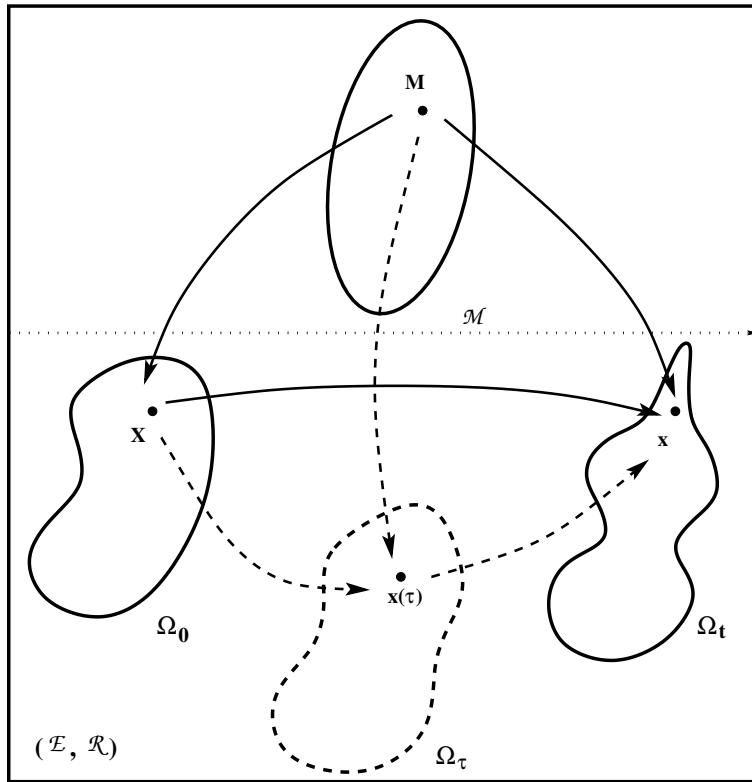


Figure 2.5 : Placement du corps matériel  $\mathcal{M}$  dans l'espace physique muni d'un référentiel  $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$  à trois instants distincts.

#### Description eulérienne du mouvement

La description eulérienne du mouvement consiste à considérer les grandeurs physiques et mécaniques étudiées comme des fonctions du point géométrique  $\underline{x} \in \mathcal{E}$ , sans se préoccuper des points matériels qui occupent cette position au cours du temps. Les 3 composantes du vecteur  $\underline{x}$  et le temps  $t$  sont les **variables d'Euler**. Dans ce contexte, la masse volumique par exemple est la fonction  $\rho(\underline{x}, t)$ .

On montrera l'équivalence entre ces deux descriptions au paragraphe 2.4.1. On passe d'une représentation à l'autre en utilisant la transformation  $\Phi$  et son inverse  $\underline{X} = \Phi^{-1}(\underline{x}, t)$ . Les variables de Lagrange se révèlent en général bien adaptées à l'étude des mouvements des corps solides et les variables d'Euler à l'étude des écoulements fluides.

#### 2.2.4 Le gradient de la transformation

On adopte ici le point de vue lagrangien et on considère la transformation  $\Phi$  d'une configuration initiale  $\Omega_0$  à une configuration actuelle  $\Omega$ . Pour analyser la transformation localement dans un voisinage du point  $\underline{X}$ , on fait appel à la différentielle par rapport aux coordonnées spatiales initiales de la relation (2.4) :

$$d\underline{x} = \underline{F} \cdot d\underline{X}, \quad \text{avec} \quad \underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \quad (2.8)$$

D'un point de vue mathématique, les vecteurs  $\underline{dX}$  et  $\underline{dx}$  sont des éléments des espaces vectoriels tangents aux variétés différentiables  $\Omega_0$  et  $\Omega_t$  en  $\underline{X}$  et  $\underline{x}$  respectivement. Comme  $\underline{dX}$  et  $\underline{dx}$  appartiennent à des espaces distincts, une expression comme  $\underline{dX} + \underline{dx}$  n'a pas de sens. D'un point de vue plus physique,  $\underline{dX}$  donne la direction d'une **ligne** ou **fibre matérielle** tracée sur  $\Omega_0$  passant par  $\underline{X}$ . Cette ligne se transforme en une courbe dont la tangente en  $\underline{x}$  est selon  $\underline{dx}$ . Si en outre la norme du vecteur  $\underline{dX}$  est suffisamment petite, on peut assimiler la transformée du petit segment liant  $\underline{X}$  à  $\underline{X} + \underline{dX}$  au segment  $\underline{dx} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \underline{dX}$  avec une erreur en  $\mathcal{O}(\|\underline{dX}\|^2)$ .

On appelle **gradient de la transformation**, l'application linéaire tangente  $\tilde{\mathbf{F}}(\underline{X}, t)$ . Son existence découle (presque partout) de la régularité admise pour  $\Phi$ . On a en particulier

$$\tilde{\mathbf{F}}(\underline{X}, t = 0) = \mathbf{1} \quad (2.9)$$

puisque, par construction,  $\Phi(\underline{X}, 0) = \underline{X}$ . On se restreint au cas d'un gradient  $\tilde{\mathbf{F}}$  inversible, i.e. à déterminant non nul (sauf éventuellement sur des ensembles de mesure nulle). On peut en outre, sans perte de généralité, ne s'intéresser qu'à la situation :

$$\det \tilde{\mathbf{F}} > 0 \quad (2.10)$$

D'un point de vue mathématique, on suppose que  $\det \tilde{\mathbf{F}} \neq 0$  et l'application  $\det \tilde{\mathbf{F}}(t)$ , continue sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ , prend la valeur 1 en  $t = 0$ . Elle reste donc positive sur tout l'intervalle. D'un point de vue physique, le cas  $\det \tilde{\mathbf{F}} = 0$  signifie qu'il existe une fibre matérielle infinitésimale qui disparaît purement et simplement, ou, de manière équivalente, qu'un élément de volume perd une dimension au moins et se transforme en élément de surface ou de ligne, ce qui est exclu.

Dans une base cartésienne orthonormée  $(\underline{E}_i)$ , ces relations s'écrivent :

$$dx_i = F_{ij} dX_j, \quad \text{avec} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{F}} = F_{ij} \underline{E}_i \otimes \underline{E}_j \quad (2.11)$$

En suivant la convention d'Einstein sur les indices répétés, l'équation précédente représente de manière concise les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_2 &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_3} dX_3 \\ dx_3 &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial X_3} dX_3 \end{aligned}$$

Les relations précédentes se mettent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Les composantes de  $\tilde{\mathbf{F}}$  sont sans dimension physique puisqu'elles font intervenir des rapports de longueur (déplacement/distance).

On retiendra que la transformation  $\Phi$  relie les positions initiale et actuelle d'un point matériel, tandis que le gradient de la transformation met en correspondance les fibres matérielles initiale et actuelle. Le gradient de la transformation s'exprime aussi en fonc-

tion du gradient du déplacement :

$$\underline{F} = \underline{1} + \underline{u} \otimes \nabla_X = \underline{1} + \text{Grad } \underline{u} \quad (2.13)$$

où l'on a introduit les opérateurs **nabla**<sup>2</sup> et **gradient** :

$$\nabla_X := \frac{\partial}{\partial X^i} \underline{E}_i, \quad \text{Grad}(.) := (.) \otimes \nabla_X \quad (2.14)$$

$$\text{Grad } \Phi(\underline{X}) := \Phi(\underline{X}) \otimes \nabla_X = \underline{F} \quad (2.15)$$

$$\text{grad } \Phi^{-1}(\underline{x}) := \Phi^{-1}(\underline{x}) \otimes \nabla_x = \underline{F}^{-1} \quad (2.16)$$

En composantes cartésiennes, la relation (2.13) s'écrit :

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (2.17)$$

*Le gradient de la transformation dans une base quelconque*

Plus généralement, deux systèmes de coordonnées curvilignes quelconques avec leurs bases naturelles  $(Q^i, \underline{E}_i)_{i=1,2,3}$  et  $(q^i, \underline{e}_i)_{i=1,2,3}$  sur  $\Omega_0$  et  $\Omega$  respectivement sont définies par

$$\underline{E}_i = \frac{\partial \underline{X}}{\partial Q^i} \quad (2.18)$$

$$\underline{e}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial q^i} \quad (2.19)$$

On introduit alors **les opérateurs Nabla** lagrangien et eulérien respectivement par

$$\nabla_X := \frac{\partial}{\partial Q^i} \underline{E}_i, \quad \nabla_x := \frac{\partial}{\partial q^i} \underline{e}_i, \quad (2.20)$$

et les *opérateurs gradients* correspondants. On peut écrire les composantes de  $\underline{F}$  dans un système de coordonnées quelconques  $(\{Q^i, \underline{E}_i\}, \{q^i, \underline{e}_i\})$  en procédant de la manière suivante :

$$d\underline{X} = \frac{\partial \underline{X}}{\partial Q^i} dQ^i = dQ^i \underline{E}_i \quad (2.21)$$

---

2. La notation faisant appel l'opérateur nabla s'utilise en composantes de la manière suivante

$$\underline{u} \otimes \nabla_X := u_i \left( \frac{\partial}{\partial X_j} \right) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j := \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

c'est à dire que la multiplication entre composantes est remplacée par l'application de l'opérateur différentiel à la composante la plus proche. Cette notation, très pratique pour des calculs plus compliqués, a l'avantage de bien montrer que l'indice de dérivation est donné par le second indice. Dans certains ouvrages, c'est la transposée de  $\underline{F}$  qui est utilisée :  $\underline{F}^T = \nabla_X \otimes \underline{u}$ . C'est un choix licite mais à repérer dès le début.

$$\begin{aligned}
\underline{dx} &= \frac{\partial \underline{x}}{\partial q^i} dq^i = dq^i \underline{e}_i \\
&= \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} dQ^j \underline{e}_i \\
&= \left( \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \underline{e}_i \otimes \underline{E}^j \right) \cdot \underline{dX}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

car  $dQ^j = \underline{E}^j \cdot \underline{dX}$ . On identifie

$$\underline{F} = \frac{\partial q^i}{\partial Q^j} \underline{e}_i \otimes \underline{E}^j \tag{2.23}$$

Cette relation montre bien que le gradient de la transformation est un tenseur bien particulier qui a un pied dans la configuration initiale et l'autre dans la configuration actuelle. On dit que c'est un **tenseur mixte**.

Remarquer enfin que

$$\nabla_X(\cdot) = \nabla_x(\cdot) \cdot \underline{F} = \underline{F}^T \nabla_x(\cdot), \quad \text{Grad}(\cdot) = \text{grad}(\cdot) \cdot \underline{F} \tag{2.24}$$

#### *Coordonnées matérielles entraînées*

Il est possible de choisir un système de coordonnées locales de bases  $(\underline{e}_i^F)_{i=1,2,3}$  attachées à la matière et qui évoluent avec elle de la manière suivante

$$\underline{e}_i^F(\underline{X}, t) = \underline{F} \cdot \underline{E}_i \tag{2.25}$$

On l'appelle aussi **base convective**. Ce choix correspond à un marquage de la matière à l'aide d'une grille par exemple comme dans l'exemple introduit au paragraphe 2.1. Il est clair que dans un tel système de coordonnées, les points matériels ont toujours les mêmes coordonnées quelle que soit la configuration, et que le gradient de la transformation a pour composantes

$$\frac{\partial q^i}{\partial Q^j} = \delta_j^i \tag{2.26}$$

Un tel système de coordonnées peut s'avérer utile pour écrire certaines lois de comportement en particulier dans le cas anisotrope (matériaux composites, fluides chargés de fibres...).

#### *Changement de référentiel*

Dans les paragraphes précédents, le mouvement a été suivi dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . On pourrait aussi l'observer depuis  $\mathcal{R}'$  se déduisant de  $\mathcal{R}$  par une transformation euclidienne (2.3), caractérisée par une rotation  $\underline{Q}(t)$  et une translation  $\underline{c}(t)$ . On suppose en outre pour simplifier que les repérages associés aux deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  coïncident à  $t = 0$  :

$$\underline{Q}(0) = \underline{1}, \quad \underline{c}(0) = 0 \tag{2.27}$$

Soit  $\Phi'$  la transformation du milieu correspondante et  $\underline{F}'$  son gradient :

$$\underline{x}' = \underline{Q}(t) \cdot \underline{x} + \underline{c}(t) \tag{2.28}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}'(\underline{\mathbf{X}}, t') = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}'}{\partial \underline{\mathbf{X}}} = \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \quad (2.29)$$

Pour se convaincre du résultat précédent, on peut faire le calcul en travaillant sur les composantes du tenseur  $\tilde{\mathbf{F}}$  dans un repère cartésien orthonormé :

$$F'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial X_j} = Q_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = Q_{ik} F_{kj} \quad (2.30)$$

Dans le cas où les deux référentiels ne coïncident pas à  $t = 0$ , on montre que la relation entre  $\tilde{\mathbf{F}}$  et  $\tilde{\mathbf{F}}'$  est

$$\tilde{\mathbf{F}}' = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(0)^{-1} \quad (2.31)$$

### *Changement de configuration de référence*

On peut choisir aussi une configuration de référence  $\hat{\Omega}_0$  différente de  $\Omega_0$ .  $\hat{\Omega}_0$  est par exemple la région de l'espace occupée par le corps matériel à l'instant  $\tau$  (cf. figure 2.5) :  $\hat{\Omega}_0 = \Omega_\tau$ . On note  $\hat{\underline{\mathbf{X}}} := \underline{\mathbf{x}}(\tau)$ . Soit  $\hat{\Phi}(\hat{\underline{\mathbf{X}}}, t)$  la transformation faisant correspondre les configurations  $\hat{\Omega}_0$  et  $\Omega_t$ , et  $\Phi_0(\underline{\mathbf{X}}, \tau)$  celle qui relie  $\Omega_0$  et  $\hat{\Omega}_0$ . Ces transformations sont donc liées par

$$\hat{\Phi} = \Phi \circ \Phi_0^{-1} \quad (2.32)$$

Leurs gradients sont

$$\hat{\mathbf{F}}(\hat{\underline{\mathbf{X}}}, t) := \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \hat{\underline{\mathbf{X}}}}, \quad \mathbf{P}(\underline{\mathbf{X}}, \tau) := \frac{\partial \hat{\underline{\mathbf{X}}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}}(\tau) \quad (2.33)$$

de sorte que

$$\hat{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}^{-1} \quad (2.34)$$

Les changements de configuration de référence sont très utiles dans la pratique, en particulier en mise en forme, lorsque le corps matériel est soumis à plusieurs transformations successives (laminage puis emboutissage par exemple). D'un point de vue théorique, les changements de configuration de référence joueront un rôle essentiel dans le chapitre 6.

### 2.2.5 *Transports convectifs*

On a vu que le transport convectif (i.e. en suivant le mouvement) d'un élément de fibre matérielle  $d\underline{\mathbf{X}}$  de la configuration initiale à la configuration courante se fait par l'intermédiaire du gradient de la transformation  $\tilde{\mathbf{F}}$ , selon la relation (2.8). Il est possible dès lors d'établir comment se transforment les volumes et les surfaces au cours du mouvement.

On se donne dans la suite trois vecteurs matériels non coplanaires  $d\underline{\mathbf{X}}_1$ ,  $d\underline{\mathbf{X}}_2$  et  $d\underline{\mathbf{X}}_3$ . On suppose que le triplet  $(d\underline{\mathbf{X}}_1, d\underline{\mathbf{X}}_2, d\underline{\mathbf{X}}_3)$  est orienté dans le sens direct. On entend par là que

$$d\underline{\mathbf{X}}_1 \cdot (d\underline{\mathbf{X}}_2 \wedge d\underline{\mathbf{X}}_3) > 0 \quad (2.35)$$

Le symbole  $\wedge$  désigne le produit vectoriel. Ses trois vecteurs sont transportés respectivement en  $d\underline{\mathbf{x}}_1$ ,  $d\underline{\mathbf{x}}_2$ ,  $d\underline{\mathbf{x}}_3$  dans la configuration actuelle.

### Transport d'un élément de volume

Le volume du parallélépipède délimité par les trois vecteurs  $(\underline{dX}_1, \underline{dX}_2, \underline{dX}_3)$  vaut

$$dV = \underline{dX}_1 \cdot (\underline{dX}_2 \wedge \underline{dX}_3) = [\underline{dX}_1, \underline{dX}_2, \underline{dX}_3] \quad (2.36)$$

Le produit mixte défini par l'équation (2.36) et noté  $[., ., .]$  est égal au déterminant de la matrice formée par les trois vecteurs colonnes des composantes des trois vecteurs étudiés. Le volume initial  $dV$  se transforme donc en un volume actuel  $dv$  valant

$$\begin{aligned} dv &= \underline{dx}_1 \cdot (\underline{dx}_2 \wedge \underline{dx}_3) = [\underline{dx}_1, \underline{dx}_2, \underline{dx}_3] \\ &= [\underline{F} \cdot \underline{dX}_1, \underline{F} \cdot \underline{dX}_2, \underline{F} \cdot \underline{dX}_3] = (\det \underline{F}) [\underline{dX}_1, \underline{dX}_2, \underline{dX}_3] \end{aligned}$$

Autrement dit, par définition même du déterminant,

$$\frac{dv}{dV} = J, \quad \text{avec } J := \det \underline{F} > 0 \quad (2.37)$$

On note en effet généralement  $J$  le **jacobien** de la transformation  $\Phi$ , i.e. le déterminant du gradient de  $\Phi$ .

Une transformation est dite **isochore** au point  $\underline{X}$  si le volume est préservé autour de  $\underline{X}$  au cours de la transformation. Si la propriété (2.37) est vérifiée en tout point du corps matériel, la transformation est dite isochore.

Un **matériau** est dit **incompressible** s'il ne peut subir que des transformations isochores. On distinguera la notion d'isochorie de celle d'incompressibilité. En effet, l'isochorie est une propriété d'un mouvement, tandis que l'incompressibilité est une propriété de la matière<sup>3</sup>.

### Transport d'un élément de surface orienté

L'élément de surface  $\underline{dS}$  engendré par les deux vecteurs  $\underline{dX}_1$  et  $\underline{dX}_2$  est le covecteur (i.e. la forme linéaire) qui à un vecteur  $\underline{v}$  de l'espace associe le volume du parallélépipède  $(\underline{dX}_1, \underline{dX}_2, \underline{v})$ . L'élément de surface  $\underline{dS}$  est défini sur la configuration de référence :

$$\underline{dS} = \underline{dX}_1 \wedge \underline{dX}_2 \quad (2.38)$$

Il se transforme en l'élément de surface  $\underline{ds}$  défini sur la configuration actuelle

$$\underline{ds} = \underline{dx}_1 \wedge \underline{dx}_2 \quad (2.39)$$

Le covecteur  $\underline{ds}$  opère sur un vecteur  $\underline{v}$  quelconque de la manière suivante<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \underline{ds} \cdot \underline{v} &= (\underline{dx}_1 \wedge \underline{dx}_2) \cdot \underline{v} = [\underline{dx}_1, \underline{dx}_2, \underline{v}] \\ &= [\underline{F} \cdot \underline{dX}_1, \underline{F} \cdot \underline{dX}_2, \underline{v}] = (\det \underline{F}) [\underline{dX}_1, \underline{dX}_2, \underline{F}^{-1} \cdot \underline{v}] \\ &= J \underline{dS} \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{v}) = J (\underline{F}^{-T} \cdot \underline{dS}) \cdot \underline{v} \end{aligned} \quad (2.40)$$

3. La transformation de glissement simple de la figure 2.8 est isochore, mais le matériau qui la subit n'est pas nécessairement incompressible.

4. Au passage, on introduit la notation concise suivante :

$$\underline{F}^{-T} = (\underline{F}^{-1})^T = (\underline{F}^T)^{-1}$$

Transport d'un élément de fibre matérielle :	$\underline{dx} = \underline{F} \cdot \underline{dX}$
Transport d'un élément de surface :	$\underline{ds} = J \underline{F}^{-T} \cdot \underline{dS}$
Transport d'un élément de volume :	$dv = J dV$

Tableau 2.1: Récapitulatif : principales relations de transport convectif

On peut donc identifier

$$\underline{ds} = J \underline{F}^{-T} \cdot \underline{dS} \quad (2.41)$$

Cette relation de transport d'élément de surface est souvent appelée **formule de Nanson** dans les ouvrages anglo-saxons.

Pour se convaincre du bien-fondé du calcul précédent, on peut aussi avoir recours aux composantes des tenseurs utilisés dans une base cartésienne orthonormée :

$$\begin{aligned} ds_i v_i &= J dS_i F_{ij}^{-1} v_j \\ &= J F_{ji}^{-T} dS_i v_j \end{aligned}$$

On peut écrire l'élément de surface sous la forme du produit d'un vecteur unitaire dit vecteur normal à l'élément de surface par sa norme :

$$\underline{dS} = dS \underline{N}, \quad \underline{ds} = ds \underline{n} \quad (2.42)$$

Les vecteurs  $\underline{N}$  et  $\underline{n}$  sont respectivement les vecteurs unitaires normaux à l'élément de surface considéré dans les configurations initiale et actuelle. Il faut remarquer que le vecteur normal à l'élément de surface n'est pas attaché à la matière et n'est donc pas une fibre matérielle. Il n'est que le produit vectoriel de deux vecteurs matériels. Son transport convectif est différent de celui d'une fibre matérielle. Par conséquent, les points matériels situés le long des directions  $\underline{n}$  et  $\underline{N}$  ne sont pas les mêmes.

### 2.2.6 Décomposition polaire du gradient de la transformation

**Théorème 1 (Décomposition polaire)** Pour tout tenseur  $\underline{F}$  inversible, il existe deux tenseurs symétriques définis positifs  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  uniques et un unique tenseur orthogonal  $\underline{R}$  tels que

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U} = \underline{V} \cdot \underline{R} \quad (2.43)$$

Si  $\det \underline{F} > 0$ ,  $\underline{R}$  est une rotation pure (i.e.  $\det \underline{R} = +1$ ).

**Preuve.** On introduit les tenseurs

$$\underline{C} = \underline{F}^T \cdot \underline{F}, \quad \underline{B} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T \quad (2.44)$$

Ils sont symétriques ( $\underline{C}^T = \underline{C}$ ,  $\underline{B}^T = \underline{B}$ )<sup>5</sup>. Ils sont de plus définis positifs. En effet,

$$\forall \underline{a} \neq 0, \quad \underline{a} \cdot \underline{C} \cdot \underline{a} = a_i F_{ik}^T F_{kj} a_j = (\underline{F} \cdot \underline{a}) \cdot (\underline{F} \cdot \underline{a}) > 0$$

5. Noter que  $\underline{B}$  n'est pas le transposé de  $\underline{C}$  !

car  $\tilde{\mathbf{F}}$  est inversible. Par conséquent,  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$  sont diagonalisables et possèdent chacun trois valeurs propres réelles strictement positives. On définit alors les tenseurs  $\tilde{\mathbf{U}}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  ayant les mêmes vecteurs propres que  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$  respectivement et pour valeurs propres les racines carrées des valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$  respectivement. Par construction,

$$\tilde{\mathbf{U}}^2 = \tilde{\mathbf{C}}, \quad \tilde{\mathbf{V}}^2 = \tilde{\mathbf{B}} \quad (2.45)$$

On définit ensuite,

$$\tilde{\mathbf{R}} := \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{Q}} := \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \quad (2.46)$$

On vérifie que  $\tilde{\mathbf{R}}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$  sont orthogonaux. On détaillera la preuve pour  $\tilde{\mathbf{R}}$  :

$$\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{-2} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T = \mathbf{1} \quad (2.47)$$

D'après (2.46), le signe du déterminant de  $\tilde{\mathbf{R}}$  (resp.  $\tilde{\mathbf{Q}}$ ) est le même que celui de  $\det \tilde{\mathbf{F}}$ . Les tenseurs  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$  ainsi construits répondent à la question posée. L'unicité de  $\tilde{\mathbf{U}}$  vient du fait que la racine carrée d'un tenseur symétrique défini positif défini plus haut est unique. L'unicité de la rotation  $\tilde{\mathbf{R}}$  découle de celle de  $\tilde{\mathbf{U}}$ . On démontre de même l'unicité de  $\tilde{\mathbf{V}}$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}$ . Il reste encore à montrer que  $\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{R}}$ . Pour cela, on décompose  $\tilde{\mathbf{F}}$  de la façon suivante

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T) \cdot \tilde{\mathbf{R}}$$

On met ainsi en évidence une décomposition de  $\tilde{\mathbf{F}}$  de la forme  $\tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}$  car  $\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T$  est symétrique et défini positif (il a les mêmes valeurs propres que  $\tilde{\mathbf{U}}$ ). L'unicité d'une telle décomposition mentionnée plus haut implique que

$$\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T, \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{R}} \quad (2.48)$$

ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

Le théorème précédent s'applique en particulier au gradient de la transformation  $\tilde{\mathbf{F}}$ . L'intérêt du théorème est de distinguer dans la transformation la contribution de rotation de celle de déformation pure, la notion de déformation étant prise dans un sens qui sera défini au paragraphe 2.3. Il sera utilisé à maintes reprises pour interpréter l'information contenue dans  $\tilde{\mathbf{F}}$ . On appelle  $\tilde{\mathbf{R}}$  la **rotation propre** en  $\underline{\mathbf{X}}$ . Dans ce cas, on appelle  $\tilde{\mathbf{C}}$  le **tenseur de Cauchy-Green droit** et  $\tilde{\mathbf{B}}$  le **tenseur de Cauchy-Green gauche**. Ils sont aussi appelés **tenseurs des dilatations**, le terme *dilatation* prêtant toutefois à confusion car il désigne parfois aussi un tenseur proportionnel à l'identité, ce qui n'est bien sûr pas le cas ici. On rappelle qu'ils sont définis par les équations (2.44). Quant à eux,  $\tilde{\mathbf{U}}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  sont dits **tenseurs des déformations pures**<sup>6</sup>.

### 2.2.7 Exemples de transformations homogènes

On parle de transformation homogène d'un corps matériel lorsque le gradient de la transformation est une fonction de  $t$  seulement,  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$ . La transformation  $\Phi$  est donc une fonction affine de  $\underline{\mathbf{X}}$  :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) \cdot \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{c}}(t) \quad (2.49)$$

Pour une transformation homogène, le vecteur  $\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2$  reliant deux points quelconques du corps matériel se transporte en

$$\underline{\mathbf{x}}_1 - \underline{\mathbf{x}}_2 = \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2)$$

---

6. *Right and left stretch tensors*, en anglais.

Si  $\tilde{\mathbf{F}}$  est homogène, alors  $\tilde{\mathbf{R}}$  et  $\tilde{\mathbf{U}}$  sont aussi homogènes (du fait de l'unicité de la décomposition polaire). Par contre, si  $\tilde{\mathbf{U}}$  est homogène, la question de savoir si  $\tilde{\mathbf{F}}$  est homogène est plus délicate. On l'abordera au paragraphe 2.3.4.

La figure 2.6 montre un exemple de transformation homogène d'un carré et un exemple de transformation hétérogène du même carré. Une grille (convective) a été dessiné sur la configuration initiale et permet de visualiser la déformation de petits éléments de la structure initiale. **Lorsque tous les carrés déformés sont superposables, la déformation est homogène.**

On envisage maintenant quelques transformations homogènes simples.

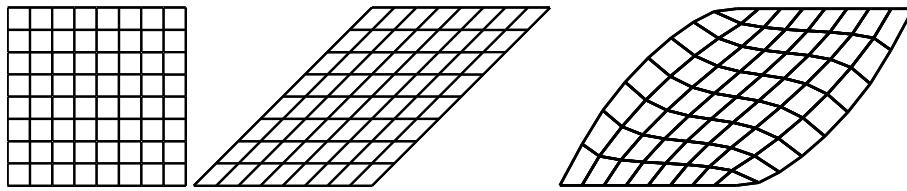


Figure 2.6 : Deux transformations d'une structure carrée dont la configuration initiale est à gauche. La première transformation (au milieu) est homogène car les éléments de la grille tracée sur la structure sont superposables. Au contraire la transformation de droite est hétérogène.

### Mouvement de corps rigide

Une transformation homogène est appelée mouvement de corps rigide lorsque la distance entre tout couple de points matériels reste inchangée au cours du mouvement :

$$\begin{aligned} \forall \underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_2 \neq 0, \quad (\tilde{\mathbf{F}} \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2))^2 &= (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2) \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2) \\ &= (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2) \cdot (\underline{\mathbf{X}}_1 - \underline{\mathbf{X}}_2) \\ \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Le gradient de la transformation est donc orthogonal direct. C'est une rotation  $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ . La transformation correspondante est

$$\underline{x} = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \cdot \underline{\mathbf{X}} + \underline{c}(t) \quad (2.50)$$

où  $\underline{c}(t)$  désigne un mouvement de translation se superposant à la rotation. La relation (2.50) fait penser à deux autres situations déjà rencontrées :

- *changement de référentiel* : les relations (2.50) et (2.3) doivent être distinguées. La première désigne en effet deux événements distincts, à savoir deux positions  $\underline{x}$  et  $\underline{\mathbf{X}}$  prises par un point matériel à deux instants différents, tandis que la seconde donne les positions d'un même événement enregistrées par deux observateurs distincts.
- *changement de coordonnées* : on peut écrire l'équation (2.50) sous forme matricielle dans une base quelconque et les relations obtenues sont alors les formules classiques de changement de base.

Un corps matériel qui ne peut subir que des mouvements de corps rigide est dit **rigide** ou **indéformable**. C'est une approximation parfois suffisante qui sera rappelée au chapitre 3. Les corps rigides sont indissociables de la notion de référentiel. On peut leur attacher des systèmes de coordonnées. On voit donc le lien entre les formules de changement de

référentiels et de changement de base. On se gardera toutefois de les confondre puisque pour un référentiel donné, le choix du système de coordonnées est entièrement libre.

### *Extension simple*

On étudie la transformation qui fait passer le corps matériel de la configuration de la figure 2.7a à la configuration 2.7b. Clairement, elle s'écrit dans la base cartésienne orthonormée ( $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ) :

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1 + \lambda) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (2.51)$$

où  $\lambda$  est le paramètre de chargement. Le gradient de la transformation s'en déduit

$$\underline{F} = \underline{1} + \lambda \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1, \quad [\underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

La sollicitation est telle que les fibres horizontales dans le plan de la figure s'allongent sans changer d'orientation tandis que les fibres verticales restent inchangées. La rotation propre  $\underline{R} = \underline{1}$  et  $\underline{U} = \underline{F}$ . Le paramètre  $\lambda$  est directement la variation de volume  $J - 1 = \lambda$ .

L'essai d'extension simple est difficile à réaliser dans la pratique pour  $\lambda > 0$ . Par contre, si  $\lambda < 0$ , il s'agit d'un essai standard en mécanique des sols, appelé **essai œdométrique**, qui consiste à confiner un sol dans une enceinte rigide et à imposer un déplacement à la surface libre.

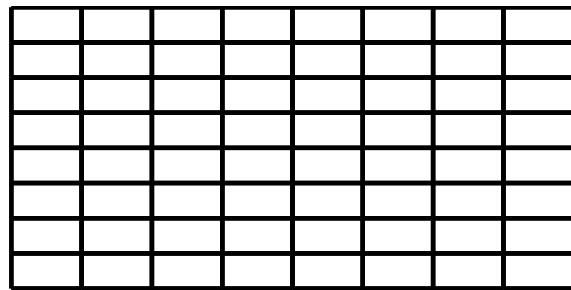
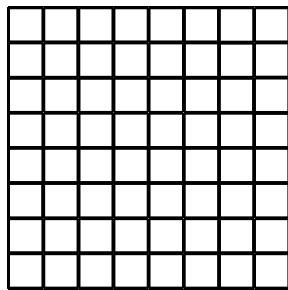


Figure 2.7 : Cinématique de l'extension simple pour un corps carré muni d'une grille : état initial à gauche, état final à droite.

### *Glissement simple*

La transformation illustrée sur la figure (2.8) porte le nom de glissement simple et s'écrit

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (2.53)$$

où  $\gamma$  est l'amplitude du glissement (penser à un jeu de cartes). Le gradient de la transformation vaut

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \gamma \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2, \quad [\tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

On vérifie que  $J = 1$  et que, par conséquent, la transformation est isochore. Le tenseur de Cauchy-Green droit s'obtient ensuite

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{1} + \gamma(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) + \gamma^2 \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2, \quad [\tilde{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Les valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{C}}$  sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2 + \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}) = (\frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}))^2 \quad (2.56)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2 - \gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}) = (\frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4}))^2 \quad (2.57)$$

$$\lambda_3 = 1 \quad (2.58)$$

Les racines positives de ces valeurs propres fournissent les valeurs propres du tenseur des déformations pures associé  $\tilde{\mathbf{U}}$ . L'une,  $\lambda_1$ , est supérieure à 1 (extension), l'autre,  $\lambda_2$  est inférieure à 1 (contraction). Les vecteurs propres de  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{U}}$  sont les mêmes par construction de  $\tilde{\mathbf{U}}$  et valent

$$\underline{\mathbf{V}}_1 = \frac{1}{2}(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 \quad (2.59)$$

$$\underline{\mathbf{V}}_2 = \frac{1}{2}(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 \quad (2.60)$$

$$\underline{\mathbf{V}}_3 = \underline{\mathbf{e}}_3 \quad (2.61)$$

On construit ainsi successivement  $\tilde{\mathbf{U}}$ ,  $\tilde{\mathbf{R}}$  et  $\tilde{\mathbf{V}}$  :

$$[\tilde{\mathbf{U}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \sqrt{1 + (\gamma/2)^2} & 2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{1 + \gamma^2/2}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$[\tilde{\mathbf{V}}] = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2/2 & \gamma & 0 \\ \sqrt{1 + (\gamma/2)^2} & 2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$[\underline{\mathbf{R}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ \frac{-\gamma}{2\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + (\gamma/2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

La rotation propre apparaît donc comme une rotation autour de l'axe  $\underline{e}_3$  et d'angle  $\theta$  défini par

$$\tan \theta = -\frac{\gamma}{2} \quad (2.65)$$

Lorsque le glissement s'effectue indéfiniment ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), l'angle de rotation propre tend vers  $-\pi/2$ .

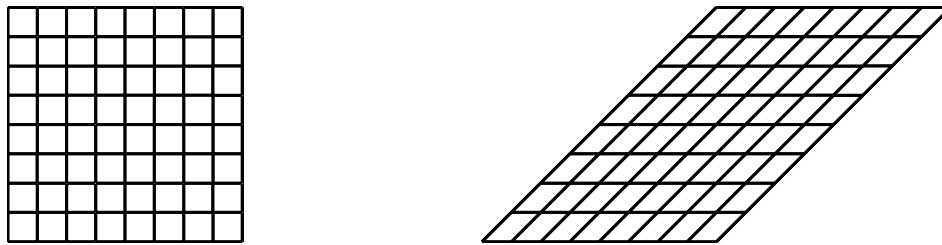


Figure 2.8 : Cinématique du glissement simple pour un corps carré muni d'une grille : état initial à gauche, état final à droite.

### 2.3 Métriques et mesures de déformation

Il s'agit ici de définir précisément ce que l'on entend par changement de forme ou déformation du corps matériel. Cela passe par la mesure des variations de longueurs et d'angles de lignes matérielles au cours du mouvement. On insiste sur le fait que les tenseurs de déformation définis dans la suite de ce paragraphe sont sans dimension physique, tout comme le gradient de la transformation  $\underline{\mathbf{F}}$ .

#### 2.3.1 Interprétation géométrique des tenseurs de Cauchy-Green

On considère deux directions matérielles  $d\underline{\mathbf{X}}_1$  et  $d\underline{\mathbf{X}}_2$  au point  $\underline{\mathbf{X}} \in \Omega_0$ . Elles se transforment respectivement en  $d\underline{\mathbf{x}}_1$  et  $d\underline{\mathbf{x}}_2$  au point  $\underline{\mathbf{x}} \in \Omega_t$  selon

$$d\underline{\mathbf{x}}_1 = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\underline{\mathbf{X}}_1, \quad d\underline{\mathbf{x}}_2 = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\underline{\mathbf{X}}_2 \quad (2.66)$$

Le produit scalaire des fibres matérielles considérées évolue au cours du mouvement :

$$d\underline{\mathbf{x}}_1 \cdot d\underline{\mathbf{x}}_2 = (\underline{\mathbf{F}} \cdot d\underline{\mathbf{X}}_1) \cdot (\underline{\mathbf{F}} \cdot d\underline{\mathbf{X}}_2) = d\underline{\mathbf{X}}_1 \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} \cdot d\underline{\mathbf{X}}_2 = d\underline{\mathbf{X}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot d\underline{\mathbf{X}}_2 \quad (2.67)$$

On trouve de même que

$$d\underline{\mathbf{X}}_1 \cdot d\underline{\mathbf{X}}_2 = d\underline{\mathbf{x}}_1 \cdot \underline{\mathbf{B}}^{-1} \cdot d\underline{\mathbf{x}}_2 \quad (2.68)$$

Le tenseur de Cauchy-Green droit  $\underline{\mathbf{C}}$  définit donc une métrique sur la configuration de référence à partir de la métrique canonique sur  $\Omega_t$ . Le tenseur de Cauchy-Green gauche  $\underline{\mathbf{B}}$  instaure quant à lui une métrique sur  $\Omega_t$  à partir de la métrique canonique initiale.

*Allongements (stretch)*

Les tenseurs de Cauchy-Green permettent de mesurer les variations de longueur d'une fibre matérielle  $\underline{dX}$  de la façon suivante :

$$|\underline{dX}|^2 = \underline{dX} \cdot \underline{dX}, \quad |\underline{dx}|^2 = \underline{dx} \cdot \underline{dx} \quad (2.69)$$

$$|\underline{dx}|^2 - |\underline{dX}|^2 = \underline{dx} \cdot (\underline{C} - \underline{1}) \cdot \underline{dX} = \underline{dx} \cdot (\underline{1} - \underline{B}^{-1}) \cdot \underline{dx} \quad (2.70)$$

On peut introduire la direction de la ligne matérielle  $\underline{dX}$  étudiée jusqu'ici par

$$\underline{dX} = |\underline{dX}| \underline{M} \quad (2.71)$$

où le vecteur directeur  $\underline{M}$  est de norme 1. On établit alors que le rapport d'allongement  $\lambda(\underline{M})$  vaut

$$\lambda(\underline{M}) = \frac{|\underline{dx}|}{|\underline{dX}|} = \sqrt{\underline{M} \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}} = |\underline{F} \cdot \underline{M}| = |\underline{U} \cdot \underline{M}| \quad (2.72)$$

Soient  $C_{ij}$  les composantes, dans une base cartésienne orthonormée  $(\underline{E}_i)_{i=1,2,3}$ , du tenseur de Cauchy-Green droit. On étudie l'allongement de  $\underline{M} = \underline{E}_1$ . La relation précédente donne

$$\lambda(\underline{E}_1) = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2} \quad (2.73)$$

ce qui donne une interprétation directe simple de la composante  $C_{11}$  du tenseur de Cauchy-Green droit, à savoir le carré de l'allongement du premier vecteur de base.

*Angles de glissement (shear angle)*

On peut aussi suivre au cours du mouvement l'angle que font deux fibres matérielles, à savoir  $\Theta$  dans la configuration de référence et  $\theta$  dans la configuration actuelle :

$$\underline{dX}_1 = |\underline{dX}_1| \underline{M}_1, \quad \underline{dX}_2 = |\underline{dX}_2| \underline{M}_2 \quad (2.74)$$

$$\underline{dx}_1 = |\underline{dx}_1| \underline{m}_1, \quad \underline{dx}_2 = |\underline{dx}_2| \underline{m}_2 \quad (2.75)$$

$$\cos \Theta = \underline{M}_1 \cdot \underline{M}_2 \quad (2.76)$$

$$\cos \theta = \underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2 = \frac{\underline{M}_1 \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}_2}{\lambda(\underline{M}_1) \lambda(\underline{M}_2)} \quad (2.77)$$

On appelle

$$\gamma := \Theta - \theta \quad (2.78)$$

l'angle de glissement des directions  $\underline{M}_1$  et  $\underline{M}_2$  dans le plan de glissement  $(\underline{M}_1, \underline{M}_2)$ . Si  $\Theta = \pi/2$ , on a

$$\sin \gamma = \frac{\underline{M}_1 \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}_2}{\lambda(\underline{M}_1) \lambda(\underline{M}_2)} \quad (2.79)$$

Si  $\underline{M}_1 = \underline{E}_1$  et  $\underline{M}_2 = \underline{E}_2$ , la relation précédente donne

$$\sin \gamma = \frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11} C_{22}}} \quad (2.80)$$

ce qui donne une interprétation de la composante  $C_{12}$  du tenseur de Cauchy-Green droit.

### 2.3.2 Mesures de déformation

Les tenseurs

$$\tilde{\mathbf{E}} := \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{1}}), \quad \tilde{\mathbf{A}} := \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{1}} - \tilde{\mathbf{B}}^{-1}) \quad (2.81)$$

apparus au détour de l'équation (2.70) s'appellent respectivement **tenseur des déformations de Green ou de Green-Lagrange ou de Green-Saint-Venant et tenseur des déformations d'Almansi ou d'Almansi-Hamel**. Le premier est largement utilisé dans la pratique pour quantifier l'intensité et la direction de la déformation. L'utilisation du tenseur d'Almansi est bien évidemment tout aussi légitime selon le point de vue adopté (lagrangien ou eulérien, introduits plus loin). Le tenseur de Green-Lagrange peut s'exprimer aussi en fonction du gradient du déplacement

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}^T + \tilde{\mathbf{H}}^T \cdot \tilde{\mathbf{H}}), \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{1}} = \text{Grad } \underline{\mathbf{u}} \quad (2.82)$$

$\tilde{\mathbf{E}}$  est donc non linéaire en  $\tilde{\mathbf{H}}$  en raison du dernier terme. En composantes cartésiennes orthonormées, ces expressions deviennent

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.83)$$

Les deux tenseurs  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}$  sont nuls pour  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{1}}$ , i.e. sur la configuration initiale. Ils sont symétriques mais non nécessairement positifs.

#### Une multitude de mesures de déformation

Pour “mesurer” les déformations, tout n'est qu'affaire de convention. Il existe une multitude de façons de “quantifier” (plutôt que mesurer, puisque la déformation n'a pas d'unité) la déformation des corps matériels. Il est par contre essentiel dans la pratique de bien préciser ce qu'on entend par “déformation” en particulier lorsque l'on utilise des données expérimentales concernant un matériau particulier, au risque d'encourir des malentendus aux conséquences désastreuses (dimensionnement erroné d'une pièce, structure ou d'un procédé de fabrication...) ! Toutefois, on convient d'appeler **mesure de déformation** un tenseur ayant les propriétés suivantes :

- (i) il est symétrique et sans dimension physique ;
- (ii) il est nul pour un mouvement de corps rigide et en  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{1}}$  ;
- (iii) son développement limité autour de  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{1}}$  s'écrit  $\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}^T) + o(\tilde{\mathbf{H}})$ .

Toutes les mesures de déformation rassemblées dans le tableau 2.2 vérifient ces trois conditions. Le sens de la condition (iii) n'apparaîtra clairement qu'au paragraphe 2.3.3. Les mesures de déformation les plus utilisées appartiennent à la famille suivante :

$$\tilde{\mathbf{E}}_n := \frac{1}{n}(\tilde{\mathbf{U}}^n - \tilde{\mathbf{1}}), \quad \tilde{\mathbf{A}}_n := \frac{1}{n}(\tilde{\mathbf{V}}^n - \tilde{\mathbf{1}}) \quad (2.84)$$

où  $n$  est un entier relatif non nul. On reconnaît en particulier :

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = \tilde{\mathbf{E}}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_{-2} = \tilde{\mathbf{A}} \quad (2.85)$$

On étend la définition (2.84) au cas  $n = 0$  en posant :

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 := \log \tilde{\mathbf{U}}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_0 := \log \tilde{\mathbf{V}} \quad (2.86)$$

Le logarithme d'un tenseur symétrique défini positif est défini par

$$\underline{U} = \sum_{r=1}^3 \lambda_r \underline{V}_r \otimes \underline{V}_r \implies \log \underline{U} := \sum_{r=1}^3 (\log \lambda_r) \underline{V}_r \otimes \underline{V}_r \quad (2.87)$$

où les  $(\lambda_r, \underline{V}_r)$  sont les valeurs et vecteurs propres de  $\underline{U}$ . La matrice de ses composantes est obtenue en diagonalisant  $\underline{U}$ , en passant au logarithme, puis en revenant à la base initiale :

$$[\log \underline{U}] = [P] \begin{bmatrix} \log \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \log \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \log \lambda_3 \end{bmatrix} [P^{-1}] \quad (2.88)$$

où  $[P]$  désigne la matrice de passage de la base des  $(\underline{E}_i)$  à la base des  $(\underline{V}_i)$ <sup>7</sup>.

#### *Quelques propriétés des mesures de déformation*

Le tenseur  $\underline{U}$  est symétrique et donc diagonalisable. Il est en outre défini positif. Il possède des vecteurs propres  $(\underline{V}_r)_{r=1,3}$ , qui sont deux à deux orthogonaux. Soient  $(\lambda_r)_{r=1,3}$  les valeurs propres de  $\underline{U}$  :

$$\underline{U} \cdot \underline{V}_r = \lambda_r \underline{V}_r, \quad \lambda_r > 0 \quad (2.89)$$

sans sommation sur l'indice  $r$ . Les vecteurs propres sont appelés **directions principales** ou **axes principaux** de  $\underline{U}$ , et les valeurs propres **déformations principales**. On remarque que

$$\det \underline{U} = J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.90)$$

En multipliant l'équation (2.89) par la rotation propre  $\underline{R}$ ,

$$\underline{R} \cdot \underline{U} \cdot \underline{V}_r = \underline{F} \cdot \underline{V}_r = \underline{V} \cdot \underline{R} \cdot \underline{V}_r = \lambda_r \underline{R} \cdot \underline{V}_r \quad (2.91)$$

on s'aperçoit que les  $\lambda_r$  sont aussi valeurs propres de  $\underline{V}$ , les vecteurs propres correspondants étant ceux de  $\underline{U}$  tournés par  $\underline{R}$  :

$$\underline{v}_r = \underline{R} \cdot \underline{V}_r \quad (2.92)$$

Les grandeurs introduites permettent de définir la **décomposition spectrale** de  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  :

$$\underline{U} = \sum_{r=1}^3 \lambda_r \underline{V}_r \otimes \underline{V}_r, \quad \underline{V} = \sum_{r=1}^3 \lambda_r \underline{v}_r \otimes \underline{v}_r \quad (2.93)$$

La décomposition polaire de  $\underline{F}$  et la décomposition spectrale de  $\underline{U}$  et  $\underline{V}$  permettent d'interpréter la déformation à l'aide des deux scénarios suivants, par ailleurs illustrés par la figure 2.9 :

- On allonge d'abord les fibres matérielles initialement parallèles aux directions propres  $\underline{V}_r$  du facteur  $\lambda_r$  pour les amener à leur longueur finale. On les tourne

7. On renvoie aux articles de Hill (Hill, 1968; Hill, 1978) pour une discussion détaillée sur les mesures de déformation. Le choix de la mesure de déformation le mieux adapté est celui qui conduit à l'expression la plus simple de la loi de comportement du matériau étudié. Un tel choix ne peut apparaître qu'après une analyse fine des réponses du matériau à de multiples sollicitations. Il peut exister aussi des raisons théoriques permettant de privilégier l'une ou l'autre des mesures de déformation. Le côté arbitraire de ce choix peut être réduit en s'interrogeant sur la notion de déformation au niveau de la variété matérielle intrinsèque  $\mathcal{M}$  introduite au début de ce chapitre. Une telle démarche est proposée dans l'ouvrage (Rougée, 1997). Dans l'article (Xiao and Bruhns, 1997), la mesure logarithmique joue un rôle privilégié. On souhaite simplement indiquer ici qu'il s'agit d'un sujet de recherche toujours d'actualité.

ensuite de  $\tilde{\mathbf{R}}$  pour leur conférer leur orientation finale.

- On tourne les fibres matérielles initialement parallèles aux directions propres  $\underline{\mathbf{V}}_r$  pour les amener à leur position finale  $\tilde{\mathbf{R}}\underline{\mathbf{V}}_r$ . On leur applique ensuite le tenseur gauche de déformation pure  $\underline{\mathbf{V}}$  pour leur conférer leur longueur finale.

C'est en ce sens que l'on dit que  $\tilde{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$  fait passer de la configuration initiale  $\Omega_0$  à la configuration actuelle  $\Omega$  tandis que  $\underline{\mathbf{U}}$  est défini entièrement sur  $\Omega_0$  et  $\underline{\mathbf{V}}$  entièrement sur  $\Omega$ . On dit que  $\underline{\mathbf{U}}$  est une **mesure lagrangienne de déformation** et  $\underline{\mathbf{V}}$  une **mesure eulérienne de déformation**. Il s'ensuit que le tenseur de Cauchy-Green droit (resp. gauche) est aussi une mesure lagrangienne (resp. eulérienne) de déformation. Ce résultat se généralise à la famille de mesures de déformation (2.84).

Les décompositions spectrales de  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}$  se déduisent de celles de  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{V}}$  respectivement :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{r=1}^3 \lambda_r^2 \underline{\mathbf{V}}_r \otimes \underline{\mathbf{V}}_r, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \sum_{r=1}^3 \lambda_r^2 \underline{\mathbf{v}}_r \otimes \underline{\mathbf{v}}_r \quad (2.94)$$

Finalement,

$$\underline{\mathbf{E}} = \sum_{r=1}^3 \frac{1}{2} (\lambda_r^2 - 1) \underline{\mathbf{V}}_r \otimes \underline{\mathbf{V}}_r, \quad \underline{\mathbf{A}} = \sum_{r=1}^3 \frac{1}{2} (1 - \lambda_r^{-2}) \underline{\mathbf{V}}_r \otimes \underline{\mathbf{V}}_r, \quad (2.95)$$

Concernant ces directions principales en un point matériel  $\underline{\mathbf{X}}$ , on a le

**Théorème 2 (Directions orthogonales au cours de la transformation)** *Les trièdres de directions matérielles de  $\Omega_0$  deux à deux orthogonales et qui se transforment en trièdres de directions à nouveau deux à deux orthogonales à l'instant  $t$  sont les trièdres des directions principales du tenseur  $\tilde{\mathbf{C}}(t)$  de Cauchy-Green droit. Lorsque les valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{C}}$  sont distinctes, un tel trièdre est unique.*

**Preuve.** Le trièdre des directions principales  $\underline{\mathbf{V}}_i$  du tenseur symétrique  $\tilde{\mathbf{C}}(t)$  sont deux à deux orthogonales et se transforment effectivement en un trièdre de directions deux à deux orthogonales à l'instant  $t$ , ce que montre une vérification immédiate en utilisant 2.67. Réciproquement, s'il existe trois directions deux à deux orthogonales  $(\underline{\mathbf{V}}_1, \underline{\mathbf{V}}_2, \underline{\mathbf{V}}_3)$  telles que

$$\underline{\mathbf{V}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{V}}_2 = 0 \quad (2.96)$$

$$\underline{\mathbf{V}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{V}}_3 = 0 \quad (2.97)$$

$$\underline{\mathbf{V}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{V}}_3 = 0 \quad (2.98)$$

Les équations (2.97) et (2.98) montrent que  $\tilde{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{V}}_3$  est orthogonal à  $\underline{\mathbf{V}}_1$  et  $\underline{\mathbf{V}}_2$  et est donc colinéaire à  $\underline{\mathbf{V}}_3$ . On en déduit que  $\underline{\mathbf{V}}_3$  est une direction propre de  $\tilde{\mathbf{C}}$ . Le même raisonnement s'applique à  $\underline{\mathbf{V}}_1$  et  $\underline{\mathbf{V}}_2$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Si la propriété d'orthogonalité d'un trièdre de directions matérielles existe aux instants  $t_0$  et  $t$ , elle ne sera en général pas vérifiée à un instant intermédiaire  $t_0 < s < t$ .

Un théorème similaire s'énonce qui porte sur les trièdres de directions matérielles de  $\Omega$  deux à deux orthogonales et les directions principales de  $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ .

Autrement dit, tout trièdre principal de  $\underline{\mathbf{U}}$  se transforme en un trièdre trirectangle. L'orientation du trièdre déformé par rapport au trièdre initial est donnée exactement par  $\tilde{\mathbf{R}}$ . C'est pourquoi il est intéressant de suivre la déformation d'une grille dont les arêtes (fibres matérielles) sont parallèles aux directions principales de  $\underline{\mathbf{U}}$ . C'est effectivement le cas lorsque l'on observe que les trièdres trirectangles formés par des arêtes de la grille initiale se transforment en trièdres trirectangles. L'orientation de chaque élément de la grille

finale par rapport au premier permet de “visualiser” la rotation propre. La grille sur le milieu continu subissant un glissement sur la figure 2.6 n'a clairement pas été déposée parallèlement aux directions de  $\tilde{U}$ . Par contre, c'est le cas dans les figures 2.7 et 2.12.

Le théorème évoque le seul trièdre qui est orthogonal aux instants  $t_0$  et  $t$ , mais il existe par contre de nombreux couples de vecteurs qui sont orthogonaux à ces instants. Il suffit par exemple de prendre une direction principale de  $\tilde{C}$  et un vecteur du plan engendré par les deux autres directions principales.

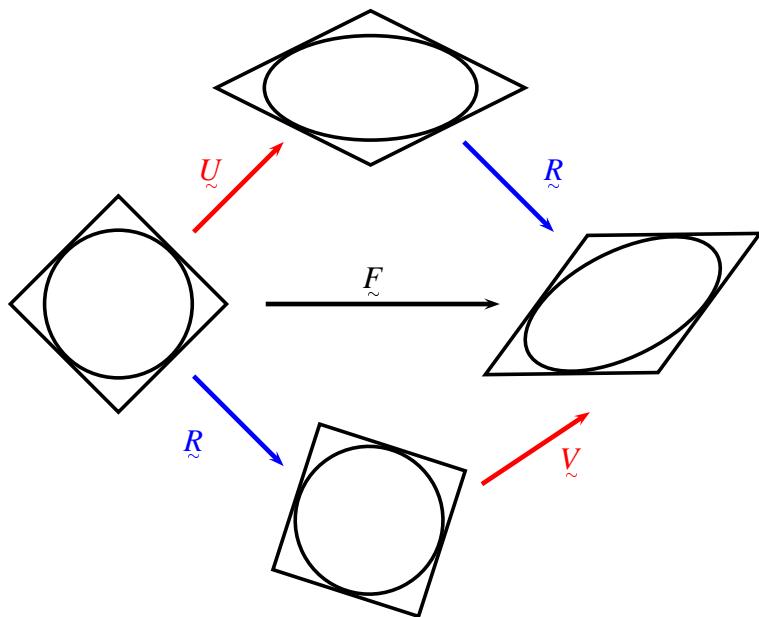


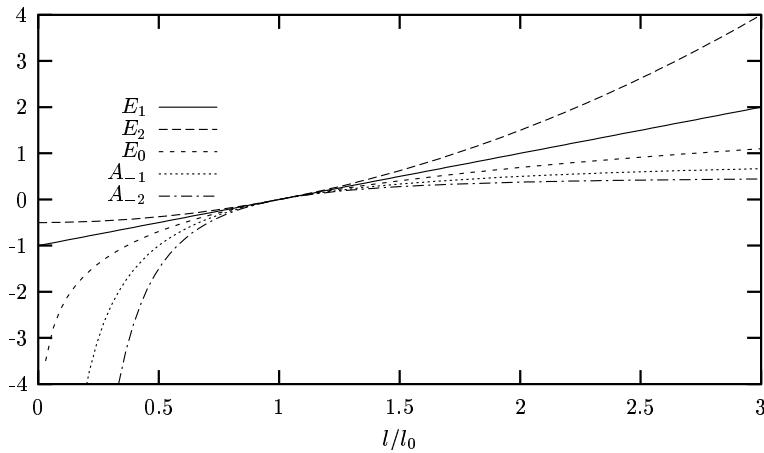
Figure 2.9 : Décomposition polaire du gradient de la transformation. Les ellipses ont pour grand et petit axes les vecteurs propres respectifs de  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$ .

### Extensométrie

Dans la pratique, lorsqu'on utilise par exemple un extensomètre pour suivre la déformation (figure 2.2b), on suit deux points séparés initialement par la distance  $l_0$  et par  $l$  à l'instant actuel. On suppose qu'au cours d'un tel essai la déformation est homogène dans la zone où sont placés les deux points de mesure. On note 1 la direction parallèle à la ligne matérielle étudiée et on suit la déformation le long de cette direction. Il est possible alors de voir ce que donnent les différentes mesures de déformation évoquées au cours de cette transformation. Les scalaires donnés ici correspondent à la composante 11 du tenseur utilisé.

$$C = \left( \frac{l}{l_0} \right)^2, \quad B = \left( \frac{l}{l_0} \right)^2 \quad (2.99)$$

$$E_1 = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad A_{-1} = \frac{l - l_0}{l} \quad (2.100)$$



*Figure 2.10 : Evolution de différentes mesures de déformation en fonction du rapport  $l/l_0$  des longueurs actuelle et initiale d'un segment matériel au cours d'une déformation pure homogène.*

$$E_2 = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{l}{l_0} \right)^2 - 1 \right), \quad A_{-2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{l_0}{l} \right)^2 \right) \quad (2.101)$$

$$E_0 = \log \frac{l}{l_0}, \quad A_0 = \log \frac{l_0}{l} \quad (2.102)$$

Les profils correspondants sont tracés sur la figure 2.10. On vérifie que les mesures sont nulles en 1 et ont une tangente commune de pente 1. On voit aussi que  $E_0$ ,  $A_{-1}$  et  $A_{-2}$  tendent vers  $-\infty$  lorsque  $l$  tend vers 0, c'est-à-dire lorsque qu'on comprime considérablement l'éprouvette. Ces mesures offrent en quelque sorte une "résolution" meilleure dans ce domaine de déformation et sont, de ce fait, privilégiées en mécanique des sols par exemple où l'essai de compression est l'essai de base.

La mesure de déformation uniaxiale  $E_1$  qui se rapporte à la longueur initiale est souvent appelée **déformation nominale** ou **déformation de l'ingénieur**. La **déformation logarithmique**  $E_0$ , dite aussi parfois **naturelle**, est très utilisée dans la pratique. À la livraison d'une courbe de traction par exemple, il est important de s'enquérir des grandeurs portées sur les axes. Il est clair que l'information essentielle est contenue dans l'enregistrement de  $F_{11} = l/l_0$ . Les mesures de déformation sont donc toutes équivalentes. Toutefois, de nombreuses courbes expérimentales sont fournies traditionnellement en utilisant  $\log(l/l_0)$ . Il est important de le savoir !

### Composition des déformations

Si le corps matériel est soumis à une transformation  $\tilde{\mathbf{F}}_1$  depuis la configuration de référence  $\Omega_0$ , puis à la transformation  $\tilde{\mathbf{F}}_2$  partant de la configuration  $\Omega_1$ , la transformation totale par rapport à  $\Omega_0$  vaut

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_1. \quad (2.103)$$

La composition des gradients de transformation est donc multiplicative. Par contre, les effets sur les tenseurs de déformation sont plus complexes. Par exemple,

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{F}}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{C}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_1 \neq \tilde{\mathbf{C}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{C}}_1. \quad (2.104)$$

De même,  $\tilde{\mathbf{E}} \neq \tilde{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\mathbf{E}}_2$  (ici les indices 1 et 2 ne se réfèrent pas à la famille des mesures de déformation (2.84) mais aux déformations de Green-Lagrange entre les configurations  $\Omega_0/\Omega_1$  et  $\Omega_1/\Omega_2$  respectivement).

$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$	gradient de la transformation ( $\det \tilde{\mathbf{F}} > 0$ )
$\tilde{\mathbf{R}}$	rotation propre ( $\det \tilde{\mathbf{R}} = 1$ )
$\tilde{\mathbf{U}}$	tenseur droit de déformation pure ( $\det \tilde{\mathbf{U}} = \det \tilde{\mathbf{F}}$ )
$\tilde{\mathbf{V}}$	tenseur gauche de déformation pure ( $\det \tilde{\mathbf{V}} = \det \tilde{\mathbf{F}}$ )
$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{1} = \text{Grad } \underline{\mathbf{u}}$	gradient du déplacement
$\tilde{\mathbf{C}} := \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{U}}^2$	tenseur de Cauchy-Green droit ( $\det \tilde{\mathbf{C}} = (\det \tilde{\mathbf{F}})^2$ )
$\tilde{\mathbf{B}} := \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T = \tilde{\mathbf{V}}^2$	tenseur de Cauchy-Green gauche ( $\det \tilde{\mathbf{B}} = (\det \tilde{\mathbf{F}})^2$ )
$\tilde{\mathbf{E}} := \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{1})$	tenseur de Green-Lagrange
$\tilde{\mathbf{A}} := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{B}}^{-1})$	tenseur d'Almansi
$\tilde{\mathbf{U}} - \mathbf{1}$	déformation lagrangienne de Biot
$\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{V}}^{-1}$	déformation eulérienne de Biot
$\log \tilde{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \log \tilde{\mathbf{C}}$	déformation logarithmique lagrangienne de Hencky
$\log \tilde{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} \log \tilde{\mathbf{B}}$	déformation logarithmique eulérienne de Hencky

Tableau 2.2: Récapitulatif : tenseurs décrivant la géométrie de la transformation

### 2.3.3 Transformations infinitésimales

Dans de nombreuses situations pratiques se pose le problème de l'étude des propriétés en service de matériaux et de structures. Matériaux et structures ne sont alors autorisés qu'à subir de faibles déformations : tôles d'aluminium de la nacelle d'un avion, structures en béton du génie civil... Ce genre de problèmes liés au **dimensionnement** et à la **fiabilité** des structures, peut être traité dans le cadre de l'hypothèse des transformations infinitésimales,

i.e. en faisant l'hypothèse que

$$\|\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla_X\| \ll 1 \iff \underline{\mathbf{F}} = \mathcal{O}(1) \quad (2.105)$$

En choisissant par exemple comme norme la norme infinie i.e. le maximum de la valeur absolue des composantes, l'hypothèse porte donc aussi sur la valeur absolue de chacune des composantes de  $\underline{\mathbf{H}}$  qui doit être suffisamment petite. On parle de transformations infinitésimales par opposition aux **transformations finies** générales envisagées jusqu'ici. On parle aussi parfois de théorie linéaire géométrique. L'équation (2.105) montre que l'hypothèse ne porte pas tant sur la transformation  $\Phi$  elle-même que sur son gradient  $\underline{\mathbf{F}}$ . L'hypothèse (2.105) est liée à un référentiel particulier (ou à des référentiels "infiniment proches") et à une configuration de référence particulière. Une telle hypothèse est en outre hors de propos pour les problèmes d'écoulements de fluides et ceux de l'élaboration des matériaux et fabrication des pièces et structures notamment par **mise en forme**.

Dans la suite, le signe  $\simeq$  signifie que l'égalité n'est vraie qu'à un terme de l'ordre  $o(\|\underline{\mathbf{H}}\|)$  près, que l'on notera aussi  $o(h)$  ou, de manière équivalente,  $\mathcal{O}(h^2)$ . Ainsi, dans le contexte infinitésimal, les termes pertinents sont les contributions des ordres  $\mathcal{O}(1)$  et  $\mathcal{O}(h)$ . Il sera donc toujours licite de corriger une expression par des termes d'ordre 2 par rapport à l'ordre des termes présents dans l'expression considérée.

### Tenseur des déformations infinitésimales

L'hypothèse des transformations infinitésimales a le mérite de simplifier considérablement les méthodes mathématiques de résolution du problème posé<sup>8</sup>. En particulier, on pourra négliger tous les termes en  $\underline{\mathbf{H}}^T \cdot \underline{\mathbf{H}}$  par rapport aux termes en  $\underline{\mathbf{H}}$  dans les expressions des mesures de déformations rassemblées dans le tableau 2.2. On ne garde donc que les termes linéaires en  $\underline{\mathbf{H}}$ . C'est en ce sens que l'on parle de déformations **linéarisées**. Par exemple la déformation de Green-Lagrange se réduit à

$$\underline{\mathbf{E}} \simeq \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{H}}^T) = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.106)$$

où l'on a introduit le tenseur des déformations infinitésimales

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{H}}^T) \quad (2.107)$$

Dans une base cartésienne orthonormée  $(\underline{\mathbf{e}}_i)$ , le tenseur des déformations infinitésimales s'écrit :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.108)$$

Sous forme matricielle,

$$[\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) & \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

où l'on a introduit la notation très utilisée en physique

$$u_{i,j} := \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (2.110)$$

<sup>8</sup>. La solution trouvée n'est toutefois pertinente que si l'hypothèse des transformations infinitésimales est légitime pour le problème posé !

Le tenseur des déformations infinitésimales est donc la partie symétrique du gradient du déplacement. Dans ce contexte et selon la condition (*iii*) choisie pour définir les mesures de déformation au paragraphe 2.3.2, toutes les mesures de déformation coïncident autour de  $\underline{F} \simeq \underline{1}$ .

Il est toujours possible de calculer  $\underline{\xi}$  d'après la formule (2.107) mais c'est uniquement dans le contexte des transformations infinitésimales qu'il prend son sens de tenseur des déformations. C'est pourquoi il n'apparaît pas dans le tableau récapitulatif 2.2 mais seulement dans le tableau 2.3. Une conséquence de ce fait est que l'on peut très bien avoir une déformation de Green-Lagrange nulle ( $\underline{E} = 0$ ,  $\underline{C} = \underline{1}$ ) et une déformation infinitésimale non nulle ( $\underline{\xi} \neq 0$ ) ! Il suffit de considérer un mouvement de corps rigide (2.50) :

$$\underline{F} = \underline{Q} \implies \underline{C} = \underline{1}, \quad \underline{E} = 0 \quad \text{mais} \quad \underline{\xi} = \frac{1}{2}(\underline{Q} + \underline{Q}^T) - \underline{1} \neq 0 \quad (2.111)$$

La déformation infinitésimale associée à ce mouvement ne sera quasi-nulle que pour une rotation  $\underline{Q}$  elle-même infinitésimale (voir plus loin la représentation des petites rotations).

Il est utile d'expliciter ce que deviennent les variations de longueurs et d'angles dans le contexte infinitésimal. Le rapport d'allongement  $\lambda(\underline{M})$  d'une direction  $\underline{M}$  calculé en (2.72) devient

$$\lambda(\underline{M}) = \sqrt{\underline{M} \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}} \simeq \sqrt{1 + 2\underline{M} \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}} \simeq 1 + \underline{M} \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M} \quad (2.112)$$

Autrement dit,

$$\frac{|\underline{dx}| - |\underline{dX}|}{\underline{dX}} \simeq \underline{M} \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M} \quad (2.113)$$

La grandeur  $\underline{M} \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}$  mesure précisément l'allongement relatif d'un vecteur matériel  $\underline{M}$ . Elle est donc directement utilisée pour interpréter les résultats de mesures à l'aide de jauge ou d'extensomètres (cf. figure 2.11).

Si  $\underline{M} = \underline{e}_1$  (pour une base cartésienne orthonormée donnée), et si l'on note  $\delta$  l'allongement de ce vecteur au cours de la déformation,

$$\delta \simeq \varepsilon_{11} \quad (2.114)$$

ce qui fournit une interprétation simple de la première composante du tenseur des déformations infinitésimales.

L'angle de glissement (2.77) quant à lui devient

$$\cos \theta \simeq \cos \Theta (1 - \underline{M}_1 \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}_1 - \underline{M}_2 \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}_2) + 2\underline{M}_1 \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}_2 \quad (2.115)$$

En remarquant que (voir équation (2.79) pour la définition de  $\gamma$ )

$$\cos \theta = \cos(\Theta - \gamma) = \cos \Theta \cos \gamma + \sin \Theta \sin \gamma \simeq \cos \Theta + \gamma \sin \Theta$$

on obtient

$$\gamma \sin \Theta = -\cos \Theta (\underline{M}_1 \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}_1 + \underline{M}_2 \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}_2) + 2\underline{M}_1 \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}_2 \quad (2.116)$$

Dans le cas de deux directions initialement orthogonales, la relation précédente devient :

$$\gamma \simeq 2\underline{M}_1 \cdot \underline{\xi} \cdot \underline{M}_2 \quad (2.117)$$

Si l'on prend  $\underline{M}_1 = \underline{e}_1$  et  $\underline{M}_2 = \underline{e}_2$ , le résultat précédent s'écrit

$$\gamma \simeq 2\varepsilon_{12} \quad (2.118)$$

ce qui fournit une interprétation simple de la composante de cisaillement du tenseur des déformations infinitésimales.

Les variations de volume sont évaluées dans le contexte infinitésimal de la manière suivante. D'après l'équation (2.37),

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dV} &= \det \tilde{\mathbf{F}} = \det \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + u_{3,3} \end{bmatrix} \\ &\simeq 1 + u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = 1 + \nabla \cdot \underline{\mathbf{u}} = 1 + \text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.119)$$

où l'on a négligé tous les termes non linéaires en  $u_{i,j}$ . Autrement dit,

$$\frac{dv - dV}{dV} = \text{div } \underline{\mathbf{u}} = \text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.120)$$

La variation infinitésimale de volume est donc fournie par la trace du tenseur des déformations infinitésimales. Une transformation infinitésimale localement isochore est donc caractérisée par

$$\text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (2.121)$$



*Figure 2.11 : Mesures locales à l'aide de **jauge de déformation** collées ici sur un assemblage pied d'aube de turbine sur une portion de disque de turbine. Le pied d'aube en forme dite de pied de sapin est soumis à une traction tandis que le disque est fixé. Des déformations hétérogènes se développent dans le pied d'aube et dans le disque. La hauteur du pied de sapin est de 4cm. L'allongement des jauge provoque une variation de l'intensité du courant qui y circule. Une calibration permet de relier la mesure de courant à la déformation de la jauge. La jauge étant collée à la surface de la pièce, la déformation subie par la jauge est la même que la composante de déformation (2.113) locale de la pièce. La qualité du collage est bien sûr essentielle et ne peut être garantie que sur un domaine de déformation limité.*

*Transformation infinitésimale = petite déformation + petite rotation*

On note  $\tilde{\omega}$  la partie antisymétrique du gradient du déplacement :

$$\tilde{\omega} := \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T), \quad \omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2.122)$$

Elle s'appelle **tenseur des rotations infinitésimales**. On revient sur cette définition au paragraphe suivant. Par suite,

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \simeq (\tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot (\tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \quad (2.123)$$

On peut donc identifier à l'ordre  $o(\tilde{\mathbf{H}})$  près la rotation propre et la déformation pure associées à  $\tilde{\mathbf{F}}$  :

$$\tilde{\mathbf{R}} \simeq \tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \tilde{\mathbf{U}} \simeq \tilde{\mathbf{1}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \simeq \tilde{\mathbf{V}} \quad (2.124)$$

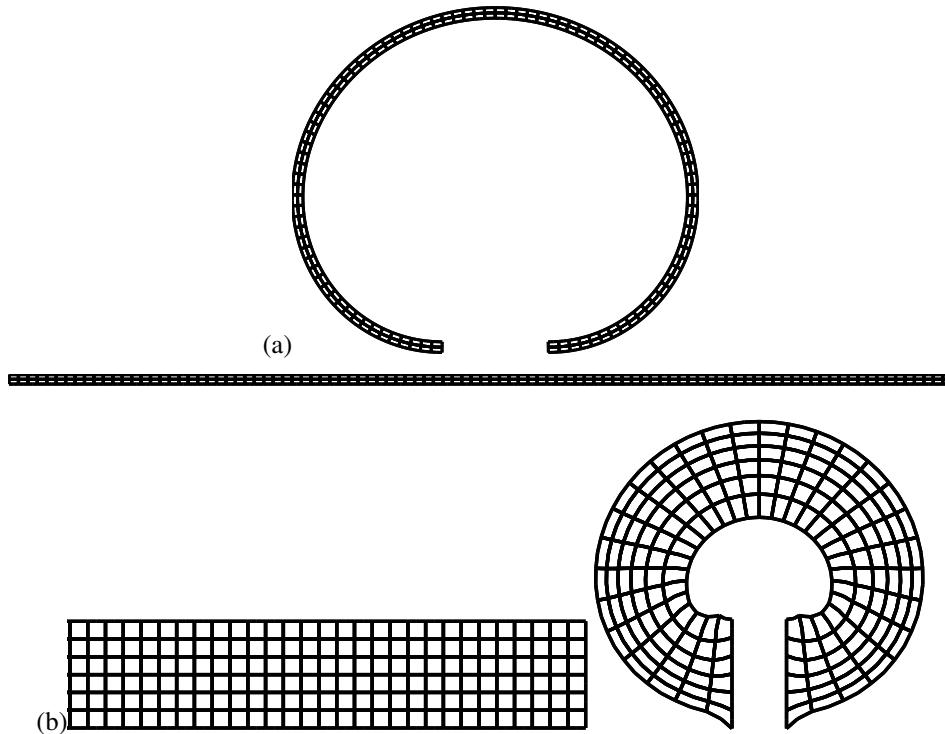
Comme toutes les composantes de  $\tilde{\mathbf{H}}$  sont supposées suffisamment petites, il en va de même pour les tenseurs des déformations et des rotations infinitésimales. En résumé,

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{H}}| \ll 1 &\implies |\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}| \ll 1, \quad |\tilde{\boldsymbol{\omega}}| \ll 1 \\ \tilde{\mathbf{F}} \simeq \tilde{\mathbf{1}} &\implies \tilde{\mathbf{R}} \simeq \tilde{\mathbf{1}}, \quad \tilde{\mathbf{U}} \simeq \tilde{\mathbf{1}} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Le cadre des transformations infinitésimales est donc plus restrictif que celui où l'on ne demanderait qu'aux seules déformations d'être infinitésimales, puisqu'il implique aussi que les rotations restent infinitésimales.

On le voit, l'hypothèse d'une transformation infinitésimale implique que les déformations doivent rester infinitésimales. La réciproque est fausse en général. Si les déformations sont faibles, il n'en va pas nécessairement de même de la transformation associée. En effet les rotations correspondantes peuvent ne pas être négligeables du tout. La figure 2.12(a) de la flexion pure d'une plaque ou d'un fil mince est là pour nous en convaincre. On y voit l'état initial rectiligne de la plaque et l'état final qui lui est imposé. Les rotations que subissent certains éléments de la plaque sont indéniablement très fortes (la rotation relative entre les deux extrémités de la plaque est de  $360^\circ$ ). L'expérience quotidienne de ce genre de sollicitations sur des fils métalliques par exemple nous indique que les déformations correspondantes sont d'autant plus faibles au cours de cette expérience que le fil est mince. Si le fil est très mince, l'expérience peut même être réalisée sans que le fil ne subisse de déformation permanente à l'issue de l'essai. Les corps élancés 1D (**fils, câbles et poutres** pour lesquels une dimension est très grande par rapport aux autres) ou 2D (**plaques et coques** pour lesquelles deux dimensions sont beaucoup plus grandes que la troisième) fournissent donc des exemples de transformations pour lesquelles les déformations sont faibles mais les rotations importantes. Sur la figure 2.12(b), le corps dont l'épaisseur n'est pas négligeable devant la courbure imposée au fil ou à la plaque subit quant à lui aussi bien de grandes déformations que de grandes rotations. Pour les corps résolument 3D par contre, il semble bien que petite déformation implique une transformation modérée, c'est du moins ce que suggère ce dernier exemple.

Un cadre plus réaliste pour le traitement des corps élancés mais aussi de certains procédés de mise en forme est l'hypothèse des rotations finies mais déformations infinitésimales. C'est de ce contexte qu'il s'agit dans la théorie dite des **poutres en grandes rotations**, appelée aussi, de manière moins pertinente, poutres en grands déplacements.



*Figure 2.12 : Flexion pure d'un corps mince (a) et d'un corps 3D (b). On a tracé une grille sur la surface initiale des corps pour mieux suivre la déformation. Les états initiaux et finaux sont montrés. L'expérience sur le corps épais n'est pas facile à réaliser : pour le faire, on a collé les extrémités de la barre à 2 parallélépipèdes en acier que l'on tourne chacune de 180°.*

### Représentation des petites rotations

Dans un repère tel que le troisième axe coïncide avec l'axe de rotation, la matrice d'une rotation  $\underline{R}$  s'écrit en fonction de l'angle de rotation  $\phi$  :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

c'est-à-dire la somme de l'identité et d'une matrice antisymétrique lorsque  $|\phi| \ll 1$ . Le résultat précédent explicité dans une base particulière montre que le tenseur des rotations infinitésimales se décompose en la somme de l'identité et d'un tenseur antisymétrique :

$$\underline{R} \simeq \underline{\mathbb{1}} + \underline{\omega}, \quad \text{avec} \quad \underline{\omega}^T + \underline{\omega} = 0 \quad (2.127)$$

$\underline{H} = \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} = \text{Grad } \underline{u}$	gradient du déplacement
$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{u} + (\text{Grad } \underline{u})^T)$	tenseur des déformations infinitésimales
$\underline{\omega} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{u} - (\text{Grad } \underline{u})^T)$	tenseur des rotations infinitésimales
$\underline{F} = \underline{1} + \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \simeq (\underline{1} + \underline{\varepsilon}).(\underline{1} + \underline{\omega})$	
$\underline{R} \simeq \underline{1} + \underline{\omega}, \quad \underline{U} \simeq \underline{1} + \underline{\varepsilon} \simeq \underline{V}$	
$\underline{E} \simeq \underline{\varepsilon}, \quad \underline{C} \simeq \underline{1} + 2\underline{\varepsilon} \simeq \underline{B}$	
$\frac{ \underline{dx}  -  \underline{dX} }{ \underline{dX} } \simeq \underline{M} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{M}$	allongement relatif infinitésimal
$\frac{dv - dV}{dV} \simeq \text{div } \underline{u} = \text{trace } \underline{\varepsilon}$	variation de volume infinitésimale

Tableau 2.3: Récapitulatif : le contexte des transformations infinitésimales.

Un tenseur antisymétrique 3D ne possède que trois composantes indépendantes. A chaque tenseur antisymétrique  $\underline{\omega}$  est associé l'unique vecteur  $\overset{\times}{\underline{\omega}}$  tel que :

$$\forall \underline{x}, \quad \underline{\omega} \cdot \underline{x} =: \overset{\times}{\underline{\omega}} \wedge \underline{x} \quad (2.128)$$

En notation matricielle, la définition précédente s'écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\overset{\times}{\omega}_3 & \overset{\times}{\omega}_2 \\ \overset{\times}{\omega}_3 & 0 & -\overset{\times}{\omega}_1 \\ -\overset{\times}{\omega}_2 & \overset{\times}{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

où les  $\overset{\times}{\omega}_i$  sont les composantes du vecteur  $\overset{\times}{\underline{\omega}}$ .

Un **mouvement de corps rigide infinitésimal** s'écrit donc de la manière suivante :

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} = \underline{c}(t) + \underline{\omega}(t) \cdot \underline{X} = \underline{c}(t) + \overset{\times}{\underline{\omega}} \wedge \underline{X} \quad (2.130)$$

où  $\underline{\omega}$  est un tenseur antisymétrique indépendant de  $\underline{X}$ . La relation précédente est la linéarisation de (2.50). La translation  $\underline{c}(t)$  peut être d'amplitude tout à fait quelconque.

#### 2.3.4 Etude des déformations homogènes

Dans le contexte général des transformations finies, il est clair que lorsque la transformation est homogène au sens du paragraphe 2.2.7, les mesures de déformation introduites sont elles-aussi homogènes et ne dépendent donc que du temps  $t$ . La réciproque est vraie

mais plus délicate à établir : une déformation homogène implique-t-elle une transformation correspondante homogène ?

**Théorème 3 (Déformation homogène)** *La déformation de Green-Lagrange  $\tilde{\mathbf{E}}$  (resp. la déformation pure  $\tilde{\mathbf{U}}$ ) est homogène si et seulement si la transformation est homogène.*

**Preuve.** Si  $\tilde{\mathbf{E}}$  est homogène, alors les tenseurs  $\tilde{\mathbf{C}}$  et donc  $\tilde{\mathbf{U}}$  sont homogènes aussi. Il reste donc à établir que  $\tilde{\mathbf{R}}$  est homogène. On peut pour cela utiliser la représentation de la rotation  $\tilde{\mathbf{R}}$  à l'aide des angles d'Euler (cf. équation (12.93)). En écrivant les relations de Schwarz sur les dérivées croisées de  $\tilde{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{X}}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}$ , on établit que les angles d'Euler doivent être indépendants de  $\underline{\mathbf{X}}$ .  $\square$

#### Déformation nulle

**Théorème 4 (Déformation nulle)** *La déformation de Green-Lagrange  $\tilde{\mathbf{E}}$  est nulle en tout point de  $\Omega_0$  à un instant  $t$  si et seulement si la transformation de  $\Omega_0$  à  $\Omega_t$  est un mouvement de corps rigide.*

**Preuve.** Si la transformation est un mouvement de corps rigide (2.50), le gradient de la transformation  $\tilde{\mathbf{F}}$  se réduit alors à sa rotation propre  $\tilde{\mathbf{R}}$  de sorte que  $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{1}}$  et  $\tilde{\mathbf{E}} = 0$ . Si  $\tilde{\mathbf{E}} = 0$ , alors  $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{1}}$ . Par conséquent  $\tilde{\mathbf{F}}$  se réduit à la rotation propre  $\tilde{\mathbf{R}}(\underline{\mathbf{X}})$ . D'après le théorème précédent 3, l'homogénéité de  $\tilde{\mathbf{E}}$  entraîne celle de  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{R}}$ . Le gradient de la transformation est donc un champ de rotation homogène. La transformation associée est donc un mouvement de corps rigide.  $\square$

#### Extension simple

On revient à la cinématique (2.51) d'extension simple. Du gradient de la transformation (2.52), on déduit les tenseurs de Cauchy-Green et de Green-Lagrange :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{1}} + \lambda(2 + \lambda)\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 = \tilde{\mathbf{B}}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \frac{\lambda}{2}(2 + \lambda)\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 \quad (2.131)$$

$$[\tilde{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} (1 + \lambda)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\tilde{\mathbf{E}}] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2}(2 + \lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

On remarque que la déformation de Green-Lagrange est purement uni-axiale, ce qui correspond bien à l'image de l'extension simple de la figure (2.7). Si la transformation est infinitésimale  $\lambda \ll 1$ , on calcule

$$\tilde{\mathbf{E}} \simeq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \lambda \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 \quad (2.133)$$

#### Glissement simple

La déformation de Green-Lagrange associée au glissement simple se déduit de (2.55)

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{1}}) = \frac{\gamma}{2}(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) + \frac{\gamma^2}{2}\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2, \quad [\tilde{\mathbf{E}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

Dans le cas d'une transformation infinitésimale  $\gamma \ll 1$ , le tenseur des déformations infinitésimales  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  vaut

$$\tilde{\boldsymbol{E}} \simeq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

La cinématique du glissement simple infinitésimal conduit donc à une déformation de cisaillement pur d'intensité  $\varepsilon_{12} = \gamma/2$ . Dans des situations plus générales, la variable  $\gamma := 2\varepsilon_{12}$  est fréquemment introduite (à la place de  $\varepsilon_{12}$ ) et est appelée **cisaillement de l'ingénieur**.

### 2.3.5 Conditions de compatibilité

La figure 2.13 montre une grille déposée sur un corps matériel (configuration  $\Omega_0$  en (a)) et une transformation quelconque du corps (configuration  $\Omega$  en (b)). Chaque "petit" élément carré initial de la grille est devenu un "petit" parallélogramme (sur la figure, les carrés déformés ne sont pas des parallélogrammes parce que les carrés initiaux ne sont pas assez "petits"). Les petits parallélogrammes sont tous distincts les uns des autres car la transformation n'est pas homogène. Chaque parallélogramme infinitésimal représente l'état de déformation local  $\tilde{\boldsymbol{C}}(\underline{\mathbf{X}})$  où  $\underline{\mathbf{X}}$  désigne les coordonnées matérielles de chaque carré initial infinitésimal. On a vu en effet que  $\tilde{\boldsymbol{C}}(\underline{\mathbf{X}})$  caractérise complètement la variation de longueur des côtés du carré et la variation d'angle (équations (2.70) et (2.79) respectivement). La figure 2.13(c) montre la collection des parallélogrammes séparés les uns des autres comme les pièces d'un puzzle. Comme nous savons que ces pièces sont issues de la transformation d'un corps matériel continu, nous savons que nous réussirons à reconstituer le puzzle à partir des pièces isolées. Lorsqu'on le reconstitue, on trouve une à une les rotations  $\tilde{\boldsymbol{R}}(\underline{\mathbf{X}})$  nécessaires à la reconstruction du champ de gradient  $\tilde{\boldsymbol{F}}(\underline{\mathbf{X}})$  à partir de  $\tilde{\boldsymbol{C}}(\underline{\mathbf{X}})$ . Le problème de la **compatibilité** dans  $\mathbb{R}^2$  d'un champ de déformation posé dans ce paragraphe peut alors s'énoncer de la manière suivante : étant donné une collection de petits parallélogrammes, chacun étant caractérisé par les composantes  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  et  $C_{12}$  d'un tenseur de Cauchy-Green, à quelles conditions sur le champ  $\tilde{\boldsymbol{C}}(\underline{\mathbf{X}})$  est-il possible de reconstituer le puzzle sans trou ni recouvrement ?

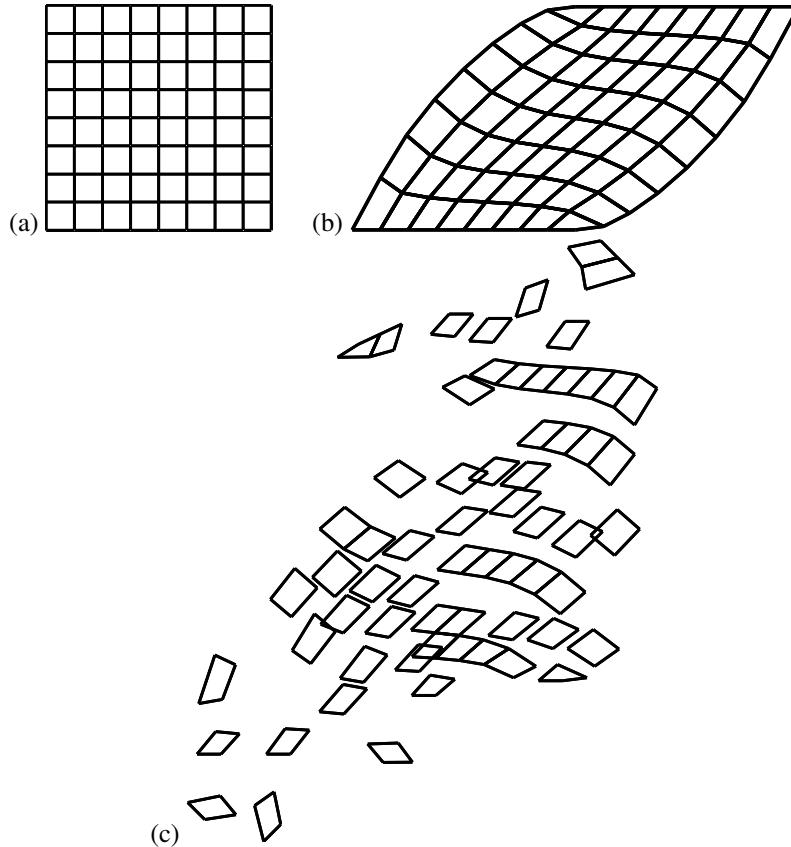
On peut poser le problème d'une manière plus géométrique encore. Puisque  $\tilde{\boldsymbol{C}}$  représente un champ de métrique, à quelles conditions dérive-t-il d'un champ de coordonnées curvilignes ? Comment en déterminer le paramétrage ?

#### Cas général : position du problème

Soit donc un champ de tenseurs symétriques définis positifs  $\tilde{\boldsymbol{C}}(\underline{\mathbf{X}})$ . A quelles conditions sur le champ  $\tilde{\boldsymbol{C}}$  existe-t-il une transformation  $\Phi(\underline{\mathbf{X}})$  dont  $\tilde{\boldsymbol{C}}$  soit le champ de tenseurs des dilatations associé ?

$$\exists \Phi?, \quad (\text{grad } \Phi)^T \cdot (\text{grad } \Phi) = \tilde{\boldsymbol{C}} \quad (2.136)$$

A la lumière de l'illustration de la figure 2.13, on se convaincra aisément qu'à tout champ de tenseurs  $\tilde{\boldsymbol{C}}(\underline{\mathbf{X}})$  donné ne corresponde pas systématiquement une transformation  $\Phi$  ayant les propriétés de régularité requise, **à moins que le champ  $\tilde{\boldsymbol{C}}$  ne soit homogène**. Il suffit qu'un seul des morceaux du puzzle n'ait pas la forme compatible, pour qu'on ne puisse pas le reconstituer. On notera en particulier que dans le cas général 3D, le problème posé revient à passer de la donnée des 6 fonctions caractérisant le champ de tenseurs symétriques, à 3 fonctions caractérisant la transformation. Il doit donc exister des **conditions de compatibilité**.



*Figure 2.13 : Illustration du problème de la compatibilité d'un champ de déformation : configuration initiale (a), configuration déformée (b) et éclaté du corps matériel déformé (c).*

De telles conditions peuvent être établies dans le cadre général des transformations finies. Toutefois nous n'en ferons pas usage dans le cadre de ce cours. Nous nous contenterons donc de les établir ici dans le cas des transformations infinitésimales.

Avant cela toutefois, grâce aux résultats du paragraphe 2.3.4, on est en mesure de répondre à la question suivante, dans le contexte générale :

*Si le champ de déformation proposé est compatible, de combien diffèrent les transformations solutions possibles ?*

Soit  $\underline{C}(\underline{X})$  un champ **compatible** de tenseurs d'ordre 2 symétriques définis positifs. On suppose qu'il existe 2 transformations  $\Phi_1(\underline{X})$  et  $\Phi_2(\underline{X})$  de déplacements dont  $\underline{C}(\underline{X})$  soit le champ des déformations de Cauchy-Green droit associé. Quel est le lien entre  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  ?

Les gradients des transformations  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont liés, en tout point  $\underline{X}$ , par

$$\underline{F}_1^T \cdot \underline{F}_1 = \underline{F}_2^T \cdot \underline{F}_2 = \underline{C} \quad (2.137)$$

Cela implique que les parties de déformation pure de  $\tilde{\mathbf{F}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{F}}_2$  sont identiques :

$$\tilde{\mathbf{U}}_1 = \tilde{\mathbf{U}}_2 = \tilde{\mathbf{U}} \quad (2.138)$$

Par conséquents, il existe des champs de rotation  $\tilde{\mathbf{R}}_1$  et  $\tilde{\mathbf{R}}_2$  tels que

$$\tilde{\mathbf{F}}_1(\underline{\mathbf{X}}) = \tilde{\mathbf{R}}_1(\underline{\mathbf{X}}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}), \quad \tilde{\mathbf{F}}_2(\underline{\mathbf{X}}) = \tilde{\mathbf{R}}_2(\underline{\mathbf{X}}) \cdot \tilde{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}) \quad (2.139)$$

La transformation composée  $\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}$  admet pour gradient

$$\text{Grad}(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}) = \tilde{\mathbf{F}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{F}}_1^{-1} = \tilde{\mathbf{R}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{R}}_1^T = \tilde{\mathbf{Q}} \quad (2.140)$$

Cette transformation est donc un champ de rotations pures  $\tilde{\mathbf{Q}}$ . Au cours de la preuve du théorème 3, on a annoncé que cela n'est possible que si la rotation  $\tilde{\mathbf{Q}}$  est homogène. En conséquence, **les transformations  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  diffèrent d'un mouvement de corps rigide** :

$$\tilde{\mathbf{F}}_2(\underline{\mathbf{X}}) = \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_1(\underline{\mathbf{X}}), \quad \Phi_2(\underline{\mathbf{X}}) = \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \Phi_1(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\mathbf{c}} \quad (2.141)$$

#### *Cas des transformations infinitésimales*

Dans le contexte des transformations infinitésimales, il faut reformuler le problème de la compatibilité. On se donne un champ de tenseurs symétriques  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{X}})$ , et on se demande à quelles conditions il existe un champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}})$  dont  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  soit le champ de gradient symétrisé associé. Ces conditions constituent le

**Théorème 5 (Conditions de compatibilité)** Soit  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{X}})$  un champ de tenseurs symétriques<sup>9</sup>. Il existe un champ de vecteurs  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}})$  tel que

$$\forall \underline{\mathbf{X}}, \quad \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{\mathbf{u}} + (\text{Grad } \underline{\mathbf{u}})^T)(\underline{\mathbf{X}}) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{X}})$$

si et seulement si,  $\forall i, j, k, l$ ,

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il} \quad (2.142)$$

**Preuve.** On établit successivement la condition nécessaire (2.142) puis son caractère suffisant :

- S'il existe  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}})$  tel que, dans un repère cartésien orthonormé,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.143)$$

alors on peut calculer le champ des rotations infinitésimales

$$\omega_{ij} := \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2.144)$$

9. On suppose ici le champ défini sur un domaine **simplement connexe**, c'est-à-dire tel que toute courbe fermée tracée dans ce domaine puisse être réduite à zéro par déformation continue de la ligne sans sortir du domaine. Si le domaine est à connexions multiples (anneau, tore...), les conditions (2.142) ne sont pas suffisantes. Le champ de déplacement obtenu par la méthode d'intégration proposée dans la preuve risque d'être multiforme (un exemple de fonction multiforme est la fonction arctangente). Il faut alors ajouter une *condition de fermeture* aux conditions de compatibilité. On renvoie à la discussion détaillée de ce point dans (Mandel, 1966) et aux développements du chapitre 28.

On calcule ensuite le gradient du champ de rotation :

$$\begin{aligned}\omega_{ij,k} &= \frac{1}{2}(u_{i,jk} - u_{j,ik}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{i,kj} + u_{k,ij} - (u_{k,ji} + u_{j,ki}))\end{aligned}$$

d'où

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (2.145)$$

où l'on a utilisé une première fois le théorème de Schwarz :  $(.)_{,ij} = (.)_{,ji}$ . Le champ précédent doit vérifier nécessairement la condition suivante (théorème de Schwarz sur l'interversion des dérivées croisées) :

$$\omega_{ij,kl} = \omega_{ij,lk} \quad (2.146)$$

ce qui, appliqué au membre de droite de l'équation (2.145), fournit

$$\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il} = \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jl,ik}$$

qui constituent les conditions nécessaires recherchées (2.142), où les indices  $j$  et  $k$  ont été échangés à des fins mnémotechniques, en tenant compte des symétries des termes de l'équation.

- Si le champ  $\underline{\xi}(\underline{X})$  vérifie les conditions (2.142), on calcule

$$W_{ijk} := \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (2.147)$$

Les conditions (2.142) indiquent que

$$W_{ijk,l} = W_{ijl,k} \quad (2.148)$$

En vertu du théorème 31 (dit de Poincaré, voir annexe 12), il existe donc des quantités  $\omega_{ij}$  telles que

$$W_{ijk} = \omega_{ij,k} \quad (2.149)$$

En remarquant que  $W_{ijk} = -W_{jik}$ , on peut choisir  $\omega_{ij}$  tel que  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ . Evaluons alors :

$$\begin{aligned}H_{ij} &= \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \\ H_{ij,k} - H_{ik,j} &= \varepsilon_{ij,k} + \omega_{ij,k} - \varepsilon_{ik,j} - \omega_{ik,j} \\ &= \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{kj,i} = 0\end{aligned} \quad (2.150)$$

où l'on a utilisé deux fois (2.145). La quantité  $H_{ij}$  vérifie donc les conditions du théorème de Poincaré que l'on utilise une nouvelle fois pour affirmer qu'il existe un champ de vecteurs  $u_i$  tel que

$$H_{ij} = u_{i,j}, \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.151)$$

c'est-à-dire que le champ  $\underline{\xi}(\underline{X})$  est compatible.  $\square$

On insiste sur le fait que la démonstration précédente présente aussi une méthode systématique de construction des champs de déplacement à partir du champ de déformation, qu'il faudra mettre en œuvre lors de la résolution de problèmes aux limites. Cette démarche sera appliquée une première fois au paragraphe 2.3.4 puis au chapitre 9.

Les conditions de compatibilité (2.142) doivent être satisfaites pour tous les quadruplets  $(i, j, k, l)$ . Combien au juste cela fait-il de conditions indépendantes ? Pour le savoir, on va expliciter ces conditions en distinguant les cas bi et tridimensionnels :

- *Cas 2D.* Les indices ne parcourent que l'ensemble  $\{1, 2\}$ . Remarquer que si  $i = k$  ou  $j = l$ , les conditions (2.142) sont automatiquement vérifiées. Prenons donc

$$\begin{array}{rcl} i & \neq & k \\ 1 & & 2 \end{array} \text{ et } \begin{array}{rcl} j & \neq & l \\ 1 & & 2 \end{array}$$

Cette combinaison donne la seule condition à remplir :

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad (2.152)$$

En 2D, le tenseur  $\underline{\varepsilon}$  n'a que 3 composantes indépendantes. Si l'on tient compte de la relation supplémentaire (2.152), il reste 2 degrés de liberté i.e. le nombre de composantes de déplacement cherchées.

- *Cas 3D.* On sélectionne les combinaisons d'indices pertinentes :

$$\begin{array}{rcl} i & \neq & k \\ 1 & & 2 \\ 2 & & 3 \\ 3 & & 1 \\ 1 & & 2 \\ 2 & & 3 \\ 3 & & 1 \end{array} \text{ et } \begin{array}{rcl} j & \neq & l \\ 1 & & 2 \\ 2 & & 3 \\ 3 & & 1 \\ 1 & & 2 \\ 2 & & 3 \\ 3 & & 1 \end{array}$$

Cela conduit aux conditions

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad (2.153)$$

$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} - 2\varepsilon_{23,23} = 0 \quad (2.154)$$

$$\varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} - 2\varepsilon_{31,31} = 0 \quad (2.155)$$

$$\varepsilon_{12,23} + \varepsilon_{23,12} = \varepsilon_{22,31} + \varepsilon_{31,22} \quad (2.156)$$

$$\varepsilon_{23,31} + \varepsilon_{31,23} = \varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} \quad (2.157)$$

$$\varepsilon_{31,12} + \varepsilon_{12,31} = \varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} \quad (2.158)$$

Cela fait six conditions. Ces conditions sont localement indépendantes mais elles ne le sont pas du point de vue des champs de tenseurs. En effet, on peut montrer qu'il existe des relations liant les dérivées partielles des équations précédentes.

Les conditions de compatibilité font intervenir uniquement les composantes du second gradient du tenseur des déformations. On en déduit que **tout champ de déformations affine** (i.e. des déplacements fonctions quadratiques des  $X_i$  dans une base cartésienne) les vérifie automatiquement et **est donc compatible** (dans le contexte infinitésimal).

#### *Application aux déformations infinitésimales nulles*

On peut établir le théorème 4 dans le cadre linéarisé en utilisant les conditions de compatibilité précédentes. Le théorème porte sur les transformations conduisant à un champ de déformations nulles. On suppose donc que  $\underline{\varepsilon}(\underline{X}) = 0, \forall \underline{X}$  à un instant  $t$  donné. De quels champs  $\underline{u}(\underline{X})$   $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$  est-il le champ des déformations infinitésimales ? De tels champs  $\underline{u}$  existent à coup sûr puisque le champ de déformation nul vérifie automatiquement les conditions de compatibilité (2.142). Pour les trouver on va utiliser la démarche présentée au cours de l'exposé des conditions de compatibilité. L'équation (2.145) devient ici

$$\omega_{ij,k} = 0$$

En particulier,

$$\omega_{12,1} = 0, \quad \omega_{12,2} = 0, \quad \omega_{12,3} = 0 \implies \omega_{12} = -r$$

où  $r$  est une constante. De même

$$\omega_{23} = -p, \quad \omega_{31} = -q$$

où  $p$  et  $q$  sont des constantes. Le gradient du champ de déplacement se réduit donc à sa partie antisymétrique :

$$u_{i,j} = \omega_{ij}$$

On écrit successivement,

$$u_{1,1} = 0, \quad u_{1,2} = -r, \quad u_{1,3} = q$$

$$u_{2,1} = r, \quad u_{2,2} = 0, \quad u_{2,3} = -p$$

$$u_{3,1} = -q, \quad u_{3,2} = p, \quad u_{3,3} = 0$$

L'intégration de ces trois équations fournit

$$\begin{aligned} u_1 &= -rX_2 + qX_3 + c_1 \\ u_2 &= rX_1 - pX_3 + c_2 \\ u_3 &= -qX_1 + pX_2 + c_3 \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, la famille des solutions s'écrit

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

On reconnaît un mouvement de corps rigide infinitésimal conformément à l'équation (2.130). On rappelle que la rotation est petite mais que la translation  $c_i$  est quelconque.

### 2.3.6 Changement de référentiel euclidien / de configuration de référence

Que deviennent les mesures de déformation lorsque l'on change de référentiel ? On considère les changements de référentiels euclidiens de la forme (2.3), qui de plus coïncident sur la configuration de référence (équation (2.27)). Soit  $\mathcal{R}'$  un autre référentiel d'observation. Le gradient de la transformation se transforme de la manière suivante d'après (2.29) :

$$\tilde{\mathbf{F}}'(\underline{\mathbf{X}}, t') = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \quad (2.160)$$

Les variations de volume ne sont bien évidemment pas affectées par le changement de référentiel (scalaires invariants)

$$J' := \det \tilde{\mathbf{F}}' = \det \tilde{\mathbf{F}} =: J \quad (2.161)$$

où l'on utilise le fait que  $\tilde{\mathbf{Q}}$  est une rotation. Les formules de changement de référentiel pour les tenseurs de Cauchy-Green et pour les mesures de déformation s'obtiennent en utilisant abondamment la relation (2.160). On peut classer les résultats en deux groupes.

**Théorème 6 (Changement de référentiel pour les déformations)** *Le tenseur de Cauchy-Green droit  $\tilde{\mathbf{C}}$  et les mesures lagagiennes de déformation sont invariantes par change-*

ment de référentiel euclidien coïncidant sur la configuration de référence :

$$\underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{C}} \quad (2.162)$$

Les tenseurs se transformant comme  $\underline{\underline{C}}$  par changement de référentiel euclidien sont dits **invariants**.

Le tenseur de Cauchy-Green gauche  $\underline{\underline{B}}$  et les mesures eulériennes de déformation se transforment de la manière suivante par changement de référentiel euclidien coïncidant sur la configuration de référence :

$$\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.163)$$

Les tenseurs se transformant comme  $\underline{\underline{B}}$  par changement de référentiel euclidien sont dits **objectifs**<sup>10</sup>.

**Preuve.** En effet,

$$\underline{\underline{C}}' := \underline{\underline{F}}'^T \cdot \underline{\underline{F}}' = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}} \quad (2.164)$$

$$\underline{\underline{B}}' := \underline{\underline{F}}' \cdot \underline{\underline{F}}'^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.165)$$

Par suite toute mesure de déformation utilisant le tenseur de Cauchy-Green droit sera invariante. Les mesures utilisant  $\underline{\underline{B}}$  (dites eulériennes) sont quant à elles objectives, à l'instar du tenseur d'Almansi :

$$\underline{\underline{A}}' := \frac{1}{2}(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{B}}'^{-1}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T) = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.166)$$

D'autre part, la décomposition polaire de  $\underline{\underline{F}}$  (2.43) permet de trouver celle de  $\underline{\underline{F}}'$  en utilisant l'unicité d'une telle décomposition :

$$\underline{\underline{F}}' = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}) \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T) \cdot (\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}) \quad (2.167)$$

de sorte que l'on peut identifier

$$\underline{\underline{R}}' = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}, \quad \underline{\underline{U}}' = \underline{\underline{U}}, \quad \underline{\underline{V}}' = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \quad (2.168)$$

Les tenseurs de déformation pure  $\underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{V}}$  sont donc respectivement invariant et objectif.  
La rotation propre, quant à elle, se transforme comme  $\underline{\underline{F}}$ .  $\square$

En particulier la déformation de Green-Lagrange est invariante :

$$\underline{\underline{E}}' = \underline{\underline{E}} \quad (2.169)$$

Les familles de mesures de déformation utilisant  $\underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{V}}$  comme (2.84) sont respectivement invariantes et objectives.

On sera amené dans le chapitre 6 à changer de configuration de référence suivant la règle (2.34) présentée au paragraphe 2.2.4 (voir aussi figure 2.5). On aura besoin du

**Théorème 7 (Changement de configuration de référence pour les déformations)** *Les tenseurs de Cauchy-Green par rapport à une nouvelle configuration de référence se*

10. Les définitions d'invariance et d'objectivité introduites ici ne sont pas universellement adoptées dans la littérature. On en trouvera d'autres tout aussi licites (voir par exemple (Ogden, 1997)). Il convient dans chaque cas de vérifier ce que chaque auteur entend par ces termes.

déduisant de la première par la transformation quelconque  $\tilde{\mathbf{P}}$  (non nécessairement orthogonale) s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{P}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{P}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \quad (2.170)$$

**Preuve.** En effet, en utilisant (2.34),

$$\hat{\tilde{\mathbf{C}}} := \hat{\tilde{\mathbf{F}}}^T \cdot \hat{\tilde{\mathbf{F}}} = \mathbf{P}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

$$\hat{\tilde{\mathbf{B}}} := \hat{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \hat{\tilde{\mathbf{F}}}^T = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T$$

on obtient les résultats annoncés.  $\square$

On voit en particulier que  $\hat{\tilde{\mathbf{B}}}$  ne s'exprime pas directement en fonction de  $\tilde{\mathbf{B}}$ .

Si l'on se contente de tourner la configuration de référence, c'est-à-dire si  $\tilde{\mathbf{P}}$  est une rotation (mouvement de corps rigide appliquée à la configuration de référence), alors

$$\hat{\tilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{P}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{P}^T, \quad \hat{\tilde{\mathbf{B}}} = \tilde{\mathbf{B}} \quad (2.171)$$

En particulier le tenseur eulérien  $\tilde{\mathbf{B}}$  ne voit pas un tel changement de configuration de référence.

## 2.4 Vitesses de déformation

Dans les deux premières parties 2.2 et 2.3 de ce chapitre, on a comparé un état donné du corps matériel avec un état particulier choisi comme référence. Dans cette dernière partie du chapitre 2, on compare deux configurations infiniment proches  $\Omega_t$  et  $\Omega_{t+\Delta t}$ , ce qui conduit donc à introduire des dérivations par rapport au temps.

### 2.4.1 Dérivées par rapport au temps : champs de vitesses et d'accélération

Le champ des vitesses sur un corps matériel  $\mathcal{M}$  dans une transformation  $\Phi$  de la configuration de référence  $\Omega_0$  vers la configuration actuelle  $\Omega_t$  est défini par :

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t) := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t) \quad (2.172)$$

La description eulérienne de ce champ de vitesses est

$$\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) := \underline{\mathbf{V}}(\Phi^{-1}(\underline{\mathbf{x}}), t) = \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \quad (2.173)$$

Plus généralement, les grandeurs utilisées en mécanique des milieux continus sont considérées tantôt comme des fonctions des variables lagrangiennes  $F(\underline{\mathbf{X}}, t)$  ou comme des fonctions des variables eulériennes  $f(\underline{\mathbf{x}}, t)$  :

$$F(\underline{\mathbf{X}}, t) = f(\underline{\mathbf{x}}, t) = f(\Phi(\underline{\mathbf{X}}, t), t)$$

Les notations  $F, f$ <sup>11</sup> seront utilisées lorsque l'on effectue le changement de variables  $\underline{\mathbf{x}} = \Phi(\underline{\mathbf{X}}, t)$ . On définit la **dérivée temporelle matérielle** ou **dérivée temporelle particulière** ou encore **dérivée temporelle en suivant le mouvement** par

$$\begin{aligned} \dot{F}(\underline{\mathbf{X}}, t) &:= \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{d}{dt} f(\Phi(\underline{\mathbf{X}}, t), t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{\mathbf{x}}, t) + \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \cdot \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{df}{dt} = \dot{f}(\underline{\mathbf{x}}, t) \end{aligned} \quad (2.174)$$

---

11. Ne pas confondre la notation  $F$  ici avec le gradient de la transformation  $\tilde{\mathbf{F}}$ .

où apparaît le **terme convectif**  $(\text{grad } f).\underline{\mathbf{v}}$ . La définition précédente s'écrit ainsi à l'aide de composantes :

$$\dot{F} := \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i \quad (2.175)$$

L'opérateur dérivée temporelle dans le mouvement peut s'appliquer de manière générale à des fonctions tensorielles sous la forme

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\underline{\mathbf{X}}} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\underline{\mathbf{x}}} + \text{grad}().\underline{\mathbf{v}} \quad (2.176)$$

En particulier, on peut utiliser les notations introduites pour donner une chaîne d'égalités définissant le champ des vitesses (2.172) :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \quad (2.177)$$

Il est temps de montrer l'équivalence entre les descriptions lagrangienne et eulérienne du mouvement introduites au paragraphe 2.2.3. Il est clair que l'on obtient la description eulérienne à partir de la description lagrangienne en éliminant  $\underline{\mathbf{X}}$  entre les relations  $\underline{\mathbf{x}} = \Phi(\underline{\mathbf{X}}, t)$  et  $\underline{\mathbf{V}} := \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t)$  pour obtenir  $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$ . Inversement comment obtenir la description lagrangienne à partir de la simple connaissance du champ  $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$ ? Il suffit en fait d'intégrer le système différentiel en  $\underline{\mathbf{x}}(t)$  suivant

$$\frac{d\underline{\mathbf{x}}}{dt}(t) = \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}(t), t) \quad (2.178)$$

pour une condition initiale donnée  $\underline{\mathbf{x}}(0) = \underline{\mathbf{X}}$ . La solution constitue la trajectoire du point matériel  $\underline{\mathbf{X}}$  choisi.

On appelle **ligne de courant**<sup>12</sup> à un instant donné  $t_1$  une courbe tangente en tout point au champ de vitesse  $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t_1)$ .

Un mouvement est dit **stationnaire** ou **permanent** si le champ des vitesses eulériennes  $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$  est indépendant du temps.

Enfin, le champ d'**accélération**  $\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$  est défini par

$$\underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{X}}, t) := \ddot{\underline{\mathbf{x}}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{d\underline{\mathbf{v}}}{dt}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{\mathbf{v}}).\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{x}}, t) \quad (2.180)$$

#### 2.4.2 Champ de gradient des vitesses

On s'enquiert ici de la vitesse d'évolution des lignes matérielles. Pour cela on dérive par rapport au temps la relation de transport des fibres matérielles (2.8) :

$$\overbrace{\underline{\mathbf{dx}}}^{\bullet} = \dot{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{dX}} \quad (2.181)$$

12. Les lignes de courant s'obtiennent en intégrant le système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} \quad (2.179)$$

dans lequel le temps  $t_1$  est fixé et joue le rôle de paramètre.

Cette relation donne donc l'évolution d'une fibre matérielle infinitésimale (i.e. constituée de particules matérielles) au cours du mouvement. On peut relier directement la fibre matérielle dans son état actuel à sa vitesse en éliminant  $\underline{dX}$  dans la relation précédente :

$$\overbrace{\underline{dx}}^{\bullet} = \underline{L} \cdot \underline{dx}, \quad \text{avec} \quad \underline{L} = \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \quad (2.182)$$

Or

$$\begin{aligned} \dot{\underline{F}} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \underline{X}} (\underline{X}, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{X} \partial t} (\underline{X}, t) \\ &= \text{Grad } \underline{V} (\underline{X}, t) = (\text{grad } \underline{v} (\underline{x}, t)) \cdot \underline{F} \end{aligned} \quad (2.183)$$

Le tenseur  $\underline{L}$  précédemment introduit et permettant de suivre l'évolution des fibres matérielles au cours du mouvement n'est donc autre que le **tenseur gradient des vitesses**<sup>13</sup>

$$\underline{L} (\underline{x}, t) = \text{grad } \underline{v} (\underline{x}, t) \quad (2.184)$$

Le gradient des vitesses peut être décomposé en parties symétrique et antisymétrique :

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} \quad (2.185)$$

avec

$$\underline{D} := \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T), \quad \underline{W} := \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^T) \quad (2.186)$$

Le tenseur  $\underline{D}$  s'appelle **tenseur eulérien vitesse de déformation** ou **tenseur taux de déformation**. Le mot "vitesse" employé peut prêter à confusion. En effet il désigne en général la dérivée par rapport au temps d'une grandeur. Ce n'est pas le cas de  $\underline{D}$  défini ici simplement comme la partie symétrique du gradient eulérien des vitesses.

Le tenseur  $\underline{W}$  s'appelle **tenseur taux de rotation**. Puisque le taux de rotation est antisymétrique, on peut lui associer un **vecteur taux de rotation** ou **vecteur tourbillon**  $\overset{\times}{\underline{W}}$  tel que :

$$\forall \underline{y}, \quad \underline{W} \cdot \underline{y} =: \overset{\times}{\underline{W}} \wedge \underline{y} \quad (2.187)$$

La notation matricielle correspondant à la définition du vecteur tourbillon est la même que celle consignée dans l'équation (2.129). Par conséquent, l'expression des composantes cartésiennes dans un repère orthonormé est

$$\overset{\times}{W}_1 = -W_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \quad (2.188)$$

$$\overset{\times}{W}_2 = -W_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \quad (2.189)$$

$$\overset{\times}{W}_3 = -W_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.190)$$

Ces formules permettent de reconnaître l'opérateur rotationnel eulérien appliqué au

---

13. Avec la notation utilisant l'opérateur nabla introduite pour la première fois dans l'équation (2.13), on peut aussi noter le tenseur gradient des vitesses de la manière suivante :

$$\underline{L} (\underline{x}, t) = \underline{v} \otimes \nabla_x$$

champ des vitesses<sup>14</sup>

$$\overset{\times}{\underline{W}} = -\frac{1}{2} \text{rot} \underline{v} (\underline{x}, t) \quad (2.191)$$

Les informations nécessaires sur l'opérateur rotationnel se trouve au paragraphe 12.3.2. Un mouvement est dit localement **irrotationnel** si le tenseur taux de rotation ou, de manière équivalente, le vecteur tourbillon est nul.

Le choix des dénominations introduites et le sens mécanique des différents tenseurs sont justifiés au paragraphe 2.4.3.

#### *Autre décomposition du gradient des vitesses*

En partant de la décomposition polaire de la transformation  $\tilde{\underline{F}}$ , il est possible d'obtenir la décomposition suivante du tenseur gradient des vitesses :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{F}} &= \tilde{\underline{R}} \cdot \tilde{\underline{U}} \\ \dot{\tilde{\underline{F}}} &= \dot{\tilde{\underline{R}}} \cdot \tilde{\underline{U}} + \tilde{\underline{R}} \cdot \dot{\tilde{\underline{U}}} \\ \tilde{\underline{L}} &= \dot{\tilde{\underline{F}}} \cdot \tilde{\underline{F}}^{-1} = \dot{\tilde{\underline{R}}} \cdot \tilde{\underline{R}}^T + \tilde{\underline{R}} \cdot \dot{\tilde{\underline{U}}} \cdot \tilde{\underline{U}}^{-1} \cdot \tilde{\underline{R}}^T \end{aligned} \quad (2.192)$$

Il est important de remarquer que, pour tout tenseur orthogonal  $\tilde{\underline{R}}$ , le tenseur vitesse de rotation associé  $\dot{\tilde{\underline{R}}} \cdot \tilde{\underline{R}}^T$  est antisymétrique. En effet,

$$\underline{R} \cdot \tilde{\underline{R}}^T = \underline{1} \implies \dot{\underline{R}} \cdot \tilde{\underline{R}}^T = -\tilde{\underline{R}} \cdot \dot{\underline{R}}^T = -(\dot{\underline{R}} \cdot \tilde{\underline{R}}^T)^T \quad (2.193)$$

Par contre, le deuxième terme apparaissant dans la relation (2.192) n'est en général pas symétrique car  $\dot{\tilde{\underline{U}}}$  et  $\tilde{\underline{U}}^{-1}$  ne commutent pas systématiquement :

$$(\dot{\tilde{\underline{U}}} \cdot \tilde{\underline{U}}^{-1})^T = \tilde{\underline{U}}^{-1} \cdot \dot{\tilde{\underline{U}}} \neq \dot{\tilde{\underline{U}}} \cdot \tilde{\underline{U}}^{-1} \quad (2.194)$$

Pour s'en convaincre, s'il est besoin, il suffit de considérer le contre-exemple simple suivant. Dans une base cartésienne orthonormée particulière, on considère

$$[\underline{U}] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12}(t) & 0 \\ U_{12}(t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\dot{\underline{U}}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{U}_{12}(t) & 0 \\ \dot{U}_{12}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

où seule la composante  $U_{12}$  est supposée dépendre du temps. L'inverse de  $\underline{U}$  s'écrit

$$[\tilde{\underline{U}}^{-1}] = \frac{1}{U_{11} - U_{12}^2} \begin{bmatrix} 1 & -U_{12} & 0 \\ -U_{12} & U_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.196)$$

Enfin, on trouve

$$[\dot{\underline{U}} \cdot \tilde{\underline{U}}^{-1}] = \frac{\dot{U}_{12}}{U_{11} - U_{12}^2} \begin{bmatrix} -U_{12} & U_{11} & 0 \\ 1 & -U_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. Avec la notation utilisant l'opérateur nabla introduite pour la première fois dans l'équation (2.13), en utilisant quelques relations issues du paragraphe 12.1.3 de l'annexe 12, on peut aussi noter

$$\overset{\times}{\underline{W}} = -\frac{1}{2} \underline{\epsilon} : (\underline{v} \otimes \nabla_x), \quad \overset{\times}{W}_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} v_{j,k}$$

$$\left[ \tilde{U}^{-1} \cdot \dot{\tilde{U}} \right] = \frac{\dot{U}_{12}}{U_{11} - U_{12}^2} \begin{bmatrix} -U_{12} & 1 & 0 \\ U_{11} & -U_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il apparaît donc que  $\dot{\tilde{U}}$  et  $\tilde{U}^{-1}$  ne commutent que si  $U_{11} = 1$ .  
Il s'ensuit qu'en général

$$\tilde{W} \neq \tilde{R} \cdot \tilde{R}^T, \quad \text{et} \quad \tilde{D} \neq \tilde{R} \cdot \dot{\tilde{U}} \cdot \tilde{U}^{-1} \cdot \tilde{R}^T \quad (2.197)$$

Le tenseur taux de rotation  $\tilde{W}$  est distinct de la vitesse de rotation propre  $\dot{\tilde{R}} \cdot \tilde{R}^T$ .

#### 2.4.3 Vitesses d'évolution des longueurs, angles et volumes

Pour suivre l'évolution du produit scalaire de deux fibres matérielles, on dérive par rapport au temps l'équation (2.67) :

$$\begin{aligned} \overbrace{\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2}^{\bullet} &= \overbrace{\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2 + \underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2}^{\bullet} \\ &= \underline{dx}_1 \cdot \underline{L}^T \cdot \underline{dx}_2 + \underline{dx}_1 \cdot \underline{L} \cdot \underline{dx}_2 \\ &= 2\underline{dx}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{dx}_2 \end{aligned} \quad (2.198)$$

Le tenseur taux de déformation mesure donc la vitesse de variation du produit scalaire de deux directions matérielles sur la configuration actuelle. Il mesure donc les variations de longueur et d'angle d'éléments de fibres matérielles.

D'autre part, la relation (2.67) implique aussi

$$\overbrace{\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2}^{\bullet} = \overbrace{\underline{dX}_1 \cdot \underline{C} \cdot \underline{dX}_2}^{\bullet} = \underline{dX}_1 \cdot \dot{\underline{C}} \cdot \underline{dX}_2 = 2\underline{dX}_1 \cdot \dot{\underline{E}} \cdot \underline{dX}_2 \quad (2.199)$$

de sorte que l'évolution des tenseurs de Green-Lagrange et de Cauchy-Green droit s'expriment en fonction du tenseur taux de déformation

$$\dot{\underline{E}} = \frac{1}{2} \dot{\underline{C}} = \underline{F}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{F} \quad (2.200)$$

#### Taux d'allongement relatif

La relation (2.198) peut être utilisée pour suivre l'allongement d'une direction particulière  $\underline{dx}_1 = \underline{dx}_2 = \underline{dx}$  :

$$\overbrace{\underline{dx} \cdot \underline{dx}}^{\bullet} = |\underline{dx}|^2 = 2 |\underline{dx}| \overbrace{|\underline{dx}|}^{\bullet} = 2 \underline{dx} \cdot \underline{D} \cdot \underline{dx} \quad (2.201)$$

En reprenant la définition de l'allongement relatif  $\lambda(\underline{m})$  défini par l'équation (2.72) pour une direction matérielle  $\underline{dx} = |\underline{dx}| \underline{m}$ , on obtient sa variation

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\overbrace{|\underline{dx}|}^{\bullet}}{|\underline{dx}|} = \underline{m} \cdot \underline{D} \cdot \underline{m} \quad (2.202)$$

appelé **taux d'allongement relatif** de la direction matérielle portée par  $\underline{m}$ . Cette relation doit être rapprochée de l'allongement relatif infinitésimal égal à  $\underline{M} \cdot \xi \cdot \underline{M}$  dans l'équation (2.112). Si  $\underline{m} = \underline{e}_1$  premier vecteur d'une base orthonormée choisie, son

taux d'allongement relatif instantané n'est autre que la composante  $D_{11}$  du tenseur des taux de déformation.

Le tenseur  $\tilde{D}$  est par définition symétrique mais il n'est pas nécessairement défini positif puisque le taux d'allongement relatif d'une direction matérielle peut tout aussi bien augmenter que diminuer ou rester inchangé au cours du mouvement.

#### Taux de glissement angulaire

On considère deux directions matérielles actuelles  $\underline{dx}_1 = |\underline{dx}_1| \underline{m}_1$  et  $\underline{dx}_2 = |\underline{dx}_2| \underline{m}_2$ , et on suit l'évolution de l'angle qu'elles délimitent. En partant de

$$\begin{aligned} \overbrace{\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2}^{\bullet} &= \overbrace{|\underline{dx}_1| |\underline{dx}_2| \cos \theta}^{\bullet} = 2\underline{dx}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{dx}_2 \\ &= |\underline{dx}_1| |\underline{dx}_2| \cos \theta (\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_1 + \underline{m}_2 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_2) - |\underline{dx}_1| |\underline{dx}_2| \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.203)$$

on obtient

$$\dot{\theta} \sin \theta = -2\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_2 + \cos \theta (\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_1 + \underline{m}_2 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_2) \quad (2.204)$$

Dans le cas particulier où les directions étudiées sont orthogonales à l'instant choisi (i.e.  $\theta = \pi/2$ ), l'évolution de l'angle de glissement  $\gamma$  défini par (2.78) est donnée simplement par

$$\dot{\gamma} = -\dot{\theta} = 2\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_2 \quad (2.205)$$

Si l'on prend  $\underline{m}_1 = \underline{e}_1$ ,  $\underline{m}_2 = \underline{e}_2$ , le taux de glissement est exactement donné par le double de la composante  $D_{12}$  du tenseur taux de déformation. On voit aussi qu'en général deux directions orthogonales à l'instant  $t$  ne le resteront pas à l'instant  $t + \Delta t$ . On en déduit le

**Théorème 8 (Directions orthogonales dans le mouvement)** *Les trièdres de directions matérielles deux à deux orthogonales et qui le restent à l'instant  $t$  sont les trièdres des directions matérielles coïncidant, à l'instant  $t$ , avec les directions principales du tenseur  $\tilde{D}$  des taux de déformation. Lorsque les valeurs propres de  $\tilde{D}$  sont distinctes, un tel trièdre est unique.*

**Preuve.** C'est une conséquence de la relation (2.205) que l'on applique à trois directions matérielles deux à deux orthogonales  $\underline{dx}_1, \underline{dx}_2, \underline{dx}_3$ . Le tenseur symétrique  $\underline{D}$  a des valeurs propres réelles et possède des directions principales deux à deux orthogonales qui vérifient le théorème d'après (2.205). Réciproquement, s'il existe trois directions deux à deux orthogonales ( $\underline{m}_1, \underline{m}_2, \underline{m}_3$ ) telles que

$$\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_2 = 0 \quad (2.206)$$

$$\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_3 = 0 \quad (2.207)$$

$$\underline{m}_2 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_3 = 0 \quad (2.208)$$

Les équations (2.207) et (2.208) montrent que  $\underline{D} \cdot \underline{m}_3$  est orthogonal à  $\underline{m}_1$  et  $\underline{m}_2$  et est donc colinéaire à  $\underline{m}_3$ . On en déduit que  $\underline{m}_3$  est une direction propre de  $\underline{D}$ . Le même raisonnement s'applique à  $\underline{m}_1$  et  $\underline{m}_2$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Le théorème évoque le seul trièdre qui reste orthogonal, mais il existe par contre de nombreux couples de vecteurs qui restent orthogonaux. Il suffit par exemple de prendre une direction principale de  $\underline{D}$  et un vecteur du plan engendré par les deux autres directions principales.

### *Interprétation du tenseur taux de rotation*

Pour cela, on part d'une fibre matérielle que l'on suit dans le mouvement :

$$\begin{aligned} \underline{dx} &= |\underline{dx}| \underline{m} \\ \overset{\bullet}{\overbrace{\underline{dx}}} = \underline{L} \cdot \underline{dx} &= |\underline{dx}| \dot{\underline{m}} + |\underline{dx}| (\underline{m} \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}) \underline{m} \end{aligned} \quad (2.209)$$

où  $\underline{m}$  est unitaire. On en déduit l'évolution de la direction de la fibre matérielle :

$$\dot{\underline{m}} = \underline{L} \cdot \underline{m} - (\underline{m} \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}) \underline{m} \quad (2.210)$$

Il faut insister sur le fait que  $\dot{\underline{m}} \neq \underline{L} \cdot \underline{m}$ . Le vecteur  $\underline{m}$  ne se comporte donc pas comme une fibre matérielle. Il n'indique que la direction de la ligne matérielle  $\underline{dx}$  à un instant  $t$ , ce n'est déjà plus le cas en général à  $t + \Delta t$ .

Dans le cas particulier où  $\underline{m}$  unitaire correspond à une direction principale du taux de déformation  $\underline{D}$ , on vérifie que la relation (2.210) se réduit à

$$\dot{\underline{m}} = \underline{W} \cdot \underline{m} = \overset{\times}{\underline{W}} \wedge \underline{m} \quad (2.211)$$

Ce résultat montre que le vecteur unitaire attaché à une ligne matérielle coïncidant à l'instant  $t$  avec une direction principale de  $\underline{D}$  subit une rotation dont la vitesse est donnée par  $\underline{W}(t)$ . On en déduit le

**Théorème 9 (Rotation du trièdre des directions principales de  $\underline{D}$ )** *Le trièdre orthonormé des vecteurs unitaires portés par les directions matérielles qui coïncident à l'instant  $t$  avec les directions principales de  $\underline{D}$ , évolue selon un mouvement de solide rigide dont le taux de rotation à l'instant  $t$  vaut  $\underline{W}$ .*

Le théorème fournit une interprétation claire du taux de rotation  $\underline{W}$ .

Le théorème précédent montre que le tenseur  $\underline{D}$  est lié à  $\underline{W}$  puisque c'est le second qui dicte la rotation instantanée des directions matérielles coïncidant à l'instant  $t$  avec les directions principales du premier<sup>15</sup>. Cela peut sembler surprenant dans la mesure où, *a priori*, les parties symétrique et antisymétrique d'un tenseur quelconque sont indépendantes. Ce couplage entre  $\underline{D}$  et  $\underline{W}$  vient en fait de la nécessaire intégrabilité de  $\underline{L}$  qui est en effet, on le rappelle, le gradient d'un champ de vecteur. Ce point est explicité au paragraphe 2.4.4.

### *Evolution d'un élément de volume*

On rappelle qu'un élément de volume initial  $dV$  se transforme en  $dv$  sur la configuration actuelle selon les équations (2.36) et (2.37). On en déduit l'évolution temporelle de la variation de volume élémentaire :

$$\begin{aligned} dv &= J dV, \quad \text{avec} \quad J = \det \underline{F} \\ \overset{\bullet}{\overbrace{dv}} &= \dot{J} dV \end{aligned} \quad (2.212)$$

15. Le théorème ne dit pas que le trièdre des directions principales de  $\underline{D}$  tourne à la vitesse angulaire  $\underline{W}$ , ce qui est faux. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre l'exemple du glissement simple traité en 2.4.6, pour lequel les directions principales de  $\underline{D}$  ne tournent pas alors même que  $\underline{W}$  est non nul. Le théorème porte sur un trièdre de directions matérielles coïncidant à  $t$  uniquement avec les directions principales de  $\underline{D}$ .

et par suite

$$\overbrace{dv}^{\bullet} = \frac{j}{J} dv \quad (2.213)$$

La variation du volume fait donc intervenir la dérivée du déterminant de  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Il est possible de relier cette grandeur au tenseur gradient des vitesses, en utilisant les propriétés du produit mixte défini en (2.36) :

$$\begin{aligned} \overbrace{dv}^{\bullet} &= \overbrace{[\underline{dx}_1, \underline{dx}_2, \underline{dx}_3]}^{\bullet} \\ &= [\dot{\underline{dx}}_1, \underline{dx}_2, \underline{dx}_3] + [\underline{dx}_1, \dot{\underline{dx}}_2, \underline{dx}_3] + [\underline{dx}_1, \underline{dx}_2, \dot{\underline{dx}}_3] \\ &= [\tilde{\mathbf{L}} \cdot \underline{dx}_1, \underline{dx}_2, \underline{dx}_3] + [\underline{dx}_1, \tilde{\mathbf{L}} \cdot \underline{dx}_2, \underline{dx}_3] + [\underline{dx}_1, \underline{dx}_2, \tilde{\mathbf{L}} \cdot \underline{dx}_3] \\ &= \left( \begin{vmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & L_{12} & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 \\ 0 & L_{32} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & L_{13} \\ 0 & 1 & L_{23} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{vmatrix} \right) dv \\ &= (L_{11} + L_{22} + L_{33}) dv \end{aligned} \quad (2.214)$$

qui n'est autre que la trace du gradient des vitesses. Pour établir le résultat précédent, on a choisi un volume élémentaire  $dv$  particulier constitué de trois vecteurs orthogonaux et les déterminants ont été explicités dans cette base. Le résultat garde toute sa généralité car, d'après (2.213), la quantité  $j/J$  ne dépend pas de  $dv$  de sorte que son expression peut être établie à l'aide d'un  $dv$  particulier. Finalement,

$$\overbrace{\frac{dv}{dv}}^{\bullet} = \frac{j}{J} = \text{trace } \tilde{\mathbf{L}} = \text{trace } \tilde{\mathbf{D}} = \text{div } \underline{v} = \nabla_x \cdot \underline{v} \quad (2.215)$$

La divergence du vecteur vitesse apparaît car

$$\text{trace } \tilde{\mathbf{L}} = L_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

On insiste sur la relation suivante, contenue dans (2.215) :

$$j = J \text{trace } \tilde{\mathbf{L}} = (\det \tilde{\mathbf{F}}) \text{trace} (\dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}) \quad (2.216)$$

Une autre manière d'établir ce résultat consiste à utiliser la différentielle du déterminant :

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dJ}{d\tilde{\mathbf{F}}} : \frac{d\tilde{\mathbf{F}}}{dt} = (\det \tilde{\mathbf{F}}) \tilde{\mathbf{F}}^{-T} : \dot{\tilde{\mathbf{F}}} = J \dot{F}_{ij} F_{ji}^{-1} = J \text{trace} (\dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}) \quad (2.217)$$

La formule de la différentielle de l'application déterminant (12.180) a été utilisée (théorème 33 du paragraphe 12.4.4)<sup>16</sup>.

---

16. Il n'est peut-être pas inutile d'expliciter les dérivations partielles effectuées dans (2.217) :

$$\frac{dJ}{d\tilde{\mathbf{F}}} : \frac{d\tilde{\mathbf{F}}}{dt} = \frac{dJ}{dF_{ij}} \frac{dF_{ij}}{dt}$$

en sommant sur les indices répétés comme d'habitude.

### *Evolution d'un élément de surface*

Les éléments de surface ne sont pas des lignes matérielles et suivent la loi de transport (2.41) au cours du mouvement. La dérivée temporelle d'un élément de surface actuel  $\underline{ds}$  s'obtient ainsi :

$$\dot{\underline{ds}} = J \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{dS}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{ds}} &= \dot{J} \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{dS} - J \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{F}}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{dS} \\ &= \frac{\dot{J}}{J} \underline{ds} - \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot \underline{ds}\end{aligned}\quad (2.218)$$

où l'on a utilisé la formule donnant la dérivée de l'inverse de  $\tilde{\mathbf{F}}$  qui se déduit du théorème 32 au paragraphe 12.4.3 :

$$\dot{\tilde{\mathbf{F}}^{-1}} = -\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \quad (2.219)$$

Finalement,

$$\dot{\underline{ds}} = ((\text{trace } \tilde{\mathbf{L}}) \underline{1} - \tilde{\mathbf{L}}^T) \cdot \underline{ds} \quad (2.220)$$

où l'on a utilisé (2.215). Dans un second temps on s'intéresse à l'évolution du vecteur normal  $\underline{n} = \underline{ds}/ds$  avec  $ds = \|\underline{ds}\|$ . Pour cela, on utilise le fait que la norme du vecteur unitaire normal doit rester égal à 1, ce qui implique

$$\|\underline{n}\|^2 = \underline{n} \cdot \underline{n} = 1 \implies \underline{n} \cdot \dot{\underline{n}} = 0 \quad (2.221)$$

D'autre part,

$$\dot{\underline{ds}} = ds \dot{\underline{n}} = \dot{ds} \underline{n} + ds \dot{\underline{n}} \quad (2.222)$$

En faisant alors le produit scalaire de l'équation (2.220) avec  $\underline{n}$  à l'instant  $t$ , on obtient

$$\dot{\underline{ds}} = \frac{\dot{J}}{J} \underline{n} - \underline{n} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{n} \quad (2.223)$$

où le fait que  $\underline{n} \cdot \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{n}$  a été pris en compte. La relation (2.223) n'a plus alors qu'à être substituée dans (2.220) pour trouver

$$\dot{\underline{n}} = (\underline{n} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{n}) \underline{n} - \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot \underline{n} \quad (2.224)$$

#### 2.4.4 Conditions de compatibilité pour le champ taux de déformation

Etant donné un champ de tenseurs symétriques  $\tilde{\mathbf{D}}(\underline{x}, t)$ , existe-t-il un champ de vitesses  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  dont  $\tilde{\mathbf{D}}$  serait le taux de déformation associé ? Un tel champ doit donc vérifier

$$\tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{v} + (\text{grad } \underline{v})^T) \quad (2.225)$$

La formulation de ce problème est formellement identique au problème de compatibilité d'un champ des déformations infinitésimales  $\xi(\underline{X}, t)$ , qui constitue le théorème 5 au paragraphe 2.3.5. Il existe une analogie de structure entre  $\tilde{\mathbf{D}}$  et  $\xi$  qui mérite qu'on s'y

$\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \text{grad } \underline{\underline{v}}$	tenseur gradient des vitesses
$\underline{\underline{D}} := \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T)$	tenseur taux de déformation
$\underline{\underline{W}} := \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T)$	tenseur taux de rotation
$\dot{\underline{\underline{E}}} = \frac{1}{2}\dot{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}}$	
$\overbrace{\underline{\underline{d}\underline{x}_1 \cdot d\underline{x}_2}}^{\bullet} = 2\dot{\underline{\underline{d}\underline{x}_1}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \dot{\underline{\underline{d}\underline{x}_2}} = \dot{\underline{\underline{d}\underline{X}_1}} \cdot \dot{\underline{\underline{C}}} \cdot \dot{\underline{\underline{d}\underline{X}_2}}$	
$\overbrace{\underline{\underline{d}\underline{x}}}^{\bullet} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{d}\underline{x}}$	élément de fibre matérielle
$\overbrace{\underline{\underline{d}s}}^{\bullet} = ((\text{trace } \underline{\underline{L}})\underline{1} - \underline{\underline{L}}^T) \cdot \underline{\underline{d}s}$	élément de surface
$\overbrace{dv}^{\bullet} = (\text{trace } \underline{\underline{L}}) dv = \frac{j}{J} dv$	élément de volume
$\frac{\dot{\lambda}(\underline{\underline{m}})}{\lambda(\underline{\underline{m}})} = \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{m}}$	taux d'allongement relatif
$\dot{\underline{\underline{m}}} = \dot{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{\underline{m}} - (\underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{m}}) \underline{\underline{m}}$	direction unitaire d'une fibre matérielle actuelle
$\dot{\underline{n}} = (\underline{n} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}) \underline{n} - \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{n}$	vecteur normal unitaire d'un élément de surface

Tableau 2.4: Récapitulatif : autour des vitesses de déformation.

attarde en rappelant que

$$\underline{\xi} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \underline{\underline{u}} + (\text{Grad } \underline{\underline{u}})^T) \quad (2.226)$$

Ainsi,  $\underline{\underline{D}}$  et  $\underline{\xi}$  s'obtiennent tous deux par application de l'opérateur gradient symétrisé respectivement aux champs de vitesses et de déplacement (attention, c'est l'opérateur grad que l'on utilise pour construire  $\underline{\underline{D}}$  contre Grad pour  $\underline{\xi}$ ). Ce n'est pas très étonnant dans la mesure où  $\underline{\underline{D}}$  mesure la vitesse de déformation pour la transformation entre les configurations  $\Omega_t$  et  $\tilde{\Omega}_{t+\Delta t}$  infinitésimale proche. La déformation  $\underline{\xi}$ , quant à elle, ne concerne que les transformations infinitésimales.

Sous cette deuxième forme le problème de compatibilité se pose quelle que soit la déformation du milieu, tandis que la première forme (théorème 5) n'apparaît que dans le cadre des transformations infinitésimales.

La démarche permettant de trouver le champ  $\underline{u}(\underline{X})$  à partir d'un champ  $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$  donné, présenté au paragraphe 2.3.5 se transpose exactement pour déterminer le champ  $\underline{v}(\underline{x})$  à partir d'un champ  $\underline{D}(\underline{x})$  donné. C'est pourquoi elle n'est qu'esquissée ici. Les conditions de compatibilité sont données par les équations (2.142) en remplaçant  $\varepsilon$  par  $D$ . Pour construire le champ de vitesses correspondant, on calcule d'abord  $\underline{W}$  en passant par l'intermédiaire du gradient  $W_{ij,k}$  grâce à une expression analogue à (2.145). On construit ensuite  $\underline{v}$  à partir du champ de gradient des vitesses  $\underline{D} + \underline{W}$ . La solution n'est unique qu'à un champ de vitesses de corps rigide près comme on le montrera au paragraphe 2.4.6.

### *Cas des transformations infinitésimales*

Dans le contexte des transformations infinitésimales défini par l'hypothèse (2.105), on remarque que

$$\underline{F}^{-1} \simeq \underline{1} - \underline{H} \implies \underline{L} \simeq \dot{\underline{F}} = \dot{\underline{H}} \quad (2.227)$$

et par suite

$$\underline{D} \simeq \frac{1}{2}(\dot{\underline{H}} + \dot{\underline{H}}^T) = \dot{\underline{\varepsilon}}, \quad \underline{W} \simeq \frac{1}{2}(\dot{\underline{H}} - \dot{\underline{H}}^T) = \dot{\underline{\omega}} \quad (2.228)$$

L'analogie de structure déjà évoquée entre  $\underline{D}$  et  $\underline{\varepsilon}$  devient plus étroite encore puisque le premier est simplement la dérivée temporelle du second dans le cadre des transformations infinitésimales. Concernant les vecteurs associés aux tenseurs antisymétriques  $\underline{W}$  et  $\underline{\omega}$ ,

$$\underline{W} \simeq \dot{\underline{\omega}} \quad (2.229)$$

#### 2.4.5 Changement de référentiel euclidien

Lors d'un changement de référentiel euclidien, les points matériels et leurs vitesses se transforment en

$$\underline{x}' = \underline{Q}(t) \cdot \underline{x} + \underline{c}(t) \quad (2.230)$$

$$\underline{v}' = \dot{\underline{x}}' = \underline{Q} \cdot \underline{v} + \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T \cdot (\underline{x}' - \underline{c}) + \dot{\underline{c}} \quad (2.231)$$

$$= \underline{Q} \cdot \underline{v} + \underline{w} \cdot (\underline{x}' - \underline{c}) + \dot{\underline{c}} \quad (2.231)$$

$$= \underbrace{\underline{Q} \cdot \underline{v}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\underline{w} \wedge (\underline{x}' - \underline{c})}_{\text{vitesse d'entraînement}} + \dot{\underline{c}} \quad (2.232)$$

où  $\underline{w}$  est le vecteur vitesse de rotation associé au tenseur vitesse de rotation du référentiel (antisymétrique)  $\underline{w} = \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T$ . Une dérivation temporelle supplémentaire conduit à la

règle de transformation du champ d'accélération :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{a}}' &:= \dot{\underline{\underline{v}}} = \dot{\underline{\underline{w}}} \wedge (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{c}}) + \dot{\underline{\underline{w}}} \wedge (\dot{\underline{\underline{x}}} - \dot{\underline{\underline{c}}}) + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{v}} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{a}} + \ddot{\underline{\underline{c}}} \\
 &= \dot{\underline{\underline{w}}} \wedge (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{c}}) + \dot{\underline{\underline{w}}} \wedge (\dot{\underline{\underline{x}}} - \dot{\underline{\underline{c}}}) + \underline{\underline{w}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{v}} + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{a}} + \ddot{\underline{\underline{c}}} \\
 &= \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{a}} + \dot{\underline{\underline{w}}} \cdot (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{c}}) - \dot{\underline{\underline{w}}}^2 \cdot (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{c}}) + \ddot{\underline{\underline{c}}} + 2\underline{\underline{w}} \cdot (\dot{\underline{\underline{v}}} - \dot{\underline{\underline{c}}}) \\
 &= \underbrace{\dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{a}}}_{\text{accélération tournée}} + \underbrace{\dot{\underline{\underline{w}}} \wedge (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{c}}) - \dot{\underline{\underline{w}}} \wedge (\dot{\underline{\underline{w}}} \wedge (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{c}})) + \ddot{\underline{\underline{c}}}}_{\text{accélération d'entraînement}} \\
 &\quad + \underbrace{2\dot{\underline{\underline{w}}} \wedge (\dot{\underline{\underline{v}}} - \dot{\underline{\underline{c}}})}_{\text{Coriolis}}
 \end{aligned} \tag{2.233}$$

Dans l'accélération d'entraînement, on reconnaît l'accélération angulaire, l'accélération centripète, l'accélération de Coriolis et l'accélération de translation  $\ddot{\underline{\underline{c}}}$ . Au passage, on remarque que ni la vitesse, ni l'accélération ne se transforment comme des vecteurs objectifs<sup>17</sup>. En effet leur expression dans un autre référentiel n'est pas influencée seulement par la rotation  $\dot{\underline{\underline{Q}}}(t)$  mais aussi par l'accélération du nouveau référentiel par rapport au premier. C'est un résultat bien connu en mécanique classique.

La règle (2.29) de transformation du gradient de la transformation par changement de référentiel euclidien permet de calculer la règle de transformation du gradient des vitesses correspondante :

$$\dot{\underline{\underline{L}}}' := \dot{\underline{\underline{F}}}' \cdot \underline{\underline{F}}'^{-1} = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \dot{\underline{\underline{L}}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T \tag{2.234}$$

En décomposant  $\dot{\underline{\underline{L}}}'$  en parties symétrique et antisymétrique, on identifie

$$\dot{\underline{\underline{D}}}' = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \dot{\underline{\underline{D}}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T, \quad \dot{\underline{\underline{W}}}' = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \dot{\underline{\underline{W}}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T + \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}}^T \tag{2.235}$$

On voit que seul  $\dot{\underline{\underline{D}}}'$  est un tenseur objectif au sens défini en (2.163) tandis que  $\dot{\underline{\underline{W}}}'$  est influencé par la vitesse de rotation du second référentiel par rapport au premier<sup>18</sup>.

17. Un vecteur  $\underline{\underline{v}}$  est dit objectif par changement de référentiel euclidien si

$$\underline{\underline{v}}' = \dot{\underline{\underline{Q}}} \cdot \underline{\underline{v}}$$

18. Puisque  $\dot{\underline{\underline{W}}}'$  est antisymétrique, il est possible de construire en chaque point matériel un tenseur de rotation  $\dot{\underline{\underline{Q}}}(t)$  en intégrant l'équation différentielle

$$\dot{\underline{\underline{Q}}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{Q}}} = \dot{\underline{\underline{W}}} \tag{2.236}$$

Il est tentant dès lors d'attacher à chaque point matériel un référentiel tournant de  $\dot{\underline{\underline{Q}}}$  par rapport au référentiel initial et appelé **référentiel corotational**. L'avantage de ce référentiel est qu'il est construit de telle sorte que  $\dot{\underline{\underline{W}}}' = 0$ , ce que l'on peut vérifier en utilisant les relations (2.235). De même, on considère les **référentiels en rotation propre** construits en chaque point matériel avec le champ de tenseurs de rotation propre  $\dot{\underline{\underline{R}}}(\underline{\underline{X}}, t)$ . Comme en général  $\dot{\underline{\underline{R}}} \neq \dot{\underline{\underline{Q}}}$ , ces deux familles de référentiels sont distincts. Il faut insister sur le statut local très particulier de ces référentiels. En effet, on adopte ici un référentiel différent pour suivre chaque particule matérielle. Cela peut dans certains cas permettre une écriture plus simple des lois de comportement. On renvoie à l'ouvrage (Besson et al., 2001) pour ce point qui sort largement du cadre de ce cours.

### 2.4.6 Exemples de champs de vitesses

#### *Champ de vitesses de corps rigide*

On obtient un champ de vitesses de corps rigide en dérivant par rapport au temps le champ de déplacement (2.50)

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{W}(t) \cdot (\underline{x} - \underline{c}) + \dot{\underline{c}}(t), \quad \text{avec } \underline{W} = \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T \quad (2.237)$$

où  $\underline{Q}$  est une rotation et  $\dot{\underline{c}}$  un champ de vitesse uniforme. Plus généralement tout tenseur antisymétrique  $\underline{W}$  permet de définir un champ de vitesses de corps solide de la forme (2.237). Voici l'écriture matricielle d'un tel champ :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - c_1 \\ x_2 - c_2 \\ x_3 - c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_1 - c_1 \\ x_2 - c_2 \\ x_3 - c_3 \end{bmatrix} \quad (2.238)$$

Les réels  $p, q, r$  représentent les trois composantes indépendantes du tenseur antisymétrique  $\underline{W}$  et sont homogènes à une vitesse de rotation ( $s^{-1}$ ). Ce sont les composantes du vecteur rotation  $\overset{\times}{\underline{W}}$  tel que :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \overset{\times}{\underline{W}} \wedge (\underline{x} - \underline{c}) + \dot{\underline{c}} \quad (2.239)$$

La forme générale d'un champ de vitesses de mouvement de corps rigide est donc

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{v}_0 + \overset{\times}{\underline{W}} \wedge \underline{x} \quad (2.240)$$

où l'on a posé  $\underline{v}_0 = \dot{\underline{c}} - \overset{\times}{\underline{W}} \wedge \underline{c}$ . Il est important de remarquer la similarité de l'expression précédente avec (2.130) d'un mouvement de solide rigide infinitésimal. La différence fondamentale est que (2.130) n'est valable que dans le contexte infinitésimal, tandis que (2.240) est universelle. Cela vient du fait que seule une rotation infinitésimale est représentée par un tenseur antisymétrique, alors que toute vitesse de rotation est antisymétrique (cf. l'équation (2.193)). Le champ d'accélération correspondant s'obtient en dérivant deux fois (2.50) par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \underline{a} &:= \dot{\underline{v}} = \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{X} + \ddot{\underline{c}} \\ &= \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T \cdot (\underline{x} - \underline{c}) + \ddot{\underline{c}} \end{aligned} \quad (2.241)$$

Par ailleurs, on peut dériver aussi par rapport au temps l'expression (2.239) ce qui donne

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \dot{\overset{\times}{\underline{W}}} \wedge (\underline{x} - \underline{c}) + \overset{\times}{\underline{W}} \wedge (\dot{\underline{x}} - \dot{\underline{c}}) + \ddot{\underline{c}} \\ &= \dot{\overset{\times}{\underline{W}}} \wedge (\underline{x} - \underline{c}) + \overset{\times}{\underline{W}} \wedge (\overset{\times}{\underline{W}} \wedge (\underline{x} - \underline{c})) + \ddot{\underline{c}} \end{aligned} \quad (2.242)$$

Le taux de déformation associé au champ de vitesses (2.237) est nul puisque son gradient se réduit au taux de rotation  $\overset{\times}{\underline{W}}$ .

On peut aussi établir un théorème analogue au théorème 4 : *Le taux de déformation  $\overset{\times}{D}$  est nul en tout point de  $\Omega$  à l'instant  $t$  si et seulement si le champ de vitesses correspondant est un champ de vitesses de corps rigide* (2.237). La démonstration est en tout point semblable à celle du théorème 4 en remplaçant dans les expression  $\omega$  par  $W$ , et  $u$  par  $v$ .

*Extension simple*

Le gradient des vitesses pour la transformation (2.51) s'écrit

$$\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\dot{\lambda}}{1 + \lambda} \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 = \underline{\underline{D}}, \quad \underline{\underline{W}} = 0 \quad (2.243)$$

On constate, dans le cas de l'extension simple, que

$$\underline{\underline{D}}^{extension} = \frac{d}{dt} (\log \underline{\underline{U}}^{extension})$$

*Glissement simple*

En glissement simple (2.54), le gradient des vitesses, le tenseur vitesses de déformations et le tenseur taux de rotation s'écrivent

$$\underline{\underline{L}} = \dot{\gamma} \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_2, \quad \underline{\underline{D}} = \frac{\dot{\gamma}}{2} (\underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_2 + \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_1), \quad \underline{\underline{W}} = \frac{\dot{\gamma}}{2} (\underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_2 - \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_1) \quad (2.244)$$

$$[\underline{\underline{L}}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underline{\underline{D}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underline{\underline{W}}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 \\ -\frac{\dot{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.245)$$

Le taux de rotation correspond donc à une rotation autour de l'axe 3 d'angle  $\theta$  à la vitesse

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{\gamma}}{2} \quad (2.246)$$

On remarque que cette vitesse ne sature pas si le glissement s'effectue indéfiniment. C'est une situation bien différente de celle de la rotation propre  $\underline{\underline{R}}$  (cf. équation (2.65)) dont l'angle tend vers  $-\pi/2$  lorsque  $\gamma$  tend vers l'infini. Il n'est donc pas si simple d'interpréter les différentes rotations à l'œuvre lors d'un glissement simple. C'est d'ailleurs toujours un sujet de recherches (Yang et al., 1992) !



### 3 Equations de bilan

Ce chapitre rassemble les équations de conservation à respecter lors d'un mouvement du milieu continu. Ce sont des lois universelles. Les équations de bilan possèdent une structure mathématique systématique qui est formulée de manière générale dans l'annexe 13.

#### 3.1 Conservation de la masse

##### 3.1.1 Masse d'un corps matériel et sa conservation

Un corps matériel  $\mathcal{M}$  possède une **masse**  $m(\mathcal{M}) \in \mathbb{R}^+$ , i.e. un réel positif possédant une unité, le kg. La masse est une propriété additive :

$$m(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = m(\mathcal{M}_1) + m(\mathcal{M}_2) \quad (3.1)$$

si  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont deux corps disjoints. La masse est supposée être une fonction continue du volume de matière. En particulier quand ce volume tend vers 0, la masse correspondante tend vers 0. La masse est une grandeur intrinsèque, indépendante du référentiel d'observation. C'est un scalaire objectif ou invariant (puisque la terminologie coïncide pour les scalaires). Le principe de conservation de la masse stipule que  $m(\mathcal{M})$  reste inchangé au cours du temps

$$\frac{d}{dt}m(\mathcal{M}) = 0 \quad (3.2)$$

Il existe une densité de masse<sup>1</sup> telle que, pour une configuration quelconque  $\Omega$  du corps matériel  $\mathcal{M}$  dans  $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$ ,

$$m(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} dm = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) dv = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) dV = \text{Constante} \quad (3.3)$$

où la masse volumique (densité de masse) locale  $\rho(\underline{x}, t) \geq 0$  est un champ scalaire défini sur  $\Omega_t$ . La masse volumique sur la configuration de référence  $\Omega_0$  est noté  $\rho_0(\underline{X})$ . La conservation de la masse implique que

$$dm = \rho dv = \rho_0 dV = \text{Constante} \quad (3.4)$$

La relation de transport pour les éléments de volume, établie au paragraphe 2.2.5 (équation (2.37)), implique que

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{dv}{dV} = J = \det \mathbf{F} \quad (3.5)$$

En dérivant par rapport au temps la relation précédente à l'aide des relations (2.174) et (2.213),

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho_0}{J} \\ \dot{\rho} &= -\rho_0 \frac{\dot{J}}{J^2} = -\rho \frac{\dot{J}}{J} = -\rho \text{trace } \tilde{\mathbf{L}} = -\rho \text{div } \underline{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

---

1. C'est une conséquence du théorème de Radon-Nicodym en théorie de la mesure, étant donné la régularité de  $m$ .

La forme locale de la conservation de la masse (3.2) en découle :

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.8)$$

où sont données les expressions avec les dérivées temporelles particulières et convectives (cf. équation (2.174)). En particulier

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\operatorname{grad} \rho) \cdot \underline{\mathbf{v}} \quad (3.9)$$

Les relations précédentes utilisent la description eulérienne du mouvement (cf. paragraphe 2.2.3). Les équations (3.7) et (3.8) sont parfois appelées **équation de continuité**. L'expression reste toutefois ambiguë et ne sera pas utilisée dans la suite.

Une conséquence très utile dans la suite de l'écriture des lois de conservation est que pour toute densité massique  $f(\underline{\mathbf{x}}, t)$  continue, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho f(\underline{\mathbf{x}}, t) dv = \int_{\Omega} \rho \dot{f} dv \quad (3.10)$$

Le cas  $f = 1$  correspond à la loi globale de la conservation de la masse, tandis que le cas général découle de (3.4). On renvoie au résultat (13.9) pour la démonstration complète de cette affirmation.

### 3.2 Conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique

#### 3.2.1 Quantité de mouvement et moment cinétique d'un corps matériel

La quantité de mouvement d'un corps matériel  $\mathcal{M}$  dans sa configuration actuelle  $\Omega_t$  ou initiale  $\Omega_0$  prise comme configuration de référence, par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$ , est définie par

$$\int_{\Omega_t} \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) dv = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{\mathbf{X}}) \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t) dV \quad (3.11)$$

Elle est bien sûr égale au produit de la masse du corps par la vitesse de son centre d'inertie. Le moment cinétique d'un corps matériel  $\mathcal{M}$  par rapport à un point quelconque  $\underline{\mathbf{x}}_0$  de l'espace  $\mathcal{E}$ , fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , est défini sur la configuration actuelle par

$$\int_{\Omega_t} (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}_0) \wedge \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) dv \quad (3.12)$$

Le triplet formé du point  $\underline{\mathbf{x}}_0$ , et des dérivées particulières de la quantité de mouvement et du moment cinétique est appelé **torseur dynamique** du corps matériel à l'instant  $t$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

#### 3.2.2 Application de la loi fondamentale de la dynamique

Dans le cadre de la mécanique newtonienne classique, le corps matériel est soumis à un torseur d'efforts appliqués constitué d'une force résultante  $\underline{\mathbf{R}}$  et d'un moment résultant  $\underline{\mathbf{M}}_O$  par rapport à un point  $\underline{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{E}$  fixé. La première loi de Newton postule qu'il existe un référentiel dit galiléen par rapport auquel l'absence d'effort résultant se traduit par une quantité de mouvement constante

$$\underline{\mathbf{R}} = 0 \implies \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{v}} dv = 0 \quad (3.13)$$

pour tout sous-domaine  $\mathcal{D}(t) \subset \Omega_t$  et tout instant  $t$ . La loi fondamentale de la dynamique (seconde loi de Newton) stipule alors que, dans un référentiel galiléen, le torseur dynamique est en équilibre avec le torseur des efforts appliqués :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{v} \, dv = \underline{\mathbf{R}} \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho \underline{v} \, dv = \underline{\mathbf{M}}_O \quad (3.15)$$

Si, en outre, le champ des vitesses est continu sur le domaine matériel  $\mathcal{D}$ , alors la règle (3.10) qui consiste à dériver les termes sous le signe somme, peut être appliquée (domaine  $\mathcal{D}$  matériel), en tenant compte de la conservation de la masse (3.4). On obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{v} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{a} \, dv, \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho \underline{v} \, dv = \int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho \underline{a} \, dv \quad (3.16)$$

Pour que les relations (3.14) et (3.15) soient valables pour un référentiel quelconque (non nécessairement galiléen), il faut ajouter les contributions de forces d'inertie au torseur des efforts appliqués.

### 3.2.3 Partition des efforts appliqués à un corps matériel

En mécanique des milieux continus, on se livre à la classification suivante des types d'efforts appliqués à un corps matériel, appelés aussi **efforts extérieurs** :

- **Efforts de champ ou à distance.** De tels efforts agissent directement en tout point de  $\mathcal{M}$ . L'archétype en est la force de gravitation universelle. Les forces électromagnétiques en sont un autre exemple. On suppose qu'ils peuvent être représentés par une **densité massique de forces**  $\underline{\mathbf{f}}(\underline{x}, t)$

$$\underline{\mathbf{R}}^{\text{dist}} = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{f}}(\underline{x}, t) \, dv \quad (3.17)$$

pour tout sous-domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ . On suppose souvent que  $\rho \underline{\mathbf{f}}$  est indépendant du domaine  $\mathcal{D}$  lui-même. C'est une restriction importante dans le cas de la gravitation par exemple si l'on ne peut pas négliger la force gravitationnelle causée par la masse  $\mathcal{D}$  elle-même. De telles situations peuvent bien sûr être étudiées aussi. Dans de nombreux cas on peut se contenter d'un champ de gravitation uniforme sur le domaine considéré  $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{g}}$ .

La densité  $\underline{\mathbf{f}}$  a pour dimension physique : N.kg<sup>-1</sup>.

De tels efforts engendrent une densité de couples massiques

$$\underline{\mathbf{m}}^{\text{dist}}(\underline{x}, t) = (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{\mathbf{f}} + \underline{\mathbf{m}} \quad (3.18)$$

auxquels on a ajouté une source éventuelle de couples massiques  $\underline{\mathbf{m}}$ , par exemple d'origine électromagnétique.

- **Efforts surfaciques ou de contact.** De tels efforts peuvent être appliqués en tout point de la surface  $\partial\mathcal{D}$  sous forme d'actions normales ou/et tangentielles. On les représente donc par une densité surfacique d'effort  $\underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}, t)$  pour  $\underline{x} \in \partial\mathcal{D}$

$$\underline{\mathbf{R}}^{\text{contact}} = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}, t) \, ds \quad (3.19)$$

Les efforts de contact dépendent *a priori* de toutes les caractéristiques de la surface

au point  $\underline{x} \in \partial\mathcal{D}$ , à savoir sa normale  $\underline{n}$ , ses courbures de Gauss, etc<sup>2</sup>. Les forces de capillarité régissant la mécanique des mousses mais pilotant aussi la forme des ménisques dépendent par exemple de la courbure de la surface. Les efforts de contact représentent les **efforts de cohésion** de la matière puisqu'ils peuvent exister à la frontière de tout sous-domaine de  $\mathcal{M}$  et donc sur toute surface partageant le corps matériel. Les forces physiques qui garantissent la cohésion d'un solide par exemple (penser à un réseau cristallin) ne sont pourtant pas à proprement parler des efforts de contact mais bien plutôt des actions à distance (penser à l'interaction coulombienne). Toutefois, dans de nombreuses situations, cette action à distance est limitée à un domaine très proche de la surface étudiée et pourra, avec une bonne approximation, être traduite par un effort de contact. Il s'agit d'une représentation locale des efforts de cohésion (actions à courte distance). Des formulations non locales doivent être envisagées en particulier si l'on cherche à représenter de manière plus détaillée des milieux discrets par une modélisation continue. Leur usage reste toutefois limité.

Le vecteur  $\underline{t}$  s'appelle **vecteur densité surfacique de forces ou vecteur-constrainte** et a pour dimension physique<sup>3</sup> : N.m<sup>-2</sup> ou Pa (Pascal).

De tels efforts engendrent une densité surfacique de moments

$$\underline{m}^{\text{contact}}(\underline{x}, t) = (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{t} \quad (3.20)$$

Il serait légitime d'introduire, en toute généralité, une densité supplémentaire de couples surfaciques distincts du moment des forces de contact. Une telle situation conduit à la mécanique des milieux dits polaires, dont le domaine d'application reste aujourd'hui limité du moins pour les milieux massifs. La théorie des poutres, plaques et coques amène aussi à élargir le spectre des efforts de contact et de champ à prendre en compte.

Cette modélisation se traduit donc par la forme suivante du torseur des efforts appliqués sur le corps  $\mathcal{M}$  :

$$\underline{R} = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f} dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} ds \quad (3.21)$$

$$\underline{M}_O = \int_{\Omega_t} ((\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho \underline{f} + \rho \underline{m}) dv + \int_{\partial\Omega_t} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{t} ds \quad (3.22)$$

#### *Puissance des efforts appliqués dans un mouvement de corps rigide*

Dans le cas d'un mouvement de corps rigide (2.240), la puissance des efforts appliqués s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\text{ext}}(\underline{v}_0, \underline{W}) &:= \int_{\Omega_t} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{v} ds \\ &= \left( \int_{\Omega_t} \rho \underline{f} dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} ds \right) \cdot \underline{v}_0 \\ &+ \left( \int_{\Omega_t} \underline{x} \wedge \rho \underline{f} dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{x} \wedge \underline{t} ds \right) \cdot \underline{W} \end{aligned} \quad (3.23)$$

2. On verra en fait dans la suite que le cadre de représentation des efforts proposé dans ce chapitre n'autorise pas une dépendance aussi ambitieuse de  $\underline{t}$  par rapport à toutes les caractéristiques de la surface  $\partial\mathcal{D}$ . Voir aussi la note de la page 87.

3. Le mot *constrainte* désigne le rapport d'une force par une surface.

La propriété suivante du produit mixte a été utilisée dans le calcul précédent<sup>4</sup> :

$$\underline{y} \cdot \underline{W} \cdot \underline{x} = \underline{y} \cdot (\overset{\times}{\underline{W}} \wedge \underline{x}) = \overset{\times}{\underline{W}} \cdot (\underline{x} \wedge \underline{y}) \quad (3.24)$$

pour  $\underline{y} = \underline{f}, \underline{t}$  successivement. On en déduit le résultat très important suivant

$$\mathcal{P}^{ext}(\underline{v}_0, \underline{W}) = \underline{R} \cdot \underline{v}_0 + \underline{M}_O \cdot \overset{\times}{\underline{W}} \quad (3.25)$$

le moment étant évalué par rapport à l'origine du repérage des positions. Ce résultat signifie que *la puissance d'un système de forces appliquée à un corps matériel dans un mouvement de corps rigide ne dépend que du torseur de ce système de forces*.

En utilisant la définition (2.128), le moment  $\underline{M}$  est associé au tenseur antisymétrique  $\overset{\times}{\underline{M}}$  tel que

$$\underline{M} \cdot \overset{\times}{\underline{W}} = \frac{1}{2} \underline{M} : \overset{\times}{\underline{W}} \quad (3.26)$$

La matrice du tenseur  $\underline{M}$  est donnée par la formule (2.129)<sup>5</sup>. Pour finir, on rappelle que si  $\{O, \underline{R}, \underline{M}_O\}$  est le torseur d'un système de forces par rapport au point  $O$ , alors  $\{O', \underline{R}', \underline{M}_{O'}\}$  est le torseur du même système de forces par rapport au point  $O'$  si

$$\underline{R}' = \underline{R}, \quad \underline{M}_{O'} = \underline{M}_O + \underline{O}' \underline{O} \wedge \underline{R}$$

### 3.2.4 Les lois d'Euler du mouvement

Elles s'obtiennent en appliquant les relations fondamentales de la dynamique (3.14) et (3.15) au cas du système de forces introduit au paragraphe précédent, à savoir l'action d'efforts à distance et d'efforts de contact. Le bilan de quantité de mouvement constitue la première loi d'Euler :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dv = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{f}(\underline{x}, t) dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{x}, \partial\Omega_t, t) ds \quad (3.27)$$

Le bilan de moment cinétique constitue la seconde loi d'Euler :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) dv &= \int_{\Omega_t} ((\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{x}, t) \underline{f}(\underline{x}, t) + \rho \underline{m}) dv \\ &+ \int_{\partial\Omega_t} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{t}(\underline{x}, \partial\Omega_t, t) ds \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ces lois s'appliquent à tout sous-domaine matériel de  $\Omega_t$  en considérant le système de forces appliquées correspondant. Elles revêtent cette forme pour tout référentiel à condition d'incorporer à  $\underline{f}$  des forces d'inertie.

4. En notation indicelle (base orthonormée), cela s'écrit

$$\underline{y} \cdot \underline{W} \cdot \underline{x} = y_i W_{ij} x_j = y_i \epsilon_{ijk} \overset{\times}{W}_j x_k = \overset{\times}{W}_j \epsilon_{jki} x_k y_i = \overset{\times}{\underline{W}} \cdot (\underline{x} \wedge \underline{y})$$

où  $\epsilon_{ijk}$  désigne les composantes du tenseur des permutations (cf. paragraphe 12.1.3 de l'annexe 12).

5. La preuve du résultat précédent est alors simplement

$$\overset{\times}{\underline{M}} : \overset{\times}{\underline{W}} = M_{ij} \overset{\times}{W}_{ij} = 2 \overset{\times}{W}_i M_i$$

Lorsque le champ des vitesses est continu au sein du domaine matériel, on peut utiliser les relations (3.16) et les lois d'Euler s'écrivent

$$\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{a}(\underline{x}, t) dv = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{f}(\underline{x}, t) dv + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{x}, \partial\Omega_t, t) ds \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{x}, t) \underline{a}(\underline{x}, t) dv &= \int_{\Omega_t} ((\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{x}, t) \underline{f}(\underline{x}, t) + \rho \underline{m}) dv \\ &+ \int_{\partial\Omega_t} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{t}(\underline{x}, \partial\Omega_t, t) ds \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.3 Analyse des contraintes : la méthode de Cauchy

#### 3.3.1 Insuffisance de la représentation pression des efforts intérieurs

Quelle est la forme nécessaire du vecteur  $\underline{t}$  d'effort de contact pour décrire la variété des situations rencontrées lorsque l'on sollicite mécaniquement les corps matériels ? Peut-on se contenter du modèle sommaire  $\underline{t} = 0$  ? Si l'on prend  $\underline{t} = 0$  dans les équations d'Euler, on retrouve les lois de Newton d'un corps soumis uniquement à des actions à distance, et donc "en chute libre" pour ainsi dire. Ce modèle est insuffisant pour décrire par exemple la réponse d'un solide à la pression d'un fluide dans lequel il serait immergé. Un tel exemple exige un modèle plus riche de la forme

$$\underline{t}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}, t) \quad (3.31)$$

où l'on a introduit le scalaire pression  $p$  et la normale à la surface  $\underline{n}$ . A son tour, ce modèle ne permet pas d'appliquer à un corps matériel une force tangentielle à sa surface. Il est vrai que de nombreux fluides ne supportent pas l'application de forces tangielles et se déforment à volonté en réponse à l'application du moindre effort tangentiel. Mais ce n'est plus le cas d'un morceau d'élastomère par exemple qui supporte effectivement de telles charges tangielles.

On remarquera que la représentation pression ne permet même pas d'expliquer le simple équilibre d'un objet solide posé sur une table. En effet, on se rappelle (et on l'établira à nouveau) qu'une telle représentation des efforts conduit à une équation d'équilibre de la forme

$$-\operatorname{grad} p + \rho \underline{g} = 0 \quad (3.32)$$

qui s'intègre<sup>6</sup> en  $p = p_a + \rho g z$  où  $p_a$  est la pression atmosphérique et  $g$  l'accélération de la pesanteur. A la frontière du solide, à une cote  $z \neq 0$  donnée, la pression est donc distincte de la pression appliquée  $p_a$ . Le principe *actio = reactio* n'est donc pas vérifié, et cette situation devrait donc être instable. L'expérience indique le contraire. Dans le cas d'un récipient contenant de l'eau, le champ de pression trouvé précédemment est certainement pertinent dans le liquide mais c'est alors l'équilibre du récipient qui pose problème... L'objet de la section suivante est de proposer une représentation simple des efforts de contact autorisant l'application de forces normales et tangielles et permettant de justifier l'équilibre des solides pesants.

#### 3.3.2 Le postulat et le théorème de Cauchy

Le postulat de Cauchy consiste à restreindre la dépendance des efforts de contact vis-à-vis des caractéristiques de la surface :

---

6. Cette intégration suppose que  $\rho$  est constant et concerne seulement donc les fluides incompressibles.

**Postulat de Cauchy<sup>7</sup> :**

$$\underline{t}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}, t) := \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) \quad (3.33)$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur normal à  $\partial\mathcal{D}$  en  $\underline{x}$ .

On suppose donc que le vecteur-constrainte ne dépend de la surface considérée que par l'intermédiaire de sa normale, excluant par exemple l'influence de la courbure. Il s'agit d'une simplification dont l'efficacité ne s'est pas démentie dans la plupart des applications en mécanique des fluides et des structures. Renoncer à cette dépendance simple conduit à la théorie dite du second gradient (cf. (Germain, 1973b)), dont le champ d'application reste limité en ce qui concerne les corps massifs (fluides et effets de capillarité par exemple, écoulement du sang dans un vaisseau étroit...). Il faudra par contre remettre en question cette simplification dans l'analyse des plaques par exemple.

L'énoncé (3.33) revient à dire que si  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont deux domaines quelconques dont les frontières partagent la même normale  $\underline{n}$  en un point  $\underline{x} \in \partial\mathcal{D}_1 \cap \partial\mathcal{D}_2$  (voir la figure 3.1), alors

$$\underline{t}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}_1, t) = \underline{t}(\underline{x}, \partial\mathcal{D}_2, t) \quad (3.34)$$

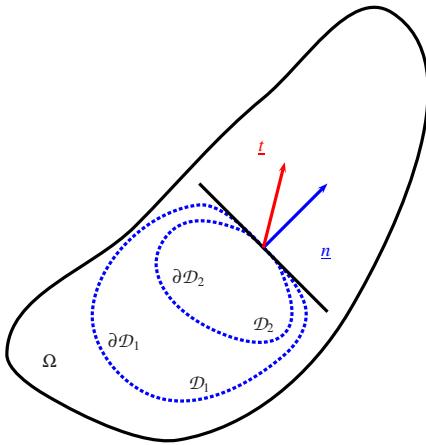


Figure 3.1 : Deux sous-domaines d'un corps matériel dont les contours ont une normale commune. Le postulat de Cauchy affirme qu'en cet endroit les efforts de contact coïncident.

7. Le postulat de Cauchy est en fait un théorème. La démonstration de ce fait, due à Noll (Noll, 1959), dépasse le cadre de ce cours (voir aussi (Noll and Virga, 1990; dell'Isola and Seppecher, 1995)). Cependant, on peut sentir l'argument en remarquant que, dans la loi d'Euler (3.27), on doit avoir l'égalité entre une intégrale de surface d'un côté (efforts surfaciques) et d'une intégrale de volume de l'autre (efforts volumiques et d'inertie). Une telle représentation n'est en fait possible que si  $\underline{t}$  ne dépend de  $\partial\mathcal{D}$  que par l'intermédiaire de sa normale. Seul l'ajout d'une densité de doubles forces d'arêtes dans la représentation des efforts permet en fait d'élargir la dépendance du vecteur contrainte vis-à-vis des caractéristiques de la surface. Mais on quitte alors le cadre d'une théorie du premier gradient (Germain, 1973b; dell'Isola and Seppecher, 1995). La méthode de construction de Cauchy fonctionne pour ainsi dire miraculeusement dans le cadre de la théorie du premier gradient. Elle masque hélas ses propres limitations et s'étend avec difficulté à des théories plus riches. On lui opposera la méthode des puissances virtuelles qui permet une modélisation systématique des milieux continus, notamment grâce à l'introduction dès les premières étapes de la démarche de la notion de puissance des efforts intérieurs (voir les commentaires de la fin du paragraphe 3.3.4). Au contraire, l'approche de Cauchy part de la représentation des efforts extérieurs.

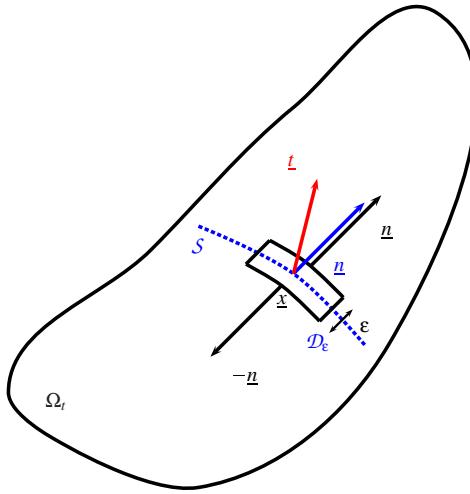


Figure 3.2 : L'argument du “cachet d'aspirine” : on considère un sous-domaine  $\mathcal{D}_\epsilon$  contenant une portion de la surface  $\mathcal{S}$  autour du point  $\underline{x}$ . Son épaisseur  $\epsilon$  est amenée à tendre vers 0.

Dans le cadre de cette hypothèse, on peut réécrire la première loi d'Euler sous la forme suivante :

$$\int_{\partial\Omega_t} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) ds = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)(\underline{a} - \underline{f}) dv \quad (3.35)$$

Cette expression montre que l'intégrale de surface doit être réductible à une intégrale de volume, ce qui n'est *a priori* pas vrai pour n'importe quelle forme du champ  $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n})$ . Le théorème de la divergence (12.161) permet un tel transfert de la surface au volume, à condition toutefois que la densité surfacique soit linéaire en  $\underline{n}$ . Pour un champ de vecteurs régulier  $\underline{v}$  par exemple

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{v} \cdot \underline{n} ds = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{v} dv \quad (3.36)$$

Si  $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n})$  est linéaire en  $\underline{n}$ , autrement dit si  $\underline{t}$  est un **flux**, alors une réduction de la résultante des efforts de contact à une intégrale de volume est possible. Le théorème de Cauchy indique en fait que cette condition suffisante est aussi nécessaire. Pour établir ce résultat, il faut passer d'abord par le

**Lemme de Cauchy (lemme d'imparité)** *L'effort de contact exercé au point  $\underline{x}$  par la matière du côté (1) d'une surface  $\mathcal{S}$  contenant  $\underline{x}$  sur le côté (2) de cette surface est opposé à l'effort exercé par (2) sur (1), à condition toutefois que  $\underline{t}$  y soit continu et que l'accélération  $\underline{a}$  et l'effort massique  $\underline{f}$  y soient finis. En d'autres termes,*

$$\underline{t}(\underline{x}, -\underline{n}, t) = -\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) \quad (3.37)$$

**Preuve.** On utilise ce que les anglo-saxons appellent le *pillbox argument*, c'est-à-dire un domaine aplati  $\mathcal{D}_\epsilon$  d'épaisseur  $\epsilon$  contenant une portion de la surface  $\mathcal{S} \ni \underline{x}$  (voir figure

3.2). Lorsque l'on fait tendre  $\epsilon \rightarrow 0$  dans la loi d'Euler

$$\int_{\partial D_\epsilon} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) ds = \int_{D_\epsilon} \rho(\underline{x}, t)(\underline{a} - \underline{f}) dv \quad (3.38)$$

les termes volumiques tendent vers zéro puisque l'accélération et les forces massiques sont supposées bornées. Il reste un terme surfacique dont la contribution latérale tend vers zéro, de sorte qu'il ne subsiste que

$$\int_{S^+} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}^+) ds + \int_{S^-} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}^-) ds = \int_{S^+} (\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) + \underline{t}(\underline{x}, -\underline{n})) ds = 0$$

pour tous les éléments de surface  $S^\pm$  ayant des normales opposées. La continuité supposée de l'intégrande sur la surface entraîne le résultat (3.37).  $\square$

Ce théorème est l'équivalent de la loi de Newton de l'action et de la réaction, en remarquant toutefois que la troisième loi de Newton est un axiome tandis qu'il s'agit ici de la conséquence d'un autre axiome, à savoir le postulat de Cauchy. Il ne s'applique pas en présence d'une onde de choc (car l'accélération est non bornée sur une telle surface de discontinuité de vitesses) ou de forces concentrées sur la surface. Il implique l'existence du tenseur des contraintes, à la faveur du

**Théorème 10 (Théorème de Cauchy)** *Sous les mêmes hypothèses que celles du lemme de Cauchy, il existe un champ de tenseur du second ordre  $\sigma(\underline{x}, t)$  tel que*

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) = \sigma(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \quad (3.39)$$

**Preuve.** On utilise l'argument dit du tétraèdre de Cauchy. Soit  $M$  un point de  $\Omega_t$  et  $\underline{n}$  un vecteur unitaire de composantes

$$\underline{n} = n_i \underline{e}_i$$

dans la base orthonormée des  $(\underline{e}_i)$ . On construit un tétraèdre élémentaire  $\Delta_h = MP_1P_2P_3$  contenant le point  $M$  et le point  $P$  de coordonnées  $(hn_1, hn_2, hn_3)$  et dont les quatre faces  $S_1, S_2, S_3$  et  $S$  ont pour normales respectives

$$\underline{n}_1 = -\underline{e}_1, \underline{n}_2 = -\underline{e}_2, \quad \underline{n}_3 = -\underline{e}_3, \underline{n}$$

(voir figure 3.3). La première loi d'Euler (3.29) est appliquée maintenant au domaine  $\Delta_h$ . Sa projection sur l'axe  $\underline{e}_1$  s'écrit

$$\int_{\Delta_h} \rho(a_1 - f_1) dv = \int_{\partial \Delta_h} t_1 ds \quad (3.40)$$

L'application du théorème de la moyenne aux termes volumiques du membre de gauche et aux termes surfaciques du membre de droite de l'équation précédente, indique qu'il existe des points  $A, B \in \Delta_h$ ,  $A_1 \in S_1$ ,  $A_2 \in S_2$ ,  $A_3 \in S_3$  et  $A_4 \in S$  tels que<sup>8</sup>

$$\frac{1}{3} Sh(\rho a_1(A) - \rho f_1(B)) = \int_{S_1} t_1(-\underline{e}_1) ds + \int_{S_2} t_1(-\underline{e}_2) ds + \int_{S_3} t_1(-\underline{e}_3) ds + \int_S t_1(\underline{n}) ds$$

---

8. En toute rigueur, le théorème de la moyenne ne s'applique généralement pas comme annoncé aux fonctions  $\underline{f}$  et  $\underline{a}$  sous l'hypothèse qui préside au théorème de Cauchy à savoir que  $\underline{a} - \underline{f}$  est bornée mais non nécessairement supposée continue. En fait la démonstration reste valable car le membre de gauche peut alors effectivement toujours s'écrire comme le produit de  $Sh$  par un vecteur borné quelque soit  $h$ .

$$\begin{aligned}
&= - \left( \int_{S_1} t_1(\underline{\mathbf{e}}_1) ds + \int_{S_2} t_1(\underline{\mathbf{e}}_2) ds + \int_{S_3} t_1(\underline{\mathbf{e}}_3) ds \right) + \int_S t_1(\underline{\mathbf{n}}) ds \\
&= -(S_1 t_1(A_1, \underline{\mathbf{e}}_1) + S_2 t_1(A_2, \underline{\mathbf{e}}_2) + S_3 t_1(A_3, \underline{\mathbf{e}}_3)) + S t_1(A_4, \underline{\mathbf{n}}) \quad (3.41)
\end{aligned}$$

On a introduit le volume  $Sh/3$  du tétraèdre. Les surfaces  $S_i$  sont liées à  $S$  par les “cosinus directeurs”<sup>9</sup> :

$$S_i = S n_i \quad (3.42)$$

Lorsque l'on fait tendre  $h \rightarrow 0$ , les points  $A, B, A_i$  tendent vers  $M$ . En divisant l'équation (3.41) par  $S$  et à la limite  $h \rightarrow 0$ , le membre de gauche proportionnel à  $h$  tend vers 0 et on obtient

$$t_1(M, \underline{\mathbf{n}}) = t_1(M, \sum_{i=1}^3 n_i \underline{\mathbf{e}}_i) = \sum_{i=1}^3 n_i t_1(M, \underline{\mathbf{e}}_i) \quad (3.43)$$

où les signes sommes ont été introduits de manière exceptionnelle pour rendre plus visible le caractère linéaire de l'opérateur. Cette équation exprime la linéarité de  $t_1$  par rapport à  $\underline{\mathbf{n}}$ . Le résultat s'étend de la même façon aux composantes  $t_2$  et  $t_3$ . Il existe donc un opérateur linéaire  $\underline{\sigma}(M)$  tel que

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}}, \quad \text{avec} \quad \sigma_{ij}(M) = t_i(M, \underline{\mathbf{e}}_j) \quad (3.44)$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

L'opérateur  $\underline{\sigma}(M)$ , en tant qu'application linéaire, est un tenseur d'ordre 2. □  
Le théorème précédent a été publié par A. Cauchy en 1823. L'opérateur linéaire  $\underline{\sigma}$  s'appelle le **tenseur des contraintes de Cauchy** ou parfois **tenseur des contraintes vraies**. L'adjectif “vrai” vient du fait que le tenseur des contraintes de Cauchy est défini sur la configuration actuelle : c'est une “machine” (un opérateur)<sup>10</sup> qui, à un élément de surface orienté de la configuration actuelle, associe la force physiquement appliquée à cet élément de surface. L'objectif du chapitre 4 est d'apprendre à mieux le connaître. On établit dans la suite la version locale des équations de conservation de la quantité de mouvement.

### 3.3.3 Les lois de Cauchy du mouvement

#### Loi de conservation locale de la quantité de mouvement

Le passage de la première loi d'Euler à l'écriture locale du bilan de la quantité de mouvement s'appuie sur l'utilisation du théorème de la divergence que l'on écrit sous la forme suivante dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormées, pour une fonction

---

9. Pour retrouver cette expression, on peut faire appel au théorème de la divergence :

$$\int_{\partial\Delta_h} \underline{\mathbf{n}} \, ds = \int_{\Delta_h} \operatorname{div} \underline{\mathbf{1}} \, dv = 0 = S \underline{\mathbf{n}} + \sum_{i=1}^3 S_i \underline{\mathbf{n}}_i$$

10. Si l'on fait abstraction un instant du caractère euclidien des tenseurs considérés, on remarquera que  $\underline{\sigma} \in E^* \otimes E$ , c'est-à-dire qu'il opère sur des covecteurs (les éléments de surface sont des covecteurs qui opèrent sur des vecteurs pour produire des volumes) pour produire un covecteur. Les forces physiques sont, on le rappelle, des covecteurs qui opèrent sur des vecteurs vitesses pour produire une puissance.

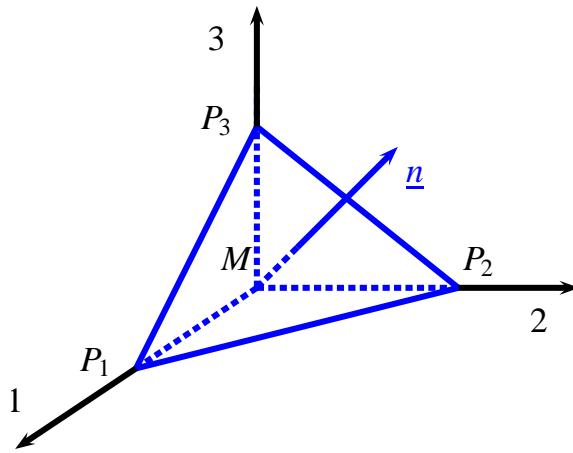


Figure 3.3 : Le tétraèdre de Cauchy en un point  $M \in \Omega_t$  et pour une normale donnée  $\underline{n}$ .

$f$  continue sur  $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$  et ayant des dérivées premières dans  $\mathcal{D}$  (cf. théorème (29)) :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f n_i ds = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dv \quad (3.46)$$

La formule (3.36) déjà évoquée n'en est qu'une application pour  $f = v_i$ . La résultante des efforts de contact se transforme donc en

$$\int_{\partial\mathcal{D}} t_i(\underline{x}, \underline{n}, t) ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \sigma_{ij}(\underline{x}, t) n_j ds = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (3.47)$$

La première loi d'Euler (3.29) s'écrit donc maintenant

$$\int_{\mathcal{D}} \left( \rho(a_i - f_i) - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dv = 0 \quad (3.48)$$

Le résultat étant vrai pour tout domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ , l'intégrande doit s'annuler en tout point  $\underline{x}$  où elle est continue :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho a_i \quad (3.49)$$

On rappelle que les indices répétés donnent lieu à une sommation. Le premier terme représente la divergence du vecteur construit à partir de la ligne  $i$  de la matrice  $\sigma_{ij}$  dans une base cartésienne orthonormée. Le vecteur  $\sigma_{ij,j}$  (où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport à l'indice  $j$ ) s'interprète en fait comme la divergence du tenseur du second ordre  $\underline{\sigma}$  selon la définition (12.132) de l'annexe 12 :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i \quad (3.50)$$

en coordonnées cartésiennes orthonormées.

On obtient ainsi la formulation intrinsèque du bilan local de quantité de mouvement

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho(\underline{f} - \underline{a}) = 0 \quad (3.51)$$

appelée **première loi de Cauchy**, ou **équation locale de la dynamique**. On utilise parfois une forme un peu différente de cette loi en explicitant la dérivée matérielle de la vitesse

$$\begin{aligned} \rho \underline{a} &= \rho \dot{\underline{v}} \\ &= \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho (\operatorname{grad} \underline{v}) \cdot \underline{v} \\ &= \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} \underline{v} + \rho (\operatorname{grad} \underline{v}) \cdot \underline{v} \\ &= \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \operatorname{div} (\rho \underline{v}) + \rho (\operatorname{grad} \underline{v}) \cdot \underline{v} \\ &= \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{v} \otimes \underline{v}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

La relation (3.51) s'écrit donc aussi de la manière suivante

$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \underline{v} \otimes \underline{v} - \underline{\sigma}) = \rho \underline{f} \quad (3.53)$$

#### *Loi de conservation locale du moment cinétique*

Dans le cadre de l'approche de Cauchy, la seconde loi d'Euler (3.30) sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$  s'écrit

$$\int_{\mathcal{D}} ((\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho(\underline{a} - \underline{f}) - \rho \underline{m}) dv = \int_{\partial \mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) ds \quad (3.54)$$

Dans une base orthonormée directe d'origine  $\underline{x}_0$ , la première composante vaut

$$\int_{\mathcal{D}} (x_2 \rho(a_3 - f_3) - x_3 \rho(a_2 - f_2) - \rho m_1) dv = \int_{\partial \mathcal{D}} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) n_j ds \quad (3.55)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_2 \sigma_{3j} - x_3 \sigma_{2j}) dv \quad (3.56)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} (x_2 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - x_3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j} + \delta_{2j} \sigma_{3j} - \delta_{3j} \sigma_{2j}) dv \quad (3.57)$$

Pour passer de la ligne (3.55) à (3.56) on a appliqué une nouvelle fois le théorème (3.46) sous les hypothèses de régularité requises. En utilisant l'équation de la dynamique (3.49) pour la composante  $i = 3$ , la relation précédente se réduit à

$$\int_{\mathcal{D}} (\sigma_{32} - \sigma_{23} + \rho m_1) dv = 0 \quad (3.58)$$

Puisque cette relation doit être vraie pour tout sous-domaine  $\mathcal{D}$  de  $\Omega_t$ , il s'ensuit que

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = \rho m_1 \quad (3.59)$$

Le calcul doit être repris pour les composantes 2 et 3 de l'équation vectorielle (3.54), de sorte que

$$\sigma_{31} - \sigma_{13} = \rho m_2 \quad (3.60)$$

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = \rho m_3 \quad (3.61)$$

Les équations (3.59) à (3.61) représentent les lois locales du bilan de moment cinétique. En utilisant le symbole des permutations  $\epsilon_{ijk}$  (défini par les relations (12.66)), ces relations prennent la forme synthétique

$$\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} = \rho m_i \quad (3.62)$$

En l'absence de couples massiques  $\underline{m} = 0$ , le résultat précédent implique que le tenseur des contraintes est symétrique :

$$\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^T = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.63)$$

ce qui constitue la **seconde loi de Cauchy**<sup>11</sup>. Le mot “symétrique” est un raccourci exprimant que, selon le point de vue adopté, le tenseur des contraintes de Cauchy est une forme bilinéaire symétrique, un endomorphisme auto-adjoint, ou **un tenseur euclidien symétrique**. Les trois terminologies sont équivalentes. En d'autres termes, le tenseur  $\underline{\sigma}$  est caractérisé, dans le cas tridimensionnel, par 6 composantes indépendantes au lieu de 9.

#### *Equations locales de la statique des milieux continus*

Les lois de Cauchy (3.50) et (3.63) indiquent que pour un corps en équilibre (cas statique,  $\underline{v} = 0$  ou plus généralement constant en chaque point de  $\Omega_t$ , mais non nécessairement uniforme), les équations de champ à satisfaire sont

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0 \quad (3.64)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T \quad (3.65)$$

Ces équations pourront aussi être appliquées pour un problème d'évolution lorsque les termes d'accélération  $\rho \underline{a}$  peuvent être négligés devant les efforts mis en jeu dans le problème. On parlera alors d'**évolution quasi-statique**.

##### *3.3.4 Le théorème des puissances virtuelles*

Les relations locales de la dynamique des milieux continus sont les équations (3.51) et (3.63). Si l'on effectue le produit scalaire de (3.51) avec un champ de vecteurs  $\underline{v}^*$  à dérivées premières bornées, dit **virtuel**<sup>12</sup>, et que l'on intègre le résultat sur un sous-

11. La seconde loi de Cauchy est parfois appelée **axiome de Boltzmann**. Le terme axiome est ambigu dans la mesure où le résultat (3.63) a été établi à partir du théorème du moment cinétique global. Toutefois, cette relation suppose qu'il n'existe pas de couples volumiques ni surfaciques comme on l'a déjà fait remarquer, ce qui représente un axiome de la théorie non polaire des milieux continus. Lorsque les couples de surface sont introduits, une théorie plus générale dite micropolaire ou, plus généralement encore, une théorie de Cosserat peut être développée (Forest, 2006).

12. La régularité mathématique des champs en jeu sera discutée au paragraphe 10.2.3. On distinguera la question de la formulation variationnelle des équations d'équilibre, qui constitue le théorème de puissances virtuelles exposé dans cette section, et pour laquelle il suffit de considérer des champs-tests de classe  $C^\infty$  à support compact, comme dans la théorie des distributions, de la formulation variationnelle du problème aux limites proprement dit pour laquelle une régularité moindre est requise, voir le chapitre 10.

domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ , en l'absence de discontinuité des vitesses réelles, on obtient

$$\int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dv + \int_{\mathcal{D}} \rho (\underline{\mathbf{f}} - \underline{\mathbf{a}}) \cdot \underline{\mathbf{v}}^* = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i^* dv + \int_{\mathcal{D}} \rho (f_i - a_i) v_i^* dv = 0 \quad (3.66)$$

En effectuant une intégration par partie sur le premier terme du membre de droite, et en appliquant le théorème de la divergence, on trouve, dans un repérage orthonormé,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij,j} v_i^* dv &= \int_{\mathcal{D}} (\sigma_{ij} v_i^*)_{,j} dv - \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} v_{i,j}^* dv \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}} \sigma_{ij} v_i^* n_j ds - \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij} v_{i,j}^* dv \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* ds - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \underline{\mathbf{v}}^* dv \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* ds - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \underline{\mathbf{D}}^* dv \end{aligned} \quad (3.67)$$

La dernière équation (3.67) fait intervenir le tenseur symétrique  $\underline{\mathbf{D}}^*$  défini ci-dessous et utilise pour cela explicitement la propriété de symétrie du tenseur des contraintes (seconde loi de Cauchy) garantissant que

$$\sigma_{ij} v_{i,j}^* = \sigma_{ij} D_{ij}^*, \quad \text{avec} \quad D_{ij}^* = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

L'équation (3.66) peut alors se mettre sous la forme :

$$-\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \underline{\mathbf{D}}^* dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dv \quad (3.68)$$

Dès lors, on introduit les notions de

- *Puissance virtuelle des efforts intérieurs* dans le champ  $\underline{\mathbf{v}}^*$

$$\mathcal{P}^i(\underline{\mathbf{v}}^*) := - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma} : \underline{\mathbf{D}}^* dv \quad (3.69)$$

avec

$$\underline{\mathbf{D}}^* := \frac{1}{2} (\nabla_x \underline{\mathbf{v}}^* + (\nabla_x \underline{\mathbf{v}}^*)^T) \quad (3.70)$$

- *Puissance virtuelle des efforts à distance* dans le champ  $\underline{\mathbf{v}}^*$

$$\mathcal{P}^e(\underline{\mathbf{v}}^*) := \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dv \quad (3.71)$$

- *Puissance virtuelle des efforts de contact* dans le champ  $\underline{\mathbf{v}}^*$

$$\mathcal{P}^c(\underline{\mathbf{v}}^*) := \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* ds \quad (3.72)$$

- *Puissance virtuelle du champ d'accélération* dans le champ  $\underline{\mathbf{v}}^*$

$$\mathcal{P}^a(\underline{\mathbf{v}}^*) := \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{v}}^* dv \quad (3.73)$$

ce qui conduit au

**Théorème 11 (Théorème des puissances virtuelles)** *Le champ des contraintes  $\underline{\sigma}$  et d'accélération  $\underline{a}$  dans un corps matériel soumis aux effort  $\rho \underline{f}$  et  $\underline{t}$ , vérifient les équations locales de la dynamique (3.51) et (3.63) si et seulement si la puissance des efforts intérieurs, à distance et de contact équilibre la puissance du champ d'accélération dans tout mouvement virtuel  $\underline{v}^*$  et pour tout sous-domaine  $\mathcal{D}$ , sous l'hypothèse de continuité des champs impliqués :*

$$\mathcal{P}^i(\underline{v}^*) + \mathcal{P}^c(\underline{v}^*) + \mathcal{P}^e(\underline{v}^*) = \mathcal{P}^a(\underline{v}^*) \quad (3.74)$$

**Preuve.** Soient  $(\underline{\sigma}, \underline{a}, \underline{f})$  des champs de contraintes, d'accélération et d'efforts massiques satisfaisant les lois de Cauchy (3.51) et (3.63), et des efforts surfaciques  $\underline{t}$  tels que  $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ . L'équation (3.74) est identique à (3.68) établie précédemment qui résulte directement des lois locales de la dynamique. Réciproquement, si la relation (3.68) est satisfaite pour tout champ virtuel  $\underline{v}^*$  et tout sous-domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ , on peut établir les lois de Cauchy en procédant de la manière suivante. On considère d'abord des champs  $\underline{v}^*$  de translation homogène du corps matériel. L'équation (3.74) appliquée à tout sous-domaine implique, après utilisation du théorème de la divergence, l'équation locale (3.51). Pour retrouver (3.63), il suffit de considérer un champ  $\underline{v}^*$  correspondant à une rotation pure.  $\square$  Lorsque le champ virtuel est assimilé à un champ de vitesses (resp. de déplacement), on parle du **théorème des puissances virtuelles** (resp. **théorème des travaux virtuels**). On peut aussi appliquer le théorème au cas particulier  $\underline{v}^* = \underline{v}$ , à savoir le champ réel de vitesses régnant à l'instant  $t$  dans la configuration  $\Omega_t$ , à condition toutefois que le champ réel soit continu. La puissance des efforts intérieurs s'écrit alors

$$\mathcal{P}^i(\underline{v}) = - \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \tilde{\underline{D}} \, dv \quad (3.75)$$

où  $\tilde{\underline{D}}$  est le tenseur taux de déformation défini par l'équation (2.186), i.e. la partie symétrique du gradient des vitesses. Il faut remarquer alors que les dimensions physiques des grandeurs en jeu sont

$$\underline{\sigma} : \tilde{\underline{D}} \sim \text{MPa.s}^{-1} = \text{Jm}^{-3}\text{s}^{-1} = \text{Wm}^{-3}$$

c'est-à-dire une densité volumique de puissance. Intégrée sur un domaine  $\mathcal{D}$ , on obtient une puissance ce qui justifie *a posteriori* les dénominations utilisées précédemment. En appliquant en outre le théorème au domaine  $\Omega_t$  entier, l'équation (3.74) n'est autre que le **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\mathcal{P}^i(\underline{v}) + \mathcal{P}^e(\underline{v}) + \mathcal{P}^c(\underline{v}) = \dot{\mathcal{K}}, \quad \text{avec} \quad \mathcal{K} := \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{v} \, dv \quad (3.76)$$

valable en l'absence d'ondes de choc. On peut en effet établir simplement que la variation d'énergie cinétique n'est autre que la puissance du champ d'accélération :

$$\dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}^a(\underline{v}) \quad (3.77)$$

Cela vient du fait que :

$$\frac{1}{2} \overbrace{\underline{v} \cdot \underline{v}}^{\bullet} = \underline{a} \cdot \underline{v} \quad (3.78)$$

Du point de vue mathématique, le théorème 11 constitue la **formulation variationnelle** des équations d'équilibre et est appelé parfois **principe de d'Alembert**. Il permet de

mettre en œuvre les puissants outils du calcul des variations.

Ce théorème est à la base des méthodes de résolution numérique des problèmes de mécanique des milieux continus, fluides comme solides, et en particulier de la **méthode des éléments finis** de résolution numérique des équations aux dérivées partielles. On passe alors par une discrétisation spatiale et temporelle des grandeurs continues en présence. Il intervient aussi dans l'établissement des **théorèmes de l'énergie** présentés dans le cours (Amestoy and Damamme, 2003). La structure du théorème précédent est si générale qu'il est possible de l'ériger en véritable **principe des puissances virtuelles** et de bâtir sur ce principe les lois du mouvement de la mécanique des milieux continus. Il s'agit d'une approche alternative à la méthode de Cauchy qui a connu son développement dans les années 1970. Le succès de la méthode des puissances virtuelles est dû au caractère linéaire par rapport aux champ virtuels de l'expression des puissances rencontrées. La méthode peut alors s'appliquer à des situations physiques et mécaniques délicates (théorie du second gradient, théorie des poutres, plaques et coques...).

### 3.4 Conservation de l'énergie

#### 3.4.1 Premier principe de la thermodynamique des milieux continus

La conservation de l'énergie constitue le premier principe de la thermodynamique (Brun, 1991; Fargue, 2004b). Les différentes contributions à l'énergie totale du sous-système  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$  sont

- **l'énergie cinétique**

$$\mathcal{K} := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dv \quad (3.79)$$

- **la puissance des efforts appliqués**

$$\mathcal{P}(\underline{\mathbf{v}}) := \mathcal{P}^c(\underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{P}^e(\underline{\mathbf{v}}) = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \, dv \quad (3.80)$$

- **L'énergie interne**  $\mathcal{E}$  du système, représentée par une densité massique  $e$  d'énergie interne

$$\mathcal{E} := \int_{\mathcal{D}} \rho e(\underline{\mathbf{x}}, t) \, dv \quad (3.81)$$

- L'apport de **chaleur**  $\mathcal{Q}$  au système sous la forme de contributions surfacique  $h(\underline{\mathbf{x}}, t, \partial\mathcal{D})$  et volumique  $\rho r(\underline{\mathbf{x}}, t)$  d'origine non mécanique

$$\mathcal{Q} := \int_{\partial\mathcal{D}} h \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r \, dv \quad (3.82)$$

Des exemples de sources de chaleur  $r$  non mécanique sont le rayonnement thermique et l'effet Joule dans un conducteur déformable. Quant à l'apport surfacique, cela peut être le flux de chaleur fourni par un corps voisin (conduction) ou l'environnement (four).

On postule que les grandeurs locales introduites  $e, h, r$  ne dépendent pas du référentiel d'observation (on parle de grandeurs objectives). Il s'agit donc de scalaires invariants par changement de référentiel. L'énergie cinétique par contre est bien sûr liée au référentiel choisi. La **première loi de la thermodynamique** stipule alors que, *dans un mouvement observé dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie interne et cinétique de tout sous-domaine d'un corps matériel dans la configuration courante est due à la puissance mécanique et à l'apport de chaleur* :

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{P}(\underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{Q} \quad (3.83)$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique (3.76) permet d'éliminer  $\mathcal{K}$  dans le bilan précédent et de faire intervenir la puissance des efforts intérieurs :

$$\dot{\mathcal{E}} = -\mathcal{P}^i(\underline{\mathbf{v}}) + \mathcal{Q} \quad (3.84)$$

A l'instar du problème mécanique déjà évoqué de représentation des efforts, le problème des échanges de chaleur demande une réflexion sur la représentation des apports de chaleur volumiques et surfaciques. L'analogue du postulat de Cauchy est **le principe de Fourier-Stokes** qui propose que l'apport surfacique de chaleur  $h(\underline{x}, \partial\mathcal{D}, t)$  ne dépende du bord de  $\mathcal{D}$  que par l'intermédiaire de la normale sortante  $\underline{\mathbf{n}}(\underline{x})$  :

$$h(\underline{x}, \partial\mathcal{D}, t) = h(\underline{x}, \underline{\mathbf{n}}, t) = -\underline{\mathbf{q}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (3.85)$$

L'existence du **vecteur flux de chaleur  $\underline{\mathbf{q}}$**  est une conséquence directe de la dépendance  $h(\underline{x}, t, \underline{\mathbf{n}})$  et se démontre de la même façon que le lemme de Cauchy (3.37). Le signe  $-$ , purement conventionnel, vient du fait que  $\underline{\mathbf{q}}$  mesure le flux entrant de chaleur (apport de chaleur au système). Un flux de chaleur entrant signifie que  $\underline{\mathbf{q}}$  fait un angle aigu avec  $-\underline{\mathbf{n}}$ . L'invariance postulée de  $h$  par changement de référentiel implique que  $\underline{\mathbf{q}}$  est un vecteur objectif.

L'équation de bilan d'énergie (3.84) s'écrit maintenant de manière explicite

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \dot{e} dv = \int_{\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} dv - \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r dv \quad (3.86)$$

### 3.4.2 Formulation locale du premier principe

Partant de (3.86), on peut aboutir à une formulation locale du bilan d'énergie. Pour cela, on transforme le seul terme surfacique présent, à savoir l'apport de chaleur surfacique, en une intégrale de volume grâce au théorème de la divergence :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds = \int_{\partial\mathcal{D}} q_i n_i ds = \int_{\mathcal{D}} q_{i,i} dv = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{\mathbf{q}} dv \quad (3.87)$$

Pour tout sous-domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$ , on a donc

$$\int_{\mathcal{D}} (\rho \dot{e} - \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} + \operatorname{div} \underline{\mathbf{q}} - \rho r) dv = 0 \quad (3.88)$$

Sous réserve de continuité des champs introduits, on en déduit **la formulation locale du premier principe de la thermodynamique**

$$\rho \dot{e} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} - \operatorname{div} \underline{\mathbf{q}} + \rho r \quad (3.89)$$

On voit apparaître dans ce bilan d'énergie un apport d'énergie mécanique  $\underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}}$ . Une autre forme de l'équation précédente, souvent rencontrée dans la littérature physique et mécanique, s'obtient en explicitant la dérivée matérielle  $\dot{e}$ , et en tenant compte de la conservation de la masse (3.8) :

$$\rho \dot{e} = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho e \underline{\mathbf{v}}) \quad (3.90)$$

et par suite

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \underline{v} + \underline{q}) = \underline{\sigma} : \underline{D} + \rho r \quad (3.91)$$

Une autre forme est souvent mentionnée aussi. Elle se déduit de la formulation globale (3.83) sans appliquer le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{\rho}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}) + \operatorname{div}((\rho e + \frac{\rho}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}) \underline{v} + \underline{q} - \underline{v} \cdot \underline{\sigma}) - \rho(r + \underline{v} \cdot \rho \underline{f}) = 0 \quad (3.92)$$

#### Conservation de la masse

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho dv = 0$$

#### Bilan de quantité de mouvement (première loi d'Euler)

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{a} dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{f} dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{t} ds$$

#### Bilan de moment cinétique (seconde loi d'Euler)

$$\int_{\mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho \underline{a} dv = \int_{\mathcal{D}} ((\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \rho \underline{f}) dv + \int_{\partial \mathcal{D}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \wedge \underline{t} ds$$

#### Bilan d'énergie

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \dot{e} dv = \int_{\mathcal{D}} \underline{\sigma} : \underline{D} dv - \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{q} \cdot \underline{n} ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r dv$$

Tableau 3.1: Récapitulatif : forme globale des équations de bilan de la thermomécanique des milieux continus, pour un sous-domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$  (en l'absence de discontinuité).

#### Équations de champ :

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

conservation de la masse

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \rho \underline{a}$$

quantité de mouvement (Cauchy 1)

$$\underline{\sigma}^T = \underline{\sigma}$$

moment cinétique (Cauchy 2)

$$\rho \dot{e} + \operatorname{div} \underline{q} = \underline{\sigma} : \underline{D} + \rho r$$

bilan d'énergie

#### Équations aux discontinuités :

$$[\rho U] = 0$$

$$[\rho U \underline{v}] - [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = 0$$

$$[(\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v}) U] + [\underline{q} - \underline{v} \cdot \underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = 0$$

Tableau 3.2: Récapitulatif : forme locale des équations de bilan de la thermomécanique des milieux continus. Points réguliers et équations aux discontinuités.

### 3.5 Equations de bilan en présence de discontinuités

Les équations de champ précédentes ont été établies en supposant que les champs considérés (vitesses, masse volumique, contraintes) étaient au moins continus dans le domaine d'étude. Il faut envisager l'existence d'une surface  $\mathcal{S} \subset \Omega_t$  au travers de laquelle vitesses, contraintes et masse volumique sont susceptibles de subir des discontinuités.

$\text{div } \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0$	quantité de mouvement
$\underline{\sigma}^T = \underline{\sigma}$	moment cinétique
$[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = 0$	continuité du vecteur-contrainte

Tableau 3.3: Récapitulatif : équations de champ et au bord pour la statique des milieux continus.

#### 3.5.1 Un théorème de transport

On souhaite suivre une quantité au cours du temps sur un *volume de contrôle*  $V(t) \subset \Omega_t$ , non nécessairement matériel. La frontière  $\partial V(t)$  de  $V(t)$  est supposée lisse : elle possède une normale sortante  $\underline{n}$  en tout point  $\underline{x} \in \partial V(t)$ , et le plan tangent y varie continûment. Toutefois, l'existence possible d'arêtes et de sommets est acceptée. La surface géométrique  $\partial V(t)$  se déplace à la vitesse normale sortante donnée par le champ  $w_n$ . La vitesse de propagation d'une surface géométrique  $\mathcal{S}$  au sein de  $\Omega_t$  est par définition un champ de vecteur défini le long de  $\mathcal{S}$  et colinéaire à la normale en tout point. En effet cette vitesse est, par définition, la limite du vecteur  $M_t M_{t+\Delta t} / \Delta t$  où  $M_t$  est sur  $\mathcal{S}(t)$  et  $M_{t+\Delta t}$  est l'intersection de la droite colinéaire à  $\underline{n}(t)$  passant par  $M_t$ .

On établit alors l'**équation de transport dite de Reynolds** pour pour tout champ de tenseur continu  $f(\underline{x}, t)$  admettant une dérivée temporelle :

$$\frac{d}{dt} \int_V f dv = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial V} f w_n ds \quad (3.93)$$

Ce résultat constitue le théorème 37 démontré au paragraphe 13.2.1 de l'annexe 13.

#### Cas d'un volume matériel

Un cas particulier est celui d'un volume matériel  $\mathcal{D}_t$ , c'est-à-dire dont le bord est toujours constitué des mêmes points matériels. Dans ce cas la vitesse normale sortante d'un point du bord coïncide avec la vitesse normale du point matériel correspondant :

$$w_n(\underline{x}, t) = \dot{\underline{x}} \cdot \underline{n} = \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \quad (3.94)$$

où  $\underline{n}$  est la normale sortante au point  $\underline{x} \in \partial \mathcal{D}_t$ . La formule (3.93) prend alors la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} f dv = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds \quad (3.95)$$

Ce résultat peut être établi directement en se ramenant à un domaine fixe matériel de référence. En effet, le domaine matériel  $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$  est une région de la configuration actuelle d'un corps matériel  $\mathcal{M}$  et on peut lui associer le domaine  $\mathcal{D}_0$  correspondant sur la configuration de référence. De même la densité  $f(\underline{x}, t)$  est représentée par  $F(\underline{X}, t)$  sur  $\Omega_0$ . On peut alors effectuer le changement de variable  $\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$  dans l'intégrale à calculer et introduire le jacobien correspondant

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} f dv &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} F J dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} (\dot{F} J + F \dot{J}) dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \dot{f} dv + \int_{\mathcal{D}_t} f (\operatorname{div} \underline{v}) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + (\operatorname{grad} f) \cdot \underline{v} + f (\operatorname{div} \underline{v}) \right) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div}(f \underline{v}) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds
\end{aligned} \tag{3.96}$$

où l'on a utilisé la formule de la dérivée matérielle (2.174), la formule d'évolution du jacobien (2.215) et finalement le théorème de la divergence (12.161).

Formellement, le résultat précédent permet de mettre en évidence une règle pratique très efficace de calcul de la dérivée d'une intégrale sur un domaine mobile matériel. Il "suffit" de dériver sous le signe intégrale en pensant à dériver aussi l'élément de volume  $dv$ . En effet, on peut constater formellement que cette règle conduit au même résultat que le théorème (3.95) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} f dv = \int_{\mathcal{D}_t} \overbrace{f}^{\bullet} dv \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f} dv + f \overbrace{dv}^{\bullet}) \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f} + f \operatorname{div} \underline{v}) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds
\end{aligned} \tag{3.98}$$

où (2.215) a été utilisé à nouveau.

### 3.5.2 Surface de discontinuité

Sur la figure 3.4a, on envisage l'existence au sein d'un domaine matériel  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$  d'une **surface** orientée  $\mathcal{S}$  présentant une discontinuité pour le champ  $f(\underline{x}, t)$ . On entend par là que  $f$  est continue sur  $\mathcal{D} - \mathcal{S}$  mais présente une **discontinuité** au travers de  $\mathcal{S}$ . Le **saut de  $f$**  est défini comme

$$[f] := f^+ - f^- \tag{3.99}$$

où  $f^+$  et  $f^-$  sont les limites à droite et à gauche respectivement en un point de  $\mathcal{S}$ , i.e. en venant de  $\mathcal{D}^+$  et de  $\mathcal{D}^-$ . La propriété de continuité de part et d'autre de  $\mathcal{S}$  garantit que ces limites à droite et gauche de  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  ne dépendent pas du trajet dans  $\mathcal{D}^+$  ou  $\mathcal{D}^-$  respectivement pris pour atteindre  $\underline{x}$ . Les frontières  $(\partial\mathcal{D})^+$  et  $(\partial\mathcal{D})^-$  sont définis de telle sorte que le contour de  $\mathcal{D}$  soit la réunion de ces deux bords

$$\partial\mathcal{D} = (\partial\mathcal{D})^+ \cup (\partial\mathcal{D})^- \quad (3.100)$$

Les frontières de  $\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{D}^-$  sont alors

$$\partial\mathcal{D}^+ = (\partial\mathcal{D})^+ \cup \mathcal{S}, \quad \partial\mathcal{D}^- = (\partial\mathcal{D})^- \cup \mathcal{S} \quad (3.101)$$

La surface de discontinuité  $\mathcal{S}$  n'est pas nécessairement matérielle (c'est-à-dire que  $\mathcal{S}$  n'est pas constituée des mêmes points matériels au cours du temps) et se propage à une vitesse  $w_n$ . On définit la composante normale de la vitesse de la matière par rapport à la surface de discontinuité

$$U = \underline{v} \cdot \underline{n} - w_n \quad (3.102)$$

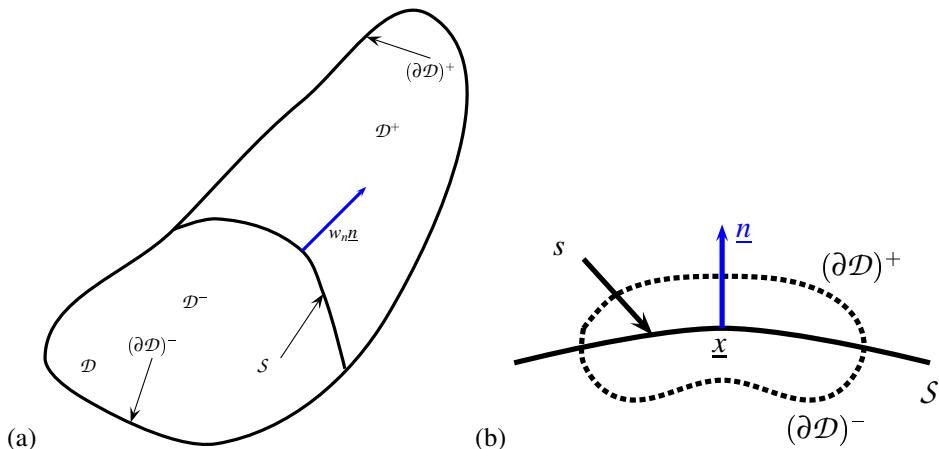


Figure 3.4 : Etablissement des théorèmes de transport : (a) propagation d'une surface singulière  $\mathcal{S}$  dans un domaine  $\mathcal{D}$ , (b) voisinage  $\mathcal{D}$  d'un point singulier  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  pour l'établissement des conditions de discontinuité.

### 3.5.3 Bilan de masse

Le champ de masse volumique  $\rho(\underline{x})$  est supposé continu sur le domaine matériel  $\mathcal{D}(t) \subset \Omega_t$  sauf sur la surface  $\mathcal{S}$  qui se propage au sein de  $\mathcal{D}$  à la vitesse  $w_n$  (voir la figure 3.4a). La masse totale contenue dans  $\mathcal{D}$  est la somme des contributions de  $\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{D}^-$  :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{D}^+} \rho \, dv + \int_{\mathcal{D}^-} \rho \, dv \quad (3.103)$$

On peut calculer la variation de masse dans  $\mathcal{D}^+$  (resp.  $\mathcal{D}^-$ ) grâce à la formule de Reynolds (3.93), en tenant compte du fait que la partie  $(\partial\mathcal{D})^+$  (resp.  $(\partial\mathcal{D})^-$ ) de sa frontière se déplace avec la matière à la vitesse  $\underline{v}$ , tandis que la surface de discontinuité  $\mathcal{S}$  se propage

à la vitesse  $w_n$  :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^-} \rho dv &= \int_{\mathcal{D}^-} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{(\partial \mathcal{D})^-} \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds + \int_{\mathcal{S}} \rho^- w_n ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^+} \rho dv &= \int_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{(\partial \mathcal{D})^+} \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds - \int_{\mathcal{S}} \rho^+ w_n ds\end{aligned}$$

On a tenu compte du fait que la normale sortante à la surface  $\mathcal{S}$  vue comme une partie de la frontière de  $\mathcal{D}^+$  est  $-\underline{\mathbf{n}}$  par définition. Ces relations peuvent être réécrites sous la forme suivante, en introduisant la vitesse relative  $U$  donnée par (3.102) et le contour complet  $\partial \mathcal{D}^\pm$  :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^-} \rho dv &= \int_{\mathcal{D}^-} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}^-} \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds - \int_{\mathcal{S}} \rho^- U^- ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^+} \rho dv &= \int_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}^+} \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds + \int_{\mathcal{S}} \rho^+ U^+ ds\end{aligned}$$

On est alors en mesure d'appliquer le théorème de la divergence sur les domaines réguliers  $\mathcal{D}^-$  et  $\mathcal{D}^+$  :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^-} \rho dv &= \int_{\mathcal{D}^-} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{\mathbf{v}}) \right) dv - \int_{\mathcal{S}} \rho^- U^- ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^+} \rho dv &= \int_{\mathcal{D}^+} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{\mathbf{v}}) \right) dv + \int_{\mathcal{S}} \rho^+ U^+ ds\end{aligned}$$

L'équation locale (3.8) de conservation de la masse s'applique à l'intérieur de  $\mathcal{D}^-$  et  $\mathcal{D}^+$ . En additionnant les deux contributions précédentes, on obtient finalement

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho dv = \int_{\mathcal{S}} [\rho U] ds \quad (3.104)$$

Le domaine  $\mathcal{D}$  étant matériel, la masse qu'il contient est constante de sorte que la dérivée temporelle précédente est nulle. Le résultat précédent est valable pour toute portion de la surface de discontinuité, l'intégrande doit donc s'annuler en tout point de  $\mathcal{S}$  le long de laquelle elle est continue (i.e. presque partout le long de  $\mathcal{S}$ ) :

$$[\rho U] = 0, \quad \text{ou} \quad [\rho(\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}} - w_n)] = 0 \quad (3.105)$$

La quantité entre crochets est le débit de masse à travers la surface géométrique  $\mathcal{S}$  (unité  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ ). La relation (3.105) traduit donc la conservation de ce débit. La masse volumique peut ainsi présenter des discontinuités sur des ensembles de mesure nulle. On peut penser à deux matériaux de densités différentes accolés le long d'une interface idéale. Toutefois, dans ce cas, l'interface est matérielle (i.e.  $w_n = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}}$ ) et la condition (3.105) est automatiquement satisfaite. Des situations plus pertinentes correspondent plutôt aux ondes de choc<sup>13</sup> dans les fluides ou à des fronts de changement de phase dans les solides.

### 3.5.4 Bilan de quantité de mouvement

On envisage ici le cas où le champ de vitesses  $\underline{\mathbf{v}}$  présente une discontinuité au travers de la surface  $\mathcal{S}$  au sein du domaine matériel  $\mathcal{D}(t) \subset \Omega_t$ . On reprend la démarche précédente

13. Les ondes de chocs sont associées à des discontinuités du champ des vitesses et à une vitesse relative  $U \neq 0$ .

en appliquant la formule de Reynolds (3.93) à  $f := \rho\underline{v}$ . On effectue les bilans sous les portions de  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^-} \rho\underline{v} dv &= \int_{\mathcal{D}^-} \frac{\partial \rho\underline{v}}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}^-} \rho\underline{v} \underline{v} \cdot \underline{n} ds - \int_{\mathcal{S}} \rho^- \underline{v}^- U^- ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^+} \rho\underline{v} dv &= \int_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial \rho\underline{v}}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}^+} \rho\underline{v} \underline{n} ds + \int_{\mathcal{S}} \rho^+ \underline{v}^+ U^+ ds\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la divergence, ces expressions deviennent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^-} \rho\underline{v} dv &= \int_{\mathcal{D}^-} \left( \frac{\partial \rho\underline{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\underline{v} \otimes \underline{v}) \right) dv - \int_{\mathcal{S}} \rho^- \underline{v}^- U^+ ds \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^+} \rho\underline{v} dv &= \int_{\mathcal{D}^+} \left( \frac{\partial \rho\underline{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\underline{v} \otimes \underline{v}) \right) dv + \int_{\mathcal{S}} \rho^+ \underline{v}^+ U^+ ds\end{aligned}$$

Le terme  $\frac{\partial \rho\underline{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\underline{v} \otimes \underline{v})$  n'est autre que l'accélération  $\underline{a}$  d'après la relation (3.52) établie dans la première partie de ce chapitre. En additionnant les deux relations précédentes, on aboutit à l'expression suivante de la variation de quantité de mouvement sur un domaine matériel présentant une surface de discontinuité  $\mathcal{S}$  (non nécessairement matérielle) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho\underline{v} dv = \int_{\mathcal{D}} \rho\underline{a} dv + \int_{\mathcal{S}} [\underline{v}] \rho U ds \quad (3.106)$$

On a tenu compte du fait que le débit relatif  $\rho U$  est continu au passage de  $\mathcal{S}$ . Lorsque le champ de vitesses est continu ou lorsque la surface de discontinuité est matérielle, la relation précédente se réduit à (3.16)<sub>1</sub> utilisée dans la première partie de ce chapitre. L'équation fondamentale de la dynamique appliquée au domaine matériel  $\mathcal{D}$ , traversé par la surface de discontinuité  $\mathcal{S}$ , s'écrit alors<sup>14</sup> :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho\underline{a} dv + \int_{\mathcal{S}} [\underline{v}] \rho U ds = \int_{\mathcal{D}} \rho(\underline{x}, t) \underline{f}(\underline{x}, t) dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} ds \quad (3.107)$$

On va appliquer cette relation à un voisinage d'un point  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  comme sur la figure 3.4b. Le voisinage  $\mathcal{D}$  contient la portion de surface

$$s = \mathcal{D} \cap \mathcal{S} \quad (3.108)$$

On va calculer la limite de (3.107) lorsque  $\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{D}^-$  tendent vers  $s$  d'une façon telle que le volume de  $\mathcal{D}$  tende vers 0 tandis que  $s$  reste inchangée (cf. figure 3.4b). Si  $\rho(\underline{a} - \underline{f})$  reste borné de part et d'autre de  $s$ , les intégrales volumiques associées tendent vers 0 et, à la limite, il ne reste plus que

$$\int_s [\underline{v}] \rho U ds = \int_s (\underline{\sigma}^+ \cdot \underline{n} + \underline{\sigma}^- \cdot (-\underline{n})) ds = \int_s [\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} ds \quad (3.109)$$

Valable pour toute portion de surface  $s$  et pour tout  $\underline{x} \in \mathcal{S}$ , l'équation précédente implique que l'intégrande doit s'annuler en tout point  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  (sauf éventuellement sur un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  de mesure nulle). On obtient les équations locales de saut à travers une surface de discontinuité :

$$[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} - \rho U [\underline{v}] = 0 \quad (3.110)$$

De manière équivalente, en tenant compte de (3.102) et (3.105), cette équation s'écrit

<sup>14</sup>. en l'absence d'efforts concentrés sur  $\mathcal{S}$ .

aussi

$$[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} - [(\underline{v} \cdot \underline{n} - w_n) \rho \underline{v}] = 0 \quad (3.111)$$

On rappelle que  $w_n$  désigne la vitesse de propagation de la surface  $\mathcal{S}$  qui n'est en général pas une surface matérielle. Dans le cas d'une **onde de choc**, le saut  $[\underline{v}]$  est non nul et la vitesse  $\rho U$  est non nulle. La matière traverse la surface en changeant brutalement de vitesses.

Dans le cas statique ou dans le cas d'une surface matérielle  $\mathcal{S}$  ( $U = 0$ ), l'équation aux discontinuités se réduit à

$$[\underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.112)$$

C'est un résultat essentiel : **dans le cas statique, le vecteur-contrainte est continu à la traversée de toute surface**. On insiste sur le fait que la condition de continuité du vecteur-contrainte (3.112) n'implique pas en général la continuité des composantes de  $\underline{\sigma}$ . Il y a en effet seulement trois conditions de continuité pour six composantes de contraintes.

L'équation de bilan de moment cinétique (3.16)<sub>2</sub> possède elle-aussi sa version discontinue. Mais comme  $\underline{x} - \underline{x}_0$  est continu à la traversée de  $\mathcal{S}$ , l'équation aux discontinuités correspondante est une conséquence directe de (3.111) et n'apporte pas d'information supplémentaire.

### 3.5.5 Bilan d'énergie

On part de la formulation globale (3.83) du premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (\rho e + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}) dv = \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{f} \cdot \underline{v} dv + \int_{\partial \mathcal{D}} (\underline{t} \cdot \underline{v} - \underline{q} \cdot \underline{n}) ds \quad (3.113)$$

Lorsque le domaine matériel  $\mathcal{D}$  est traversé par une surface de discontinuité  $\mathcal{S}$ , les dérivées particulières précédentes doivent être évaluées avec précaution. En suivant la démarche adoptée dans les deux paragraphes précédents, on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} (\rho e + \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}) dv &= \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v}) + \operatorname{div} ((\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v}) \underline{v}) \right) dv \\ &+ \int_{\mathcal{S}} [\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v}] \rho U ds \\ &= \int_{\mathcal{D}} (\rho \dot{e} + \rho \underline{a} \cdot \underline{v}) dv + \int_{\mathcal{S}} [\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v}] \rho U ds \end{aligned} \quad (3.114)$$

L'équation de bilan global d'énergie en présence de discontinuités s'obtient alors en substituant la relation précédente dans la loi (3.113). La version locale de ce bilan s'en déduit en l'appliquant à des domaines  $\mathcal{D}$  comme sur la figure 3.4b, de plus en plus petits. Finalement, en (presque) tout point de  $\mathcal{S}$ , on doit avoir :

$$[(\rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v}) U] + [\underline{q} - \underline{v} \cdot \underline{\sigma}] \cdot \underline{n} = 0 \quad (3.115)$$

En particulier, dans le cas d'une surface de discontinuité matérielle, on retrouve la continuité du flux  $\underline{q} \cdot \underline{n}$  à condition de prendre en compte la continuité du vecteur-contrainte  $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  (cf. équation (3.112)).

## 4 Le tenseur des contraintes dans tous ses états

### 4.1 Les tenseurs de contraintes

#### 4.1.1 Représentation lagrangienne des équations d'équilibre

La première loi d'Euler (3.27) est exprimée sur tout sous-domaine  $\mathcal{D}$  de la configuration actuelle  $\Omega_t$  :

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{a}} \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho \underline{\mathbf{f}} \, dv \quad (4.1)$$

Toutes les grandeurs introduites sont des fonctions eulériennes de  $(\underline{x}, t)$ . Il est légitime de chercher s'il existe une formulation lagrangienne des lois de la dynamique. Pour cela, un changement de variable  $\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$  est nécessaire. Ce changement de variable conduit alors à la représentation lagrangienne suivante du bilan global de quantité de mouvement sur  $\mathcal{D}_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{D}) \subset \Omega_0$  :

$$\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{\mathbf{A}} \, dV = \int_{\partial\mathcal{D}_0} \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{N}} \, dS + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{\mathbf{F}} \, dV \quad (4.2)$$

Toutes les grandeurs présentes dans (4.2) sont des fonctions lagrangiennes de  $(\underline{X}, t)$  définies sur la configuration de référence  $\Omega_0$ . On a utilisé au passage le fait que  $\rho dv = \rho_0 dV$  et introduit les grandeurs fonctions des variables lagragiennes suivantes :

- L'accélération  $\underline{\mathbf{A}}(\underline{X}, t) = \underline{\mathbf{a}}(\underline{x}, t)$  définie par (2.180).
- Les efforts massiques  $\underline{\mathbf{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\mathbf{f}}(\Phi(\underline{X}, t), t)$  définies sur la configuration de référence.
- La normale  $\underline{\mathbf{N}}$  au point  $\underline{X} \in \partial\mathcal{D}_0$ . Elle est reliée à la normale au point  $\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t) \in \partial\mathcal{D}$  par la formule de transport de l'élément de surface (2.41) :

$$\underline{\mathbf{n}} \, ds = J \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{N}} \, dS$$

- Le **tenseur des contraintes nominales**  $\underline{\mathbf{S}}$ . Pour le construire, on effectue le transport du vecteur contrainte sur la configuration de référence :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{t}} \, ds &= \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \, ds = J \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{N}} \, dS \\ &= \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{N}} \, dS = \underline{\mathbf{T}}_S \, dS \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec, après identification,

$$\underline{\mathbf{S}} := J \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-T} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{T}}_S := \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{N}} \quad (4.4)$$

L'intégrale de surface dans (4.2) se transforme en une contribution volumique grâce au théorème de la divergence :

$$\int_{\partial\mathcal{D}_0} S_{ij} N_j \, dS = \int_{\mathcal{D}_0} \frac{\partial S_{ij}}{\partial X_j} \, dV = \int_{\mathcal{D}_0} \operatorname{Div} \underline{\mathbf{S}} \, dV \quad (4.5)$$

où l'opérateur divergence  $\operatorname{Div} \underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \nabla_X$  fait intervenir les dérivées partielles par rapport aux variables  $\underline{X}$ . Le bilan (4.2) devient donc

$$\int_{\mathcal{D}_0} (\rho_0 \underline{\mathbf{A}} - \operatorname{Div} \underline{\mathbf{S}} - \rho_0 \underline{\mathbf{F}}) \, dV = 0 \quad (4.6)$$

Le résultat précédent étant valable pour tout sous-domaine  $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0$ , et sous réserve de continuité des champs en présence, on obtient la **formulation lagrangienne locale de la dynamique des milieux continus** :

$$\operatorname{Div} \underline{\mathbf{S}} + \rho_0 \underline{\mathbf{F}} = \rho_0 \underline{\mathbf{A}} \quad (4.7)$$

La seconde loi de Cauchy traduite en termes de fonctions lagrangiennes s'écrit alors

$$\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^T = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \quad (4.8)$$

puisque  $\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T = J \underline{\boldsymbol{\sigma}}$  est symétrique.

#### *Interprétation du tenseur des contraintes nominales*

Le tenseur des contraintes nominales  $\underline{\mathbf{S}}$  précédemment introduit est aussi appelé **tenseur de Boussinesq** ou **premier tenseur de Piola-Kirchhoff**. Il n'est pas symétrique mais en vertu de la seconde loi de Cauchy, il vérifie la propriété (4.8). Il a un pied dans la configuration de référence et un pied dans la configuration actuelle (tenseur mixte) puisqu'il associe à un élément de surface  $\underline{\mathbf{N}} dS$  de la configuration de référence le vecteur force  $\underline{\mathbf{t}} ds$  sur la configuration actuelle. Il n'est donc pas purement lagrangien (tout comme le gradient de la transformation  $\underline{\mathbf{F}}$ ). Le tenseur de Boussinesq est donc la machine à produire les efforts actuels à partir d'un élément de surface initial. Son intérêt pour l'ingénieur est dès lors évident : l'ingénieur mesure les efforts en cours d'essai sur des éprouvettes ou des pièces de structure mais ne peut rapporter ces efforts qu'aux surfaces initiales des échantillons car les mesures de variations de section sont en général délicates et relativement coûteuses. En supposant que l'état de contrainte dans une éprouvette de section initiale  $S_0$  et de section courante  $\tilde{S}$  soit homogène, l'effort mesuré vaut

$$\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\mathbf{S}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{T}}_S S_0 = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \quad (4.9)$$

C'est pourquoi on parle parfois de la **contrainte de l'ingénieur** à propos de  $\underline{\mathbf{T}}_S$  ou de  $\underline{\mathbf{S}}$ .

#### *4.1.2 Contraintes et déformations conjuguées*

On reprend l'expression (3.75) de la puissance des efforts intérieurs sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$  qui fait intervenir les grandeurs purement eulériennes que sont le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  et le taux de déformation  $\underline{\mathbf{D}}$ . Pour passer à une représentation lagrangienne de la puissance des efforts intérieurs sur le domaine  $\mathcal{D}_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{D})$ , on profite du fait que  $\underline{\mathbf{D}}$  est relié à la dérivée du tenseur de Green-Lagrange, grandeur purement lagrangienne, par la relation (2.200) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^i &= \int_{\mathcal{D}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} dv = \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} J dV \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\boldsymbol{\sigma}} : (\underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\dot{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}) J dV = \int_{\mathcal{D}_0} \sigma_{ij} F_{ik}^{-T} \dot{E}_{kl} F_{lj}^{-1} J dV \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} (F_{ki}^{-1} \sigma_{ij} F_{jl}^{-T}) \dot{E}_{kl} J dV \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \underline{\boldsymbol{\Pi}} : \underline{\dot{\mathbf{E}}} dV \end{aligned} \quad (4.10)$$

qui fait apparaître le **tenseur de Piola** ou **second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff**  $\underline{\Pi}$  :

$$\underline{\Pi} = J \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{S} \quad (4.11)$$

Contrairement à  $\underline{S}$ , tenseur des contraintes de Boussinesq, précédemment introduit, le tenseur de Piola est symétrique. Il est en outre purement lagrangien :

$$\underline{T} dS := \underline{\Pi} \cdot \underline{N} dS = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{T}_S dS = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{t} ds \quad (4.12)$$

il associe à un élément de surface initial le transporté convectif du vecteur-contrainte  $\underline{t}$  sur la configuration initiale. On voit d'ailleurs que  $\underline{t}$  est transporté comme un vecteur matériel.  $\underline{T}$  est donc le vecteur contrainte entièrement lié à la configuration de référence. La densité de puissance des efforts intérieurs rapportée à l'élément de volume initial peut donc s'exprimer en fonction de différents couples de variables constitués d'un tenseur de contraintes et d'une certaine vitesse ou d'un taux de déformation :

$$J\sigma : \underline{D} = \underline{\Pi} : \dot{\underline{E}} = \underline{S} : \dot{\underline{F}}$$

D'un point de vue physique, il est plus pertinent d'exprimer la densité de puissance massive des efforts intérieurs :

$$\frac{\underline{\sigma} : \underline{D}}{\rho} = \frac{\underline{\Pi} : \dot{\underline{E}}}{\rho_0} = \frac{\underline{S} : \dot{\underline{F}}}{\rho_0} \quad (4.13)$$

Pour chaque couple, la contrainte et la déformation associée sont dites **conjuguées** (ou aussi **duales**). Le gradient de la transformation est la déformation conjuguée du tenseur des contraintes nominales. La déformation de Green-Lagrange est la déformation conjuguée du tenseur des contraintes de Piola. Le “vitesse de déformation”<sup>1</sup> associée au tenseur des contraintes  $J\sigma$  (correction par  $J$  du tenseur de Cauchy, appelé tenseur des contraintes de Kirchhoff) est le taux de déformation  $\underline{D}$ . Par contre, il n'y a pas de déformation conjuguée pour  $J\sigma$  car  $\underline{D}$  ne s'exprime pas directement comme la dérivée temporelle d'une mesure de déformation. Les tenseurs des contraintes introduits (ainsi que d'autres, au cas où vous les rencontreriez<sup>2</sup>) et les déformations conjuguées sont consignés dans le tableau (4.1). Il est possible en fait de construire un **tenseur des contraintes généralisé** conjugué à chaque mesure de déformation, par exemple issue de la famille (2.84).

#### 4.1.3 Changement de base

Les formules de transformation des composantes du tenseur des contraintes selon des bases quelconques correspondent aux formules de changement de base établies à la page 12.1.1 de l'annexe 12 pour les tenseurs d'ordre 2 de variance quelconque.

On a seulement besoin dans ce chapitre de rappeler ces formules dans le cas d'un changement de bases orthonormées pour un tenseur euclidien d'ordre 2 :

$$\underline{e}'_i = Q_{ki} \underline{e}_k, \quad \underline{e}_i = Q_{ki}^{-1} \underline{e}'_k = Q_{ik} \underline{e}'_k \quad (4.14)$$

La matrice de passage formée des composantes  $Q_{ik}$  (premier indice : ligne, second indice : colonne) est orthogonale dans le cas d'un changement de bases orthonormées. Son inverse coïncide avec sa transposée. On peut dès lors établir les formules de changement

1. Terminologie abusive lorsque le taux de déformation considéré n'apparaît pas de manière directe comme la dérivée temporelle d'une déformation.

2. On a ajouté le tenseur des contraintes de Mandel selon une terminologie récente introduite en Allemagne dans (Haupt, 2000; Bertram, 2005). Jean Mandel (1907-1982) fut professeur de mécanique à l'Ecole des Mines de Paris. Le tenseur des contraintes qui porte son nom prend son sens en théorie de la plasticité.

Tenseur des contraintes	Type	Taux de déformation	Déformation conjuguée
$\underline{\sigma}$ (Cauchy)	eulérien	-	-
$J\underline{\sigma}$ (Kirchhoff)	eulérien	$\underline{D}$	-
$\underline{S} := J\underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T}$ (Boussinesq)	mixte	$\dot{\underline{F}}$	$\underline{F}$
$\underline{\Pi} := J\underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T}$ (Piola)	lagrangien	$\dot{\underline{E}}$	$\underline{E}$
$\underline{M} := \underline{C} \cdot \underline{\Pi} = J\underline{F}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T}$ (Mandel)	lagrangien	$\underline{C}^{-1} \cdot \dot{\underline{E}}$	-

Tableau 4.1: Récapitulatif : Quelques tenseurs de contraintes en fonction du tenseur des contraintes de Cauchy et leurs déformations conjuguées. Noter que le gradient de la transformation est traité ici, de manière abusive, comme une mesure de déformation.

de base pour le tenseur euclidien  $\underline{\sigma}$  :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \sigma'_{kl} \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l = \sigma'_{kl} Q_{ik} Q_{jl} \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j \quad (4.15)$$

L'identification des composantes dans la base  $(\underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l)_{i,j=1,3}$  conduit aux formules de passage suivantes :

$$\sigma_{kl} = Q_{ik} Q_{jl} \sigma'_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = Q_{ki} Q_{lj} \sigma_{kl}, \quad (4.16)$$

En notation matricielle, cela donne

$$[\sigma'] = [Q]^T [\sigma] [Q] \quad (4.17)$$

## 4.2 Valeurs et directions principales des contraintes

### 4.2.1 Décomposition spectrale du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes de Cauchy est une forme bilinéaire symétrique. Il est par conséquent diagonalisable : il possède trois valeurs propres réelles  $\sigma_i$ , appelées **contraintes principales** et trois vecteurs propres  $\underline{n}_i$  deux à deux orthogonaux, appelés **directions principales des contraintes** :

$$\underline{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \underline{n}_i \otimes \underline{n}_i, \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i = \sigma_i \underline{n}_i \quad (4.18)$$

Dans la suite, on supposera que les contraintes principales sont rangées dans l'ordre décroissant tel que :

$$\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \quad (4.19)$$

où  $\sigma_1$  est la contrainte normale maximale et  $\sigma_3$  la contrainte normale minimale. Il faut noter qu'en général les directions et contraintes principales du tenseur symétrique des contraintes de Piola sont distinctes de celles du tenseur des contraintes de Cauchy.

La base  $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$ , dite principale, constitue une base orthonormée de l'espace. La matrice des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans cette base prend la

forme diagonale :

$$[\underline{\sigma}]_{\text{principale}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

#### *Invariants des contraintes par changement de base*

On appelle invariants des contraintes des fonctions à valeurs réelles des composantes du tenseur des contraintes qui ne dépendent pas du choix de la base de décomposition. De tels invariants existent pour tout endomorphisme. Les invariants principaux d'un endomorphisme sont définis au paragraphe 12.4.1. Ils s'agit des coefficients du polynôme caractéristique de l'endomorphisme considéré, ou plus généralement de fonctions des racines de ce polynôme. Dans le cas du tenseur des contraintes, tenseur euclidien d'ordre 2 symétrique, ces racines sont les contraintes principales. Les expressions classiquement utilisées pour les invariants principaux sont :

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{trace } \underline{\sigma} \quad (4.21)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{2}((\text{trace } \underline{\sigma})^2 - \text{trace } \underline{\sigma}^2) = \text{trace } \underline{\sigma}^{-1} \det \underline{\sigma} \quad (4.22)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \det \underline{\sigma} = \frac{1}{6}((\text{trace } \underline{\sigma})^3 - 3(\text{trace } \underline{\sigma})(\text{trace } \underline{\sigma}^2) + 2(\text{trace } \underline{\sigma}^3)) \quad (4.23)$$

La seconde relation utilisant l'inverse de  $\underline{\sigma}$  n'est bien sûr valable que si aucune contrainte principale n'est nulle. Les expressions précédentes indiquent que les ensembles  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ ,  $\{I_1, I_2, I_3\}$  et  $\{\text{trace } \underline{\sigma}, \text{trace } \underline{\sigma}^2, \text{trace } \underline{\sigma}^3\}$  contiennent la même information et sont donc équivalents. Ils méritent le nom d'invariants puisque leurs valeurs ne dépendent pas de la base ni du référentiel choisis. Ils sont équivalents à la connaissance des valeurs propres du tenseur des contraintes. A partir de là, on peut construire une multitude d'invariants comme autant de fonctions des trois valeurs propres du tenseur des contraintes.

#### 4.2.2 Contraintes normale et tangentielle, cisaillement

On décompose maintenant le vecteur-contrainte  $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  s'appliquant sur une facette de normale  $\underline{n}$  en une composante normale  $\sigma_n$  et une composante tangentielle  $\underline{\tau}$  contenue dans le plan de la facette de norme  $\tau$  appelée contrainte tangentielle ou de **cisaillement** ou **cission** (cf. figure 4.1) :

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_n \underline{n} + \underline{\tau} \quad (4.24)$$

$$\text{avec } \sigma_n := \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = n_i \sigma_{ij} n_j \quad (4.25)$$

$$\tau^2 := \underline{t} \cdot \underline{t} - \sigma_n^2 \quad (4.26)$$

Lorsque la facette est normale à une direction principale des contraintes  $\underline{n} = \underline{n}_i$ , la composante tangentielle  $\underline{\tau}$  est nulle et  $\sigma_n$  est égal à la contrainte principale  $\sigma_i$ . Si l'on considère maintenant un parallélépipède dont les faces sont orthogonales aux vecteurs d'une base orthonormée ( $\underline{e}_i$ ), les 3 composantes du vecteur contrainte sur la facette de normale  $\underline{e}_i$  sont exactement les composantes  $\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \sigma_{3i}$  du tenseur des contraintes dans cette base ( $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice des composantes de  $\underline{\sigma}$  dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ) :

$$\underline{t}(\underline{e}_i) = \sigma_{1i} \underline{e}_1 + \sigma_{2i} \underline{e}_2 + \sigma_{3i} \underline{e}_3 \quad (4.27)$$

Cette signification des composantes du tenseur des contraintes est illustrée sur la figure 4.2. On remarquera en particulier qu'en vertu de la symétrie du tenseur des contraintes, l'existence d'un cisaillement ou cission  $\sigma_{32}$  appliquée sur la facette de normale  $\underline{e}_2$  implique l'existence d'une cission  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$  sur la face de normale  $\underline{e}_3$ . Le résultat s'étend à des facettes non nécessairement orthogonales entre elles de normales respectives  $\underline{n}$  et  $\underline{n}'$ :

$$\underline{\tau} \cdot \underline{n}' = \underline{\tau}' \cdot \underline{n}, \quad \text{où } \underline{\tau} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \text{ et } \underline{\tau}' = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}' \quad (4.28)$$

relation parfois dite de *réciprocité des cissions*.

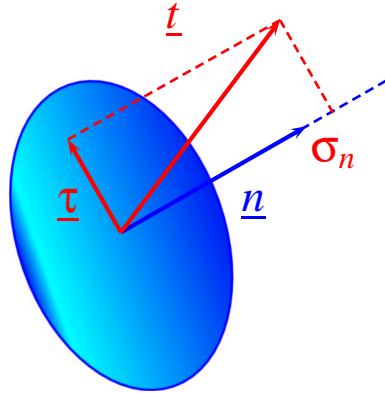


Figure 4.1 : Décomposition du vecteur-contrainte en contraintes normale et tangentielle sur une facette de normale  $\underline{n}$ .

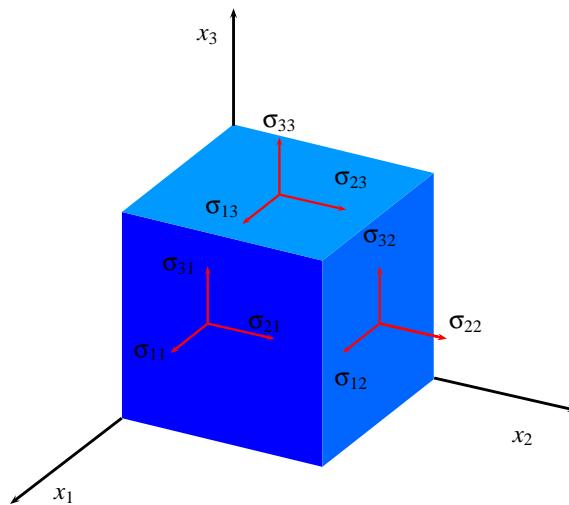


Figure 4.2 : Composantes des vecteurs-contraintes sur les faces d'un cube dans une base orthonormée.

### 4.2.3 Représentation de Mohr

Comment le vecteur-contrainte en un point matériel donné varie-t-il lorsque l'on change l'orientation de la facette ? Pour répondre à cette question, on adopte la représentation proposée par Otto Mohr qui consiste à travailler dans le plan  $(\sigma_n, \tau)$  des contraintes normales et tangentialles.

Soient  $(n_1, n_2, n_3)$  les composantes d'un vecteur normal  $\underline{n}$  dans la base principale  $(\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3)$  de  $\sigma$  donné et fixé. On établit d'abord les expressions reliant les composantes  $n_i$  et les contraintes normale  $\sigma_n$  et tangentielle  $\tau$ , par l'intermédiaire des contraintes principales  $\sigma_i$  rangées dans l'ordre décroissant (4.19). Par définition (voir équation (4.20)),

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_1 n_1 \underline{n}_1 + \sigma_2 n_2 \underline{n}_2 + \sigma_3 n_3 \underline{n}_3 \quad (4.29)$$

de sorte que, d'après (4.25),

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \quad (4.30)$$

et d'après (4.26),

$$\sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (4.31)$$

En ajoutant l'équation indiquant que la norme de  $\underline{n}$  est par définition égale à un, on peut interpréter les trois équations obtenues comme un système linéaire d'inconnues  $n_i^2$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma_n \\ \sigma_n^2 + \tau^2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

La résolution du système (4.32) fournit<sup>3</sup> :

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (4.34)$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (4.35)$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (4.36)$$

On remarque alors que la positivité des  $n_i^2$  implique les inégalités suivantes sur  $\sigma_n$  et  $\tau$  :

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0$$

---

3. Pour obtenir le résultat sous la forme simple donnée par les équations (4.34) à (4.36), il faut remarquer que le déterminant de la matrice (4.32) (dite de Vandermonde) se met sous la forme

$$\sigma_2 \sigma_3^2 + \sigma_1 \sigma_2^2 + \sigma_3 \sigma_1^2 - \sigma_1^2 \sigma_2 - \sigma_3^2 \sigma_1 - \sigma_2^2 \sigma_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) \quad (4.33)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (4.37)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \quad (4.38)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \quad (4.39)$$

La figure 4.3 représente les trois cercles de centres respectifs  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0), (\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0), (\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0)$  et de rayons respectifs  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$ , dans le plan de Mohr  $(\sigma_n, \tau)$ . Les inégalités (4.37) à (4.39) signifient que l'extrémité du vecteur-contrainte  $\underline{t}$  de coordonnées  $(\sigma_n, \tau)$  dans le plan de Mohr se situe à l'extérieur des deux premiers cercles mentionnés et à l'intérieur du plus grand cercle. La zone contenant *a priori* l'extrémité de  $\underline{t}$  est bleue sur la figure 4.3a. Ce domaine est délimité par les **cercles de Mohr**. Réciproquement, on peut établir que tout point  $(\sigma_n, \tau)$  donné de la zone bleue est atteint pour une direction  $\underline{n}$  donnée par les formules (4.34) à (4.36). En particulier les frontières du domaine constituées par les cercles de Mohr sont atteints respectivement pour  $n_3 = 0$ ,  $n_1 = 0$  ou  $n_2 = 0$ .

#### *Etude du grand cercle de Mohr*

A titre d'exemple, on étudie plus spécifiquement le cas où l'extrémité du vecteur-contrainte est sur le grand cercle de Mohr. Les facettes concernées sont celles qui contiennent la seconde direction principale des contraintes  $\underline{n}_2$ .

On va suivre l'évolution du vecteur-contrainte lorsque la facette tourne autour de l'axe  $\underline{n}_2$ . Pour cela on construit un trièdre direct à l'aide de directions  $(\underline{n}_1, \underline{n}_3, \underline{n}_2)$  (changer au besoin le sens des vecteurs initialement choisis). Le vecteur normal évolue dans le plan  $(\underline{n}_1, \underline{n}_3)$  et fait l'angle  $\theta$  avec la direction  $\underline{n}_1$ . De

$$\underline{n} = \cos \theta \underline{n}_1 + \sin \theta \underline{n}_3$$

on tire

$$\underline{t} = \sigma_1 \cos \theta \underline{n}_1 + \sigma_3 \sin \theta \underline{n}_3$$

ce qui montre que le vecteur-contrainte n'a pas de composante selon  $\underline{n}_2$  pour les facettes étudiées. Il est donc possible de construire un trièdre direct  $(\underline{n}, \underline{m}, \underline{n}_2)$ . L'intérêt de cette définition est de pouvoir considérer la contrainte algébrique  $\tau$  (on n'avait jusqu'ici guère évoqué que son carré<sup>4</sup>) telle que

$$\underline{\tau} = \tau \underline{m}, \quad \text{avec} \quad \underline{m} = -\sin \theta \underline{n}_1 + \cos \theta \underline{n}_3$$

---

4. Une telle définition algébrique de la cission n'est pas possible dans le cas général car il n'existe pas de choix naturel de  $\underline{m}$  pour toutes les facettes en un point donné. On doit alors se contenter d'une représentation dans le demi-plan  $(\sigma_n, |\tau|)$ .

Les contraintes normale et tangentielle se calculent alors

$$\sigma_n = \underline{t} \cdot \underline{n} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (4.40)$$

$$\tau = \underline{t} \cdot \underline{m} = -\sigma_1 \sin \theta \cos \theta + \sigma_3 \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (4.41)$$

On reconnaît la représentation paramétrique du cercle centré en  $(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0)$  et de rayon  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ . On confirme donc que lorsque la facette tourne autour de l'axe  $\underline{n}_2$ , le vecteur-contrainte décrit le grand cercle de Mohr. En outre, lorsque  $\underline{n}$  tourne de l'angle  $\theta$ , le vecteur-contrainte se déplace sur le grand cercle d'un angle double dans le sens opposé. Cette situation est représentée sur la figure 4.3. Cette règle permet donc d'associer à chaque point du grand cercle l'orientation de la facette correspondant à cette valeur du vecteur-contrainte.

Le raisonnement conduit dans le plan  $(\underline{n}_1, \underline{n}_3)$  est identique pour les autres cercles principaux, en choisissant avec précaution le vecteur  $\underline{m}$  faisant un angle de  $\pi/2$  positif avec  $\underline{n}$ .

Une conséquence très importante des constructions précédentes est le

**Théorème 12 (Cisaillement maximal)** Soit  $\underline{\sigma}$  le tenseur des contraintes en un point matériel, la contrainte tangentielle  $\tau_{\max}$  maximale subie sur les facettes lorsqu'on fait varier les normales  $\underline{n}$  vaut  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  où  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont respectivement les contraintes principales maximale et minimale. Elle s'exerce sur les facettes contenant la direction  $\underline{n}_2$ , à  $\pm\pi/4$  des directions  $\underline{n}_1$  et  $\underline{n}_3$ .

Le résultat se lit sur le grand cercle de Mohr de la figure 4.3. L'orientation de la facette correspondante s'obtient avec  $2\theta = \pi/2$ .  $\square$

La construction de Mohr permet d'établir aussi que la contrainte normale maximale subie en un point matériel est bien la contrainte principale maximale  $\sigma_1$ .

### 4.3 Etats de contraintes remarquables

On peut classer les états de contraintes rencontrés dans les éprouvettes ou les composants industriels selon les valeurs des contraintes principales. On distingue alors les états de contraintes à une, deux ou trois contraintes principales imposées indépendantes.

#### 4.3.1 Etat de traction/compression simple : $(\sigma, 0, 0)$

L'état de contrainte en un point est dit de traction simple lorsqu'il existe à chaque instant  $t$  un vecteur  $\underline{d}$  unitaire de l'espace tel que

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d} \quad (4.42)$$

La direction  $\underline{d}$  s'appelle direction ou **axe de traction**. Il s'agit d'un état de contrainte **uni-axial**. La matrice de ses composantes prend la forme simple suivante dans la base  $(\underline{e}_1 = \underline{d}, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Un état de traction simple peut toutefois se cacher derrière une matrice de forme plus compliquée. Pour le voir, considérons l'axe de sollicitation suivant, dans une base orthonormée donnée  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  :

$$\underline{d} = \cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2$$

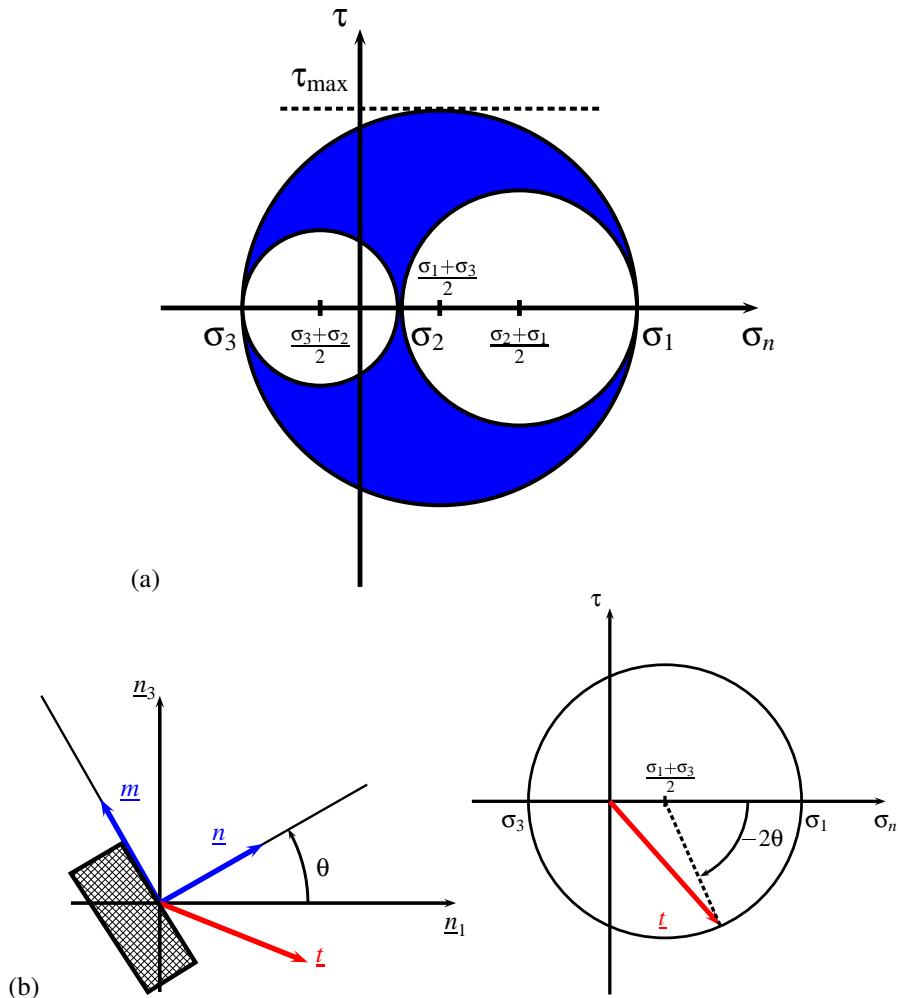


Figure 4.3 : Représentation de Mohr : (a) les cercles principaux, (b) vecteur-contrainte pour une facette contenant la direction principale des contraintes  $\underline{n}_2$ .

L'état de traction simple selon  $\underline{d}$  se décompose en

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \sigma \underline{d} \otimes \underline{d} = \sigma (\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2) \otimes (\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2) \\ &= \sigma (\cos^2 \alpha \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sin^2 \alpha \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sin \alpha \cos \alpha (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1))\end{aligned}$$

ce qui, sous forme matricielle, donne

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma \cos^2 \alpha & \sigma \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \sigma \sin \alpha \cos \alpha & \sigma \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

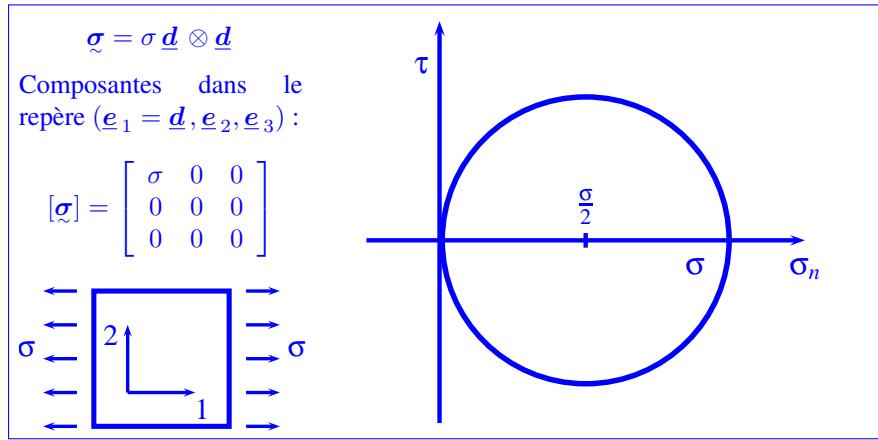


Tableau 4.2: Récapitulatif : l'état de traction simple.

C'est ainsi que les états de contraintes suivants

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 0 \\ 50 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 75 & 43 & 0 \\ 43 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

correspondent respectivement à une traction de 100 MPa selon la direction bissectrice de  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  et à une traction de 100 MPa dans la direction contenue dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  et faisant un angle de  $30^\circ$  avec  $\underline{e}_1$ . Pour dévoiler l'état qui se cache derrière une matrice de chargement donné, il faut en faire l'analyse spectrale.

La représentation de Mohr de l'état de traction simple donnée dans le tableau 4.2, montre que les facettes perpendiculaires à l'axe de traction  $\underline{d}$  ne subissent qu'une contrainte normale égale à  $\sigma$ . Par contre, les facettes contenant l'axe  $\underline{d}$  sont libres de forces. Les autres facettes subissent à la fois des efforts normaux et tangentiels. La contrainte tangentielle maximale vaut  $\sigma/2$  sur les facettes dont les normales sont situées sur le cône faisant un angle de  $\pi/4$  avec  $\underline{d}$ .

Lorsque  $\sigma > 0$ , il s'agit d'un état de **traction**. Lorsque  $\sigma < 0$ , il s'agit d'un état de **compression**.

### 4.3.2 Etat de cisaillement simple : $(\tau, -\tau, 0)$

L'état de contraintes en un point donné est dit de cisaillement simple s'il existe deux directions orthogonales<sup>5</sup>  $\underline{d}_1$  et  $\underline{d}_2$  telles que

$$\underline{\sigma} = \tau (\underline{d}_1 \otimes \underline{d}_2 + \underline{d}_2 \otimes \underline{d}_1) \quad (4.45)$$

5. Si l'état de contraintes prend la forme (4.45) avec  $\underline{d}_1 \cdot \underline{d}_2 = \cos \alpha$ , alors on vérifiera que les contraintes principales associées sont  $(\cos \alpha + 1)\tau$ ,  $(\cos \alpha - 1)\tau$  et 0. Les contraintes principales maximale et minimale sont opposées seulement lorsque  $\alpha = \pm\pi/2$ . Dans les autres cas, il s'agit d'un état de contrainte bi-axial analysé au paragraphe 4.3.3.

Ses composantes dans la base  $(\underline{e}_1 = \underline{d}_1, \underline{e}_2 = \underline{d}_2, \underline{e}_3)$  sont

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

L'analyse spectrale de l'état de cisaillement simple conduit à

$$\sigma_1 = \tau, \quad \underline{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{d}_1 + \underline{d}_2) \quad (4.47)$$

$$\sigma_2 = 0, \quad \underline{n}_2 = \underline{d}_1 \wedge \underline{d}_2 \quad (4.48)$$

$$\sigma_3 = -\tau, \quad \underline{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \quad (4.49)$$

La matrice des composantes de l'état de contraintes (4.45) dans la base  $(\underline{n}_1, \underline{n}_3, -\underline{d}_1 \wedge \underline{d}_2)$  est donc

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Les facettes normales à  $\underline{n}_1$  subissent donc une contrainte normale de traction  $\tau$  et ne sont soumises à aucune contrainte tangentiale. Au contraire, les facettes normales à  $\underline{n}_3$  subissent une contrainte normale de compression  $-\tau$ . On peut donc interpréter l'état de cisaillement simple comme un état de contraintes bi-axial composé d'une traction selon  $\underline{n}_1$  et d'une compression de même valeur absolue selon  $\underline{n}_3$ . Cette propriété remarquable est illustrée par les figures du tableau 4.3.

#### 4.3.3 Etat de contraintes bi-axial / contraintes planes : $(\sigma_1, \sigma_2, 0)$

L'état de contraintes est dit **plan** dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , si, pour  $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2$ ,

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 = 0$$

La matrice des composantes dans la base orthonormée  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  s'écrit

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

On voit que l'une des contraintes principales est 0 pour la direction principale  $\underline{e}_3$ . Pour obtenir les deux autres contraintes principales, il faut diagonaliser la sous-matrice 2x2 contenant les composantes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ . Il existe donc des directions  $\underline{d}_1$  et  $\underline{d}_2$  orthogonales telles que

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{d}_1 \otimes \underline{d}_1 + \sigma_2 \underline{d}_2 \otimes \underline{d}_2 \quad (4.52)$$

La matrice des composantes de  $\underline{\sigma}$  donné par (4.51) prend la forme suivante dans la base  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{e}_3)$

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

On parle d'un état de contrainte bi-axial puisque l'état de contraintes est contrôlé par les deux variables indépendantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . La représentation de Mohr du tableau 4.4 montre que les facettes contenant la direction  $\underline{e}_3$  voient le cisaillement maximal (resp. la contrainte normale maximale)  $\sigma_1/2$  (resp.  $\sigma_1$ ) si  $\sigma_1 > 0$  et  $|\sigma|/2$  (resp. 0), si  $\sigma_1 = 0$ .

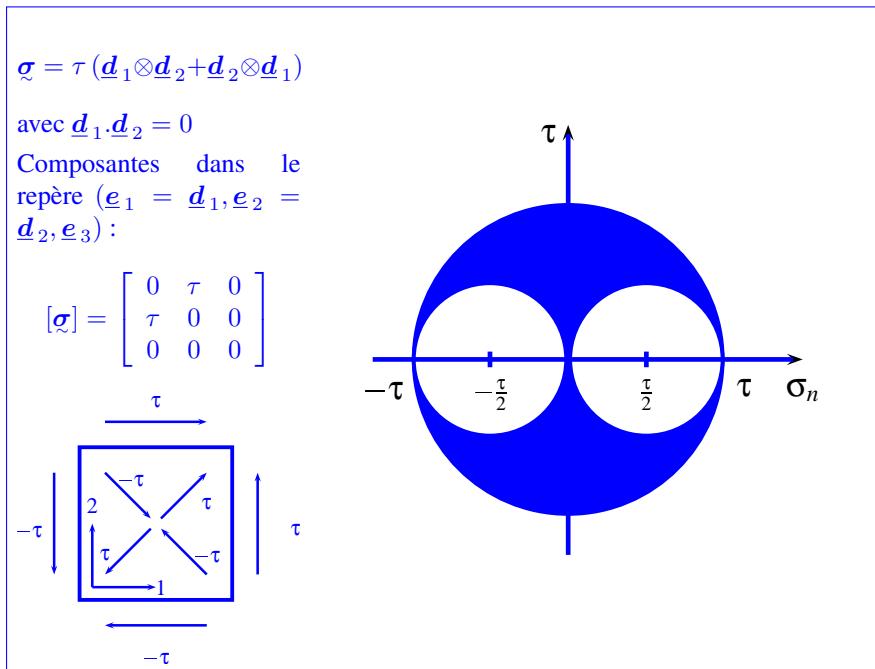


Tableau 4.3: Récapitulatif : l'état de cisaillement simple.

#### 4.3.4 Etat de contrainte tri-axial : $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Lorsqu'aucune des contraintes principales n'est nulle, on parle d'état de contrainte tri-axial. La représentation de Mohr correspondante est sur la figure 4.3. En toute rigueur, on cherchera pour de tels essais mécaniques à imposer indépendamment chacune des contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

### 4.4 Critères en contrainte pour les matériaux isotropes

Comment peut-on comparer des états de contraintes entre eux ? On sait bien qu'il n'existe pas de relation d'ordre total sur l'espace des matrices ou des tenseurs d'ordre deux. Comment déclarer alors qu'un état de contrainte est plus sévère qu'un autre ? Il faut recourir à une norme ou plus généralement à une fonction scalaire du tenseur des contraintes, qui dépendra du facteur critique étudié (plasticité, rupture...) et du matériau. En effet, on peut utiliser une fonction **critère** pour délimiter un domaine de fonctionnement du matériau. Par exemple, pour des solides élastiques, on cherche à déterminer la limite en contrainte au-delà de laquelle la réponse du matériau n'est plus réversible. Au-delà de cette limite, le matériau peut rompre (**rupture**) purement et simplement ou présenter des déformations permanentes (**plasticité**).

#### 4.4.1 Fonctions isotropes du tenseur des contraintes

On se limite<sup>6</sup> ici au cas de matériaux isotropes pour lesquels le critère est une fonction scalaire  $f(\underline{\sigma})$  isotrope par rapport à son argument  $\underline{\sigma}$ . La fonction  $f(\underline{\sigma})$  est dite **isotope**

6. On montre en fait avec des arguments développés au chapitre 6 qu'un critère décrit par une fonction  $f(\underline{\sigma})$  où  $\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy n'est licite que pour des matériaux isotropes. Pour des matériaux anisotropes en grandes transformations, il faudra recourir à un critère de la forme  $f(\underline{\Pi})$ .

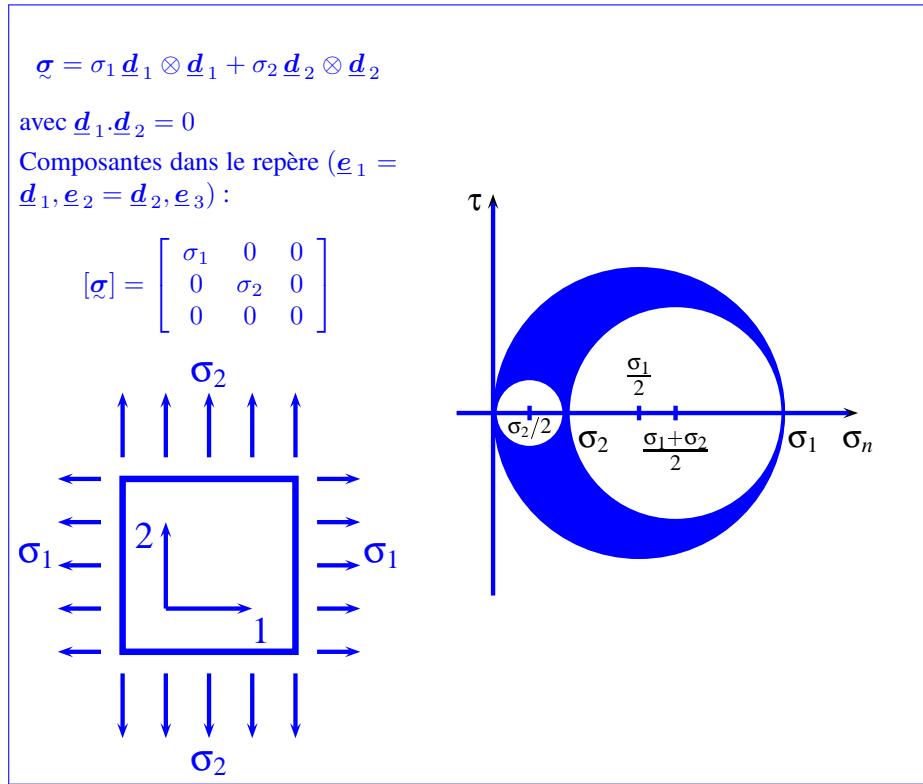


Tableau 4.4: Récapitulatif : l'état de contraintes bi-axial.

si, pour toute transformation orthogonale  $\tilde{Q}$ , on a

$$f(\tilde{Q} \cdot \tilde{\sigma} \cdot \tilde{Q}^T) = f(\tilde{\sigma}) \quad (4.54)$$

Cela signifie en pratique que, pour un chargement  $\sigma$  donné par rapport à une base fixée non liée à l'échantillon (et supposé s'appliquer de manière homogène), le critère prend la même valeur quelle que soit l'orientation de l'échantillon. Autrement dit, on peut découper (usiner) l'éprouvette dans le matériau massif sans se préoccuper de l'orientation de la découpe. Le fait que la limite d'élasticité d'un matériau dépende ou non de directions particulières liées au matériau est souvent la conséquence de son procédé d'élaboration et/ou de mise en forme. L'hypothèse d'isotropie peut n'être vérifiée que pour une certaine précision, à déterminer, du critère.

Les fonctions isotropes à valeurs réelles d'une variable tensorielle d'ordre 2 symétrique ne peuvent pas être arbitraires. Elles ne sauraient dépendre des directions propres de  $\sigma$  qui sont des directions particulières. Il ne reste alors qu'une dépendance vis-à-vis des contraintes principales, qui ne doit d'ailleurs privilégier aucune d'entre elles. De manière équivalente, il ne peut s'agir que d'une fonction arbitraire des invariants principaux de  $\sigma$  :

$$f_{\text{isotrope}}(\sigma) = \hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \check{f}(I_1, I_2, I_3) \quad (4.55)$$

La fonction  $\check{f}$  peut être quelconque. Par contre,  $\hat{f}$  doit être une fonction symétrique de ses arguments :

$$\hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \hat{f}(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2) = \hat{f}(\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2)$$

Le résultat (4.55) est ce que l'on appelle un **théorème de représentation**. Il constitue le théorème 36 démontré de manière plus précise à la page 341.

#### 4.4.2 Pression, déviateur des contraintes

Pour tout tenseur euclidien  $\tilde{\mathbf{A}}$  d'ordre 2, on définit ses parties sphérique et déviatorique de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}^{\text{sph}} + \tilde{\mathbf{A}}^{\text{dev}} \quad (4.56)$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbf{A}}^{\text{sph}} := \frac{1}{3}(\text{trace } \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{1} \quad (4.57)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{A}}^{\text{dev}} := \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}^{\text{sph}} \quad (4.58)$$

L'introduction de cette décomposition pour le tenseur des contraintes s'explique par le fait que les matériaux présentent des sensibilités différentes à l'application de contraintes purement sphériques ou purement déviatorique. On introduit parfois la notation

$$p := -\frac{\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{3}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{sph}} = -p\mathbf{1} \quad (4.59)$$

La partie déviatorique des contraintes mesure donc l'écart de l'état de contraintes avec un état de pression pure. En particulier, on verra que les états de cisaillement sont entièrement contenus dans le déviateur des contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}$ . On insiste sur le fait que, par définition du déviateur,

$$\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} = 0$$

#### 4.4.3 Critère de contrainte normale maximale

Les matériaux fragiles rompent généralement lorsque la contrainte normale  $\sigma_n$  atteint une valeur critique  $\sigma_0$ . La fonction critère correspondante s'écrit

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \left( \underset{\|\mathbf{n}\|=1}{\text{Sup}} \sigma_n \right) - \sigma_0 \quad (4.60)$$

Le critère de rupture stipule que le matériau reste sain tant que

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) < 0 \quad (4.61)$$

La représentation de Mohr permet de se rendre compte que la fonction  $f$  définie par (4.60) est bien une fonction symétrique des contraintes principales. En effet, d'après la figure 4.3, la contrainte normale maximale n'est autre que la plus grande des valeurs propres positives. Le critère s'écrit donc aussi

$$f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_0$$

Le critère prévoit donc que le matériau casse en traction pour une contrainte  $\sigma = \sigma_0$ . Lors d'un essai de cisaillement simple, la rupture aura lieu pour  $\tau = \sigma_0$ .

La rupture s'effectue souvent dans le plan normale à la direction principale  $\mathbf{n}_1$  associée à la contrainte principale maximale  $\sigma_1$ . Dans les alliages métalliques, la rupture fragile est souvent caractéristique du comportement à froid. La surface de rupture présente sou-



*Figure 4.4 : Rupture hélicoïdale d'une éprouvette en fonte sollicitée en torsion (source Centre des Matériaux).*

vent un aspect brillant lié à la **rupture fragile** par **clivage** des grains qui composent le matériau métallique. La figure 4.4 montre la rupture fragile d'un éprouvette en torsion : on peut vérifier que la surface de rupture est orthogonale aux directions principales des contraintes. L'expertise de cette rupture est réalisée en application du cours au paragraphe 23.3.

Le critère de rupture fragile (4.60) est en fait très simplifié. En réalité, la contrainte à rupture est une variable aléatoire. Un véritable modèle de rupture fragile se formule de manière statistique<sup>7</sup>. La contrainte normale  $\sigma_n$  joue alors le rôle de variable critique.

#### 4.4.4 Critère de contrainte tangentielle maximale (Tresca)

Au contraire, d'autres matériaux, dits **ductiles** sont peu sensibles à l'effet de contrainte normale et cèdent plutôt ou se déforment plastiquement pour une valeur critique de la contrainte tangentielle  $|\tau| = \|\underline{\tau}\|$  :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 2 \left( \sup_{\|\underline{n}\|=1} \|\underline{\tau}(\underline{n})\| \right) - \sigma_0 \quad (4.62)$$

Le domaine de comportement “sain” (élastique par exemple) est à nouveau décrit par l'inégalité (4.61). Il s'agit bel et bien d'une fonction des contraintes principales car on sait que la contrainte tangentielle maximale vaut  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  d'après le théorème 12. La fonction critère se formule donc de manière équivalente

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \max_{1 \leq i, j \leq 3} (\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_0$$

---

7. Dans les normes en cours, c'est souvent la statistique de Weibull qui est utilisée.

En traction, la limite d'élasticité est atteinte pour  $\sigma = \sigma_0$ . En cisaillement simple, elle est atteinte pour  $\tau = \sigma_0/2$ , ce qui distingue nettement ce critère du précédent. On remarquera aussi que la fonction critère est insensible à l'application d'une pression  $p$

$$f(\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{1}) = f(\boldsymbol{\sigma}), \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

L'expérience montre que la plupart des alliages métalliques et des roches non poreux se déforment élastiquement jusqu'à des pressions faramineuses (de l'ordre de plusieurs GPa). Ce critère porte le nom de Henri Tresca qui le proposa en 1864.

#### 4.4.5 Critère de von Mises

Le critère de Tresca n'est pas le seul critère isotrope permettant de prévoir avec une bonne précision l'apparition de la plasticité dans les métaux, loin s'en faut. D'un usage plus courant dans les simulations numériques de la réponse de structures élastoplastiques, le critère dit de von Mises (d'après Richard von Mises qui le valida en 1913) fait appel à une fonction quadratique des différences entre les contraintes principales :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} - \sigma_0 \quad (4.63)$$

Ce critère est lui aussi insensible à l'application d'une pression hydrostatique. On vérifiera qu'il peut revêtir d'autres formes et en particulier s'exprimer en fonction du déviateur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}$  :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = J_2(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_0, \quad \text{avec} \quad J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}^{\text{dev}}\sigma_{ij}^{\text{dev}}} \quad (4.64)$$

Dans la littérature de l'élastoplasticité, la notation  $J_2(\boldsymbol{\sigma})$  est souvent utilisée et appelée second invariant des contraintes. C'est effectivement un invariant scalaire de  $\boldsymbol{\sigma}$  mais il est distinct de l'invariant principal  $I_2$  introduit précédemment. La grandeur  $J_2(\boldsymbol{\sigma})$  permet de comparer des états de contraintes vis-à-vis du critère de von Mises et porte souvent le nom de **contrainte équivalente**  $\sigma_{eq}$  de von Mises. On établira les relations équivalentes suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &:= J_2(\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}((\sigma_{11}^{\text{dev}})^2 + (\sigma_{22}^{\text{dev}})^2 + (\sigma_{33}^{\text{dev}})^2 + 2(\sigma_{12}^{\text{dev}})^2 + 2(\sigma_{23}^{\text{dev}})^2 + 2(\sigma_{31}^{\text{dev}})^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2 + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{31}^2)} \end{aligned}$$

La limite d'élasticité en traction d'après le critère de von Mises est  $\sigma = \sigma_0$  et en cisaillement  $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$ . On voit que le critère de von Mises prévoit une limite d'élasticité plus forte que celui de Tresca, ce qui *a priori* doit permettre de déterminer expérimentalement le critère le mieux adapté. En général, on trouve que la limite d'élasticité en cisaillement est située entre ces deux estimations, voire plus proche de  $\sigma_0/2$  prévu par Tresca à condition d'avoir une extensométrie fine permettant de distinguer des déformations irréversibles faibles de l'ordre de ou inférieures à  $10^{-4}$ . Les domaines d'élasticité réels sont en pratique plus complexes que ne l'indiquent les critères précédents et peuvent être modélisés aujourd'hui avec de plus en plus de précision en particulier dans le cas de sollicitations complexes multiaxiales.



## 5 Ecoulement des fluides parfaits incompressibles

Un fluide est dit *parfait* si son état de contraintes est décrit, en toute circonstance, par la représentation pression :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = -p(\underline{x}, t) \underline{1} \quad (5.1)$$

où  $p(\underline{x}, t)$  est le champ de pression. Un tel fluide est incapable de transmettre un effort tangentiel sur une surface. Si, en outre, ce milieu peut être considéré comme incompressible, c'est-à-dire s'il ne peut subir que des transformations isochores, nous allons montrer que nous sommes en mesure, munis des équations de conservation de la quantité de mouvement, de poser et de résoudre de manière exhaustive un grand nombre de problèmes aux limites pour ces milieux. Ces problèmes, en général non linéaires, de mécanique des fluides sont formulés et résolus dans le cadre de l'approche eulérienne, avec des fonctions vitesses et contraintes du jeu de variables eulériennes  $(\underline{x}, t)$ . C'est l'objet de ce court chapitre<sup>1</sup>. Cette liaison interne de type isochorie sera traitée dans le cas de comportements plus généraux de la matière au paragraphe 7.5. Les liquides sont quasi-incompressibles<sup>2</sup> tandis que les gaz peuvent être traités comme incompressibles lorsque de grands volumes et de petites vitesses sont en jeu.

### 5.1 Equations d'Euler pour les fluides parfaits

Dans le cas des fluides parfaits, la première loi de Cauchy (3.51), équation locale de la dynamique, prend la forme :

$$\rho \underline{a} + \text{grad } p - \rho \underline{f} = 0 \quad (5.2)$$

L'accélération peut également se mettre sous les formes suivantes<sup>3</sup> :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} \quad (5.3)$$

$$= \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \wedge (\text{rot } \underline{v}) + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \quad (5.4)$$

où la définition du rotationnel d'un champ de vecteur est donnée par (12.133). En voici la démonstration, en coordonnées cartésiennes orthonormées et en tenant compte des définitions (2.186) du taux de rotation,  $\underline{W}$ , du milieu et (2.191) du pseudo-vecteur associé à ce tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned} (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} &= v_{i,j} v_j \underline{e}_i = ((v_{i,j} - v_{j,i}) v_j + v_{j,i} v_j) \underline{e}_i \\ &= (2W_{ij} v_j + L_{ji} v_j) \underline{e}_i = -2\epsilon_{ijk} \overset{\times}{W}_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \\ &= \epsilon_{ijk} (\text{rot } \underline{v})_k v_j \underline{e}_i + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \\ &= \underline{v} \wedge \text{rot } \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad}(\underline{v} \cdot \underline{v}) \end{aligned}$$

---

1. Le lecteur pourra se référer à une présentation plus complète de cette théorie dans l'ouvrage (Germain, 1986).

2. Plus compressible qu'un acier cependant, du moins aux pressions usuelles ! L'incompressibilité du fluide veut dire que son module de compressibilité est bien (infiniment) plus grand que son module de cisaillement.

3. Le terme dit *de convection* dans l'expression de l'accélération est souvent écrit  $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = v_j v_{i,j} \underline{e}_i$  alors qu'il est noté  $(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v}$  dans ce cours. En suivant les notations de ce cours,  $\underline{v} \cdot \nabla = \text{div } \underline{v}$ . De même, la définition du rotationnel adoptée dans certains ouvrages est l'opposée de celle retenue ici.

□

Si, en outre, le fluide est incompressible, on a la relation supplémentaire

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (5.5)$$

en vertu du fait que  $\dot{J} = 0$ , où  $J$  est le jacobien, indiquant que le volume élémentaire ne change pas, et de la relation (2.215). La masse volumique  $\rho$  du fluide est alors constante. Les équations de champ à résoudre sont donc les quatre relations (5.2) et (5.5). Les inconnues du problème sont au nombre de quatre également, à savoir les trois composantes du vecteur-vitesses et le champ de pression. La résolution de ces équations aux dérivées partielles non linéaires exige la définition de conditions aux limites appropriées. On considère souvent les conditions de glissement du fluide parfait le long d'une paroi baignée de fluide :

$$(\underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{w}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 \quad (5.6)$$

où  $\underline{\mathbf{w}}$  est la vitesse du point de la paroi en contact avec le point matériel en  $\underline{x}$  à l'instant  $t$  et  $\underline{\mathbf{n}}$  est un vecteur unitaire normal à la surface en ce point. Ces conditions doivent être reconsidérées si l'on s'avise de prendre en compte le capillarité de la surface du fluide ou du caractère hydrophile ou hydrophobe de certaines surfaces, ce que nous ne ferons pas dans ce chapitre.

Les conditions de Neumann

$$\underline{\mathbf{t}} = -p\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{t}}^d \quad (5.7)$$

restent de mise sur les autres contours du domaine matériel étudié. D'autres conditions aux limites sont possibles mais nous nous en tiendrons aux précédentes dans ce chapitre.

## 5.2 Théorèmes généraux pour les fluides parfaits

### 5.2.1 Théorème d'Euler

Dans le cas d'un fluide parfait, la première loi d'Euler (3.27) caractérisant la conservation de la quantité de mouvement d'un domaine matériel  $\mathcal{D}_t$  prend la forme, en l'absence de discontinuité des vitesses :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{\mathbf{v}}(\underline{x}, t) dv &= \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{\mathbf{f}}(\underline{x}, t) dv - \int_{\partial \mathcal{D}_t} p(\underline{x}, t) \underline{\mathbf{n}}(\underline{x}, t) d\underline{s}. \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \rho \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \rho \underline{\mathbf{v}} v_n ds \end{aligned} \quad (5.9)$$

d'après la formule de transport de Reynolds (3.93), avec  $v_n = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{n}}$ . On en déduit la relation sur la variation de quantité de mouvement :

$$\int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \rho \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} dv = \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{\mathbf{f}} dv - \int_{\partial \mathcal{D}_t} (p \underline{\mathbf{n}}(\underline{x}, t) + \rho \underline{\mathbf{v}} v_n) ds \quad (5.10)$$

Dans le cas stationnaire<sup>4</sup> en l'absence d'efforts de volume, on a donc

$$\int_{\partial \mathcal{D}_t} (p \underline{\mathbf{n}}(\underline{x}, t) + \rho \underline{\mathbf{v}} v_n) ds = 0$$

---

4. Attention : *stationnaire* veut dire *permanent*, les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles. Cela ne signifie pas que l'accélération est nulle car  $d\underline{\mathbf{v}}/dt \neq \partial \underline{\mathbf{v}}/\partial t$  !

Cette expression permet par exemple de calculer l'effort exercé par un fluide sur un obstacle immergé de bord  $\partial\mathcal{B}$  :

$$\int_{\partial\mathcal{B}} p\underline{n} ds = \int_{\Sigma} (p\underline{n} + \rho\underline{v} v_n) ds$$

où  $\Sigma$  désigne une surface de contrôle entourant une portion de domaine fluide et l'obstacle  $\mathcal{B}$ . Plus généralement, on peut calculer le torseur des efforts appliqués à l'obstacle en calculant le torseur associé à  $p\underline{n} + \rho\underline{v} v_n$  dont la résultante a déjà été obtenue précédemment.

### 5.2.2 Théorèmes de Bernoulli

Lorsque que les efforts volumiques dérivent d'un potentiel  $\mathcal{U}$ , comme c'est le cas des forces de gravitation,

$$\rho\underline{f} = -\rho \operatorname{grad} \mathcal{U} \quad (5.11)$$

le champ d'accélération d'un fluide parfait incompressible dérive alors lui aussi du potentiel :

$$\underline{a} = -\operatorname{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} \right) \quad (5.12)$$

ou de manière équivalente

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \wedge \operatorname{rot} \underline{v} + \operatorname{grad} \mathcal{H} = 0, \quad \text{avec} \quad \mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} + \frac{v^2}{2} \quad (5.13)$$

On a alors le

**Théorème 13 (Premier théorème de Bernoulli)** *Dans un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible soumis à des efforts massiques dérivant d'un potentiel, la quantité  $\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} + \frac{v^2}{2}$  est constante le long des lignes de courant et trajectoires.*

**Preuve.** En effet,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathcal{H} \cdot \underline{v} = 0$$

car les champs sont stationnaires et  $\operatorname{grad} \mathcal{H}$  est alors perpendiculaire à  $\underline{v}$  d'après (5.13). Bien noter que la constante dépend de la ligne de courant ou de la trajectoire choisie. On rappelle que les lignes de courant, tangentes au champ des vitesses, coïncident, dans le cas stationnaire, avec les trajectoires des particules matérielles.  $\square$

Si l'écoulement est **irrotationnel**, alors le champ de vitesse lui-même dérive d'un potentiel  $\phi(\underline{x}, t)$  :

$$\operatorname{rot} \underline{v} = 0 \implies \underline{v} = \operatorname{grad} \phi \quad (5.14)$$

L'existence du potentiel résulte du théorème 31 dit de Poincaré (voir annexe 12). Les potentiels possibles diffèrent d'une fonction du temps. Si le fluide est incompressible et l'écoulement est irrotationnel, alors le potentiel des vitesses est une fonction harmonique des variables d'espace :

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi \quad (5.15)$$

On a le

**Théorème 14 (Second théorème de Bernoulli)** *Dans un écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible soumis à des efforts massiques dérivant d'un potentiel, la quantité  $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{H} = C(t)$  est uniforme dans toute composante connexe du domaine occupé par le fluide,  $C(t)$  est une fonction dépendant au plus du temps  $t$ . Si, en outre, l'écoulement est stationnaire, alors la quantité  $\mathcal{H}$  est uniforme et constante.*

**Preuve.** En effet, d'après (5.13), pour un fluide parfait incompressible dans un champ de forces dérivant d'un potentiel, on a

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad } \mathcal{H} = 0 = \text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{H} \right) \implies \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathcal{H} = C(t)$$

Si, en outre, l'écoulement est stationnaire, le potentiel  $\phi$  ne dépend pas du temps et  $\mathcal{H}$  est une constante uniforme dans chaque composante connexe du domaine fluide.  $\square$

Dans le cas simple d'un écoulement stationnaire ( $\partial \underline{v} / \partial t = 0$ ) et irrotationnel pour lequel les efforts massiques sont négligeables ( $\mathcal{U} = 0$ ), le champ de pression est lié à la vitesse par

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0$$

où  $p_0$  est la *pression d'arrêt* en un point, s'il en existe, dont la vitesse est nulle. La quantité  $p + \frac{1}{2} \rho v^2$  est appelée *pression dynamique*.

### 5.3 Ecoulements plans irrotationnels : potentiel complexe

Dans le cas d'un écoulement plan  $(x, y)$ , on note  $u = v_1$  et  $v = v_2$  les composantes du vecteur vitesse.

Si l'écoulement est irrotationnel, on a vu qu'il existe un potentiel  $\phi(x, y)$  tel que

$$\text{rot } \underline{v} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \implies \exists \phi \text{ tel que } u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5.16)$$

Si le fluide est incompressible, il existe d'autre part une *fonction de courant*  $\psi$  telle que

$$\text{div } \underline{v} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \implies \exists \psi \text{ tel que } u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.17)$$

En effet, la condition  $\partial u / \partial x = -\partial v / \partial y$  implique que la forme  $udy - vdx$  est une différentielle exacte  $d\psi$ . Les lignes de courant correspondent, à chaque instant  $t$ , aux lignes  $\psi = \text{Cste}$ .

Si le fluide est incompressible ET l'écoulement irrotationnel, alors les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont harmoniques :

$$\text{div } \underline{v} = \text{div grad } \phi = \Delta \phi = 0 \quad (5.18)$$

$$\text{rot } \underline{v} = -2 \underline{W}^\times = \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \underline{e}_3 = (\Delta \psi) \underline{e}_3 = 0 \implies \Delta \psi = 0 \quad (5.19)$$

Il est commode, dans ce cas, de recourir à la théorie des fonctions de la variable complexe en introduisant la position

$$z = x + iy$$

et le potentiel complexe

$$f(z, t) = \phi(z, t) + i\psi(z, t) \quad (5.20)$$

avec les fonctions réelles  $\phi, \psi$  harmoniques. Cette fonction à variable complexe vérifie les conditions dites de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.21)$$

qui garantissent que  $f$  est différentiable par rapport à  $z$  au sens des fonctions *holomorphes* de la théorie des fonctions d'une variable complexe (Maisonneuve, 2013b). La dérivée de

$f$  par rapport à  $z$  est

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = u - iv \quad (5.22)$$

est appelée *vitesse complexe*.

En guise d'exemples, on considère les potentiels complexes suivants :

- Le potentiel linéaire

$$f(z) = V_0 \exp(-i\alpha)z$$

correspond à un champ de vitesse constant de norme  $V_0$  et dans la direction d'angle  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On vérifie aisément que cette fonction est holomorphe, c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann (5.21) :  $\phi = V_0(\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y)$ ,  $\psi = V_0(-\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y)$ .

- Le potentiel logarithmique

$$f(z) = \frac{\epsilon D}{2\pi} \log z \quad (5.23)$$

correspond à un écoulement radial de source ( $\epsilon = 1$ ) ou de puits ( $\epsilon = -1$ ) de débit  $D$ . En effet,

$$f'(z) = \frac{\epsilon D}{2\pi z} \implies u = \frac{\epsilon D}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}, v = \frac{\epsilon D}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \underline{v} = \frac{\epsilon D}{2\pi r} \underline{e}_r$$

- Le potentiel logarithmique

$$f(z) = -i \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi} \log z \quad (5.24)$$

correspond à un *tourbillon* centré en O de circulation  $\epsilon\Gamma$ . En effet,

$$f'(z) = -i \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi z} \implies u = -\frac{\epsilon \Gamma}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, v = \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \underline{v} = \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi r} \underline{e}_\theta$$

Ce champ est étudié en détail au chapitre 20, voir en particulier la définition (20.6) de la circulation du champ de vitesses autour du centre du tourbillon.

- Le *doublet* plan d'axe  $Ox$  est obtenu avec

$$f(z) = -\frac{K}{2\pi z} \quad (5.25)$$

et fait l'objet du paragraphe 5.4 suivant. Le caractère holomorphe de la fonction  $1/z$  se vérifie en montrant que les parties réelle et imaginaire sont :  $\phi = x/(x^2 + y^2)$ ,  $\psi = -y/(x^2 + y^2)$ , qui sont des fonctions harmoniques vérifiant les conditions (5.21).

Les champs de vitesses associés à ces potentiels sont illustrés par la figure 5.1.

## 5.4 Application à l'écoulement autour d'un cylindre

On considère un cylindre de section circulaire de rayon  $R$  immergé dans un fluide parfait incompressible<sup>5</sup>. Le champ des vitesses stationnaire du fluide est donné par ses composantes cartésiennes dans un repère  $(O, x, y)$  dont l'origine est le centre de la section du cylindre

$$u = v_1 = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta) \right), \quad v = v_2 = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta), \quad \forall r \geq R \quad (5.26)$$

---

5. Cet exercice est issu des notes manuscrites de Michel Amestoy.

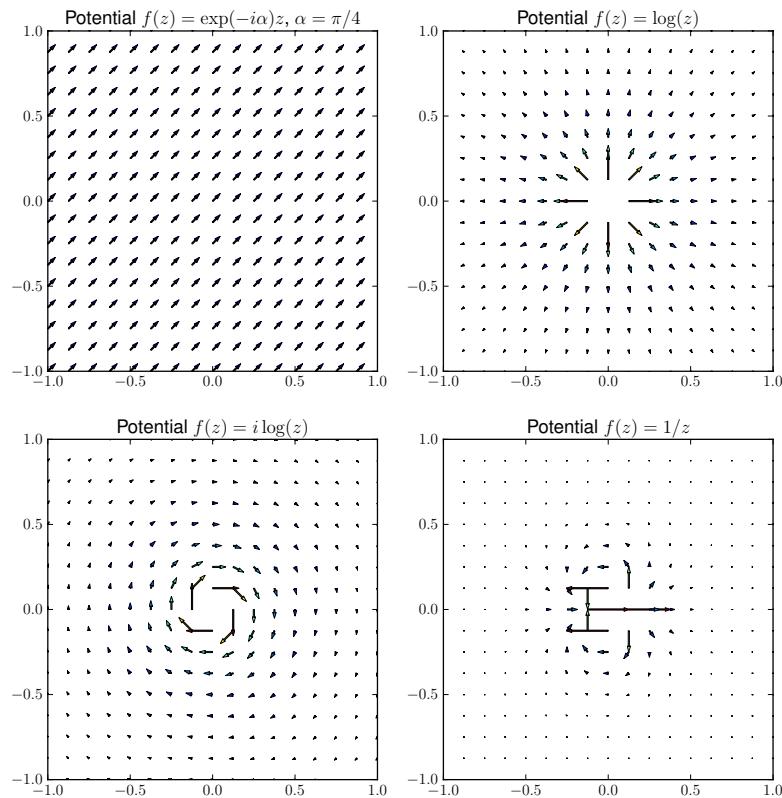


Figure 5.1 : Champs des vitesses pour quatre potentiels complexes. Les petits vecteurs indiquent la direction et l'intensité du vecteur-vitesse aux différents points.

Noter que les composantes cartésiennes sont traitées comme des fonctions des coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . C'est une pratique assez usuelle dans la résolution de certains problèmes plans. L'écoulement est plan dans le sens où  $v_3 = 0$ .

Le cylindre est fixe dans le référentiel considéré tandis que, loin du cylindre, le fluide s'écoule à la vitesse  $V_0$  dans la direction  $Ox$ . Sur le bord du cylindre, on calcule

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \underline{n} &= V_0 ((1 - \cos(2\theta)) \cos \theta - \sin(2\theta) \sin \theta) \\ &= V_0 (\cos \theta - (\cos(2\theta) \cos \theta + \sin(2\theta) \sin(\theta))) = 0 \end{aligned}$$

Les conditions de glissement autour du cylindre sont donc respectées.

Il faudrait vérifier également que  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$  et  $\operatorname{rot} \underline{v} = 0$ , ce qui n'est pas très commode.

On préfère recourir au potentiel complexe associé à ce champ de vitesse :

$$\begin{aligned} f(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) \implies f'(z) &= V_0\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) = V_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\exp(-2i\theta)\right) \\ &= V_0\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\cos(2\theta) + i\frac{R^2}{r^2}\sin(2\theta)\right) \end{aligned}$$

ce qui fournit le champ de vitesse (5.26). Cette fonction est holomorphe (propriété vérifiée au paragraphe précédent pour  $z$  et  $1/z$ ) de sorte que l'isochorie et le caractère irrotationnel du champ de vitesse sont garantis.

On peut aussi le vérifier directement en calculant le gradient du champ de vitesses précédent en coordonnées cartésiennes :

$$[\underline{\mathbf{L}}] = \frac{2V_0R^2}{(x^2+y^2)^3} \begin{bmatrix} x(x^2-3y^2) & y(y^2-3x^2) & 0 \\ y(y^2-3x^2) & -x(x^2-3y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

On voit que  $\underline{\mathbf{L}}$  est symétrique, ce qui traduit le caractère irrotationnel de l'écoulement, tandis que sa trace est nulle, ce qui confirme l'isochorie de la transformation. Le gradient a une forme particulièrement simple aux points d'arrêt :

$$\underline{\mathbf{L}}(-R, 0) = \frac{V_0}{R}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = -\underline{\mathbf{L}}(R, 0)$$

#### 5.4.1 Lignes de courant

Les lignes de courant sont les courbes tangentes au champ du vecteur vitesse. Elles sont solutions des équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (5.28)$$

en coordonnées cartésiennes. On calcule successivement

$$\begin{aligned} (1 - \frac{R^2}{r^2}\cos(2\theta))dx_2 + \frac{R^2}{r^2}\sin(2\theta)dx_1 &= 0 \\ dx_2 - \frac{R^2}{r^2}\cos(2\theta)d(r\sin\theta) + \frac{R^2}{r^2}\sin(2\theta)d(r\cos\theta) &= dx_2 - R^2d\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) = 0 \end{aligned}$$

et finalement

$$d(r\sin\theta) - R^2d\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) = 0$$

qui s'intègre explicitement en

$$\sin\theta(r^2 - R^2) = Cr \quad (5.29)$$

où  $C$  est une constante<sup>6</sup>. On peut exprimer  $r$  en fonction de  $\theta$  pour tracer le diagramme polaire en résolvant l'équation  $r^2 - Cr/\sin\theta - R^2 = 0$ , dont la solution positive est

$$\frac{r}{R} = \frac{C}{2R\sin\theta} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2}\sin^2\theta}\right)$$

---

6. On obtient également ce résultat en exprimant la fonction de courant,  $\psi = yV_0(1 - R^2/r^2)$  grâce au potentiel complexe  $f(z) = V_0(z + R^2/z)$ . Les lignes de courant sont les lignes de niveau de  $\psi$ .

ou bien le diagramme paramétrique

$$\frac{x}{R} = \cotan\theta \frac{C}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta} \right), \quad \frac{y}{R} = \frac{C}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta} \right) \quad (5.30)$$

Les lignes de courant dans le plan sont tracées sur la figure 5.2. On remarque que le champ observé est en accord au moins qualitatif avec les résultats expérimentaux de la figure 5.3. Dans le cas stationnaire, les lignes de courant sont aussi les trajectoires des particules. Notons les cas particuliers

$$C \rightarrow 0 \implies x \rightarrow R \cos \theta, \quad y \rightarrow R \sin \theta$$

Le bord du cylindre, léché par le fluide, est une trajectoire.

$$C \rightarrow \infty \implies x/R \simeq \cotan\theta \frac{C}{R}, \quad \frac{y}{R} \simeq \frac{C}{R}$$

qui est l'équation paramétrique d'une droite horizontale, correspondant au mouvement du fluide loin de l'obstacle. En  $\theta \rightarrow \pi$ , on a  $r \sin \theta = y \simeq C$  et on obtient la trajectoire horizontale aboutissant au point d'arrêt  $(-R, 0)$  en faisant tendre  $C \rightarrow 0$ . On peut le voir aussi en remarquant que  $v(\theta = 0, \pi) = 0$  de sorte que  $x_2$  est constant, égal à 0 pour ces valeurs de  $\theta$ .

Quel est le temps mis par un point matériel en  $\theta = \pi$  pour atteindre le point d'arrêt  $(-R, 0)$  ?

La vitesse verticale est nulle et la vitesse horizontale vaut

$$u = \frac{dx}{dt} = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{x^2} \right) \implies V_0 dt = \frac{x^2}{x^2 - R^2} dx$$

dont l'intégration entre  $x = x_0 < -R$  et  $x = -R$  fournit

$$V_0(t_\infty - t_0) = \int_{x_0}^{-R} \frac{x^2}{x^2 - R^2} dx$$

Cette intégrale se calcule et fait intervenir la fonction  $\log \sqrt{(x-R)/(x+R)}$  qui tend vers l'infini lorsque  $x \rightarrow -R$ ,  $x < -R$ . Le point matériel met donc un temps infini pour s'arrêter et atteindre le point singulier  $(-R, 0)$ .

#### 5.4.2 Lignes de courant et trajectoires dans un autre référentiel

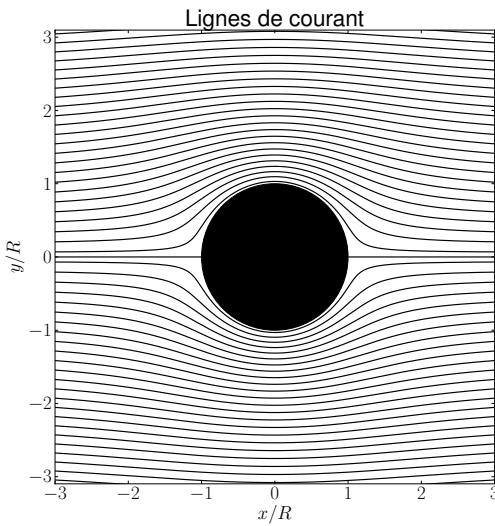
On s'intéresse au changement de référentiel  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  :

$$x' = x - V_0 t, \quad y' = y$$

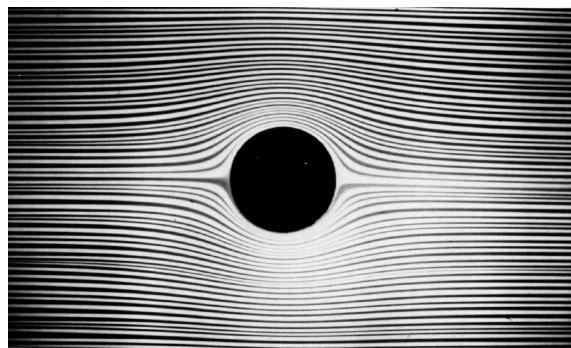
de sorte que le champ de vitesse mesuré par rapport à ce référentiel s'exprime

$$u' = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta), \quad v' = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta), \quad \forall r \geq R \quad (5.31)$$

où  $r$  désigne toujours la distance entre le centre du cylindre et le point considéré, et  $\theta$  garde la signification précédente, voir figure 5.4. Ce champ de vitesse est nul à l'infini. On peut l'interpréter comme *le mouvement d'un cylindre animé de la vitesse  $V_0$  dans un fluide au repos*, situation d'intérêt pratique évident. Cet écoulement n'est pas stationnaire car les fonctions  $r$  et  $\theta$  dépendent de  $x'$ ,  $y'$  et du temps explicitement. Les questions de la



*Figure 5.2 : Lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre de rayon  $R$ . Les lignes sont tracées dans le plan normalisé  $x/R, y/R$ .*



*Figure 5.3 : Visualisation expérimentale d'un écoulement laminaire autour d'un cylindre, issu de (Van Dyke, 1982). L'écoulement de deux fluides colorés alternés, à une vitesse de 1 mm/s a lieu entre deux plaques de verre espacées de 1 mm.*

détermination des lignes de courant et des trajectoires dans  $\mathcal{R}'$  sont donc distinctes dans ce cas.

Pour la détermination des lignes de courant, on travaille à un instant  $t = t_0$  fixé de sorte que  $dx' = dx$ ,  $dy' = dy$  et l'équation à résoudre est

$$\frac{dx'}{u'} = \frac{dx}{u'} = \frac{dy}{v'} \implies v'dx - u'dy = 0 = R^2 d\left(\frac{\sin \theta}{r}\right)$$

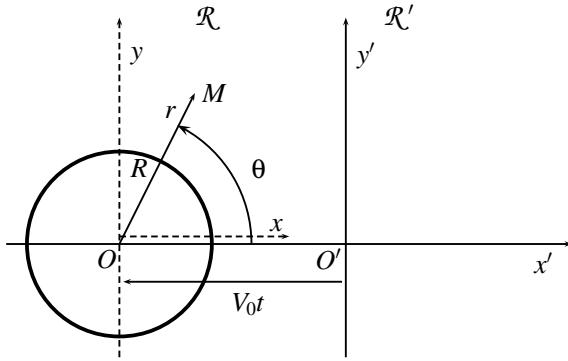


Figure 5.4 : Changement de référentiel pour l'observation du mouvement d'un fluide autour d'un cylindre.

qui s'intègre en

$$\frac{r}{\sin \theta} = C(t_0) = \frac{x^2 + y^2}{y} \iff x^2 - Cy + y^2 = x^2 + (y - \frac{C}{2})^2 = \frac{C^2}{4}$$

Les lignes de courant sont donc des cercles centrés en  $x = 0, y = C/2$  et de rayon  $C/2$  qui sont par conséquent tangents à l'axe  $Ox$  en O. Elles sont représentées sur la figure 5.5 et leur allure justifie la dénomination de doublet correspondant au potentiel complexe  $f(z) = V_0 R^2/z$  du mouvement considéré, cf. équation (5.25). Une validation expérimentale se trouve à la page 12 de l'album (Van Dyke, 1982).

Intéressons-nous maintenant aux trajectoires des points matériels vues du référentiel  $\mathcal{R}'$ . Remarquer d'abord que  $y' = y$  dans ce référentiel et que par conséquent cette coordonnée de la trajectoire est la même que (5.30)<sub>2</sub>, à savoir

$$\frac{y'(t)}{R} = \frac{C}{2R} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta(t)} \right) \quad (5.32)$$

où, cette fois-ci,  $\theta$  est une fonction de  $t$ , on l'a vu. D'autre part,

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{u'}{v'} = \cotan(2\theta) \implies \frac{dx'}{dt} = \cotan(2\theta) \frac{dy'}{dt}$$

On peut effectuer un changement de paramétrage  $\theta(t)$  et calculer

$$\frac{dx'}{d\theta} = \cotan(2\theta) \frac{dy'}{d\theta} = \frac{R^2}{C} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta}}$$

On en déduit les équations paramétriques des trajectoires

$$x'(\varphi) = x'_0 + \frac{R^2}{C} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \theta}} d\theta, \quad y'(\varphi) = \frac{C}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R^2}{C^2} \sin^2 \varphi(t)} \right) \quad (5.33)$$

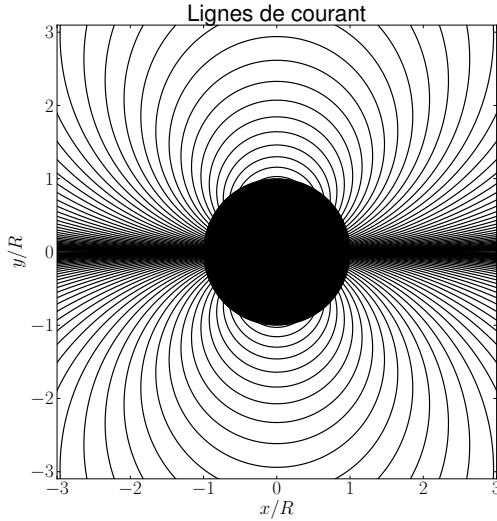


Figure 5.5 : Lignes de courant dans un fluide parfait incompressible parcouru par un cylindre animé d'une vitesse horizontale.

Le couple de constantes  $(\varphi_0, C)$  est équivalent à la donnée initiale  $(x'_0, y_0)$ . En effet, pour  $\varphi = \varphi_0$ , on a  $x' = x_0$  et  $y(\varphi_0) = y_0$  où  $C$  peut s'exprimer en fonction de  $y_0$  et  $\varphi_0$  grâce à (5.33)<sub>2</sub>.

Lorsque  $C \rightarrow 0$ ,  $y' = R \sin \varphi$  et

$$x' - x'_0 = \frac{R}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\cos(2\theta)}{\sin \theta} d\theta = R \left[ \cos \theta + \frac{1}{2} \log \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| \right]_{\varphi_0}^{\varphi} \quad (5.34)$$

Ce cas limite est illustré sur la figure 5.6 et permet de se faire une idée de la forme de boucle de certaines des trajectoires (5.33) de points assez proches du passage de l'obstacle.

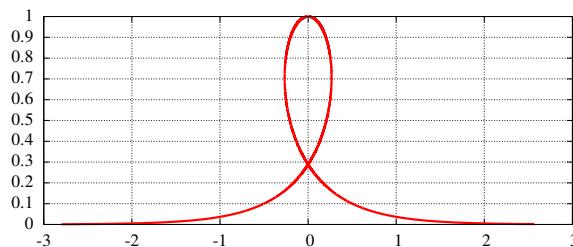


Figure 5.6 : Trajectoire limite donnée par (5.34) pour  $x_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$  et  $\varphi$  variant de 0.001 à  $\pi$ .

### 5.4.3 Paradoxe de D'Alembert

On considère à nouveau le point de vue du cylindre au repos dans un écoulement de fluide parfait incompressible animé d'une vitesse  $V_0$  à l'infini et on souhaite calculer l'effort résultant appliqué par le fluide sur le cylindre.

Pour cela on fait appel au second théorème de Bernoulli pour un mouvement stationnaire irrotationnel d'un fluide incompressible. Le théorème stipule que la pression dynamique est constante et uniforme :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 \quad (5.35)$$

où  $V_0$  et  $p_0$  sont la vitesse et la pression régnant loin du cylindre. En utilisant le champ de vitesse (5.26), on calcule le champ de pression

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}V_0^2 \frac{R^2}{r^2} (2 \cos(2\theta) - \frac{R^2}{r^2}) \quad (5.36)$$

Le champ de pression sur le cylindre vaut donc

$$\frac{p - p_0}{\rho V_0^2 / 2} = 2 \cos(2\theta) - 1$$

La résultante des forces appliquées par le fluide sur le cylindre est donc

$$\mathbf{R} = \int_{r=R} -p \mathbf{n} ds = - \int_{r=R} (p_0 + \frac{\rho}{2}V_0^2(2 \cos(2\theta) - 1)) \mathbf{n} ds = -hR\rho V_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \mathbf{n} d\theta$$

où  $h$  est la hauteur du cylindre. En particulier la composante horizontale

$$F_1 = -hR\rho V_0^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \cos \theta d\theta = 0$$

De même, mais on s'y attendait, pour des raisons de symétrie,  $F_2 = 0$ .

Le fait que la résultante des efforts sur le cylindre est nul est surprenant et constitue le *paradoxe de D'Alembert*. Ce résultat va à l'encontre de l'observation expérimentale immédiate. Il remet en question la validité d'un modèle qui pourtant est en mesure de donner une description cinématique réaliste comme le montre la comparaison des figures 5.2 et 5.3. Il résulte de la symétrie parfaite inattendue du champ de pression à l'amont et à l'aval du cylindre, comme le montre la figure 5.7. Le paradoxe, découvert dès le XVIII<sup>e</sup> siècle, a donné lieu à de nombreux développements jusqu'à aujourd'hui pour le résoudre. Il faut pour cela remettre en question les diverses hypothèses qui ont conduit à ce résultat. Le caractère compressible du fluide pourrait par exemple être pris en compte. La viscosité du fluide mérite également d'être considérée, au moins dans une couche limite autour du cylindre comme le fit Prandtl. On peut également considérer la présence d'un sillage à l'aval du cylindre qui brise la symétrie de la solution précédente. Nous reviendrons sur ces points, cf. (Batchelor, 2000).

## 5.5 Obstacle sphérique dans un écoulement de fluide parfait incompressible

On s'intéresse à l'écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'une sphère rigide de rayon  $a$ . La sphère est supposée fixe dans le référentiel d'observation, caractérisé par le repère cartésien orthonormé  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , tandis que le fluide est supposé s'étendre à l'infini. Le centre de la sphère est pris comme origine du repère. Suffisamment loin de la sphère, le champ de vitesse du fluide vaut  $\underline{v} = \underline{V}_0 = V_0 \underline{e}_1$ , où  $V_0$  est constante.

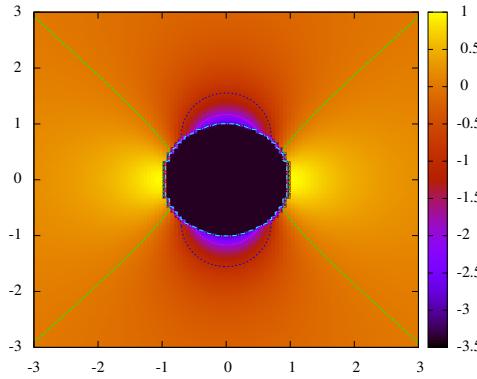


Figure 5.7 : Champ de pression normalisé  $2(p - p_0)/(\rho V_0^2)$  régnant dans le fluide autour d'un cylindre.

L'écoulement étant irrotationnel, le champ de vitesse du fluide dérive du potentiel réel  $\phi(\underline{x})$  tel que

$$\underline{v} = \text{grad } \phi$$

Comme le fluide est également supposé incompressible, le potentiel  $\phi$  est une fonction harmonique. Contrairement à l'écoulement d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre, étudié au chapitre 5, il s'agit ici d'une situation tridimensionnelle avec toutefois une symétrie de révolution autour de l'axe  $\underline{e}_1$ . L'étude des fonctions harmoniques sphériques, qu'on ne demande pas de mener ici, conduit à proposer un potentiel de la forme suivante :

$$\phi(\underline{x}) = \underline{V}_0 \cdot \underline{x} \left(1 - \frac{\alpha}{r^3}\right) \quad \text{avec} \quad r = \|\underline{x}\| \quad (5.37)$$

où  $\alpha$  est une constante à déterminer. On renvoie à (Landau and Lifchitz, 1989) (p. 45) et (Batchelor, 2000) (p. 123) pour la discussion sur le choix de ce potentiel.

### 5.5.1 Champ des vitesses autour de la sphère

Montrer que les composantes des vitesses en coordonnées sphériques sont

$$\underline{v} = V_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2\alpha}{r^3}\right) \underline{e}_r - V_0 \sin \theta \left(1 - \frac{\alpha}{r^3}\right) \underline{e}_\theta \quad (5.38)$$

où  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur  $\underline{x} = r \underline{e}_r$  avec l'axe  $\underline{e}_1$ .

Vérifier que ce champ satisfait les conditions aux limites et en profiter pour déterminer la constante  $\alpha$ .

► On exprime d'abord le potentiel en fonction des coordonnées sphériques :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = V_0 r \cos \theta - \frac{\alpha}{r^2} V_0 \cos \theta$$

dont le gradient est

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_0 \cos \theta \left(1 + \frac{2\alpha}{r^3}\right), \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -V_0 \sin \theta \left(1 - \frac{\alpha}{r^3}\right)$$

On vérifie que le champ trouvé tend vers  $\underline{V}_0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ . La condition au bord de la

sphère

$$\underline{v}(r=a) \cdot \underline{e}_r = 0 \implies \alpha = -\frac{a^3}{2}$$

### 5.5.2 Lignes de courant autour de la sphère

Dans le cas axisymétrique, comme ici autour de l'axe  $\underline{e}_1$ , les fonctions ne dépendent que de  $(r, \theta)$  et on peut introduire une fonction de courant  $\psi(r, \theta)$  en coordonnées sphériques, définie par

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0 \quad (5.39)$$

et garantissant la condition  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ .

Trouver une telle fonction de courant  $\psi(r, \theta)$  pour le champ des vitesses (5.38).

Les lignes de courant correspondent aux isovaleurs de la fonction de courant.

Vérifier que la sphère  $r = a$  est une ligne de courant et que les lignes de courant à l'infini sont comme on les attend.

► En intégrant,  $r^2 \sin \theta v_r$  par rapport à  $\theta$ , on trouve une fonction de courant

$$\psi = \frac{1}{2} V_0 r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$

dont la dérivée par rapport à  $r$  coïncide avec  $-r \sin \theta v_\theta$ . La sphère  $r = a$  est solution de  $\psi = 0$ .

A l'infini  $\psi = Cste$  conduit à  $x_2^2 = Cste$  qui sont des lignes horizontales parallèles à l'écoulement  $\underline{V}_0$ .

### 5.5.3 Champ de pression dans le fluide et calcul de la trainée

Déterminer le champ de pression qui règne dans le fluide. L'évaluer sur le bord de la sphère et calculer la force résultante qu'exerce le fluide sur la sphère.

Commenter.

► Le théorème de Bernoulli permet de calculer le champ de pression

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 - \frac{1}{2} \rho v^2$$

de sorte que

$$p(r = a, \theta, \varphi) = p_0 - \frac{1}{16} \rho V_0^2 + \frac{9}{16} \rho V_0^2 \cos 2\theta$$

La force se calcule comme dans le cas du cylindre et conduit immanquablement à une trainée nulle. L'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible n'échappe donc pas au paradoxe de d'Alembert.

## 5.6 Tourbillons libres dans un écoulement ; Portance

L'objectif de cet exercice<sup>7</sup> est de reprendre l'étude de l'écoulement plan irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre O et de rayon  $R$  fixe par rapport au référentiel d'observation, en considérant la présence d'un ou plusieurs tourbillons et les efforts qu'ils induisent sur le cylindre. La géométrie du cylindre et le système de coordonnées sont indiqués sur la figure 5.8(a).

7. Cet exercice est basé sur la contribution de (Mandel, 1994) (p. 186) et sur la première partie du problème de composition proposé par M. Amestoy à l'Ecole Polytechnique en 1987. Quelques éléments sont issus de (Germain and Muller, 1995) et (Obala, 1997) (exercice p. 195).

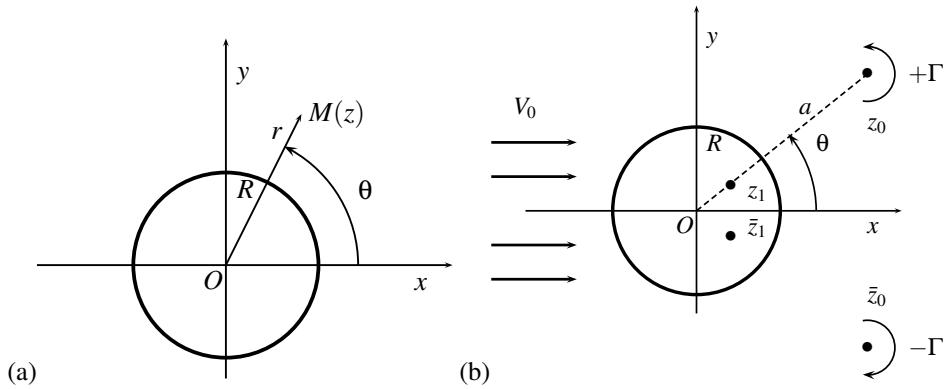


Figure 5.8 : (a) Géométrie du cylindre et système de coordonnées : le point  $M$  d'affixe  $z$  est repéré par les coordonnées  $r, \theta$  et les composantes cartésiennes des vecteurs considérés dans l'exercice sont exprimées en fonction de ces coordonnées. (b) Introduction dans l'écoulement de deux tourbillons aux points conjugués  $z_0$  et  $\bar{z}_0$ , ainsi que leurs images  $z_1$  et  $\bar{z}_1$  par rapport au cercle.

### 5.6.1 Ecoulement autour d'un cylindre avec circulation

On considère l'écoulement plan défini par le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = V_0\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z \quad (5.40)$$

On adoptera la détermination principale du logarithme complexe :

$$\log z = \log |z| + i \arg(z), \quad \text{avec } \arg(z) \in [0, 2\pi] \quad (5.41)$$

où  $V_0, \Gamma$  sont des réels donnés et  $i$  est le nombre imaginaire tel que  $i^2 = -1$ . Pour fixer les idées, on prendra  $V_0 \geq 0, \Gamma \geq 0$ . On rappelle que la variable complexe  $z$  désigne le point de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère cartésien orthonormé d'origine  $O$  dans le plan considéré.

#### Nature de l'écoulement

En dérivant le potentiel complexe, donner le champ des vitesses. Donner également la fonction de courant associée à cet écoulement. On exprimera les vitesses dans le repère cartésien orthonormé d'origine  $O$  en fonction des coordonnées  $r, \theta$ , comme sur la figure 5.8(a).

Justifier que, quel que soit  $\Gamma$ , ce champ de vitesses fournit une solution du problème de l'écoulement stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de centre  $O$  et de rayon  $R$ , le fluide étant animé de la vitesse horizontale  $V_0$  à l'infini. Cela illustre que ce problème possède une infinité de solutions.

► La fonction de courant est donnée par la partie imaginaire du potentiel  $f(z)$  :

$$\psi(x, y) = \Im(f(z)) = V_0 y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

La vitesse s'obtient en dérivant la fonction précédente mais il est plus commode de dériver

directement le potentiel complexe

$$\begin{aligned} f'(z) &= V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} \\ u &= \Re(f'(z)) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos(2\theta)\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \\ v &= -\Im(f'(z)) = -V_0 \frac{R^2}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned}$$

où  $\Re$  désigne la partie réelle du nombre complexe et  $\Im$  sa partie imaginaire. Ce champ de vitesses vaut  $V_0 e_1$  à l'infini. Il est à divergence nulle et irrotationnel (sauf en  $z = 0$ ) car la fonction  $f(z)$  est holomorphe. On peut vérifier que  $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$  pour  $r = R$ , ce qui correspond à la condition de glissement le long du cylindre. Ce champ est donc une solution du problème de l'écoulement stationnaire étudié. On connaît la solution avec  $\Gamma = 0$ . La présence du tourbillon centré en O ne modifie pas la condition de bord sur le cylindre. La partie du champ de vitesses pour  $|z| < R$  est exclue.

#### Réalisation de l'écoulement

Imaginer comment provoquer expérimentalement l'apparition de la contribution proportionnelle à  $\Gamma$  au champ de vitesse étudié.

Interpréter la quantité  $\Gamma$ .

► On peut espérer provoquer une circulation  $\Gamma$  autour du cylindre en l'entraînant en rotation autour de son axe. La rotation du cylindre entraîne le fluide par un effet de viscosité (même infime puisque nous parlons ici d'un fluide parfait). La partie en  $1/z$  correspond à un tourbillon caractérisé par la circulation  $\Gamma$ , cf. équation (20.6).

#### Etude des lignes de courant

Déterminer les points de l'écoulement où la vitesse est nulle. Discuter et interpréter physiquement ces résultats en fonction du paramètre

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi RV_0} \quad (5.42)$$

Donner l'équation caractérisant les lignes de courant.

Tracer qualitativement ces lignes. On ne cherchera pas à exploiter l'équation trouvée mais on s'inspirera plutôt du nombre de points d'arrêt déterminés précédemment selon les différents cas apparus dans la discussion.

► La vitesse est nulle lorsque

$$f'(z) = V_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = 0$$

ce qui conduit à résoudre l'équation du second degré :

$$\xi^2 + 2iA\xi - 1 = 0, \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{R}{z} \quad \text{et} \quad A = \frac{\Gamma}{4\pi RV_0}$$

dont les solutions sont

$$\xi = -iA \pm \sqrt{1 - A^2}$$

ce qui conduit à la discussion :

- Si  $|A| < 1$ , il y a deux points d'arrêt avec  $|\xi| = 1$ , ce qui signifie que ces points sont sur le bord du cylindre et symétriques par rapport à l'axe  $y$  :

$$z = \frac{R}{\xi} = R(iA \pm \sqrt{1 - A^2})$$

- Si  $|A| = 1$ , il y a un seul point d'arrêt situé au pôle nord du cylindre.
- Si  $|A| > 1$ , on trouve deux solutions situées sur l'axe  $y$  :  $z = Ri/(A \pm \sqrt{A^2 - 1})$ . Comme  $A + \sqrt{A^2 - 1} > 1$  et  $A - \sqrt{A^2 - 1} < 1$  (pour  $A > 0$  pour fixer les idées), l'un des deux points est à l'intérieur du disque et on ne garde que la solution au-dessus du cylindre.

Les trajectoires, identiques aux lignes de courant dans le cas stationnaire, sont les équipotentielles de la fonction de courant :

$$\frac{\psi}{RV_0} = \frac{r \sin \theta}{R} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi RV_0} \log \frac{r}{R} = Cste$$

On peut obtenir des équations paramétriques pour les lignes de courant :

$$\frac{y}{R}(t) = (Cste + 2A \log(t)) \frac{t^2}{t^2 - 1}, \quad \frac{x}{R}(t) = \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{R^2}}$$

Les lignes de courant sont représentées sur la figure 5.9. Pour  $|A| < 1$ , on voit les deux points d'arrêt décalés vers le haut par rapport au cas sans tourbillon. Pour  $|A| > 1$ , ce qui correspond à un tourbillon suffisamment puissant, il existe des trajectoires fermées autour du cylindre.

#### *Efforts sur le cylindre*

Calculer la résultante des efforts agissant sur le cylindre fixe.

Ce résultat résout-il le paradoxe de D'Alembert ?

Quel effet remarquable émerge de ce résultat ?

En connaissez-vous des applications pratiques ?

► Le premier théorème de Bernoulli indique que  $p/\rho + \underline{v} \cdot \underline{v}/2 = Cste$  le long des lignes de courant. Cette constante est la même pour les trajectoires ouvertes mais est différente pour chaque trajectoire fermée autour du cylindre, comme il en existe dans le cas  $A > 1$ , car le milieu fluide considéré n'est pas simplement connexe. On calcule les composantes du vecteur vitesse sur le bord du cylindre  $r = R$  et sa norme au carré :

$$u(r = R) = V_0(1 - \cos(2\theta) - 2A \sin \theta), \quad v(r = R) = V_0(-\sin(2\theta) + 2A \cos \theta)$$

$$\frac{u^2 + v^2}{V_0^2} = 4(A - \sin \theta)^2$$

La résultante des efforts sur le cylindre de hauteur  $h$  se calcule grâce au champ de pression issu du théorème de Bernoulli :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= -h \int_{r=R} pR\underline{n} d\theta = -Rh \int_{r=R} (Cste - \frac{\rho}{2}\underline{v} \cdot \underline{v})\underline{n} d\theta \\ &= -\rho 2RV_0^2 h \int_{r=R} (A - \sin \theta)^2 (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2) d\theta \end{aligned}$$

car la contribution constante a une résultante nulle. En développant l'expression

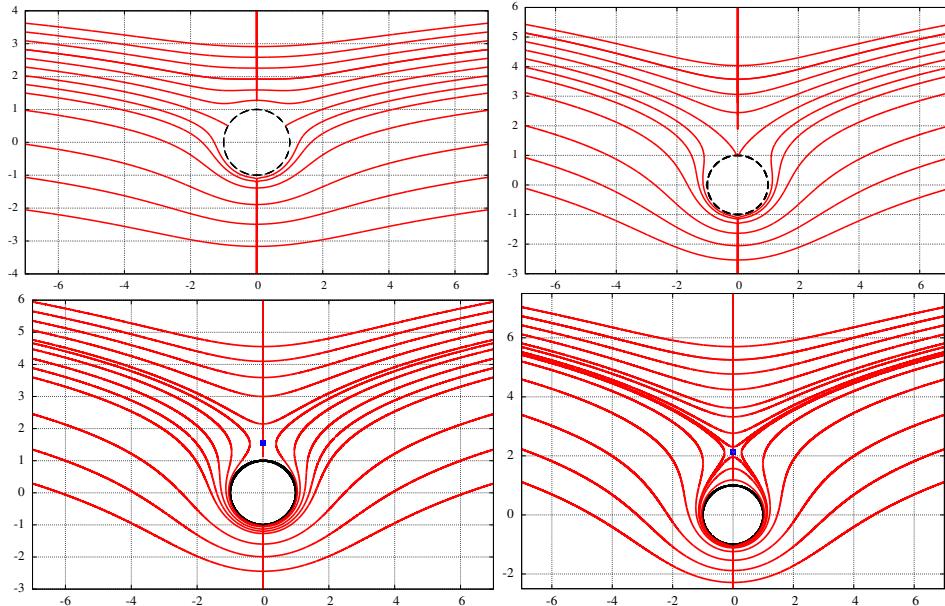


Figure 5.9 : Lignes de courant d'un écoulement autour d'un cylindre avec circulation en fonction de la valeur du paramètre  $A = \Gamma / 2\pi R V_0$ . De gauche à droite et de haut en bas :  $A = 0.5$ ,  $A = 0.9$ ,  $A = 1.1$ ,  $A = 1.3$ . Le cylindre central est en trait épais noir. Les lignes verticales sur l'axe  $y$  sont un artefact de la simulation. Le point d'arrêt pour  $A > 1$  est marqué par un carré.

précédente, on voit que seule la composante selon  $y$  subsiste :

$$\underline{R} = -4\rho A R V_0^2 h \int_{r=R} \sin^2 \theta d\theta \underline{e}_2$$

Finalement

$$\underline{R} = -\rho V_0 \Gamma h \underline{e}_2$$

La résultante est donc non nulle en présence d'une circulation  $\Gamma$ . Cependant, le paradoxe de D'Alembert subsiste car cette résultante n'a pas la composante horizontale attendue. Noter qu'un tourbillon seul ( $V_0 = 0$ ) ne suffit pas à engendrer cette force. La résultante est dirigée vers le bas lorsque  $V_0 \Gamma > 0$ , car les vitesses sont plus grandes en-dessous qu'en-dessus du cylindre, la pression est donc plus forte au-dessus. C'est l'**effet Magnus**<sup>8</sup>. Il explique les effets des balles liftées au tennis ou au football. L'utilisation de l'**effet Magnus** a été proposée pour mettre au point des systèmes de propulsion composés de gros cylindres verticaux en rotation capables de produire une poussée longitudinale lorsque le vent est sur le côté. L'océanographe Jacques-Yves Cousteau fit construire l'*Alcyone* au début des années 1980. Les deux cylindres (non tournants, il s'agit plutôt d'une voile) de sa turbovoie, fournissaient environ 25 à 30% de l'énergie propulsive qui venait assister la propulsion par hélice. C'est également le principe élémentaire expliquant la **portance** agissant sur une aile d'avion même si l'étude de cette portance pour une géométrie réaliste d'aile est une autre sujet copieux à traiter.

8. Heinrich Gustav Magnus (1802-1870)

### 5.6.2 Ecoulement autour d'un cylindre avec tourbillons libres

Dans cette partie, on peuple l'écoulement autour du cylindre de tourbillons pour essayer de gagner en réalisme par rapport à l'écoulement réel.

#### Préliminaire : méthode des images

Soit  $z_0$  un point non nul du plan complexe, on lui associe le nombre complexe  $z_1$ , défini comme son image par rapport au cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  de centre O et de rayon  $R$  :

$$z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}_0} \quad (5.43)$$

Le point  $z_1$  a le même argument que  $z_0$  et son module est  $R^2/|z_0|$ . Son interprétation géométrique est la suivante : c'est l'unique point  $M_1$  du plan tel que  $MM_0/MM_1 = |z_0|/R$ ,  $\forall M \in \mathcal{C}(O, R)$ . C'est également l'unique point  $M_1$  tel que  $OM_0 \times OM_1 = R^2$ .

**Théorème 15 (Cercle de Milne-Thomson)** Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe, on définit son image par rapport au cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  par la fonction<sup>9</sup>

$$g(z) = f(z) + \overline{f(R^2/\bar{z})} \quad (5.44)$$

Le cercle  $\mathcal{C}(O, R)$  est une ligne de courant de l'écoulement associé à  $g(z)$ .

**Preuve.** Si  $z \in \mathcal{C}(O, R)$ ,  $z\bar{z} = R^2$  et  $g(z) = f(z) + \overline{f(z)}$  est réel. Par conséquent, sa partie imaginaire  $\psi(z \in \mathcal{C}(O, R)) = 0$  est constante et décrit une ligne de courant.  $\square$

Le théorème est utilisé pour construire un nouveau potentiel pour un fluide lorsqu'un cylindre est placé dans l'écoulement. C'est d'ailleurs comme cela que l'on procède pour proposer un potentiel pour l'écoulement autour d'un cylindre au repos. On part du champ uniforme  $V_0 z$  et on calcule son image par rapport au cercle :

$$V_0 z + V_0 \frac{R^2}{\bar{z}} = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right)$$

#### Ajout d'un tourbillon non centré sur l'obstacle

Donner le potentiel complexe correspondant à un tourbillon seul centré en  $z_0$  extérieur au disque de centre O et de rayon  $R$ . Tourbillon seul veut dire que dans cette question  $V_0 = 0$ . On appellera  $a$  le module de  $z_0$ .

Donner le champ des vitesses correspondant.

Montrer que ce champ ne vérifie pas les conditions de glissement du fluide parfait incompressible sur le bord du cylindre  $\mathcal{C}(O, R)$ .

► Un changement d'origine sur l'expression du potentiel du tourbillon centré en O permet de répondre à la question

$$f(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0), \quad f'(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{|z - z_0|^2} \quad (5.45)$$

Le glissement le long du cylindre se traduit par  $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ . Le produit scalaire se calcule

9. Louis Melville Milne-Thomson (1891-1974)

avec les nombres complexes sous la forme

$$\Re(f'(z = R \exp(i\theta)) \exp(i\theta)) = \Re\left(-\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{|z - z_0|^2} \exp(i\theta)\right) = \Re\left(-\frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{R - \bar{z}_0 \exp(i\theta)}{|z - z_0|^2}\right) \neq 0$$

### Trois tourbillons autour d'un cylindre

Pour lever la difficulté précédente, on ajoute au tourbillon  $(\Gamma, z_0)$  son image par rapport au cercle  $\mathcal{C}(O, R)$ . En vertu du théorème 15, l'écoulement associé à ce potentiel ainsi complété est compatible avec la présence du cylindre et la condition de bord associée. Calculer le potentiel  $g(z)$  correspondant à cet écoulement. A nouveau, on considère ici :  $V_0 = 0$ .

En utilisant la formule de Blasius (5.46), calculer les efforts agissant sur le cylindre et sur le tourbillon  $(\Gamma, z_0)$ .

En conclure que les tourbillons ne sont pas stables et ne subsisteront pas.

Pour calculer les efforts, on utilisera le

**Théorème 16 (Formule de Blasius)** *Le torseur des efforts appliqués sur une ligne de courant fermée  $\gamma$  est caractérisé par les formules suivantes pour la force résultante et le moment résultant :*

$$R = i\frac{\rho}{2} \int_{\gamma} \left( \frac{df}{dz}(z) \right)^2 dz, \quad M = -i\frac{\rho}{2} \Re \left( \int_{\gamma} z \left( \frac{df}{dz}(z) \right)^2 dz \right) \quad (5.46)$$

où les forces et moment complexes  $R = R_1 - iR_2$ ,  $M = M_3$  s'expriment en fonction des composantes du torseur. Seule la composante  $M_3$  est considérée dans le problème plan. Elle est reliée à la partie réelle de l'intégrale indiquée.

Pour une expression plus générale dans le cas de courbes non fermées et pour la preuve de ces résultats, on renvoie le lecteur aux ouvrages (Germain, 1986; Germain and Muller, 1995; Batchelor, 2000).

On fera également appel au

**Théorème 17 (Théorème des résidus)** *Soit un contour fermé  $\gamma$  et  $f_h$  une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe  $\mathcal{D}$  et non singulière, i.e. ne possédant pas de pôle dans le domaine circonscrit par  $\gamma \subset \mathcal{D}$ , on a alors les formules de Cauchy suivantes*

$$\oint_{\gamma} \frac{f_h(z)}{z - z_i} dz = 2i\pi f_h(z_i), \quad \oint_{\gamma} \frac{f_h(z)}{(z - z_i)^{n+1}} dz = 2i\pi f_h^{(n)}(z_i) \quad (5.47)$$

où les  $z_i \in \mathcal{D}$  sont entourés par  $\gamma$  et  $f_h^{(n)}$  est la dérivée  $n$ -ième de  $f_h$  ( $n \in \mathbb{N} \geq 0$ ).

On applique la transformation (5.44) au potentiel du tourbillon  $(\Gamma, z_0)$  pour obtenir le

potentiel :

$$\begin{aligned}
 g(z) &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(\overline{\frac{R^2}{z}} - z_0) \\
 &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \log(z - z_0) - \log(\overline{\frac{R^2}{z}} - z_0) \right) \\
 &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \log(z - z_0) - \log(\bar{z}_0(\frac{R^2}{\bar{z}_0} - z)/z) \right) \\
 &= -i \frac{\Gamma}{2\pi} (\log(z - z_0) - \log(z - z_1) + \log z) + Cste
 \end{aligned}$$

où la constante est proportionnelle à  $\log(\bar{z}_0)$  et  $z_1 = R^2/\bar{z}_0$ . Finalement on retient le potentiel

$$g(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z(z - z_0)}{z - z_1}, \quad \text{avec } z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}_0} \quad (5.48)$$

On trouve donc trois tourbillons :  $(\Gamma, z_0)$ ,  $(-\Gamma, z_1)$  et  $(\Gamma, O)$ . On calcule la dérivée du potentiel :

$$g'(z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z} \right) \quad (5.49)$$

Pour utiliser la formule de Blasius (5.46), il faut calculer le carré de la fonction précédente :

$$\left( \frac{2\pi}{\Gamma} g'(z) \right)^2 = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{1}{(z - z_1)^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{(z - z_0)(z - z_1)} + \frac{2}{z(z - z_0)} - \frac{2}{z(z - z_1)}$$

Calculons la résultante de la force agissant sur le tourbillon  $(\Gamma, z_0)$  en considérant un contour fermé  $\gamma_0$  entourant  $z_0$  mais pas les pôles O et  $z_1$ . L'application du théorème des résidus (5.47) montre que les termes au carré à numérateur constant ne contribuent pas à l'intégrale. Il subsiste :

$$\begin{aligned}
 R &= R_1 - iR_2 = -i \frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \oint_{\gamma_0} \left( \frac{2}{z(z - z_0)} - \frac{2}{(z - z_0)(z - z_1)} \right) dz \\
 &= -i \frac{\rho}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 2i\pi \left( \frac{2}{z_0} - \frac{2}{z_0 - z_1} \right) = -\rho \frac{\Gamma^2}{2\pi} \frac{z_1}{z_0(z_0 - z_1)}
 \end{aligned}$$

Il y donc un effort résultant qui empêchera le tourbillon de rester stationnaire. Le tourbillon  $z_0$  n'est donc pas stable et entraînera les autres dans sa chute.

Pour stabiliser le tourbillon  $z_0$ , on introduit

#### *Quatre tourbillons dans l'écoulement autour du cylindre*

On considère le potentiel

$$f(z) = V_0 \left( z + \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z - z_1) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{z - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_1} \quad (5.50)$$

Ce potentiel correspond à l'introduction dans l'écoulement induit par  $V_0$  de deux tourbillons  $(\Gamma, z_0)$  et  $(-\Gamma, \bar{z}_0)$  situés en deux points conjugués et de circulation opposée, cf.

figure 5.8(b). Afin de garantir que le bord du cercle est une ligne de courant on ajoute les deux tourbillons images en  $z_1 = R^2/\bar{z}_0$  et  $\bar{z}_1$ . A noter que les tourbillons en O issus du potentiel image (5.48) se neutralisent, ce qui explique l'absence de  $\log z$  dans le potentiel précédent.

On cherche où positionner  $z_0$  pour que ce tourbillon soit en équilibre. Il faut donc calculer l'effort exercé par le fluide sur un contour  $\gamma_0$  entourant  $z_0$  mais ne contenant pas  $z_1$ . L'utilisation de la formule de Blasius (5.46) requiert le calcul de

$$f'(z) = V_0(1 - \frac{R^2}{z^2}) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - \bar{z}_0} - \frac{1}{z - \bar{z}_1} \right) = h'(z) - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$$

où la partie  $h(z)$  du potentiel (5.50) ne contenant pas le pôle  $z_0$  a été isolée pour une utilisation plus aisée du théorème des résidus. L'étape suivante consiste à calculer

$$(f'(z))^2 = (h'(z))^2 - \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{(z - z_0)^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{h'(z)}{z - z_0}$$

et à appliquer la formule de Blasius en utilisant le théorème des résidus :

$$\oint_{\gamma_0} (f'(z))^2 dz = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{h'(z)}{z - z_0} dz = -i\frac{\Gamma}{2\pi} \times 2i\pi h'(z_0)$$

La condition nécessaire pour que le tourbillon  $(\Gamma, z_0)$  soit en équilibre est donc que

$$h'(z_0) = V_0(1 - \frac{R^2}{z_0^2}) + i\frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{z_0 - z_1} + \frac{1}{z_0 - \bar{z}_0} - \frac{1}{z_0 - \bar{z}_1} \right) = 0 \quad (5.51)$$

Cette équation fournit le lieu des points d'équilibre du tourbillon en fonction de sa circulation  $\Gamma$ . On montre de manière similaire que le tourbillon situé en  $\bar{z}_0$  est également en équilibre à la même condition.

On peut enfin établir que l'effort exercé par le fluide sur le cylindre est nul dès lors que les tourbillons introduits sont en équilibre. Le calcul n'est pas reproduit ici. Le potentiel (5.50) correspond donc à une solution du problème de l'écoulement autour d'un cylindre. L'introduction des tourbillons permet de dissymétriser la forme de l'écoulement par rapport à la solution sans tourbillon, ce qui est plus réaliste d'un point de vue physique. Cependant, cette solution ne permet toujours pas de lever le paradoxe de d'Alembert... Une perspective historique et une discussion récente sur le paradoxe de d'Alembert sont proposées par (Tazzioli, 2017; Hoffman and Johnson, 2010).

Déterminons plus précisément le lieu des tourbillons libres en exploitant la condition (5.51). En utilisant  $z_0 = a \exp(i\theta)$  et  $z_1 = R^2 \exp(i\theta)/a$ , on peut mettre  $h'(z_0)$  sous la forme

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= V_0(1 - \frac{R^2}{a^2} \exp(-2i\theta)) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \theta R^2 a}{(a^2 - R^2)(z_0^2 - R^2)} + \frac{1}{2a \sin \theta} \right) \\ &= V_0(1 - \frac{R^2}{a^2} \exp(-2i\theta)) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \theta R^2 a(a^2 \exp(-2i\theta) - R^2)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} + \frac{1}{2a \sin \theta} \right) \end{aligned}$$

dont on extrait les parties réelle et imaginaire

$$\Re(h'(z_0)) = V_0 \left( 1 - \frac{R^2}{a^2} \cos 2\theta \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \theta R^2 a (a^2 \cos(2\theta) - R^2)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} + \frac{1}{a \sin \theta} \right) = 0 \quad (5.52)$$

$$\Im(h'(z_0)) = V_0 \frac{R^2}{a^2} \sin 2\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2 a^3 \sin \theta \sin(2\theta)}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = 0 \quad (5.53)$$

La dernière équation (5.53) fournit les solutions suivantes :

$$\sin 2\theta = 0 \quad \text{ou} \quad V_0 \frac{R^2}{a^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2 a^3 \sin \theta}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = 0$$

La première solution conduit à  $\theta = 0, \pi$  mais alors  $z_0 = \bar{z}_0$  et les deux tourbillons confondus et opposés s'annihilent. Le cas  $\theta = \pi/2$  substitué dans (5.52) exige que

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = -2V_0 \frac{(a^2 - R^2)(a^2 + R^2)^2}{a(a^4 - R^4 + 4a^2 R^2)}$$

Explorons alors la deuxième solution qui est telle que

$$-\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{2R^2 a^3 \sin \theta}{(a^2 - R^2)|z_0^2 - R^2|^2} = \frac{V_0 R^2}{a^2} \quad (5.54)$$

Lorsqu'on substitue cette relation dans (5.52), on obtient finalement

$$\frac{\Gamma}{4\pi} = -V_0 \left( 1 - \frac{R^4}{a^4} \right) \sin \theta$$

Noter que le signe de  $\Gamma$  doit être opposé à  $V_0$ .

Pour trouver l'argument  $\theta$  il faut revenir à (5.54) en notant que  $|z_0^2 - R^2|^2 = a^4 + R^4 - 2a^2 R^2 \cos 2\theta$  :

$$2 \sin \theta = 1 - \frac{R^2}{a^2} \quad (5.55)$$

L'équation polaire du lieu des points  $z_0$  est donc  $a = \frac{R}{\sqrt{1 - 2 \sin \theta}}$

Pour  $\theta = 0$ ,  $a = R$ , les deux tourbillons s'annihilent sur le bord du cercle. La courbe possède une asymptote en  $\pi/6$ , comme l'illustre la figure 5.10.

Si nous privilégions les positions en aval de l'obstacle, ce modèle d'écoulement avec tourbillons libres est susceptible de représenter l'allure de l'écoulement plus fidèlement qu'un modèle sans tourbillons où l'écoulement, symétrique par rapport au disque, est peu réaliste. Pour que ce modèle soit satisfaisant il faudrait néanmoins étudier la stabilité des tourbillons en équilibre qui n'est pas garantie.

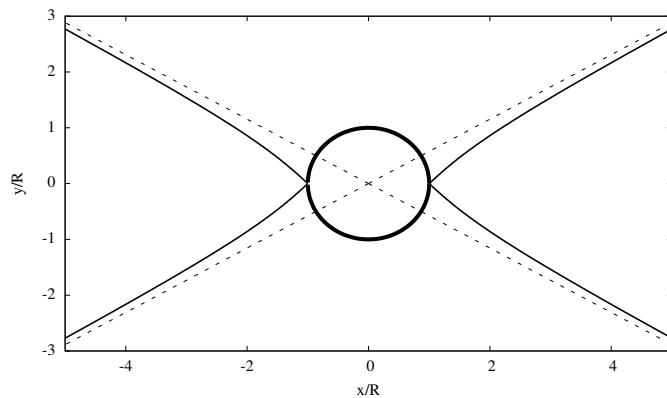


Figure 5.10 : Lieu des centres des tourbillons libres en aval d'un écoulement autour d'un cylindre. Le contour du cylindre est en trait épais. Les asymptotes sont en pointillés.

## 6 Formulation des lois de comportement

Ce chapitre montre d'abord la nécessité de l'établissement de lois de comportement des matériaux. Il donne ensuite le cadre général de la formulation de ces lois dans le cas du comportement viscoélastique héréditaire en grandes déformations, c'est-à-dire lorsque la fonctionnelle du comportement dépend exclusivement de certaines caractéristiques de la matière et de l'histoire des déformations<sup>1</sup>.

### 6.1 Nécessité des lois de comportement

#### 6.1.1 Décompte des inconnues et des équations

Dans le cas des corps rigides dont le mouvement a été décrit au paragraphe 2.2.7, les inconnues du problème sont au nombre de 6, à savoir 3 degrés de liberté de translation et 3 angles de rotations qui interviennent dans la cinématique (2.50). Les équations à résoudre se résument aux équations d'Euler du mouvement (3.27) et (3.28), à savoir les bilans globaux de quantité de mouvement et de moment cinétique pour un torseur des efforts appliqués donné. Il s'agit de 6 équations qui, en principe, permettent donc de déterminer sans ambiguïté les 6 degrés de liberté cinématiques.

Il en va tout autrement dans le cas des corps déformables. Les équations de champ du problème *mécanique* à résoudre se résument aux bilans locaux de masse et de quantité de mouvement, à savoir une équation scalaire et une équation vectorielle, c'est-à-dire **4 équations** au total. On fait l'économie du bilan de moment cinétique en considérant que la partie antisymétrique du tenseur des contraintes de Cauchy est donnée, et prise à zéro pour simplifier dans la suite (tenseur des contraintes symétrique). Ces équations de la mécanique des milieux continus sont consignées dans la table 3.2 et on ne s'intéresse ici qu'au cas de points réguliers d'un corps  $\Omega$ . En général, les actions extérieures (forces massiques)  $f$  sont supposées connues et elles constituent des données du problème. Les inconnues du problème sont donc la masse volumique  $\rho$ , la transformation  $\Phi(\underline{X}, t)$  et la contrainte  $\sigma$  en chaque point matériel  $\underline{X}$ . Cela représente au total **10 inconnues**<sup>2</sup> scalaires attachées à chaque point matériel (à comparer aux 6 inconnues globales pour les corps rigides !). En l'état le problème est donc mal posé.

On met ainsi en évidence le **problème de fermeture**<sup>3</sup>, omniprésent en théorie physique des champs. Il reste 6 équations de champs à trouver. Il s'agit des équations qui expriment les 6 composantes des contraintes  $\sigma$  en fonction des inconnues fondamentales du problème que sont la masse volumique,  $\rho$  et la transformation  $\Phi$ . De telles équations ne sont pas universelles. En effet, l'expérience courante nous enseigne qu'un même champ de déplacement linéaire (conduisant donc à une déformation homogène) appliqué à un échantillon en acier ou en caoutchouc ne donne pas lieu aux mêmes efforts internes. Les équations manquantes n'ont donc pas un caractère universel contrairement aux 4 équations de bilan déjà formulées. Elles revêtent une forme différente selon la nature physique de la matière ou du matériau étudié et prennent le nom de **lois de comportement mécanique**<sup>4</sup>. Il y aura donc des lois de comportement dont la forme et les paramètres associés seront différents pour les métaux, les polymères, les céramiques, les gels et les liquides...

1. Ce chapitre contient certains éléments issus de discussions régulières avec M. Amestoy qui, depuis 2006, a mené une réflexion personnelle sur ce thème. Il est probable que plusieurs de ses idées soient maltraitées au cours du chapitre mais les éditions ultérieures permettront de les corriger ou de les compléter.

2. Noter que la variation de densité se déduit de la connaissance du champ  $\Phi(\underline{X}, t)$ .

3. *Closure problem* en anglais.

4. *Constitutive equations* en anglais.

Pour le développement des lois de comportement, nous travaillons au niveau du point matériel, i.e. de l'élément de volume de la mécanique. Il doit s'agir d'un **volume élémentaire représentatif** (VER) du matériau considéré, ainsi qu'il a été défini au paragraphe 1.2.2. Ce volume intègre les hétérogénéités sous-jacentes de la matière. Dans le cadre de l'approche phénoménologique développée dans ce chapitre, on ne fera appel qu'à une connaissance minimale, nécessairement sommaire, de cette microstructure, notamment les propriétés de symétrie de la matière. Les considérations de ce chapitre sont donc attachées au point matériel. Munis des lois de comportement ainsi établies, ou du moins de leur forme générale, nous reviendrons aux équations de champs et au problème aux limites ainsi posé au chapitre 9.

Nous verrons de plus que les lois caractérisant les propriétés mécaniques des matériaux considérés devront nécessairement mettre en jeu la variable **température**. Il faut donc faire appel à une autre équation universelle, en l'occurrence la conservation de l'énergie, dont l'exploitation exige de fournir des précisions supplémentaires quant au comportement thermique et entropique de la matière. Cette discussion est repoussée au paragraphe 6.6.

En principe, les lois de comportement peuvent se déduire de la connaissance de la distribution détaillée des particules et des interactions entre ces particules au sein d'un matériau donné, par une démarche de **mécanique statistique**. C'est ainsi que la loi des gaz parfaits, des fluides visqueux newtoniens et de l'élasticité de certains solides en petites déformations se déduisent de la mécanique statistique ou des potentiels d'interaction entre molécules. Dans la majorité des cas toutefois, cette démarche deductive se révèle inextricable et ne donne pas lieu à des lois de comportement explicites. On pourra par contre approcher ces dernières par une démarche **phénoménologique** assise à la fois sur des arguments raisonnables quant au choix des variables en jeu et au respect de quelques principes de modélisation physique générale, et sur l'exploitation d'une batterie d'essais expérimentaux. L'intelligence nécessaire à cette démarche phénoménologique ne doit pas être sous-estimée. Elle est illustrée par exemple dans l'ouvrage (Ogden, 1997) pour décrire le comportement des élastomères. C'est l'approche la plus efficace en sciences de l'ingénieur. On va la détailler dans la suite pour les comportements les plus simples. L'étude des lois de comportement constitue la théorie des matériaux<sup>5</sup> au cœur de la physique et de la mécanique de la matière. L'une de ces disciplines est la **rhéologie** ou science des écoulements qui a pour objet les relations entre contraintes et vitesses de déformations dans les polymères, métaux, fluides complexes...

La forme des lois de comportement n'est pas arbitraire. Toute loi n'est pas licite. Des restrictions universelles ou quasi-universelles peuvent y être apportées, qui constituent les principes fondamentaux de la formulation des lois de comportement. Elles font l'objet du paragraphe 6.3. Elles laissent toutefois un choix immense de lois possibles bien adapté à l'extrême variété des comportements observés dans la nature et dans l'industrie.

### 6.1.2 Variété des comportements

Du point de vue phénoménologique, c'est-à-dire en observant la réponse des matériaux à des sollicitations diverses telles que des essais uniaxiaux (traction, cisaillement...), on distingue trois classes de comportement mécanique principales :

- **Elasticité.** Le comportement élastique linéarisé uni-axial est symbolisé par un ressort dont l'allongement  $\Delta l$  est proportionnel à la charge appliquée  $F$ , au moins dans un certain domaine de charge dit domaine d'élasticité. Le facteur de proportionnalité est la **souplesse**  $1/k$ , où  $k$  est la **raideur** du ressort (unité  $\text{N.m}^{-1}$  ou  $\text{Pa.m}$ ) :

$$F = k\Delta l \quad (6.1)$$

---

5. *Material theory* en anglais.

En pratique, la raideur d'un ressort dépend de sa géométrie (paramètres de l'hélice, section du fil, frottement entre spires ou lamelles pour les ressorts jointifs ou à lamelles...) et de caractéristiques élastiques intrinsèques du matériau utilisé.

- **Viscosité.** Le comportement visqueux uni-axial est celui d'un amortisseur ou d'un piston dont la réponse dépend de la vitesse de sollicitation, ici de manière linéaire pour simplifier :

$$F = \eta \Delta \dot{l} \quad (6.2)$$

Le coefficient de viscosité de l'amortisseur  $\eta$  a pour unité  $\text{N.m}^{-1}\cdot\text{s}$  ou  $\text{Pa.s.m}$ . L'unité Pa.s est appelée Poiseuille par exemple en mécanique des fluides et en rhéologie des polymères. Dans ce contexte, plus la vitesse de déformation est rapide, plus la force est grande. Une sensibilité inverse à la vitesse peut exister, par exemple pour certains aciers dans un certain domaine de température, mais elle requiert alors une description non linéaire.

- **Plasticité.** Le comportement rigide parfaitement plastique uni-axial se caractérise par l'existence d'un seuil de contrainte en-deçà duquel aucune déformation n'est observée et pour lequel une déformation permanente quelconque est possible. Il est schématisé par un patin posé sur un substrat rugueux et qui est susceptible de se déplacer à volonté pour une charge appliquée suffisante. Il fait appel à une fonction critère

$$f(F) = |F| - F_0 \quad (6.3)$$

et le glissement ("écoulement") du patin s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta \dot{l} &= 0 && \text{si } f < 0 \quad \text{ou si } (f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0) \\ \Delta \dot{l} &\neq 0 && \text{si } (f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ces comportements schématiques élémentaires sont récapitulés dans l'encadré 6.1.

La combinaison des briques élémentaires précédentes conduit à des comportements plus complexes effectivement rencontrés dans la pratique : **viscoélasticité**, **élastoplasticité**, **viscoplasticité** et finalement **élastoviscoplasticité**. On se contente ici d'illustrer la viscoélasticité linéaire uni-axiale à l'aide du modèle de Maxwell représenté sur la figure 6.1. L'association étant en série, l'effort  $F$  se transmet d'un élément à l'autre du montage de sorte que le système est régi par l'équation différentielle

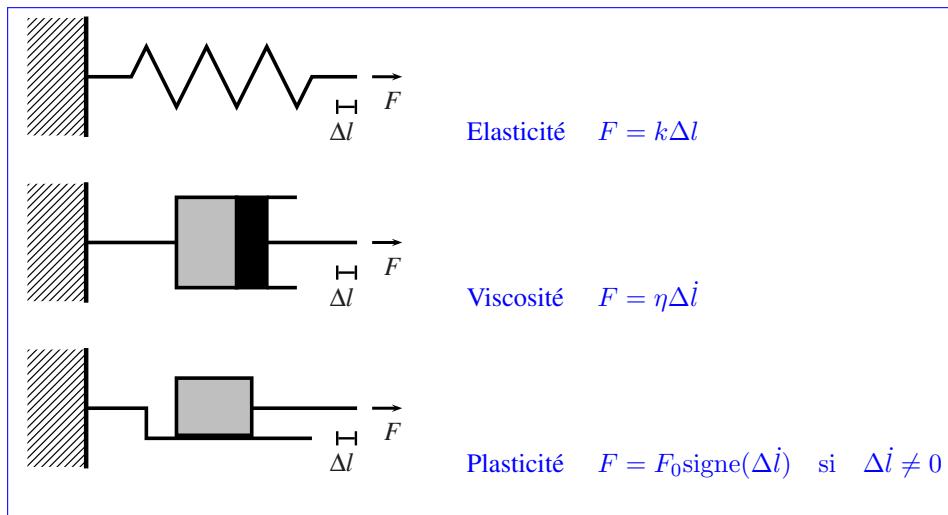
$$\Delta \dot{l}(t) = \Delta \dot{l}_{\text{piston}}(t) + \Delta \dot{l}_{\text{ressort}}(t) = \frac{F(t)}{\eta} + \frac{\dot{F}(t)}{k} \quad (6.5)$$

La réponse du modèle à une histoire de sollicitation  $\Delta \dot{l}(s)$  "depuis la nuit des temps"  $s = -\infty$  où le système était supposé au repos, jusqu'à l'instant actuel  $s = t$  est donc

$$F(t) = k \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{k}{\eta}(t - \tau)\right) \Delta \dot{l}(\tau) d\tau \quad (6.6)$$

Cette expression montre que la réponse actuelle en force dépend en général de **l'histoire** complète de déformation du matériau, ce qui illustre bien la complexité du problème de l'identification des lois de comportement. La loi de comportement est ici une fonctionnelle de l'histoire du matériau. L'histoire est pondérée par un terme exponentiel qui privilégie l'influence des instants proches de l'instant actuel. Le matériau perd donc la **mémoire** des sollicitations trop anciennes. C'est une des caractéristiques de la viscoélasticité.

La complexité du comportement mécanique des matériaux est illustrée sur la figure 6.2 dans le cas d'un alliage métallique à base de nickel et d'aluminium utilisé dans les aubes



*Tableau 6.1: Récapitulatif : schématisation des trois comportements élémentaires dans le cas uni-axial.*

de turbines des moteurs d'avion. La figure 6.2a montre en particulier que la réponse en traction à 950°C (courbe  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  selon l'axe de traction) dépend de la vitesse de sollicitation  $\dot{\varepsilon}$ . Ces essais mettent ainsi en évidence la viscosité du matériau à cette température. Les courbes ont toutefois une partie commune linéaire pour les très faibles déformations  $0 \leq \varepsilon \leq 0.2\%$  qui correspond au domaine d'élasticité de ce matériau à cette température. Les points désignent les résultats expérimentaux tandis que les traits continus correspondent à des simulations numériques à l'aide d'une loi de comportement fortement non linéaire identifiée pour ce matériau dans (Fivel and Forest, 2004b). La description théorique des essais est correcte même s'il est difficile d'obtenir un accord parfait entre modélisation et expérience. La complexité du modèle retenu doit dépendre de la précision souhaitée dans le dimensionnement des pièces. La figure 6.2b montre la réponse du matériau à un chargement cyclique (fatigue oligocyclique, i.e. à faible nombre de cycles, par opposition à la fatigue à grand nombres de cycles qui explore l'endurance du matériau dans un domaine essentiellement élastique) où l'on fait varier  $\varepsilon$  entre -1% et 1% périodiquement. On décrit les trois étapes du premier cycle, à savoir la mise en charge à partir de  $\varepsilon = 0, \sigma = 0$ , et les parties linéaire puis non linéaire de la réponse du matériau. Lorsque 1% de déformation est atteinte, on fait diminuer la déformation. Lorsque la charge repasse par  $\sigma = 0$ , on voit qu'il y a une déformation permanente d'environ 0.5%, caractéristique d'un comportement plastique. Pour les cycles suivants, on voit que la réponse du matériau se stabilise sur une boucle d'hysteresis. Le comportement d'un tel matériau apparaît donc comme élastoviscoplastique.

## 6.2 Mécanique statistique et lois de comportement macroscopiques

Le comportement thermomécanique de la matière résulte des interactions élémentaires entre les particules (atomes, molécules) qui la composent. Si ces interactions sont connues avec suffisamment de précision, des méthodes de changement d'échelles doivent permettre de construire la loi macroscopique à partir des équations locales. Dans les faits, une telle construction n'est pour l'instant possible que pour quelques comportements idéaux comme certains cas d'élasticité et de viscosité des fluides, voire certains élastomères.



Figure 6.1 : Viscoélasticité linéaire uni-axiale : le modèle de Maxwell.

C'est pourquoi l'approche phénoménologique adoptée dans ce cours conserve tous ses mérites. Toutefois, les approches microscopiques servent de guide et de garde-fou à l'élaboration des lois macroscopiques en indiquant les ingrédients principaux des lois de comportement et certains principes fondamentaux qui président à l'écriture de ces lois. Les approches microscopiques sont nécessairement d'ordre statistique étant donné le nombre de particules en jeu dans les systèmes considérés. On illustre ici deux telles procédures statistiques. La première, basée directement sur la dynamique de Newton et présentée dans l'annexe 15, a le mérite de fournir des relations de moyennes explicites entre les contraintes macroscopiques et les forces microscopiques entre atomes. Elle ne permet cependant pas d'aboutir à l'expression des lois de comportement global. Elle est utilisée en pratique pour interpréter avec les notions de la mécanique des milieux continus les résultats de simulations numériques de dynamique moléculaire. La théorie cinétique des gaz mentionnée au paragraphe 6.2.1 et due à Maxwell et Boltzmann, conduit au contraire aux lois de comportement linéaires de la thermomécanique des fluides. Elle permet de relier les coefficients macroscopiques, notamment de viscosité et de conductivité thermique à certaines grandeurs microscopiques.

Ces démarches de mécanique statistique permettent de réaliser la transition de l'approche discrète à l'approche continue du comportement de la matière, au moins dans quelques cas simplifiés.

### 6.2.1 Théorie cinétique des gaz

La théorie cinétique des gaz fournit, de manière itérative, des formes explicites pour les lois de comportement de certains fluides, à partir de l'exploitation de l'équation de Boltzmann. On renvoie le lecteur aux références (Landau and Lifschitz, 1980; Chapman and Cowling, 1970) pour ces développements qui sortent du cadre de ce cours. On retient la forme des premiers termes de la loi de comportement thermomécanique des fluides obtenues par ce biais. Elles font intervenir les variables  $\tilde{W}$ ,  $\tilde{D}$ ,  $\underline{g}$  de taux de rotation, taux de déformation et gradient spatial de température, mesurés par rapport à un référentiel galiléen. Les premiers termes apparaissant dans ce développement itératif sont donnés par exemple dans (Murdoch, 1983). En se limitant aux termes jusqu'à l'ordre 2 (quadriatiques), on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= -p\mathbf{1} + 2\eta\tilde{D}^{\text{dev}} + \frac{4\eta^2}{3p}(\tilde{D}^{\text{dev}} : \tilde{D}^{\text{dev}})\mathbf{1} \\ &\quad - \frac{2\eta^2}{p}((\text{trace } \tilde{D})\tilde{D}^{\text{dev}} + 2\tilde{D}\cdot\tilde{D}^{\text{dev}} + \tilde{W}\cdot\tilde{D} - \tilde{D}\cdot\tilde{W}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\underline{q} = -\alpha\eta\underline{g} + \frac{\alpha\eta^2}{2p}(5(\text{trace } \tilde{D})\underline{g} + 3\tilde{L}\cdot\underline{g} + 8\tilde{D}^{\text{dev}}\cdot\underline{g}) \quad (6.8)$$

où  $\tilde{D}^{\text{dev}}$  désigne la partie déviatrice du tenseur taux de déformation  $\tilde{D}$ .  $p$  correspond à la pression. La viscosité est  $\eta$  tandis que  $\alpha\eta$  n'est autre que la conductivité thermique macroscopique. On note en particulier la présence du taux de rotation  $\tilde{W}$  dans cette loi.

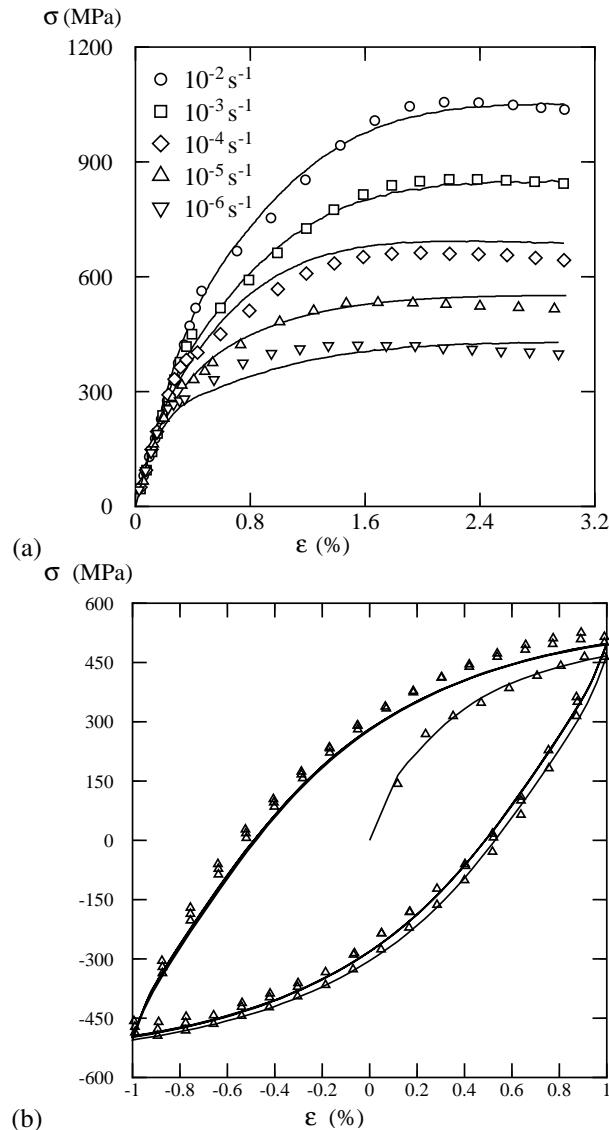


Figure 6.2 : Comportement mécanique d'un superalliage à base de nickel pour aube de turbine : (a) comportement en traction à vitesse de déformation imposée, (b) comportement cyclique. Les résultats expérimentaux sont donnés par les symboles et les prévisions du modèle sont en trait continu.

On montre que cette contribution est intrinsèquement liée à l'action des forces de Coriolis agissant sur les particules dont le mouvement fluctue par rapport au mouvement moyen du fluide (Speziale, 1998).

C'est le mérite insigne de la théorie cinétique des gaz que d'indiquer quelles combinaisons des grandeurs mécaniques macroscopiques apparaissent effectivement dans les lois

### 6.3. LES PRINCIPES DE CONSTRUCTION DES LOIS DE COMPORTEMENT MÉCANIQUE

thermomécaniques macroscopiques. Elle fournit même les valeurs des rapports très particuliers entre les différents coefficients associés à ces termes. On comparera dans la suite les prévisions de l'approche phénoménologique à ce cas particulier de la théorie cinétique des gaz.

#### **6.3 Les principes de construction des lois de comportement mécanique**

Il existe une multitude de lois de comportement possibles correspondant à l'infinie variété des comportements observés. Cependant, toutes les relations entre contraintes et déformations ne constituent pas des lois de comportement. En effet certaines relations ne sont pas compatibles avec les lois physiques connues. Les principes fondamentaux servent alors de guide dans l'écriture des lois de comportement. Un tel guide de construction doit avoir les deux vertus suivantes :

1. *ne pas autoriser de lois absurdes* ; les garde-fous seront le caractère tensoriel de la loi de comportement, on le verra, mais aussi l'invariance galiléenne. D'autres cibles, telle que les propriétés de symétrie de la matière ainsi que la thermodynamique, seront nécessaires pour exclure des lois illicites ;
2. *ne pas exclure des lois possibles* ; on évitera de faire appel, sans avoir conscience des restrictions consenties, à des principes excessifs qui ne s'appuieraient pas sur les propriétés fondamentales de l'espace physique et de la matière<sup>6</sup>.

La formulation des lois de comportement est étudiée d'abord dans le cas de lois mécaniques liant la contrainte locale à la transformation du milieu. La température intervient dans ces lois comme paramètre. Par concision, le paramètre température est omis dans les fonctions et fonctionnelles de ce paragraphe. Le cas du couplage thermomécanique et de la conduction thermique sera abordé ensuite au paragraphe 6.6. Les principes issus de la thermodynamique ne seront exploités que dans un troisième temps. L'intérêt de cette démarche est d'isoler ce qui peut être dit dans un cadre purement mécanique avant d'établir les restrictions supplémentaires qu'impose la thermodynamique.

##### *6.3.1 Structure de l'espace physique*

L'espace physique  $\mathcal{E}$  d'observation est un *espace affine euclidien orienté*, d'espace vectoriel euclidien associé  $E$ , de dimension 3. Il est entièrement caractérisé par la donnée des tenseurs suivants, que nous appelons *tenseurs de structure spatiale* :

- le *tenseur métrique*, représenté par la 2-forme

$$\underline{\underline{g}} = g_{ij} \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \quad (6.9)$$

dans une base  $\mathcal{B} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  de  $E$ . Les composantes du tenseur métrique se transforment de la manière suivante par changement de base  $M : \underline{\underline{g}}^M = M^T \underline{\underline{g}} M$ . Le tenseur euclidien métrique est noté  $\underline{\underline{g}}$ .

- le *tenseur d'orientation*, dit tenseur de Levi-Civita. C'est le tenseur d'ordre 3 suivant :

$$\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \epsilon_{ijk} \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}^k$$

---

6. Le principe d'*indifférence matérielle* (*material frame indifference, MFI*), invoqué par (Truesdell and Noll, 1965a), par exemple exige l'invariance euclidienne de la loi de comportement, i.e. l'invariance de la forme de la loi par tout changement de référentiels (non seulement galiléens). C'est une exigence abusive non exigible en général. Il s'agit en fait d'une propriété vérifiée *in fine* par de nombreuses lois de comportement, comme on le verra. Il s'avère commode pour formuler certaines lois des matériaux de l'ingénieur mais ce n'est pas un principe physique universel.

où  $\epsilon_{ijk}$  est le symbole de Levi-Civita d'ordre 3, signature de la permutation  $(i, j, k)$ . Un changement de base se traduit de la manière suivante sur la matrice des composantes :

$$\overset{\circ}{\mathcal{O}}^M = (\det M) \overset{\circ}{\mathcal{O}}$$

Il est donc sensible au changement d'orientation et de volume de la base.

L'espace physique galiléen/newtonien ne possède pas d'autre tenseur de structure. En particulier, il n'existe pas de trièdre directeur ou de base privilégiée<sup>7</sup>.

C'est la propriété appelée **isotropie de l'espace**<sup>8</sup>. L'isotropie<sup>9</sup> de l'espace traduit le fait qu'il n'y a pas de base orthonormée privilégiée pour représenter les événements de la physique. Il n'y a pas non plus d'orientation privilégiée.

En guise de raccourci, on notera les éléments de structure de l'espace physique de la manière suivante :

$$\mathcal{S} = \{\underline{g}\} \quad (6.10)$$

où le tenseur d'orientation est délibérément exclu en vertu du principe d'isotropie de l'espace.

### 6.3.2 Structure de l'espace matériel

L'espace tangent sur la variété matérielle  $\Omega_0$  au point matériel étudié  $\underline{X}$  définit une *configuration locale de référence*, noté  $\kappa_0$ . C'est un espace vectoriel euclidien noté  $E_0$  de dimension 3, appelé *espace matériel*. Cette configuration locale de référence n'est pas nécessairement associée à une configuration physique réelle atteinte un instant donné du mouvement. La réalité physique de cet espace apparaît clairement si l'on pense à un matériau cristallin. L'espace matériel autour d'un point du cristal n'est autre que le réseau cristallin constitué des atomes ou molécules agencés de manière ordonnée, qui peut être observé au microscope ou par diffraction et qui possède une structure euclidienne permettant de mesurer les distances entre atomes et les angles entre directions cristallographiques.

Un changement de configuration locale est l'endomorphisme<sup>10</sup>  $\underline{Z} \in GL(E_0)$ ,  $\kappa_0 \rightarrow \hat{\kappa}_0$

$$\underline{F} = \hat{\underline{F}} \underline{Z}$$

La dépendance du comportement par rapport à la configuration locale de référence s'exprimera au moyen de tenseurs qui structurent la matière, que nous appelons *tenseurs de structure matérielle*<sup>11</sup> :

- La masse volumique,  $\rho_0$ , du point matériel dans la configuration  $\kappa_0$ .
- Une base locale lagrangienne privilégiée orthonormée ou **trièdre directeur** nécessaire pour caractériser l'anisotropie de l'espace matériel (Mandel, 1973)

$$\mathcal{B}_0 = (\underline{E}_1 = \underline{A}, \underline{E}_2 = \underline{B}, \underline{E}_3 = \underline{C})$$

7. au contraire de *l'éther* invoqué dans certaines théories alternatives de la physique.

8. Au contraire, le prix Nobel d'économie Maurice Allais, chercheur et professeur à l'Ecole des Mines de Paris prône l'anisotropie de l'espace : *Il est totalement impossible de considérer que les régularités mises en évidence dans les observations interférométriques de Miller puissent être attribuées à des effets de température. Il en résulte que la vitesse de la lumière n'est pas invariante quelle que soit sa direction et que, dès lors, le principe d'invariance de la vitesse de la lumière sur lequel repose fondamentalement la théorie de la relativité restreinte est infirmé par les données de l'observation.* Ce texte est le résumé placé en tête de l'article (Allais, 2000). Ces travaux, réunis dans l'ouvrage (Allais, 1997), font l'objet d'une controverse, documentée sur le net.

9. L'hémisphérie (resp. isotropie) désigne l'invariance par rapport aux rotations (resp. transformations orthogonales).

10. En toute rigueur, il faudrait définir l'espace matériel  $\hat{E}_0$  associé à la configuration locale  $\hat{\kappa}_0$ .

11. Le concept de tenseur de structure est essentiellement dû à (Boehler, 1978; Boehler, 1987).

Les vecteurs matériels ( $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ) sont par exemple les vecteurs caractérisant la maille cristalline dans le cas d'un matériau cristallin, des vecteurs liés à un réseau de fibres dans un matériau composite, etc. Le tenseur métrique matériel est la forme bilinéaire

$$\underline{\underline{G}} = G_{IJ} \underline{\underline{E}}^I \otimes \underline{\underline{E}}^J$$

utilisant la base duale de la base matérielle  $\mathcal{B}_0$ .

- Le tenseur d'orientation lagrangien

$$\underline{\underline{\underline{\mathcal{Q}}}}_0 = \epsilon_{IJK} \underline{\underline{\underline{E}}}^I \otimes \underline{\underline{\underline{E}}}^J \otimes \underline{\underline{\underline{E}}}^K$$

Contrairement à l'espace physique, l'espace matériel est sensible aux changements d'orientation de la base. C'est le cas de cristaux dont la maille cristalline n'est pas invariante par symétrie centrale (inversion) en raison de la polarité ou de la chiralité des molécules du réseau cristallin.

- Généralement d'autres *tenseurs de structure matérielle*  $\mathfrak{T}$ , d'ordres variés et introduits sous forme contravariante, sont nécessaires pour caractériser les propriétés de la matière. Ils sont construits à partir de produits tensoriels des vecteurs ( $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ). Ils interviennent par exemple dans la structure des tenseurs des modules d'élasticité. Ils sont d'essence matérielle, i.e. *lagrangienne*. Ils se transforment en  $\mathfrak{T}^{H^{-1}}$  par changement de configuration  $\underline{\underline{H}} \in \mathcal{U}(E)$ :

$$\mathfrak{T}^{H^{-1}\hat{I}\hat{J}\hat{K}\hat{L}\dots} = H^{\hat{I}}{}_I H^{\hat{J}}{}_J H^{\hat{K}}{}_K H^{\hat{L}}{}_L \dots \mathfrak{T}^{IJKL\dots} \quad (6.11)$$

Il s'agit d'une généralisation de la notation (12.37) introduite en annexe.

On définit alors le **groupe d'invariance de configuration**  $\kappa_0$  :

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{ \underline{\underline{H}} \in GL(E_0), \quad \mathfrak{T}^H \equiv \mathfrak{T} \} \quad (6.12)$$

c'est-à-dire l'ensemble des changements de configuration locale matérielle qui laissent les tenseurs de structure invariants. Deux configurations locales liées par un élément de cet ensemble possèdent les mêmes tenseurs de structure matérielle. Elles sont dites **indiscernables**<sup>12</sup>. La structure de groupe de l'ensemble des configurations indiscernables s'établit en utilisant la relation (6.11) :

- $\underline{\underline{1}} \in \mathfrak{G}_{\kappa_0}$  car  $\mathfrak{T}^{\underline{\underline{1}}} = \mathfrak{T}$ ;
- si  $\underline{\underline{H}}_1, \underline{\underline{H}}_2 \in \mathfrak{G}_{\kappa_0}$  alors  $\underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{H}}_2 \in \mathfrak{G}_{\kappa_0}$  car

$$\mathfrak{T}^{\underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{H}}_2} = (\mathfrak{T}^{\underline{\underline{H}}_1})^{\underline{\underline{H}}_2} = \mathfrak{T}^{\underline{\underline{H}}_2} = \mathfrak{T}$$

- si  $\underline{\underline{H}} \in \mathfrak{G}_{\kappa_0}$  alors  $\underline{\underline{H}}^{-1} \in \mathfrak{G}_{\kappa_0}$  car

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{\underline{\underline{H}} \underline{\underline{H}}^{-1}} = (\mathfrak{T}^{\underline{\underline{H}}})^{\underline{\underline{H}}^{-1}} = \mathfrak{T}^{\underline{\underline{H}}^{-1}}$$

On postule que pour tout point matériel, il existe une configuration locale dite lagrangienne  $\kappa_L$  telle que son groupe d'invariance de configuration, noté  $\mathfrak{G}_L$  soit un sous-groupe du groupe unimodulaire :

$$\mathfrak{G}_{\kappa_L} \leq \mathcal{U}(E_0)$$

---

12. Noter que deux configurations pourront être indiscernables pour une propriété physique (thermique par exemple) et non pour une autre (mécanique par exemple).

Le groupe unimodulaire est l'ensemble des transformations linéaires à déterminant égal à 1. En général, contrairement à l'espace physique, la matière n'est pas isotrope de sorte que l'inversion (symétrie centrale) n'est pas nécessairement un élément du groupe de symétrie. Une transformation  $\underline{H} \in GL(E_0)$  est appelée **symétrie matérielle** si elle vérifie  $\underline{\mathfrak{T}}^H \equiv \underline{\mathfrak{T}}$ . Le mot symétrie est utilisé de manière abusive dans la mesure où le groupe d'invariance de configuration est considéré ici comme un sous-groupe du groupe unimodulaire et ne peut donc contenir les symétries centrales (inversion) ou par rapport à un plan. C'est l'expérience qui incite à se restreindre à des éléments du groupe unimodulaire  $\mathcal{U}(E_0)$  (i.e.  $\det \underline{H} = 1$ ) car on observe qu'on ne peut pas impunément changer le volume d'un matériau par application d'une contrainte sans modifier son comportement. Il se peut en outre que deux configurations qui diffèrent par une inversion – il soient indiscernables (microstructure invariante par symétrie centrale). Il est loisible alors d'ajouter cet élément au groupe d'invariance précédent pour engendrer un groupe plus large contenant des tenseurs inversibles à déterminant égal à  $-1$  (symétries miroirs, etc.). On appelle également  $\mathfrak{G}_L$ , le **groupe des symétries de la matière**.

On donne ici des exemples de groupes d'invariance de configuration dans le cas où les tenseurs de structures se limitent à quelques classes particulières :

- Cas où l'unique tenseur de structure est une base lagrangienne donnée :

$$(\mathcal{B}_0)^H \equiv \mathcal{B}_0 \implies \underline{H} = \mathbb{1}, \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{\mathbb{1}\}$$

- Cas où le tenseur de structure est le tenseur métrique

$$(\mathbb{1})^H \equiv \mathbb{1} \implies \underline{H} \in GO(E_0), \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = GO(E_0)$$

Il s'agit de chercher  $\underline{H} \in GL(E)$  tel que  $\underline{H} \underline{G}_0 \underline{H}^T = \underline{G}_0$ . C'est la définition même d'un tenseur orthogonal. Le tenseur métrique est donc le tenseur de structure associé au groupe spécial orthogonal (en se limitant aux  $\underline{H} \in \mathcal{U}(E_0)$ ).

- Cas où le tenseur de structure est le pseudo-tenseur d'orientation :

$$\left( \underline{\mathcal{O}} \right)^H = (\det \underline{H}) \underline{\mathcal{O}} \equiv \underline{\mathcal{O}} \implies \underline{H} \in \mathcal{U}(E_0), \quad \mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E_0)$$

Le pseudo-tenseur d'orientation est le tenseur de structure associé au groupe unimodulaire.

- Pas d'invariance possible sur  $GL(E_0)$  car ni  $\underline{G}$ , ni  $\underline{\underline{\mathcal{O}}}_L$  ne sont invariants par homothétie.

Pour résumer, on notera la liste des éléments de structure de l'espace matériel de la manière suivante :

$$\mathcal{S}_L = \{\underline{G}, \quad \underline{\underline{\mathcal{O}}}_L, \quad \underline{\mathfrak{T}}\} \quad (6.13)$$

### 6.3.3 Déterminisme galiléen pour la loi de comportement viscoélastique

Dans le cadre de la mécanique classique, le groupe des observateurs habilités à formuler de façon autonome les lois de comportement thermomécanique est le groupe *galiléen* :

$$\underline{x} \longrightarrow \underline{x}' = \underline{Q}_0^{-1} \underline{x} + \underline{v}_0 t + \underline{c}_0$$

où  $\tilde{Q}_0 \in SO(E)$  le groupe spécial orthogonal (les *rotations*)<sup>13</sup>. La discussion sur l'origine physique des lois de comportement a mis clairement en évidence le rôle privilégié joué par les référentiels galiléens. C'est pourquoi nous allons chercher à formuler de manière privilégiée la loi de comportement du milieu par rapport à un référentiel galiléen ( $\mathcal{E}^G, E^G$ ). Dans le reste de ce chapitre, les grandeurs mécaniques sont considérées par rapport à un référentiel galiléen, à moins qu'un changement de référentiel ne soit indiqué explicitement. Par concision, l'indexation par rapport au référentiel galiléen est implicite. Une fois décrite pour le référentiel galiléen, la loi de comportement pourra, en cas de besoin, être transposée à n'importe quel autre référentiel.

L'objet de la loi de comportement mécanique est de relier des **variables dépendantes**<sup>14</sup>, ici le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  en un point matériel d'un corps  $\Omega$  dans sa configuration courante à l'instant  $t$ , à des **variables indépendantes ou commandables**, ici *a priori* la transformation  $\Phi$  du corps matériel, et aux paramètres de structure des espaces physique et matériel.

Le principe du déterminisme stipule que la contrainte  $\sigma(\underline{x}, t)$  est déterminée par l'histoire présente et passée (et non future) du corps matériel. Cette histoire est identifiée ici à la connaissance de  $\Phi(\underline{X}, \tau)$  pour tout  $\underline{X} \in \Omega_0$  et à tous les instants  $\tau \leq t$  depuis l'origine  $\tau \rightarrow -\infty$  jusqu'à l'instant  $\tau = t$ . Elle permet de calculer le champ de vitesses eulérien en tout point d'après l'équation (2.173). La masse volumique en tout point et à tout instant antérieur à  $t$  se déduit alors de l'équation de conservation de la masse. On suppose donc l'existence d'une **fonctionnelle mémoire** écrite ci-dessous de manière symbolique

$$\sigma(\underline{x}, t) = \mathcal{F} \left( \tau, \Phi(\underline{Y}, \tau), \underline{V}(\underline{Y}, \tau), \underline{A}(\underline{Y}, \tau); \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}(\underline{Y}); \underline{Y} \in \Omega_0, -\infty \leq \tau \leq t \right) \quad (6.14)$$

Les arguments retenus sont *a priori* le temps passé, l'histoire de la position, de la vitesse  $\underline{V}$ , et l'accélération  $\underline{A}$ , les dérivées temporelles d'ordres supérieurs n'étant pas indiquées ici, par concision. Ces grandeurs sont redondantes puisque toute l'information est contenue dans  $\Phi(\underline{Y}, \tau)$  pour tous les points matériels et tous les instants passés et présent. On ajoute également la connaissance des tenseurs de structure de l'espace physique et de la matière. La fonctionnelle  $\mathcal{F}$  ne se réduit pas en général à une simple fonction de ses arguments et contient des intégrales par rapport au temps, voire à l'espace. Malgré la richesse de ses arguments, elle n'épuise pas la variété des comportements de la matière et concerne en fait le comportement viscoélastique des matériaux. On se convaincra aisément du peu de restrictions qu'apportent ces relations somme toute formelles. L'état va toutefois se resserrer au fur et à mesure de l'introduction des principes ou restrictions suivants<sup>15</sup>.

#### Hypothèse de l'action locale

L'hypothèse de l'action locale réduit la dépendance spatiale des fonctionnelles précédentes à un voisinage arbitrairement petit autour du point  $\underline{X}$  étudié. Un voisinage

13. Afin de préserver la description des milieux matériels *hémitropes* (l'éventualité se présente pour le vecteur flux de chaleur, et en mécanique pour les milieux non matériellement simples, mais aussi pour les couplages de la mécanique avec l'électromagnétisme tels que la piézoélectricité) le groupe des observateurs éligibles sera réduit aux référentiels galiléens ayant choisi *la même orientation*.

14. Terminologie empruntée à (Bertram and Svendsen, 2001).

15. On pourrait se demander si la connaissance de la transformation à tout instant présent et passé et en tout point représente de manière exhaustive l'histoire du matériau et envisager l'existence de variables internes caractérisant par exemple des aspects de la microstructure des matériaux et dont pourraient dépendre les fonctionnelles introduites. Historiquement, la notion de variable interne a plutôt été développée dans les années 1970 pour concurrencer l'approche fonctionnelle dite aussi héréditaire, qui date des années 1960, souvent lourde à mettre en œuvre pour des comportements complexes. En toute logique, ne faudrait-il pas conjuguer les deux approches ? C'est un débat toujours ouvert qui devrait faire l'objet de recherches futures en thermomécanique des matériaux.

infinitésimal autour de  $\underline{\mathbf{X}}$  est suffisant pour calculer les gradients de  $\Phi(\underline{\mathbf{X}}, t)$  à tous les ordres  $n$  entiers positifs. La fonctionnelle mémoire devient donc

$$\underline{\sigma}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \mathcal{F}\left(\tau, \Phi(\underline{\mathbf{X}}, \tau), \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, \tau), \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{X}}, \tau), \frac{\partial^n \Phi}{\partial \underline{\mathbf{X}}^n}(\underline{\mathbf{X}}, \tau); \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}; -\infty \leq \tau \leq t\right) \quad (6.15)$$

Les milieux de degré  $n$  sont des milieux continus pour lesquels, on fait intervenir les gradients de la transformation jusqu'à l'ordre  $n$ . On a déjà mentionné la théorie du second gradient ( $n = 2$ ) au détour du paragraphe 2.2.4 pour dire que son usage reste très limité.

C'est pourquoi il est pragmatique et *a posteriori* largement suffisant de se limiter au premier gradient de la transformation. On parle alors de **théorie du premier gradient** et le milieu continu ainsi modélisé est parfois dit *matériellement simple*<sup>16</sup>. Le premier gradient de la transformation  $\Phi$  est noté  $\underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$  :

$$\underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{X}}, t) := \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\mathbf{X}}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \quad (6.16)$$

La fonctionnelle mémoire prend dès lors la forme suivante

$$\underline{\sigma}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \mathcal{F}\left(\Phi(\underline{\mathbf{X}}, \tau), \underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, \tau), \underline{\mathbf{A}}(\underline{\mathbf{X}}, \tau), \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{X}}, \tau); \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}; -\infty \leq \tau \leq t\right) \quad (6.17)$$

Il est difficile de justifier ces deux restrictions successives autrement qu'en constatant que les lois obtenues de la sorte se révèlent suffisamment fécondes en pratique. Le problème de la formulation des lois de comportement se simplifie considérablement. Il s'agit clairement là de deux principes non universels (les milieux non locaux, ça existe) mais qui embrassent une classe très large de comportements pertinents pour les problèmes de l'ingénieur.

### Invariance galiléenne

Une transformation galiléenne

$$(\underline{\mathbf{x}}, t) \longrightarrow (\underline{\mathbf{Q}}_0^{-1} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{v}}_0 t + \underline{\mathbf{c}}_0, t + t_0) \quad (6.18)$$

est caractérisée par une rotation constante  $\underline{\mathbf{Q}}_0$ , une vitesse constante  $\underline{\mathbf{v}}_0$  et une translation spatio-temporelle constante  $(\underline{\mathbf{c}}_0, t_0)$ .

Les lois de Newton qui sont à la base des mécanismes élémentaires microscopiques de déformation du corps matériel sont invariantes par transformation galiléenne<sup>17</sup>. Le comportement résultant du milieu continu satisfait au moins à ces conditions d'invariance. On analyse successivement les conséquences de l'invariance galiléenne sur la forme de la loi de comportement pour les sous-groupes suivants du groupe galiléen :

1.  $(\underline{\mathbf{Q}}_0 = \underline{\mathbf{1}}, \underline{\mathbf{v}}_0 = 0, \underline{\mathbf{c}}_0 = 0, t_0 \neq 0)$ . Cette classe de transformations conduit à la condition

$$\mathcal{F}(\tau, \underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{v}}(\tau), \underline{\mathbf{a}}(\tau), \underline{\mathbf{F}}(\tau)) = \mathcal{F}(\tau + t_0, \underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{v}}(\tau), \underline{\mathbf{a}}(\tau), \underline{\mathbf{F}}(\tau)), \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad (6.19)$$

---

16. Une définition équivalente d'un milieu matériellement simple est la suivante (Truesdell and Noll, 1965b) : un milieu est dit simple au point  $\underline{\mathbf{X}}$  si sa réponse à des transformations homogènes dans un voisinage fini de  $\underline{\mathbf{X}}$  suffit à déterminer sa réponse à une déformation quelconque en  $\underline{\mathbf{X}}$ .

17. On trouvera dans l'annexe 16 un exemple élémentaire d'application du principe d'invariance galiléenne à l'interaction entre deux particules élémentaires.

où les tenseurs de structure sont présents tacitement. Cette condition implique que la fonctionnelle de comportement ne peut pas dépendre directement du temps, ce qui élimine le premier argument proposé. Une dépendance explicite des lois de comportement en fonction du temps est illicite. Cela ne signifie nullement que des effets de vitesse de sollicitation, ou de vieillissement du matériau soient exclus. Dans le modèle de Maxwell par exemple, le comportement est régi par l'équation différentielle (6.5) qui ne fait pas intervenir explicitement la variable  $t$ . Quant aux phénomènes physiques dépendant du temps comme le fluage, la relaxation ou le vieillissement, ils seront modélisés à l'aide d'équations différentielles portant sur des variables bien choisies et incluant leurs dérivées temporelles. Les aspects temporels du comportement sont donc une conséquence indirecte de la forme de la fonctionnelle mémoire, ou plus généralement de l'introduction de variables internes.

2. ( $\tilde{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{1}$ ,  $\underline{\mathbf{v}}_0 = 0$ ,  $\underline{\mathbf{c}}_0 \neq 0$ ,  $t_0 = 0$ ). L'invariance de la loi de comportement par rapport à cette classe de transformations indique que

$$\mathcal{F}(\underline{\mathbf{x}}(\tau) + \underline{\mathbf{c}}_0, \underline{\mathbf{v}}(\tau), \underline{\mathbf{a}}(\tau), \underline{\mathbf{F}}(\tau)) = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{x}}(\tau), \underline{\mathbf{v}}(\tau), \underline{\mathbf{a}}(\tau), \underline{\mathbf{F}}(\tau)), \forall \underline{\mathbf{c}}_0 \in E \quad (6.20)$$

de sorte que

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\mathbf{c}}_0} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = 0 \quad (6.21)$$

La fonctionnelle-mémoire ne peut donc pas dépendre explicitement de l'histoire de la position du point matériel. Il reste qu'il peut exister une dépendance directe de  $\mathcal{F}$  vis-à-vis du point matériel  $\underline{\mathbf{X}}$ . On dira alors que le corps matériel est **hétérogène**. Lorsque les propriétés du matériau sont identiques dans tout le corps, le corps matériel est dit **homogène**. Pour ne pas alourdir les notations, la dépendance possible par rapport à  $\underline{\mathbf{X}}$  ne sera pas rappelée dans la suite. Les matériaux hétérogènes peuvent être constitués de parties homogènes. Les conditions à respecter à l'interface entre deux matériaux sont les mêmes que les conditions de discontinuités développées au chapitre 3. Cette dépendance s'exprime également dans le cas des matériaux à gradient de propriété où les propriétés dépendent continûment (presque partout) des coordonnées  $\underline{\mathbf{X}}$ <sup>18</sup>.

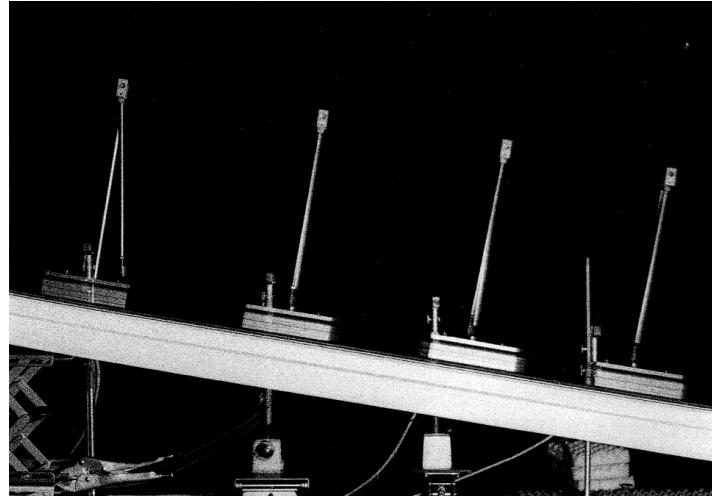
3. ( $\tilde{\mathbf{Q}}_0 = \mathbf{1}$ ,  $\underline{\mathbf{v}}_0 \neq 0$ ,  $\underline{\mathbf{c}}_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ ). L'exploitation de l'invariance vis-à-vis de ce sous-groupe de transformations galiléennes permet de conclure que la fonctionnelle-mémoire ne peut pas dépendre explicitement de la vitesse du point matériel<sup>19</sup>.

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\Omega_0}^G}{\partial \underline{\mathbf{v}}} = 0 \quad (6.22)$$

L'exploitation des transformations faisant intervenir les rotations quelconques  $\tilde{\mathbf{Q}}_0$  sera fait au travers de l'exigence plus générale de covariance de la loi de comportement au paragraphe 6.3.5.

18. Penser aux propriétés élastiques ou plastiques d'une soudure par exemple et de sa zone affectée thermiquement, ainsi que les matériaux *cermets* (céramique-métal) utilisés dans les forets.

19. Ces "démonstrations" ont un caractère formel puisqu'on prétend les appliquer à une fonctionnelle de l'histoire des variables considérées.



*Figure 6.3 : Illustration du principe d'équivalence d'Einstein au moyen de l'expérience d'un chariot roulant librement sur un plan incliné et équipé d'un mât rigide auquel un pendule est suspendu. Le système est en chute libre du point de vue de la composante du champ de gravitation parallèle au plan incliné, d'après (Klein and Mittelstaedt, 1997).*

#### Principe d'équivalence d'Einstein ou invariance galiléenne étendue

On considère la classe suivante de transformations galiléennes étendues :

$$(\underline{x}, t) \longrightarrow (\tilde{Q}_0^{-1} \cdot \underline{x} + \underline{c}(t), t + t_0) \quad (6.23)$$

où le vecteur  $\underline{c}(t)$  est une fonction quelconque du temps (en particulier, non nécessairement affine). D'après le principe d'équivalence d'Einstein, les effets d'un champ gravitationnel ne se distinguent pas de ceux induits par des efforts d'inertie. C'est la fameuse Gedankenexperiment de l'ascenseur d'Einstein. Une version plus terrestre est illustrée sur la figure 6.3. Une conséquence est que les lois de comportement effectif des milieux continus satisfont à cette propriété d'invariance par rapport aux transformations galiléennes étendues (Speziale, 1988; Speziale, 1998) :

$$\mathcal{F}(\underline{a}(\tau), \underline{F}(\tau); -\infty < \tau \leq t) = \mathcal{F}(\underline{a}(\tau) + \ddot{\underline{c}}(\tau), \underline{F}(\tau); -\infty < \tau \leq t), \quad \forall \ddot{\underline{c}}(t) \in E^G \quad (6.24)$$

A l'aide des transformations galiléennes étendues à accélération constante,

$$\underline{x} \longrightarrow \tilde{Q}_0^{-1} \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{a}_0 t^2 \quad (6.25)$$

on établit que la loi de comportement ne peut pas dépendre explicitement de l'accélération. Un raisonnement similaire permet en fait d'exclure aussi toutes les accélérations d'ordre supérieur. A ce stade, la loi de comportement prend la forme réduite intermédiaire :

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{F}(\tau); \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}; -\infty < \tau \leq t) \quad (6.26)$$

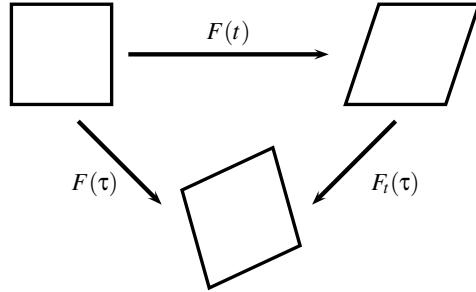


Figure 6.4 : Définition de l'histoire eulérienne du gradient de la transformation.

#### 6.3.4 Les jeux de variables de la loi de comportement

La loi de comportement sous la forme (6.26) a l'inconvénient de relier des tenseurs opérant sur des espaces distincts. Le tenseur des contraintes de Cauchy est une grandeur eulérienne tandis que le gradient de la transformation est un tenseur mixte, application linéaire de l'espace matériel  $E_0$  sur l'espace physique  $E_t$  observé à l'instant  $t$ . Les tenseurs de structures sont respectivement eulériens et lagrangiens. Les espaces  $E_0$  et  $E_t$  ne peuvent pas être identifiés car ils possèdent des structures différentes décrites par  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_{\kappa_0}$ , respectivement. Le pendant lagrangien du tenseur des contraintes de Cauchy<sup>20</sup> est connu, c'est le tenseur de Piola :

$$\underline{\Pi} = J \underline{\sigma}^F = J \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-T} = J F_{\triangleleft}(\underline{\sigma}) \quad (6.27)$$

où l'on a utilisé la notation  ${}^F$  introduite en annexe, voir équation (12.37), et le concept équivalent d'image réciproque, cf Eq. (12.99). De façon similaire on obtient les pendants lagrangien et eulérien des métriques matérielle et spatiale :

$$\underline{g}^F = F_{\triangleleft}(\underline{g}) = \underline{F}^* \underline{g} \underline{F} = \underline{G} \underline{F}^T \underline{F} = \underline{G} \underline{C} = {}^b \underline{C} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \underline{G}^{F^{-1}} &= F_{\triangleright}(\underline{G}) = \underline{F}^{-*} \underline{G} \underline{F}^{-1} = \underline{g} \underline{F}^{-T} \underline{F} - 1 = \underline{g} \underline{F}^{-T} \underline{F}^{-1} \\ &= {}^b \underline{B}^{-1} = {}^b (\underline{B}^{-1}) = (\underline{B}^\sharp)^{-1} \end{aligned} \quad (6.29)$$

où l'on renvoie à la section 12.2.4 pour l'établissement de ces transports. Il apparaît que le tenseur de Cauchy-Green gauche  $\underline{C}$  est le pendant lagrangien de la métrique spatiale, son image réciproque (*pull-back*). La contrepartie eulérienne de la métrique matérielle, quant à elle, est donc l'inverse du tenseur de Cauchy-Green droit, son image directe (*push-forward*). Ces résultats mettent l'accent sur l'interprétation en termes de métriques de ces tenseurs de déformation.

On en vient à la définition des histoires de déformations eulérienne et lagrangienne. L'histoire du gradient de la transformation  $\underline{F}(\tau)$ ,  $-\infty \leq \tau \leq t$  est mesurée par rapport à la configuration de référence  $\kappa_0$ . L'histoire eulérienne est définie, comme sur la figure 6.4, de la manière suivante :

$$\underline{F}_t(\underline{x}, \tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{x}}(\Phi_t^{-1}(\underline{x}), \tau) = \underline{F}(\Phi_t^{-1}(\underline{x}), \tau) \underline{F}^{-1}(\underline{x}, t) \quad (6.30)$$

20. ou plus précisément du tenseur de Kirchhoff  $J \underline{\sigma}$ .

où les notations suivantes ont été utilisées :

$$\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t) = \Phi_t(\underline{X}), \quad \underline{X} = \Phi_t^{-1}(\underline{x}), \quad \tilde{\underline{F}}(\tilde{\underline{X}}, \tau) = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, \tau)$$

En abrégé, au point matériel considéré, on a défini

$$\underline{F}_t(\tau) = \tilde{\underline{F}}(\tau) \underline{F}^{-1}(t) \quad (6.31)$$

Les jeux de variables lagrangiennes et eulériennes pouvant être utilisés comme arguments de la loi de comportement sont consignés dans le tableau 6.2. Le transport des tenseurs de structure<sup>21</sup>  $\mathfrak{T}$  dans la configuration eulérienne à  $t$  donne lieu aux tenseurs  $\mathfrak{T}^{F^{-1}}$  mobilisables pour la formulation de la loi de comportement eulérienne.

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer la loi de comportement eulérienne en faisant appel au jeu adapté de variables eulériennes du tableau 6.2 :

**Théorème 18 (Loi de comportement eulérienne)** *La loi de comportement viscoélastique héréditaire eulérienne est de la forme :*

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{C}_t(\tau); \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}^{F^{-1}}) \quad (6.32)$$

ou de manière plus explicite

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{C}_t(\tau); \underline{g}, \overset{\circlearrowleft}{\underline{\mathcal{O}}}, \underline{B}(t), \det \underline{F}, \mathfrak{T}^{F^{-1}}) \quad (6.33)$$

où l'*histoire eulérienne des déformations* est définie par

$$\underline{C}_t(\tau) = \tilde{\underline{F}}_t^T(\tau) \cdot \underline{F}_t(\tau) \quad (6.34)$$

**Preuve.** On a vu précédemment que le transport de  $\underline{G}$  dans  $\kappa_t$  fournit  $\underline{B}^{-1}$ , remplacé par  $\underline{B}$  par simplicité dans la fonctionnelle. Le transport du tenseur d'orientation lagrangien dans  $\kappa_t$  conduit à la présence de  $\det \tilde{\underline{F}}^{-1}$  ou, de manière équivalente  $\det \tilde{\underline{F}}$ . Les tenseurs de structures lagrangiens ont également été transportés. Il reste à établir la présence des tenseurs  $\underline{C}_t(\tau)$ . Chaque configuration  $\kappa_\tau$  à l'instant  $\tau$  est caractérisée par une métrique propre,  $\underline{g}_\tau$  dont il s'agit de garder la trace dans la configuration  $\kappa_t$  par des transports adéquats à l'aide de l'agent de transport  $\underline{F}_t(\tau)$ . Pour ce faire, un recours à la notation indicelle est utilisé. On part des composantes  $g_{\alpha\beta}^\tau$  de la métrique à l'instant  $\tau$ , où les indices  $I, \alpha, i$  font référence aux repères sur les configurations à  $t_0, \tau$  et  $t$ , respectivement. On multiplie de part et d'autre l'expression précédente par les transports adéquats pour se ramener aux indices eulériens :

$$\underline{F}_t^*{}_i{}^\alpha(\tau) g_{\alpha\beta}^\tau \underline{F}_t{}^\beta{}_j(\tau)$$

qui n'est autre que la quantité

$$\tilde{\underline{F}}_t^*(\tau) \underline{g}_\tau \tilde{\underline{F}}_t(\tau) = \tilde{\underline{F}}_t^T(\tau) \underline{F}_t(\tau) = \tilde{\underline{g}} \underline{C}_t(\tau)$$

comme on peut s'en rendre compte en se rapportant au diagramme commutatif ci-

---

21. Les tenseurs de structure  $\mathfrak{T}$  transportés dans la configuration eulérienne à  $t$  :

$$\mathfrak{T}(d\underline{X}_1, d\underline{X}_2, \dots) = \mathfrak{T}(\underline{F}^{-1} dx_1, \underline{F}^{-1} dx_2, \dots) = \mathfrak{T}^{F^{-1}}(dx_1, dx_2, \dots)$$

dessous :

$$\begin{array}{ccc} E_t^* & \xleftarrow{\tilde{\mathbf{F}}_t^*(\tau)} & E_\tau^* \\ \tilde{\mathbf{g}} \uparrow & & \uparrow \tilde{\mathbf{g}}_\tau \\ E_t & \xleftarrow[\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau)]{} & E_\tau \end{array}$$

□

La dépendance par rapport à l'espace matériel est présente au travers des éléments de  $\mathfrak{T}_{\kappa_0}$  dans l'expression (6.33). La présence du tenseur d'orientation spatial et du déterminant du gradient de la transformation, i.e.  $J = \rho_0/\rho$  ont pour origine le transport du tenseur d'orientation matériel. On a de même le

**Théorème 19 (Loi de comportement lagrangien)** *La loi de comportement viscoélastique héréditaire lagrangienne est de la forme :*

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}}(t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{C}}(\tau); \mathcal{S}^F, \mathcal{S}_{\kappa_0}) \quad (6.35)$$

ou de manière plus explicite

$$\tilde{\boldsymbol{\Pi}}(t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{C}}(\tau); \quad \tilde{\mathbf{C}}(t), \quad \det \tilde{\mathbf{F}}, \quad \tilde{\mathbf{G}}, \quad \tilde{\mathcal{O}}_L, \quad \tilde{\mathfrak{T}}) \quad (6.36)$$

où l'*histoire lagrangienne des déformations* est décrite par

$$\tilde{\mathbf{C}}(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}^T(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \quad (6.37)$$

La preuve, similaire au cas précédent, est laissée au lecteur. On utilisera en particulier la définition (6.37) dans sa version en composantes covariantes :

$$C_{IJ}(\tau) = F_I^{*\alpha}(\tau) G_{\alpha\beta}^\tau F_J^\beta(\tau) = G_{IK} F^{TK}{}_\alpha(\tau) F^\alpha{}_J(\tau)$$

### 6.3.5 Covariance de la loi de comportement

La loi de comportement (6.33) jouit d'une propriété d'invariance par rotation en vertu du principe d'isotropie de l'espace invoqué au paragraphe 6.3.1.

$$\boldsymbol{\sigma}^Q(t) = \mathcal{F}\left(\mathbf{C}_t^Q(\tau); \quad \mathbf{B}^Q(t), \quad \det \mathbf{F}(t), \quad (\tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}})^Q\right), \quad \forall Q \in SO(E) \quad (6.38)$$

De manière équivalente, cette propriété traduit l'invariance de la loi dans les changements de bases orthonormées directes indépendants du temps. Autrement dit, la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est **isotrope (hémitrope)** si le tenseur d'orientation, hérité de la matière, joue effectivement un rôle dans la loi de comportement par rapport à tous ses arguments. Le tenseur métrique et le tenseur d'orientation ont été omis car il ne sont pas affectés par une rotation :  $\mathbf{g} = \mathbf{Q}^T \mathbf{g} \mathbf{Q}$ . L'application d'une rotation  $\mathbf{Q}$  ( $\det \mathbf{Q} = 1$ ), indépendante du temps, ou, de manière équivalente, d'un changement de BON directe, se traduisent de la manière suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \longrightarrow \mathbf{Q} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Q}^T, \quad \tilde{\mathbf{F}}(t) \longrightarrow \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{F}}(t), \quad \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T \longrightarrow \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{Q}^T$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) \longrightarrow \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) \mathbf{Q}^T, \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) \longrightarrow \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) \mathbf{Q}^T$$

grandeur	eulérienne	lagrangienne
contraintes	$J\sigma$	
déformations	$C_t(\tau)$	$C(\tau) = \mathbf{F}^T(\tau)\mathbf{F}(\tau)$
espace	$g$	
matière		$\begin{matrix} G \\ \circlearrowleft \\ \mathcal{O}_L \\ \mathfrak{T} \end{matrix}$

grandeur	eulérienne	lagrangienne
contraintes	$J\sigma = \boldsymbol{\Pi}^{F^{-1}}$	$\boldsymbol{\Pi} = J\sigma^F = \mathbf{F}^{-1}J\sigma\mathbf{F}^{-T}$
déformations	$C_t(\tau)$	$C(\tau) = \mathbf{F}^T(\tau)\mathbf{F}(\tau)$
espace	$g$	$g^F = \mathbf{F}^*g\mathbf{F} = {}^\flat C(t)$
matière	$G^{F^{-1}} = \mathbf{F}^{-*}G\mathbf{F}^{-1} = B^{\sharp-1}(t)$ $\circlearrowleft \mathcal{O}_L^{F^{-1}} = (\det \mathbf{F}^{-1}(t)) \circlearrowleft \mathcal{O}$ $\mathfrak{T}^{F^{-1}}$	$\begin{matrix} G \\ \circlearrowleft \\ \mathcal{O}_L \\ \mathfrak{T} \end{matrix}$

Tableau 6.2: Les jeux eulérien et lagrangien de variables de la loi de comportement. Les variables originelles de la modélisation sont indiquées en bleu dans le tableau du haut et la transmutation de ces variables dans les espaces matériel ou physique respectifs est consignée dans le tableau du bas.

On dit que la loi de comportement est *covariante*<sup>22</sup>. Cette propriété d'invariance de la loi eulérienne se transfère à la loi lagrangienne (6.36) par transmutation.

La loi de comportement est une *relation tensorielle entre tenseurs*, il est donc possible de l'exprimer dans n'importe quelle base

$$\sigma^M(t) = \mathcal{F}^M \left( (C_t(\tau))^M; \quad G^M, \quad \circlearrowleft \mathcal{O}^M, \quad B^M(t), \quad \det \mathbf{F}^M, \quad \left( \mathfrak{T}^{F^{-1}} \right)^M \right) \quad (6.39)$$

$\forall M \in GL(E)$ , mais la fonctionnelle ne garde généralement pas la même forme comme l'indique symboliquement l'exposant  $M$  dans l'expression précédente, en raison par exemple du changement de métrique occasionné. Les formules de changement de bases permettent effectivement d'écrire la loi de comportement par rapport à n'importe quelle base, dès lors qu'elle a été identifiée dans une certaine base.

Les fonctions polynomiales sont des exemples de lois satisfaisant à cette exigence de covariance. Ce ne sont pas les seules et nous aurons besoin de théorèmes de représentation des fonctions tensorielles, dont quelques-uns, les plus élémentaires, sont donnés et

22. Le terme est emprunté à la covariance générale exigée dans la théorie de la relativité générale d'Einstein, c'est-à-dire l'invariance des lois par changements de coordonnées (difféomorphismes) (Weinberg, 1972; Misner et al., 1973) p. 296. Les changements de base considérés ici au point matériel sont limitées aux rotations indépendantes du temps.

démontrés dans l'annexe 12.5. A ce stade, la complexité du jeu de variables et du caractère fonctionnel de la loi ne permet pas d'espérer l'existence d'un tel théorème livrant la forme plus précise de la loi. Il faut poursuivre l'identification de classes de comportement par l'exploitation de la connaissance des symétries matérielles réalisée dans la section suivante. L'exigence de covariance conduit à de fortes restrictions sur la forme de  $\mathcal{F}$ . C'est le fait de considérer le jeu complet des variables, pas seulement l'histoire de déformation mais également les tenseurs de structure, qui donne accès à la richesse des comportements. Les oublier ou en oublier certains restreint les classes de lois possibles. L'intérêt de travailler, en mécanique des matériaux, sur des lois covariantes par rapport à un jeu de variables comportant des tenseurs de structure a été souligné par (Boehler, 1978; Boehler, 1987).

### 6.3.6 Mise en évidence de la propriété d'indifférence matérielle

Il se trouve que la loi de comportement (6.33) s'avère également invariante par superposition d'un mouvement de corps rigide. En effet, l'application du mouvement de corps rigide se traduit par la superposition d'une rotation dépendant du temps,  $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$  :

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) \longrightarrow \tilde{\mathbf{Q}}(\tau)\tilde{\mathbf{F}}(\tau), \quad \tilde{\mathbf{B}}(t) \longrightarrow \tilde{\mathbf{Q}}(t)\tilde{\mathbf{B}}(t)\tilde{\mathbf{Q}}^T(t)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) \longrightarrow \tilde{\mathbf{Q}}(\tau)\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau)\tilde{\mathbf{Q}}^T(t), \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) \longrightarrow \tilde{\mathbf{Q}}(t)\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)\tilde{\mathbf{Q}}^T(t)$$

où l'histoire  $\tilde{\mathbf{Q}}(\tau)$  disparaît purement et simplement dans la dernière expression. L'application de la covariance avec la rotation  $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$ , à  $t$  fixé, conduit alors à la même valeur de la contrainte  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) \longrightarrow \tilde{\mathbf{Q}}(t)\boldsymbol{\sigma}(t)\tilde{\mathbf{Q}}^T(t)$ .

De manière équivalente, elle présente la propriété d'invariance par changement de référentiel euclidien (2.3) (du moins pour les référentiels conservant l'orientation, l'élargissement aux référentiels quelconques dépendant de l'influence effective ou non du tenseur d'orientation dans la loi<sup>23</sup>).

Ces propriétés d'invariance définissent le concept d'**indifférence matérielle**. La propriété d'indifférence matérielle a été érigée en principe fondamental dans (Truesdell and Noll, 1965a). Ce n'est pourtant pas un principe fondamental de la physique des milieux continus mais on voit que c'est une propriété de la loi de comportement qui résulte de l'application du principe d'isotropie de l'espace à la loi de comportement formulée avec le jeu de variables considéré.

On n'exclut donc pas l'existence de lois de comportement dont la forme dépend du référentiel d'observation et qui devront être formulées en priorité par rapport au référentiel galiléen. De telles lois sont mentionnées dans la littérature, notamment en théorie cinétique des gaz (ordres supérieurs uniquement), et en théorie de la turbulence. Elles doivent reposer sur un jeu de variable élargi par rapport aux arguments considérés dans ce cours.

## 6.4 Respect des symétries matérielles

On exploite ici les propriétés d'invariance de configuration de la matière définie au paragraphe 6.3.2. Pour cela les propriétés de symétrie<sup>24</sup> de la matière sont passées au crible

23. Si l'inversion est un élément du groupe de symétrie matérielle, l'indifférence matérielle s'étend aux changements de référentiels quelconques.

24. Was schließlich die allgemeinen mit der Publikation dieser Vorlesungen verfolgten Ziele angeht, so wünschte ich zum ersten, damit auf den Wert der Symmetriebetrachtungen für den Unterricht in der Physik aufmerksam zu machen. Ich glaube in der Tat, daß Vorlesungen ähnlichen Inhalts, in gleichviel wie bescheidenem Umfange, jedem theoretisch-physikalischen Kursus eingegliedert werden sollten. Von den verstorbenen Professor P. Curie weiß ich durch persönliche Mitteilung, daß er auf dergleichen Vorträge Wert legte, und das

de façon à classer les matériaux en fonction de leur groupe d'invariance de configuration (également appelé groupe de symétrie ou groupe de parité du matériau).

Le nombre d'éléments du groupe des symétries matérielles dépend de la classe cristallographique particulière concernée. Pour les corps isotropes (resp. hémitrope),  $\mathfrak{G}_{\kappa_0}$  coïncide avec le groupe (spécial) orthogonal tout entier. Les matériaux dits isotropes transverses présentent un axe de symétrie privilégié. Les autres groupes (c cubique, orthotrope...) sont des groupes finis ou discrets (nombre fini de symétries).

Le lien qui existe entre les groupes des symétries matérielles d'un même corps matériel par rapport à deux configurations de référence distinctes est donné par le

**Théorème 20 (Règle de Noll)** *Si  $\kappa_0$  et  $\hat{\kappa}_0$  sont deux configurations d'un corps matériel et si  $\tilde{Z}$  caractérise le passage de  $\kappa_0$  vers  $\hat{\kappa}_0$ , alors*

$$\mathfrak{G}_{\hat{\kappa}_0} = \tilde{Z} \cdot \mathfrak{G}_{\kappa_0} \cdot \tilde{Z}^{-1} \quad (6.40)$$

On dit que  $\mathfrak{G}_{\hat{\kappa}_0}$  est le transmué de  $\mathfrak{G}_{\kappa_0}$  par  $Z$ .

**Preuve.** On insiste sur le fait que  $\tilde{Z}$ , application linéaire de  $E_0$  vers  $\hat{E}_0$ , n'est pas nécessairement une symétrie matérielle. Pour tout élément  $\tilde{H} \in \mathfrak{G}_{\kappa_0}$ , on va montrer que  $\tilde{Z} \cdot \tilde{H} \cdot \tilde{Z}^{-1}$  est dans  $\mathfrak{G}_{\hat{\kappa}_0}$ . Soit  $A \in \mathfrak{T}_{\kappa_0}$ , un tenseur de structure. Pour fixer les idées, considérons que  $A$  est un tenseur de structure d'ordre 2 (2-fois contravariant). Il s'ensuit que  $\hat{A} = A^{Z^{-1}} = ZAZ^T \in \mathfrak{T}_{\hat{\kappa}_0}$ , d'après (6.11). Soit  $H \in \mathfrak{G}_{\kappa_0}$ . On calcule alors

$$\hat{A}^{(ZHZ^{-1})^{-1}} = ZHZ^{-1}\hat{A}Z^{-T}H^TZ^T = ZHAH^TZ^T = (A^{H^{-1}})^{Z^{-1}} = (A)^{Z^{-1}} = \hat{A}$$

ce qui montre que  $\tilde{Z} \cdot A \cdot \tilde{Z}^{-1} \in \mathfrak{G}_{\hat{\kappa}_0}$ .  $\square$

Le groupe des symétries matérielles dépend bel et bien de la configuration par rapport à laquelle on étudie les propriétés de symétrie. Pour s'en convaincre, on peut penser à nouveau à un cristal où les atomes sont rangés sur un réseau cubique, et qui présente donc les symétries associées à ce système. En déformant élastiquement le matériau selon un axe de symétrie on change la distance inter-atomique selon cette direction et on brise donc quelques symétries au passage. On rappelle qu'il existe une configuration privilégiée,  $\kappa_L$  dite ici lagrangienne telle que le groupe de symétrie matérielle est un sous-groupe du groupe unimodulaire.

On peut vérifier que le groupe des symétries matérielles est inchangé lorsque le changement de configuration est une homothétie  $Z = \alpha \mathbf{1}$ ,  $\alpha \neq 0$  ou si  $H \in \mathfrak{G}_{\kappa_0}$ .

Le groupe d'invariance de configuration est un outil pour classer les types de comportement, comme on va le voir au paragraphe 6.4.1.

#### 6.4.1 Une définition des fluides et des solides

Les mots solide et fluide ont d'abord un sens physique lié à la nature des forces cohésives entre atomes ou molécules qui constituent la phase en présence ou à l'arrangement local de ces particules. En mécanique, on n'a pas forcément accès à la structure physique intime de la matière étudiée et on peut essayer plutôt de détecter le caractère fluide ou solide par les manifestations phénoménologiques de la réponse mécanique à des chargements variés. Ce n'est pas toujours évident de trancher, comme le suggère la figure 6.5... La définition que l'on va proposer ici, si elle n'est pas en contradiction avec la notion physique, s'en distingue puisqu'elle ne fait référence qu'à la réponse macroscopique du corps étudié et non à la microstructure précise du matériau.

---

neue Buch von Bouasse (*Cours de Physique, VI. Partie, Etudes des Symétries*, Paris, 1909) beweist, daß man anderwärts in derselben Richtung systematisch vorgeht. (Voigt, 1966), Préface de 1911.

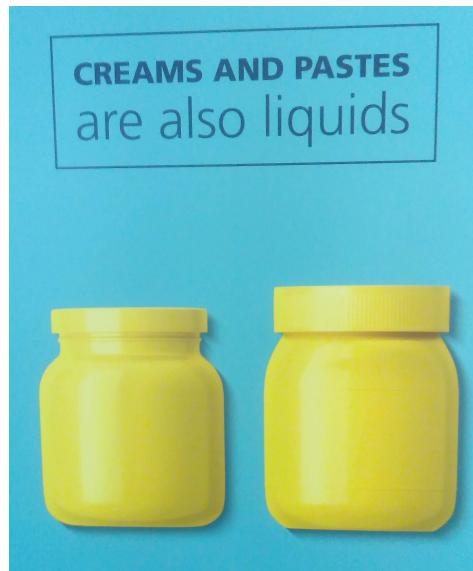


Figure 6.5 : Affiche située dans un aéroport avant le contrôle des bagages aux rayons X.  
Une terminologie discutable...

On propose de classer les corps matériels selon la nature de leur groupe d'invariance de configuration  $\mathfrak{G}_{\kappa_L}$ . Lorsqu'on évoque la notion de symétrie, on pense immédiatement aux solides cristallins pour lesquels les atomes ou molécules sont rangés selon un ordre quasiment parfait présentant des symétries spécifiques. La cristallographie nous enseigne qu'il existe 32 groupes de symétrie (ponctuelle<sup>25</sup>) que l'on peut regrouper en 6 systèmes rassemblés dans le tableau 6.3<sup>26</sup>.

On mentionne quelques exemples de classes de comportements caractérisées par :

- $\mathfrak{G}_{\kappa_L} = \{\mathbb{1}\}$  : un tel matériau est dit *pseudo-triclinique*
- ...
- $\mathfrak{G}_{\kappa_L} = SO(E)$  : un tel matériau est dit *hémitrope*

D'après (Zheng, 1994), les tenseurs de structure s'expriment alors uniquement en fonction du tenseur métrique et du pseudo-tenseur d'orientation. En notant que  $\mathbf{G}^{F^{-1}} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{B}^{\sharp-1}$ , on obtient la loi eulérienne du matériau hémitrope :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F} \left( \underline{\mathcal{C}}_t(\tau), \underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathcal{Q}}, \underline{\mathcal{B}}(t), \det \underline{\mathbf{F}}(t) \right) \quad (6.41)$$

où la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est isotrope par rapport à tous ses arguments (hémitrope si le tenseur d'orientation joue effectivement un rôle dans la loi de comportement).

On voit que le nombre de tenseurs de structure s'est considérablement réduit par rapport à la loi générale anisotrope (6.33).

- $\mathfrak{G}_{\kappa_L} = \mathcal{U}(E)$  : on parlera dans ce cas, on va le voir, de matériau *hémi-fluide*

Il est loisible ensuite de vérifier l'invariance de la loi par inversion —  $\mathbb{1}$  (symétrie centrale) pour obtenir, le cas échéant, les milieux *tricliniques*, ..., *isotropes* et *fluides*.

25. On renvoie au cours de l'Ecole des Mines (Phan and Podvin, 2003).

26. Les classes de symétrie données dans le tableau 6.3 portent les mêmes noms que les systèmes de réseaux cristallographiques que l'on appelle dans ce cours groupes cristallographiques.

Ces réflexions nous incitent à proposer la

**Définition.** Un corps matériel est un **solide** s'il vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. Il existe un trièdre directeur orthonormé privilégié  $\mathcal{B}_L$
2. Ce trièdre est associé à une configuration de référence privilégiée  $\kappa_L$ , dite sans distorsion, telle que son groupe de symétrie matérielle soit un sous-groupe du groupe spécial orthogonal :  $\mathfrak{G}_L \subset SO(E)$ . Une telle configuration locale sans distorsion existe toujours pour un solide. C'est l'apanage du solide que de posséder une telle classe de configurations de référence privilégiées.
3. Les propriétés de symétrie de la matière sont associées aux tenseurs de structure  $\mathfrak{T}$  construits à partir des vecteurs du trièdre directeur.
4. La loi de comportement eulérienne par rapport à cette configuration s'écrit :

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{C}_t(\tau); \underline{g}, \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \underline{\mathcal{B}}(t), \det \underline{F}, \underline{\mathcal{T}}^{F^{-1}(t)}) \quad (6.42)$$

où la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est isotrope par rapport à tous ses arguments (hémitrope si le tenseur d'orientation joue effectivement un rôle dans la loi de comportement).

Noter que pour une configuration  $\kappa_1$  biaisée par rapport à  $\kappa_L$  (i.e. avec distorsion), le groupe des symétries matérielles  $\mathfrak{G}_{\kappa_1}$  sera donné par la règle de Noll (6.40) et ne sera en général pas inclus dans le groupe orthogonal. Il s'agit néanmoins toujours du même solide. Exception : le groupe des symétries matérielles d'un solide triclinique ne dépend pas de la configuration de référence puisque le groupe triclinique est invariant par la règle de transmutation.

Le groupe des symétries matérielles d'un corps peut contenir et être plus grand encore que le groupe orthogonal. Toutefois, le théorème 34 de maximalité de Noll (page 338) indique qu'alors ce ne peut être que le groupe unimodulaire tout entier. Cela signifie que le corps est insensible à tous les changements de forme conservant le volume. C'est l'idée que l'on peut se faire d'un fluide dont le comportement est inchangé quand on le change de récipient, par opposition aux solides précédents dont les propriétés de symétrie changent lorsque le solide change de forme. C'est pourquoi on propose la

**Définition.** Un corps matériel est un **fluide** s'il vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. Il existe un, deux voire un trièdre de directeurs privilégiés  $\mathcal{B}_0$  non nécessairement orthonormé.
2. On choisit une configuration de référence  $\kappa_0$  caractérisée par sa masse volumique,  $\rho_0$ .
3. Le fluide est héli/isotrope ou anisotrope par rapport aux tenseurs de structure  $\overset{\circ}{\mathcal{O}}_L, \mathcal{B}_0$ .
4. Sa loi de comportement eulérienne est de la forme

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{C}_t(\tau); \underline{g}, \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \rho_0, \det \underline{F}, \mathcal{B}_0^{F^{-1}(t)}) \quad (6.43)$$

où la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est isotrope par rapport à tous ses arguments.

Il faut remarquer que, par rapport à la loi solide (6.42), la métrique matérielle a disparu. Le caractère fluide est affirmé par l'absence de la métrique lagrangienne quel que soit le groupe de symétrie. La référence à une masse volumique choisie  $\rho_0$  ne peut pas être éliminée quant à elle.

On distingue le cas des **fluides hémitropes** pour lequel

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E)$$

Un fluide hémitrope a la propriété remarquable suivante. Son groupe des symétries matérielles est le même quelle que soit la configuration de référence. En d'autres termes, un fluide ne possède pas de configuration de référence privilégiée. C'est pourquoi l'approche eulérienne est préférée pour l'étude des écoulements de fluides.

Dans un fluide hémitrope, le trièdre directeur peut être distordu et réactualisé à volonté. Sa loi de comportement eulérienne se réduit à

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{C}_t(\tau); \underline{g}, \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \rho_0, \det \underline{F}) \text{ et } \mathcal{F} \text{ isotrope} \quad (6.44)$$

Les tenseurs de structure matérielle ont disparu à l'exception de  $\rho_0$  et  $\det \underline{F}$ . Le cas des **fluides isotropes** est caractérisé par des lois de la forme

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{C}_t(\tau); \underline{g}, \rho_0, \det \underline{F}) \text{ et } \mathcal{F} \text{ isotrope} \quad (6.45)$$

On peut se demander s'il existe des matériaux isotropes dont le groupe d'invariance de configuration est inclus dans mais distinct du groupe unimodulaire  $\mathcal{U}(E)$ . La réponse est non d'après le théorème 34 (page 338). Il existe cependant des fluides dont le groupe de symétrie possède des éléments dans  $SO(E)$  et des éléments non orthogonaux à déterminant égal à un. De tels corps sont appelés **fluides anisotropes** ou, de manière imagée **cristaux liquides** ou semi-fluides (Wang, 1965; Coleman, 1965). Ils possèdent un ou deux directeurs (le cas de 3 directeurs ramène au solide), directions ou plans privilégiés de la microstructure comme dans les cristaux liquides proprement dits ou les fluides chargés de fibres. Les fluides anisotropes sont en fait omniprésents. Il suffit d'imaginer par exemple une résine fluide contenant des fibres de verre ou du béton chargé de fibres d'acier avant la prise du ciment. L'écoulement de tels fluides chargés est important en mise en forme des composites<sup>27</sup>.

Les différents groupes de symétrie et les différentes classes de corps matériels envisagés sont représentés sur la figure 6.6.

## 6.5 Loi de comportement thermomécanique

### 6.5.1 Variables thermomécaniques

Le flux de chaleur courant est donné par l'action du vecteur flux de chaleur sur un élément de surface :

$$\underline{q}(\underline{x}, t) = q^i \underline{e}_i, \quad \underline{q} \cdot \underline{n} = q^i n_i \quad (6.46)$$

Le vecteur flux de chaleur matériel (lagrangien) est obtenu par transport sur la configuration de référence :

$$\underline{Q} := J \underline{F}^{-1} \cdot \underline{q} = Q^I \underline{E}_I = J F^{-1I}{}_j q^j \underline{E}_I \quad (6.47)$$

Ces vecteurs conduisent au même flux de chaleur à travers l'élément de surface matériel :

$$\underline{q} \cdot \underline{n} \, ds = \underline{Q} \cdot \underline{N} \, dS = dh \quad (6.48)$$

---

27. Les *Sheet Molding Compounds (SMC)* sont des composites à fibres de verre et à matrice polymères. Ils sont aujourd'hui très utilisés dans l'automobile pour leur légèreté et la possibilité de réaliser des pièces aux formes complexes. En service, ces matériaux sont des solides (anisotropes) mais lors de leur élaboration dans des moules spéciaux à haute température, il s'agit de fluides anisotropes. L'écriture de lois de comportement pour de tels milieux est un enjeu essentiel pour établir la faisabilité des pièces.

système	forme de la cellule représentative	groupe ponctuel (notation cristallographique)	nombre de constantes indépendantes d'un tenseur d'ordre 2	nombre de constantes indépendantes d'un tenseur d'ordre 4
triclinique	parallélépipède quelconque	$\bar{1}$	6	21
monclinique	prisme droit à base quelconque	$\frac{2}{m}$		13
orthorhombique (orthotrope)	prisme droit à base rectangle	$m\bar{m}m$	9	
quadratique	prisme droit à base carrée	$\frac{4}{m}mm$	3	6
hexagonal	prisme droit à base losange	$\frac{6}{m}\bar{m}m$ (mode P) $\bar{3}m$ (mode R)	2	5
cubique	cube	$m\bar{3}m$	1	3
isotope	-	$GO(E) (\infty/\infty mm)$	1	2

Tableau 6.3: Systèmes cristallographiques. En cristallographie ces classes sont appelées groupes de symétrie ponctuelle des réseaux (cf. (Phan and Podvin, 2003)). La classe d'isotropie est ajoutée ici de manière abusive. On donne aussi le nombre de composantes indépendantes de propriétés physiques tensorielles d'ordre 2 et 4 selon les classes de symétrie. Ce dernier point sera discuté en détail au chapitre 8.

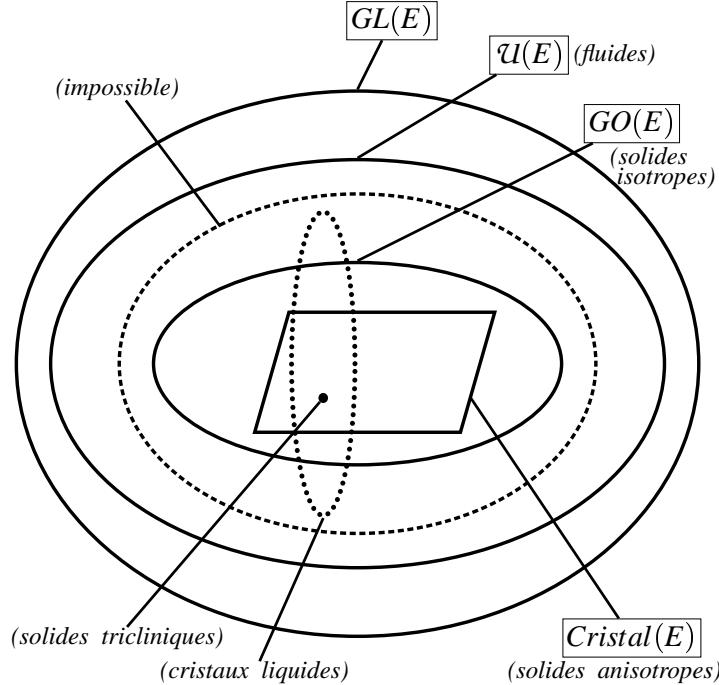


Figure 6.6 : Les sous-groupes du groupe linéaire et les groupes de symétries matérielles, d'après (Bertram, 2012).

La température d'un point matériel à l'instant courant est

$$T(\underline{x}, t) = \check{T}(\underline{X}, t)$$

où l'on a distingué les représentations eulérienne et lagrangienne du champ de température. Les gradients matériel et spatial du champ de température sont les formes linéaires suivantes :

$$\underline{\mathbf{G}}(\underline{X}, t) := G_I \underline{\mathbf{E}}^I = \frac{\partial \check{T}}{\partial X^I} \underline{\mathbf{E}}^I, \quad \underline{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) := g_i \underline{\mathbf{e}}^i = \frac{\partial T}{\partial \underline{x}^i} \underline{\mathbf{e}}^i \quad (6.49)$$

$$\underline{\mathbf{g}}(t) = \underline{\mathbf{G}}(t) \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}(t) = \underline{\mathbf{F}}^{-T}(t) \cdot \underline{\mathbf{G}}(t) = G_J F^{-1J}_i \underline{\mathbf{e}}^i = F_i^{-TJ} G_J \underline{\mathbf{e}}^i \quad (6.50)$$

On verra au paragraphe 6.6.2 que la dissipation thermique vaut

$$-\frac{1}{T} \underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{g}} = -\frac{1}{T} q^i g_i = -\frac{1}{JT} Q^I F^i{}_I G_K F^{-1K}_i = -\frac{1}{JT} Q^I G_I = -\frac{1}{JT} \underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{G}} \quad (6.51)$$

L'histoire du gradient de température par rapport à la configuration courante est

$$\underline{\mathbf{g}}_t(\tau) := \underline{\mathbf{G}}(\tau) \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}(t), \quad g_{ti}(\tau) = G_I(\tau) F^{-1I}_i(t) \quad (6.52)$$

C'est l'histoire eulérienne de température. L'histoire lagrangienne quant à elle est la collection des  $\underline{\mathbf{G}}(\tau)$ .

Ces nouveaux arguments entrent dans la formulation thermomécanique de la loi eulérienne des contraintes :

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(T(\tau), \underline{g}_t(\tau), \underline{C}_t(\tau); \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}^{F^{-1}}) \quad (6.53)$$

où la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est isotrope par rapport à tous ses arguments. Il faut y ajouter la

### 6.5.2 Formulation de la loi de conduction thermique

La loi de conduction eulérienne d'un milieu déformable, étudié par rapport à la configuration locale  $\kappa_0$ , prend la forme

$$\underline{q}(t) = \mathcal{G}(T(\tau), \underline{g}_t(\tau), \underline{C}_t(\tau); \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}^{F^{-1}}) \quad (6.54)$$

où la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  est isotrope par rapport à tous ses arguments. La présence de l'histoire de déformation dans cette loi traduit l'influence du changement de forme sur le flux de chaleur, le gradient de température et sur les propriétés de conductivité thermique, en raison du couplage thermomécanique.

La loi de comportement (6.54) est une fonctionnelle (pseudo)-tensorielle liant les tenseurs impliqués. La classification des matériaux conducteurs thermiques se fait comme pour la loi mécanique en fonction du groupe d'invariance de configuration  $\mathfrak{G}_{\kappa_0}$ .

## 6.6 Le crible de la thermodynamique des milieux continus

Le dernier crible au travers duquel devra passer la loi de comportement est celui de la thermodynamique (Fer, 1970; Müller, 1985; Fargue, 2004a).

La température intervient à divers titres dans le **comportement thermomécanique des matériaux** :

- Elle induit des déformations et/ou des contraintes au sein de l'élément de matière. Les variations de température entraînent une dilatation ou une contraction de l'élément de matière. Si l'on empêche le corps matériel de se dilater librement, des contraintes considérables se développent en son sein. Il s'agit des **contraintes d'origine thermique** qui jouent un rôle essentiel dans la plupart des structures et des composants industriels.
- C'est un paramètre dont dépendent les propriétés élastiques, visqueuses et plastiques des matériaux. En général, la raideur, la viscosité et la limite d'élasticité diminuent avec la température.
- D'autre part la température intervient dans le problème dit de thermique posé par l'équation de conservation de l'énergie (cf. table 3.2). La question du décompte des inconnues et des équations se pose aussi pour le problème thermique. Les inconnues sont au nombre de 5 en chaque point matériel. Il s'agit de la température  $T$ , du flux de chaleur  $\underline{q}$  et de l'énergie interne massique  $e$ . Les sources extérieures de chaleur  $r$  sont supposées connues, en tant que données du problème thermique. Une seule équation de champ est disponible, la conservation l'énergie. Le problème de fermeture se pose donc de la même façon dans le cas thermique que dans le cas mécanique. Une **loi de comportement thermique** liant le flux de chaleur au champ de température caractérisant les échanges de chaleur au sein du milieu continu, est nécessaire, ainsi qu'une autre liant énergie interne et température. Ces lois ne sont pas universelles et dépendent du matériau étudié. Un gradient de température imposé ne conduit pas au même flux de chaleur dans un fil de cuivre que dans un fil d'alumine. De telles lois doivent respecter les mêmes principes fondamentaux que les lois de comportement mécanique.
- On notera le **couplage thermomécanique** entre les problèmes mécanique et thermique. En général, déformer un corps conduit à une variation de température de

celui-ci dans un sens ou dans l'autre suivant les mécanismes de déformation en jeu. Dans de nombreux cas, le problème mécanique est résolu en supposant le champ de température connu par ailleurs. Inversement, on résout souvent le problème thermique en négligeant le couplage avec la mécanique ou bien en supposant les champs de contraintes et de vitesses connus.

L'ensemble des 5 équations de conservation et des 10 équations de comportement constituent le **problème thermomécanique** qui consiste à déterminer les 15 inconnues que sont la densité, la vitesse, les contraintes, la température, le flux de chaleur et l'énergie interne en chaque point matériel du corps étudié. Dans cette section comme dans les précédentes, on s'en tient toutefois à des considérations attachées à l'élément de volume de matière.

### 6.6.1 Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique des milieux continus se traduit par l'équation de conservation de l'énergie qui, dans sa forme locale, s'écrit :

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} - \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} + \rho r$$

d'après (3.89). En plus du couplage avec la mécanique via la puissance des efforts intérieurs, elle fait intervenir la densité d'énergie interne  $e$  et le flux de chaleur  $\underline{\boldsymbol{q}}$ . L'inconnue principale de cette équation est alors la température  $\check{T}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$  au point matériel  $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$  à l'instant  $t$ . On ne peut espérer résoudre le problème thermomécanique qu'à condition de disposer, en plus de la loi de comportement mécanique (6.53) et de la loi de conduction thermique (6.54), de la relation thermodynamique liant l'énergie libre à l'histoire du matériau représentée par la transformation  $\Phi$  et la température en chaque point matériel à tout instant passé et présent :

$$e(\underline{\boldsymbol{x}}, t) = \mathcal{E}(T(\tau), \underline{\boldsymbol{g}}_t(\tau), \underline{\boldsymbol{C}}_t(\tau); \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}^{F^{-1}}) \quad (6.55)$$

par rapport à une configuration locale de référence  $\kappa_0$ . C'est une fonction scalaire (pseudo-)tensorielle de ses arguments.

Comme dans le cas mécanique, on s'intéresse aux milieux dits matériellement simples pour lesquels, l'énergie interne et le flux de chaleur en un point matériel ne dépendent *a priori* que de la transformation et de la température, et de leur premier gradient. Les variables de température et de son histoire ont été introduites au paragraphe 6.5.2.

Le premier principe étant désormais pris en compte, il reste à vérifier que l'inégalité fondamentale du second principe n'est pas mise en défaut.

### 6.6.2 Second principe de la thermodynamique des milieux continus

L'**entropie**  $\mathcal{S}(\mathcal{D})$  d'une partie  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$  est définie à partir d'une densité massique d'entropie  $s(\underline{\boldsymbol{x}}, t)$  :

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dv \quad (6.56)$$

La variation d'entropie est due, pour partie, à des contributions externes, surfacique et volumique, supposées connues :

$$\varphi(\mathcal{D}) = - \int_{\partial\mathcal{D}} \boldsymbol{\varphi} \cdot \underline{\boldsymbol{n}} \, ds + \int_{\mathcal{D}} \rho r_s \, dv \quad (6.57)$$

où  $\underline{\varphi}(\underline{x}, t)$  est le vecteur **flux d'entropie** et  $r_s$  une densité massique. La **production interne d'entropie** est alors la différence

$$\Sigma(\mathcal{D}) := \dot{\mathcal{S}}(\mathcal{D}) - \varphi(\mathcal{D}) \quad (6.58)$$

Les énoncés précédents ont la structure d'équations de bilan comme pour les variables quantité de mouvement et énergie étudiées au chapitre 3. Toutefois, le **second principe de la thermodynamique** n'est pas une loi de conservation mais l'inégalité suivante

$$\Sigma(\mathcal{D}) \geq 0, \quad \forall \mathcal{D} \subset \Omega_t \quad (6.59)$$

ou, de manière explicite,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\varphi} \cdot \underline{n} \, ds - \int_{\mathcal{D}} \rho r_s \, dv \geq 0 \quad (6.60)$$

En appliquant la démarche déjà mise en œuvre pour la quantité de mouvement et pour l'énergie, on aboutit à la **forme locale de l'inégalité de l'entropie** :

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \underline{\varphi} - \rho r_s \geq 0 \quad (6.61)$$

ou, de manière équivalente

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho s \underline{v} + \underline{\varphi}) - \rho r_s \geq 0 \quad (6.62)$$

pour les points réguliers de  $\Omega_t$ . Il existe aussi des conditions de discontinuité le long d'éventuelles surfaces singulières  $S \subset \Omega_t$ . Elles s'établissent de la même manière que pour la quantité de mouvement et l'énergie interne et s'écrivent :

$$[\![\rho s(\underline{v} \cdot \underline{n} - w_n)]\!] + [\![\underline{\varphi}]\!].\underline{n} \geq 0 \quad (6.63)$$

L'inégalité (6.61) est écrite de manière très générale. Dans la très grande majorité des situations rencontrées par l'ingénieur et le physicien, le flux d'entropie et la source volumique sont proportionnels au flux de chaleur et à la source volumique de chaleur, respectivement, le coefficient de proportionnalité étant l'inverse de la température absolue  $T$  :

$$\underline{\varphi} = \frac{\underline{q}}{T}, \quad r_s = \frac{r}{T} \quad (6.64)$$

C'est l'hypothèse qu'on fera dans la suite<sup>28</sup>. Le second principe (6.61) prend alors la forme

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} - \rho \frac{r}{T} \geq 0 \quad (6.65)$$

---

28. Les lois (6.64) souffrent des exceptions lorsqu'on cherche à les établir à partir d'une approche de type mécanique statistique, notamment en théorie cinétique des gaz (Müller, 1985). Mais nous n'en parlerons pas dans la suite.

A ce stade, on introduit l'énergie libre  $\Psi$  de densité massique  $\psi$  car c'est la grandeur énergétique privilégiée en thermomécanique des solides<sup>29</sup> :

$$\Psi(\mathcal{D}) := \int_{\mathcal{D}} \rho\psi \, dv, \quad \text{avec} \quad \psi := e - Ts \quad (6.66)$$

Pour mieux faire apparaître les contributions mécaniques et thermiques à la production d'entropie, on élimine la variation d'entropie  $\dot{s}$  dans (6.61) à l'aide de

$$\dot{s} = \frac{1}{T}(\dot{e} - \dot{T}s - \dot{\psi})$$

et de l'équation de l'énergie (3.89)

$$\rho\dot{e} = \underline{\sigma} : \underline{D} - \operatorname{div} \underline{q} + \rho r$$

On calcule ainsi le **taux de dissipation** volumique  $d$  :

$$\begin{aligned} d &:= \rho T \dot{s} + T \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} - \rho r \\ &= \rho(\dot{e} - \dot{T}s - \dot{\psi}) + T \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} - \rho r \\ &= \underline{\sigma} : \underline{D} - \operatorname{div} \underline{q} + \rho r - \rho(\dot{T}s + \dot{\psi}) + T \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} - \rho r \end{aligned}$$

Or  $T \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} = \operatorname{div} \underline{q} - \underline{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T}$ , de sorte que la dissipation se réduit finalement à

$$d = \underline{\sigma} : \underline{D} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \underline{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T} \quad (6.67)$$

On obtient ainsi **l'inégalité de Clausius-Duhem** qui constitue une condition d'admissibilité thermodynamique des lois de comportement thermomécanique :

$$d = \underline{\sigma} : \underline{D} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \underline{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \quad (6.68)$$

La densité de taux de dissipation au sein du milieu se décompose en deux contributions :

- la **dissipation intrinsèque** :

$$d^{\text{int}} := \underline{\sigma} : \underline{D} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) \quad (6.69)$$

- la **dissipation thermique**

$$d^{\text{th}} := -\underline{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T} \quad (6.70)$$

de sorte que

$$d = d^{\text{int}} + d^{\text{th}} \geq 0$$

En général les lois donnant les contraintes, l'énergie libre et l'entropie ne dépendent pas explicitement du gradient de température. Dans ce cas, la condition d'admissibilité ther-

---

29. L'énergie interne est définie comme une fonction de la déformation et de l'entropie. L'énergie libre est définie comme une fonction de la déformation et de la température. Comme en mécanique des solides, les essais sont souvent réalisés en conditions isothermes, c'est la fonction énergie libre à laquelle on a le plus facilement accès en général.

$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho s \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\underline{q}}{T} \cdot \underline{n} \, ds - \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{r}{T} \, dv \geq 0$	forme globale du second principe
$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} - \rho \frac{r}{T} \geq 0$	forme locale du second principe
$[\![\rho s(\underline{v} \cdot \underline{n}) - w_n]\!] + [\![\frac{\underline{q}}{T}]\!].\underline{n} \geq 0$	inéquation aux discontinuités
$d = \underline{\sigma} : \underline{D} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \underline{q} \cdot \frac{\operatorname{grad} T}{T} \geq 0$	inégalité de Clausius-Duhem

Tableau 6.4: Récapitulatif : le second principe de la thermodynamique des milieux continus.

mododynamique des lois de comportement thermodynamique devient

$$d^{\text{int}} \geq 0 \quad \text{et} \quad d^{\text{th}} \geq 0 \quad (6.71)$$

Il s'agit là de conditions suffisantes d'admissibilité thermodynamique de la loi de comportement.

On peut alors distinguer les situations

- **isothermes** pour lesquelles  $\dot{T} = 0$  et  $\operatorname{grad} T = 0$  de sorte que l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit à

$$d = \underline{\sigma} : \underline{D} - \rho \dot{\psi} \geq 0$$

ou d'une manière générale

$$p^i - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (6.72)$$

en introduisant la puissance des efforts intérieurs quelle qu'en soit sa modélisation.

- **adiabatiques** pour lesquelles  $\underline{q} = 0$  de sorte que l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit à

$$d = \underline{\sigma} : \underline{D} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) \geq 0$$

Il faudra donc veiller à ce que les lois de comportement développées garantissent la positivité de la dissipation. Le **principe d'entropie** exige que les lois de comportement soient telles que le second principe soit satisfait pour tout processus thermodynamique caractérisé par l'évolution de l'ensemble des variables  $\{\rho, \Phi, T, \underline{f} - \underline{a}, r\}$ .

L'exploitation définitive de l'inégalité de Clausius-Duhem ne sera permise qu'après avoir précisé le jeu de variables d'état adopté. Cela fournira des informations relatives à l'entropie et à  $d^{\text{int}}$ . Un exemple de cet achèvement sera proposé dans le cas du solide thermoélastique au chapitre suivant.

### 6.6.3 Loi de conduction thermique

La loi de conduction thermique a été étudiée en toute généralité au paragraphe 6.5.2.

On revient ici sur le cas des fluides différentiels d'ordre 1 isotropes décrits par les lois (11.6) et (11.7). En omettant la dépendance par rapport au taux de rotation dans la loi de

conduction thermique, on obtient :

$$\underline{q} = k_1 \underline{g} + k_2 \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{g} + k_3 \tilde{\mathbf{D}}^2 \cdot \underline{g} \quad (6.73)$$

Les paramètres<sup>30</sup> scalaires  $k_i$  sont des fonctions des invariants principaux de  $\tilde{\mathbf{D}}$  et des autres invariants :

$$\underline{g} \cdot \underline{g}, \underline{g} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{g}, \underline{g} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^2 \cdot \underline{g}$$

Il faut ajouter aussi une dépendance de ces grandeurs par rapport à la masse volumique et la température.

La dissipation thermique est obtenue en calculant  $-\underline{q} \cdot \underline{g}$ . Cette quantité doit être positive pour tout processus thermodynamique. En considérant les processus tels que  $\tilde{\mathbf{D}} = 0$ , on obtient la condition nécessaire :  $k_1 < 0$ . En remarquant que le troisième terme est proportionnel à la norme au carré du vecteur  $\tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{g}$ , on voit que  $k_3 < 0$  est une condition suffisante pour assurer la positivité de cette contribution. Le terme central est plus délicat puisque  $\tilde{\mathbf{D}}$  est symétrique mais non nécessairement positif. Il faudra donc trier au cas par cas selon les choix des fonctions  $k_1, k_2, k_3$  pour sélectionner les lois thermodynamiquement admissibles.

La forme lagrangienne de la loi de conduction du fluide différentiel d'ordre 1 isotrope s'obtient en multipliant la loi eulérienne par  $J \tilde{\mathbf{F}}^{-1}$  et en se rappelant que  $\dot{\mathbf{C}} = 2 \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{F}}$  :

$$\underline{Q} = k_1 \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \underline{G} + k_2 \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \dot{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \underline{G} + k_3 \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \dot{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \dot{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \underline{G} \quad (6.74)$$

Les facteurs 2 et  $J$  ont été intégrées dans les nouvelles fonctions  $k_1, k_2, k_3$ . Noter en particulier la présence de  $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$  dans cette loi de fluide thermique. Le gradient lagrangien de température est  $\underline{G} = \text{Grad } T = \underline{g} \cdot \tilde{\mathbf{F}}$ .

#### *Loi de Fourier*

Le second principe sous sa forme (6.71) exige que la dissipation thermique soit positive pour tout processus thermodynamique :

$$d^{\text{th}} = -\frac{1}{T} \underline{q} \cdot \underline{g} = -\frac{1}{T} \frac{\rho}{\rho_0} \underline{Q} \cdot \underline{G} \geq 0 \quad (6.75)$$

L'inégalité précédente est appelée **inégalité de Fourier**. Elle implique que le flux de chaleur fait un angle obtus avec le gradient thermique et que, en d'autres termes, la chaleur va toujours du chaud vers le froid. Pour garantir à coup sûr la positivité de la dissipation thermique pour tous les processus thermodynamiques, on postule généralement la **loi de Fourier** :

$$\underline{q} = -\tilde{\mathbf{K}}(\rho, T) \cdot \underline{g} \quad (6.76)$$

qui consiste à prendre pour fonction  $\tilde{\mathbf{G}}$  une fonction linéaire par rapport au gradient de température. La dissipation thermique est alors la forme quadratique

$$d^{\text{th}} = \frac{1}{T} \underline{g} \cdot \tilde{\mathbf{K}} \cdot \underline{g}$$

Seule la partie symétrique de  $\tilde{\mathbf{K}}$  participe à la dissipation thermique. Rien ne prouve que  $\tilde{\mathbf{K}}$  soit symétrique. On choisit toutefois souvent un tenseur d'ordre 2 symétrique  $\tilde{\mathbf{K}}$  tel que

$$\tilde{\mathbf{K}}^T = \tilde{\mathbf{K}} \quad (6.77)$$

30. tout comme, par ailleurs, l'énergie interne  $e$ .

La dissipation  $d^{\text{th}}$  est positive dès que  $\underline{\mathbf{K}}$ , symétrique, est défini positif<sup>31</sup>. La forme lagrangienne de la loi de Fourier est obtenue par un transport adéquat :

$$\underline{\mathbf{Q}} = -J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{G}} \quad (6.78)$$

Les fluides visqueux conducteurs ont été étudiés au paragraphe 11.2. La forme générale de la loi de comportement est (11.7). On voit que les couplages sont nombreux et non linéaires. Si on linéarise ces deux lois par rapport à  $\underline{\mathbf{g}}$  et  $\underline{\mathbf{D}}$  en les supposant suffisamment petits, il ne subsiste plus que

$$\underline{\sigma} = \eta_1 (\text{trace } \underline{\mathbf{D}}) \underline{\mathbf{1}} + 2\eta_2 \underline{\mathbf{D}} \quad (6.79)$$

$$\underline{\mathbf{q}} = -k \underline{\mathbf{g}} \quad (6.80)$$

où il ne reste plus que 3 paramètres caractérisant le fluide : les viscosités  $\eta_1$  et  $\eta_2$  et le coefficient de conductivité thermique  $k$ . On remarque aussi que les deux lois de comportement linéarisées sont découpées.

### 6.7 Exemples de lois de comportement illicites

Deviner pourquoi les lois de comportement ci-dessous sont farfelues :

$$\underline{\sigma} = \eta \underline{\mathbf{x}} \otimes \underline{\mathbf{x}}$$

► La position ne peut pas apparaître explicitement dans la loi de comportement. Dans le cas de structures constituées de plusieurs matériaux (ou pour les matériaux hétérogènes), les coefficients (propriétés mécaniques) de la loi de comportement peuvent dépendre de la position comme paramètre.

$$\underline{\sigma} = \eta \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}$$

► La vitesse ne peut pas apparaître explicitement dans la loi de comportement.

$$\underline{\mathbf{B}} = \eta t^n \underline{\sigma}$$

► Le temps ne peut pas apparaître explicitement dans la loi de comportement.

---

31. On anticipe sur le chapitre suivant pour faire remarquer que le flux de chaleur ne dérive pas du potentiel énergie libre, à la différence des contraintes en thermoélasticité. En effet, la conduction thermique est un phénomène entièrement dissipatif. La propriété (6.77) de symétrie du tenseur de conductivité thermique  $\underline{\mathbf{K}}$  n'est donc pas une conséquence du second principe, contrairement au cas du tenseur des modules d'élasticité comme on le verra au paragraphe 7.2.5. Il s'agit en fait d'un postulat impliquant l'existence d'un potentiel quadratique de dissipation. Les conditions (6.77) sont appelées relations de réciprocité d'Onsager-Casimir (de Groot and Mazur, 1984; Prigogine, 1996). Ces conditions sont également un résultat de mécanique statistique (Landau and Lifschitz, 1980).

## 7 Corps élastiques

Les principes fondamentaux qui président à l'écriture des lois de comportement thermomécanique des matériaux présentés et illustrés dans le chapitre précédent sont mis à profit dans ce chapitre pour décrire la classe des lois de comportement thermoélastique. La démarche proposée est en deux temps. Des considérations purement mécaniques sont d'abord développées pour définir et préciser autant que possible les lois d'élasticité. La notion d'hyperélasticité apparaît ensuite lorsque ces lois sont passées au crible de la thermodynamique des milieux continus dont la conséquence majeure est l'existence d'un potentiel d'élasticité.

### 7.1 Elasticité

#### 7.1.1 Loi de comportement élastique

Un milieu (matériellement simple, i.e. théorie du premier gradient) est dit **élastique** si l'état de contrainte actuel est entièrement déterminé par le gradient de la transformation à l'instant actuel et non par son histoire passée. La forme de la loi du matériau élastique se déduit de celle, générale, (6.42) du solide dans laquelle on renonce à la variable d'histoire de déformation  $\underline{C}_t(\tau)$ . Par rapport à une configuration de référence lagrangienne, la loi eulérienne s'écrit :

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{g}, \quad \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \quad \underline{B}(t), \quad \det \underline{F}(t), \quad \mathfrak{T}^{F^{-1}(t)}) \quad (7.1)$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonction isotrope de ses arguments. Parmi les arguments de la loi, il y a le tenseur de structure de l'espace physique (métrique spatiale) et de l'espace matériel : métrique matérielle au travers de  $\underline{B} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T$ , le tenseur de Cauchy-Green gauche, et l'orientation au travers de  $\overset{\circ}{\mathcal{O}}$  et  $J = \det \underline{F}$  d'après la table 6.2. Les tenseurs de structure matérielle  $\mathfrak{T}$  contiennent les informations sur l'anisotropie de la matière élastique étudiée. La fonctionnelle mémoire  $\mathcal{F}$  se réduit donc à une simple fonction. En particulier le comportement ne dépend pas de la vitesse de sollicitation  $\underline{D}$ . La forme de la loi dépend *a priori* de la configuration locale de référence choisie  $\kappa_0$ .

En utilisant les relations de la table 6.2 et les transmuations adaptées, on trouve la forme lagrangienne de la loi d'élasticité :

$$\underline{\Pi}(t) = \mathcal{F}_{\Pi}(\underline{C}(t), \quad \det \underline{F}(t), \quad \underline{G}, \quad \overset{\circ}{\mathcal{O}}_L, \quad \mathfrak{T}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{\Pi} \text{ isotrope} \quad (7.2)$$

Les formulations eulérienne et lagrangienne sont équivalentes. Il n'y a pas de choix privilégié pour l'écriture de la loi, il faut choisir par laquelle on souhaite commencer.

#### 7.1.2 Loi de comportement thermoélastique

Plus généralement, le corps matériel thermoélastique est caractérisé par un jeu de variables d'état comprenant la déformation, la température et le gradient eulérien de température  $\underline{g}$  à l'instant courant. L'histoire de température et de déformation est réputée ne pas influencer la réponse du matériau thermoélastique.

Il y a quatre lois thermoélastiques, écrites ici par rapport à la configuration locale  $\kappa_L$  :

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(T(t), \underline{g}(t); \underline{g}, \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \underline{B}(t), \det \underline{F}, \mathfrak{T}^{F^{-1}(t)}) \quad (7.3)$$

$$\underline{q}(t) = \mathcal{G}(T(t), \underline{g}(t); \underline{g}, \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \underline{B}(t), \det \underline{F}, \mathfrak{T}^{F^{-1}(t)}) \quad (7.4)$$

$$\psi(t) = \hat{\psi}(T(t), \underline{g}(t); \underline{G}, \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \underline{B}(t), \det \underline{F}, \mathfrak{T}^{F^{-1}(t)}) \quad (7.5)$$

$$s(t) = \hat{s}(T(t), \underline{g}(t); \underline{G}, \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \underline{B}(t), \det \underline{F}, \mathfrak{T}^{F^{-1}(t)}) \quad (7.6)$$

où les fonctions introduites sont toutes isotropes par rapport à leurs arguments (hémitropes si le tenseur d'orientation joue effectivement un rôle dans la loi de comportement). Elles expriment respectivement les contraintes, le flux de chaleur, l'énergie libre de Helmholtz et l'entropie massiques en fonction de la température, du gradient de température et de la déformation instantanée.

On voit que les fonctionnelles-mémoire de la théorie viscoélastique formulée dans le chapitre précédent deviennent de simples fonctions dans le cas de la thermoélasticité.

#### *Invariance euclidienne de la loi thermoélastique*

On constate *a posteriori* que la forme de la loi de comportement thermoélastique est indépendante du référentiel d'observation. Les lois (7.3) à (7.6) ont été formulées d'abord par rapport à un référentiel galiléen. La forme de la loi dans un référentiel quelconque s'obtient en appliquant la transformation  $\underline{x} \rightarrow \underline{x}' = \underline{Q}^{-1}(t) \cdot \underline{x}$  où  $\underline{Q}(t)$  est une transformation orthogonale directe dépendant du temps,  $\underline{Q}(t) \in SO(E)$  (les translations ne jouent pas de rôle dans la loi de comportement, on l'a vu). On obtient par ce changement de variable :

$$\underline{g}' = \underline{Q}^{-1}(t) \cdot \underline{g}, \quad \underline{B}' = \underline{Q}^{-1} \cdot \underline{F} \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{Q}^{-T}$$

Les autres arguments des fonctions d'élasticité sont invariants par un tel changement de référentiel. La première loi (7.3) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(t) &= \mathcal{F}(T(t), \underline{Q}(t) \cdot \underline{g}'(t); \underline{g}, \overset{\circ}{\mathcal{O}}, \underline{Q}^{-1} \cdot \underline{B}'(t) \cdot \underline{Q}, \det \underline{F}^{-1}, (\mathfrak{T}^{F'^{-1}(t)})^{Q^{-1}}) \\ &= \underline{Q} \cdot \mathcal{F}(T(t), \underline{g}'(t); \underline{g}', \overset{\circ}{\mathcal{O}}', \underline{B}'(t), \det \underline{F}'^{-1}, \mathfrak{T}^{F'^{-1}(t)}) \cdot \underline{Q}^{-1} \end{aligned}$$

en vertu de l'exigence d'isotropie de la fonction  $\mathcal{F}$ . On déduit la loi dans le nouveau référentiel

$$\underline{\sigma}'(t) := \underline{Q}^{-1} \cdot \underline{\sigma}(t) \cdot \underline{Q} = \mathcal{F}(T(t), \underline{g}'(t); \underline{g}', \overset{\circ}{\mathcal{O}}', \underline{B}'(t), \det \underline{F}', \mathfrak{T}^{F'^{-1}(t)})$$

La forme de la loi est donc inchangée et on a obtenu la règle de transformation pour le tenseur des contraintes. Cette règle de transformation montre que, dans le cas de l'élasticité, le tenseur des contraintes est *objectif*. De nombreux auteurs ont érigé l'objectivité du tenseur des contraintes et l'invariance euclidienne de la loi de comportement en principes, le second étant appelé principe d'indifférence matérielle (MFI) (Noll, 1958). Ils en font usage dès les premiers stades de la formulation de la loi. On montre ici que, dans le cas de l'élasticité, c'est une simple conséquence de l'isotropie de l'espace. La démonstration s'étend aisément aux autres fonctions thermodynamiques (7.4) à (7.6). La propriété d'indifférence matérielle a déjà été prouvée dans le cas général viscoélastique héréditaire au paragraphe 6.3.6.

## 7.1.3 Invariance de configuration pour les corps élastiques

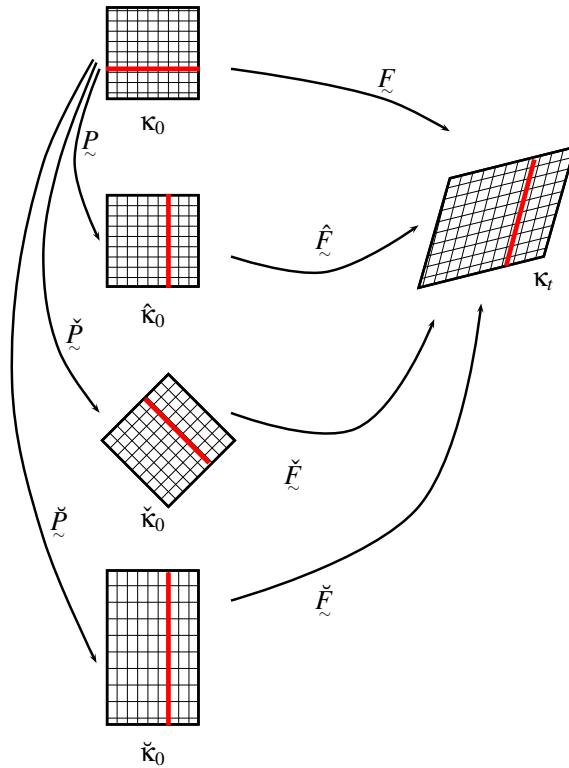


Figure 7.1 : Changements de configurations locales de référence. La configuration  $\hat{\kappa}_0$  est tournée de  $\pi/2$  par rapport à  $\kappa_0$ . La configuration  $\check{\kappa}_0$  est tournée de  $\pi/4$ . La configuration  $\breve{\kappa}_0$  a subi une extension simple dans la direction verticale par rapport à la configuration  $\kappa_0$ . La configuration actuelle  $\checkmark_0$  montre que le corps est cisaillé et étiré dans les deux directions du plan. Une ligne matérielle rouge a été tracée sur le matériau pour mieux suivre les transformations.

Une classification des types de comportement élastique peut être opérée en considérant le groupe d'invariance de configuration  $\mathfrak{G}_L$  du point matériel, comme on l'a fait aux paragraphes 6.3.2 et 6.4 dans le cas viscoélastique. Ce groupe contient les éléments du groupe unimodulaire qui laissent invariants les tenseurs de structure par changement de configuration locale  $\tilde{F} = \hat{F}\tilde{Z}$ . Ces éléments sont appelés (abusivement) *symétries matérielles*. Pour de nombreux solides, il existe une configuration privilégiée pour laquelle le groupe des symétries matérielles est un groupe cristallographique, c'est-à-dire un sous-groupe strict du groupe orthogonal. Une telle configuration est une configuration *non biaisée* ou *non distordue* du solide. On appelle ces solides des **solides anisotropes**. Cette définition ne se limite pas aux corps élastiques. Pour un corps élastique, on dira qu'une configuration est **naturelle** si elle est non distordue et sans contraintes ( $\tilde{\sigma} = 0$ ).

On peut maintenant classer les corps élastiques selon la nature de leur groupe des symétries matérielles. Les corps élastiques "les moins symétriques", i.e. les "plus" **anisotropes** sont les

• **solides pseudo-tricliniques**

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{\underline{\underline{1}}\}$$

• **solides tricliniques**

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \{\underline{\underline{1}}, -\underline{\underline{1}}\}$$

L'inversion (symétrie centrale  $-\underline{\underline{1}}$ ) est ajoutée au groupe d'invariance de configuration lorsque la microstructure du matériau présente cette invariance (cas d'un cristal mono-atomique possédant une maille triclinique par exemple). Dans le cas de cristaux moléculaires complexes, le motif de la maille élémentaire du matériau cristallin peut ne pas être invariant par inversion.

Toutes les classes cristallographiques sont représentées parmi les solides cristallins (métaux ou céramiques) ou structures composites (stratifiés, réseaux de poutres, nids d'abeille...). On se contente pour l'instant de mentionner le cas des solides cubiques (ex : cristaux de sel, d'aluminium, de cuivre, de fer...). Ces solides présentent 24 symétries matérielles qui s'obtiennent à partir de 3 **générateurs** qui sont

$$\underline{\underline{R}}_{\underline{i}}^{\pi/2}, \underline{\underline{R}}_{\underline{j}}^{\pi/2}, \underline{\underline{R}}_{\underline{k}}^{\pi/2} \quad (7.7)$$

rotations d'angle  $\pi/2$  par rapport à trois axes orthogonaux  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ . On renvoie au tableau 6.3 (page 170) pour la liste des classes cristallographiques utiles en thermomécanique des matériaux (concernant les systèmes cristallographiques pour les solides cristallins voir aussi le tableau 12.3, page 339).

*Solides élastiques isotropes*

Le cas des solides élastiques isotropes est particulièrement important car c'est souvent la première approximation du comportement qui est utilisée en l'absence de données expérimentales suffisantes pour caractériser l'anisotropie du matériau. On traite ici le cas mécanique pur, laissant les aspects thermiques pour le paragraphe suivant.

Dans le cas isotrope, les éléments de structure matérielle se réduisent à la métrique  $\underline{\underline{g}}$ , cf. (6.41) et la loi d'élasticité s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\underline{\underline{g}}, \underline{\underline{B}}(t), \det \underline{\underline{F}}(t)) \quad (7.8)$$

Le théorème de représentation dit de Rivlin-Ericksen (théorème 36, page 341) fournit la forme de  $\mathcal{F}$  compatible avec l'exigence d'isotropie pour la fonction  $\mathcal{F}$  dans (7.8)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \beta_0 \underline{\underline{1}} + \beta_1 \underline{\underline{B}} + \beta_2 \underline{\underline{B}}^2 \quad (7.9)$$

où les  $\beta_i$  sont des fonctions de  $\rho_0$  et des 3 invariants principaux de  $\underline{\underline{B}}$ , ou, de manière équivalente, des fonctions symétriques des 3 déformations principales  $\lambda_i$ , définies par la décomposition spectrale (2.93).

En multipliant l'expression précédente à gauche par  $J \underline{\underline{F}}^{-1}$  et à droite par  $\underline{\underline{F}}^{-T}$ , on obtient la version lagrangienne de la loi des corps élastiques isotropes

$$\underline{\underline{\Pi}} = J \beta_0 \underline{\underline{C}}^{-1} + J \beta_1 \underline{\underline{1}} + J \beta_2 \underline{\underline{C}}$$

ou, de manière équivalente, en vertu du théorème 30 de Cayley-Hamilton, qui permet d'exprimer  $\underline{\underline{C}}^{-1}$  en fonction de  $\underline{\underline{1}}, \underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{C}}^2$ ,

$$\underline{\underline{\Pi}} = \alpha_0 \underline{\underline{1}} + \alpha_1 \underline{\underline{C}} + \alpha_2 \underline{\underline{C}}^2 \quad (7.10)$$

où  $\tilde{C}$  est le tenseur de Cauchy-Green droit. Les fonctions  $\alpha_i$  dépendent des valeurs propres de  $\tilde{C}$  car ce sont les mêmes que celles de  $\tilde{B}$  (cf. équation (2.94)).

La relation (7.9) ne doit pas faire illusion en laissant croire qu'elle ne dépend pas de la configuration de référence puisque  $\tilde{B}$  est une mesure eulérienne de déformation. En fait, contrairement par exemple au tenseur de Cauchy purement eulérien lui aussi,  $\tilde{B}$  dépend bel et bien de la configuration de référence  $\kappa_0$  via la métrique  $\tilde{G}$  utilisée pour construire  $\tilde{B}$ . Cela confirme que la loi d'élasticité d'un corps isotrope garde *a priori* la mémoire d'une configuration de référence au travers de  $\tilde{G}$  et  $\rho_0$ . La dépendance par rapport à  $\tilde{G}$  disparaît toutefois dans le cas extrême des

### Fluides élastiques isotropes

Lorsque,

$$\mathfrak{G}_{\kappa_0} = \mathcal{U}(E) \quad (7.11)$$

on obtient la loi eulérienne du fluide élastique isotrope en partant du fluide général (6.43) en supprimant la dépendance vis-à-vis de l'histoire de déformation et de la métrique matérielle :

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\tilde{G}, \rho_0, \det \tilde{F}) \text{ et } \mathcal{F} \text{ isotrope} \quad (7.12)$$

Les "transmués"  $\tilde{Z} \cdot \mathfrak{G}_{\kappa_0} \cdot \tilde{Z}^{-1}$  sont identiques à  $\mathfrak{G}_{\kappa_0}$  pour tout  $\tilde{Z} \in GL(E)$ <sup>1</sup>. Comme un tel corps est isotrope par rapport à  $\mathfrak{G}_{\kappa_0}$ , il l'est aussi pour toutes les autres configurations. Voilà donc un corps isotrope par rapport à toutes ses configurations. Ce n'est pas le cas des solides élastiques isotropes précédents qui en général ne sont plus isotropes par rapport à une configuration déformée (distordue).

La fonction d'élasticité  $\mathcal{F}$  doit vérifier, en vertu de sa propriété d'isotropie,

$$\mathbf{Q}_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}_0^T = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_0^T \mathbf{G} \mathbf{Q}_0, \rho_0, \det \mathbf{Q}_0 \mathbf{F}) = \mathcal{F}(\mathbf{G}, \rho_0, \det \mathbf{F}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad \forall \mathbf{Q}_0 \in GO(E)$$

On en déduit que  $\boldsymbol{\sigma}$  est nécessairement proportionnel à l'identité.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p(\rho_0, J) \mathbf{1} \quad (7.13)$$

où  $p$  est une fonction scalaire de  $J$ , ou de manière équivalente de la masse volumique actuelle  $\rho$ , appelée contrainte hydrostatique ou pression. On reconnaît l'état de contrainte d'un fluide parfait sans viscosité<sup>2</sup>. Cette forme peut également être obtenue à partir de la loi des solides élastiques isotropes (7.9) en supprimant la dépendance par rapport à  $\tilde{B}$ , i.e.  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

La forme lagrangienne de la loi du fluide élastique est la suivante :

$$\underline{\Pi} = J \tilde{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{F}^{-T} = -p J \tilde{F}^{-1} \cdot \tilde{F}^{-T} = -p J \tilde{C}^{-1} \quad (7.14)$$

Remarquer la dépendance caractéristique en  $\tilde{C}^{-1}$ , liée au transport de la métrique courante sur la configuration de référence. En un sens, la loi eulérienne (7.13) est plus simple, plus transparente.

#### 7.1.4 Thermoélasticité isotrope

On donne ici les lois (non linéaires) les plus générales pour les solides thermoélastiques conducteurs isotropes. Les fonctions  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  sont des fonctions isotropes de  $\tilde{B}(\underline{x}, t)$  et de  $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$ . De telles fonctions ne peuvent être quelconques et le théorème de représentation

1. En effet, si  $\tilde{Z} \in GL(E)$ , alors  $\tilde{H} \in \mathcal{U}(E) \implies \tilde{Z} \cdot \tilde{H} \cdot \tilde{Z}^{-1} \in \mathcal{U}(E)$ .

2. *inviscid* en anglais. On peut montrer que tout fluide au repos, même visqueux, a un état de contraintes de la forme (7.13).

correspondant a été admis au paragraphe 6.6.3. Les lois de thermoélasticité isotropes sont

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \alpha_0 \underline{1} + \alpha_1 \underline{B} + \alpha_2 \underline{B}^2 \\ &+ \alpha_3 \underline{g} \otimes \underline{g} + \alpha_4 (\underline{B} \cdot \underline{g} \otimes \underline{g} + \underline{g} \otimes \underline{B} \cdot \underline{g}) + \alpha_5 \underline{B} \cdot \underline{g} \otimes \underline{B} \cdot \underline{g}\end{aligned}\quad (7.15)$$

$$\underline{q} = \beta_1 \underline{g} + \beta_2 \underline{B} \cdot \underline{g} + \beta_3 \underline{B}^2 \cdot \underline{g} \quad (7.16)$$

Les paramètres scalaires  $\alpha_i, \beta_i$ , mais aussi l'énergie interne sont des fonctions des invariants principaux de  $\underline{B}$  et des autres invariants

$$\underline{g} \cdot \underline{g}, \underline{g} \cdot \underline{B} \cdot \underline{g}, \underline{g} \cdot \underline{B}^2 \cdot \underline{g}$$

Il faut ajouter la dépendance de ces grandeurs par rapport à la masse volumique et à la température. On voit que les couplages sont nombreux et non linéaires. On verra toutefois que la thermodynamique exclut certains de ces couplages.

Si on linéarise ces deux lois par rapport à  $\underline{g}$  et  $\underline{B}$  en les supposant suffisamment petits ( $|\underline{g}| \ll 1, |\underline{B} - \underline{1}| \ll 1$ ), il ne reste plus que

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{B}) \underline{1} + 2\mu \underline{B} \quad (7.17)$$

$$\underline{q} = -k \underline{g} \quad (7.18)$$

Seuls 3 paramètres caractérisent le solide thermoélastique isotrope : les modules  $\lambda$  et  $\mu$  et le coefficient de conductivité thermique  $k$  de la loi de Fourier. On remarque aussi que les deux lois de comportement linéarisées sont découplées. On reviendra dans le chapitre 8 sur la linéarisation des lois de comportement, et on donnera en particulier un sens physique précis aux modules d'élasticité isotrope.

## 7.2 Hyperélasticité

Le second principe de la thermodynamique n'a pas été utilisé jusqu'ici. Il est grand temps de le faire car il apporte une restriction essentielle, à savoir la propriété dite d'hyperélasticité, à savoir l'existence d'un potentiel d'élasticité. On s'intéresse particulièrement à la classe des corps élastiques anisotropes, le cas isotrope étant traité comme un cas particulier.

La théorie est présentée d'abord sous sa forme eulérienne. On considère le jeu suivant de variables d'état

$$\{\underline{B}(\underline{x}, t), T(\underline{x}, t), \underline{g}(\underline{x}, t)\}$$

où  $\underline{g} = \text{grad } T$  et  $\underline{B} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T$  est le tenseur de Cauchy-Green gauche, miroir eulérien de la métrique lagrangienne d'après le tableau 6.2. L'énergie libre  $\psi$  massique joue un rôle essentiel dans la théorie des corps élastiques anisotropes. C'est une fonction des variables précédentes

$$\hat{\psi}(\underline{B}, T, \underline{g}; \mathcal{S}, \mathcal{S}_{\kappa_0}^{F^{-1}}) \quad (7.19)$$

équipée des tenseurs de structure matérielle autres que la métrique lagrangienne déjà représentée par  $\underline{B}$ .

### 7.2.1 Exploitation du second principe ; lois d'état

On part de l'expression locale (6.68) de l'inégalité de Clausius-Duhem exprimant la positivité du taux de dissipation instantané pour toute transformation du point matériel :

$$d = \underline{\sigma} : \underline{D} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \underline{q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0$$

La dérivée temporelle de la fonction énergie libre se calcule de la sorte :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{B}}} : \dot{\tilde{\mathbf{B}}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{g}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{g}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathcal{S}_{\kappa_0}^{F^{-1}}} \cdot \frac{d}{dt} (\mathfrak{T}_{\kappa_0}^{F^{-1}}) \quad (7.20)$$

L'exploitation du second principe se décline selon la nature des tenseurs de structure matérielle apparaissant dans le dernier terme, les tenseurs de structure spatiale ayant été supposés constants. Cela passe par une discussion de chaque classe de symétrie du matériau. Le cas isotrope eulérien sera étudié au paragraphe 7.4.1 et le cas isotrope transverse au paragraphe 7.4.2. Au préalable il est possible de travailler sur la

### 7.2.2 Formulation lagrangienne de l'hyperélasticité

La théorie est présentée également sous sa forme lagrangienne fréquente dans la littérature. On considère le jeu suivant de variables d'état

$$\{\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{X}}, t), T(\underline{\mathbf{X}}, t), \underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{X}}, t); \mathcal{S}_{\kappa_0}\}$$

où  $\underline{\mathbf{G}} = \text{Grad } T$  et  $\underline{\mathbf{E}} = (\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbb{1}})/2$  est la déformation de Green-Lagrange, reliée de manière univoque au tenseur droit de Cauchy-Green  $\underline{\mathbf{C}}$  par (2.81). Le choix de la mesure de déformation importe peu, on aurait pu continuer à utiliser  $\underline{\mathbf{C}}$  ou tout autre fonction de  $\underline{\mathbf{C}}$ . L'énergie libre  $\psi$  joue un rôle essentiel dans la théorie des corps élastiques anisotropes. C'est une fonction des variables précédentes

$$\hat{\psi}_0(\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{X}}, t), T(\underline{\mathbf{X}}, t), \underline{\mathbf{G}}(\underline{\mathbf{X}}, t); \mathcal{S}_{\kappa_0}) \quad (7.21)$$

équipée des tenseurs de structure matérielle.

Pour obtenir la formulation lagrangienne de la forme locale (6.65), il faut repartir de la formulation globale du second principe pour un sous-domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho s(\underline{\mathbf{x}}, t) dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\underline{\mathbf{q}}}{T} \cdot \underline{\mathbf{n}} ds - \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{r}{T} dv \geq 0$$

Avec le changement de variable  $\underline{\mathbf{x}} = \Phi(\underline{\mathbf{X}}, t)$ , cela devient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 s_0(\underline{\mathbf{X}}, t) dV + \int_{\partial \mathcal{D}_0} \frac{\underline{\mathbf{Q}}}{T} \cdot \underline{\mathbf{N}} dS - \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \frac{r_0}{T} dV \geq 0 \quad (7.22)$$

avec  $s_0(\underline{\mathbf{X}}, t) = s(\underline{\mathbf{x}}, t)$  et  $r_0(\underline{\mathbf{X}}, t) = r(\underline{\mathbf{x}}, t)$ . On rappelle que  $\mathcal{D}_0 = \Phi^{-1}(\mathcal{D})$ . Le flux de chaleur lagrangien  $\underline{\mathbf{Q}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$  est relié au flux eulérien  $\underline{\mathbf{q}}(\underline{\mathbf{x}}, t)$  par la relation (6.47). En utilisant le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_{\mathcal{D}_0} \left( \rho_0 \dot{s}_0 + \text{Div} \frac{\underline{\mathbf{Q}}}{T} - \rho_0 \frac{r_0}{T} \right) dV \geq 0 \quad (7.23)$$

valable pour tout sous-domaine  $\mathcal{D}_0 \subset \Omega_0$ . On en déduit la forme locale du second principe dans sa formulation lagrangienne

$$\rho_0 \dot{s}_0 + \text{Div} \frac{\underline{\mathbf{Q}}}{T} - \rho_0 \frac{r_0}{T} \geq 0 \quad (7.24)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem en est une conséquence directe en suivant la même démarche que pour établir (6.68). On obtient ainsi **l'inégalité de Clausius-Duhem** en

description lagrangienne :

$$D = \tilde{\Pi} : \dot{\tilde{E}} - \rho_0(\dot{\psi}_0 + \dot{T}s_0) - \underline{Q} \cdot \frac{\underline{G}}{T} \geq 0 \quad (7.25)$$

où  $D(\underline{X}, t)$  est la densité de **dissipation** lagrangienne. Noter que  $D$  a pour unité  $\text{W.m}^{-3}$  et que l'on calcule l'énergie dissipée en intégrant  $D$  par rapport au temps. L'énergie libre  $\psi_0$  est une fonction des variables (7.21) de sorte que

$$\dot{\psi}_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{E}} : \dot{\tilde{E}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}} \cdot \dot{\underline{G}} \quad (7.26)$$

La dérivée partielle par rapport aux tenseurs de structure lagrangiens est nulle car ils ne dépendent pas du temps. En substituant (7.26) dans (7.25) et en ordonnant les termes en  $\dot{\tilde{E}}, \dot{T}$  et  $\dot{\underline{G}}$ , la dissipation devient

$$D = (\tilde{\Pi} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{E}}) : \dot{\tilde{E}} - \rho_0(\frac{\partial \psi_0}{\partial T} + \dot{s}_0)\dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}} \cdot \dot{\underline{G}} - \underline{Q} \cdot \frac{\underline{G}}{T} \geq 0 \quad (7.27)$$

La dissipation  $D$  doit être positive pour tous les processus thermomécaniques, c'est-à-dire toutes les transformations  $\{\rho_0, \Phi, T, \underline{f}, r\}$  satisfaisant les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. Or, pour tout processus thermodynamique  $\{\Phi, T\}$ , on peut trouver  $\{\rho, \underline{f}, r\}$  tels que les équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie soient identiquement vérifiées. En particulier pour toute évolution  $\{\underline{E}, T, \underline{G}, \dot{\underline{E}}, \dot{T}, \dot{\underline{G}}\}$  (en supposant quand même  $\det \underline{F} \neq 0$  et  $T > 0$ ) en un point matériel  $\underline{X}$  et à l'instant  $t$ , on peut construire un processus thermodynamique  $\{\Phi, T\}$  prenant ces valeurs en  $(\underline{X}, t)$ . Cela permet d'affirmer que l'inégalité (7.27) doit être vérifiée pour des valeurs de  $\dot{\underline{E}}, \dot{T}, \dot{\underline{G}}$  quelconques. Or l'expression de  $D$  est linéaire par rapport à ces incrément. Cette linéarité est due au fait que les contraintes, l'énergie libre et l'entropie d'un matériau élastique sont supposées ne pas dépendre des vitesses de déformations ni des dérivées temporelles de la température et de son gradient. Ceci implique donc que les termes figurant devant  $\dot{\underline{E}}, \dot{T}, \dot{\underline{G}}$  doivent s'annuler. Ainsi, l'application du second principe de la thermodynamique aux corps élastiques fournit les relations

$$\tilde{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{E}} \quad (7.28)$$

$$s_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial T} \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}} = 0 \quad (7.30)$$

En toute rigueur, étant donné la propriété de symétrie du tenseur  $\tilde{\Pi}$ , la relation (7.28) doit être modifiée en ne considérant que la partie symétrique de la dérivée partielle de l'énergie libre par rapport à la déformation. En pratique, le potentiel  $\psi_0$  peut être pris comme une fonction symétrique des composantes de  $\underline{E}$ , sans restriction de généralité.

On aurait pu prendre aussi un potentiel fonction du tenseur droit de Cauchy-Green  $\psi_0(\underline{C}, T)$ . Comme  $\dot{\underline{E}} = \dot{\underline{C}}/2$  (cf. équation (2.200)), la première loi d'hyperélasticité s'écrit alors

$$\tilde{\Pi} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{C}} \quad (7.31)$$

Il est possible alors de calculer le tenseur des contraintes de Cauchy qui se déduit de (7.28) par

$$\underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \frac{1}{J} \underline{F} \cdot \underline{\Pi} \cdot \underline{F}^T = \frac{\rho_0}{J} \underline{F} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{E}} \cdot \underline{F}^T = \rho \underline{F} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{E}} \cdot \underline{F}^T \quad (7.32)$$

en tenant compte de  $\rho_0 = J\rho$  (conservation de la masse (3.5)).

Des couplages thermomécaniques sont bien sûr possibles puisque  $\psi_0$  est une fonction générale de  $(\underline{C}, T)$ . Par contre l'énergie libre ne peut pas dépendre du gradient de température  $\underline{G}$ , d'après (7.30), c'est un résultat fort de l'analyse. Ces résultats ont été établis de la sorte par (Coleman and Noll, 1963).

### 7.2.3 Loi de Doyle-Ericksen

Il est possible d'obtenir la loi eulérienne générale d'hyperélasticité sous la forme d'une relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur métrique spatial. La relation entre les potentiels d'hyperélasticité lagrangien et eulérien est la suivante :

$$\psi_0(\underline{C}, \underline{G}, \underline{\mathfrak{T}}) = \psi(\underline{g}, \underline{B}, \underline{\mathfrak{T}}^{F^{-1}}) \quad (7.33)$$

On revient à la relation entre  $\underline{C}$  et  $\underline{g}$  sous la forme :

$${}^b \underline{C} = \underline{F}^* \underline{g} \underline{F}, \quad C_{IJ} = F_I^{*i} g_{ij} F_J^j$$

On calcule alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial \psi_0}{\partial C_{IJ}} \frac{\partial C_{IJ}}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial \psi_0}{\partial C_{IJ}} F_I^{*i} F_J^j \quad (7.34)$$

puis,

$$2\rho \frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} = 2\frac{\rho_0}{J} \frac{\partial \psi_0}{\partial C_{IJ}} F_I^{*i} F_J^j = J^{-1} F_J^j \Pi^{IJ} F_I^{*i} = \sigma^{ij} \quad (7.35)$$

en profitant de la symétrie du tenseur des contraintes sous la forme  $\Pi^{IJ} = J F^{-1I}{}_p \sigma^{pq} F^{-*q}{}^J$ . On obtient la loi d'état eulérienne générale :

$$\underline{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{g}} (\underline{g}, \underline{B}, \underline{\mathfrak{T}}^{F^{-1}}) \quad (7.36)$$

Le tenseur métrique émerge comme la quantité fondamentale de l'hyperélasticité eulérienne ! Ce résultat est dû à (Doyle and Ericksen, 1956), repris par (Marsden and Hughes, 1994). Il justifie pleinement d'avoir pris soin tout au long des développements précédents de mentionner le rôle des tenseurs métriques en jeu. Car, même si le tenseur métrique  $\underline{g}$  est invisible dans les calculs en bases orthonormées, cela signifie nullement qu'il est absent puisqu'il est même nécessaire de dériver par rapport à cette variable pour obtenir la loi générale eulérienne d'hyperélasticité.

### 7.2.4 Propriétés caractéristiques des matériaux hyperélastiques

Une loi de comportement hyperélastique est une loi d'élasticité particulière au sens de (7.1), mais toute loi d'élasticité n'est pas hyperélastique. En effet, toute loi (7.1) ne dérive pas d'un potentiel (7.28). Il va de soi que seules les lois hyperélastiques sont acceptables puisque l'existence d'un potentiel d'élasticité est une exigence thermodynamique. Cependant on rencontre dans la pratique des formulations de lois "élastiques" dont il faudra vérifier la validité thermodynamique. La différence majeure entre une loi élastique (7.1) et une loi hyperélastique (7.28) est qu'avec une loi élastique, le travail élastique fourni

dépend en général du trajet de déformation suivi, tandis qu'il n'en dépend pas si l'on utilise une loi hyperélastique. Pour le voir, on considère un trajet de déformation imposé allant de  $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_A$  (instant  $t_A$ ) à l'état  $\underline{\underline{E}}_B$  (instant  $t_B$ ) selon un trajet particulier dans l'espace des déformations, à température constante  $T$ . On calcule alors la densité de travail mécanique fourni en un point matériel lors de cette transformation, en intégrant le long du trajet la densité de puissance (4.13) :

$$\begin{aligned} W(\underline{\underline{E}}_A \longrightarrow \underline{\underline{E}}_B) &:= \int_{t_A}^{t_B} \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{E}}} dt = \int_{t_A}^{t_B} \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{E}}} : \dot{\underline{\underline{E}}} dt = [\rho_0 \psi_0(\underline{\underline{E}}, T)]_A^B \\ &= \rho_0 \psi_0(\underline{\underline{E}}_B, T) - \rho_0 \psi_0(\underline{\underline{E}}_A, T) \end{aligned} \quad (7.37)$$

On voit que le travail de déformation  $W$  ne dépend que de la valeur des variables d'état au début et à la fin du processus et est indépendant du trajet de déformation<sup>3</sup>. Ce n'est pas le cas pour un corps élastique en général. Un contre-exemple sera donné au paragraphe suivant.

Si le trajet de déformation est fermé ou **cyclique**, i.e. si  $\underline{\underline{E}}_A = \underline{\underline{E}}_B$ , le résultat précédent implique que le travail fourni au cours de l'ensemble du cycle est nul. Cela signifie que l'énergie élastique stockée au cours d'une partie du trajet est rendue intégralement durant le trajet retour même s'il s'effectue par un autre chemin. C'est le caractère **réversible** du comportement hyperélastique.

Une propriété commune à tous les corps élastiques est l'indépendance de l'état de contrainte vis-à-vis de la vitesse de déformation  $\dot{\underline{\underline{E}}}$ . Cela est simplement dû au fait qu'on a délibérément restreint la fonctionnelle mémoire à une simple dépendance en  $\underline{\underline{E}}$  et non en  $\dot{\underline{\underline{E}}}$ . Pour un corps élastique, l'état de contrainte atteint à l'issue d'un trajet de déformation ne dépend pas du temps mis pour le parcourir. En effet, le travail fourni le long d'un tel trajet ne dépend que des valeurs de déformations rencontrées :

$$W(\underline{\underline{E}}_A \longrightarrow \underline{\underline{E}}_B) = \int_{t_A}^{t_B} \underline{\underline{\Pi}} : \frac{d\underline{\underline{E}}}{dt} dt = \int_{\underline{\underline{E}}_A}^{\underline{\underline{E}}_B} \underline{\underline{\Pi}} : d\underline{\underline{E}}$$

La **rigidité instantanée** d'un corps élastique est la pente de la réponse  $\underline{\underline{\Pi}}$  fonction de  $\underline{\underline{E}}$  définie de manière générale par

$$\Lambda_{ijkl} := \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}} \quad (7.38)$$

dans une base orthonormée  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . Il s'agit donc d'un tenseur d'ordre 4 que l'on notera

$$\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{E}}, T) := \frac{\partial \underline{\underline{\Pi}}}{\partial \underline{\underline{E}}}(\underline{\underline{E}}, T) = \Lambda_{ijkl}(\underline{\underline{E}}, T) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (7.39)$$

On l'appelle le **tenseur des modules d'élasticité instantanés**. Il est par définition tel que

$$\dot{\underline{\underline{\Pi}}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \dot{\underline{\underline{E}}} + \frac{\partial \underline{\underline{\Pi}}}{\partial T} \dot{T}$$

Le tenseur des modules d'élasticité instantanés opère donc sur les tenseurs d'ordre 2 symétriques et renvoie un tenseur symétrique d'ordre 2. Il est par conséquent suffisant de se limiter aux tenseurs d'ordre 4 possédant les **symétries mineures** :

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{ijlk} = \Lambda_{jikl} \quad (7.40)$$

---

3. Un trajet de déformation est une fonction  $f(\underline{\underline{E}}, t) = 0$  donnée.

Si le corps élastique est en outre hyperélastique, le tenseur des modules d'élasticité instantané s'exprime en fonction du potentiel d'élasticité, en combinant (7.28) et (7.38) :

$$\underline{\underline{\Lambda}}(\underline{\underline{E}}, T) = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \underline{\underline{E}}^2} \quad (7.41)$$

En effet,

$$\Lambda_{ijkl} = \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial E_{kl}} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial E_{kl}} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{ij}} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}}$$

Une conséquence fondamentale de ce résultat est le

**Théorème 21 (Symétrie du tenseur des modules d'élasticité instantanés)** *Le tenseur des modules d'élasticité instantanés possède les propriétés de symétries majeures suivantes :*

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{klij} \quad (7.42)$$

que l'on notera

$$\underline{\underline{\Lambda}}^T = \underline{\underline{\Lambda}}$$

**Preuve.** La propriété découle du théorème de Schwarz d'interversion des dérivées partielles croisées :

$$\Lambda_{ijkl} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial E_{ij}} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial E_{kl}} \right) = \frac{\partial \Pi_{kl}}{\partial E_{ij}} = \Lambda_{klij}$$

en utilisant la définition (7.38).  $\square$

On dit souvent plus brièvement que le tenseur des modules d'élasticité instantanés est symétrique.

### 7.2.5 Hyperélasticité isotrope

Un corps hyperélastique est isotrope lorsque les tenseurs de structure matérielle se réduisent à la métrique  $\underline{\underline{G}}_0$ . Son énergie libre  $\psi_0(\underline{\underline{E}}, T)$  (où le recours à  $\underline{\underline{G}}_0$  est tacite) est une fonction tensorielle de ses arguments. D'après le théorème de représentation 36 (page 341) pour les fonctions scalaires isotropes d'une variable tensorielle,  $\psi_0$  doit être une fonction des invariants principaux de  $\underline{\underline{E}}$  :

$$\psi_0(\underline{\underline{E}}, T) \equiv \psi_0(I_1, I_2, I_3, T) \quad (7.43)$$

où les invariants principaux  $I_1, I_2, I_3$  ont été définis par les relations (12.171) à (12.173). Dans cette partie, par commodité, on change les définitions de  $I_2$  et  $I_3$  en remplaçant (12.172) et (12.173) par

$$I_2(\underline{\underline{E}}) := \frac{1}{2} \text{trace } \underline{\underline{E}}^2, \quad I_3(\underline{\underline{E}}) := \frac{1}{3} \text{trace } \underline{\underline{E}}^3 \quad (7.44)$$

Il est bien clair que  $\det \underline{\underline{E}}$  et  $\text{trace } \underline{\underline{E}}^3$  sont tous les deux des invariants qui font intervenir les produits des 3 valeurs principales de  $\underline{\underline{E}}$ . Il ne s'agit que d'une substitution de notation qui simplifiera un peu les expressions des lois hyperélastiques isotropes.

Dès lors, les relations d'hyperélasticité (7.28) deviennent

$$\underline{\underline{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{E}}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{E}}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{E}}} \quad (7.45)$$

Calculons les dérivées des invariants principaux de  $\tilde{\mathbf{E}}$  par rapport à  $\tilde{\mathbf{E}}$ . On peut vérifier composante par composante (dans une base orthonormée) que

$$\frac{\partial I_1}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} = \frac{\partial \text{trace } \tilde{\mathbf{E}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} = \mathbf{1} \quad (7.46)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \text{trace } \tilde{\mathbf{E}}^2}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial E_{pq} E_{qp}}{\partial E_{ij}} = E_{ji} = E_{ij} \quad (7.47)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial I_2}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} = \tilde{\mathbf{E}}^T = \tilde{\mathbf{E}} \quad (7.48)$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_3}{\partial E_{ij}} &= \frac{1}{3} \frac{\partial \text{trace } \tilde{\mathbf{E}}^3}{\partial E_{ij}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial E_{pq} E_{qr} E_{rp}}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{3} (E_{jr} E_{ri} + E_{pi} E_{jp} + E_{jq} E_{qi}) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial I_3}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} = (\tilde{\mathbf{E}}^2)^T = \tilde{\mathbf{E}}^2 \quad (7.49)$$

Finalement, la loi des solides hyperélastiques isotropes s'écrit

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \mathbf{1} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \tilde{\mathbf{E}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3} \tilde{\mathbf{E}}^2 \quad (7.50)$$

Ces lois d'hyperélasticité isotrope peuvent être comparées aux lois d'élasticité isotrope déjà établies au paragraphe (7.1.3). On réécrit ici la loi générale des corps élastiques isotropes (7.10) en fonction de  $\tilde{\mathbf{E}}$ , sans restriction de généralité :

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{E}} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{E}}^2 \quad (7.51)$$

où les  $\alpha_i$  sont des fonctions des invariants principaux de  $\tilde{\mathbf{E}}$ . On voit qu'un solide élastique isotrope est hyperélastique à condition qu'il existe un potentiel  $\psi_0$  tel que

$$\alpha_0 = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1}, \quad \alpha_1 = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2}, \quad \alpha_2 = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3}$$

Un tel potentiel existe si les fonctions  $\alpha_i$  vérifient les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial I_2} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_1}, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_3} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial I_2}, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial I_1} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial I_3}$$

### *Formulation eulérienne de l'hyperélasticité isotrope*

La loi hyperélastique isotrope peut être formulée directement à partir du potentiel  $\psi(\mathbf{B})$  grâce au théorème de représentation déjà utilisé pour  $\psi_0$ . On peut également partir de l'expression lagrangienne de la loi hyperélastique (7.50) en l'écrivant toutefois sous la

forme équivalente

$$\underline{\Pi} = 2 \left( \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \underline{1} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \underline{C} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3} \underline{C}^2 \right) \quad (7.52)$$

où l'on a préféré la variable  $\underline{C}$ . Par abus de notation, on a gardé la même notation pour cette nouvelle fonction énergie libre. Les invariants  $I_i$  sont relatifs ici au tenseur de Cauchy-Green droit  $\underline{C}$ . On calcule alors le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \frac{1}{J} \underline{F} \cdot \underline{\Pi} \cdot \underline{F}^T = 2 \frac{\rho_0}{J} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \underline{F} \cdot \underline{F}^T + \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \underline{F} \cdot \underline{C} \cdot \underline{F}^T + \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3} \underline{F} \cdot \underline{C}^2 \cdot \underline{F}^T \right) \\ &= 2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \underline{1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \underline{B} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \underline{B}^2 \right) \cdot \underline{B} \\ &= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{B}} \cdot \underline{B} = 2\rho \underline{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{B}} \end{aligned} \quad (7.53)$$

On a utilisé le fait que les invariants principaux de  $\underline{C}$  et  $\underline{B}$  sont les mêmes<sup>4</sup> et défini donc  $\psi(\underline{B}, T) = \psi_0(\underline{C}, T)$  comme une fonction des invariants de  $\underline{B}$ .

*Un exemple de loi d'élasticité non hyperélastique*

Nous sommes en mesure maintenant de montrer un exemple de loi d'élasticité isotrope qui ne soit pas hyperélastique. Considérons par exemple la loi d'élasticité isotrope particulière

$$\underline{\Pi} = \frac{\alpha}{2} (\text{trace } \underline{E}^2) \underline{1} \quad (7.54)$$

Une telle loi n'est pas hyperélastique car

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial I_2} = \alpha \neq \frac{\partial \alpha_1}{\partial I_1} = 0$$

Une conséquence est que le travail de déformation d'un tel milieu sur un trajet  $A \rightarrow B$  dépend en fait du chemin suivi. Pour le voir, on considère par exemple deux trajets :

$$[\underline{E}_1(\lambda)] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underline{E}_2(\lambda)] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dans une base cartésienne orthonormée donnée. Ces deux trajets distincts permettent de partir d'un état non déformé  $\underline{E}_A = \underline{E}_1(\lambda = 0) = \underline{E}_2(\lambda = 0) = 0$  et d'atteindre le

même état  $\underline{E}_B = \underline{E}_1(\lambda = 1) = \underline{E}_2(\lambda = 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  en passant par les états

---

4. Cela vient du fait que pour 2 tenseurs d'ordre 2 quelconques  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$ , on a

$$\text{trace}(\underline{A} \cdot \underline{B}) = A_{ij} B_{ji} = B_{ji} A_{ij} = \text{trace}(\underline{B} \cdot \underline{A})$$

et donc :

$$\text{trace } \underline{C} = \text{trace}(\underline{F}^T \cdot \underline{F}) = \text{trace}(\underline{F} \cdot \underline{F}^T) = \text{trace } \underline{B}$$

$$\text{trace } \underline{C}^2 = \text{trace}(\underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F}) = \text{trace}(\underline{F} \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{F}^T) = \text{trace } \underline{B}^2$$

$\psi(\underline{\mathbf{B}}, T; \underline{\mathbf{g}}, \mathcal{S}_{\kappa_0})$	potentiel d'élasticité (énergie libre massique)
$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{g}}}$	loi de Doyle-Ericksen
$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}$	entropie massique
$d = -\frac{1}{T} \underline{\mathbf{q}} \cdot \frac{\underline{\mathbf{g}}}{T} \geq 0$	dissipation thermique
$\underline{\mathbf{q}} = -\kappa(\underline{\mathbf{B}}, T; \underline{\mathbf{g}}, \mathcal{T}_{\kappa_0}^{F^{-1}}) \cdot \underline{\mathbf{g}}$	loi de Fourier
Cas des matériaux hyperélastiques isotropes :	
$\psi(\underline{\mathbf{B}}, T) \equiv \psi(I_1, I_2, I_3, T)$	
$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \underline{\mathbf{B}} + \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \underline{\mathbf{B}}^2 + \rho \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \underline{\mathbf{B}}^3$	

Tableau 7.1: Récapitulatif : Lois de comportement eulériennes des corps thermo-hyperélastiques.

transitoires distincts pour  $0 \leq \lambda \leq 1$ . On calcule la puissance pour ces états consécutifs de déformation

$$\underline{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{\alpha}{2} (\lambda^2 + \lambda_2^2) (\dot{\lambda} + \dot{\lambda}_2)$$

avec  $\lambda_2 = \lambda$  pour le premier trajet et  $\lambda_2 = \lambda^2$  pour le second. En intégrant la puissance sur l'ensemble du trajet, on trouve

$$W_1 = \int_{t_A}^{t_B} 2\alpha \lambda^2 \dot{\lambda} dt = \frac{2}{3} \alpha$$

$$W_2 = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\alpha}{2} (\lambda^2 + \lambda^4) (1 + 2\lambda) \dot{\lambda} dt = \frac{41}{60} \alpha$$

Le travail obtenu dépend donc du trajet<sup>5</sup> de déformation. Ce résultat s'oppose à l'idée que l'on se fait d'un comportement élastique, de sorte que l'on préférera toujours utiliser des lois hyperélastiques dans la modélisation et la simulation des matériaux élastiques, dans la mesure du possible. Lors de la modélisation phénoménologique de certains comportements élastiques non linéaires, il est parfois plus facile de construire des lois de type élastique que de trouver un potentiel d'élasticité.

5. La différence est certes minime,  $0.68\alpha$  contre  $0.66\alpha$  ! Mais cumulée sur plusieurs cycles, une approche élastique de cette sorte peut s'avérer inacceptable.

$\psi_0(\underline{\mathbf{E}}, T; \mathcal{T}_{\kappa_0})$	potentiel d'élasticité (énergie libre massique)
$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{E}}}$	contraintes de Piola
$\underline{\Lambda} := \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{E}} \partial \underline{\mathbf{E}}}$	tenseur des modules d'élasticité instantanés
$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk}$	symétries mineures des modules d'élasticité
$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{klji}$	symétries majeures des modules d'élasticité
$s_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial T}$	entropie massique
$D = -\frac{1}{T} \underline{\mathbf{Q}} \cdot \frac{\underline{\mathbf{G}}}{T} = -\frac{1}{T} \frac{\rho_0}{\rho} \underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{g}} \geq 0$	dissipation thermique
$\underline{\mathbf{Q}} = -\underline{\mathbf{K}}(\underline{\mathbf{E}}, T) \underline{\mathbf{G}}$	loi de Fourier
Cas des matériaux hyperélastiques isotropes :	
$\psi_0(\underline{\mathbf{E}}, T) \equiv \psi_0(I_1, I_2, I_3, T)$	
$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_1} \underline{\mathbf{1}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_2} \underline{\mathbf{E}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial I_3} \underline{\mathbf{E}}^2$	

Tableau 7.2: Récapitulatif : Lois de comportement lagrangiennes des corps thermo-hyperélastiques.

### 7.2.6 Potentiel dual $\psi_0^*$ pour les corps hyperélastiques

Il serait légitime de vouloir représenter les grandeurs physiques comme des fonctions non pas de  $(\underline{\mathbf{E}}, T)$  mais de  $(\underline{\Pi}, T)$ , en particulier si les expériences permettant de déterminer les lois de comportement sont à contrainte imposée.

On peut alors se demander s'il existe un potentiel dual  $\psi_0^*(\underline{\Pi}, T)$  tel que

$$\underline{\mathbf{E}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0^*}{\partial \underline{\Pi}} \quad (7.55)$$

Si un tel potentiel dual existe, l'observation de la figure 7.2 indique qu'il représente l'**énergie complémentaire** au potentiel élastique pour former le travail élastique total :

$$\underline{\Pi} : \underline{\mathbf{E}} = \rho_0 \psi_0(\underline{\mathbf{E}}, T) + \rho_0 \psi_0^*(\underline{\Pi}, T), \quad (7.56)$$

sous la contrainte  $\Pi = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial E}$ . Dans le cas où le potentiel élastique est convexe, la relation précédente permet de définir  $\psi_0^*$  de manière univoque comme

$$\rho_0 \psi_0^*(\Pi, T) = \max_{\underline{E}} (\Pi : \underline{E} - \rho_0 \psi_0(\underline{E}, T)) \quad (7.57)$$

Pour montrer l'équivalence entre les définitions (7.56) et (7.57)<sup>6</sup>, on s'appuie sur la convexité supposée du potentiel  $\rho_0 \psi_0(\underline{E})$ . On voit sur la figure 7.3 que, pour un  $\Pi$  donné, l'écart entre  $\Pi \cdot E$  et  $\rho_0 \psi_0$  est maximal pour la déformation  $E$  telle que la tangente à la courbe  $\rho_0 \psi_0$  en  $E$  est parallèle à la droite  $\sigma \cdot \varepsilon$ . Cette situation correspond donc bien à  $\Pi = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial E}(E)$ . La démonstration esquissée ici par un schéma uni-dimensionnel s'étend au cas tridimensionnel. En outre, le potentiel dual est convexe par rapport à ses arguments dès que le potentiel élastique l'est. On verra, au moins dans le cas linéaire, que la convexité du potentiel élastique est synonyme de stabilité du corps considéré.

La seconde relation d'hyperélasticité (7.29) s'écrit aussi à l'aide du potentiel dual en dérivant (7.57) par rapport à la température

$$s = \frac{\partial \psi_0^*}{\partial T} \quad (7.58)$$

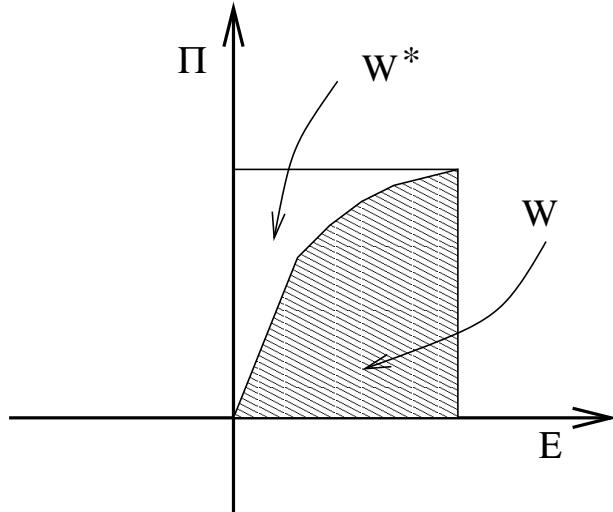


Figure 7.2 : Réponse non linéaire du matériau dans le cas uniaxial et définition du potentiel élastique et de l'énergie complémentaire :

$W(E) = \int_0^E W'(E)dE, W^*(\Pi) = \int_0^\Pi W'^*(\Pi)d\Pi$ . On en déduit que  $W$  est l'aire sous la courbe et  $W^*$  l'aire complémentaire. Les fonctions  $W(E)$  et  $W^*(\Pi)$  sont respectivement égales au potentiel élastique et au potentiel dual pour une température fixée.

6. Le potentiel dual s'appelle transformée de Legendre-Fenchel du potentiel élastique.

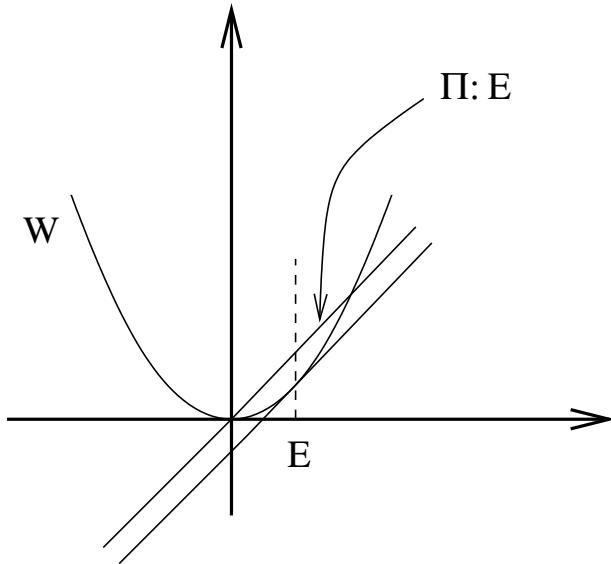


Figure 7.3 : Construction géométrique du potentiel d'élasticité dual.  $W$  est égal au potentiel élastique à une température donnée. Le travail  $\Pi \cdot E$  est représenté par la droite passant par l'origine. Le potentiel dual  $W^*(\Pi)$  est la différence entre le travail élastique total et la valeur du potentiel  $W$  au point où sa tangente est parallèle à  $\Pi$ .

### 7.3 Formulation eulérienne directe de l'hyperélasticité anisotrope

Il est possible de formuler directement la loi d'hyperélasticité générale, c'est-à-anisotrope, donnée par la relation de Doyle-Ericksen, dans un cadre purement eulérien. Pour cela on va introduire la dérivée convective de l'énergie libre au lieu de la dérivée totale utilisée dans (7.20). On se place dans le cas isotherme par simplicité.

#### 7.3.1 Dérivées convectives des arguments eulériens du potentiel

Les arguments eulériens du potentiel sont  $\psi(\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{B}}, \mathfrak{T}^{F^{-1}})$ . La dérivée convective d'une grandeur eulérienne s'obtient en trois étapes : calcul de l'image réciproque (*pull-back*) de cette grandeur dans l'espace matériel, calcul de la dérivée temporelle de cette grandeur transmuée, puis retour (*push-back*) du résultat obtenu.

La dérivée convective de la métrique spatiale vaut donc

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{g}}^{(conv)} &= \left( \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{g}}^F \right)^{F^{-1}} = {}^b \tilde{\mathbf{C}}^{F^{-1}} = \tilde{\mathbf{F}}^{-*} {}^b \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \\ &= \tilde{\mathbf{F}}^{-*} \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{F}}^* \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{F}}) \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \dot{\tilde{\mathbf{g}}} + \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^* \tilde{\mathbf{g}} = \dot{\tilde{\mathbf{g}}} + \tilde{\mathbf{g}} (\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T) \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{g}}} + 2\tilde{\mathbf{D}}\end{aligned}\tag{7.59}$$

En l'absence d'évolution de la métrique spatiale, la dérivée convective de la métrique spatiale est le double du taux de déformation :  $\tilde{\mathbf{g}}^{(conv)} = 2\tilde{\mathbf{D}}$ .

On passe au calcul de la dérivée convective de  $\tilde{\mathbf{B}}$  :

$$\tilde{\mathbf{B}}^{\sharp(\text{conv})} = \tilde{\mathbf{F}} \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{G}}^{-1}) \tilde{\mathbf{F}}^* = \tilde{\mathbf{F}} \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{F}}^{-*}) \tilde{\mathbf{F}}^* = \dot{\tilde{\mathbf{B}}}^\sharp - \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp - \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{L}}^* \quad (7.60)$$

En l'absence d'évolution de la métrique matérielle, la dérivée convective de  $\tilde{\mathbf{B}}$  est nulle :  $\tilde{\mathbf{B}}^{(\text{conv})} = 0$ .

Il reste à calculer la dérivée convective des tenseurs de structures. Pour fixer les idées, on prend l'exemple d'un tenseur de structure d'ordre 2, deux fois contravariant,  $\tilde{\mathfrak{T}}^{IJ}$  :

$$(\tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}})^{(\text{conv})} = \tilde{\mathbf{F}} \dot{\tilde{\mathfrak{T}}} \tilde{\mathbf{F}}^* = \frac{d}{dt} (\tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}}) - \tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}} \tilde{\mathbf{L}}^* - \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}} \quad (7.61)$$

En l'absence d'évolution des tenseurs de structure matériels, leur dérivées convectives sont nulles :  $\tilde{\mathfrak{T}}^{(\text{conv})} = 0$ . La méthode de calcul s'étend aux tenseurs de structure d'ordre quelconque.

La fonction énergie libre massique admet deux paramétrages :

$$\psi(\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}}) = \psi_0(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathfrak{T}})$$

de sorte que la dérivée temporelle de l'énergie s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}}) &= \frac{d}{dt} (\psi_0(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathfrak{T}})) = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} : \dot{\tilde{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{G}}} : \dot{\tilde{\mathbf{G}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathfrak{T}}} : \dot{\tilde{\mathfrak{T}}} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} : (\tilde{\mathbf{F}}^{-*} \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1}) + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{B}}} : (\tilde{\mathbf{F}}^{-*} \dot{\tilde{\mathbf{G}}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1}) \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}}} : (\tilde{\mathbf{F}}^{-1} (\frac{d}{dt} \dot{\tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}}}) \tilde{\mathbf{F}}^{-*}) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} : \tilde{\mathbf{g}}^{(\text{conv})} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{B}}} : \tilde{\mathbf{B}}^{(\text{conv})} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}}} : (\tilde{\mathfrak{T}}^{F^{-1}})^{(\text{conv})} \end{aligned} \quad (7.62)$$

Les expressions de la deuxième ligne sont obtenues en utilisant la même méthode qu'au paragraphe 7.2.3.

### 7.3.2 Exploitation de l'inégalité de Clausius-Duhem

Dans le cas isotherme, l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit

$$d = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{D}} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (7.63)$$

où  $d$  désigne le taux de dissipation d'énergie. En utilisant l'expression (7.62) dans le cas où la structure matérielle n'évolue pas (i.e. les tenseurs de structures matériels sont indépendants du temps, ce qui correspond à une absence de vieillissement), on obtient

$$\begin{aligned} d &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{D}} - \rho \dot{\psi} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{g}}^{(\text{conv})} - \rho \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} : \tilde{\mathbf{g}}^{(\text{conv})} \geq 0 \\ &= \left( \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} \right) : \tilde{\mathbf{g}}^{(\text{conv})} \geq 0 \end{aligned} \quad (7.64)$$

comme cela a été fait par (Stumpf and Hoppe, 1997).

L'absence de dissipation lors de la transformation d'un corps élastique exige la nullité du cofacteur de la forme linéaire (7.64). On obtient la loi d'état hyperélastique recherchée :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{g}}}$$

qui est identique à (7.36).

#### 7.4 Hyperélasticité dans le cas de l'isotropie transverse

Il est temps de montrer comment la méthode proposée permet d'aboutir à la formulation de lois d'élasticité anisotrope. On a choisi l'exemple des matériaux élastiques de la classe de symétrie isotrope transverse.

##### 7.4.1 Retour sur l'hyperélasticité isotrope

Afin de préparer la présentation de la loi de comportement hyperélastique isotrope transverse, nous reprenons le cas isotrope en insistant sur l'utilisation du tenseur métrique  $\tilde{\mathbf{g}}$ .

##### Potentiel énergie libre eulérien isotrope

Le potentiel eulérien du solide élastique isotrope est de la forme  $\psi(\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{B}})$ . Il s'agit d'une fonction isotrope de ses arguments. Elle ne dépend donc que des invariants des deux tenseurs impliqués :

$$\rho\psi(\text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp), \text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp), \text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp))$$

où  $\tilde{\mathbf{B}}^\sharp = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{g}}^{-1}$  ( $B^{ij} = B^i{}_k g^{kj}$ ). L'emploi de la variance  $\tilde{\mathbf{B}}^\sharp = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{G}}^{-1}\tilde{\mathbf{F}}^*$  se justifie par le fait que  $\tilde{\mathbf{B}}^\sharp$  ne dépend pas de  $\tilde{\mathbf{g}}$  par rapport à laquelle on va être amené à dériver. On calcule successivement :

$$\text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp) = g_{ij}B^{ji} \implies \frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp)}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} = \tilde{\mathbf{B}}^\sharp, \quad \frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp)}{\partial \tilde{\mathbf{B}}^\sharp} = \tilde{\mathbf{g}}$$

$$\text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp) = g_{ij}B^{jk}g_{kl}B^{li} \implies \frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp)}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} = 2\tilde{\mathbf{B}}^\sharp\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp,$$

$$\frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp)}{\partial \tilde{\mathbf{B}}^\sharp} = 2\tilde{\mathbf{g}}\tilde{\mathbf{B}}^\sharp\tilde{\mathbf{g}}$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} = \alpha_1 \tilde{\mathbf{B}}^\sharp + 2\alpha_2 \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp + 3\alpha_3 \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \quad (7.65)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{B}}^\sharp} = \alpha_1 \tilde{\mathbf{g}} + 2\alpha_2 \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} + 3\alpha_3 \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \quad (7.66)$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont des fonctions scalaires des trois invariants en jeu.  
On en déduit que

$$\tilde{\mathbf{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{B}}^\sharp} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{g}} \tilde{g} = \tilde{B}^\sharp \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{B}^\sharp}$$

Attention, ces relations ne sont valables que dans le cas isotrope.

La loi d'hyperélasticité est

$$\sigma = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{g}} \quad (7.67)$$

En vertu de (7.65) on a tout aussi bien

$$\sigma = 2\tilde{g}^{-1}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{B}^\sharp} \tilde{B}^\sharp \quad (7.68)$$

L'utilisation de la relation (7.65) donne accès à la forme détaillée de la loi d'hyperélasticité isotrope eulérienne :

$$\sigma = \beta_1 \tilde{B}^\sharp + \beta_2 \tilde{B}^\sharp \tilde{g} \tilde{B}^\sharp + \beta_3 \tilde{B}^\sharp \tilde{g} \tilde{B}^\sharp \tilde{g} \tilde{B}^\sharp \quad (7.69)$$

où les fonctions  $\beta_i$  dépendent des trois invariants indiqués au début de la section 7.4.1. Noter que la puissance troisième de  $\tilde{B}$  peut être éliminée en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton. On retrouve ainsi la relation (7.9) avec toutefois une variance différente de  $\sigma$ , à savoir  $\sigma^{ij}$  dans (7.69) et  $\sigma^i_j$  dans (7.9).

La loi lagrangienne s'en déduit par les transports adaptés :

$$\tilde{\Pi} = J\beta_1 \tilde{G}^{-1} + J\beta_2 \tilde{C}^\sharp + J\beta_3 \tilde{C}^\sharp \tilde{G} \tilde{C}^\sharp \quad (7.70)$$

où les fonctions  $\beta_i$  s'interprètent comme des fonctions des invariants de  $\tilde{C}$  et  $\tilde{G}$  en remarquant que

$$\text{trace } \tilde{B} = \text{trace } (\tilde{B}^\sharp \tilde{g}) = \text{trace } (\tilde{F} \tilde{F}^T) = \text{trace } (\tilde{F}^T \tilde{F}) = \text{trace } (\tilde{G}^{-1} \tilde{C}^\sharp) = \text{trace } \tilde{C}$$

### *Expression lagrangienne alternative*

On revient sur la formulation lagrangienne de l'élasticité isotrope en insistant sur les variances en jeu :

$$\tilde{\Pi} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{C}}, \quad \Pi^{IJ} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial C_{IJ}} \quad (7.71)$$

On obtient une expression alternative de la loi lagrangienne en calculant

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}^{-1}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{B}^\sharp} \frac{\partial \tilde{B}^\sharp}{\partial \tilde{G}^{-1}} = \tilde{F}^* \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{B}^\sharp} \tilde{F} = \frac{1}{2} \tilde{G} \tilde{F}^T \tilde{g} \tilde{\sigma} \tilde{F}^{-T} \tilde{G} = \frac{1}{2} \tilde{G} \tilde{C} \tilde{\Pi} \tilde{G}$$

dont on déduit la relation

$$\tilde{M} = \tilde{C} \tilde{\Pi} = 2\tilde{G}^{-1} \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}^{-1}} \tilde{G}^{-1} \quad (7.72)$$

qui est l'analogie lagrangien de la la loi (7.68)<sup>7</sup>. On a fait appel au tenseur des contraintes de Mandel  $\tilde{M} = \tilde{C} \tilde{\Pi}$  introduit dans la table 4.1.

---

7. à rapprocher de l'éq. (55)<sub>a</sub> chez (Lu and Papadopoulos, 2000).

$\underline{\Pi} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}} \quad \iff \quad \underline{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{g}}$
$\underline{M} = 2\underline{G}^{-1} \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}^{-1}} \underline{G}^{-1} \quad \iff \quad \underline{\sigma} = 2\underline{g}^{-1} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{B}^\sharp} \underline{B}^\sharp$
$\underline{\sigma} = \beta_1 \underline{B}^\sharp + \beta_2 \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp + \beta_3 \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp$

Tableau 7.3: Synthèse : hyperélasticité isotrope.

Une formulation alternative de la relation (7.72) est :

$$\underline{M} = \underline{G} \underline{\Pi} = - \left( \underline{G} \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}} + \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}} \underline{G} \right)$$

On a utilisé le fait que, pour un tenseur du second ordre symétrique<sup>8</sup>  $\underline{A}$ ,

$$\left( \frac{\partial \underline{A}^{-1}}{\partial \underline{A}} \right)_{ijkl} = -\frac{1}{2} \left( A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} + A_{il}^{-1} A_{jk}^{-1} \right)$$

Une synthèse des relations hyperélastiques isotropes fait l'objet de la table 7.3.

#### 7.4.2 Jeu de variables dans le cas isotrope transverse

Dans le cas de l'invariance de configuration de type isotrope transverse d'axe donné par le vecteur  $\underline{a}_0$  dans la configuration locale de référence  $\kappa_0$  et par  $\underline{a} = \underline{a}_0^{F^{-1}} = \underline{F} \underline{a}_0$  dans la configuration courante, le tenseur de structure, deux fois contravariant, est donné par

$$\underline{A}_0 = \underline{a}_0 \otimes \underline{a}_0, \quad \underline{A} = \underline{a} \otimes \underline{a} = \underline{F} \underline{A}_0 \underline{F}^* = \underline{A}^{F^{-1}} \quad (7.73)$$

d'après (Boehler, 1987; Lu and Papadopoulos, 2000). Il n'y a pas de restriction à prendre  $\underline{a}_0$  de norme 1. Il s'ensuit que  $\underline{A}_0 \underline{G} \underline{A}_0 = \underline{A}_0$ .

Le jeu de variables à considérer est donc constitué de

$$(\underline{F}(t); \underline{g}, \underline{G}, \underline{A}_0)$$

---

8. Pour un tenseur d'ordre 2 quelconque, on a

$$A_{ip}^{-1} A_{pq} = \delta_{iq} \implies \frac{\partial A_{ip}^{-1}}{\partial A_{kl}} A_{pq} = -A_{ip}^{-1} \frac{\partial A_{pq}}{\partial A_{kl}} = -A_{ip}^{-1} \delta_{pk} \delta_{ql} = -A_{ik}^{-1} \delta_{ql}$$

Par suite, en multipliant à droite par l'inverse de  $\underline{A}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ip}^{-1}}{\partial A_{kl}} A_{pq} A_{qj}^{-1} &= \frac{\partial A_{ip}^{-1}}{\partial A_{kl}} \delta_{pj} = -A_{ik}^{-1} \delta_{ql} A_{qj}^{-1} = -A_{ik}^{-1} A_{lj}^{-1} \\ \frac{\partial A_{ij}^{-1}}{\partial A_{kl}} &= -A_{ik}^{-1} A_{lj}^{-1} \end{aligned}$$

Si le tenseur  $\underline{A}$  est symétrique, la dérivée de  $A_{ji}$  par rapport à  $A_{kl}$  doit fournir le même résultat. On peut alors sommer les deux expressions et diviser par deux pour obtenir la relation annoncée.

à savoir la variable de contrôle  $\tilde{\mathbf{F}}(t)$ , les métriques spatiale et matérielle et le tenseur de structure.

Les transports adaptés permettent à partir du jeu précédent d'obtenir les arguments purement eulériens ou purement lagrangiens du potentiel d'énergie libre de Helmholtz :

$$\psi(\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{B}}(t), \tilde{\mathbf{A}}) = \psi_0(\mathbf{C}(t), \mathbf{G}, \mathbf{A}_0)$$

Ce sont des fonctions isotropes, i.e. covariantes de leurs arguments (Lu and Papadopoulos, 2000).

#### 7.4.3 Loi d'hyperélasticité eulérienne isotrope transverse

Les fonctions tensorielles  $\psi(\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{B}}(t), \tilde{\mathbf{A}})$  dépendent des 5 invariants suivants :

$$\begin{aligned} & \psi(\text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}}), \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}}), \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}}), \\ & \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}}), \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}}) \end{aligned} \quad (7.74)$$

d'après (Boehler, 1987). Noter que  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^\sharp$  et  $\tilde{\mathbf{g}}^{-1}$  sont de même variance, à savoir 2 fois contravariants :  $A^{ij}$ ,  $B^{ij}$ ,  $g^{ij}$ . On calcule alors les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}})}{\partial \tilde{\mathbf{B}}^\sharp} = \alpha_4 \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}}, \quad (7.75)$$

$$\frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}})}{\partial \tilde{\mathbf{B}}^\sharp} = \alpha_5 (\tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}}) \quad (7.76)$$

$$\frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}})}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} = \alpha_4 (\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp) \quad (7.77)$$

$$\frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}})}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} = \alpha_5 (\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp + \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp) \quad (7.78)$$

$$\frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}})}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} = \alpha_4 \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}}, \quad \frac{\partial \text{trace}(\tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{g}})}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} = \alpha_5 \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^\sharp \tilde{\mathbf{g}} \quad (7.79)$$

L'expression du second principe dans sa version eulérienne prend la forme suivante

$$\begin{aligned} d &= \sigma : \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{g}}}^{(conv)} - \rho \dot{\psi}^{(conv)} \\ &= \sigma : \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{g}}}^{(conv)} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{B}}} : \dot{\tilde{\mathbf{B}}}^{(conv)} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{A}}} : \dot{\tilde{\mathbf{A}}}^{(conv)} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{g}}} : \dot{\tilde{\mathbf{g}}}^{(conv)} \geq 0 \end{aligned}$$

qui fait intervenir la dérivée convective du tenseur de structure

$$\dot{\tilde{\mathbf{A}}}^{(conv)} = \tilde{\mathbf{F}} \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_0 \tilde{\mathbf{F}}^* = 0 = \dot{\tilde{\mathbf{A}}} - \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{L}}^*$$

en supposant que le tenseur de structure lagrangien est constant (non vieillissant). La loi de comportement est donc toujours fournie par la relation d'hyperélasticité (7.67) et, grâce

à (7.65) et aux relations ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{g}} = \beta_1 \underline{B}^\sharp + \beta_2 \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp + \beta_3 \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp \\ &+ \beta_4 (\underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{A} + \underline{A} \underline{g} \underline{B}^\sharp) + \beta_5 (\underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{A} \underline{g} \underline{B}^\sharp + \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{A} + \underline{A} \underline{g} \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp)\end{aligned}\quad (7.80)$$

L'observation des relations (7.75) à (7.79) permet en outre d'établir la relation suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{B}^\sharp} \underline{B}^\sharp - \underline{g} \frac{\partial \psi}{\partial \underline{g}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{A}} \underline{A} = 0 \quad (7.81)$$

dont on déduit la relation d'hyperélasticité alternative :

$$\underline{\sigma} = 2\rho \underline{g}^{-1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{B}^\sharp} \underline{B}^\sharp + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{A}} \underline{A} \right) \quad (7.82)$$

Cette expression découle également de l'exploitation du second principe sous la forme

$$\underline{\sigma} : \underline{g} \underline{L} - \rho \dot{\psi} = \left( \underline{g} \underline{\sigma} - 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{B}^\sharp} \underline{B}^\sharp - 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{A}} \underline{A} \right) : \underline{L} \geq 0 \quad (7.83)$$

#### 7.4.4 Loi d'hyperélasticité lagrangienne isotrope transverse

La loi lagrangienne s'obtient par le *pull-back* de la loi (7.80) :

$$\begin{aligned}\underline{\Pi} &= J \underline{\sigma}^F = J \beta_1 \underline{G}^{-1} + J \beta_2 \underline{C}^\sharp + J \beta_3 \underline{C}^\sharp \underline{G} \underline{C}^\sharp + J \beta_4 (\underline{C}^\sharp \underline{G} \underline{A}_0 + \underline{A}_0 \underline{G} \underline{C}^\sharp) \\ &+ J \beta_5 (\underline{C}^\sharp \underline{G} \underline{A}_0 \underline{G} \underline{C}^\sharp + \underline{C}^\sharp \underline{G} \underline{C}^\sharp \underline{G} \underline{A}_0 + \underline{A}_0 \underline{G} \underline{C}^\sharp \underline{G} \underline{C}^\sharp)\end{aligned}\quad (7.84)$$

Elle dérive du potentiel écrit avec le jeu de variables lagrangiennes :

$$\underline{\Pi} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{C}} (\underline{C}(t), \underline{G}_0, \underline{A}_0) \quad (7.85)$$

Le potentiel est une fonction des 5 invariants calculés avec ces variables :

$$\begin{aligned}\psi_0(\text{trace}(\underline{G}^{-1} \underline{C}), \text{trace}(\underline{G}^{-1} \underline{C} \underline{G}^{-1} \underline{C}), \text{trace}(\underline{G}^{-1} \underline{C} \underline{G}^{-1} \underline{C} \underline{G}^{-1} \underline{C}), \\ \text{trace}(\underline{A}_0 \underline{C}), \text{trace}(\underline{A}_0 \underline{C} \underline{G}^{-1} \underline{C}))\end{aligned}\quad (7.86)$$

Un calcul des dérivées partielles par rapport à  $\underline{G}^{-1}$ ,  $\underline{C}$  et  $\underline{A}_0$  analogue à celui de la section précédente, permet d'établir la relation suivante :

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}^{-1}} \underline{G}^{-1} - \underline{C} \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{C}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{A}_0} \underline{A}_0 = 0 \quad (7.87)$$

et conduit à une forme alternative de la loi de comportement hyperélastique lagrangienne :

$$\underline{M} = \underline{C} \underline{\Pi} = 2\rho_0 \underline{G}^{-1} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}^{-1}} \underline{G}^{-1} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{A}_0} \underline{A}_0 \right) \quad (7.88)$$

conformément à (Lu and Papadopoulos, 2000). Une synthèse des relations hyperélastiques de la classe isotrope transverse fait l'objet de la table 7.4.

$\underline{\Pi} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{C}} \iff \underline{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{g}}$ $\underline{M} = 2\rho_0 \underline{G}^{-1} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}^{-1}} \underline{G}^{-1} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{A}_0} \underline{A}_0 \right) \iff \underline{\sigma} = 2\rho \underline{g}^{-1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{B}^\sharp} \underline{B}^\sharp + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{A}} \underline{A} \right)$ $\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \beta_1 \underline{B}^\sharp + \beta_2 \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp + \beta_3 \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp + \beta_4 (\underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{A} + \underline{A} \underline{g} \underline{B}^\sharp) \\ &+ \beta_5 (\underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{A} \underline{g} \underline{B}^\sharp + \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{A} + \underline{A} \underline{g} \underline{B}^\sharp \underline{g} \underline{B}^\sharp) \end{aligned}$
---

Tableau 7.4: Synthèse : hyperélasticité isotrope transverse

## 7.5 Liaisons internes dans les corps élastiques

Dans les analyses précédentes, on a supposé que les corps étaient capables d'accommorder tous les états de déformation possibles. Ce n'est pas toujours le cas en pratique. Le mouvement de certains corps est parfois entravé par une **liaison interne**. L'exemple le plus important est sans doute la liaison interne d'**incompressibilité**. Le milieu incompressible n'est pas capable de changer de volume. Il ne peut subir que des transformations isochores. La prise en compte des liaisons internes a des conséquences sur la forme de la loi de comportement. C'est l'objet de ce paragraphe.

### 7.5.1 Prise en compte de la liaison interne lors de l'exploitation du second principe

Une liaison interne s'exprime de façon générale sous la forme d'une relation liant les composantes d'un tenseur de déformation.

On choisit ici  $\underline{C}$  et on note  $g$  la fonction décrivant la liaison interne qui se met sous la forme

$$g(\underline{C}) = 0$$

On définit alors l'ensemble  $\mathcal{L}$  des déformations satisfaisant la liaison interne

$$\mathcal{L} := \{\underline{C} \in GL(E), \text{symétriques} \quad | \quad g(\underline{C}) = 0\} \quad (7.89)$$

On reprend l'exploitation du second principe pour un corps élastique en remplaçant simplement  $\underline{E}$  par  $\underline{C}$  dans (7.27) :

$$D = (\underline{\Pi} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{C}}) : \dot{\underline{C}} - \rho_0 (\frac{\partial \psi_0}{\partial T} + s_0) \dot{T} - \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{G}} : \dot{\underline{G}} - \underline{Q} \cdot \frac{\underline{G}}{T} \geq 0 \quad (7.90)$$

A  $T$  et  $\underline{G}$  fixés, cette inégalité doit être valable pour toutes les valeurs de  $\dot{T}$  et  $\dot{\underline{G}}$ . Les relations d'hyperélasticité (7.29) et (7.30) sont donc toujours valables. Il reste

$$D = (\underline{\Pi} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{C}}) : \dot{\underline{C}} \geq 0 \quad (7.91)$$

où  $\dot{\tilde{C}}$  ne peut pas prendre toutes les valeurs puisque  $\tilde{C}$  doit rester dans  $\mathcal{L}$ . Les tenseurs admissibles  $\tilde{C}$  sont donc tels que

$$\dot{g}(\tilde{C}) = \frac{\partial g}{\partial \tilde{C}} : \dot{\tilde{C}} = 0 \quad (7.92)$$

L'exploitation de (7.91) n'implique donc pas la nullité du terme en facteur de  $\dot{\tilde{C}}$  mais plutôt qu'il existe  $\lambda$  tel que

$$(\tilde{\Pi} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{C}}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{C}} \quad (7.93)$$

On note

$$\tilde{\Pi}^R = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{C}} \quad (7.94)$$

On l'appelle contrainte de **réaction** à la liaison interne  $g$ . La loi d'hyperélasticité s'écrit donc

$$\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}^R + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{C}} \quad (7.95)$$

Cette formulation très générale prend tout son sens quand on l'applique à des liaisons internes particulières. Elle montre que  $\tilde{\Pi}$  n'est soumis à aucune restriction alors même que la cinématique du solide est contrainte. Les contraintes de réaction restent indéterminées et ne peuvent être précisées qu'en utilisant les équations de bilan et les conditions aux limites du problème de structure à résoudre.

Les contraintes de réaction ne fournissent aucun travail dans un mouvement compatible avec la liaison interne puisque

$$\tilde{\Pi}^R : \dot{\tilde{C}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{C}} : \dot{\tilde{C}} = 0$$

d'après (7.92).

### 7.5.2 Incompressibilité

La liaison interne d'incompressibilité s'écrit  $\det \tilde{C} = 1$  mais aussi

$$g(\tilde{C}) = \det \tilde{C} - 1 = 0 \quad (7.96)$$

La dérivée de  $g$  par rapport à  $\tilde{C}$  se calcule en utilisant le résultat (12.177) du chapitre 12 :

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{C}} = (\det \tilde{C}) \tilde{C}^{-1} \quad (7.97)$$

On en déduit la loi de comportement d'un **corps hyperélastique incompressible** sous la forme

$$\tilde{\Pi} = \lambda \tilde{C}^{-1} + 2\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{C}} \quad (7.98)$$

Elle est plus facile à reconnaître si on exprime le tenseur des contraintes de Cauchy et si l'on écrit  $\lambda = -p$

$$\tilde{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2\rho_0 \tilde{F} \cdot \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{C}} \cdot \tilde{F}^T \quad (7.99)$$

L'incompressibilité ajoute donc une réaction de pression à l'état de contrainte. En conséquence la pression que subit le corps reste indéterminée par la loi de comportement. Il faudra calculer cette réaction par ailleurs grâce aux conditions d'équilibre. En particulier si le corps est un fluide élastique au sens des lois de comportement (7.13) ou (7.14), on voit que son état de contrainte est un état de réaction pure.

### 7.5.3 Rigidité

La condition de rigidité d'un solide est une liaison interne qui impose des liaisons sur toutes les composantes de  $\tilde{\mathbf{C}}$  :

$$\tilde{g}(\tilde{\mathbf{C}}) = \tilde{\mathbf{C}} - \tilde{\mathbf{1}} = 0$$

Par conséquent la dérivée de  $\tilde{g}$  par rapport à  $\tilde{\mathbf{C}}$  est l'identité  $\tilde{\mathbf{1}}_S$  d'ordre 4 opérant sur les tenseurs symétriques. Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  associé est donc un tenseur d'ordre 2 symétrique arbitraire. Les contraintes de réaction d'un solide rigide sont donc un tenseur de contraintes symétrique quelconque. Les solides rigides accommodent donc n'importe quelle contrainte imposée sans fournir de travail de déformation correspondant.

### 7.5.4 Inextensibilité dans une direction

Certains matériaux sont incapables de se déformer selon une direction  $\underline{e}$  particulière, vecteur unitaire de la configuration de référence. C'est le cas par exemple d'un matériau composite à fibres unidirectionnelles en SiC (carbure de silicium, très rigide), toutes parallèles entre elles et entourées d'une matrice résine époxy significativement plus souple (utilisation dans l'aéronautique). Dans ce cas la liaison interne d'inextensibilité s'écrit avec

$$g(\tilde{\mathbf{C}}) = \underline{e} \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \underline{e} - \underline{e} \cdot \underline{e} = 0$$

Les contraintes de réaction associées à cette liaison interne sont donc de la forme

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}^R = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \lambda \underline{e} \otimes \underline{e}$$

Il s'agit donc d'une contrainte de traction arbitraire dans la direction des fibres. Il est instructif de calculer les contraintes de réaction sur la configuration actuelle :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^R = J^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}^R \cdot \tilde{\mathbf{F}}^T = \sigma^R (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \underline{e}) \otimes (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \underline{e})$$

c'est-à-dire une traction simple selon la direction actuelle des fibres, en supposant qu'elles se déforment comme des lignes matérielles.

## 8 Thermoélasticité linéarisée

*Hooke, en effet, avait dit, avant Thomas Young, que les rayons lumineux interfèrent, comme ce dernier avait supposé avant Champollion, que les hiéroglyphes égyptiens sont quelquefois phonétiques. Hooke ne prouvait pas directement son hypothèse ; la preuve des valeurs phonétiques assignées par Young à divers hiéroglyphes, n'aurait pu reposer que sur des lectures qui n'ont pas été faites, qui n'ont pas pu l'être.*

*Faute de connaître la composition de la lumière blanche, Hooke n'avait pas une idée exacte de la nature des interférences, comme Young, de son côté, se trompait sur une prétexte valeur syllabique ou dissyllabique des hiéroglyphes.*

*Young, d'un consentement unanime, est considéré comme l'auteur de la théorie des interférences ; dès lors, par une conséquence qui me paraît inévitable, Champollion doit être regardé comme l'auteur de la découverte des hiéroglyphes.*

François Arago, *Thomas Young, biographie*, 1832.

### 8.1 Linéarisation de la loi des corps thermoélastiques

Lors de l'examen de l'intégrité et de la fiabilité des structures, il est bien souvent suffisant de considérer la réponse de la structure à de faibles déformations. Dans ce cadre infinitésimal, les lois de comportement prennent des formes plus simples à manipuler et à identifier expérimentalement. Il est toutefois important de bien préciser le type d'approximation qui est faite. On considère ici deux types d'approximation :

- **Hypothèse des déformations infinitésimales.** On suppose alors que les déformations de Green-Lagrange par rapport à une configuration de référence donnée restent faibles :

$$\|\tilde{\mathbf{E}}\| \ll 1 \quad (8.1)$$

Cette hypothèse ne concerne que les déformations. On n'exclut donc pas la possibilité de rotations finies (non infinitésimales). La situation de corps faiblement déformés mais subissant des rotations importantes a déjà été envisagée au paragraphe 2.3.3 (page 55). On a mentionné le cas des structures élancées dans une ou deux directions de l'espace, dont chacun de nous fait l'expérience quotidienne. Pour des structures réellement tridimensionnelles, si les déformations sont petites, les rotations le sont aussi (à un mouvement de corps rigide près).

- **Hypothèse des transformations infinitésimales.** De telles transformations ont déjà été décrites au paragraphe 2.3.3 et sont caractérisées par la condition (2.105) :

$$\|\tilde{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{u}} \otimes \nabla\| \ll 1 \iff \tilde{\mathbf{F}} = \mathcal{O}(\underline{\mathbf{1}}) \quad (8.2)$$

qui implique que les déformations  $\varepsilon$  et les rotations  $\omega$ , définies respectivement comme les parties symétrique et antisymétrique de  $\tilde{\mathbf{H}}$ , restent limitées.

La linéarisation sera faite aussi par rapport à la température et les lois linéarisées ne seront donc valables que pour des **variations de température** suffisamment faibles :

$$\frac{|T - T_0|}{T_0} \ll 1 \quad (8.3)$$

### 8.1.1 Cas des déformations infinitésimales

Les lois d'hyperélasticité (7.28) et (7.29) sont linéarisées autour d'un état initial  $\underline{\mathbf{E}} = 0$  et une température  $T = T_0$  en un point matériel  $\underline{\mathbf{X}} \in \Omega_0$ . Cela signifie que le potentiel d'élasticité énergie libre  $\psi_0(\underline{\mathbf{E}}, T)$  est approché par une fonction quadratique de ses arguments  $\underline{\mathbf{E}}$  et  $T - T_0$ . La forme générale d'une telle fonction quadratique est

$$\rho_0 \psi_0(\underline{\mathbf{E}}, T) := -\rho_0(T - T_0)\hat{s}^0 + \underline{\Pi}^0 : \underline{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0)^2 - (T - T_0) \underline{\mathbf{P}} : \underline{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} : \underline{\Lambda} : \underline{\mathbf{E}} \quad (8.4)$$

à une constante additive près dont le choix est sans conséquence dans la suite puisque le potentiel est dérivé pour obtenir les lois d'état linéarisées :

$$\underline{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \underline{\mathbf{E}}} = \underline{\Pi}^0 + \underline{\Lambda} : \underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{P}}(T - T_0) \quad (8.5)$$

$$\rho_0 s_0 = -\rho_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial T} = \rho_0 \hat{s}^0 + \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0) + \underline{\mathbf{P}} : \underline{\mathbf{E}} \quad (8.6)$$

Le tenseur d'ordre 4  $\underline{\Lambda}$  est le **tenseur des modules d'élasticité**, déjà introduit au chapitre précédent. La **chaleur massique** (à déformation constante<sup>1</sup>) est  $C_\varepsilon$  et on peut vérifier que

$$C_\varepsilon := T \frac{\partial s_0}{\partial T} = \frac{\partial e}{\partial T} \quad (8.7)$$

On introduit le **tenseur des dilatations thermiques**  $\alpha$  tel que

$$\underline{\mathbf{P}} =: \underline{\Lambda} : \alpha \quad (8.8)$$

de sorte que la loi d'élasticité linéaire (8.5) prend la forme

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi}^0 + \underline{\Lambda} : (\underline{\mathbf{E}} - (T - T_0)\alpha) \quad (8.9)$$

Le terme constant  $\underline{\Pi}^0$  s'interprète comme un état de contrainte initial existant au point  $\underline{\mathbf{X}}$  à déformation nulle. C'est souvent le cas de matériaux prédéformés, ou bien lors de l'étude de structures chargées dont on étudie la tenue en service à partir de cet état initial (génie civil, assemblages frettés). Le tenseur des modules d'élasticité sera supposé inversible pour des raisons qui seront exposées au chapitre 9 de sorte que le tenseur des dilatations thermiques peut être défini sans ambiguïté par (8.8). On appelle **déformation (d'origine) thermique** linéarisée le tenseur

$$\underline{\mathbf{E}}^{th} = (T - T_0)\alpha \quad (8.10)$$

si bien que la loi d'élasticité linéarisée (8.9) peut aussi s'écrire

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi}^0 + \underline{\Lambda} : (\underline{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{E}}^{th}) \quad (8.11)$$

---

1. Pour les gaz et les liquides, on parle de la chaleur massique à volume constant, notée  $C_V$ .

Le tenseur des dilatations thermiques  $\alpha$  peut être pris symétrique car seule la partie symétrique de  $\mathbf{P}$  travaille avec  $\mathbf{E}$  dans l'énergie (8.4).

Pour éviter toute ambiguïté, nous réécrivons les relations (8.4) et (8.9) sous forme indicielle dans une base cartésienne orthonormée :

$$\begin{aligned}\rho_0\psi_0(E_{ij}, T) &:= -\rho_0(T - T_0)\hat{s}^0 + \Pi_{ij}^0 E_{ij} \\ &- \frac{1}{2} \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{T_0} (T - T_0)^2 - (T - T_0)P_{ij}E_{ij} + \frac{1}{2}E_{ij}\Lambda_{ijkl}E_{kl} \quad (8.12)\end{aligned}$$

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^0 + \Lambda_{ijkl}(E_{kl} - (T - T_0)\alpha_{kl}) \quad (8.13)$$

On rappelle les propriétés de symétrie du tenseur des modules d'élasticité :

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{klij} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk}$$

et celle du tenseur des dilatations thermiques

$$\alpha^T = \alpha, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

Le tenseur des modules d'élasticité  $\tilde{\Lambda}$ , le tenseur des dilatations thermiques  $\alpha$ , la chaleur massique  $C_\varepsilon$  sont des propriétés intrinsèques du matériau. Elles ont été déterminées expérimentalement pour un grand nombre de solides anisotropes sur un large domaine de températures. Ces grandeurs sont rassemblées dans des tables de physique-chimie (Martenssen and Warlimont, 2005). On recommande la référence (Ashby and Jones, 1991) pour un premier accès aux ordres de grandeurs des propriétés physiques, ou sa version anglaise originale (Ashby and Jones, 1980).

Concrètement, pour de nombreux matériaux, le domaine de la thermoélasticité linéaire concerne des déformations ne dépassant pas  $10^{-3}$  voire  $10^{-2}$ , au-delà desquelles des déformations **irréversibles, permanentes** risquent de se produire.

#### *Linéarisation de la loi des corps élastiques isotropes*

Pour obtenir la loi d'élasticité linéaire isotrope, on peut chercher la forme d'un tenseur  $\tilde{\Lambda}$  d'ordre 4 isotrope. C'est ce qui sera fait au paragraphe 8.2 (page 216). On peut aussi linéariser directement la relation d'hyperélasticité isotrope (7.51) obtenue au chapitre précédent, en ne gardant que les termes linéaires en  $\mathbf{E}$ . En particulier le terme en  $\mathbf{E}^2$  peut être négligé et il reste :

$$\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}^0 + \lambda(\text{trace } \mathbf{E})\tilde{\mathbf{1}} + 2\mu\mathbf{E} - P(T - T_0)\tilde{\mathbf{1}} \quad (8.14)$$

où l'on a tenu compte du fait que les fonctions  $\alpha_i$  dans (7.51) peuvent dépendre de  $T$ . Il ne reste que trois constantes indépendantes : les **coefficients de Lamé**  $\lambda, \mu$ , et le coefficient de couplage thermomécanique  $P$  que l'on précisera au paragraphe 8.2.6. Il peut exister une contrainte initiale  $\tilde{\Pi}^0$ . Pour que la configuration initiale correspondante soit isotrope, elle doit prendre la forme d'une pression pure :

$$\tilde{\Pi}^0 = -\Pi^0 \mathbf{1}$$

#### *8.1.2 Cas des transformations infinitésimales*

Dans le cas des transformations infinitésimales, la loi d'élasticité linéarisée prend la même forme que (8.5) en remplaçant le tenseur de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  par le tenseur

des déformations infinitésimales  $\tilde{\varepsilon}$  car, d'après (2.105) :

$$\tilde{\varepsilon} \simeq \tilde{E}$$

Cela donne

$$\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}^0 + \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon} - (T - T_0) \tilde{P} \quad (8.15)$$

On cherche dans ce contexte des transformations infinitésimales à exprimer la relation linéarisée entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\rho}{\rho_0} \tilde{F} \cdot \tilde{\Pi} \cdot \tilde{F}^T = \frac{\rho}{\rho_0} (\mathbf{1} + \tilde{H}) \cdot (\tilde{\Pi}^0 + \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon} - (T - T_0) \tilde{P}) \cdot (\mathbf{1} + \tilde{H}^T) \quad (8.16)$$

Il faut développer la relation précédente en ne gardant que les termes d'ordre 1 en  $\tilde{H}$ . En particulier, remarquer que

$$\frac{\rho}{\rho_0} = J^{-1} \simeq 1 - \text{trace } \tilde{\varepsilon}$$

Ce développement limité donne

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon} - (T - T_0) \tilde{P} + \tilde{\Pi}^0 - (\text{trace } \tilde{\varepsilon}) \tilde{\Pi}^0 + \tilde{H} \cdot \tilde{\Pi}^0 + \tilde{\Pi}^0 \cdot \tilde{H}^T \quad (8.17)$$

On voit le rôle important que joue l'état de contraintes initial  $\tilde{\Pi}^0$  qui intervient comme terme constant mais aussi en facteur de  $\tilde{H}$ . Lorsque  $\tilde{\Pi}^0 = 0$ , on parle d'**état naturel** (cette dénomination a déjà été introduite au paragraphe 7.1.3). Il est possible de réduire encore la relation (8.17) même dans le cas où  $\tilde{\Pi}^0$  est non nul. Il faut pour cela comparer les termes

$$\tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon} \cdot \tilde{\Pi}^0$$

et remarquer que, pour la plupart des matériaux, les modules d'élasticité sont systématiquement plus grands que tout état de contrainte  $\tilde{\Pi}^0$  accessible dans le domaine d'élasticité du matériau<sup>2</sup>. En pratique, le terme  $\tilde{\varepsilon} \cdot \tilde{\Pi}^0$  peut donc être négligé devant  $\tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon}$ ,

$$\|\tilde{\Pi}^0\| \ll \|\tilde{\Lambda}\| \quad (8.18)$$

La relation (8.17) se réduit maintenant à

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\Lambda} : \tilde{\varepsilon} - (T - T_0) \tilde{P} + \tilde{\Pi}^0 + \tilde{\omega} \cdot \tilde{\Pi}^0 - \tilde{\Pi}^0 \cdot \tilde{\omega} \quad (8.19)$$

où subsistent les produits entre la contrainte initiale et les tenseurs des rotations infinitésimales qui ne peuvent éliminés dans le cas général. En effet, rien ne dit *a priori* que les déformations et les rotations infinitésimales soient du même ordre de grandeur. On a déjà évoqué le cas de structures élancées pour lesquelles les déformations sont beaucoup plus faibles que les valeurs des rotations (cf. figure 2.12). Il n'est alors pas possible d'enlever les termes de rotation dans la loi d'élasticité linéarisée. Ces termes peuvent d'ailleurs jouer un rôle essentiel pour prévoir de possibles instabilités de certaines structures précontraintes (flambage par exemple). Dans le cas des solides tridimensionnels toutefois, on peut conjecturer que déformations et rotations infinitésimales sont du même

2. Pour un acier, le module d'Young est de 200 GPa et la limite d'élasticité ne dépasse que très rarement 2GPa (c'est déjà un acier à haute résistance !). Pour un polymère, modules et limite d'élasticité sont 100 à 1000 fois plus petits que pour un métal. On voit donc qu'en général :  $\sigma_0 \ll E$ .

ordre de grandeur.

On introduit alors la notion d'**état quasi-naturel** pour lequel les rotations infinitésimales sont suffisamment faibles pour que

$$\|\underline{\omega} \cdot \underline{\Pi}^0\| \ll \|\underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}\| \quad (8.20)$$

Si la configuration par rapport à laquelle on effectue la linéarisation correspond à un état quasi-naturel, on peut négliger les produits entre  $\underline{\Pi}^0$  et le tenseur des déformations infinitésimales devant  $\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\varepsilon}$ . On s'en tient alors à la loi d'élasticité linéarisée :

$$\underline{\sigma} = \underline{\Pi}^0 + \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\varepsilon} - (T - T_0) \underline{P} \quad (8.21)$$

qui est identique à (8.15) en remplaçant le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II par le tenseur des contraintes de Cauchy. Dans le contexte des transformations infinitésimales et pour un état quasi-naturel, on ne fera plus la distinction entre ces tenseurs.

### *Elasticité linéaire isotrope*

Le cas isotrope s'obtient directement à partir de la relation (8.14) dans le contexte des transformations infinitésimales pour un état initial quasi-naturel. On peut écrire la loi sous la forme

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^0 + \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} - P(T - T_0) \underline{1} \quad (8.22)$$

Il peut exister une contrainte initiale  $\underline{\sigma}^0$ . Pour que la configuration initiale correspondante soit isotrope, celle-ci doit prendre la forme d'une pression pure :

$$\underline{\sigma}^0 = -\sigma^0 \underline{1}$$

## 8.2 Etude du tenseur d'élasticité anisotrope

On étudie ici la forme du tenseur des modules d'élasticité dans les différents cas de symétrie rencontrés dans les solides. Cela consiste à déterminer dans chaque cas le nombre de constantes d'élasticité indépendantes permettant de calculer toutes les composantes  $\Lambda_{ijkl}$  dans une base donnée. On introduit au passage une représentation matricielle pour les tenseurs d'ordre 4 symétriques.

### 8.2.1 Changement de base pour les tenseurs des propriétés thermoélastiques

Les composantes du tenseur des modules d'élasticité sont en général connues dans un repère particulier lié aux axes d'anisotropie du matériau étudié (on parle de **repère matériau** ( $\underline{e}_i$ ) $_{i=1,2,3}$ ). Selon le groupe des symétries matérielles du corps étudié, le nombre de composantes non nulles est souvent plus faible dans ce repère non nécessairement orthonormé. Par contre, pour l'utilisation du matériau, il est utile de se placer dans le **repère de la structure** ( $\underline{e}'_i$ ) $_{i=1,2,3}$ . Les vecteurs des deux bases sont reliés par une matrice de passage

$$\underline{e}_i = P_i^k \underline{e}'_k$$

Le tenseur des modules d'élasticité peut se décomposer selon les deux bases

$$\begin{aligned} \underline{\Lambda} &:= \Lambda^{ijkl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \\ &= \Lambda^{ijkl} (P_i^m \underline{e}'_m) \otimes (P_j^n \underline{e}'_n) \otimes (P_k^p \underline{e}'_p) \otimes (P_l^q \underline{e}'_q) \\ &= P_i^m P_j^n P_k^p P_l^q \Lambda^{ijkl} \underline{e}'_m \otimes \underline{e}'_n \otimes \underline{e}'_p \otimes \underline{e}'_q \end{aligned} \quad (8.23)$$

ce qui conduit à l'identification des composantes de  $\underline{\Lambda}$  dans la base des  $(\underline{e}'_i)$  :

$$\Lambda'^{mnpq} = P_i^m P_j^n P_k^p P_l^q \Lambda^{ijkl} \quad (8.24)$$

Si les bases sont orthonormées, la matrice  $P_i^k$  est une matrice de rotation et on ne distinguer pas les composantes contravariantes des composantes covariantes du tenseur des modules d'élasticité.

Le tenseur des dilatations thermiques se transforme quant à lui comme un tenseur d'ordre deux :

$$\alpha'^{mn} = P_i^m P_j^n \alpha^{ij}$$

### 8.2.2 Rigidités et souplesses ; notation de Voigt pour les modules d'élasticité

La loi de Hooke concerne le cas de déformations purement élastiques d'un corps dans l'état naturel :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\varepsilon} \quad (8.25)$$

Le tenseur des modules d'élasticité  $\underline{\underline{\Lambda}}$  s'appelle aussi **tenseur des rigidités** élastiques du corps élastique étudié (*stiffness* en anglais). On peut aussi exprimer le tenseur des déformations infinitésimales en fonction du tenseur des contraintes, ce qui est utile lorsque les efforts sont imposés pendant un essai mécanique. Il faut pour cela inverser la relation (8.25) en supposant que le tenseur de Hooke soit inversible, propriété déjà mentionnée et sur laquelle nous reviendrons au prochain chapitre. Le tenseur d'ordre 4 inverse s'appelle **tenseur des souplesses**  $\underline{\underline{S}}$  (*compliance* en anglais, d'où l'anglicisme *complaisance* parfois abusivement utilisé) :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma}, \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{S}} := \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} \quad (8.26)$$

L'inverse d'un tenseur d'ordre 4 est défini ici de la manière suivante

$$\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{I}} \quad (8.27)$$

où  $\underline{\underline{I}}$  désigne le tenseur identité d'ordre 4 opérant sur les tenseurs symétriques d'ordre 2. Il est défini par

$$\forall \underline{\underline{A}}, \quad \underline{\underline{I}} : \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{A}}, \quad \text{et} \quad I_{ijkl} := \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (8.28)$$

Les tenseurs d'ordre 4 posent un problème de représentation en raison de leurs quatre indices et nombreuses composantes. En même temps qu'il baptisait toute une variété d'objets mathématiques du nom de *tenseur*, à la fin du siècle dernier, le grand physicien et mécanicien allemand Woldemar Voigt proposa une représentation matricielle des tenseurs d'ordre 4. L'objet de ses travaux était la détermination des propriétés physiques et mécaniques des cristaux (Voigt, 1898)<sup>3</sup>. Il faut d'abord réduire le nombre de composantes

3. On mentionnera aussi l'excellente école de mécanique et de cristallographie berlinoise de la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle qui contribua de manière essentielle, par une rigueur absolue, à l'étude de l'anisotropie des propriétés physiques (optiques, penser à la birefringence) et mécaniques des matériaux cristallins, en particulier en la personne de Franz Neumann (1798-1895). C'est de ces études que l'algèbre et l'analyse tensorielles sont nées et se sont développées. Les propriétés physiques et mécaniques des cristaux sont liées entre elles en particulier par les symétries matérielles. On peut classer les propriétés physiques selon leur caractère tensoriel : scalaires pour la masse et la capacité calorifique, tenseurs d'ordre deux pour la conductivité thermique par exemple et les propriétés électromagnétiques, tenseurs d'ordre 3 pour la piézo-électricité, et enfin tenseurs d'ordre 4 pour l'élasticité qui représente indéniablement l'une des propriétés physiques faisant appel à

indépendantes du tenseur de Hooke (et, de manière équivalente, du tenseur des souplesses) en tenant compte des propriétés de symétries mineures et majeures. On part *a priori* de  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

composantes  $\Lambda_{ijkl}$ . En tenant compte du fait que  $\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk}$ , on remarque que chaque couple (ij) ne donne lieu en fait qu'à 6 composantes indépendantes, les 6 composantes d'un tenseur d'ordre 2 symétrique (au lieu de 9). Cela fait donc  $6 \times 6 = 36$

composantes à prendre en compte. Enfin, les symétries majeures des coefficients font que seulement 21 parmi ces 36 composantes restent *a priori* indépendantes. Les 36 composantes peuvent être rangées dans une matrice  $C_{IJ}$  à  $6 \times 6$  composantes, avec la convention suivante d'équivalence entre un super-indice  $I$  et une paire d'indices associée  $ij$  :

$$\begin{array}{lll} 1 & \longleftrightarrow & 11 \\ 2 & \longleftrightarrow & 22 \\ 3 & \longleftrightarrow & 33 \\ 4 & \longleftrightarrow & 23 \\ 5 & \longleftrightarrow & 31 \\ 6 & \longleftrightarrow & 12 \end{array}$$

Ainsi on notera<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} C_{11} &= \Lambda_{1111} \\ C_{22} &= \Lambda_{2222} \\ C_{12} &= \Lambda_{1122} = \Lambda_{2211} = C_{21} \\ C_{13} &= \Lambda_{1133} = \Lambda_{3311} = C_{31} \\ C_{23} &= \Lambda_{2233} = \Lambda_{3322} = C_{32} \\ C_{44} &= \Lambda_{2323} = \Lambda_{3223} = \Lambda_{2332} = \Lambda_{3232} \\ C_{66} &= \Lambda_{1212} = \Lambda_{2112} = \Lambda_{1221} = \Lambda_{2121} \\ C_{46} &= \Lambda_{2312} = \Lambda_{3212} = \Lambda_{2321} = \Lambda_{3221} = \Lambda_{1223} = \Lambda_{2123} = \Lambda_{1232} = \Lambda_{2132} = C_{64} \end{aligned}$$

La matrice symétrique  $C_{IJ}$  a 21 composantes indépendantes, on le vérifiera aisément, et permet donc de coder l'ensemble des composantes du tenseur de Hooke dans une base quelconque donnée. Ecrivons maintenant explicitement quelques-unes des relations d'élasticité à l'aide de cette matrice :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \Lambda_{1111}\varepsilon_{11} + \Lambda_{1122}\varepsilon_{22} + \Lambda_{1133}\varepsilon_{33} \\ &\quad + \Lambda_{1123}\varepsilon_{23} + \Lambda_{1132}\varepsilon_{32} + \Lambda_{1131}\varepsilon_{31} + \Lambda_{1113}\varepsilon_{13} + \Lambda_{1112}\varepsilon_{12} + \Lambda_{1121}\varepsilon_{21} \\ &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} + 2C_{14}\varepsilon_{23} + 2C_{15}\varepsilon_{31} + 2C_{16}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (8.29)$$

De même,

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \Lambda_{1211}\varepsilon_{11} + \Lambda_{1222}\varepsilon_{22} + \Lambda_{1233}\varepsilon_{33} \\ &\quad + \Lambda_{1223}\varepsilon_{23} + \Lambda_{1232}\varepsilon_{32} + \Lambda_{1231}\varepsilon_{31} + \Lambda_{1213}\varepsilon_{13} + \Lambda_{1212}\varepsilon_{12} + \Lambda_{1221}\varepsilon_{21} \\ &= C_{61}\varepsilon_{11} + C_{62}\varepsilon_{22} + C_{63}\varepsilon_{33} + 2C_{64}\varepsilon_{23} + 2C_{65}\varepsilon_{31} + 2C_{66}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (8.30)$$

---

la plus grande complexité mathématique de représentation. Cela donne à la mécanique des milieux continus une richesse et un attrait indiscutables !

4. Pour se souvenir de l'équivalence pour les super-indices 4,5,6, on peut remarquer que la somme  $I + i + j = 9$  si  $ij$  est associé à  $I$ .

On voit qu'on peut ranger les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations en 2 vecteurs-colonnes reliés par la matrice 6x6 des modules d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

La notation dite du **cisaillement de l'ingénieur** a été introduite dans le vecteur-colonne des déformations :

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= 2\varepsilon_{23} \\ \gamma_{31} &= 2\varepsilon_{31} \\ \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} \end{aligned}$$

On vérifiera que le produit matrice-vecteur (8.31) est bien en accord avec les calculs directs (8.29) et (8.30). La notation de Voigt constitue un véritable isomorphisme entre les tenseurs d'ordre 4 symétriques et les matrices 6x6 symétriques.

En inversant la matrice des  $C_{IJ}$ , on obtient la matrice des souplesses

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

Pour voir le lien entre les composantes  $S_{IJ}$  et les  $S_{ijkl}$ , on écrit

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33} \\ &\quad + S_{1123}\sigma_{23} + S_{1132}\sigma_{32} + S_{1131}\sigma_{31} + S_{1113}\sigma_{13} + S_{1112}\sigma_{12} + S_{1121}\sigma_{21} \\ &= S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{13}\sigma_{33} \\ &\quad + S_{14}\sigma_{23} + S_{15}\sigma_{31} + S_{16}\sigma_{12} \end{aligned} \quad (8.33)$$

d'où l'identification

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{1111} \\ S_{14} &= 2S_{1123} = 2S_{1132} = 2S_{2311} = 2S_{3211} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= 2\varepsilon_{12} = 2S_{1211}\sigma_{11} + 2S_{1222}\sigma_{22} + 2S_{1233}\sigma_{33} \\ &\quad + 2S_{1223}\sigma_{23} + 2S_{1232}\sigma_{32} + 2S_{1231}\sigma_{31} + 2S_{1213}\sigma_{13} + 2S_{1212}\sigma_{12} + 2S_{1221}\sigma_{21} \\ &= S_{61}\sigma_{11} + S_{62}\sigma_{22} + S_{63}\sigma_{33} \\ &\quad + S_{64}\sigma_{23} + S_{65}\sigma_{31} + S_{66}\sigma_{12} \end{aligned} \quad (8.34)$$

d'où l'identification

$$\begin{aligned} S_{61} &= 2S_{1211} = 2S_{2111} = 2S_{1112} = 2S_{1121} = S_{16} \\ S_{64} &= 4S_{1223} = 4S_{1232} = 4S_{2123} = 4S_{2132} = 4S_{2312} = 4S_{3212} = 4S_{3221} = S_{46} \end{aligned}$$

On voit que des facteurs 2 et 4 se sont glissés dans les relations entre les coefficients  $S_{IJ}$  et les composantes  $S_{ijkl}$ . Cela est dû à l'utilisation de cisaillement de l'ingénieur  $\gamma_{ij}$  et il faudra donc faire très attention lors du passage du tenseur d'ordre 4 à la matrice des souplesses<sup>5</sup>. Il s'agit d'un inconvénient de la notation de Voigt qui peut être levé en utilisant une variante de cette notation, véritable algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques présentée au paragraphe 8.2.7.

Les composantes  $C_{IJ}$  sont tabulées pour de nombreux monocristaux métalliques ou céramiques dans (Simmons and Wang, 1971).

### 8.2.3 Analyse des symétries matérielles pour le tenseur des modules d'élasticité

Il est possible de tirer parti des symétries particulières du solide étudié pour simplifier la forme de la matrice générale d'élasticité (8.31). Cette classification des solides selon leurs éléments de symétrie est très utile en particulier lorsqu'on utilise des **matériaux composites** dans les structures aéronautiques ou dans les réservoirs sous pression (penser aux réservoir GPL en composites à fibres de carbone, cf. le cours (Cailletaud, 2003)). On renvoie à l'ouvrage (Berthelot, 1999) pour l'étude de l'élasticité des composites.

On rappelle un énoncé issu de la cristallographie, appelé principe de Curie : le groupe des symétries géométriques d'un solide (cristallin ou composite) est un sous-groupe du groupe des symétries matérielles  $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$  pour une propriété physique donnée (loi de comportement). Si l'on connaît la nature physique du matériau étudié (monocristal métallique par exemple ou composite stratifié), on a de sérieux indices sur la nature de  $\mathfrak{G}_{\Omega_0}$ . Celle-ci dépend aussi de l'ordre tensoriel de la propriété physique étudiée. On connaît maintenant des propriétés physiques d'ordre 4, l'élasticité, et deux propriétés d'ordre 2, la dilatation et la conductivité thermiques. On précise ci-dessous le nombre de paramètres d'élasticité indépendants nécessaires et le cas thermique est abordé au paragraphe 8.2.6. Le nombre de constantes indépendantes selon les classes de symétrie est aussi rappelé dans le tableau 6.3.

#### Elasticité triclinique

Un solide qui ne possède aucun autre élément de symétrie que l'identité et la symétrie centrale est dit **triclinique**. La forme générale de sa matrice de rigidité est donnée par (8.31).

#### Elasticité monoclinique

Un matériau **monoclinique** possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) se simplifie lorsque le plan de symétrie est le plan (1,2) du système de coordonnées. En effet la matrice doit rester inchangée si on effectue une symétrie du solide par rapport au plan (1,2). Pour le voir, les relations de symétrie satisfaites par la loi de comportement sont reprises ici dans le contexte des transformations infinitésimales et pour une transformation  $\tilde{\mathbf{P}}$  orthogonale :

$$\tilde{\mathbf{P}} \cdot f(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T = f(\tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T), \quad \text{avec} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = f(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (8.35)$$

---

5. Si  $I \leq 3$  et  $J \leq 3$ , alors  $S_{IJ} = S_{ijkl}$ .  
Si  $I \leq 3$  et  $4 \leq J$ , alors  $S_{IJ} = 2S_{ijkl}$ .  
Si  $4 \leq I$  et  $J \leq 3$ , alors  $S_{IJ} = 2S_{ijkl}$ .  
Si  $4 \leq I$  et  $4 \leq J$ , alors  $S_{IJ} = 4S_{ijkl}$ .

La symétrie matérielle  $\tilde{\mathbf{P}}$  pour le cas monoclinique est :

$$[\tilde{\mathbf{P}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

Comme  $\tilde{\mathbf{P}}$  est en outre symétrique, on obtient :

$$[\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{P}}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\mathbf{P}}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

La relation de symétrie (8.35) implique alors en particulier

$$\begin{aligned} & -(C_{41}\varepsilon_{11} + C_{42}\varepsilon_{22} + C_{43}\varepsilon_{33} + C_{44}\varepsilon_{23} + C_{45}\varepsilon_{31} + C_{46}\varepsilon_{12}) \\ & = C_{41}\varepsilon_{11} + C_{42}\varepsilon_{22} + C_{43}\varepsilon_{33} - C_{44}\varepsilon_{23} - C_{45}\varepsilon_{31} + C_{46}\varepsilon_{12} \\ & -(C_{51}\varepsilon_{11} + C_{52}\varepsilon_{22} + C_{53}\varepsilon_{33} + C_{54}\varepsilon_{23} + C_{55}\varepsilon_{31} + C_{56}\varepsilon_{12}) \\ & = C_{51}\varepsilon_{11} + C_{52}\varepsilon_{22} + C_{53}\varepsilon_{33} - C_{54}\varepsilon_{23} - C_{55}\varepsilon_{31} + C_{56}\varepsilon_{12} \end{aligned}$$

Ces conditions doivent être remplies quelles que soient les composantes de déformation. Cela implique que

$$C_{14} = C_{15} = C_{24} = C_{25} = C_{34} = C_{35} = C_{46} = C_{56} = 0$$

La matrice des  $C_{IJ}$  est donc nécessairement de la forme

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

Sur les 21 paramètres initiaux, il ne reste donc plus que 13 modules indépendants. Pour passer d'une base à une autre, on utilise les formules de changements de base (8.24) pour lesquelles une notation matricielle équivalente peut aussi être construite (Berthelot, 1999; Cailletaud, 2003).

#### Elasticité orthotrope

Un solide orthotrope admet 3 plans de symétrie deux à deux orthogonaux. La démarche précédente conduit à la forme suivante de la matrice de rigidité dans les bases orthogonales pour lesquelles (1,2), (2,3) et (3,1) sont les plans de symétrie

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (8.38)$$

ce qui fait 9 constantes indépendantes. Les méthodes d'élaboration des matériaux composites (stratifiés...) conduisent fréquemment à des propriétés d'emploi orthotropes.

### Elasticité quadratique

Un matériau quadratique est un matériau orthotrope dont l'axe 3 est aussi un axe de rotation d'angle  $\pi/2$  laissant le solide invariant<sup>6</sup>. Par conséquent, les axes 1 et 2 sont indiscernables, ce qui veut dire que

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{44} = C_{55}$$

La matrice d'élasticité quadratique a donc la forme

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

ce qui ne fait plus que 6 constantes indépendantes.

### Elasticité isotrope transverse/unidirectionnelle

Les composites à fibres unidirectionnelles sont des solides orthotropes possédant un axe de révolution (toute rotation autour de cet axe laisse le solide invariant). Par rapport à la structure quadratique cette condition implique la relation supplémentaire suivante, si l'axe 3 est l'axe de révolution<sup>7</sup>

$$C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

La matrice devient

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

i.e. 5 constantes indépendantes.

La matrice des souplesses, quant à elle, s'écrit

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

Les monocristaux à structure hexagonale (le zinc par exemple) sont orthotropes et possèdent en outre un axe de rotation d'angles  $\pi/3$  et  $2\pi/3$ . Leur comportement élastique

6. Un résultat essentiel de la cristallographie est que les seules rotations laissant les solides périodiques invariants sont d'angles  $\pi/3, \pi/2, 2\pi/3$  et  $\pi$ , ou bien alors tous les angles possibles (isotropie transverse). Sinon, un pavage périodique de l'espace est impossible...

7. Pour le voir il faut effectuer sur la matrice de rigidité une rotation d'axe 3 et d'angle  $\theta$  quelconque et écrire l'invariance correspondante.

est alors isotrope transverse.

### Elasticité cubique

Un solide cubique est un corps orthotrope dont les trois axes sont indiscernables. Cela donne

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (8.42)$$

et donc 3 modules indépendants.

La matrice des souplesses a la même forme et s'obtient en inversant la matrice des  $C_{IJ}$

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{12} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{44} = \frac{1}{C_{44}}$$

A titre d'exemple, on donne ci-dessous la matrice de rigidité du cuivre monocristallin à température ambiante, les valeurs étant données en MPa

$$\begin{bmatrix} 168400 & 121400 & 121400 & 0 & 0 & 0 \\ 121400 & 168400 & 121400 & 0 & 0 & 0 \\ 121400 & 121400 & 168400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75390 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75390 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75390 \end{bmatrix} \quad (8.43)$$

On définit un **coefficient d'anisotropie**

$$a = 2C_{44}/(C_{11} - C_{12})$$

Ce coefficient vaut 1 pour un matériau isotrope. Il vaut 3.2 pour le cuivre monocristallin.

### Elasticité isotrope

On connaît déjà les relations d'élasticité isotrope et on a déjà établi le fait qu'elles ne mettent en jeu que deux constantes indépendantes, les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{trace } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.44)$$

Ecrite sous forme matricielle, cela donne

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

On remarque que si  $\tilde{\varepsilon}$  est purement déviatorique (i.e. à trace nulle), alors  $\tilde{\sigma}$  est lui-aussi déviatorique et est directement proportionnel à  $\tilde{\varepsilon}$  avec le facteur  $2\mu$ . Plus généralement, dans le cas isotrope, les parties déviatoriques des contraintes et des déformations sont liées par

$$\tilde{\sigma}^{\text{dev}} = 2\mu \tilde{\varepsilon}^{\text{dev}} \quad (8.46)$$

En particulier, si  $\tilde{\varepsilon}$  est un cisaillement simple dont la seule composante non nulle est  $\gamma_{12}$  alors la seule composante non nulle du tenseur des contraintes est

$$\sigma_{12} = \mu \gamma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12}$$

C'est pourquoi, le coefficient  $\mu$  s'appelle **module de cisaillement**. De même, dans le cas isotrope, les traces des déformations et des contraintes sont reliées par

$$\text{trace } \tilde{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) \text{trace } \tilde{\varepsilon} = 3\kappa (\text{trace } \tilde{\varepsilon}), \quad \text{avec } \kappa := \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (8.47)$$

Le coefficient  $\kappa$  s'appelle le **module de compressibilité** du solide isotrope. En effet si l'on applique une pression pure, alors la déformation correspondante est sphérique et donnée par

$$\tilde{\sigma} = -p \mathbf{1} \implies \tilde{\varepsilon} = -\frac{p}{3\kappa} \mathbf{1} \quad (8.48)$$

#### 8.2.4 Inversion de la relation d'élasticité isotrope : module de Young et coefficient de Poisson

La loi d'élasticité directe (8.44) permet d'extraire successivement la trace et le déviateur des déformations, à l'aide des calculs précédents :

$$\text{trace } \tilde{\varepsilon} = \frac{\text{trace } \tilde{\sigma}}{3\kappa} = \frac{\text{trace } \tilde{\sigma}}{3\lambda + 2\mu}, \quad \tilde{\varepsilon}^{\text{dev}} = \frac{\tilde{\sigma}^{\text{dev}}}{2\mu} \quad (8.49)$$

On en déduit la loi d'élasticité isotrope inverse

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \frac{\text{trace } \tilde{\varepsilon}}{3} \mathbf{1} + \tilde{\varepsilon}^{\text{dev}} \\ &= \frac{\text{trace } \tilde{\sigma}}{9\kappa} \mathbf{1} + \frac{\tilde{\sigma}^{\text{dev}}}{2\mu} \\ &= \frac{\text{trace } \tilde{\sigma}}{3(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{1} + \frac{1}{2\mu} (\tilde{\sigma} - \frac{1}{3} \text{trace } \tilde{\sigma} \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\text{trace } \tilde{\sigma}) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (8.50)$$

Cette dernière relation est réécrite sous la forme suivante faisant intervenir le **module de Young**  $E$  et le **coefficient de Poisson**  $\nu$  :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \quad (8.51)$$

Les relations entre le module de Young, le coefficient de Poisson et les coefficients de Lamé s'obtiennent par identification de (8.50) et (8.51) :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \quad (8.52)$$

d'où l'on tire

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \quad (8.53)$$

L'introduction de ces nouvelles constantes s'explique par le fait que  $E$  et  $\nu$  sont directement accessibles par l'expérience en réalisant un essai de traction. En effet,

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies [\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma}{E} \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

Le module de Young est donc simplement le rapport entre la contrainte axiale de traction et la déformation dans la direction de traction. Le coefficient de Poisson est égal à l'opposé du rapport entre les déformations latérales et la déformation axiale. L'essai de traction simple est étudié en détail pour les solides élastiques linéaires au paragraphe 9.2.1. La variation de volume lors d'un essai de traction vaut donc

$$\text{trace } \underline{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E}(1-2\nu) \quad (8.55)$$

Le coefficient  $(1-2\nu)$  est associé à la variation de volume pour toutes les sollicitations puisque le module de compressibilité  $\kappa$  vaut :

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)} \implies \text{trace } \underline{\varepsilon} = \frac{1-2\nu}{E} \text{trace } \boldsymbol{\sigma} \quad (8.56)$$

Sous forme matricielle, la loi d'élasticité inverse (8.50) s'écrit de la manière suivante en faisant intervenir la matrice des souplesses  $S_{IJ}^{\text{iso}}$  :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (8.57)$$

Les relations principales de la thermoélasticité linéaire sont rassemblées dans les tables 8.1 et 8.3.

### Tenseurs $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$

L'effet de l'élasticité isotrope sur les parties déviatorique et sphérique des tenseurs de contraintes et de déformations incite à introduire les opérateurs  $\tilde{\mathbf{K}}$  et  $\tilde{\mathbf{J}}$  qui, à tout tenseur d'ordre 2 symétrique  $\tilde{\mathbf{A}}$ , associent respectivement :

$$\tilde{\mathbf{K}} : \tilde{\mathbf{A}} := \frac{\text{trace } \tilde{\mathbf{A}}}{3} \mathbf{1}, \quad \tilde{\mathbf{J}} : \tilde{\mathbf{A}} := \tilde{\mathbf{A}}^{\text{dev}} = \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{K}} : \tilde{\mathbf{A}} \quad (8.58)$$

Il s'agit de **projecteurs** respectivement sur l'ensemble des tenseurs sphériques et sur l'ensemble des déviateurs. La dernière relation s'écrit aussi

$$\tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{K}}$$

On définit là les opérateurs linéaires qui décomposent les tenseurs d'ordre 2 symétriques en leurs partie déviatorique et sphérique. Comme ils opèrent sur des tenseurs d'ordre 2, il s'agit donc bien de tenseurs d'ordre 4. Le tenseur identité  $\tilde{\mathbf{I}}$  a déjà été défini par (8.28).

On donne ici les composantes de  $\tilde{\mathbf{K}}$  dans une base orthonormée :

$$K_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (8.59)$$

Les tenseurs  $\tilde{\mathbf{J}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont idempotents et orthogonaux :

$$\tilde{\mathbf{J}} : \tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}, \quad \tilde{\mathbf{K}} : \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}, \quad \tilde{\mathbf{J}} : \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}} : \tilde{\mathbf{J}} = 0 \quad (8.60)$$

Les tenseurs d'ordre 4 inversibles s'exprimant uniquement en fonction de  $\tilde{\mathbf{J}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  possèdent la propriété remarquable que leur inverse se décompose aussi selon ces deux tenseurs :

$$\tilde{\mathbf{A}} = a\tilde{\mathbf{J}} + b\tilde{\mathbf{K}} \implies \tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{1}{a}\tilde{\mathbf{J}} + \frac{1}{b}\tilde{\mathbf{K}} \quad (8.61)$$

ce qui est une conséquence des propriétés (8.60).

Le tenseur d'élasticité isotrope s'exprime directement en fonction de  $\tilde{\mathbf{J}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  :

$$\tilde{\Lambda}^{iso} = 3\kappa\tilde{\mathbf{K}} + 2\mu\tilde{\mathbf{J}} \quad (8.62)$$

ce que le lecteur vérifiera aisément en faisant opérer l'expression précédente sur un tenseur  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Son inverse, le tenseur des souplesses est donc facile à déterminer :

$$\tilde{\mathbf{S}}^{iso} = \tilde{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{3\kappa}\tilde{\mathbf{K}} + \frac{1}{2\mu}\tilde{\mathbf{J}} \quad (8.63)$$

On pourra vérifier que cette expression conduit bien à la loi d'élasticité isotrope (8.50).

#### 8.2.5 Caractère défini positif du tenseur d'élasticité

Le tenseur des modules d'élasticité est un endomorphisme sur l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques qui est de dimension 6. Il est auto-adjoint (symétries majeures)

et possède donc a priori 6 valeurs propres réelles. Ces valeurs propres peuvent être obtenues à partir de la matrice  $C_{IJ}$ . Les “vecteurs” propres associés sont les tenseurs d’ordre 2 symétriques propres pour le tenseur d’ordre 4  $\tilde{\Lambda}$ . Les tenseurs des modules d’élasticité que l’on rencontre dans les matériaux naturels ou industriels sont définis positifs. Cela signifie que leurs valeurs propres sont strictement positives. Le fait même que l’on puisse mesurer de manière reproduicte ces modules indique que les corps étudiés sont stables. Le lien direct entre la **stabilité** et le caractère défini positif du tenseur des modules d’élasticité sera établi au chapitre suivant (paragraphe 9.1.5). Le caractère défini positif du tenseur représenté par la matrice des  $C_{IJ}$  se traduit par le fait que tous les déterminants des sous-matrices carrées de tous ordres centrées sur la diagonale sont positifs.

Dans le cas de l’élasticité linéaire isotrope, les valeurs propres du tenseur des modules s’obtiennent en diagonalisant la matrice (8.45). On peut aussi remarquer simplement que pour tout tenseur déviatorique

$$\forall \tilde{A}^{\text{dev}}, \quad \tilde{\Lambda}^{\text{iso}} : \tilde{A}^{\text{dev}} = 2\mu \tilde{A}^{\text{dev}}$$

ce qui montre que  $2\mu$  est une valeur propre et que l’ensemble des tenseurs propres correspondants est le sous-espace vectoriel des tenseurs symétriques déviatoriques, qui est de dimension 5. On remarque de même que pour tout tenseur sphérique

$$\forall \tilde{A}^{\text{sph}}, \quad \tilde{\Lambda}^{\text{iso}} : \tilde{A}^{\text{sph}} = 3\kappa \tilde{A}^{\text{sph}}$$

ce qui montre que  $3\kappa$  est une valeur propre de  $\tilde{\Lambda}^{\text{iso}}$ , l’ensemble des tenseurs propres correspondants étant le sous-espace vectoriel des tenseurs sphériques, qui est de dimension 1. Comme les tenseurs sphériques et déviatoriques engendrent l’ensemble des tenseurs d’ordre 2 symétriques, l’analyse spectrale de  $\tilde{\Lambda}^{\text{iso}}$  est terminée. La condition de stabilité implique que ses valeurs propres sont positives :

$$\mu > 0, \quad \kappa > 0 \tag{8.64}$$

En terme de module de Young et de coefficient de Poisson, cette condition s’écrit

$$\frac{E}{1+\nu} > 0, \quad \frac{E}{1-2\nu} > 0$$

ce qui est équivalent à

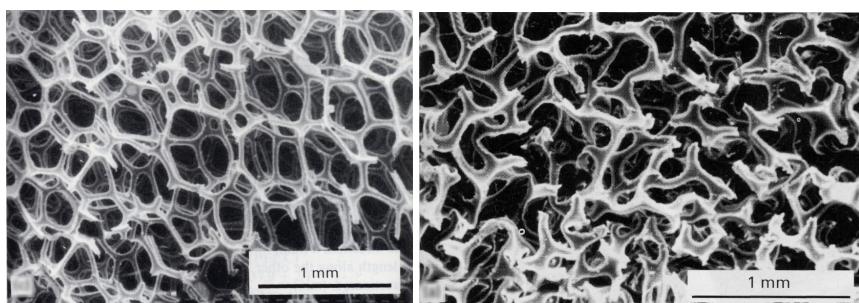
$$E > 0, \quad -1 < \nu < 0.5 \tag{8.65}$$

Le module de Young est donc positif, ce qui correspond à l’observation courante : lorsqu’on applique un effort de traction, le matériau s’allonge. La condition sur le coefficient de Poisson implique qu’un essai de traction s’accompagne nécessairement d’une variation positive de volume, i.e. d’un gonflement, ce qui n’a rien d’intuitif. Pour le voir, il suffit d’appliquer la condition (8.65) à la relation (8.55). Le cas limite  $\nu \rightarrow 0.5$  conduit systématiquement à une transformation  $\tilde{\varepsilon}$  isochore, et traduit donc un comportement de matériau incompressible.

Dans la pratique, on observe que, lors d’un essai de traction sur un matériau isotrope, les déformations latérales sont systématiquement négatives : le matériau s’allonge axialement et se contracte latéralement. Ce fait indique que  $\nu > 0$  en général. On a longtemps cru que l’on pouvait encore réduire l’intervalle (8.65) en écrivant

$$0 < \nu < 0.5$$

Le liège par exemple a un coefficient de Poisson quasi-nul de sorte qu'un bouchon comprimé axialement n'augmente quasiment pas de section. En 1987, Roderic Lakes a montré que les matériaux à coefficients de Poisson négatif existent bel et bien (Lakes, 1987). De tels matériaux sont dits **auxétiques**. L'exemple exhibé par Lakes est une mousse polymérique dont on voit une image de la microstructure sur la figure 8.1 comparée à une mousse classique à  $\nu > 0$ . La difficulté principale pour mettre en évidence de tels matériaux est de s'assurer de leur caractère isotrope souvent difficile à garantir à l'issue du procédé complexe d'élaboration (Chan and Evans, 1997). Depuis lors, d'autres matériaux auxétiques ont été découverts notamment en jouant sur la structure moléculaire du matériau (Yang et al., 2004). Leur utilisation pratique reste encore toutefois anecdotique.



*Figure 8.1 : Microstructure d'une mousse de polyuréthane conventionnelle (à gauche) et d'une mousse auxétique (à droite). La seconde est obtenue à partir de la première par l'application d'une pression de confinement lors de l'élaboration (d'après (Chan and Evans, 1997)). Les mousses de polyuréthane conventionnelles sont traditionnellement utilisées dans les sièges automobiles.*

### 8.2.6 Analyse des symétries matérielles pour le tenseur des dilatations thermiques

La déformation d'origine thermique est une fonction tensorielle d'ordre 2 symétrique de la variable scalaire  $T$  :

$$\varepsilon^{th} := (T - T_0)\alpha \quad (8.66)$$

Le nombre de composantes indépendantes du tenseur des dilatations thermiques  $\alpha$  dépend des propriétés de symétrie du milieu. Il est donc nécessaire, tout comme dans le cas du tenseur des modules d'élasticité, d'identifier la forme de  $\alpha$  pour chaque groupe cristallographique. On se contente ici d'étudier les cas isotrope et cubique. Dans ces deux cas en effet, le tenseur  $\alpha$  est purement sphérique :

$$\varepsilon^{th} := (T - T_0)\alpha \mathbb{1} \quad (8.67)$$

Le coefficient  $\alpha$  s'appelle **coefficent de dilatation thermique** du matériau. Pour justifier cette forme sphérique dans le cas cubique, il suffit de remarquer que  $\alpha$ , symétrique, est diagonalisable et possède 3 valeurs propres réelles. Les directions propres étant deux à deux orthogonales, elles coïncident avec les axes de symétrie d'ordre 4 du cristal cubique. Or ces trois directions sont équivalentes par définition de la symétrie cubique. Les trois valeurs propres sont donc identiques, ce qui implique que  $\alpha$  soit sphérique.

On remarque que, par la simple observation de la dilatation thermique, il n'est pas possible de distinguer une cristal cubique d'un cristal isotrope. Il en va de même de la conductivité thermique  $k$  qui ne fait intervenir qu'un **coefficent de conductivité thermique**  $k$ . Ce

n'est pas le cas en élasticité puisqu'on distingue 2 modules indépendants dans le cas isotrope contre 3 dans le cas cubique. L'origine de cette différence est clairement l'ordre tensoriel de la propriété physique étudiée, 2 pour les propriétés thermiques, et 4 pour l'élasticité.

On trouvera dans les tables 8.4 et 8.5 des exemples de valeurs de quelques propriétés thermomécaniques pour plusieurs classes de matériaux solides et fluides. Les fluides en effet dont le module de cisaillement est souvent quasi-nul, possèdent par contre un module de compressibilité relativement élevé.

### 8.2.7 Notation alternative : algèbre des tenseurs d'ordre deux symétriques

La notation de Voigt, introduite précédemment et largement utilisée dans les ouvrages et les banques de données, fait jouer un rôle dissymétrique aux "vecteurs" des contraintes et des déformations, puisque les composantes de déformation de cisaillement sont affublées d'un coefficient 2 tandis que les composantes de contraintes de cisaillement sont inchangées. On a vu les conséquences de ce fait sur la construction des matrices de rigidité et de souplesse. On peut rétablir cette symétrie en travaillant sur l'algèbre des tenseurs symétriques<sup>8</sup>, à savoir l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 symétriques (dimension 6) muni de l'addition et de la multiplication (non commutative !) et du produit scalaire : (double contraction). Un tenseur  $\underline{\underline{A}}$  est alors représenté par le vecteur de ses composantes dans une base orthonormée :

$$\underline{\underline{A}} \equiv [\underline{\underline{A}}] = [A_{11} \ A_{22} \ A_{33} \ \sqrt{2}A_{23} \ \sqrt{2}A_{31} \ \sqrt{2}A_{12}]^T \quad (8.68)$$

Le produit scalaire de deux tenseurs d'ordre 2  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{B}}$  s'écrit

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = [\underline{\underline{A}}].[\underline{\underline{B}}] = [\underline{\underline{A}}]^T [\underline{\underline{B}}]$$

où le point désigne le produit scalaire canonique sur les espaces euclidiens de dimension 6. Cette identification entre la double contraction et le produit scalaire sur un espace vectoriel euclidien est la raison de l'introduction du facteur  $\sqrt{2}$  dans (8.68). En effet les termes  $A_{12}B_{12}$  interviennent deux fois dans  $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}}$  en raison de la symétrie des tenseurs.

8. L'introduction des facteurs  $\sqrt{2}$  dans la notation 8.68 est également due à Woldemar Voigt, (Voigt, 1966) à la page 139, équations (27) de ce livre :

Wir können demgemäß für zwei Koordinatensysteme  $X'Y'Z'$  und  $X''Y''Z''$ , die, wie früher, durch das System (2) der Richtungskosinus verknüpft sind, das System der Transformationskoeffizienten folgendermaßen schreiben:

	$\mathfrak{T}_{11}'$	$\mathfrak{T}_{22}'$	$\mathfrak{T}_{33}'$	$\mathfrak{T}_{23}'$	$\mathfrak{T}_{31}'$	$\mathfrak{T}_{12}'$
$\mathfrak{T}_{11}$	$a_1^2$	$\beta_1^2$	$\gamma_1^2$	$\beta_1\gamma_2\sqrt{2}$	$\gamma_1\alpha_1\sqrt{2}$	$\alpha_1\beta_1\sqrt{2}$
$\mathfrak{T}_{22}$	$a_2^2$	$\beta_2^2$	$\gamma_2^2$	$\beta_2\gamma_3\sqrt{2}$	$\gamma_2\alpha_2\sqrt{2}$	$\alpha_2\beta_2\sqrt{2}$
$\mathfrak{T}_{33}$	$a_3^2$	$\beta_3^2$	$\gamma_3^2$	$\beta_3\gamma_1\sqrt{2}$	$\gamma_3\alpha_3\sqrt{2}$	$\alpha_3\beta_3\sqrt{2}$
$\mathfrak{T}_{23}$	$a_2a_3\sqrt{2}$	$\beta_2\beta_3\sqrt{2}$	$\gamma_2\gamma_3\sqrt{2}$	$(\beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3)$	$(\gamma_2\alpha_2 + \alpha_2\gamma_3)$	$(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)$
$\mathfrak{T}_{31}$	$a_3a_1\sqrt{2}$	$\beta_3\beta_1\sqrt{2}$	$\gamma_3\gamma_1\sqrt{2}$	$(\beta_3\gamma_1 + \gamma_3\beta_1)$	$(\gamma_3\alpha_3 + \alpha_3\gamma_1)$	$(\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1)$
$\mathfrak{T}_{12}$	$a_1a_2\sqrt{2}$	$\beta_1\beta_2\sqrt{2}$	$\gamma_1\gamma_2\sqrt{2}$	$(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)$	$(\gamma_1\alpha_1 + \alpha_1\gamma_2)$	$(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$

Dies Schema ist ebenso zu verstehen wie das Schema (2); in den Horizontalreihen liefert es die den Formeln (22) entsprechenden Ausdrücke der  $\mathfrak{T}_{ii}$  durch die  $\mathfrak{T}_{ii}'$ , in den Vertikalreihen analog den Formeln (23) die Ausdrücke der  $\mathfrak{T}_{ij}'$  durch die  $\mathfrak{T}_{ij}$ . Eben der Umstand, daß diese beiden Ausdrücke dieselben Funktionen der Richtungskosinus enthalten, macht die orthogonalen Tensorkomponenten für manche Zwecke geeigneter, als die gewöhnlichen  $\mathfrak{T}_{ij}$ . Demgegenüber sind freilich die durch sie in viele Formeln eingeführten Faktoren  $\sqrt{2}$  lästig, und so werden wir es zumeist vorteilhafter finden, mit den gewöhnlichen Tensorkomponenten zu operieren.

Référence communiquée par P. Pilvin.

$$\begin{aligned} T_{11} &= \mathfrak{T}_{11}, & T_{22} &= \mathfrak{T}_{22}, & T_{33} &= \mathfrak{T}_{33}, \\ T_{23}\sqrt{2} &= \mathfrak{T}_{23}, & T_{31}\sqrt{2} &= \mathfrak{T}_{31}, & T_{12}\sqrt{2} &= \mathfrak{T}_{12}, \end{aligned} \quad (27)$$

so transformieren sich diese neuen Komponenten wie  
 $x^2, \ y^2, \ z^2, \ yz\sqrt{2}, \ zx\sqrt{2}, \ xy\sqrt{2}$ ,  
welche Aggregate sich orthogonal verhalten.

Les relations d'élasticité s'écrivent dès lors

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \sqrt{2}C_{14} & \sqrt{2}C_{15} & \sqrt{2}C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & \sqrt{2}C_{24} & \sqrt{2}C_{25} & \sqrt{2}C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & \sqrt{2}C_{34} & \sqrt{2}C_{35} & \sqrt{2}C_{36} \\ \sqrt{2}C_{14} & \sqrt{2}C_{24} & \sqrt{2}C_{34} & 2C_{44} & 2C_{45} & 2C_{46} \\ \sqrt{2}C_{15} & \sqrt{2}C_{25} & \sqrt{2}C_{35} & 2C_{45} & 2C_{55} & 2C_{56} \\ \sqrt{2}C_{16} & \sqrt{2}C_{26} & \sqrt{2}C_{36} & 2C_{46} & 2C_{56} & 2C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (8.69)$$

où les coefficients  $C_{IJ}$  sont ceux de la notation de Voigt (8.31) (c'est important car ces valeurs sont tabulées dans de nombreuses bases de données matériau).

Ce formalisme, parfois appelé notation de Mandel, est très employé lors de la programmation numérique des lois de comportement dans les codes de calcul, car il permet de traiter contraintes et déformations à l'aide d'une même structure (en langage C) ou d'une même classe (en C++). On renvoie à l'ouvrage ((Besson et al., 2001)) pour l'utilisation de ce formalisme en mécanique numérique des matériaux.

### 8.3 Couplages thermoélastiques

On étudie le couplage thermomécanique dans le cas isotrope et dans le contexte infinitésimal.

#### 8.3.1 Contraintes d'origine thermique

Les lois de comportement thermoélastique linéaire dans une configuration quasi-naturelle sont récapitulées dans le tableau 8.2. On a introduit au passage le coefficient  $\beta$  relié à la chaleur massique par

$$\beta := \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{2T_0} \quad (8.70)$$

En pratique les couplages thermomécaniques se manifestent de trois façons principales. Dans l'ordre décroissant de leur importance en pratique, ce sont :

- **Contraintes d'origine thermique.** Imaginons d'abord une barre cylindrique empêchée de se déformer selon son axe et que l'on chauffe de manière homogène à partir d'une température  $T_0$ . Aucun effort n'est appliqué le long de la barre et l'on suppose qu'elle est suffisamment lubrifiée à ses extrémités pour qu'elle puisse se dilater à volonté selon les directions normales à l'axe du cylindre. L'état de contrainte et de déformation de la barre peut alors être considéré comme homogène. La seule contrainte active est la contrainte axiale. Ecrivons alors que la déformation axiale selon 3 est nulle

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\sigma_{33} + \alpha(T - T_0) = 0$$

Une contrainte axiale de compression se développe donc

$$\sigma_{33} = -E\alpha(T - T_0)$$

que l'on appelle **contrainte d'origine thermique**. Les contraintes d'origine thermique jouent un rôle considérable dans les composants industriels travaillant en conditions anisothermes et dans les ouvrages de génie civil (barrages, ponts...) soumis aux régimes jour-nuit, été-hiver. Elles sont responsables de nombreuses ruptures en service à cause de la fatigue induite par les cycles thermiques. Pour calculer les contraintes d'origine thermique dans une pièce, il faut connaître le champ de température qui y règne. La température est connue expérimentalement

### Coefficients de Lamé

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \lambda(\text{trace } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

### Module de Young et coefficient de Poisson

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}$$

### Un festival de relations utiles...

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

### Module de compressibilité

$$\kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

### Mais aussi...

$$\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \lambda + \mu = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad 2\lambda + 3\mu = \frac{E(3-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$1 + \nu = \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}, \quad 1 - \nu = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}, \quad 1 + 2\nu = \frac{2\lambda + \mu}{\lambda + \mu}, \quad 1 - 2\nu = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu}$$

### Stabilité du solide élastique

$$\begin{aligned} \kappa &> 0, & \mu &> 0 \\ E &> 0, & -1 < \nu < 0.5 \end{aligned}$$

Tableau 8.1: Récapitulatif : élasticité linéarisée isotrope (état initial quasi-naturel).

**Décomposition de la déformation totale**

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{th} \text{ avec } \underline{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0) \underline{1}$$

**Loi de comportement thermoélastique**

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \underline{\sigma}^0 + \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}^e) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon}^e$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^0 + \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} - 3\kappa\alpha(T - T_0) \underline{1}$$

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{\varepsilon}^0 + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \underline{\sigma}) \underline{1}$$

$$\underline{\varepsilon} = \alpha(T - T_0) \underline{1} + \underline{\varepsilon}^0 + \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \underline{\sigma}) \underline{1}$$

**Le potentiel élastique**

$$\begin{aligned} \rho\psi(\underline{\varepsilon}, T) = & -\rho(T - T_0)\hat{s}^0 + \underline{\sigma}^0 : \underline{\varepsilon} \\ & -\beta(T - T_0)^2 - 3\kappa\alpha(T - T_0)(\text{trace } \underline{\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon})^2 \\ & + 2\mu \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon}) \end{aligned}$$

**La densité volumique d'entropie**

$$\rho s = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial T} = \rho \hat{s}^0 + 2\beta(T - T_0) + 3\kappa\alpha(\text{trace } \underline{\varepsilon})$$

$$\beta = \frac{\rho_0 C_\varepsilon}{2T_0}$$

Tableau 8.2: Récapitulatif : thermoélasticité linéaire isotrope (état initial quasi-naturel).

	$\kappa =$	$\mu =$	$E =$	$\nu =$
$\kappa, \mu$			$\frac{9\kappa\mu}{3\kappa + \mu}$	$\frac{3\kappa - 2\mu}{2(3\kappa + \mu)}$
$\kappa, \nu$		$\frac{3\kappa E}{9\kappa - E}$		$\frac{3\kappa - E}{6\kappa}$
$\kappa, \nu$		$\frac{3\kappa(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$3\kappa(1 - 2\nu)$	
$\mu, E$	$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$			$\frac{E - 2\mu}{2\mu}$
$\mu, \nu$	$\frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$		$2\mu(1 + \nu)$	
$E, \nu$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$		

Tableau 8.3: Relations entre les différents modules d'élasticité isotrope.

à certains endroits si on dispose de thermocouples. On peut même mesurer des champs de température en surface des composants grâce à des caméras infra-rouge (thermographie infra-rouge). Il faut confronter ces mesures au calcul du champ de température qui est possible en résolvant l'équation de la chaleur.

- **Dépendance des propriétés physiques en fonction de la température.** Les modules d'élasticité, le coefficient de dilatation thermique, la chaleur massique etc. dépendent de la température. Lorsque le domaine de température exploré autour de la position d'équilibre reste limité (une dizaine de degré par exemple), cette dépendance est négligée et les coefficients matériau sont considérés comme constants. La dépendance vis-à-vis de la température des propriétés physiques des matériaux et des fluides est tabulée dans de nombreuses banques de données. De manière générale, le module de Young diminue lorsque la température augmente.
- **Couplage thermoélastique dans l'équation de la chaleur.** Les grandeurs mécaniques interviennent explicitement dans l'équation de la chaleur, c'est l'objet de la section suivante. Les déformations mécaniques peuvent donc entraîner des variations de température.

### 8.3.2 Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur est une forme particulière de l'équation de l'énergie (3.89) (premier principe de la thermodynamique). Dans le contexte infinitésimal, le bilan local d'énergie s'écrit

$$\rho \dot{e} + \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho r \quad (8.71)$$

matériau	$\rho$ (kg.m <sup>-3</sup> )	$E$ (GPa)	$\nu$	$\lambda$ (GPa)	$\mu$ (GPa)	$\kappa$ (GPa)	$\alpha$ ( $\times 10^{-6} \text{K}^{-1}$ )	$k$ (W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	$C_\varepsilon$ (J.K <sup>-1</sup> .kg <sup>-1</sup> )
acier	7800	200	0.27 à 0.3	115	77	165	10 à 18	60	500
aluminium	2700	70	0.33	51	26	69	23	237	900
cuivre	8900	120	0.33	88	45	118	17	410	400
magnésium	1700	41	0.35	35	15	46	25	156	
nickel	8900	210	0.31	131	80	184	13	91	450
titanium	4500	116	0.33	85	44	114	9	22	550
uranium	18900	170	0.23	59	69	105	14		
zinc	7200	100	0.25	40	40	67	30	116	400
alumine	3900	390	0.22	126	160	232	8	26	800
béton	2500	20 à 50	0.2	6	8	11	10	2	
diamant	3500	1000	0.2	278	417	555	1.2	70	500
SiC	3000	450	0.2	125	188	250	4	84	
verre	2500	90	0.22	29	37	54	5	1	900
bois	500	1							
caoutchouc	900	0.1	0.45 à 0.5						
polyuréthane	1200	1 à 5	0.4	1.4	0.4	1.7	130	0.15	
glace	920	91	0.33	66	34	88	51	0.15	2500
								0.2	
								2	

Tableau 8.4: Propriétés thermomécaniques de quelques matériaux solides (sous une atmosphère et à 25°C).

liquide	$\rho$ $\text{kg.m}^{-3}$	viscosité $\eta$ Pa.s	compressibilité $\kappa$ (GPa)	$\alpha \times 10^{-6}\text{K}^{-1}$	$k$ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
éthanol	790	0.002	0.8		0.17
eau distillée	997	0.001	2	200	0.6
huile d'olive	920	0.08			
mercure	13600	0.002	25	180	8
miel		2			
pétrole	820	1			

Tableau 8.5: Propriétés thermomécaniques de quelques fluides (sous une atmosphère et à 25°C).

En introduisant l'énergie libre (6.66) et les lois d'état hyperélastiques, on obtient l'équation de la chaleur

$$\rho T \dot{s} + \operatorname{div} \underline{q} = \rho r \quad (8.72)$$

Dans le contexte infinitésimal, c'est tout aussi bien  $\rho_0$  qui intervient dans l'équation précédente. Dans le cas de la thermoélasticité linéaire et isotrope, on introduit les lois de comportement du tableau 8.2 ainsi que la loi de conduction thermique de Fourier :

$$\underline{q} = -k \nabla T \quad (8.73)$$

L'équation de la chaleur devient alors

$$\rho C_\varepsilon \dot{T} + \underbrace{3\kappa\alpha T_0(\operatorname{trace} \dot{\underline{\varepsilon}})}_{\text{couplage thermomécanique}} - k\Delta T = \rho r \quad (8.74)$$

Plusieurs situations peuvent être distinguées (en l'absence de sources  $r$ ) :

- En **régime permanent**, l'équation de la chaleur se réduit à

$$\Delta T = 0$$

qui indique que la température est une fonction harmonique de la position. Le problème aux limites thermique correspondant (avec ses conditions aux limites) peut donc être résolu indépendamment du problème d'équilibre mécanique. Les champs de température trouvés permettent alors de calculer les contraintes d'origine thermique dans la pièce.

- Le cas de la **thermoélasticité découpée** s'obtient en négligeant le terme de couplage dans l'équation (8.74)

$$\rho C_\varepsilon \dot{T} = k\Delta T$$

C'est l'équation de la chaleur proprement dite qui peut être résolue indépendamment du problème mécanique.

- En **régime adiabatique** (ou dans le cas homogène où  $\operatorname{grad} T = 0$ ), on peut mettre en évidence de manière simple le couplage thermoélastique sous la forme de l'équation différentielle :

$$\rho C_\varepsilon \dot{T} + 3\kappa\alpha T_0(\operatorname{trace} \dot{\underline{\varepsilon}}) = 0$$

i.e.

$$\dot{T} = -\frac{3\kappa\alpha T_0}{\rho C_\varepsilon} (\text{trace } \dot{\xi}) \quad (8.75)$$

Lors d'un essai à déformation imposée, cette équation montre que la température varie. Un résultat pas intuitif du tout qui est une conséquence de (8.75) est que lorsqu'un matériau est sollicité en traction simple, sa température diminue ! Un calcul d'ordre de grandeur, en traction simple à  $T_0 = 300$  K, pour un acier avec les coefficients du tableau 8.4 montre que ce refroidissement est très faible :

$$\begin{aligned} T - T_0 &= -\frac{3\kappa\alpha T_0}{\rho C_\varepsilon} (1 - 2\nu)\varepsilon = -\frac{E\alpha T_0}{\rho C_\varepsilon} \varepsilon \\ &= -\frac{200 \cdot 10^9 \times 10^{-5} \times 300}{7800 \times 500} \times 0.001 \simeq -0.15 \text{ K} \end{aligned}$$

pour une déformation axiale  $\varepsilon = 0.1\%$  (effectivement purement élastique en général pour un acier). On comprend que le couplage thermoélastique soit négligé dans la plupart des cas, à moins qu'il s'agisse de concevoir des systèmes mécaniques de précision. Le couplage thermomécanique est par contre important dans le cas de matériaux élastiques non-linéaires ou viscoplastiques mais le terme de couplage doit être établi à nouveau à l'aide de ces lois de comportement spécifiques.

Un processus adiabatique est aussi à entropie constante (isentropique) d'après (8.72) en l'absence de sources  $r$ . Par conséquent on retrouve l'équation (8.75) en écrivant que la variation d'entropie est nulle (voir l'expression de l'entropie dans le tableau 8.2).

### 8.3.3 Quelques conséquences du couplage thermoélastique

#### Chaleur massique à contrainte constante $C_\sigma$

La chaleur massique des corps est souvent déterminée à pression imposée plutôt qu'à déformation imposée. La grandeur mesurée est alors

$$C_\sigma = T \frac{\partial s}{\partial T}(\sigma, T) \quad (8.76)$$

Il faut exprimer l'entropie comme une fonction de la température et des contraintes. Dans le cas thermoélastique linéaire et isotrope, cela devient :

$$\rho s = \rho \hat{s}^0 + 2\beta(T - T_0) + 3\kappa\alpha(\text{trace } \xi) = \rho \hat{s}^0 + 2\beta(T - T_0) + 3\kappa\alpha(3\alpha(T - T_0) + \frac{\text{trace } \sigma}{3\kappa})$$

d'où

$$C_\sigma = C_\varepsilon + \frac{9\kappa\alpha^2 T_0}{\rho_0} \quad (8.77)$$

La correction de  $C_\sigma$  s'avère négligeable pour les solides en prenant les ordres de grandeur du tableau 8.4. Des notations plus classiques en thermodynamique pour  $C_\sigma$  et  $C_\varepsilon$  sont respectivement  $C_p$  et  $C_v$ .

#### Modules d'élasticité adiabatiques ou isentropiques

Les constantes de Lamé, module de Young et coefficient de Poisson introduits jusqu'ici sont des modules d'élasticité dits isothermes car ils sont définis à partir de la dérivée par-

tielle seconde de l'énergie libre par rapport à la déformation, à température constante. En conditions adiabatiques ou, de manière équivalente, isentropiques, on a vu que la température est liée directement à la déformation par

$$2\beta(T - T_0) = -3\kappa\alpha(\text{trace } \underline{\varepsilon})$$

d'après (8.75). En substituant cette expression de la variation de température dans l'expression de l'énergie libre (donnée dans le tableau 8.2) et en factorisant les termes en  $(\text{trace } \underline{\varepsilon})^2$  et en  $\underline{\varepsilon}$  :  $\underline{\varepsilon}$ , on fait apparaître les coefficient de Lamé adiabatiques :

$$\lambda_{\text{adiabatic}} = \lambda + \frac{9\kappa^2\alpha^2}{2\beta} = \lambda + \kappa\left(\frac{C_\sigma}{C_\varepsilon} - 1\right), \quad \mu_{\text{adiabatic}} = \mu \quad (8.78)$$

ou de manière équivalente

$$\kappa_{\text{adiabatic}} C_\varepsilon = \kappa C_\sigma, \quad \mu_{\text{adiabatic}} = \mu$$

Les modules déterminés par des essais dans ces conditions (essais rapides, voire en dynamique) sont en fait peu différents, pour la plupart des solides, des modules déterminés dans des conditions isothermes (cas statique). Des différences importantes entre ces "modules dynamiques" et ces "modules statiques" se font sentir dans le cas de matériaux granulaires tels que les sables, en raison des vibrations propres des constituants.

Les modules d'élasticité isentropiques apparaissent naturellement lorsque le comportement du matériau est exprimé au travers de l'énergie interne spécifique  $e(\underline{\varepsilon}, s)$ , fonction de la déformation et de l'entropie, au lieu de l'énergie libre utilisée jusqu'ici, qui est une fonction de la déformation et de la température. Pour le voir, on reprend les deux principes de la thermodynamique des milieux continus exprimés ici dans le contexte infinitésimal :

$$\rho\dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \text{div } \underline{q} + \rho r, \quad \rho\dot{s} + \text{div } \frac{\underline{q}}{T} - \rho\frac{r}{T} \geq 0 \quad (8.79)$$

La combinaison de ces deux principes conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem sous la forme :

$$\rho T\dot{s} - \rho\dot{e} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \text{grad } T \geq 0 \quad (8.80)$$

Lorsque les fonctions d'état en présence dépendent du jeu de variables  $(\underline{\varepsilon}, s)$ , cette inégalité devient :

$$\rho(T - \frac{\partial e}{\partial s})\dot{s} + (\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial e}{\partial \underline{\varepsilon}}) : \dot{\underline{\varepsilon}} - \frac{\underline{q}}{T} \cdot \text{grad } T \geq 0 \quad (8.81)$$

L'expression précédente est linéaire en  $\dot{s}$  et  $\dot{\underline{\varepsilon}}$ . La positivité de la dissipation ne peut être garantie pour tout processus thermodynamique local que si les coefficients correspondants sont nuls. Les relations ainsi obtenues sont les lois d'état thermoélastique sous la forme :

$$T = \frac{\partial e}{\partial s}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial e}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (8.82)$$

Dans le cas de la thermoélasticité linéarisée, l'expression de l'énergie interne s'obtient

par exemple à partir de celle de l'énergie libre (8.4) pour un état initial naturel :

$$\begin{aligned}\rho e &= \rho\psi + T\rho s \\ &= \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}} : \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{\xi}} + T_0\rho s + \frac{(\rho s - \rho s^0 - \boldsymbol{\alpha} : \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{\xi}})^2}{4\beta}\end{aligned}\quad (8.83)$$

Les modules d'élasticité isentropiques sont donnés par la dérivée seconde de l'énergie interne par rapport à la déformation. On calcule successivement :

$$\frac{\partial \rho e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \frac{\rho s - \rho s^0 - \boldsymbol{\alpha} : \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{\xi}}}{2\beta} \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \boldsymbol{\alpha} \quad (8.84)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{isen} = \frac{\partial^2 \rho e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}} \partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} + \frac{1}{2\beta} (\boldsymbol{\alpha} : \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}) \otimes (\tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \boldsymbol{\alpha}) \quad (8.85)$$

Dans la notation précédente, un produit tensoriel entre tenseurs d'ordre 2 a été introduit avec la signification suivante :

$$\Lambda_{ijkl}^{isen} = \Lambda_{ijkl} + \frac{\rho^2}{2\beta} \alpha_{mn} \Lambda_{mni j} \Lambda_{klpq} \alpha_{pq}$$

Dans le cas de l'élasticité isotrope, les modules d'élasticité isothermes sont caractérisés par  $\kappa$  et  $\mu$ . Les modules isentropiques correspondants s'en déduisent :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial e}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}} = (\kappa \operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{1} + 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{dev} + \frac{9\kappa^2 \alpha^2}{2\beta} (\operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{1} \\ &= (\kappa + \frac{9\kappa^2 \alpha^2}{2\beta} - \frac{2\mu}{3})(\operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{1} + 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\lambda + \frac{9\kappa^2 \alpha^2}{2\beta})(\operatorname{trace} \tilde{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{1} + 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}$$

Les expressions des modules isentropiques sont bien celles trouvées en (8.78).



## 9 Formulation du problème aux limites d'équilibre thermoélastique linéarisé

On quitte ici l'échelle du point matériel pour lequel des lois de comportement ont été formulées pour passer à celle de la structure soumise à des conditions aux limites particulières et à des efforts volumiques. Il s'agit donc de résoudre les équations aux dérivées partielles que sont les équations de bilan (ici limitées à l'équilibre statique), en se restreignant ici au contexte infinitésimal en thermoélasticité linéaire.

### 9.1 Formulation du problème d'équilibre thermoélastique linéaire

#### 9.1.1 Linéarisation des équations d'équilibre

La loi de comportement thermoélastique a d'ores-et-déjà été linéarisée et c'est la formulation (8.21) qui est prise ici. Il reste encore à linéariser les équations d'équilibre en contraintes. A l'équilibre, l'accélération est nulle et la forme locale de l'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{x}) + \rho \underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad (9.1)$$

où  $\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. On procède à la linéarisation en supposant la norme du gradient du déplacement suffisamment petite (cf. paragraphe 2.3.3),

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} + \rho f_i(\underline{X} + \underline{u}) \simeq \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k} (\delta_{kj} - u_{k,j}) + \rho_0 f_i(\underline{X}) + \rho_0 \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\underline{X}) u_k$$

Dans le cas d'un état initial naturel, on peut négliger les termes proportionnels à  $\|\operatorname{Grad} \underline{u}\|$ . Le dernier terme peut être ramené à l'ordre  $\mathcal{O}(\|\operatorname{Grad} \underline{u}\|)$  par une translation adéquate et peut donc être négligé. En conséquence, l'équation d'équilibre se réduit à

$$\operatorname{Div} \underline{\sigma} + \rho_0 \underline{f}(\underline{X}) = 0 \quad (9.2)$$

On a donc transformé l'équation d'équilibre qui était écrite sur la configuration actuelle inconnue en un problème sur la configuration de départ. Tout se passe *in fine* dans les équations comme si  $\underline{x}$  et  $\underline{X}$  coïncidaient.

Qu'en est-il des conditions aux limites ? Si on impose un déplacement  $\underline{u} = \underline{u}^d$ , aucune modification n'est nécessaire. Si le vecteur-traction  $\underline{t}(\underline{x}) = \underline{t}^d(\underline{x})$  est donné sur une partie de la frontière, il faut remarquer que, en vertu de la relation (2.41) reliant le vecteur normal à la facette courante à sa direction initiale,

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{\sigma} \cdot J \underline{F}^{-T} \cdot \underline{N} \frac{ds}{d\underline{S}} \simeq \underline{\sigma} \cdot \underline{N} \quad (9.3)$$

puisque  $J = 1 + \mathcal{O}(\|\xi\|)$ ,  $\underline{F} = \underline{1} + \mathcal{O}(\|\xi\|)$  et  $ds \simeq d\underline{S} + \mathcal{O}(\|\xi\|)$ . De même

$$\underline{t}^d(\underline{x}) = \underline{t}^d(\underline{X} + \underline{u}) \simeq \underline{t}^d(\underline{X}) + \operatorname{grad} \underline{t}^d(\underline{X}) \cdot \underline{u}$$

la correction pouvant être rendue aussi petite que nécessaire par une translation adéquate. Il est donc suffisant d'imposer le même effort en utilisant le vecteur normal sur la configuration de référence.

Les hypothèses qui président à l'écriture du problème aux limites de thermoélasticité linéarisé sont les suivantes :

- Contexte infinitésimal : petites transformations = petites rotations + petites déformations. Il est suffisant, on le voit, de travailler sur la configuration de

référence. La configuration actuelle s'obtient grâce au champ de déplacement qui est l'inconnue première du problème. Ce déplacement n'est pas nécessairement petit car il peut comporter une translation d'ensemble arbitraire (les rotations étant supposées infinitésimales).

- Variations limitées de température, puisque la loi de comportement élastique a aussi été linéarisée par rapport à la température. Dans la suite, le champ de température est supposé donné car on n'étudie pas ici le problème thermomécanique couplé.
- Etat initial naturel :  $\underline{\Pi}^0 = 0$  dans (8.21). En partant d'un état quasi-naturel (8.20), on pourra travailler de la même façon qu'à partir d'un état initial naturel en remplaçant la contrainte  $\sigma$  par l'écart  $\sigma - \sigma^0$ . Dans un état précontraint initial quelconque, on peut procéder de la même façon mais on risque de passer à côté de possibles instabilités ou bifurcations<sup>1</sup>.
- Le solide est considéré comme homogène et isotrope. Le cas d'un solide hétérogène par morceaux s'en déduit immédiatement en ajoutant les conditions de continuité aux interfaces<sup>2</sup>. L'hypothèse d'isotropie ne joue qu'un rôle d'illustration et ne sera utilisée qu'après coup, le problème aux limites étant formulé initialement dans le cas général.

Les trois premières hypothèses constituent ce qu'on appelle traditionnellement l'**hypothèse des petites perturbations** (cadre HPP). Lorsqu'on aura établi une solution du problème aux limites étudié, il faudra vérifier *a posteriori* que toutes ces hypothèses sont bien vérifiées, en particulier le caractère infinitésimal de la transformation.

### 9.1.2 Formulation du problème aux limites

Il est temps de définir les conditions imposées au solide  $\Omega$  étudié. Il s'agit d'abord des efforts de champ  $\underline{f}(\underline{x})$  supposés connus en tout point. Il s'agit ensuite des conditions imposées à la frontière  $\partial\Omega$ . On distinguerà trois types de conditions aux limites principaux :

- **Conditions aux limites en déplacement.** Le déplacement est donné sur tout le contour :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^d(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (9.4)$$

Ces conditions aux limites sont dites de type Dirichlet.

- **Conditions aux limites en efforts.** Le vecteur-traction est imposé sur toute la frontière de  $\Omega$  :

$$\underline{t}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{t}^d(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (9.5)$$

Ces conditions aux limites sont dites de type Neumann.

- **Conditions aux limites mixtes.** On partage la frontière  $\Omega$  en deux parties telles que

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{td} = \partial\Omega, \quad \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_{td} = \emptyset$$

1. Danger ! l'étude de matériaux ou structures limitée au contexte linéarisé ne garantit aucunement la stabilité des situations étudiées et ne permet pas d'envisager toutes les catastrophes possibles, même si la structure n'est effectivement qu'apparemment peu sollicitée. Pour prévoir des accidents tels que le flambage des structures par exemple, il faut sortir du cadre des transformations infinitésimales. Le cadre des déformations infinitésimales peut être suffisant pour prévoir certaines bifurcations (voir le problème *Torsion d'un barreau précontraint* dans le recueil de problèmes (Amestoy, 2004)).

2. En fait, les équations sont valables pour un matériau à gradient de propriété (variation continue des propriétés thermoélastiques), à conditions de laisser les constantes d'élasticité sous la divergence !

comme sur la figure 9.1. Le déplacement est imposé sur  $\Omega_u$  tandis que le vecteur-traction est donné sur  $\partial\Omega_{td}$  :

$$\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{u}}^d(\underline{\mathbf{x}}), \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_u \quad (9.6)$$

$$\underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{t}}^d(\underline{\mathbf{x}}), \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_{td} \quad (9.7)$$

On peut en fait définir des conditions mixtes plus générales encore en considérant trois découpages de  $\partial\Omega$  en  $(\partial\Omega_u^i, \partial\Omega_{td}^i)_{i=1,2,3}$  tels que

$$\partial\Omega_u^i \cup \partial\Omega_{td}^i = \partial\Omega, \quad \partial\Omega_u^i \cap \partial\Omega_{td}^i = \emptyset$$

Pour chaque  $i$  successivement, on impose les composantes

$$u_i(\underline{\mathbf{x}}) = u_i^d(\underline{\mathbf{x}}), \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_u^i \quad (9.8)$$

$$t_i(\underline{\mathbf{x}}) = \sigma_{ij}(\underline{\mathbf{x}}) n_j(\underline{\mathbf{x}}) = t_i^d(\underline{\mathbf{x}}), \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_{td}^i \quad (9.9)$$

Par conséquent, en chaque point du contour  $\partial\Omega$ , on impose 3 conditions et 3 seulement, chacune pouvant être une composante déplacement ou (exclusif) une composante d'effort. Le repère considéré doit être au moins orthogonal (non nécessairement cartésien). En d'autres termes, il n'est pas possible d'imposer en un point donné à la fois  $u_1$  et  $t_1$ . Il faut imposer l'un ou l'autre.

Le problème aux limites  $(\mathcal{P})$  de thermoélasticité linéarisé consiste donc à chercher les champs  $(\underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\sigma}})$  sur le solide  $\Omega$  vérifiant

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{\mathbf{u}} + (\text{grad } \underline{\mathbf{u}})^T), \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega & \text{compatibilité} \\ \text{div } \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\mathbf{f}} = 0, \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega & \text{équilibre} \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\Lambda}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - (T - T_0) \underline{\boldsymbol{\Lambda}} : \underline{\boldsymbol{\alpha}}, \forall \underline{\mathbf{x}} \in \Omega & \text{loi de comportement} \\ u_i = u_i^d, \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_u^i & \text{conditions aux limites} \\ t_i = \sigma_{ij} n_j = t_i^d, \forall \underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_{td}^i & \end{array} \right.$$

Cela fait 9 inconnues scalaires pour neuf équations scalaires. Le cas particulier de l'élasticité isotrope est donné dans le tableau 9.1.

Les conditions aux limites les plus générales envisagées ici sont données par (9.9) et supposent que les partitions  $\partial\Omega_u^i$  et  $\partial\Omega_{td}^i$  sont connues a priori. Il existe d'autres conditions aux limites possibles pour lesquelles cette partition est une inconnue du problème. On mentionne le cas de la **liaison unilatérale**, très employée pour les problèmes de contact entre solides, qui stipule qu'une composante  $u_3$  de déplacement est bloquée tant que  $t_3 < 0$  (compression), elle est libre sinon. En effet le solide rentre alors en contact avec un autre solide. Une telle condition exige de tester la solution du problème au fur et à mesure du calcul. Elle est non linéaire. De même le problème de Hertz de l'indentation d'une bille sur une surface plane est un exemple de condition aux limites non linéaire : la zone de contact entre la bille et le substrat est une inconnue du problème (Amestoy, 2004).

### 9.1.3 Schémas de résolution

Résoudre le problème  $(\mathcal{P})$  revient à trouver un champ de déplacement  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})$  solution sur  $\Omega$ , ou bien un champ de contraintes  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\mathbf{x}})$  solution sur  $\Omega$ . En effet, si l'on connaît  $\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{x}})$ , le champ de déformation  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{\mathbf{x}})$  se calcule en appliquant à  $\underline{\mathbf{u}}$  l'opérateur gradient symétrisé. Le champ des contraintes s'en déduit alors par application de la loi d'élasticité.

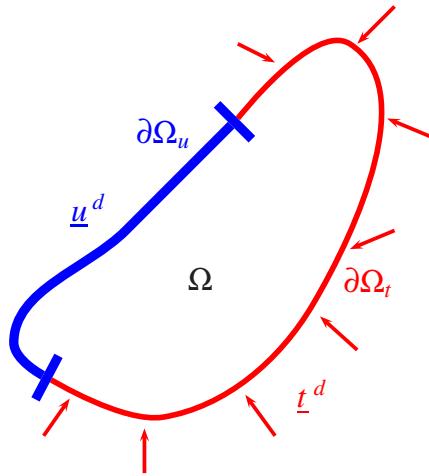


Figure 9.1 : Conditions aux limites mixtes sur un solide  $\Omega$  : la frontière du solide  $\partial\Omega$  est partagée en  $\partial\Omega_u$  où un déplacement  $\underline{u}^d$  est imposé et en  $\partial\Omega_{td}$  où le vecteur-traction  $\underline{t}^d$  est imposé.

Inversement, si le champ des contraintes est connu, le champ des déformations s'en déduit par les relations d'élasticité faisant intervenir le tenseur des souplesses. Si la solution du problème  $(\mathcal{P})$  existe, le champ de déformation correspondant doit être compatible et l'on sait construire le champ de déplacement associé, à un mouvement de corps rigide près, en suivant la démarche décrite au paragraphe 2.3.5. Le mouvement de corps rigide à ajouter sera fixé par les conditions aux limites en déplacement.

Il existe donc deux stratégies de résolution du problème  $(\mathcal{P})$ .

La première consiste à formuler le problème en déplacements.

La seconde priviliege les contraintes<sup>3</sup>. Dans le cas isotrope, il est possible de formuler plus explicitement les équations qui régissent le déplacement d'une part et celles qui gouvernent les contraintes d'autre part. Par commodité, on ne considère ici que le cas isotherme  $T = T_0$ .

#### Méthode des déplacements

On part de la loi d'élasticité écrite dans une base cartésienne orthonormée, et on remplace la déformation par son expression (2.107) en fonction du déplacement :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \\ &= \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})\end{aligned}$$

On calcule la divergence du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \lambda u_{k,kj}\delta_{ij} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ii}) \\ &= \lambda u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{k,ik} \\ &= (\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,jj}\end{aligned}$$

3. On doit parfois recourir à des méthodes mixtes.

Trouver les champs  $(\underline{u}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x}))$  sur  $\Omega$  tels que

#### Compatibilité

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{u} + (\text{grad } \underline{u})^T), \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

#### Equations d'équilibre

$$\text{div } \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

#### Loi de comportement thermoélastique linéaire

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{trace } \underline{\varepsilon})\underline{1} + 2\mu\underline{\varepsilon} - 3\kappa\alpha(T - T_0)\underline{1}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

#### Conditions aux limites

$$u_i = u_i^d, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u^i$$

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = t_i^d, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{td}^i$$

Tableau 9.1: Récapitulatif : le problème aux limites de l'équilibre thermoélastique linéarisé.

On reconnaît dans le dernier terme le laplacien de la composante  $u_i$ . Quant au vecteur  $u_{k,ki}$ , il faut y reconnaître le gradient de la divergence du vecteur  $\underline{u}$ . La formule en composantes précédentes est donc équivalente à la formulation intrinsèque suivante

$$\text{div } \underline{\sigma} = (\lambda + \mu)\text{grad } (\text{div } \underline{u}) + \mu\Delta \underline{u} \quad (9.10)$$

où le laplacien d'un vecteur est défini comme le vecteur dont les composantes cartésiennes sont le laplacien des composantes. On a donc le

**Théorème 22 (Equations de Navier)** *Le champ de déplacement  $\underline{u}(\underline{x})$  d'un solide  $\Omega$  thermoélastique isotrope à l'équilibre est solution des équations de champs suivantes*

$$(\lambda + \mu)\text{grad } (\text{div } \underline{u}) + \mu\Delta \underline{u} + \rho \underline{f} = 0 \quad (9.11)$$

Il s'agit d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 en les composantes  $u_i$  du vecteur déplacement.

Une conséquence des équations de Navier est l'équation dite de la dilatation, qui s'obtient en appliquant l'opérateur gradient puis l'opérateur trace aux équations de Navier. Cela donne successivement

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla(\text{trace } \underline{\varepsilon})) + \mu\Delta(\nabla \underline{u}) + \rho \nabla \underline{f} = 0$$

Le premier terme s'écrit  $u_{k,kij}$  en composantes. En passant à la trace, cela donne

$$(\lambda + 2\mu)\Delta(\text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \rho \text{div } \underline{\mathbf{f}} = 0 \quad (9.12)$$

ce qui exprime que le laplacien de la dilatation volumique ( $\text{trace } \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ) est directement relié aux forces volumiques.

### Méthode des contraintes

**Théorème 23 (Equations de Beltrami)** *Un champ de contraintes est solution d'un problème d'équilibre en élasticité linéaire si et seulement si il vérifie les équations d'équilibre, les conditions aux limites en effort et les 6 équations suivantes*

$$\Delta \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{1+\nu} \text{grad}(\text{grad}(\text{trace } \underline{\boldsymbol{\sigma}})) + \frac{\nu}{1-\nu} \rho(\text{div } \underline{\mathbf{f}}) \underline{1} + \rho(\text{grad } \underline{\mathbf{f}} + (\text{grad } \underline{\mathbf{f}})^T) = 0 \quad (9.13)$$

**Preuve.** Les inconnues principales sont cette fois-ci les contraintes. La loi de comportement inverse permet de calculer les déformations

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \underline{1} \quad (9.14)$$

Ce champ de déformation doit vérifier les équations de compatibilité (2.142) pour que le problème d'élasticité admette une solution. On va utiliser la variante suivante des équations de compatibilité

$$\varepsilon_{ij,kk} + \varepsilon_{kk,ij} = \varepsilon_{ik,jk} + \varepsilon_{jk,ik} \quad (9.15)$$

qui s'obtient simplement en écrivant (2.142) pour  $k = l$  et en sommant ces équations pour les trois valeurs de  $k$ . On y introduit alors la relation d'élasticité pour obtenir une équation en contraintes

$$(1+\nu)\sigma_{ij,kk} - \nu(\text{trace } \underline{\boldsymbol{\sigma}})_{,kk}\delta_{ij} + (\text{trace } \underline{\boldsymbol{\sigma}})_{,ij} + (1+\nu)\rho(f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \quad (9.16)$$

Le terme en laplacien de la trace de la contrainte peut être éliminé en utilisant les équations (8.49) et l'équation de la dilatation (9.12). On obtient finalement

$$(1+\nu)\sigma_{ij,kk} + (\text{trace } \underline{\boldsymbol{\sigma}})_{,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \rho f_{k,k}\delta_{ij} + (1+\nu)\rho(f_{i,j} + f_{j,i}) = 0 \quad (9.17)$$

où l'on a en outre utilisé l'identité

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$$

Les équations (9.17) sont bien les expressions indicielles des équations de Beltrami cherchées (9.13).  $\square$

Une formulation équivalente du théorème 23 consiste à vérifier les équations (9.13) sur le domaine considéré et à vérifier que les équations d'équilibre sont vérifiées sur le bord du domaine<sup>4</sup>.

---

4. En effet, en prenant la divergence des équations de Beltrami (9.13), on trouve

$$\Delta(\text{div } \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \underline{\mathbf{f}}) = 0$$

Les deux démarches sont résumées sur le schéma de résolution de la figure 9.2. On ne conseille pas dans la pratique commençante de la MMC d'appliquer directement les équations de Navier ou Beltrami mais de refaire, dans le cas particulier du problème aux limites étudié, l'itinéraire qui conduit des déplacements aux contraintes ou des contraintes aux déplacements.

Quitte à décevoir le lecteur, il faut bien dire qu'il n'existe pas de méthode systématique permettant d'exhiber la solution d'un problème d'élasticité. On part en général de formes de solutions trouvées de manière intuitive à partir du problème posé, forme que l'on précise grâce aux équations de champ du problème et aux conditions aux limites. Suivant le type de problème posé, l'approche en déplacements ou en contraintes pourra être plus aisée. Il faut attendre les résultats sur l'existence et l'unicité de la solution du problème ( $\mathcal{P}$ ) pour finir de justifier cette démarche (paragraphe 9.1.5). C'est en ce sens qu'on pourra dire qu'il existe des problèmes plus "beaux" que d'autres, à savoir ceux où il faut déployer le plus de technique, d'astuce ou d'intuition pour les résoudre !

La démarche de résolution par la méthode des déplacements consiste donc à

1. proposer une forme de champ de déplacement vérifiant les conditions aux limites en déplacement ;
2. calculer le champ de déformation associé ;
3. calculer les contraintes grâce à la loi de thermoélasticité linéaire ;
4. les substituer dans les équations d'équilibre ;
5. intégrer ces équations pour trouver la forme exacte du champ de déplacement solution
6. vérifier les conditions aux limites en effort.

La démarche de résolution par la méthode des contraintes consiste à

1. proposer une forme de solution en contraintes vérifiant les conditions aux limites en effort et les équations d'équilibre ;
2. calculer le champ de déformation grâce à la loi de comportement élastique ;
3. écrire les équations de compatibilité ou les équations de Beltrami ;
4. intégrer les équations obtenues pour finir de préciser la forme de la solution en contraintes ;
5. intégrer le champ de déformation pour obtenir le champ de déplacement.
6. vérifier les conditions aux limites en déplacement.

Des variantes de cette démarche permettront éventuellement d'accéder plus rapidement à la solution.

Il existe par contre des méthodes numériques systématiques permettant d'approcher aussi près qu'on le souhaite la solution d'un problème d'équilibre thermoélastique linéarisé (on renvoie au cours sur la méthode des éléments finis (Tijani, 2004; Kern, 2004)).

---

(Germain, 1986). L'équilibre est donc vérifié en tout point dès qu'il l'est au bord en vertu du fait qu'une fonction harmonique nulle au bord, l'est dans tout le domaine. Quelques propriétés des fonctions harmoniques sont rappelées en particulier dans l'application du chapitre 23 consacré à la torsion des barres. Le décompte des équations confirme la nécessité de ces conditions au bord supplémentaires. Les équations de Beltrami sont au nombre de 6. On dispose de 3 conditions à la frontière en effort (problème de Neumann). Trois conditions supplémentaires sont *a priori* nécessaires et l'on peut prendre :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = 0, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega$$

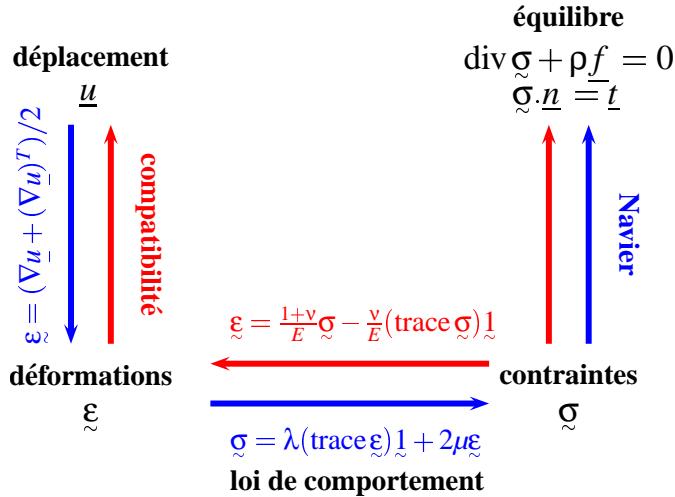


Figure 9.2 : Les schémas de résolution d'un problème aux limites d'équilibre d'un solide thermoélastique linéaire. La méthode des déplacements est en bleu, la méthode des contraintes en rouge.

#### 9.1.4 Superposition

Le problème  $(\mathcal{P})$  (isotherme) ainsi posé est linéaire. On entend par là que si

- $(\underline{u}^A, \underline{\sigma}^A)$  est une solution du problème  $(\mathcal{P})$  pour les données  $(\underline{f}^A, u_i^{dA}, t_i^{dA})$  ;
- et si  $(\underline{u}^B, \underline{\sigma}^B)$  est une solution du problème  $(\mathcal{P})$  pour les données  $(\underline{f}^B, u_i^{dB}, t_i^{dB})$  ;

alors, pour tous les réels  $\lambda_A$  et  $\lambda_B$ ,

- $(\lambda_A \underline{u}^A + \lambda_B \underline{u}^B, \lambda_A \underline{\sigma}^A + \lambda_B \underline{\sigma}^B)$  est une solution du problème  $(\mathcal{P})$  pour les données  $(\lambda_A \underline{f}^A + \lambda_B \underline{f}^B, \lambda_A u_i^{dA} + \lambda_B u_i^{dB}, \lambda_A t_i^{dA} + \lambda_B t_i^{dB})$ .

Cette propriété est parfois appelée **principe de superposition**. Elle permet de calculer l'état de contrainte et de déformation d'un solide pour plusieurs chargement successifs. C'est tout à fait licite à condition toutefois de veiller à chaque étape à la validité du cadre HPP (transformation infinitésimale et états successifs quasi-naturels).

Pour l'appliquer, il faut que les domaines  $\partial\Omega_u^i$  et  $\partial\Omega_{td}^i$  soient identiques pour les deux chargements  $A$  et  $B$ .

#### 9.1.5 Existence et unicité des solutions

On va commencer par établir l'unicité de la solution du problème  $(\mathcal{P})$  en utilisant le théorème 11 des travaux virtuels, qui représente la version globale (variationnelle) des équations d'équilibre. La technique utilisée est intéressante car très classique pour établir l'unicité des solutions de problèmes aux dérivées partielles. On formule ici le théorème des travaux virtuels dans le cas statique et pour les conditions aux limites (9.7) :

**Théorème 24 (Théorème des travaux virtuels (cas statique))** *Si le champ de contraintes  $\underline{\sigma}$  sur un corps matériel  $\Omega$  soumis aux conditions  $\underline{f}$ ,  $\underline{t}^d$  et  $\underline{u}^d$  vérifie les équations d'équilibre  $\text{div } \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0$  en tout point, alors, pour tout champ de déplacement virtuel*

$\underline{u}^*$  régulier<sup>5</sup>, on a

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^* dS + \int_{\partial\Omega_u} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \quad (9.18)$$

pour tout champ  $\underline{u}^*$  tel que  $\underline{u}^* = \underline{u}^d$  sur  $\partial\Omega_u$ .

**Preuve.** C'est une conséquence directe du théorème 11 en l'absence de terme d'accélération et tenant compte des conditions aux limites particulières introduites.  $\square$   
Soient maintenant  $(\boldsymbol{\sigma}_A, \underline{\varepsilon}_A)$  et  $(\boldsymbol{\sigma}_B, \underline{\varepsilon}_B)$  deux solutions sur  $\Omega$  du problème aux limites  $(\mathcal{P})$ . Les champs de déplacements correspondants  $\underline{u}_A$  et  $\underline{u}_B$  vérifient les conditions aux limites sur  $\Omega_u$  et sont donc des champs virtuels admissibles pour l'application du théorème des travaux virtuels (9.18). On applique donc (9.18) d'abord à  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A$  pour  $\underline{u}^* = \underline{u}_A$  et  $\underline{u}^* = \underline{u}_B$  :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_A dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_A dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_A dS + \int_{\partial\Omega_u} (\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \quad (9.19)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_A : \underline{\varepsilon}_B dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}_B dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}_B dS + \int_{\partial\Omega_u} (\boldsymbol{\sigma}_A \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \quad (9.20)$$

La différence des équations précédentes donne donc

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_A : \Delta \underline{\varepsilon} dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \Delta \underline{u} dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \Delta \underline{u} dS \quad (9.21)$$

où l'on a noté  $\Delta \underline{u} = \underline{u}_A - \underline{u}_B$ . Le même raisonnement peut être mené pour  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_B$  de sorte que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_B : \Delta \underline{\varepsilon} dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \Delta \underline{u} dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \Delta \underline{u} dS \quad (9.22)$$

La différence (9.21) - (9.22) conduit donc à

$$\int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\sigma} : \Delta \underline{\varepsilon} dV = 0 \quad (9.23)$$

où l'on a noté

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A - \boldsymbol{\sigma}_B, \quad \Delta \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_A - \underline{\varepsilon}_B$$

Or, pour les deux solutions  $A$  et  $B$ , le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par le même tenseur des modules d'élasticité :

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \underset{\approx}{\Lambda} : \underline{\varepsilon}_A, \quad \boldsymbol{\sigma}_B = \underset{\approx}{\Lambda} : \underline{\varepsilon}_B \quad (9.24)$$

En conséquence, une condition nécessaire pour que deux solutions du problème  $(\mathcal{P})$  puissent coexister est que

$$\int_{\Omega} \Delta \underline{\varepsilon} : \underset{\approx}{\Lambda} : \Delta \underline{\varepsilon} dV = 0 \quad (9.25)$$

On en déduit que le caractère défini positif du tenseur des modules d'élasticité est une **condition suffisante d'unicité** de la solution du problème d'équilibre thermoélastique.

5. Sur la régularité mathématique appropriée à différentes applications de ce théorème, on renvoie à la section 10.2.

En effet, si  $\tilde{\Lambda}$  est défini positif, on a

$$\Delta \underline{\varepsilon} : \tilde{\Lambda} : \Delta \underline{\varepsilon} > 0, \quad \forall \Delta \underline{\varepsilon} \neq 0$$

Si ce n'est pas le cas, on montre que, dans certains cas, des solutions multiples peuvent être construites. Cela justifie que les tenseurs des modules d'élasticité des solides soient définis positifs et qu'alors, conformément à l'expérience courante, pour les conditions aux limites (9.9), il y a une relation univoque entre la réponse d'une pièce et la sollicitation.

L'existence de la solution du problème ( $\mathcal{P}$ ), pour les conditions aux limites linéaires envisagées, est admise dans ce cours. Elle résulte d'un théorème de mathématiques (dit de Lax-Milgram) sur les équations aux dérivées partielles d'ordre 2 linéaires elliptiques (Maisonneuve, 2003; Kern, 2004). Le caractère elliptique des équations aux dérivées partielles est directement lié au caractère défini positif du tenseur des modules d'élasticité. Le problème d'équilibre thermoélastique linéarisé est donc un **problème bien posé** ou **régulier** car il possède, pour les conditions aux limites envisagées ici, une solution et une seule en termes de contraintes et de déformations. Ce résultat justifie la démarche classique de résolution de tels problèmes, qui consiste à proposer une forme de solution, et à la préciser grâce aux équations de compatibilité ou d'équilibre ainsi qu'aux conditions aux limites. Si cette forme proposée s'avère possible, on conclut que c'est nécessairement la solution cherchée, en vertu du théorème d'unicité.

## 9.2 Exemples : traction simple et flexion pure

Deux problèmes aux limites simples d'élasticité linéaire sont présentés ici. L'un concerne un état de déformation homogène (traction simple) l'autre un état de déformation hétérogène (la flexion pure ou circulaire). Les deux problèmes sont résolus ici par la méthode des contraintes, i.e. la forme du champ de contraintes est proposée.

### 9.2.1 Essai de traction/compression simple

L'essai de traction/compression est l'essai de caractérisation par excellence adapté à quasiment tous les matériaux (métaux, polymères, céramiques). L'objectif est de soumettre un échantillon à un champ de contraintes homogène et uni-axial afin de mesurer sa réponse en déformation. L'homogénéité n'est souvent acquise que dans une zone limitée de l'éprouvette appelée **zone utile**. La difficulté majeure de l'essai est de trouver le moyen d'accrocher l'éprouvette à une machine de traction et de transmettre à la zone utile une charge aussi uni-axiale que possible (pas de flexion parasite ni de concentration de contraintes). Comme l'état de contrainte souhaité est homogène, la géométrie de la zone utile est assez libre mais de section invariante par translation le long de l'axe de traction (par exemple cylindrique de révolution ou parallélépipédique comme sur la figure 9.3). La forme des têtes d'éprouvette dépend par contre du type de matériau (éprouvette en os de chien, tête filetée, etc.). En compression simple, la géométrie de l'éprouvette est en général plus simple (cylindrique de révolution) mais la difficulté consiste alors à trouver le bon lubrifiant permettant de limiter le frottement entre les faces supérieure et inférieure et les plateaux de la machine, faute de quoi l'état de contrainte ne pourra pas être purement uni-axial en général.

Le problème de traction/compression d'un solide élastique peut être formulé à l'aide de conditions aux limites en efforts. La figure 9.3 indique qu'un effort axial est appliqué sur les faces horizontales de l'éprouvette tandis que les surfaces latérales sont libres de tout effort. Les efforts volumiques sont négligés. L'état initial est supposé naturel. L'effort surfacique axial appliqué sur la face supérieure vaut

$$\underline{\mathbf{t}}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 = T \underline{\mathbf{e}}_3 \quad (9.26)$$

Noter que le signe de la charge appliquée  $T$  est intrinsèque (il ne dépend pas du choix d'orientation de l'axe  $\underline{e}_3$ ) :

- si  $T > 0$ , il s'agit d'un essai de **traction** ;
- si  $T < 0$ , il s'agit d'un essai de **compression**.

On vérifiera que les efforts indiqués sur la figure 9.3 conduisent à une force résultante et à un moment résultant nuls, sans quoi il ne pourrait s'agir d'un problème de statique.

### Contraintes

Le champ de contraintes uni-axial et homogène suivant est recherché

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} = \sigma \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

Le tenseur  $\sigma$  est uniforme (indépendant de la position  $\underline{x}$ ) et vérifie par conséquent identiquement les équations locales de la statique ( $\operatorname{div} \underline{\sigma} = 0$  en l'absence d'efforts volumiques). Les conditions aux limites en  $x_3 = 0$  et  $x_3 = L$  où  $L$  est la longueur de la zone utile de l'éprouvette considérée, impliquent que

$$\sigma = T$$

La résultante des forces sur la section supérieure est selon  $\underline{e}_3$  et vaut  $F = TS$  où  $S$  est la section de l'éprouvette. La contrainte axiale de traction/compression est donc égale à la force totale appliquée divisée par la section de l'éprouvette :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (9.28)$$

### Déformations

Les déformations engendrées par les contraintes sont uniformes et se calculent grâce à la loi d'élasticité inverse

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\operatorname{trace} \underline{\sigma}) \underline{1} \quad (9.29)$$

où le matériau est supposé isotrope. En utilisant l'expression (9.27) du tenseur des contraintes, on obtient

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 - \nu (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)), \quad [\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -\nu \frac{\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{E} \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

La déformation axiale est donc égale au rapport  $\sigma/E$  où  $E$  est le module de Young. Les contractions latérales sont caractérisées par le coefficient de Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} \quad (9.31)$$

ce qui fournit une interprétation physique claire du coefficient de Poisson.

Suivons l'évolution d'une section normale à la direction de traction. Pour cela on peut considérer un élément de surface  $\underline{ds} = \underline{dx}_1 \wedge \underline{dx}_2$  engendré par deux fibres matérielles orthogonales à l'axe de traction. Chaque vecteur matériel actuel  $\underline{dx}$  est relié à la fibre

matérielle initiale  $\underline{dX}$  par

$$\underline{dx} = \underline{F} \cdot \underline{dX} = (\mathbf{1} + \text{grad } \underline{u}) \cdot \underline{dX}$$

Lorsque la fibre  $\underline{dX}$  est choisie orthogonale à l'axe de traction, la relation précédente devient :

$$\underline{dx} = (1 + \varepsilon_{11}) \underline{dX}$$

puisque  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$ . Ainsi,

$$\underline{ds} = \underline{dx}_1 \wedge \underline{dx}_2 = (1 + \varepsilon_{11})^2 \underline{dX}_1 \wedge \underline{dX}_2 \simeq (1 + 2\varepsilon_{11}) \underline{dX}_1 \wedge \underline{dX}_2 = (1 + 2\varepsilon_{11}) \underline{dS}$$

La norme des vecteurs précédents fournit

$$ds \simeq (1 - 2\nu\varepsilon_{33}) dS$$

Comme le champ de déformation est homogène sur la section, on en déduit que la section initiale  $S_0$  de l'éprouvette se transforme en  $S$  telle que

$$\frac{S - S_0}{S_0} = -2\nu\varepsilon_{33} \quad (9.32)$$

dans le contexte infinitésimal. Pour les matériaux à  $\nu > 0$ , la section diminue donc en traction et augmente en compression, ce qui correspond bien à l'expérience courante. Pour établir ce résultat, on aurait pu aussi utiliser directement la formule (2.41).

On rappelle que la variation de volume de l'éprouvette est donnée par (8.55). Elle est positive en traction et négative en compression, quel que soit  $-1 < \nu < 0.5$ .

### Déplacements

Le champ de déformation précédent est homogène. Il vérifie donc trivialement les conditions de compatibilité. Pour calculer le champ de déplacement associé au champ de déformation précédent, on conseille fortement la démarche systématique proposée au paragraphe 2.3.5 (voir page 62), même si cette intégration est particulièrement simple dans le cas de la traction. Cette démarche commence par le calcul du gradient (2.145) de la rotation  $\omega$

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} = 0 \quad (9.33)$$

qui est nul dans le cas de la traction simple puisque le champ de déformation est homogène. L'intégration de l'équation précédente a déjà été effectuée à la page 58 et donne

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

où les petits angles  $p, q, r$  sont uniformes. Le champ de déplacement  $\underline{u}$  est tel que

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= -\nu \frac{\sigma}{E}, & u_{2,1} &= r, & u_{3,1} &= -q \\ u_{1,2} &= -r, & u_{2,2} &= -\nu \frac{\sigma}{E}, & u_{3,2} &= p \\ u_{1,3} &= q, & u_{2,3} &= -p, & u_{3,3} &= \frac{\sigma}{E} \end{aligned}$$

L'intégration de chacune des colonnes précédentes fournit, une à une, les composantes  $u_i$  :

$$\underline{u} = \frac{\sigma}{E} X_3 \underline{e}_3 - \nu \frac{\sigma}{E} (X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2) + \overset{\times}{\underline{\omega}} \wedge \underline{x} + \underline{c}, \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\nu \frac{\sigma}{E} X_1 - r X_2 + q X_3 + c_1 \\ u_2 = -\nu \frac{\sigma}{E} X_2 + r X_1 - p X_3 + c_2 \\ u_3 = \frac{\sigma}{E} X_3 - q X_1 + p X_2 + c_3 \end{array} \right. \quad (9.35)$$

Le vecteur  $\overset{\times}{\underline{\omega}}$  a pour composantes  $[p \ q \ r]^T$  et  $\underline{c}$  est un champ uniforme de translation. Le déplacement est donc déterminé à un mouvement infinitésimal de corps rigide près.

#### *Validation du contexte infinitésimal*

La transformation ainsi déterminée est effectivement infinitésimale à condition que les composantes des déformations  $\varepsilon_{ij}$  et des rotations  $\omega_{ij}$  restent modestes :

$$\left| \frac{\sigma}{E} \right| \ll 1, \quad \left| \nu \frac{\sigma}{E} \right| \ll 1, \quad |p|, |q|, |r| \ll 1 \quad (9.36)$$

La condition critique est donc  $|\sigma/E| \ll 1$ . Pour les métaux, la limite d'élasticité  $\sigma_0$  est en général largement inférieure au module de Young. Si l'on travaille avec des structures métalliques dans le régime élastique, l'essai de traction reste clairement dans le contexte infinitésimal. Pour être complètement rassuré sur la pertinence du modèle linéarisé, il reste à vérifier que chaque état de sollicitation en cours d'essai reste quasi-naturel. On va voir plus loin que pour certaines géométries d'éprouvettes, ce n'est pas toujours le cas en compression (condition de flambage)<sup>6</sup>.

#### *Autres conditions aux limites pour la traction*

Le problème aux limites de traction simple a été formulé à l'aide de conditions aux limites en effort. Il est possible d'avoir recours à des conditions aux limites mixtes. On impose pour cela un déplacement  $u_3 = 0$  sur la face inférieure de l'éprouvette et  $u_3 = \delta$  uniforme sur la face supérieure. Le vecteur-contrainte reste nul sur les faces latérales. Il reste à préciser des conditions dans les directions 1 et 2 sur les faces supérieure et inférieure de l'éprouvette. L'application du tenseur des contraintes (9.27) à ces surfaces indique que l'on doit avoir  $t_1 = t_2 = 0$ . Avec ces conditions aux limites mixtes, on peut essayer la solution linéaire

$$u_3 = \frac{\delta}{L_0} X_3$$

où  $L_0$  est la longueur initiale de l'éprouvette. Les champs de contraintes et de déformations (9.27) et (9.30) sont toujours les solutions du problème avec

$$\varepsilon_{33} = \frac{\delta}{L_0}$$

---

6. On insiste sur le fait qu'une analyse du problème linéarisé ne peut en aucun cas nous prémunir du risque d'instabilité de la structure.

La force  $F$  appliquée à l'éprouvette est reliée à l'allongement de la zone utile de longueur  $L$  par

$$\frac{F}{S} = E \frac{\delta}{L} \quad (9.37)$$

On vérifiera que, dans le contexte infinitésimal, on peut écrire indifféremment  $L$  ou  $L_0$ ,  $S$  ou  $S_0$  dans la formule précédente qui est à la base de la pratique des essais de traction. Dans la pratique il n'est pas facile d'imposer  $t_1 = t_2 = 0$  sur les faces supérieures et inférieures d'une éprouvette. Dans le cas de polymères ou d'élastomères, on est parfois obligé de coller ces faces à des plateaux rigides pour réaliser l'essai. Dans ce cas, on impose en fait  $u_1 = u_2 = 0$ , c'est-à-dire que l'on empêche ces faces de rétrécir en traction et de grandir en compression. Il en résulte des efforts importants qui font que la déformation n'est plus homogène dans l'éprouvette. Pour de nombreux matériaux cependant, et selon la géométrie de l'éprouvette, il existe encore une zone utile où les champs (9.27) et (9.30) règnent effectivement, de sorte que de tels essais sont exploitables. Différents effets de bord sont illustrés sur la figure 9.5.

#### *Condition de flambage élastique*

L'expérience courante nous apprend que lorsqu'on essaie de comprimer un corps élancé dans le sens de sa longueur, une instabilité risque de se produire. La poutre se flétrit tout à coup ou prend la forme d'un arc de cercle ou d'un S au-delà d'une certaine charge. Il n'est alors plus possible de déformer la poutre de manière homogène comme on le souhaite en compression. Cette instabilité qui existe aussi pour les plaques s'appelle **flambage** ou **flambement**. Prédire le flambage n'est pas possible dans le contexte infinitésimal. L'analyse se fait alors en considérant explicitement les configurations "flambées", i.e. fléchies ou en S. Dans le cadre de la théorie des poutres, on peut évaluer la charge critique à partir de laquelle une colonne élastique (non encastrée à ses extrémités) risque de flamber, c'est la **charge d'Euler** :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (9.38)$$

où  $I = \int_S X_1^2 dX_1 dX_2$  est le moment quadratique de la section ( $I = t^4/12$  pour une section de poutre carrée de côté  $t$ ). Dans le cas des métaux, la formule précédente s'avère trop optimiste car un flambage plastique peut se produire de manière plus précoce. Les conditions de flambage plastique sont délicates à déterminer (théoriquement et expérimentalement). Pour éviter ces instabilités, il faut diminuer l'élancement  $L/t$  de la poutre. Ce critère fait partie des conditions de dimensionnement des essais de compression.

#### 9.2.2 *Flexion*

On considère une barre cylindrique  $\Omega$  de section  $S$  de forme quelconque, de longueur  $L$  et de génératrice parallèle à l'axe  $e_1$ . Les sections extrémités sont notées  $S_0$  et  $S_L$ . L'origine  $O$  du repère cartésien orthonormé est choisie au centre d'inertie de la section  $S_0$ . Les axes  $(O, e_1)$ ,  $(O, e_2)$  et  $(O, e_3)$  coïncident avec les axes principaux d'inertie du cylindre. Ce choix est tel que

$$\int_S X_2 dS = \int_S X_3 dS = \int_S X_2 X_3 dS = 0 \quad (9.39)$$

On note

$$I_2 = \int_S X_3^2 dS, \quad I_3 = \int_S X_2^2 dS \quad (9.40)$$

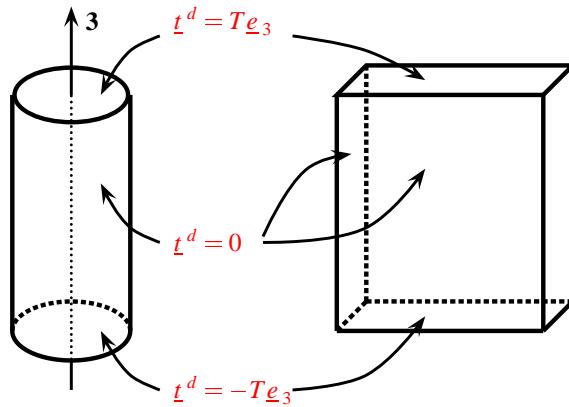


Figure 9.3 : Conditions aux limites de type traction/compression sur un barre cylindrique à gauche ou sur un parallélépipède à droite.

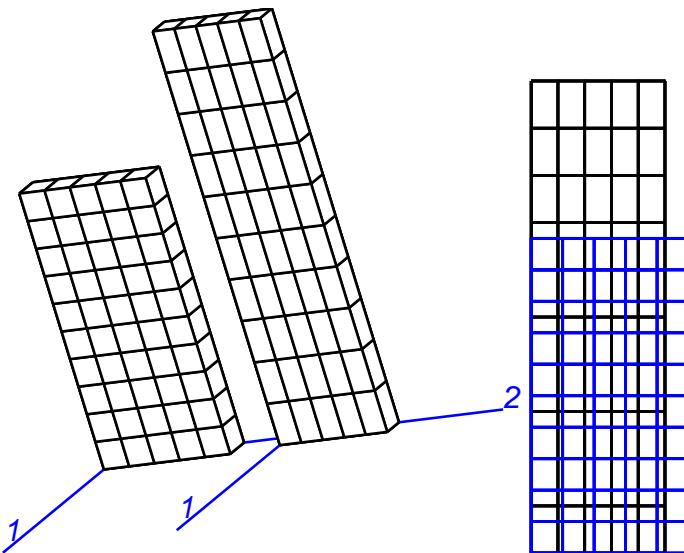


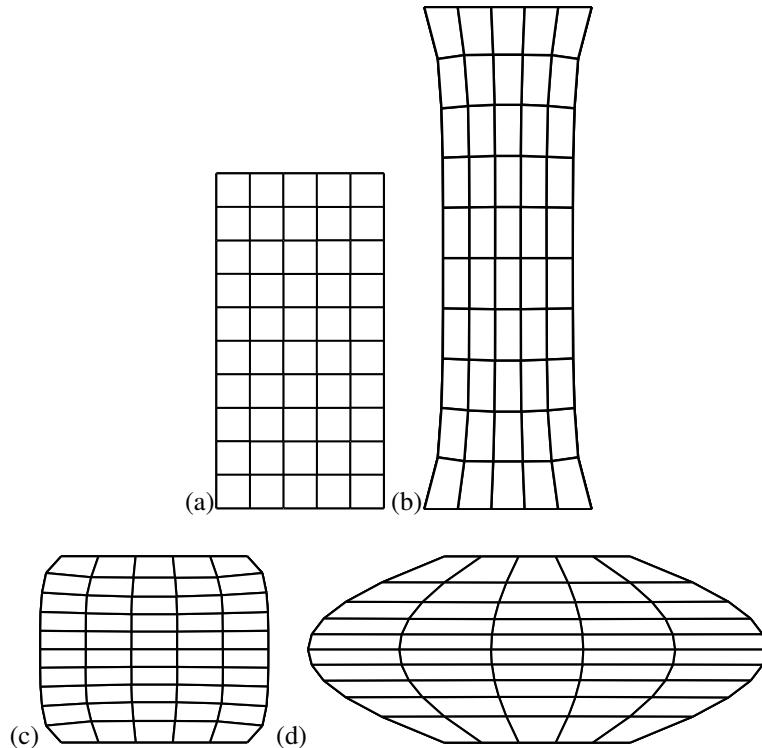
Figure 9.4 : Traction simple d'une plaque parallélépipédique munie d'une grille : états initial et final en perspective (à gauche) et de face (à droite, les deux états étant superposés). Le matériau étant isotrope, quel est son coefficient de Poisson d'après la figure de droite ?

les moments d'inertie principaux de la section courante  $S$ .

On impose les conditions aux limites suivantes à la barre  $\Omega$  :

- La surface latérale de la barre, i.e.  $\partial\Omega - S_0 - S_L$ , est libre :  $\underline{t}^d = 0$ .
- Les données sont incomplètes sur les faces  $S_0$  et  $S_L$ . On se contente d'indiquer le torseur des efforts appliqués sur la section  $S_L$  :

$$\{O, \quad \underline{R} = 0, \quad \underline{M} = M_3 \underline{e}_3\} \quad (9.41)$$



*Figure 9.5 : Essais de traction et compression avec encastrement sur les faces supérieure et inférieure : (a) état initial, (b) déformée en traction en élasticité linéaire, (c) compression d'un métal, (d) compression d'un élastomère. Les effets de bord liés à l'encastrement sont clairement visibles. Les déformations sont volontairement amplifiées pour l'illustration. On distingue clairement l'existence d'une zone utile où la déformation est quasi-homogène dans les cas (b) et (c).*

Le couple opposé est appliqué à la section  $S_0$ . Le couple de flexion est donc appliqué ici par rapport à un axe principal d'inertie des sections de la barre. On parle de **flexion normale**.

- Les efforts volumiques sont négligés.

Le problème est donc mal posé puisqu'on n'a pas donné d'information point par point sur les faces  $S_0$  et  $S_L$ . Une approche en contraintes est proposée ici et on acceptera la forme obtenue du vecteur-contrainte sur  $S_0$  et  $S_L$  à condition que le torseur des efforts appliqués corresponde bien aux données (9.41).

#### *Contraintes*

La forme de la déformée attendue pour une barre en flexion est donnée sur la figure 9.6. Les fibres matérielles parallèles à  $\underline{e}_1$  sont étirées en haut et comprimées en bas (sur la figure  $M_3 < 0$ ). Cela incite à penser que les contraintes  $\sigma_{11}$  sont de traction en haut et de compression en bas. Une forme simple de tenseur des contraintes compatible avec cette

intuition est la suivante :

$$\underline{\sigma} = kX_2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} kX_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.42)$$

où  $k$  est une constante à déterminer<sup>7</sup>. On suppose donc que chaque élément de matière subit un état de traction ou compression simple dont l'intensité dépend de la position  $X_2$  seulement.

On peut vérifier que les équations d'équilibre locales sont bien vérifiées par un tel champ de contraintes<sup>8</sup>. Un tel champ conduit effectivement à un vecteur-contrainte nul sur la surface latérale de la barre. Il reste à calculer le torseur des efforts induits par ce champ de contraintes sur la face  $S_L$  par exemple :

$$\underline{R} = \int_{S_L} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_1 \, dS = \int_{S_L} kX_2 \underline{e}_1 \, dS = 0 \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \int_{S_L} \underline{OM} \wedge \underline{t} \, dS = \int_{S_L} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} kX_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \, dS = \int_{S_L} \begin{bmatrix} 0 \\ kX_2 X_3 \\ -kX_2^2 \end{bmatrix} \, dX_2 dX_3 \\ &= -kI_3 \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (9.44)$$

La barre est donc en équilibre global si

$$k = -\frac{M_3}{I_3} \quad (9.45)$$

ce qui détermine de manière unique la constante  $k$ . Le champ de contraintes  $\sigma_{11}$  est illustré pour une barre de section carrée sur la figure 9.7(c).

### Déformations

Le champ de déformation se déduit du champ de contrainte (9.42) par la loi de comportement élastique linéaire isotrope (9.29) :

$$\underline{\varepsilon} = -\frac{M_3}{EI_3} X_2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \nu(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)), \quad [\underline{\varepsilon}] = -\frac{M_3}{EI_3} X_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \quad (9.46)$$

Le champ de déformations  $\varepsilon_{33}$  est illustré pour une barre de section carrée sur la figure 9.7(d).

### Déplacements

La méthode systématique pour construire le champ de déplacements à partir du champ de déformations précédent consiste à calculer le gradient de la rotation  $\underline{\omega}$  par la formule

---

7. Plus généralement, on peut chercher une fonction  $\sigma_{11} = f(X_2)$ . Ce champ de contraintes conduit à des déformations  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11} = -\nu f(X_2)/E$ . La condition de compatibilité (2.153) indique alors que  $f'' = 0$ , ce qui implique la forme linéaire proposée.

8. En effet, seule la dérivée partielle  $\sigma_{11,2}$  est non nulle lorsque l'on part de (9.42) mais cette dérivée n'intervient pas dans la divergence de  $\underline{\sigma}$ .

(2.145). Cela donne

$$\begin{aligned}\omega_{12,1} &= \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{21,1} = -\frac{M_3}{EI_3}, & \omega_{23,1} &= 0, & \omega_{31,1} &= 0, \\ \omega_{12,2} &= 0, & \omega_{23,2} &= 0, & \omega_{31,2} &= 0, \\ \omega_{12,3} &= 0, & \omega_{23,3} &= \varepsilon_{23,3} - \varepsilon_{33,2} = -\nu \frac{M_3}{EI_3} & \omega_{31,3} &= 0\end{aligned}$$

L'intégration de ces équations fournit

$$\omega_{12} = -\frac{M_3}{EI_3}X_1 - r, \quad \omega_{23} = -\nu \frac{M_3}{EI_3}X_3 - p, \quad \omega_{31} = -q$$

Le gradient du déplacement s'écrit donc

$$\begin{aligned}u_{1,1} &= \varepsilon_{11} = -\frac{M_3}{EI_3}X_2, & u_{2,1} &= -\omega_{12} = \frac{M_3}{EI_3}X_1 + r, & u_{3,1} &= -q \\ u_{1,2} &= \omega_{12} = -\frac{M_3}{EI_3}X_1 - r, & u_{2,2} &= \varepsilon_{22} = \nu \frac{M_3}{EI_3}X_2, & u_{3,2} &= p + \nu \frac{M_3}{EI_3}X_3 \\ u_{1,3} &= q, & u_{2,3} &= \omega_{23} = -\nu \frac{M_3}{EI_3}X_3 - p, & u_{3,3} &= \varepsilon_{33} = \nu \frac{M_3}{EI_3}X_2\end{aligned}$$

L'intégration des équations précédentes conduit aux expressions suivantes des composantes du déplacement

$$u_1 = -\frac{M_3}{EI_3}X_1X_2, \quad u_2 = \frac{M_3}{EI_3}\left(\frac{X_1^2}{2} + \nu \frac{X_2^2 - X_3^2}{2}\right), \quad u_3 = \nu \frac{M_3}{EI_3}X_2X_3 \quad (9.47)$$

auquel s'ajoute le mouvement de corps rigide  $\{(p, q, r), \underline{c}\}$ . La déformée d'une barre de section carrée correspondant à ce champ de déplacement est illustrée sur la figure 9.7(b).

#### *Validation du contexte infinitésimal*

On a construit au passage le gradient du champ de déplacement

$$\text{grad } \underline{u} = \begin{bmatrix} -\frac{M_3}{EI_3}X_2 & -\frac{M_3}{EI_3}X_1 & 0 \\ \frac{M_3}{EI_3}X_1 & \nu \frac{M_3}{EI_3}X_2 & -\nu \frac{M_3}{EI_3}X_3 \\ 0 & \nu \frac{M_3}{EI_3}X_3 & \nu \frac{M_3}{EI_3}X_2 \end{bmatrix} \quad (9.48)$$

ce qui permet d'énoncer les conditions de validité de la solution précédente :

$$\left| \frac{M_3}{EI_3}X_1 \right| \ll 1 \implies \left| \frac{M_3}{EI_3}L \right| \ll 1 \quad (9.49)$$

$$\left| \frac{M_3}{EI_3}X_2 \right| \ll 1 \implies \left| \frac{M_3}{EI_3}t \right| \ll 1 \quad (9.50)$$

où  $t$  est la plus grande largeur de la section de la barre.

*Les sections droites restent droites*

Pour étudier en détail la déformée de la barre, on rappelle la relation entre les positions initiales et actuelles des points matériels :

$$x_i = X_i + u_i$$

Suivons par exemple une section de la barre de cote  $X_1 = X_0$ . D'après (9.47), les déplacements des points de cette section valent

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{M_3}{EI_3} X_0 X_2 \\ u_2 = \frac{M_3}{EI_3} \left( \frac{X_0^2}{2} + \nu \frac{X_2^2 - X_3^2}{2} \right) \\ u_3 = \frac{M_3}{EI_3} X_2 X_3 \end{cases} \quad (9.51)$$

La position  $x_1$  actuelle vaut donc

$$x_1 = X_0 + u_1 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3} X_0 X_2 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3} X_0 x_2 + \left( \frac{M_3}{EI_3} \right)^2 \left( \frac{X_0^2}{2} + \nu \frac{X_2^2 - X_3^2}{2} \right) X_0$$

où l'on a remplacé  $X_2$  par  $x_2 - u_2$ . Le facteur de  $X_0$  dans le dernier terme de l'expression précédente est d'un ordre inférieur à  $M_3 x_2 / EI$  en vertu des conditions (9.50). Il peut donc être négligé devant les deux premiers termes. En conséquence on a la relation suivante entre les coordonnées actuelles des points de la section :

$$x_1 = X_0 - \frac{M_3}{EI_3} X_0 x_2 \quad (9.52)$$

Il s'agit d'une relation linéaire entre  $x_1$  et  $x_2$ , indépendante de  $x_3$ . On reconnaît l'équation d'un plan contenant l'axe  $\underline{e}_3$ . Les points matériels initialement dans la section  $X_1 = X_0$

restent donc dans un plan qui a en fait tourné de  $\frac{M_3}{EI_3} X_0 = -\omega_{12}$  par rapport à l'axe  $\underline{e}_3$ .

Le fait que les sections courantes restent droites se voit sur la figure 9.6.

Par contre, la section ne garde pas sa forme initiale dans le plan. La figure 9.7(f) montre qu'une section initialement carrée ne le reste pas. Cela est dû au fait que les fibres matérielles en traction se contractent latéralement tandis que celles en compression se dilatent latéralement. La figure 9.7(e) montre le champ de déplacement  $u_3$  illustrant ce phénomène. Ce fait est bien connu intuitivement, il suffit de flétrir une gomme et d'observer que la surface perpendiculaire à  $\underline{e}_2$ , initialement plane, s'incurve au cours de la déformation.

*Identification de la fibre neutre avec un arc de cercle*

Dans une barre en flexion pure, le plan normal à  $\underline{e}_2$  passant par les centres d'inertie des sections ne subit aucune contrainte, d'après (9.42). On appelle fibre neutre ou fibre moyenne, la ligne matérielle  $X_2 = X_3 = 0$  et l'on étudie ici sa déformée. D'après les déplacements (9.47), les coordonnées actuelles des points de la fibre neutre vérifient

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2R}, \quad \text{avec} \quad R = \frac{EI_3}{M_3} \quad (9.53)$$

Il s'agit d'une parabole (que l'on voit sur la figure 9.6). Au passage, la formule (9.53)<sub>2</sub> fait apparaître la **rigidité de flexion**  $EI_3$  qui relie le moment imposé  $M_3$  à la courbure  $1/R$  de la parabole en son sommet. Le rapport

$$\frac{x_2}{R} = \frac{x_1^2}{2R^2} \sim \left( \frac{M_3}{EI_3} x_1 \right)^2$$

est un infiniment petit d'ordre  $\mathcal{O}(h^2)$  d'après (9.48). L'équation de la déformée de la fibre moyenne est donc tout aussi bien

$$\frac{x_2}{R} = \frac{x_1^2}{2R^2} + \frac{x_2^2}{2R^2}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{x_1^2}{R^2} + \left( \frac{x_2 - R}{R} \right)^2 = 1 \quad (9.54)$$

puisque la correction  $x_2^2/R^2$ , ajoutée au second membre de (9.53), est d'ordre  $\mathcal{O}(h^4)$ . Dans le contexte infinitésimal, les termes  $x_1^2/2R^2$  et  $x_1^2/2R^2 + x_2^2/2R^2$  sont **indiscernables**. La relation (9.54) est l'équation d'un cercle de rayon  $R$ . Il s'agit du cercle osculateur en  $x_1 = 0$  à la parabole précédemment définie. Dans le contexte infinitésimal, la parabole et son cercle osculateur sont indiscernables. Quel est l'intérêt de considérer la forme circulaire tout autant que la forme parabolique mise en évidence ? Simplement parce que l'indépendance des champs de déformations et de contraintes vis-à-vis de la variable  $X_1$  fait que toutes les sections sont équivalentes et qu'il n'y a en fait pas de raison de privilégier la section à  $x_1 = 0$  où se situe le sommet de la parabole (9.53). On parle de **flexion circulaire**.

#### *Les sections restent normales à la fibre neutre*

La déformée de la section  $X_1 = X_0$  est contenue, on l'a vu, dans le plan d'équation (9.52). Le vecteur normal à ce plan à pour coordonnées

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{X_0}{R} & 0 \end{bmatrix}^T$$

La fibre moyenne quand à elle devient la parabole (9.53) dont une représentation paramétrique est  $[x_1 \quad \frac{x_1^2}{2R} \quad 0]^T$ . Le vecteur tangent à la fibre moyenne est donc

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{x_1}{R} & 0 \end{bmatrix}^T$$

qui coïncide donc avec le vecteur normal à la section déformée, à des termes en  $\mathcal{O}(h^2)$  près. Les sections droites restent donc normales à la fibre moyenne au cours de la déformation, c'est une propriété importante de la flexion circulaire. Elle se voit aussi sur la figure 9.6.

#### 9.2.3 Principe de Saint-Venant

Il n'est pas aisément en général d'imposer les conditions aux limites les mieux adaptées au type de sollicitation recherché pour une éprouvette ou une pièce. En traction, par exemple, il est difficile de garantir l'absence d'effort  $t_1$  ou  $t_2$  sur les faces supérieure et inférieure des structures de la figure 9.3. Il est plus simple d'encastrer purement et simplement ces faces et d'appliquer ensuite l'effort axial. La figure 9.5 montre qu'il est malgré tout possible, dans certains cas, de garantir l'existence d'une zone utile au sein de laquelle règne le champ uniforme de traction simple souhaité. Le non respect des conditions aux limites idéales induit des **effets de bord** notables dont on souhaite qu'ils ne viendront pas trop

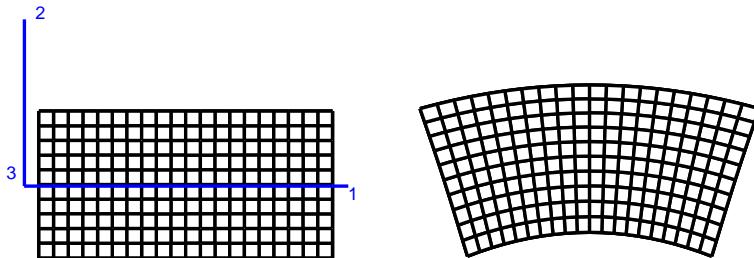
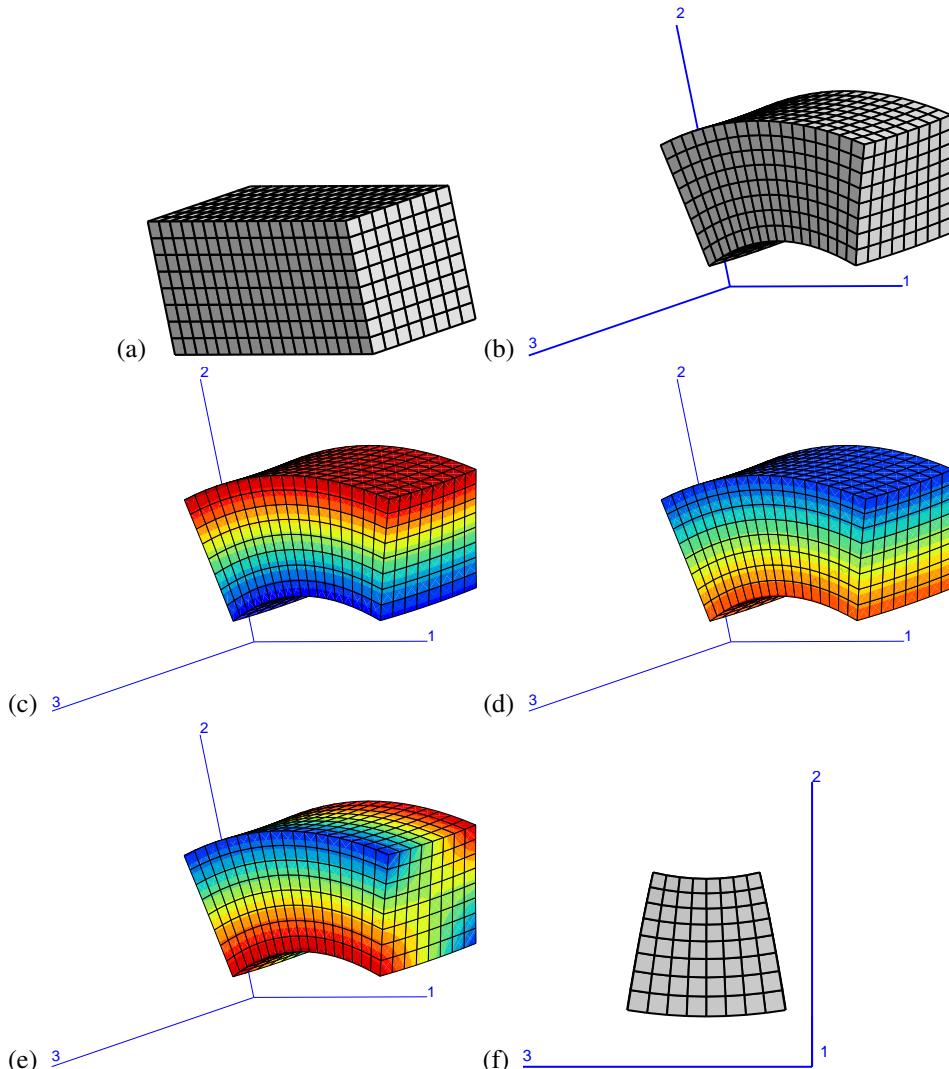


Figure 9.6 : Flexion d'une barre cylindrique : vue selon  $e_3$  de l'état initial et de l'état déformé. La face observée est munie d'une grille.

perturber le champ dans la zone utile. De même en flexion, il est difficile d'imposer une rotation aux faces  $S_0$  et  $S_L$  de la figure 9.7 et de garantir des efforts  $t_2$  et  $t_3$  nuls. Si l'on encastre à nouveau ces faces, on obtiendra des effets de bord, qui cependant s'estompent assez rapidement pour laisser la place à une zone utile où règne le champ de flexion calculé. C'est une situation que l'on rencontre fréquemment : il n'est pas essentiel de connaître les conditions aux limites précises appliquées à certaines parties (limitées) de la structure étudiée, il suffit de garantir que le torseur des efforts correspond bien à la consigne. L'expérience montre que les efforts de bord induits par la façon d'appliquer ce torseur sont en général à courte portée et ne perturbent pas la solution attendue suffisamment loin des bords. Ce constat a été en fait érigé en véritable

**Principe de Saint-Venant.** *Si l'on remplace une première distribution d'efforts agissant sur une partie de la frontière  $\partial\Omega_{SV} \subset \partial\Omega$ , par une seconde distribution agissant sur la même surface, ces deux distributions formant des torseurs égaux, les autres conditions aux limites sur la partie complémentaire de  $\partial\Omega$  restant inchangées, alors, dans toute partie de  $\Omega$  suffisamment éloignée de  $\partial\Omega_{SV}$ , les champs de contraintes et de déplacements sont pratiquement inchangés.*

Restriction importante, le principe n'est valide que si la surface  $\partial\Omega_{SV}$  possède deux longueurs caractéristiques petites devant la longueur caractéristique principale de la structure considérée. Le principe de Saint-Venant est souvent invoqué en mécanique des structures pour bien poser le problème alors même que les conditions aux limites exactes sont inconnues ou difficiles à décrire. Il s'agit en fait d'un théorème dont la démonstration n'est disponible aujourd'hui que pour certains types de structures (poutres, plaques...). Cet énoncé reste une conjecture dans le cas général tridimensionnel. C'est pourquoi le terme principe est utilisé. On trouvera d'ailleurs une formulation mathématiquement plus précise et une démonstration de ce "principe" pour quelques situations dans la référence (Ladevèze, 1983). La clef consiste à établir le caractère **localisé** des perturbations induites par certains types de changements de conditions aux limites à torseur constant. Le principe de Saint-Venant doit permettre de déconnecter l'effet intérieur à grande longueur d'onde, des effets locaux à petite longueur d'onde tels que les effets de bord ou d'extrémité. De façon précise, c'est un théorème qui devrait décrire la nature des conditions aux limites assurant la localisation du champ de contrainte ou de déplacement. Il existe en fait un principe de Saint-Venant pour les conditions en efforts imposés et un autre pour les conditions en déplacement. En effet la localisation des contraintes n'entraîne pas en général la localisation des déplacements. On peut mentionner aussi un théorème important, dit de Toupin, qui montre la décroissance exponentielle de la partie localisée de certaines solutions (Toupin, 1965).



*Figure 9.7 : Flexion d'une barre à section carrée munie d'une grille sur ses faces extérieures : (a) état initial, (b) état fléchi par rapport à l'axe  $e_3$ , (c) champ de contrainte  $\sigma_{11}$  d'après la théorie linéarisée, (d) champ de déformation  $\varepsilon_{33}$  d'après la théorie linéarisée, (e) champ de déplacement  $u_3$ , (f) vue de la déformée d'une section courante (effet "gomme"). La couleur rouge correspond à des valeurs positives, la couleur bleue à des valeurs négatives.*

La restriction mentionnée plus haut quant aux dimensions de la surface  $\partial\Omega_{SV}$  est essentielle. On peut l'illustrer par un paradoxe qui découlait d'une utilisation abusive du principe. On considère un cylindre de hauteur  $H$  et de section circulaire de rayon  $R$ . Une pression uniforme est appliquée sur la surface latérale du cylindre tandis que les faces supérieure et inférieure sont libres d'effort. Il est clair que la résultante des forces sur la surface latérale est nulle. Pour autant, on ne peut en conclure que ce problème a une

solution proche de celle correspondant au même cylindre libre de tout effort appliqué, ce qu'une lecture hâtive du principe pourrait suggérer... La raison vient du fait que la surface  $\partial\Omega_{SV}$  considérée est d'aire  $2\pi RH$  à comparer aux faces  $\pi R^2$ . Que le disque soit mince  $H \ll R$  ou qu'il s'agisse d'une tige  $R \ll H$ , la surface  $\partial\Omega_{SV}$  ne possède qu'une seule longueur caractéristique petite devant  $R$  ou  $H$ , respectivement, ce qui exclut toute application du principe. Le principe de Saint-Venant est appliqué à un disque en rotation, de manière correcte cette fois-ci, au chapitre 25, page 545. Le principe s'applique sans ambiguïté à une barre de section carrée  $H^2$  et de longueur  $L$  lorsque la surface  $\partial\Omega_{SV}$  est composée des faces latérales, dès que  $H \ll L$ .

En pratique, on invoque fréquemment ce principe pour justifier la validité de solutions de nombreux problèmes aux limites tels que la flexion, la torsion, et les chargements combinées, notamment dans certaines structures industrielles. La validité de la solution proposée sera d'autant meilleure qu'on se situe loin des bords où les conditions aux limites sont mal connues.

Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant fut un grand mécanicien français professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées dont on a fêté en 1997 les 200 ans de la naissance. En même temps qu'il établissait pour la première fois la solution du problème de torsion des barres prismatiques, il a énoncé la nécessité d'un tel principe dans la référence historique (Saint-Venant, 1853).

### 9.3 Problèmes bidimensionnels

Dans la résolution pratique des problèmes d'équilibre linéarisés, on cherche à limiter au maximum le nombre d'inconnues à l'aide d'hypothèses simplificatrices qui peuvent être strictement vérifiées pour la situation étudiée ou bien constituer une approximation du problème réel. L'une d'entre elle consiste à considérer que les phénomènes pertinents se passent dans un plan et à écrire des conditions simplifiées pour ce qui se passe dans la troisième direction. On analyse successivement les simplifications apportées par quelques-unes de ces hypothèses. D'autres simplifications sont aussi mentionnées. La démarche de simplification passe par l'analyse des symétries du problème.

#### 9.3.1 Déformations planes

On s'intéresse aux champs de déplacements de la forme

$$[\underline{u}] = [u_1(X_1, X_2), \quad u_2(X_1, X_2), \quad u_3(X_1, X_2) = 0]^T$$

Le champ de déformation correspondant est dit plan et revêt la forme

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(X_1, X_2) & \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & \varepsilon_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.55)$$

En élasticité isotrope, le tenseur des contraintes prend alors la forme suivante

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(X_1, X_2) & \sigma_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \sigma_{12}(X_1, X_2) & \sigma_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(X_1, X_2) \end{bmatrix} \quad (9.56)$$

Il existe donc bel et bien une composante de contrainte suivant la troisième direction mais elle s'exprime directement en fonction des contraintes planes. Pour le voir il faut écrire  $\varepsilon_{33} = 0$  en fonction des contraintes grâce à la loi d'élasticité inverse (9.14) et on obtient

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (9.57)$$

On peut alors donner une forme purement bidimensionnelle à la loi d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (9.58)$$

qui remplace (8.57). Les solutions en déformations planes sont donc des cas particuliers du problème général 3D.

### 9.3.2 Contraintes planes

L'état de contraintes planes correspond à la forme suivante du tenseur des contraintes dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(X_1, X_2) & \sigma_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \sigma_{12}(X_1, X_2) & \sigma_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.59)$$

Les composantes  $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$  sont nulles et les autres composantes ne dépendent que des deux variables  $(x_1, x_2)$  du plan de l'étude. En élasticité isotrope, le tenseur des déformations correspondant prend la forme

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(X_1, X_2) & \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & 0 \\ \varepsilon_{12}(X_1, X_2) & \varepsilon_{22}(X_1, X_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(X_1, X_2) \end{bmatrix} \quad (9.60)$$

Il existe donc bel et bien une composante de déformation suivant la troisième direction. Elle doit être telle que la contrainte  $\sigma_{33}$  s'annule ce qui implique que

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (9.61)$$

Les équations de compatibilité (2.153) à (2.158) appliquées à (9.60) se réduisent à

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad (9.62)$$

$$\varepsilon_{33,11} = \varepsilon_{33,22} = \varepsilon_{33,12} = 0 \quad (9.63)$$

Les équations (9.63) impliquent que la déformation  $\varepsilon_{33}$  est une fonction affine de  $(x_1, x_2)$  :

$$\varepsilon_{33} = aX_1 + bX_2 + c \quad (9.64)$$

où  $a, b, c, d$  sont des constantes. L'expression (9.61) indique qu'il en va de même de la trace du tenseur des contraintes. En toute rigueur, il faut tenir compte de cette condition pour résoudre le problème de contraintes planes, via (9.61). La structure du problème aux dérivées partielles posé devient alors très différente de celle du problème 3D ou en déformations planes.

La procédure systématique d'intégration du champ de déformation précédent permet d'accéder à la forme du champ de déplacement. On établit d'abord que le tenseur des rotations infinitésimales revêt la forme suivante :

$$\omega_{12}(x_1, x_2), \quad \omega_{23} = \omega_{31} = 0$$

à une rotation infinitésimale d'ensemble près. Dès lors, le champ de déplacement peut

être bâti :

$$u_1(X_1, X_2), \quad u_2(X_1, X_2), \quad u_3 = (aX_1 + bX_2 + c)X_3 + d$$

où  $d$  est une constante d'intégration. La déformée du plan  $X_3 = h$  a pour équation :

$$x_3 = h + (aX_1 + bX_2 + c)h + d \simeq h + (ax_1 + bx_2 + c)h + d$$

dans le contexte HPP. La surface plane reste donc plane.

On se contente très souvent du contexte des contraintes planes approchées pour lesquelles le solide est traité comme purement bidimensionnel c'est-à-dire qu'aucune dépendance en  $X_3$  n'est envisagée. On s'en tient alors à (9.62) et on oublie (9.63). La solution exacte du problème aux limites posé admet certes en général une dépendance en  $X_3$  mais la solution en contraintes planes s'avère pertinente au moins en  $X_3 = 0$ . L'hypothèse des contraintes planes est en général bien adaptée pour les structures minces pour lesquelles les incompatibilités dans la troisième direction sont limitées. Dans ce cas, la solution obtenue sous l'hypothèse des contraintes planes est exacte en  $X_3 = 0$ .

Le caractère mince de la structure n'est toutefois ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante pour l'établissement de contraintes planes. Un cylindre sous pression interne/externe, libre à ses extrémités, de longueur quelconque est dans un état de contraintes planes. Au contraire, une plaque mince en flexion n'est pas en contraintes planes puisque la contrainte dépend de  $X_3$ ...

On peut donner une forme purement bidimensionnelle à la loi d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (9.65)$$

qui remplace la forme (8.45).

Le fait qu'une solution en contraintes planes puisse, sous certaines conditions, représenter une bonne approximation de la solution complète est illustré de manière exhaustive dans le cas d'une géométrie et d'un chargement axisymétriques dans le chapitre 25 consacrée aux machines tournantes. En particulier, on y montre que l'existence de forces de volume à divergence non nulle n'est pas compatible avec l'hypothèse des contraintes planes. Toutefois, l'étude d'un disque en rotation illustre la pertinence de la solution approchée obtenue sous l'hypothèse de contraintes planes. L'exploitation des équations de Beltrami indique en fait que l'hypothèse des contraintes planes est associée à des restrictions sur la forme des efforts volumiques admissibles.

Cette discussion montre que le statut des conditions de contraintes planes est plus délicat que celui des déformations planes.

### 9.3.3 Fonctions de contraintes

Lorsque  $\sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$  et que les autres composantes ne sont que des fonctions de  $(x_1, x_2)$ , les deux premières équations d'équilibre en l'absence de forces volumiques<sup>9</sup> s'écrivent

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \quad (9.66)$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 \quad (9.67)$$

---

9. Une extension est possible lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel.

D'après le théorème 31, dit de Poincaré (page 335), la première équation implique qu'il existe une fonction  $f_1(x_1, x_2)$  telle que<sup>10</sup>

$$\sigma_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

De même, l'équation (9.67) implique qu'il existe une fonction  $f_2(x_1, x_2)$  telle que

$$\sigma_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \sigma_{21} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

La deuxième loi de Cauchy  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  indique que l'on doit avoir

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

L'utilisation à nouveau du théorème de Poincaré montre alors qu'il existe une fonction  $\chi(x_1, x_2)$  telle que

$$f_1 = \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \quad f_2 = \frac{\partial \chi}{\partial x_1}$$

et, en conséquence, les contraintes planes s'expriment à l'aide d'une seule fonction  $\chi$  telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (9.68)$$

Le problème se simplifie donc considérablement puisqu'on remplace la recherche de 3 fonctions par la recherche d'une seule fonction  $\chi(x_1, x_2)$ , appelée **fonction de contrainte** ou **fonction d'Airy**. Le champ de contraintes précédent doit donner accès à un champ de déformation compatible. L'utilisation de l'équation de compatibilité (9.62) et des lois d'élasticité isotrope

$$E\varepsilon_{11} = \sigma_{11} - \nu\sigma_{22}, \quad E\varepsilon_{22} = \sigma_{22} - \nu\sigma_{11}, \quad E\varepsilon_{12} = (1 + \nu)\sigma_{12}$$

en contraintes planes, et

$$E\varepsilon_{11} = (1 + \nu)((1 - \nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad E\varepsilon_{22} = (1 + \nu)((1 - \nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \quad E\varepsilon_{12} = (1 + \nu)\sigma_{12}$$

en déformations planes, conduit à la relation suivante, qui n'est autre que l'une des équations de Beltrami,

$$\sigma_{11,22} - \nu\sigma_{22,22} + \sigma_{22,11} - \nu\sigma_{11,11} - 2(1 + \nu)\sigma_{12,12} = 0$$

en contraintes planes, et

$$(1 - \nu)\sigma_{11,22} - \nu\sigma_{22,22} + (1 - \nu)\sigma_{22,11} - \nu\sigma_{11,11} - 2\sigma_{12,12} = 0$$

en déformations planes. L'équation aux dérivées partielles que doit vérifier la fonction de contraintes s'en déduit :

$$\chi_{,1111} + \chi_{,2222} + 2\chi_{,1122} = \Delta\Delta\chi = \nabla^2(\nabla^2\chi) = \nabla^4\chi = 0 \quad (9.69)$$

---

10. En effet, considérons la forme linéaire  $\omega = -\sigma_{12}dx_1 + \sigma_{11}dx_2$ . L'équation (9.66) indique que cette forme est exacte puisqu'elle vérifie les conditions de dérivées croisées  $\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} = -\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}$ . Il existe donc une fonction  $f_1(x_1, x_2)$  dont dérivent les composantes de  $\omega$  :  $\omega = df_1$ .

où plusieurs notations ont été introduites pour l'opérateur laplacien  $\Delta$ . L'équation est la même en contraintes planes qu'en déformations planes. Les fonctions recherchées sont donc à bi-laplacien nul et sont appelées **biharmoniques**<sup>11</sup>.

On montre en fait que la notion de fonction de contraintes ne se limite pas au cas bidimensionnel. Il existe 3 fonctions de contraintes dans le cas général tridimensionnel (Rekatch, 1980).

#### 9.3.4 Le cas 2D et demi...

Dans le cas des problèmes de thermoélasticité, l'hypothèse des déformations planes est trop contraignante puisqu'elle gêne la dilatation thermique selon la troisième direction, ce qui engendre des contraintes colossales irréalistes en pratique. C'est pourquoi on a recours à une hypothèse plus souple, appelée souvent 2D1/2. Elle consiste à considérer que la déformation reste plane mais que ce plan peut se translater, voire tourner, par rapport au plan de référence. Cela correspond à la cinématique suivante :

$$\underline{u}(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2)\underline{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\underline{e}_2 + (x_3 - x_3^0)\underline{U} + \underline{W} \wedge (\underline{x} - \underline{x}^0) \quad (9.70)$$

Ce champ contient les degrés de liberté dans le plan  $u_1, u_2$  pour chaque point matériel, mais aussi des degrés de liberté globaux (translation constante  $\underline{U}$  et rotation constante  $\underline{W}$ ). On vérifiera que cette cinématique implique que des points situés dans une section de cote  $x_3$  donnée restent dans un plan (en général distinct de la section initiale) après déformation.

#### 9.3.5 Cas axisymétrique

Lorsque la géométrie de la pièce, la répartition des matériaux et les sollicitations présentent une symétrie de révolution autour d'un axe  $\underline{e}_z$ , les grandeurs sont des fonctions des seules variables  $(r, z)$  en coordonnées cylindriques :

$$\underline{u} = u_r(r, z)\underline{e}_r + u_z(r, z)\underline{e}_z \quad (9.71)$$

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}) \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}) & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (9.72)$$

En élasticité isotrope, le tenseur des contraintes prend la forme simple

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (9.73)$$

11. Un exemple simple de fonction de contrainte est obtenu dans le cas particulier des coordonnées cylindriques avec une hypothèse d'indépendance de la fonction de contrainte vis-à-vis de l'angle  $\theta$ . Une fonction  $\chi(r)$  est recherchée. En utilisant l'expression (17.6) du laplacien en coordonnées cylindriques, on obtient l'équation différentielle

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \chi = 0$$

dont les solutions sont de la forme

$$\chi = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + D$$

Le problème d'élasticité reste donc 3D mais il suffit de le résoudre dans une section plane  $\theta = Cste.$

### 9.3.6 Cas antiplan

Une situation très simple permettant de résoudre analytiquement de nombreux problèmes est le cas antiplan pour lequel

$$\underline{u} = u_3(x_1, x_2)\underline{e}_3, \quad \text{ou} \quad \underline{u} = u_z(r, \theta)\underline{e}_z \quad (9.74)$$

Les seules composantes non nulles des déformations sont alors

$$\varepsilon_{31}, \varepsilon_{23}, \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}$$

En élasticité isotrope, les composantes des contraintes non nulles sont les mêmes que pour la déformation.

Cette situation est rencontrée pour une fissure située dans le plan normal à  $\underline{e}_1$ , dont le front rectiligne est selon  $\underline{e}_3$  et que l'on cisaille selon  $\underline{e}_3$  (mode III en mécanique de la rupture, cf. (Cailletaud, 2003)), ainsi que pour la dislocation-vis étudiée au chapitre 28.

## 10 Théorèmes de l'énergie et encadrement des solutions en élasticité

Les théorèmes de l'énergie sont énoncés dans le contexte infinitésimal de la statique des milieux élastiques. On envisage d'abord le cas général de l'élasticité non linéaire par rapport à un état quasi-naturel avant de spécialiser les résultats à la situation de l'élasticité linéaire. Ces théorèmes sont enfin utilisés pour encadrer la solution d'un problème aux limites, encadrement illustré par un exemple d'encadrement des modules d'élasticité appartenant d'échantillons sous des conditions pour lesquelles les solutions analytiques explicites ne sont pas disponibles.

### 10.1 Elasticité non linéaire dans le contexte infinitésimal

#### 10.1.1 Potentiel d'élasticité et potentiel dual

La présentation est limitée au cas isotherme. On note  $W(\varepsilon)$  la restriction de la fonction énergie libre de Hehlholtz  $\rho_0 \psi_0(\underline{E}, T)$  au cas des transformations infinitésimales et isothermes. C'est le potentiel d'élasticité, fonction supposée différentiable. La loi de comportement élastique se déduit de la relation d'hyperélasticité (7.28) et de la linéarisation de la relation entre le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des contraintes de Piola par rapport à un état de référence quasi-naturel :

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\varepsilon) = W'(\varepsilon) \quad (10.1)$$

Cette formulation est en mesure de décrire l'élasticité anisotrope et non linéaire dans le contexte infinitésimal. Une loi de comportement non linéaire est tout à fait envisageable dans un contexte infinitésimal à la condition que les déformations restent infinitésimales dans son utilisation. La loi de Hooke de l'élasticité linéarisée est obtenue lorsque le potentiel d'élasticité est quadratique.

Lorsque le potentiel  $W(\varepsilon)$  est une fonction strictement convexe de son argument, le potentiel dual  $W^*(\underline{\sigma})$  est construit comme au paragraphe<sup>1</sup> 7.2.6 :

$$W^*(\underline{\sigma}) = \max_{\varepsilon} (\underline{\sigma} : \varepsilon - W(\varepsilon)) \quad (10.2)$$

C'est une fonction tensorielle convexe par rapport à son argument. La loi de comportement duale s'exprime alors sous la forme

$$\varepsilon = \frac{\partial W^*}{\partial \underline{\sigma}}(\underline{\sigma}) = W^{**}(\underline{\sigma}) \quad (10.3)$$

Le potentiel d'élasticité et le potentiel dual sont liés par la relation :

$$W(\varepsilon) + W^*(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} : \varepsilon \quad (10.4)$$

lorsque  $\underline{\sigma}$  et  $\varepsilon$  sont en relation de comportement.

---

1. Il s'agit en fait de l'opposée de l'enthalpie libre de Gibbs :  $G = F + PV$  généralisée au cas des milieux continus.

### 10.1.2 Formulation du problème aux limites d'élasticité non linéaire infinitésimale

On considère le type de problèmes pour lesquels les déplacements sont imposés sur la partie  $\partial\Omega_u$  du bord du corps  $\Omega$  tandis que le vecteur-contrainte est prescrit sur la partie complémentaire  $\partial\Omega_{td}$ . Le contour  $\partial\Omega$  du corps considéré est donc divisé de la manière suivante :

$$\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{td} = \partial\Omega, \quad \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_{td} = \emptyset, \quad \text{mes } \partial\Omega_u \neq 0$$

comme sur la figure 9.1 du chapitre précédent. La surface  $\partial\Omega_u$  est supposée de mesure non nulle, c'est-à-dire que le déplacement n'est en particulier pas imposé seulement à des points isolés.

On recherche le champ de déplacements solution du problème  $(\mathcal{P}W)$  suivant :

$$(PW) \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad } \underline{u} + (\text{grad } \underline{u})^T), & \forall \underline{x} \in \Omega \quad \text{compatibilité} \\ \text{div } \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0, & \forall \underline{x} \in \Omega \quad \text{équilibre} \\ \underline{\sigma} = W'(\underline{\varepsilon}) & \text{loi de comportement} \\ \underline{u} = \underline{u}^d, & \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u \quad \text{conditions aux limites} \\ \underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{t}^d, & \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{td} \end{array} \right.$$

Le problème est linéarisé du point de vue géométrique et tout se passe comme si l'on pouvait confondre les configurations de référence et actuelle dans la formulation. Le problème reste toutefois non linéaire via la loi de comportement  $W$ .

D'autres types de conditions aux limites méritent l'attention, par exemple le cas du problème de Neumann entièrement posé en efforts et le cas de conditions mixtes en chaque point du bord, situation abordée dans le cas du problème  $(\mathcal{P})$  formulé à la fin du paragraphe 9.1.2. On renvoie le lecteur au livre (Duvaut, 1990) pour l'étude de ces deux types de problèmes dans le cas de l'élasticité linéarisée.

Le système  $(\mathcal{P}W)$  est appelée formulation forte du problème aux limites.

La question de la régularité mathématique de la solution recherchée en fonction de celle des données n'a pas été précisée ici et sera abordée au paragraphe 10.2.3.

## 10.2 Théorèmes de l'énergie en élasticité non linéaire infinitésimale

### 10.2.1 Une application du théorème des travaux virtuels

Soit  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  un champ de contraintes auto-équilibré, c'est-à-dire tel que  $\text{div } \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0$  et  $\underline{u}^*(\underline{x})$  un champ de vecteurs à dérivées premières bornées<sup>2</sup>. On établit de la même manière que pour le théorème 11 des travaux virtuels de la section 3.3.4 que

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^* dS = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^* dV \quad (10.5)$$

Dans cette expression, les champs  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{u}^*$  ne sont pas nécessairement les solutions du problème aux limites considéré. En particulier, ils ne vérifient pas nécessairement les conditions aux limites requises et les champs  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)$  ne sont pas nécessairement liés par la relation de comportement. La relation s'applique cependant en particulier aux solutions du problème  $(\mathcal{P}W)$ , en l'absence de discontinuité du déplacement réel.

2. Le champ de vecteurs  $\underline{u}^*$  est donc continu.

### 10.2.2 Formulation variationnelle du problème aux limites en déplacement

On considère l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissibles pour le problème  $(\mathcal{P}W)$  :

$$\mathcal{CA} = \{\underline{u}^*, \quad \underline{u}^* = \underline{u}^d, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u\}$$

Une solution  $\underline{u}$  en déplacement du problème  $(\mathcal{P}W)$  est cinématiquement admissible :  $\underline{u} \in \mathcal{CA}$ . La régularité mathématique requise pour ces champs est précisée au paragraphe 10.2.3.

On considère ensuite l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles pour le problème  $(\mathcal{P}W)$  :

$$\mathcal{SA} = \{\boldsymbol{\sigma}^\dagger, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\dagger + \rho \underline{f} = 0, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad \text{et} \quad \underline{t} = \boldsymbol{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n} = \underline{t}^d, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega_{td}\}$$

Un champ  $\underline{u}^*$  cinématiquement admissible combiné à un champ  $\boldsymbol{\sigma}^\dagger$  statiquement admissible satisfont la relation (10.5) de la section précédente.

**Théorème 25 (Formulation faible du problème aux limites en déplacements)** *Si  $\underline{u}$  est solution du problème  $(\mathcal{P}W)$ , alors*

$$a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) = L(\underline{v} - \underline{u}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{CA} \quad (10.6)$$

où  $a$  et  $L$  sont les formes suivantes :

$$a(\underline{u}, \underline{w}) = \int_{\Omega} W'(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) : \underline{\varepsilon}(\underline{w}) \, dV, \quad L(\underline{w}) = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{w} \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{w} \, dS \quad (10.7)$$

La forme  $a$  est linéaire par rapport à son second argument et  $L$  est linéaire. La notation  $\underline{\varepsilon}(\underline{v})$  désigne la partie symétrique du gradient de  $\underline{v}$ .

**Preuve.** La relation

$$\int_{\Omega} W'(\underline{\varepsilon}(\underline{u})) : (\underline{\varepsilon}(\underline{v}) - \underline{\varepsilon}(\underline{u})) \, dV = \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot (\underline{v} - \underline{u}) \, dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot (\underline{v} - \underline{u}) \, dS \quad (10.8)$$

résulte de l'application de la relation (10.5) au champ de contraintes solution  $\boldsymbol{\sigma} = W'(\underline{\varepsilon}) \in \mathcal{SA}$ , statiquement admissible, et au champ  $(\underline{v} - \underline{u})$ , qui s'annule sur le bord  $\partial\Omega_u$ .  $\square$

La formulation variationnelle (10.6) du problème  $(\mathcal{P}W)$  est dite aussi formulation faible du problème d'élasticité et ses solutions, solutions faibles de  $(\mathcal{P}W)$ . L'équivalence entre les formulations forte et faible pose question du fait que la régularité exigée pour le champ  $\underline{u}$  afin que les termes de  $(\mathcal{P}W)$  et (10.6) soient définis, est différente pour  $(\mathcal{P}W)$  et (10.6). En effet, dans le problème  $(\mathcal{P}W)$ , on est amené à dériver deux fois le champ  $\underline{u}$  puisque la divergence de la contrainte fait intervenir une dérivation de la déformation lorsque la loi de comportement est substituée dans la loi d'équilibre. Au contraire, seules les dérivées premières de  $\underline{u}$  apparaissent dans (10.6). Cette question est débattue au paragraphe 10.2.3.

Le résultat (10.8) généralise le théorème 24 au cas de l'élasticité non linéaire. Il se distingue du théorème 11 des puissances virtuelles représentant la formulation variationnelle des équations d'équilibre, pour lequel les champs tests peuvent être pris dans l'ensemble  $\mathcal{D}(\Omega)$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact, et ne vérifient pas nécessairement les conditions aux limites. En outre, le théorème des puissances virtuelles s'énonce pour tout sous-domaine de  $\Omega$  tandis que la formulation variationnelle du problème aux limites est écrite ici sur le corps complet.

### 10.2.3 Régularité des solutions

Les solutions de la grande variété des problèmes d'élasticité n'appartiennent pas en général à l'espace des fonctions vectorielles de classe  $C^2$  deux fois continûment différentiables, comme pourrait le laisser penser la formulation du problème ( $\mathcal{P}W$ ). La régularité des solutions attendues pour des efforts appliqués de régularité donnée est un problème délicat de l'étude mathématique des équations aux dérivées partielles. Ce n'est pas le lieu d'énoncer ici de tels résultats mathématiques. Cependant il est utile de donner quelques précisions pour mieux se rendre compte des types de singularité qui peuvent se présenter dans certaines situations mécaniques. Les informations données dans ce paragraphe sont issues des ouvrages (Ciarlet, 1986; Ciarlet, 1988; Duvaut, 1990).

Le corps  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^3$  dont le bord  $\partial\Omega$  est suffisamment régulier, par exemple continûment différentiable par morceaux.

Les données des problèmes ( $\mathcal{P}W$ ) et (10.6) que sont les efforts volumiques  $\rho \underline{f}$  et  $\underline{t}^d$  sont généralement pris dans les espaces fonctionnels  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\partial\Omega)$  respectivement, c'est-à-dire les fonctions vectorielles de carré sommable<sup>3</sup>. Cela permet de considérer un chargement  $\underline{t}^d$  discontinu le long du contour, par exemple nul sur le contour sauf sur une portion sur laquelle il est constant.

Les composantes des champs-tests  $\underline{u}^*$  et  $\underline{v}$  dans (10.5) et (10.8), respectivement, sont dans l'espace de Sobolev d'ordre 1,  $H^1(\Omega)$ , espace des fonctions de carré sommable dont les dérivées partielles<sup>4</sup> sont également de carré sommable :

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\}$$

L'espace  $(H^1(\Omega))^3$  est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|\underline{v}\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \|\underline{v}(\underline{x})\|^2 + \|\text{grad } \underline{v}(\underline{x})\|^2 dV \right)^{1/2} = \left( \|\underline{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{grad } \underline{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

où  $\|\bullet\|$  est la norme euclidienne classique (Kern, 2004). Un résultat important dont la signification revêt également un caractère mécanique est que la norme précédente est équivalente à

$$\left( \int_{\Omega} \|\underline{v}(\underline{x})\|^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v})(\underline{x})\|^2 dV \right)^{1/2} = \left( \|\underline{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

qui ne fait pas intervenir la partie rotation infinitésimale du gradient du champ de vecteurs<sup>5</sup>. La norme porte sur le champ lui-même et le champ des déformations associé.

Les déplacements imposés  $\underline{u}^d$  sont des traces d'un élément de  $(H^1(\Omega))^3$ , c'est-à-dire des restrictions au bord  $\partial\Omega_u$  de champs de vecteurs de  $(H^1(\Omega))^3$ .

Les solutions fortes  $\underline{u}$  du problème ( $\mathcal{P}W$ ) sont a priori à rechercher dans l'espace de

---

3. L'espace  $L^2(\Omega)$  est l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable. On étend la définition aux fonctions vectorielles de  $\mathbb{R}^3$  définies sur l'ouvert  $\Omega$  :

$$L^2(\Omega) = \{\underline{v}, \|\underline{v}\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \|\underline{v}(\underline{x})\|^2 dV \right)^{1/2} < +\infty\}$$

4. plus généralement au sens des distributions.

5. C'est une conséquence de l'inégalité de Korn (Ciarlet, 1986; Kern, 2004).

Sobolev d'ordre 2

$$H^2(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \quad i, j = 1, 2, 3\}$$

car les dérivées seconde des déplacements sont requises, au moins pour des fonctions  $W$  suffisamment régulières, par l'application de la divergence au champ de contrainte  $W'(\xi)$ <sup>6</sup>.

Au contraire, la formulation faible (10.8) du problème ne fait intervenir que les dérivées premières du déplacement. Par conséquent, les solutions faibles sont recherchées dans  $H^1(\Omega)$ .

L'existence d'une solution faible du problème  $(PW)$  se démontre sous réserve d'une régularité suffisante de  $W$ . Lorsque  $W$  est quadratique (élasticité linéarisée), la démonstration de l'existence fait appel au théorème de Lax-Milgram portant sur la forme bilinéaire  $a(\underline{u}, \underline{v})$  (Kern, 2004). On trouvera une démonstration dans le cas de l'élasticité non linéaire et des transformations finies, dans l'ouvrage (Ciarlet, 1986). On montrera le caractère de minimum et l'unicité de la solution faible dans le cas où  $W$  est strictement convexe et différentiable, à l'aide des théorèmes de l'énergie des sections suivantes.

La question se pose alors de l'équivalence entre les formulations faible et forte du problème  $(PW)$ . (Ciarlet, 1986) prouve, dans le cas de Dirichlet où  $\partial\Omega_u = \partial\Omega$  et  $\underline{u}^d = 0$ , que toute solution faible, élément de  $H^1(\Omega)$ , est également solution forte, élément de  $H^2(\Omega)$ . L'équivalence n'est pas établie dans le cas général et, à ce point du cours, il serait instructif d'exhiber une solution faible d'un problème aux limites particulier qui serait dans  $H^1(\Omega)$  mais qui n'appartiendrait pas à  $H^2(\Omega)$ .

#### 10.2.4 Théorème de l'énergie potentielle

On appelle énergie potentielle  $\mathcal{E}(\underline{u}^*)$  d'un corps élastique  $\Omega$  associée au champ cinématiquement admissible  $\underline{u}^* \in \mathcal{CA}$ , pour des efforts  $\rho \underline{f}$  et  $\underline{t}^d$  donnés, l'expression :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) = \int_{\Omega} W(\xi^*) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^* dS \quad (10.9)$$

où  $\xi^* = \xi(\underline{u}^*)$ . Soit  $\mathcal{E}(\underline{u})$  l'énergie potentielle du corps  $\Omega$  pour le champ solution  $\underline{u}$ .

On considère la différence :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) = \int_{\Omega} (W(\xi^*) - W(\xi)) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}) dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}) dS \quad (10.10)$$

Lorsque le potentiel d'élasticité est convexe, la différence précédente peut être minorée :

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) \geq \int_{\Omega} W'(\xi) : (\xi^* - \xi) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}) dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}) dS \quad (10.11)$$

Le second membre de l'inégalité est nul en vertu de la formulation variationnelle (10.8), de sorte que

$$\mathcal{E}(\underline{u}^*) - \mathcal{E}(\underline{u}) \geq 0, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{CA} \quad (10.12)$$

Comme la solution  $\underline{u} \in \mathcal{CA}$ , il s'ensuit qu'elle minimise l'énergie potentielle. Toute solution (forte ou faible) du problème  $(PW)$  est donc un minimum de l'énergie potentielle. On va montrer qu'une solution faible existe et est unique dans le cas où  $W$  est strictement convexe. On établit d'abord l'unicité du minimum de l'énergie potentielle dans ce cas.

6. A noter que  $H^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$  (Nguyen, 2002).

Soient  $\underline{u}$  le champ solution du problème et  $\underline{u}^*$  un champ C.A. tel que  $\mathcal{E}(\underline{u}^*) = \mathcal{E}(\underline{u})$ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (W(\xi^*) - W(\xi)) dV &= \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}) dV + \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}) dS \\ &= \int_{\Omega} \underline{\sigma} : (\xi^* - \xi) dV\end{aligned}\quad (10.13)$$

La dernière égalité résulte de l'application du théorème des travaux virtuels (10.5) appliqué au couple de champs  $(\underline{\sigma}, \underline{u}^* - \underline{u})$ , le champ de contraintes étant auto-équilibré et le champ  $\underline{u}^* - \underline{u}$  s'annulant sur le bord  $\partial\Omega_u$ . Finalement,

$$\int_{\Omega} (W(\xi^*) - W(\xi) - W'(\xi) : (\xi^* - \xi)) dV = 0 \quad (10.14)$$

Le stricte convexité de  $W$  permet de conclure que  $\xi^* = \xi$ . Par conséquent, les champs  $\underline{u}$  et  $\underline{u}^*$  diffèrent d'un mouvement de corps rigide. Comme le bord  $\partial\Omega_u$ , de mesure non nulle, contient au moins trois points distincts, on peut identifier la translation et la rotation d'ensemble correspondantes. Celles-ci sont nécessairement nulles afin que les déplacements  $\underline{u}^*$  et  $\underline{u}$  coïncident sur  $\partial\Omega_u$ . Cela démontre l'unicité<sup>7</sup> de la solution en déplacement du problème d'élasticité. On obtient le

**Théorème 26 (Théorème de l'énergie potentielle)** *Pour un corps élastique dont le potentiel d'élasticité  $W$  est strictement convexe, le problème  $(PW)$  en déplacement possède une et une seule solution faible. Le champ de déplacements solution réalise le minimum de l'énergie potentielle (10.9) parmi les champs de déplacements cinématiquement admissibles.*

**Preuve.** Le théorème résulte de l'existence et de l'unicité du minimum de la fonction strictement convexe  $\mathcal{E}(\underline{u}^*)$  sur l'espace affine convexe des champs de déplacements cinématiquement admissibles. La solution est dans  $H^1(\Omega)$ . Sous l'hypothèse que  $\underline{\sigma}$  et  $\text{div } \underline{\sigma}$  sont dans  $L^2(\Omega)$ , on peut établir que les équations du problème fort  $(PW)$  sont satisfaites, au sens des distributions, voir (Duvaut, 1990). □

Ce théorème ne manquera pas d'évoquer certains résultats de thermodynamique similaires indiquant que le système en équilibre tend à minimiser son énergie potentielle, voire à atteindre un minimum d'énergie libre pour peu que les effets des termes de bord soient nuls. Les résultats précédents précisent ces notions de minimisation d'énergie en considérant avec rigueur les conditions aux limites et les efforts appliqués associés.

Par exemple, la distribution des contraintes résiduelles dans un corps siège d'auto-contraintes engendrées par des déformations libres, d'origine thermique ou plastique, minimise l'énergie libre contenue dans le corps. C'est une application du théorème de l'énergie potentielle en l'absence d'efforts extérieurs appliqués.

#### 10.2.5 Formulation variationnelle du problème en contraintes

On peut également formuler une propriété variationnelle par rapport aux contraintes statiquement admissibles :

---

7. Il faut noter que des solutions continues en déplacement ont été recherchées ici. Si le corps  $\Omega$  n'est pas simplement connexe, et selon le type de conditions aux limites, des solutions multiples peuvent exister qui présentent des discontinuités le long de surfaces, comme dans le cas des dislocations étudiées au chapitre 28. On renvoie à ce chapitre pour l'énoncé du théorème 40 de Weingarten sur ce thème.

**Théorème 27 (Formulation variationnelle en contraintes)** Si  $\underline{\sigma}$  est solution du problème  $(\mathcal{P}W)$  pour les déplacements  $\underline{u}^d$  donnés sur  $\partial\Omega_u$ , alors  $\underline{\sigma} \in \mathcal{SA}$  et

$$\int_{\Omega} (\underline{\tau} - \underline{\sigma}) : W^{*\prime}(\underline{\sigma}) dV = \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\tau} - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS, \quad \forall \underline{\tau} \in \mathcal{SA} \quad (10.15)$$

**Preuve.** C'est une conséquence directe du théorème des travaux virtuels (10.5) en utilisant le champ de contrainte  $\underline{\tau} - \underline{\sigma}$  dont la divergence est nulle dans  $\Omega$  et pour lequel  $(\underline{\tau} - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}$  est nul sur  $\partial\Omega_{td}$ .  $\square$

#### 10.2.6 Théorème de l'énergie complémentaire

L'énergie complémentaire d'un corps élastique  $\Omega$  associée au champ statiquement admissible  $\underline{\sigma}^\dagger \in \mathcal{SA}$ , pour des déplacements  $\underline{u}^d$  donnés sur  $\partial\Omega_u$  est définie par :

$$\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}^\dagger) dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \quad (10.16)$$

La signification de la dénomination d'énergie complémentaire apparaîtra clairement au paragraphe 10.2.7. Soit  $\mathcal{E}^*(\underline{\sigma})$  l'énergie complémentaire du corps  $\Omega$  pour le champ solution  $\underline{\sigma}$ . On considère la différence :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) - \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} (W^*(\underline{\sigma}^\dagger) - W^*(\underline{\sigma})) dV - \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \\ &\geq \int_{\Omega} W^{*\prime}(\underline{\sigma}) : (\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) dV - \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS \\ &\geq \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} : (\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) dV - \int_{\partial\Omega_u} ((\underline{\sigma}^\dagger - \underline{\sigma}) \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dS = 0 \end{aligned} \quad (10.17)$$

par application successive du théorème des travaux virtuels (10.5) aux couples  $(\underline{\sigma}^\dagger, \underline{u})$  et  $(\underline{\sigma}, \underline{u})$  et utilisation de la propriété de convexité du potentiel dual  $W^*$  héritée de celle du potentiel  $W$ . Le champ de contraintes solution du problème  $(\mathcal{P}W)$  minimise donc l'énergie complémentaire du problème. L'existence et l'unicité d'une telle solution résulte de la stricte convexité du potentiel dual  $W^*$ . On en déduit le

**Théorème 28 (Théorème de l'énergie complémentaire)** Il existe un unique champ de contraintes solution du problème (10.15). Il réalise le minimum de l'énergie complémentaire (10.16) parmi les champs de contraintes statiquement admissibles.

#### 10.2.7 Encadrement de la solution

L'addition de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire pour le couple solution  $(\underline{\sigma}, \underline{u})$  fournit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\underline{u}) + \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) &= \int_{\Omega} W(\underline{\varepsilon}) + W^*(\underline{\sigma}) dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u} dS \\ &= \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} dV - \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u} dS \end{aligned}$$

L'application du théorème des travaux virtuels (10.5) montre alors que

$$\mathcal{E}(\underline{u}) + \mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) = 0 \quad (10.18)$$

L'énergie potentielle et l'énergie complémentaire associées à la solution du problème sont donc opposées. Un encadrement de la valeur de l'énergie potentielle correspondante par les valeurs prises pour des champs admissibles s'en déduit :

$$\forall \underline{\sigma}^\dagger \in \mathcal{SA}, \quad -\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}^\dagger) \leq -\mathcal{E}^*(\underline{\sigma}) = \mathcal{E}(\underline{u}) \leq \mathcal{E}(\underline{u}^*), \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{CA} \quad (10.19)$$

où  $(\underline{\sigma}, \underline{u})$  sont les champs solutions du problème (PW).

Cet encadrement est à la base de la construction d'approximations de la solution, notamment au travers de méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (Duvaut, 1990; Kern, 2004).

### 10.3 Théorèmes de l'énergie dans le cas de l'élasticité linéarisée

Dans le cas de l'élasticité linéarisée, le potentiel d'élasticité et le potentiel dual sont les formes quadratiques

$$W(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}, \quad W^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} \quad (10.20)$$

où  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$  sont respectivement les tenseurs des modules d'élasticité et des souplesses.

En substituant ces expressions dans les définitions des énergies potentielle et complémentaire (10.9) et (10.16), les inégalités (10.12) et (10.17) deviennent :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon} dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u} \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}^* : \underline{\underline{C}} : \underline{\varepsilon}^* dV - \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u}^* dV - \int_{\partial\Omega_{td}} \underline{t}^d \cdot \underline{u}^* \end{aligned} \quad (10.21)$$

pour tous les champs cinématiquement admissibles  $\underline{u}^* \in \mathcal{CA}$ , avec  $\underline{\varepsilon}^* = \underline{\varepsilon}(\underline{u}^*)$ , et,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dV \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^\dagger : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma}^\dagger dV - \int_{\partial\Omega_u} (\underline{\sigma}^\dagger \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^d dV \quad (10.22)$$

pour tous les champs statiquement admissibles  $\underline{\sigma}^\dagger \in \mathcal{SA}$ .

D'après (10.20), les potentiels d'élasticité et dual prennent la même forme

$$W(\underline{\varepsilon}) = W^*(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \quad (10.23)$$

lorsque  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}$  sont reliés par la loi de comportement d'élasticité linéarisée. Cette propriété combinée au théorème des travaux virtuels (10.5) conduit à la formule de Clapeyron :

$$\int_{\Omega} W(\underline{\varepsilon}) dV = \int_{\Omega} W^*(\underline{\sigma}) dV = \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} \rho \underline{f} \cdot \underline{u} dV + \int_{\partial\Omega} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u} dS \right) \quad (10.24)$$

qui stipule que l'énergie élastique stockée dans le corps matériel est égale à la moitié du travail de tous les efforts appliqués.

## 10.4 Module de Young apparent d'un cylindre encastré

### 10.4.1 Position du problème

On considère une barre cylindrique d'axe ( $O, \underline{e}_3$ ), de longueur  $\ell$  et de section  $S$  de forme a priori quelconque, par exemple carrée ou circulaire etc. La barre est soumise à des déplacements imposés à ses extrémités :

- $u_1 = u_2 = u_3 = 0$  pour les points de la section  $x_3 = 0$  ;
- $u_1 = u_2 = 0, u_3 = \delta$  pour les points de la section  $x_3 = \ell$ .
- le vecteur contrainte  $\underline{t} = \underline{t}^d = 0$  sur toute la surface latérale notée  $S_L$  de la barre.

Ces conditions aux limites correspondent à un encastrement complet des extrémités de la barre. Le déplacement imposé  $\delta$  est positif en traction et négatif pour un essai de compression. En compression, ces conditions aux limites sont réalisées en présence de frottement entre les plateaux et les sections de la barre en contact, frottement tel que le glissement ne soit pas possible. En traction, les extrémités peuvent être collées ou vissées aux plateaux de la machine. Ces conditions aux limites se distinguent de celles de la traction et de la compression simples étudiées à la page 245, conditions qui autorisent une contractions/expansions latérale des extrémités exigée par l'état de traction/compression simple.

L'essai considéré ne correspond donc pas à l'essai de traction/compression simple de la figure 9.4. Un état de contrainte/déformation hétérogène est attendu en général puisque les contraction/expansion latérales sont libres le long de la barre mais empêchées aux extrémités, comme sur la figure 9.5 illustrant la forme de diabolo prise par la barre en traction et la mise en tonneau en compression, ces déformées étant exagérées pour l'illustration, puisqu'on s'intéresse ici au cas des transformations infinitésimales.

La barre est constituée d'un matériau isotrope au comportement élastique linéarisé, caractérisé par son module de Young  $E$  et son coefficient de Poisson  $\nu$  ou, de manière équivalente, par les constantes de Lamé,  $\lambda$  et  $\mu$ .

Soit  $F$  la force nécessaire à la prescription du déplacement  $\delta$ , c'est la résultante des forces sur la section  $x_3 = \ell$ . On appelle module de Young apparent la quantité  $E_{app}$  définie par :

$$\frac{F}{S} = E_{app} \frac{\delta}{\ell} \quad (10.25)$$

où  $S$  est la surface de chaque section transversale du cylindre. Le module apparent ne coïncide avec le module de Young du matériau que dans le cas où l'état des contraintes et des déformations est celui correspondant à une traction/compression simple. Sinon, ce module apparent résulte à la fois des propriétés du matériau et des caractéristiques géométriques de la barre.

Dans ces conditions, la formule de Clapeyron (10.24) conduit à l'expression :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} F \delta = \frac{1}{2} E_{app} \frac{S}{\ell} \delta^2 \quad (10.26)$$

Il n'existe pas de solution analytique explicite à ce problème. L'objectif est ici d'obtenir des encadrements de la solution grâce aux méthodes énergétiques développées dans ce chapitre. Les encadrements obtenus ci-dessous sont analytiques mais la solution peut également être approchée aussi près que l'on veut grâce à des méthodes numériques basées sur les mêmes théorèmes de l'énergie, telles que la méthode des éléments finis correspondant à des champs-tests sur des espaces de dimensions aussi grandes que nécessaire.

#### 10.4.2 Un premier encadrement du module apparent

On cherche d'abord un encadrement par des champs homogènes. Le champ de déplacements

$$u_1^* = 0, \quad u_2^* = 0, \quad u_3^* = \frac{\delta}{\ell} x_3 \quad (10.27)$$

est cinématiquement admissible pour le problème posé à la section 10.4.1. Il conduit au champ de déformation homogène d'extension simple :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \frac{\delta}{\ell} \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 \quad (10.28)$$

Un majorant est obtenu en appliquant le théorème de l'énergie potentielle (10.21) au champ  $\underline{\boldsymbol{u}}^* \in \mathcal{CA}$  :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} : \underline{\boldsymbol{C}} : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* : \underline{\boldsymbol{C}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* dV$$

Par la formule de Clapeyron (10.24), on obtient :

$$\frac{1}{2} F \delta \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* : \underline{\boldsymbol{C}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* dV \quad (10.29)$$

On calcule :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \frac{\delta}{\ell} \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 \implies \underline{\boldsymbol{C}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \lambda \frac{\delta}{\ell} \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \frac{\delta}{\ell} \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 \implies \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* : \underline{\boldsymbol{C}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \left( \frac{\delta}{\ell} \right)^2 (\lambda + 2\mu) \quad (10.30)$$

Le champ-test  $\underline{\boldsymbol{u}}^*$  n'est en général pas solution du problème considéré car il engendre des contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  non nulles sur  $S_L$ . En introduisant le module apparent  $E_{app}$  dans l'inégalité (10.29),

$$E_{app} \frac{S}{\ell} \delta^2 \leq (\lambda + 2\mu) \frac{\delta^2}{\ell^2} \times S \ell$$

un majorant est obtenu :  $E_{app} \leq \lambda + 2\mu$ .

Le champ de contraintes de traction simple

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger = \sigma^\dagger \underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 \quad (10.31)$$

est statiquement admissible pour le problème posé à la section 10.4.1. Il n'est en général pas solution du problème car le déplacement associé à la déformation homogène de traction n'est pas cinématiquement admissible. Un minorant est obtenu grâce au théorème de l'énergie complémentaire (10.22) appliqué au champ statiquement admissible,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger$  proposé :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\boldsymbol{S}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dV - \int_{\partial\Omega_u} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d dS &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underline{\boldsymbol{S}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger dV - \int_{\partial\Omega_u} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger \cdot \underline{\boldsymbol{n}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^d dS \\ \frac{1}{2} F \delta - F \delta &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger : \underline{\boldsymbol{S}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger dV - \sigma^\dagger S \delta \end{aligned}$$

On calcule

$$\underline{\boldsymbol{S}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger = \frac{1+\nu}{E} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^\dagger) \underline{\mathbf{1}} = \frac{\sigma^\dagger}{E} (\underline{\boldsymbol{e}}_3 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_3 - \nu(\underline{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_1 + \underline{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \underline{\boldsymbol{e}}_2))$$

$$\underline{\sigma}^\dagger : \underline{S} : \underline{\sigma}^\dagger = \frac{\sigma^{\dagger 2}}{E}$$

L'inégalité devient alors

$$\frac{1}{2}F\delta \geq -\frac{1}{2}\frac{\sigma^{\dagger 2}}{E}S\ell + \sigma^\dagger S\delta$$

En cherchant le maximum du minorant, on trouve  $\sigma^\dagger = E\delta/\ell$  et finalement

$$\frac{1}{2}E_{app}\frac{\delta}{\ell}\delta^2 \geq -\frac{1}{2}E\frac{\delta^2}{\ell}S + E\frac{\delta^2}{\ell}S \implies E_{app} \geq E$$

On obtient donc l'encadrement

$$E \leq E_{app} \leq E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (10.32)$$

Le majorant  $\lambda + 2\mu$  est le module associé à l'extension simple, il est plus grand que le module de Young. A noter que les deux bornes coïncident lorsque le coefficient de Poisson est nul. C'est un cas exceptionnel de comportement de matériau pour lequel l'essai de traction simple et l'essai d'extension simple sont identiques. La déformation axiale ne s'accompagne d'aucune déformation transversale. La solution du problème est alors homogène. Dans les autres cas, l'encadrement est strict. Lorsque  $\nu$  tend vers 0.5, la borne supérieure tend vers l'infini. Elle est donc de peu d'utilité pour majorer le module apparent d'un matériau quasi-incompressible.

Cet encadrement est illustré sur les figures 10.1 et 10.2. Les figures 10.3 et 10.4 montrent l'influence du coefficient de Poisson sur la déformation d'une barre encastrée en traction et compression, les résultats étant obtenus grâce à des calculs par éléments finis.

#### 10.4.3 Améliorations de la borne supérieure

Il est possible de proposer un encadrement plus resserré en considérant des fonctions-tests conduisant à des déformations et contraintes hétérogènes<sup>8</sup>.

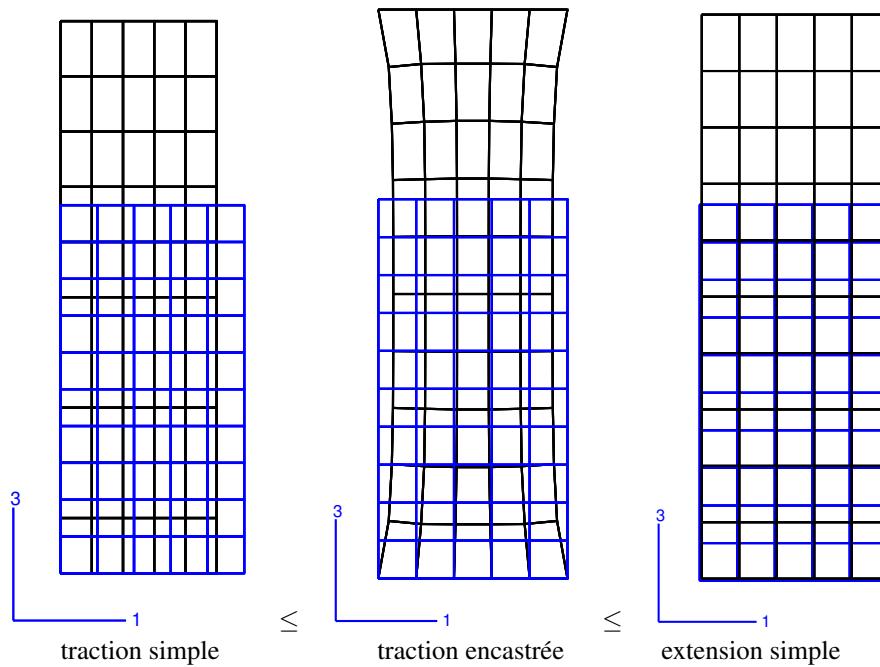
Le champ cinématiquement admissible (10.27) est enrichi en introduisant des déplacements transverses dépendant de la coordonnée axiale :

$$u_1^* = -\nu \frac{\delta}{\ell} f\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_1, \quad u_2^* = -\nu \frac{\delta}{\ell} f\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_2, \quad u_3^* = \frac{\delta}{\ell} x_3 \quad (10.33)$$

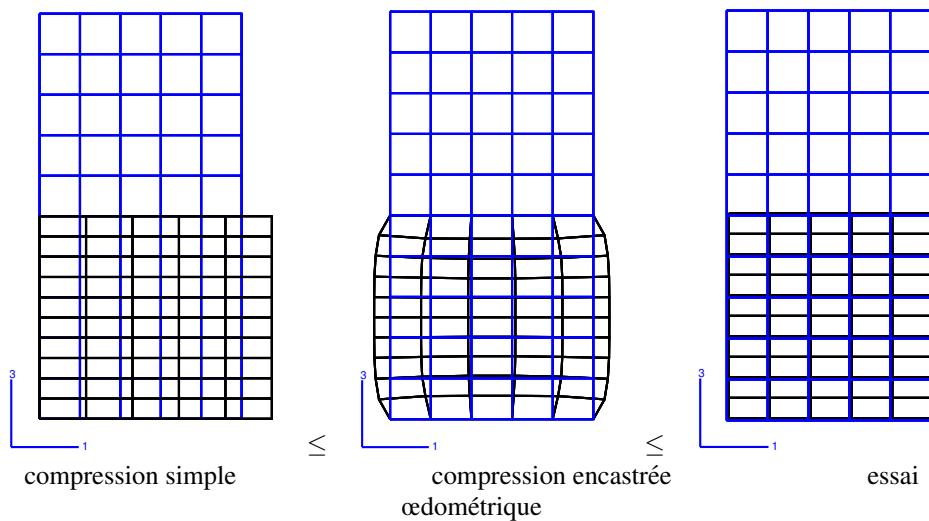
Le champ précédent est cinématiquement admissible à condition que la fonction  $f$  appartienne à l'espace vectoriel des fonctions telles que  $f(0) = f(1) = 0$ . Les fonctions sont prises de classe  $C^2$ . Le champ des déformations associées est :

$$[\underline{\varepsilon}^*] = \frac{\delta}{\ell} \begin{bmatrix} -\nu f & 0 & -\frac{\nu}{2\ell} f'\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_1 \\ 0 & -\nu f & -\frac{\nu}{2\ell} f'\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_2 \\ -\frac{\nu}{2\ell} f'\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_1 & -\frac{\nu}{2\ell} f'\left(\frac{x_3}{\ell}\right) x_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.34)$$

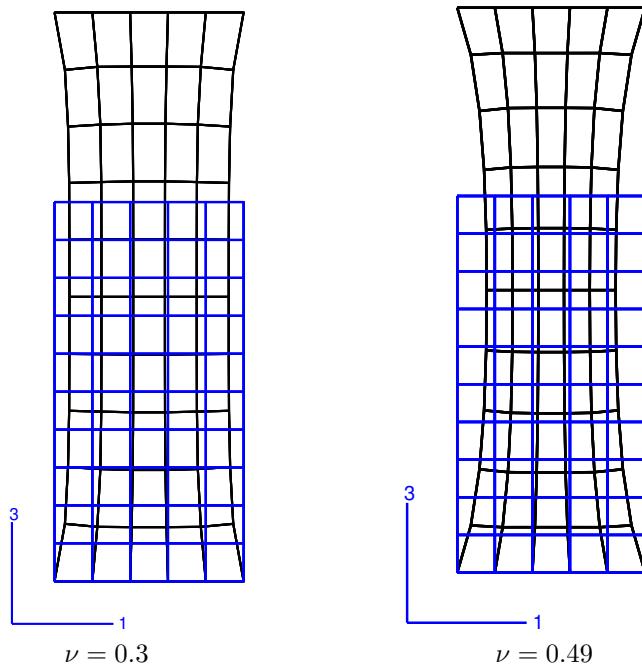
<sup>8</sup>. Les améliorations de cette partie sont dues aux contributions de Michel Amestoy et Jean-Jacques Marigo. La présente rédaction a bénéficié de la compilation enrichie réalisée par Patrick Ballard (Ballard, 2015).



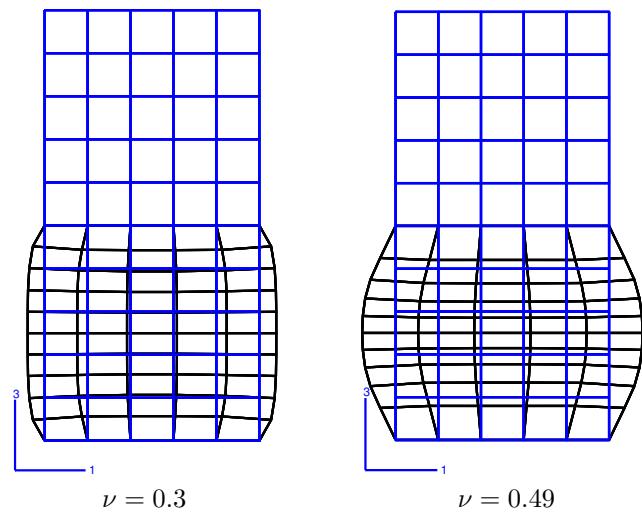
*Figure 10.1 : Illustration de l'encadrement du module de Young apparent dans le cas de la traction (configuration de référence en bleu, déplacements multipliés par un facteur 100).*



*Figure 10.2 : Illustration de l'encadrement du module de Young apparent dans le cas de la compression (configuration de référence en bleu, déplacements multipliés par un facteur 100).*



*Figure 10.3 : Résultats de calculs par éléments finis d'une barre encastrée en traction : effet de bord dans le cas  $\nu = 0.3$  et effet diabolique pour un milieu quasi-incompressible. Configuration de référence en bleu, déplacements multipliés par un facteur 100.*



*Figure 10.4 : Résultats de calculs par éléments finis d'une barre encastrée en compression : effet de bord dans le cas  $\nu = 0.3$  et effet tonneau pour un milieu quasi-incompressible. Configuration de référence en bleu, déplacements multipliés par un facteur 100.*

On calcule le champ de contraintes associé par la loi de comportement :

$$\left[ \begin{matrix} \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \end{matrix} \right] = \frac{\delta}{\ell} \begin{bmatrix} \lambda - 2(\lambda + \mu)\nu f & 0 & -\mu\nu f' \frac{x_1}{\ell} \\ 0 & \lambda - 2(\lambda + \mu)\nu f & -\mu\nu f' \frac{x_2}{\ell} \\ -\mu\nu f' \frac{x_1}{\ell} & -\mu\nu f' \frac{x_2}{\ell} & \lambda + 2\mu - 2\lambda\nu f \end{bmatrix} \quad (10.35)$$

Ce champ n'est pas solution du problème. En effet, le cisaillement  $\sigma_{31}$  doit s'annuler sur la génératrice normale à l'axe 1, ce qui implique  $f'(x_3/\ell) = 0 \implies f = Cste = 0$ , ce qui nous ramène au champ cinématiquement admissible de la section précédente. Ensuite,

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \left( \frac{\delta}{\ell} \right)^2 \left( 4(\lambda + \mu)\nu^2 f^2 - 4\lambda\nu f + \lambda + 2\mu + \mu\nu^2 \frac{f'^2}{\ell^2} (x_1^2 + x_2^2) \right) \quad (10.36)$$

Un majorant du module apparent se déduit de (10.29) et du changement de variable  $u = x_3/\ell$  :

$$E_{app} \leq \int_0^1 \left( 4(\lambda + \mu)\nu^2 f^2(u) - 4\lambda\nu f(u) + \lambda + 2\mu + \frac{\mu\nu^2}{6e^2} f'^2(u) \right) du \quad (10.37)$$

où les calculs ont été faits pour une section carrée de côté  $a$ , sans perte de généralité, et où  $e = \ell/a$  est l'élançement de la barre. On peut alors essayer d'optimiser le choix de la fonction  $f$  pour obtenir le plus petit majorant dans cette classe de champs cinématiquement admissible et déterminer le

$$\min_{f \in C^2, f(0)=f(1)=0} J(f) \quad \text{avec} \quad J(f) = \int_0^1 L(f, f')(u) du, \quad (10.38)$$

$$\text{et} \quad L(f, f')(u) = af'^2(u) + bf^2(u) - 2cf(u) + d \quad (10.39)$$

avec  $a = \frac{\mu\nu^2}{6e^2} \geq 0$ ,  $b = 4(\lambda + \mu)\nu^2 \geq 0$ ,  $c = 2\lambda\nu$ ,  $d = \lambda + 2\mu$ . A noter que  $b = c$  car  $2\nu = \lambda/(\lambda + \mu)$ .

Ce problème de calcul des variations peut être résolu grâce aux méthodes mathématiques adaptées (Maisonneuve, 2013a). La stricte convexité de la fonction  $J(f)$  résulte de la stricte convexité du potentiel d'élasticité. L'ensemble des fonctions  $f$  vérifiant les conditions de bord est convexe, ce qui assure l'existence du minimum recherché. Une caractérisation de ce minimum est donnée par les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial f}(u) - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial f'}(u) = 0 \implies af'' - bf + c = 0 \quad (10.40)$$

d'après (Maisonneuve, 2013a) (p. 36). La solution optimale est de la forme :

$$f(u) = f^*(u) := \alpha \cosh(\omega u) + \beta \sinh(\omega u) + 1, \quad \text{avec} \quad \omega = 2e \sqrt{\frac{6}{1 - 2\nu}} \quad (10.41)$$

Les conditions aux limites

$$f^*(0) = 0 \implies \alpha = -1 \quad \text{et} \quad f^*(1) = 0 \implies \beta = \frac{\cosh \omega - 1}{\sinh \omega} = \tanh \frac{\omega}{2}$$

déterminent  $f^*$  de manière unique :

$$f(u) = 1 - \cosh(\omega u) + \tanh\left(\frac{\omega}{2}\right) \sinh(\omega u) \quad (10.42)$$

Il reste à calculer la valeur du minimum  $J(f^*)$ . Pour cela on utilise une autre caractérisation du minimum (10.39) :

$$dJ_f(\varphi) := \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial f}(u)\varphi(u) + \frac{\partial L}{\partial f'}(u)\varphi'(u) du = 0, \quad \forall \varphi, \varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

d'après (Maisonneuve, 2013a) (p. 33). Appliquée à  $\varphi = f^*$  elle-même, cette caractérisation prouve que

$$\int_0^1 af^{*\prime 2}(u) + bf^{*2}(u) - bf^*(u) du = 0 \implies J(f^*) = -b \int_0^1 f(u) du + d$$

Finalement,  $J(f^*) = -2\nu\lambda\left(1 - \frac{2}{\omega} \tanh \frac{\omega}{2}\right) + \lambda + 2\mu = E + \frac{4\nu\lambda}{\omega} \tanh \frac{\omega}{2}$  et le majorant suivant

$$E \leq E_{app} \leq E \left( 1 + \frac{2\nu^2}{(1+\nu)\sqrt{1-2\nu}} \frac{\tanh \frac{e\sqrt{6}}{\sqrt{1-2\nu}}}{e\sqrt{6}} \right) \quad (10.43)$$

améliore l'encadrement (10.32). Ce nouvel encadrement a plusieurs mérites. Il fournit la solution exacte pour  $\nu = 0$  mais aussi pour  $e \rightarrow +\infty$ . Lorsque l'élancement est infini, l'effet de bord induit par les conditions aux limites du paragraphe 10.4.1 s'estompe et la solution de traction simple est valide au sens de Saint-Venant. Lorsque l'élancement tend vers 0, on retrouve le majorant (10.32), et la solution est celle de l'extension simple. Par contre, le majorant perd son intérêt dans le cas de matériaux quasi-incompressibles car il tend vers l'infini lorsque  $\nu \rightarrow 0.5$ . Cela est dû au fait que la variation de volume trace  $\varepsilon^* = 1 - 2\nu f$  ne peut s'annuler que si  $f = 1$ , qui conduit à un champ non cinématiquement admissible. Les fonctions-tests peuvent être enrichies afin de remédier à ce défaut de l'encadrement.

Pour cela, on considère des champs cinématiquement admissibles faisant intervenir deux fonctions-tests  $f(u)$  et  $g(u)$  de la forme :

$$u_1^* = -\nu\delta f\left(\frac{x_3}{\ell}\right)\frac{x_1}{\ell}, \quad u_2^* = -\nu\delta f\left(\frac{x_3}{\ell}\right)\frac{x_2}{\ell}, \quad u_3^* = \delta g\left(\frac{x_3}{\ell}\right) \quad (10.44)$$

avec les conditions  $f(0) = f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1$  pour que  $\underline{u}^* \in \mathcal{CA}$ . Les

fonctions  $f$  et  $g$  sont prises de classe  $C^2$ . Le champ des déformations associées est :

$$[\tilde{\varepsilon}^*] = \frac{\delta}{\ell} \begin{bmatrix} -\nu f & 0 & -\frac{\nu}{2\ell} f' x_1 \\ 0 & -\nu f & -\frac{\nu}{2\ell} f' x_2 \\ -\frac{\nu}{2\ell} f' x_1 & -\frac{\nu}{2\ell} f' x_2 & g' \end{bmatrix} \quad (10.45)$$

La méthodologie appliquée précédemment conduit alors au majorant :

$$E_{app} \leq \int_0^1 (af'^2(u) + bf^2(u) - 2cf(u)g'(u) + dg'^2(u)) du \quad (10.46)$$

avec les mêmes expressions des constantes  $a, b, c$  et  $d$  que pour le problème (10.39). On cherche le plus petit des majorants en optimisant par rapport aux deux fonctions  $f$  et  $g$  :

$$\min_{f,g \in C^2} J(f,g) \quad \text{avec} \quad J(f,g) = \int_0^1 L(f,f',g')(u) du, \quad (10.47)$$

$$\text{et} \quad L(f,f',g')(u) = af'^2(u) + bf^2(u) - 2cf(u)g'(u) + dg'^2(u) du \quad (10.48)$$

avec les conditions  $f(0) = f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 1$ . La généralisation aux problèmes dits à intégrale multiple des équations d'Euler-Lagrange donne :

$$\frac{\partial L}{\partial f}(u) - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial f'}(u) = 0 \implies af'' - bf + cg' = 0 \quad (10.49)$$

$$\frac{\partial L}{\partial g}(u) - \frac{d}{du} \frac{\partial L}{\partial g'}(u) = 0 \implies cf' - dg'' = 0 \quad (10.50)$$

La seconde équation fournit  $g' = cf/d + C_1$  et la constante d'intégration  $C_1$  est déterminée en intégrant  $g'$  sur  $[0 : 1]$  en tenant compte des deux conditions aux limites :

$$g' = 1 + 4\nu^2(f - \bar{f}) \quad \text{avec} \quad \bar{f} = \int_0^1 f(u) du$$

Quant à  $f$ , on trouve la forme :

$$f(u) = \alpha \cosh(\omega u) + \beta \sinh(\omega u) + \gamma \quad \text{avec} \quad \omega = 2e \sqrt{\frac{6(1+\nu)}{1-\nu}} \quad (10.51)$$

Les conditions aux limites portant sur  $f$  fournissent :  $\beta = -\alpha \tanh \frac{\omega}{2}$  et  $\gamma = -\alpha$ . Une condition supplémentaire est obtenue en évaluant (10.49) en  $u = 0$  :

$$af''(0) + cg'(0) = 0 \implies \alpha a \omega^2 + c(1 - 4\nu^2 \bar{f}) = 0$$

La moyenne de  $f$  est évaluée à partir de (10.51) :  $\bar{f} = \alpha(\frac{2}{\omega} \tanh \frac{\omega}{2} - 1)$ . Finalement, on obtient la fonction optimale :

$$\alpha = -(1 - \frac{4\nu^2}{1-\nu} \frac{\tanh(\omega/2)}{\omega}) \quad \text{et} \quad f^*(u) := -\alpha(1 - \frac{\cosh(\omega(u-1/2))}{\cosh(\omega/2)})$$

Il reste à calculer la valeur de  $J(f^*, g^*)$ . Pour simplifier ce calcul, on fait appel à la seconde caractérisation du minimum, à savoir :

$$\frac{\partial J}{\partial f}(\varphi) := \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial f}(u)\varphi(u) + \frac{\partial L}{\partial f'}(u)\varphi'(u) du = 0, \quad \forall \varphi, \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \quad (10.52)$$

$$\frac{\partial J}{\partial g}(\psi) := \int_0^1 \frac{\partial L}{\partial g}(u)\psi(u) + \frac{\partial L}{\partial g'}(u)\psi'(u) du = 0, \quad \forall \psi, \psi(0) = \psi(1) = 0 \quad (10.53)$$

En prenant  $\varphi = f^*$  dans la première condition, on obtient la relation

$$\int_0^1 b f^{*2}(u) + a f^{*''}(u) - c g^{*'}(u) f^*(u) du = 0$$

qui, substituée dans l'expression (10.48) de  $J(f^*, g^*)$ , conduit à

$$J(f^*, g^*) = \int_0^1 -c f(u) g'(u) + d g'^2(u) du \quad (10.54)$$

$$= \int_0^1 -c f(u)(1 + 4\nu^2(f - \bar{f})) + d(1 + 4\nu^2(f - \bar{f}))^2 du$$

$$= -c \bar{f} + d + \int_0^1 4\nu^2(f - \bar{f})(-df(u) + 4\nu^2d(f - \bar{f})) du$$

$$= -c \bar{f} + d = \lambda + 2\mu - 2\nu\lambda\bar{f} \quad (10.55)$$

car  $4\nu^2c - d = 0$ . L'encadrement final est obtenu

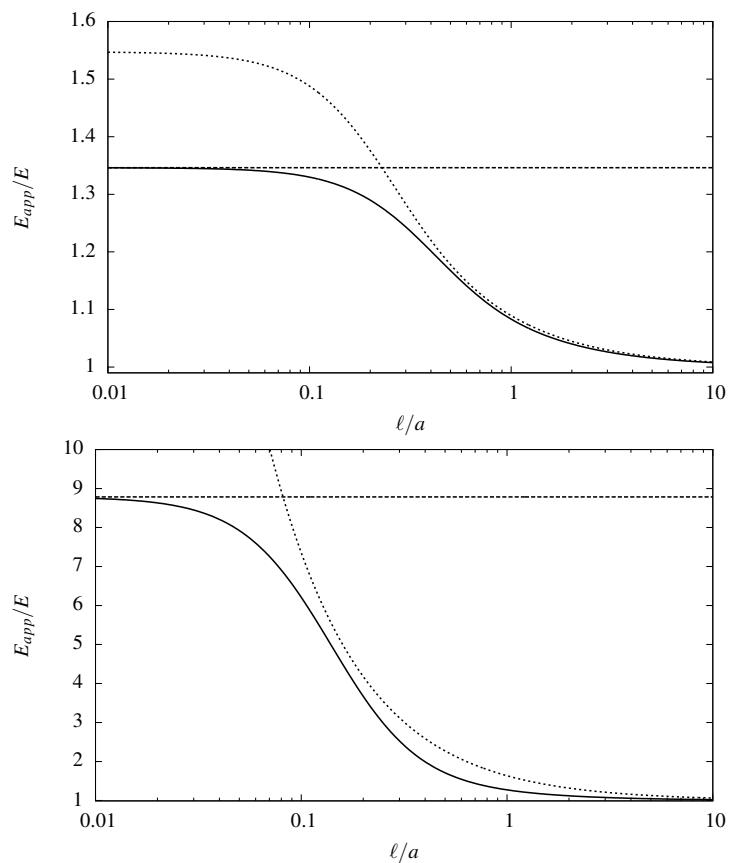
$$E \leq E_{app} \leq E \left( 1 - \frac{4\nu^2}{1-\nu} \frac{\tanh(\omega/2)}{\omega} \right)^{-1}, \quad \text{avec } \omega = 2e\sqrt{\frac{6(1+\nu)}{1-\nu}} \quad (10.56)$$

Cet encadrement encore resserré fournit un majorant valable dans le cas quasi-incompressible  $\nu \rightarrow 0.5 \implies \omega = 6\sqrt{2}e$ , et

$$E_{app} \leq E \left( 1 - \frac{\tanh(3\sqrt{2}e)}{3\sqrt{2}e} \right)^{-1}$$

Pour les forts élancements, on retrouve  $E_{app} = E$  comme il se doit. Lorsque  $e \rightarrow 0$ , le majorant tend vers l'infini, ce qui est compréhensible puisque l'on force le changement de volume du milieu quasi-incompressible.

Les trois majorants obtenus précédemment sont illustrés par la figure 10.5 en fonction de l'élanement de la barre et pour deux valeurs du coefficient de Poisson. Les comportements asymptotiques pour  $e \rightarrow 0$  et  $e \rightarrow \infty$  différents pour ces trois majorants y sont clairement visibles. L'écart entre les bornes devient important lorsque le coefficient de Poisson s'approche de 0.5.



*Figure 10.5 : Les trois bornes supérieures du module de Young apparent d'une barre cylindrique en traction encastrée en fonction de son élancement avec  $\nu = 0.3$  en haut et  $\nu = 0.48$  en bas. Elles correspondent aux trois expressions (10.32, 10.43, 10.56) avec un degré croissant de précision.*

## 11 Fluides viscoélastiques

On développe ici la théorie des fluides viscoélastiques isotropes initiée au paragraphe 6.4.1, dans le but de faire émerger la loi du fluide newtonien et de déduire les équations de Navier-Stokes. On passe donc de la formulation de la loi de comportement générale aux problèmes aux limites à résoudre pour les fluides newtoniens. Des exemples classiques d'application sont fournis à la fin du chapitre.

### 11.1 Fluides viscoélastiques

Le comportement d'un fluide viscoélastique isotrope est décrit par une fonctionnelle eulérienne de la forme

$$\underline{\sigma}(t) = \mathcal{F}(\underline{C}_t(\tau), \det \underline{F}(t); \tau \leq t) \quad (11.1)$$

L'écriture symbolique  $\mathcal{F}$  représente une intégrale sur l'histoire passée de la déformation du milieu dont le comportement actuel est susceptible de garder une trace. L'histoire de la déformation est contenue dans la variable d'histoire des déformations

$$\underline{C}_t(\tau) = \underline{F}_t^T(\tau) \cdot \underline{F}_t(\tau) \quad \text{avec} \quad \underline{F}_t(\tau) = \underline{F}(\tau) \cdot \underline{F}^{-1}(t)$$

Le gradient de la transformation  $\underline{F}_t(\tau)$  désigne le passage de la configuration locale actuelle  $\kappa_t$  à la configuration locale passée  $\kappa_\tau$ , en suivant le schéma de la figure 11.1. Noter que

$$\underline{F}_t(t) = \underline{1} = \underline{C}_t(t)$$

Le fait que la loi (11.1) ne fasse appel à aucun tenseur de structure est caractéristique du fluide isotrope, gaz ou liquide. La seule mémoire d'une configuration locale de référence  $\kappa_0$  est présente dans le jacobien  $J = \det \underline{F}(t)$  qui mesure la variation de masse volumique du fluide par rapport à une masse volumique de référence. En particulier, il n'y a plus de trace de la métrique matérielle,  $\underline{G}$ .

Contrairement au cas des solides, il n'existe pas de configuration dénuée de contraintes (penser à un gaz à pression nulle !) et il n'y a pas de configuration de référence privilégiée.

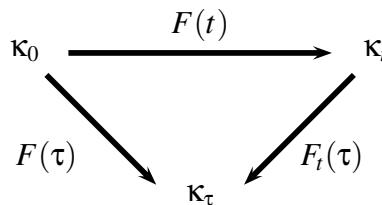


Figure 11.1 : Changements de configurations locales entre les instants 0,  $\tau$  et  $t$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ) et gradients de la transformations associés.

La fonctionnelle  $\mathcal{F}$  reste très générale et il existe peu d'expressions explicites illustrant la richesse des comportements viscoélastiques envisagés. Elle est restreinte toutefois par la condition de *tensorialité* qui exige que cette relation entre les tenseurs impliqués soit isotrope. Des lois explicites, moins générales, sont développées dans la suite du chapitre.

### 11.2 Fluides différentiels

Une classe plus réduite de fluides viscoélastiques est obtenue en supposant que la mémoire du fluide est ultra-courte et limitée aux instants immédiatement inférieurs à l'instant  $t$ .

tant présent. La fonctionnelle héréditaire ne dépend alors de l'histoire des déformations qu'au travers de leurs dérivées temporelles d'ordre  $n$  à l'instant  $\tau = t$  :

$$\tilde{\mathbf{A}}_n(t) = \frac{\partial^n \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau)}{\partial \tau^n} \Big|_{\tau=t} \quad (11.2)$$

appelés tenseurs de Rivlin-Ericksen. Par convention,  $\tilde{\mathbf{A}}_0 = \tilde{\mathbf{1}}$ . Pour calculer  $\tilde{\mathbf{A}}_1$ , on remarque que<sup>1</sup>, pour  $t$  fixé et  $\tau$  variable :

$$\dot{\tilde{\mathbf{F}}}_t(\tau) = \dot{\tilde{\mathbf{F}}}(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t) \implies \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_t(t) = \dot{\tilde{\mathbf{F}}}(t) \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t) = \tilde{\mathbf{L}}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{C}}}_t(\tau) = \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_t^T(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) + \tilde{\mathbf{F}}_t^T(\tau) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_t(\tau) \implies \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_1 = \dot{\tilde{\mathbf{C}}}_t(t) = \tilde{\mathbf{L}}^T + \tilde{\mathbf{L}} = 2\tilde{\mathbf{D}}$$

On dispose d'une formule de récurrence pour calculer les dérivées temporelles d'ordre supérieur :

$$\tilde{\mathbf{A}}_{n+1} = \dot{\tilde{\mathbf{A}}}_n + \tilde{\mathbf{A}}_n \cdot \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot \tilde{\mathbf{A}}_n \quad (11.3)$$

dont l'établissement est laissé au lecteur en s'aidant de (Truesdell and Euvrard, 1974) (p. 93). En particulier, on a au deuxième ordre :

$$\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{A}}_2 = \dot{\tilde{\mathbf{D}}} + \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{L}}^T \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \dot{\tilde{\mathbf{D}}} + 2\tilde{\mathbf{D}}^2 + \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{W}} - \tilde{\mathbf{W}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}$$

où l'on fait apparaître une dérivée convective (dans le mouvement) de  $\tilde{\mathbf{D}}$ , cf. Eq. (14.25). La loi de comportement des fluides viscoélastiques de complexité  $n$ , dits de Rivlin-Ericksen (Rivlin and Erickson, 1955; Truesdell and Euvrard, 1974)<sup>2</sup> est de la forme générale

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{A}}_1(t), \tilde{\mathbf{A}}_2(t), \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(t); \det \tilde{\mathbf{F}}(t)) \quad (11.4)$$

où  $\mathcal{F}$  est une fonction (non plus une fonctionnelle) isotrope par rapport à ses arguments, en vertu de l'exigence de tensorialité de la relation.

L'exemple le plus important de ce type de lois est celui des

### *Fluides différentiels d'ordre 1*

Les fluides différentiels d'ordre 1 sont décrits par les lois suivantes :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = f(\tilde{\mathbf{D}}, T, \underline{\mathbf{g}}; \det \tilde{\mathbf{F}}), \quad \underline{\mathbf{q}} = g(\tilde{\mathbf{D}}, T, \underline{\mathbf{g}}; \det \tilde{\mathbf{F}}) \quad (11.5)$$

où on l'on a rajouté la dépendance par rapport à la température et au gradient de température  $\underline{\mathbf{g}}$ , ainsi que la loi de conduction thermique (flux de chaleur  $\underline{\mathbf{q}}$ ), en raison de l'importance des couplages thermomécaniques dans les fluides. Les fonctions  $f$  et  $g$  sont tensorielles, i.e. isotropes par rapport à leurs arguments. Les théorèmes de représentation des fonctions tensorielles d'ordres 1 et 2 opérant sur des tenseurs d'ordres 1 et 2 (cf. section 12.5) sont appliqués pour écrire la forme générale suivante des lois de comportement (Zheng, 1994) :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \alpha_0 \tilde{\mathbf{1}} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{D}} + \alpha_3 \tilde{\mathbf{D}}^2 + \beta_1 \underline{\mathbf{g}} \otimes \underline{\mathbf{g}} \\ &+ \beta_2 (\tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{g}} \otimes \underline{\mathbf{g}} + \underline{\mathbf{g}} \otimes \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{g}}) + \beta_3 \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{g}} \otimes \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{g}} \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$\underline{\mathbf{q}} = k_1 \underline{\mathbf{g}} + k_2 \tilde{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{g}} + k_3 \tilde{\mathbf{D}}^2 \cdot \underline{\mathbf{g}} \quad (11.7)$$

1. En toute rigueur, c'est  $\underline{\mathbf{g}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}$  qu'il faut utiliser dans les formules présentées pour respecter la variance des tenseurs, cf. annexe 14 et Eq. (14.15).

2. p. 213

où les coefficients sont des fonctions des invariants des tenseurs présents, à savoir :  $I_{1,2,3}(\mathbf{D}), \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}, \mathbf{g} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}, \mathbf{g} \cdot \mathbf{D}^2 \cdot \mathbf{g}$ . La dépendance de ces fonctions vis-à-vis de la température et de  $\det \mathbf{F}$  est tacite. Les couplages entre mécanique et thermique sont clairement visibles.

### 11.3 Fluides de type taux

Une mémoire plus longue peut être décrite par des lois de comportement impliquant non seulement les vitesses de déformation mais également les dérivées convectives des contraintes (Mandel, 1974)<sup>3</sup>. La dérivée convective (en suivant le mouvement) des contraintes est obtenue par dérivation temporelle des contraintes transportées dans la configuration de référence :

$$\frac{D\tilde{\sigma}}{Dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{F}^T = \dot{\sigma} - \mathbf{L} \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{L}^T \quad (11.8)$$

dite dérivée convective d'Oldroyd ou de Lie, cf. Eq. (14.28).

Les lois de comportement de type taux impliquent simultanément les taux de déformation et de contraintes sous la forme :

$$\mathcal{F}(\sigma(t), \frac{D\sigma}{Dt}(t), \dots, \frac{D^p\sigma}{Dt^p}(t), \mathbf{A}_1(t), \dots, \mathbf{A}_n(t); \det \mathbf{F}(t)) = 0 \quad (11.9)$$

En guise d'exemple, on considère la loi de comportement particulière avec  $p = n = 1$  de la forme<sup>4</sup>

$$\eta \frac{D\sigma}{Dt} + \sigma = 2\mu \mathbf{D} \quad (11.10)$$

où  $\eta$  (s) et  $\mu$  (Pa.s) sont des propriétés du matériau<sup>5</sup>. Cette loi représente une généralisation tridimensionnelle en grandes déformations du modèle de Maxwell<sup>6</sup> décrit dans le cas unidimensionnel HPP par l'équation (6.5). Cette équation a pour solution la forme suivante des contraintes en fonction de l'histoire des déformations

$$\sigma(t) = \frac{\mu}{\eta^2} \int_{-\infty}^t (\mathbf{C}_t^{-1}(\tau) - \mathbf{g}^{-1}) \exp(-\frac{t-\tau}{\eta}) d\tau \quad (11.11)$$

cf. (Mandel, 1974; Agassant et al., 2014). C'est la forme héréditaire explicite (11.1) de

3. p. 85

4. En pratique, l'équation proposée met en jeu les déviateurs des contraintes et des vitesses de déformations.

5. Pour respecter la variance naturelle de  $\sigma^{..}$  et  $\mathbf{D}^{..}$ , il faut remplacer dans le second membre  $\mathbf{D}$  par  $\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}^{-1}$ .

6. Une variante de la loi (11.10) est obtenue en considérant une autre variance de la contrainte et en appliquant la dérivée convective correspondante :

$$\eta \frac{D\sigma^{..}}{Dt} + \sigma^{..} = \mathbf{D}^{..} \quad \text{ou} \quad \eta \frac{D\sigma^{..}}{Dt} + \sigma^{..} = \mathbf{D}^{..}$$

avec  $\mathbf{D}^{..} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{G}^{-1}$ ,  $\sigma^{..} = \mathbf{G} \sigma \mathbf{G}$  et  $D\sigma^{..}/Dt$  est donnée par (14.25). La solution de l'équation différentielle avec la nouvelle variance est

$$\sigma(t) = -\frac{\mu}{\eta^2} \int_{-\infty}^t (\mathbf{C}_t(\tau) - \mathbf{g}) \exp(-\frac{t-\tau}{\eta}) d\tau$$

d'après (Mandel, 1974), p. 190, à comparer avec (11.11). Il est intéressant de calculer la différence

$$\mathbf{G}^{-1} \frac{D\sigma^{..}}{Dt} \mathbf{G}^{-1} - \frac{D\sigma^{..}}{Dt} = 2\mathbf{G}^{-1} (\mathbf{D}\sigma^{..} + \sigma^{..}\mathbf{D})\mathbf{G}^{-1}$$

Par conséquent, la loi de comportement reste de la forme (11.9).

la loi de comportement (11.10). Ce calcul illustre une équivalence possible entre les formes intégrale et différentielle de la loi de comportement. Pour montrer que l'expression (11.11) est bien solution de l'équation différentielle tensorielle (11.10), on introduit d'une part l'intégrale

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \int_{-\infty}^t \mathbf{C}_t^{-1}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\eta}\right) d\tau \implies \dot{\mathbf{J}} = \mathbf{g}^{-1} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{L}^T \\ &\implies \frac{D\mathbf{J}}{Dt} + \frac{\mathbf{J}}{\eta} = \mathbf{g}^{-1} \end{aligned}$$

et on remarque d'autre part que la dérivée convective de l'identité n'est pas zéro mais bien plutôt :

$$\frac{D\mathbf{g}^{-1}}{Dt} = \frac{d\mathbf{g}^{-1}}{dt} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{g}^{-1} - \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{L}^T = -2\mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}^{-1} \quad (11.12)$$

car le premier terme du membre du milieu est nul et la suite provient du résultat (14.15).

#### 11.4 Fluides newtoniens

Les lois de comportement des fluides visqueux fréquemment utilisées par l'ingénieur correspondent aux fluides différentiels d'ordre 1 (11.6) en se limitant à la dépendance par rapport au taux de déformation  $\mathbf{D}$ . La contrainte est une fonction tensorielle isotrope de son argument  $\mathbf{D}$ . Concernant les fonctions à valeurs tensorielles d'ordre 2 (symétriques) et d'argument tensoriel d'ordre 2 (symétrique), on renvoie au paragraphe 12.5.2. On y trouvera en particulier quelques **théorèmes de représentation** qui donnent les formes possibles que prennent les fonctions isotropes. Le théorème 36 de Rivlin-Ericksen (page 341) donne la forme générale :

$$\underline{\sigma} = \alpha_0 \underline{1} + \alpha_1 \underline{\mathbf{D}} + \alpha_2 \underline{\mathbf{D}}^2 \quad (11.13)$$

où les  $\alpha_i$  sont des fonctions des 3 invariants principaux de  $\mathbf{D}$ . Cette relation est en accord avec la forme plus générale thermomécanique (11.6). Il est remarquable que l'application de théorèmes de représentation des fonctions tensorielles conduise ici à une forme quasi-explicite de la loi de viscosité. C'est l'intérêt majeur de ce chapitre. Cette remarque doit être tempérée par le fait que le véritable travail consiste alors à identifier les fonctions  $\alpha_i$  des invariants de  $\mathbf{D}$ . En introduisant explicitement la dépendance en  $\det \underline{\mathbf{F}}(t)$  des fonctions  $\alpha_i$  dans la loi de comportement (11.13), ce qui est licite et n'entraîne aucune restriction supplémentaire, on obtient la loi des **fluides visqueux de Reiner-Rivlin**, établie en 1945.

Un cas particulier de fluide visqueux de Reiner-Rivlin (11.13) est obtenu en linéarisant la loi précédente par rapport à  $\mathbf{D}$  :

$$\underline{\sigma} = -p(\rho) \underline{1} + \lambda(\text{trace } \underline{\mathbf{D}}) \underline{1} + 2\mu \underline{\mathbf{D}} \quad (11.14)$$

C'est la loi des **fluides de Navier-Stokes**, dits aussi **fluides newtoniens** compressibles. Les paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  caractérisent la viscosité du fluide et la fonction  $p(\rho)$  son élasticité. Dans le cas incompressible, la pression  $p$  est une réaction. Lorsque la compressibilité de viscosité  $\lambda + 2\mu/3 = 0$ , on parle d'un **fluide de Stokes**.

Tous les termes discutés ici sont contenus dans la loi plus générale (11.6).

Le crible de la thermodynamique peut maintenant être appliqué pour connaître les restric-

tions apportées par la positivité du taux de dissipation :

$$\underline{\sigma} : \underline{D} - \rho\dot{\psi} \geq 0 \quad (11.15)$$

ici dans le cas isotherme. L'énergie libre de Helmholtz est une fonction  $\psi(\det \underline{F})$  qui représente le stockage d'énergie élastique. On peut décomposer le tenseur des contraintes en deux contributions, l'une réversible, l'autre purement dissipative :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^{rev} + \underline{\sigma}^v, \quad \text{avec} \quad \underline{\sigma}^{rev} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \det \underline{F}} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}^v : \underline{D} \geq 0 \quad (11.16)$$

Dans le cas de la loi (11.14), on a

$$\underline{\sigma}^v = \lambda(\text{trace } \underline{D})\underline{1} + 2\mu\underline{D} \quad (11.17)$$

La positivité de la puissance de la contribution de viscosité exige que

$$\mu > 0 \quad \text{et} \quad 3\lambda + 2\mu > 0 \quad (11.18)$$

résultat que l'on établit en exploitant la condition  $\underline{\sigma}^v : \underline{D} \geq 0$  successivement avec des taux de déformation déviatoires puis sphériques.

Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont les paramètres de viscosité du milieu. Leur unité est Pa·s, également appelée **Poiseuille**. Par exemple,

$$\mu_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa.s} \quad \mu_{\text{glycerine}} = 2 \text{ Pa.s}$$

Ils ne doivent pas être confondus, malgré la notation commune, avec les coefficients de Lamé (unité Pa) caractérisant les propriétés élastiques linéaires isotropes des matériaux solides. Le fluide newtonien possède également en général un module de compressibilité élastique. Le fluide newtonien incompressible est régi par la loi

$$\underline{\sigma} = -p\underline{1} + 2\mu\underline{D}^{\text{dev}} \quad (11.19)$$

où la pression  $p$  est la réaction à la liaison interne d'incompressibilité<sup>7</sup> et n'est pas fournie par la loi de comportement, mais plutôt par les conditions aux limites du problème à résoudre.

## 11.5 Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes désignent les équations aux dérivées partielles, non linéaires, gouvernant les écoulements de fluides newtoniens. Elles sont obtenues en substituant la loi de comportement (11.14) dans l'équation locale de bilan de quantité de mouvement (3.51), ce qui donne

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} + \text{grad } p = \text{div } \underline{\sigma}^v + \rho \underline{f} \quad (11.20)$$

Dans le cas d'un fluide homogène obéissant à (11.17), on obtient

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} + \text{grad } p = (\lambda + \mu)\text{grad div } \underline{v} + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{f} \quad (11.21)$$

A cette équation, il faut ajouter la loi de la conservation de la masse qui prend les formes (3.7,3.8,3.9) et permet de calculer l'évolution de la masse volumique en fonction du

7. C'est un multiplicateur de Lagrange.

champ des vitesses.

Le problème à résoudre comporte des conditions initiales  $\underline{v}(\underline{x}, 0), \rho(\underline{x}, 0)$  (et éventuellement  $T(\underline{x}, 0)$  dans le cas thermomécanique). Les conditions aux limites sur une paroi rigide traduisent la transmission de la pression et l'adhérence (contrairement au glissement pour les fluides parfaits) du fluide à la paroi :

$$\underline{v} - \underline{w} = 0 \quad (11.22)$$

où  $\underline{w}$  est la vitesse du point matériel de la paroi en ce point de contact (cf. Eq. (5.6) dans le cas du fluide parfait).

#### *Navier-Stokes incompressible*

Dans le cas du fluide newtonien incompressible ( $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ ), cette équation se réduit à

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \underline{v}) \cdot \underline{v} + \operatorname{grad} \frac{p}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \underline{v} + \underline{f} \quad (11.23)$$

car  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ .

On introduit souvent le **coefficent cinétique de viscosité**<sup>8</sup> (unité :  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) :

$$\nu := \frac{\mu}{\rho} \quad (11.24)$$

Lorsque la viscosité  $\mu \rightarrow 0$ , on retrouve les équations des fluides parfaits incompressibles (5.2).

Pour étudier les contributions relatives des différents termes, il est d'usage d'adimensionner les équations précédentes en introduisant des variables sans dimension physique

$$\underline{x} = L\underline{x}', \quad \underline{v} = V_\infty \underline{v}', \quad t = \frac{L}{V_\infty} t', \quad p = \rho V_\infty^2 p', \quad \underline{f} = g_c \underline{f}'$$

où  $L, V_\infty, g_c$  sont respectivement une longueur, une vitesse et une densité massique de force caractéristiques du problème (Pedley, 1997). On obtient alors les équations de Navier-Stokes adimensionnées :

$$\frac{\partial \underline{v}'}{\partial t'} + (\operatorname{grad}' \underline{v}') \cdot \underline{v}' + \operatorname{grad}' p' = \frac{1}{\mathcal{R}e} \Delta' \underline{v}' + \frac{1}{\mathcal{F}r} \underline{f} \quad (11.25)$$

où apparaissent les **nombres adimensionnels de Reynolds et de Froude** :

$$\mathcal{R}e := \frac{\rho L V_\infty}{\mu}, \quad \mathcal{F}r := \frac{V_\infty^2}{g_c L} \quad (11.26)$$

Les équations sans dimensions permettent de profiter de la **similitude** de problèmes dépendant d'un nombre réduit de paramètres. Deux écoulements à géométrie équivalente sont dits semblables lorsque les nombres de Reynolds et de Froude correspondants sont égaux<sup>9</sup>. Cela autorise l'étude de modèles réduits. Sur l'analyse dimensionnelle et les similitudes physiques, on renvoie lecteur à l'ouvrage de (Barenblatt, 2003) et aux nombreuses applications en mécanique des fluides dans (Batchelor, 2000).

---

8. A ne pas confondre avec le coefficient de Poisson en élasticité malgré la notation commune.

9. En toute rigueur, il faut y ajouter le nombre de Mach relatif au terme en gradient de  $p$ .

## 11.6 Quelques applications aux fluides newtoniens incompressibles

### 11.6.1 Ecoulements de Poiseuille et de Couette

#### Pertes de charge dans un écoulement entre deux plans parallèles

On considère un écoulement stationnaire, dans la direction 1, d'un fluide newtonien incompressible entre deux plaques parallèles espacées d'une distance  $2h$  dans la direction 2 du repère. Le champ des vitesses est de la forme

$$v_1(x_1, x_2), \quad v_2 = v_3 = 0$$

L'isochorie de l'écoulement implique que  $\operatorname{div} \underline{v} = 0 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$  de sorte que le champ inconnu est une fonction  $v_1(x_2)$ . L'équilibre du fluide s'écrit

$$\operatorname{grad} p + \rho(\operatorname{grad} \underline{v}) \cdot \underline{v} = \mu \Delta \underline{v}$$

On vérifie que

$$\operatorname{grad} \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \implies (\operatorname{grad} \underline{v}) \cdot \underline{v} = 0$$

Le gradient de pression vaut donc

$$p_{,1} = \mu v_{1,22}, \quad p_{,2} = p_{,3} = 0$$

Ces équations montrent que  $p$  ne dépend que de  $x_1$  tandis que  $v_1$  est une fonction de  $x_2$ . Il s'ensuit que chaque membre de la première équation précédente est une constante uniforme  $-a$  et que

$$p = -ax_1 + b, \quad v_1 = -\frac{a}{2\mu}x_2^2 + cx_2 + d$$

où les constantes  $c$  et  $d$  sont déterminées par les conditions aux limites d'adhérence du fluide visqueux :

$$v_1(h) = v_1(-h) = 0 \implies v_1 = \frac{a}{2\mu}(h^2 - x_2^2) \quad (11.27)$$

Cet écoulement parabolique est caractéristique de la distribution de Poiseuille des vitesses dans la section. La vitesse moyenne du fluide est

$$\bar{v} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v_1 dx_2 = \frac{ah^2}{3\mu} \quad (11.28)$$

La constante  $-a$  est le gradient de pression, ici une chute linéaire de pression ( $-a < 0$ ), i.e. une perte de charge dictée par les conditions de pression en amont et en aval.

### 11.6.2 Ecoulement de Couette

En modifiant les conditions aux limites dans le problème précédent on obtient l'écoulement de Couette entre deux plaques en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre :

$$v_1(h) = V, \quad v_1(-h) = 0 \implies v_1 = \frac{x_2 + h}{2h}V + \frac{a}{2\mu}(h^2 - x_2^2) \quad (11.29)$$

avec une vitesse moyenne

$$\bar{v} = \frac{V}{2} + \frac{ah^2}{3\mu} \quad (11.30)$$

En l'absence de perte de charge ( $a = 0$ ), on trouve l'écoulement de Couette proprement dit, à savoir un profil linéaire des vitesses. Le contrôle de la vitesse de la plaque et la mesure de la force résultante permettent, grâce à cet **essai viscométrique**, de mesurer la viscosité du fluide.

L'analyse prévoit un **écoulement en retour**, i.e.  $v_{1,2}(-h) \leq 0$  si la perte de charge  $a \leq a_0 = -\mu V/2h^2$ . La vitesse moyenne (11.30) devient même négative, c'est-à-dire dans le sens opposé au mouvement du plan, si  $a \leq 3a_0$  !

On peut exprimer le champ de vitesse en fonction du “point de non retour”  $a_0$  :

$$\frac{v_1}{V} = \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{h} + 1 \right) \left( 1 + \frac{a}{2a_0} \left( \frac{x_2}{h} - 1 \right) \right) \quad (11.31)$$

Ce champ de vitesse est représenté pour différentes valeurs du rapport  $a/a_0$  sur la figure 11.2.

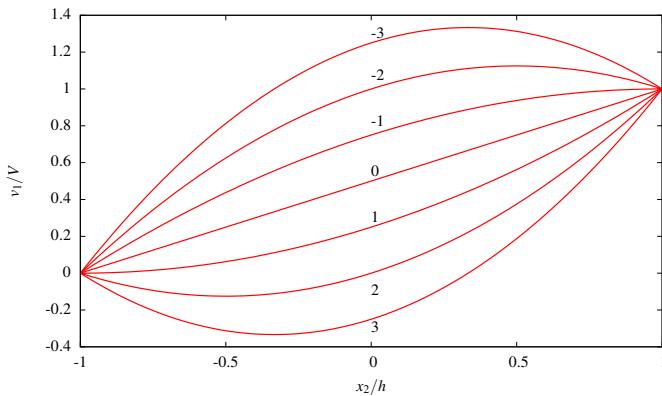


Figure 11.2 : Ecoulement en retour en fonction de la valeur du gradient de pression  $a/a_0$  d'après l'expression (11.31).

#### Application à la lubrification

La solution précédente peut être étendue dans le cas de films fluides très minces d'épaisseur  $0 \leq x_2 \leq h(x_1, t)$  lentement variable le long de l'écoulement, dans la direction  $x_1$ , comme on en rencontre entre deux solides rigides lubrifiés<sup>10</sup>.

La paroi supérieure est notée  $\mathcal{C}(x_1, x_2 = h(x_1, t))$  est animée d'une vitesse  $V$  dans la direction 1 :

$$\frac{dx_2}{dt}(\mathcal{C}) = \frac{dh}{dt} = V = \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{v} \cdot \operatorname{grad} h = \frac{\partial h}{\partial t} + v_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (11.32)$$

tandis que la paroi inférieure est  $x_2 = 0$ .

10. D'après (Germain, 1986).

Le film étant très mince, on suppose que la pression est une fonction  $p(x_1)$ . Le champ de vitesse est conforme à l'écoulement de Couette traité précédemment avec les conditions aux limites  $v_1(x_1, x_2 = 0, t) = 0, v_1(x_1, x_2 = h, t) = V$ . On trouve :

$$v_1 = V \frac{x_2}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 (h - x_2) \quad (11.33)$$

Le débit par unité de largeur (selon  $x_3$ ) s'évalue de la manière suivante :

$$Q(x_1, t) = \int_0^{h(t)} v_1 dx_2 = V \frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (11.34)$$

La conservation de la masse pour le fluide incompressible impose que

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad (11.35)$$

On obtient l'équation dite de Reynolds

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) = 6\mu \left( \frac{\partial Vh}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (11.36)$$

où l'on peut également remplacer la dérivée partielle temporelle de la hauteur par la dérivée selon  $x_1$  en utilisant (11.32).

#### *Ecoulement stationnaire dans une conduite cylindrique*

On reprend l'écoulement de type Poiseuille dans le cas d'une conduite cylindrique de section quelconque. L'écoulement a lieu dans la direction  $x_1$  qui coïncide avec l'axe du cylindre. Le champ recherché est de la forme

$$v_1(x_2, x_3), \quad v_2 = v_3 = 0$$

où  $v_1$  ne dépend pas de  $x_1$  en raison de l'incompressibilité du fluide. On vérifie que  $(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} = 0$  dans ce cas, de sorte que

$$\begin{aligned} \text{grad } p = \mu \Delta \underline{v} \quad \implies \quad p_{,1} = \mu \Delta v_1 &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) = Cste = -a \\ \implies \Delta v_1 + \frac{a}{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (11.37)$$

ce qui correspond à une chute linéaire de charge comme dans l'écoulement entre deux plans.

Dans le cas d'une section circulaire de rayon  $R$ , la solution

$$v_1 = \frac{a}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (11.38)$$

s'annule en  $r = R$ , comme il se doit.

Le débit de la canalisation à section circulaire vaut

$$Q = 2\pi \int_0^R v_1 r dr = \pi R^2 \bar{v}_1 = \frac{\pi R^4 a}{8\mu}$$

La résolution dans le cas d'une section de forme quelconque revient à résoudre un problème de Dirichlet, i.e. la recherche d'une fonction harmonique  $\vartheta$  s'annulant sur le bord du domaine :

$$\vartheta = v_1 + \frac{a}{4\mu}(x_2^2 + x_3^2)$$

qui est effectivement harmonique d'après (11.37). Cette problématique se rencontre également dans le cas de la torsion de barres élastiques au chapitre 23 qui discute le problème de Dirichlet au paragraphe 23.1.1.

### 11.6.3 Ecoulement de Couette-Taylor entre deux cylindres

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible entre deux cylindres coaxiaux circulaires de rayons intérieur et extérieur  $R_i$  et  $R_e$  respectivement.

Le dispositif s'appelle un rhéomètre ou un viscosimètre car il permet, on le verra, de mesurer la viscosité d'un fluide.

On cherche les conditions d'existence d'un champ de vitesses de la forme

$$\underline{v} = v_\theta(r) \underline{e}_\theta, \quad R_i \leq r \leq R_e \quad (11.39)$$

dans un repère cylindrique dont l'axe est celui des cylindres étudiés. La divergence d'un tel champ est nulle, d'après le formulaire (17.8), de sorte que l'écoulement recherché est isochore, comme il se doit. D'après le formulaire (17.7), le gradient d'un tel champ de vitesse est

$$\underline{\mathcal{L}} = -\frac{v_\theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{dv_\theta}{dr} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r, \quad \underline{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}(v'_\theta - \frac{v_\theta}{r})(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) \quad (11.40)$$

où le prime indique la dérivation par rapport à  $r$ .

L'équation du mouvement stationnaire, en négligeant les efforts volumiques, est donnée par

$$\rho(\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} + \text{grad } p = \text{div}(\underline{\mathcal{D}}) \quad (11.41)$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned} (\text{grad } \underline{v}) \cdot \underline{v} &= -\frac{v_\theta^2}{r} \underline{e}_r \\ \text{div } \underline{\mathcal{D}} &= \left( \frac{\partial D_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2D_{r\theta}}{r} \right) \underline{e}_\theta = \frac{1}{2}(v'_\theta + \frac{v_\theta}{r})' \underline{e}_\theta \end{aligned}$$

La pression  $p(r, \theta, z)$  ne dépend pas de  $\theta$  en raison de la symétrie de révolution du problème. L'équation du mouvement montre également que  $p$  ne dépend pas de  $z$  car les vecteurs précédents n'ont pas de composante selon  $z$ . Par conséquent,

$$\text{grad } p = p' \underline{e}_r$$

En projetant l'équation (11.41) sur l'axe  $\underline{e}_\theta$ , on obtient l'équation différentielle :

$$(v'_\theta + \frac{v_\theta}{r})' = 0 \implies v_\theta = ar + \frac{b}{r}$$

Les conditions aux bords des cylindres permettent d'identifier les constantes :

$$v_\theta(r = R_i) = R_i \omega_i = aR_i + \frac{b}{R_i}, \quad v_\theta(r = R_e) = R_e \omega_e = aR_e + \frac{b}{R_e}$$

où  $\omega_i$  et  $\omega_e$  sont les vitesses de rotation des cylindres intérieur et extérieur. Ces vitesses sont constantes car on étudie le cas stationnaire. Le cas instationnaire sera abordé dans l'exercice suivant. Finalement,

$$a = \frac{R_e^2 \omega_e - R_i^2 \omega_i}{R_e^2 - R_i^2}, \quad b = \frac{R_i^2 R_e^2 (\omega_i - \omega_e)}{R_e^2 - R_i^2}$$

Lorsque  $R_i \rightarrow 0$ , on a  $b = 0$  et la solution  $v_\theta = ar$  correspond à un mouvement de corps rigide. Lorsque  $R_e \rightarrow \infty$  ( $\omega_e = 0$ ), le mouvement tend vers celui d'un tourbillon dont la cinématique (20.5) est étudiée au chapitre 20.

La distribution de pression est calculée ensuite grâce à la projection de l'équation (11.41) sur l'axe  $\underline{e}_r$  :

$$\frac{p'}{\rho} = \frac{v_0^2}{r} = ar + \frac{2ab}{r} + \frac{b^2}{r^3}$$

Cette équation s'intègre pour donner

$$\frac{p(r)}{\rho} = \frac{1}{2} a^2 r^2 + 2ab \log \frac{r}{R_e} - \frac{b^2}{2r^2} + p_0$$

La constante  $p_0$  s'identifie à partir de la pression moyenne imposée aux extrémités du rhéomètre ou bien à partir de la pression mesurée sur l'un des cylindres.

On calcule le moment des efforts appliqués par le cylindre extérieur sur le fluide de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \underline{M} &= H \int_{r=R_e} \underline{OM} \wedge (\underline{\sigma}(R_e) \cdot \underline{e}_r) R_e d\theta \\ &= H \int_{r=R_e} \underline{OM} \wedge (\underline{\sigma}^{\text{dev}}(R_e) \cdot \underline{e}_r) R_e d\theta \\ &= HR_e \int_{r=R_e} R_e \underline{e}_r \wedge \mu(v'_\theta - \frac{v_\theta}{r}) \underline{e}_\theta d\theta \\ &= HR_e \int_{r=R_e} R_e \mu \left( -\frac{b}{r^2} \right) \underline{e}_z d\theta \\ &= 4\pi H \mu \frac{R_i^2 R_e^2 (\omega_e - \omega_i)}{R_e^2 - R_i^2} \underline{e}_z \end{aligned} \quad (11.42)$$

La puissance nécessaire à fournir est alors  $M(\omega_e - \omega_i)$ . Cette puissance est nulle si  $R_i \rightarrow 0$  car le dispositif ne subit alors qu'un mouvement de corps rigide, sans résistance opposée par le fluide.

Il resterait à étudier la stabilité des écoulements décrits précédemment, question que nous n'abordons pas dans ce cours.

Le grand physicien britannique G.I. Taylor a réalisé des films pédagogiques remarquables illustrant par des expériences, certains résultats de ce chapitre, cf. (Taylor, 1966).

#### 11.6.4 Premier problème de Stokes

Nous terminons ce florilège par un exemple d'écoulement non stationnaire de fluide visqueux. Il s'agit du problème de l'évolution temporelle d'un fluide dans un bassin dont le fond est mis soudainement en mouvement :  $v_1(x_1, x_2 = 0, t) = H(t)V$ ,  $v_2 = v_3 = 0$ . La fonction de Heaviside est notée  $H(t)$ .

Cela signifie que le fond initialement au repos par rapport au fluide subit une impulsion

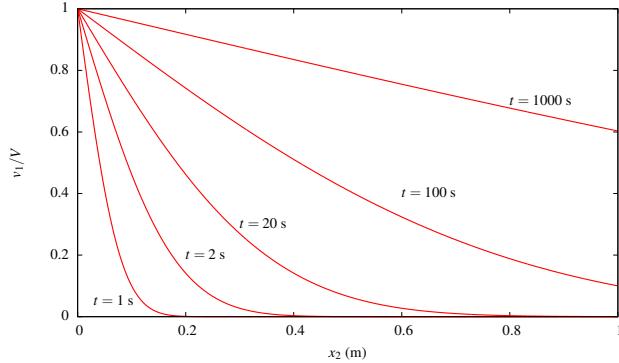


Figure 11.3 : Ecoulement instationnaire de Stokes pour la glycérine ( $\mu = 2.33 \text{ Pa.s}$ ,  $\rho = 1260 \text{ kg.m}^{-3}$ ) à différents instants. A  $t = 0$  le plateau inférieur est soudain animé d'une vitesse  $V$ .

amenant instantanément sa vitesse à la valeur constante  $V$ . On va voir que la réponse du fluide newtonien n'est pas instantanée, contrairement au cas d'un fluide parfait qui serait insensible à cette sollicitation<sup>11</sup>. Au contraire, le mouvement de la plaque inférieure est communiqué progressivement au sein du fluide. La profondeur du bassin selon  $x_2$  est supposée infinie. On recherche la vitesse de la forme  $\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1$ . On résout l'équation instationnaire suivante :

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \text{grad } p = \mu \Delta \underline{v} \quad (11.43)$$

Le laplacien d'un champ de tenseur en coordonnées cartésiennes orthonormées a pour composantes le laplacien de chaque composante, ce qui donne ici

$$\Delta \underline{v} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \underline{e}_1$$

La deuxième composante de l'équation (11.43) indique que  $\partial p / \partial x_2 = 0$  de sorte que la pression est uniforme (en l'absence d'efforts massiques). La première composante fournit alors l'équation différentielle à résoudre pour  $v_1$  :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \quad (11.44)$$

Il s'agit d'une équation de type diffusion faisant intervenir la viscosité cinématique  $\nu$ . Elle doit être comparée à l'équation de la chaleur analogue

$$\dot{T} = \frac{k}{\rho C_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}$$

où  $T$  est la température,  $k$  le coefficient de Fourier de conduction thermique et  $C_v$  la capacité calorifique. La différentiabilité de  $v_1$  par rapport au temps exigée dans (11.44) fournit la condition initiale :  $v_1(x_2, 0) = 0$ ,  $\forall x_2$ .

Les conditions aux limites du problème sont  $v_1(x_2 = \infty, t) = 0$ ,  $v_2(x_2 = 0, t) =$

11. Cf. (Batchelor, 2000) p. 190.

$V, \quad \forall t > 0$ . Les solutions de (11.44) sont décrites par la fonction erreur de Gauss<sup>12</sup>

$$v_1(x_2, t) = A \operatorname{erf} \left( \frac{x_2}{2\sqrt{\nu t}} \right) + B, \quad \text{avec} \quad \operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (11.45)$$

En tenant compte des conditions initiales et aux limites, on trouve

$$v_1(x_2, t) = V \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x_2}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right) \quad (11.46)$$

La quantité  $\sqrt{\nu t}$  représente une longueur caractéristique de diffusion. Les profils de vitesses à différents instants sont tracés sur la figure dans un cas particulier. On voit qu'aux premiers instants, seule la partie basse est mise en mouvement. Bien plus tard, le champ devient quasi-linéaire, le cisaillement ayant été transmis à une grande partie du fluide. Pour finir, mentionnons que le second problème de Stokes considère un mouvement oscillant de la plaque inférieure (Batchelor, 2000).

### 11.7 Obstacle sphérique dans un écoulement de fluide de Stokes

La particule sphérique est cette fois plongée dans un fluide incompressible de Stokes dont la loi de comportement est donnée par

$$\underline{\sigma} = -p \underline{\mathbf{I}} + 2\mu \underline{\underline{D}} \quad (11.47)$$

où la viscosité de cisaillement  $\mu$  est supposée homogène dans le fluide.

Le déroulement du problème reprend les éléments des ouvrages (Guazzelli et al., 2011) (p. 33) et (Landau and Lifchitz, 1989) (p. 86 de la version française).

#### Propriétés des équations de Stokes

Montrer que les champs de vitesses et de pression sont solutions des équations de Stokes, considérées ici en l'absence de force volumique et en négligeant les effets d'accélération et d'inertie :

$$-\operatorname{grad} p + \mu \Delta \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (11.48)$$

où  $\Delta = \nabla^2$  est l'opérateur laplacien eulérien.

En déduire que, pour un fluide incompressible, le champ de pression est une fonction harmonique.

► L'équation (11.48) résulte de la combinaison de la loi de conservation locale de quantité de mouvement,  $\operatorname{div} \underline{\sigma} = 0$ , et de la loi de comportement (11.47). La divergence de l'équation (11.48) combinée à la condition d'incompressibilité, dans le cas d'un fluide homogène (la viscosité  $\mu$  est uniforme) conduit à

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \Delta p = -\mu \operatorname{div} \Delta \underline{\mathbf{v}} = -\mu \Delta \operatorname{div} \underline{\mathbf{v}} = 0$$

$$\text{car } (u_{i,kk})_{,i} = u_{i,kki} = u_{i,ikk} = (u_{i,i})_{,kk} = 0.$$

#### 11.7.1 Champ de pression

La fonction harmonique suivante s'avère pertinente pour la pression

$$p(\underline{x}) = p_0 + \alpha_1 \underline{\mathbf{V}}_0 \cdot \frac{\underline{x}}{r^3} = p_0 + \alpha_1 V_0 \frac{x_1}{r^3}, \quad \text{avec} \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (11.49)$$

12. La fonction de répartition de la loi normale est liée à la fonction erf. En particulier,  $\operatorname{erf}(0) = 0$ ,  $\operatorname{erf}(+\infty) = 1$ ,  $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$ .

où  $\alpha_1$  est une constante déterminée dans la suite du problème.

Vérifier que cette fonction est effectivement harmonique.

Vérifier également qu'elle conduit à une pression égale à  $p_0$  à l'infini.

► Partant de

$$p(x) - p_0 = \alpha_1 V_0 x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2}$$

on calcule successivement les termes

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1 V_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} &= -3x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-7/2} (3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1^2) \\ \frac{1}{\alpha_1 V_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} &= -3x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-7/2} (x_3^2 - 4x_2^2 + x_1^2) \\ \frac{1}{\alpha_1 V_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} &= -3x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-7/2} (x_2^2 - 4x_3^2 + x_1^2) \end{aligned}$$

dont la somme est nulle.

En fait, le calcul est plus simple en utilisant le laplacien en coordonnées cylindriques.

*Une solution particulière des équations de Stokes*

En déduire que le champ de vitesses

$$\underline{v}^{(p)} = \frac{p - p_0}{2\mu} \underline{x} \quad (11.50)$$

est une solution particulière des équations (11.48).

► Le laplacien de  $p\underline{x}$  est un vecteur de composantes  $\Delta(p\underline{x}_i)$ . Calculons par exemple

$$\Delta(p\underline{x}_1) = (p\underline{x}_1)_{,11} + (p\underline{x}_1)_{,22} + (p\underline{x}_1)_{,33} = 2p_{,1} + x_1 \Delta p$$

de sorte que

$$\Delta(p\underline{x}) = (\Delta p)\underline{x} + 2\text{grad } p$$

On en déduit que  $\underline{v}^{(p)}$  est effectivement une solution particulière des équations (11.48).

### 11.7.2 Détermination du champ des vitesses

Une solution de l'équation homogène (11.48), c'est-à-dire sans le terme de pression, s'obtient en piochant dans les fonctions vectorielles harmoniques sphériques décroissantes. Deux contributions s'avèrent pertinentes :

$$\underline{v}^{(h)} = \frac{\alpha_2}{r} \underline{V}_0 + \frac{\alpha_3}{r^3} \left( \underline{V}_0 - \frac{3}{r^2} (\underline{V}_0 \cdot \underline{x}) \underline{x} \right) \quad (11.51)$$

où  $\alpha_2, \alpha_3$  sont deux constantes supplémentaires. On ne demande pas de vérifier le caractère harmonique de ce champ.

Le champ des déplacements complet proposé est donc

$$\underline{v} = \underline{V}_0 + \underline{v}^{(p)} + \underline{v}^{(h)} \quad (11.52)$$

ce champ de vitesses doit vérifier la condition d'incompressibilité. On admet que cette condition, un peu fastidieuse à exploiter en temps limité, conduit à la relation

$$\text{div } \underline{v} = 0 \implies 2\mu\alpha_2 = \alpha_1 \quad (11.53)$$

Déterminez alors les constantes  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  permettant de satisfaire à toutes les conditions restantes qu'il vous revient d'identifier.

► Les composantes cartésiennes du champ des vitesses sont

$$\begin{aligned} v_1/V_0 &= 1 + \frac{\alpha_1 x_1^2}{2\mu r^3} + \frac{\alpha_2}{r} + \frac{\alpha_3}{r^3} - \frac{3\alpha_3 x_1^2}{r^5} \\ v_2/V_0 &= \frac{\alpha_1 x_1 x_2}{2\mu r^3} - \frac{3\alpha_3 x_1 x_2}{r^5} \\ v_3/V_0 &= \frac{\alpha_1 x_1 x_3}{2\mu r^3} - \frac{3\alpha_3 x_1 x_3}{r^5} \end{aligned}$$

Le calcul de la divergence passe par l'obtention de trois dérivées partielles. Par exemple, on obtient

$$\frac{1}{V_0} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\alpha_1 x_1}{2\mu r^3} - \frac{3\alpha_3 x_1}{r^5} - \frac{3\alpha_1 x_1 x_2^2}{2\mu r^5} + \frac{15\alpha_3 x_1 x_2^2}{r^7}$$

et on ne rapporte pas les autres expressions, du même accabit, par souci de concision. On trouve que la nullité de la divergence est obtenuessi  $\alpha_1 = 2\mu\alpha_2$ .

La sphère étant supposée immobile, la vitesse du fluide doit s'annuler au bord  $r = a$ . La condition  $v_2(a) = v_3(a) = 0$  conduit à la relation

$$\alpha_3 = \frac{a^2}{6\mu} \alpha_1$$

En tenant compte de ces relations, la condition  $v_1(a) = 0$  permet de trouver

$$\alpha_1 = -\frac{3\mu}{2}a$$

et finalement

$$\alpha_2 = -\frac{3}{4}a, \quad \alpha_3 = -\frac{a^3}{4}$$

#### *Lignes de courant autour de la sphère*

Les vitesses trouvées précédemment peuvent s'exprimer en coordonnées sphériques sous la forme suivante<sup>13</sup> :

$$v_r = V_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right) \quad (11.54)$$

$$v_\theta = -V_0 \sin \theta \left( 1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \quad (11.55)$$

$$v_\varphi = 0 \quad (11.56)$$

Trouver une telle fonction de courant  $\psi(r, \theta)$  pour le champ des vitesses (11.54-11.56).

Les lignes de courant correspondent aux isovaleurs de la fonction de courant.

Vérifier que la sphère  $r = a$  est une ligne de courant et que les lignes de courant à l'infini sont comme on les attend.

Quelques lignes de courant sont tracées sur la figure 11.4 dans le cas de la sphère dans

13. On ne demande pas d'établir ce résultat.

un fluide parfait incompressible et dans le cas de la sphère dans un fluide de Stokes. Commenter.

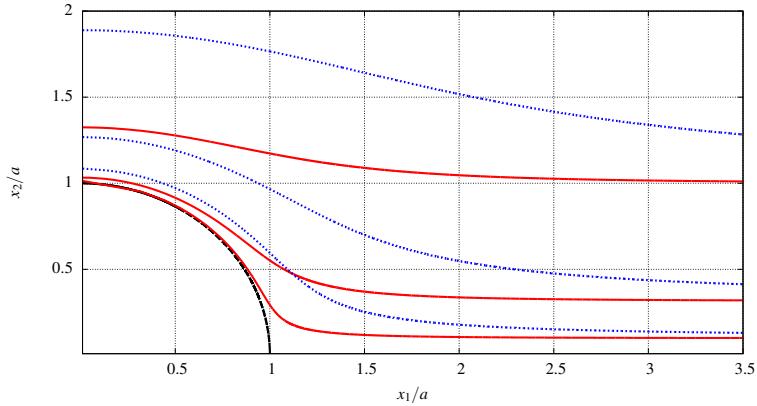


Figure 11.4 : Lignes de courant pour une sphère dans un fluide parfait incompressible (en pointillé bleu) et dans une fluide de Stokes (trait continu rouge). Les lignes choisies correspondent à trois valeurs distinctes de la fonction de courant. Pour chaque valeur, les courbes bleue et rouge correspondantes sont confondues loin en aval de la sphère.

► En intégrant,  $r^2 \sin \theta v_r$  par rapport à  $\theta$ , on trouve une fonction de courant

$$\psi(r, \theta) = \frac{V_0}{2} r^2 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

dont la dérivée par rapport à  $r$  coïncide avec  $-r \sin \theta v_\theta$ . La sphère  $r = a$  est solution de  $\psi = 0$ .

A l'infini  $\psi = Cste$  conduit à  $x_2^2 = Cste$  qui sont des lignes horizontales parallèles à l'écoulement  $\underline{V}_0$ .

On voit sur la figure 11.4 que le fluide visqueux reste plus “collé” à la sphère que le fluide parfait.

### 11.7.3 Le gradient des vitesses et contraintes déviatoriques dans le fluide

Calculer le gradient des vitesses en coordonnées sphériques.

► Avec les dépendances en jeu, on a

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{L}} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} (v_\theta \cotan \theta + v_r) \underline{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \underline{\mathbf{e}}_\varphi \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

Ses composantes valent donc

$$\begin{aligned} L_{rr} &= \frac{3}{2} V_0 \frac{a \cos \theta}{r^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad L_{\theta\theta} = \frac{3}{4} V_0 \frac{a \cos \theta}{r^2} \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) = L_{\varphi\varphi} \\ L_{r\theta} &= -\frac{3}{4} V_0 \frac{a \sin \theta}{r^2} \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right), \quad L_{\theta r} = -\frac{3}{4} V_0 \frac{a \sin \theta}{r^2} \left( \frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

On vérifie que trace  $\underline{L} = 0$ , comme il se doit dans un milieu incompressible.

Utiliser les expressions précédentes pour déterminer le tenseur des contraintes déviatoriques en coordonnées sphériques.

Donner en particulier ses valeurs prises sur la sphère ( $r = a$ ).

► Les composantes du tenseur des taux de déformation sont obtenues en prenant la partie symétrique du gradient des vitesses calculé précédemment :

$$D_{rr} = \frac{3}{2} V_0 \frac{a \cos \theta}{r^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad D_{\theta\theta} = \frac{3}{4} V_0 \frac{a \cos \theta}{r^2} \left( \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) = D_{\varphi\varphi}$$

$$2D_{r\theta} = -\frac{3}{2} V_0 \frac{a^3 \sin \theta}{r^4}$$

La partie déviatorique des contraintes est fournie par la loi de Stokes :

$$\underline{\sigma}^{\text{dev}} = 2\mu \underline{D}^{\text{dev}} = 2\mu \underline{D}$$

Les composantes non nulles des contraintes sont donc

$$\sigma_{rr}^{\text{dev}} = 3V_0\mu a \frac{\cos \theta}{r^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{dev}} = \frac{3}{2} V_0 \mu a \frac{\cos \theta}{r^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) = \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{dev}}$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{3}{2} V_0 \mu \sin \theta \frac{a^3}{r^4}$$

Sur la sphère  $r = a$ , on obtient en particulier

$$\sigma_{rr}^{\text{dev}} = \sigma_{\theta\theta}^{\text{dev}} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{3}{2} V_0 \mu \frac{\sin \theta}{a}$$

#### 11.7.4 Force de trainée

On souhaite calculer la résultante  $\underline{F}$  des forces qu'exerce le fluide sur la sphère.

Commencer par calculer la force  $\underline{F}_p$  induite par la partie hydrostatique  $p$  du champ des contraintes sur la sphère.

Calculer ensuite la contribution  $\underline{F}_v$  due à la partie déviatorique des contraintes.

Montrer enfin que la force de traînée vaut

$$\underline{F} = \underline{F}_p + \underline{F}_v = 6\pi V_0 \mu a \underline{e}_1 \quad (11.57)$$

Commenter le résultat.

Expliquer le fait que la masse volumique du fluide,  $\rho$ , ne joue pas de rôle dans cette expression.

Justifier que le résultat soit proportionnel au produit  $V_0 \mu a$ .

Evaluer cet effort pour une boule  $a = 1$  m dans un écoulement  $V_0 = 1$  m.s<sup>-1</sup> dans le cas de l'eau et puis celui de la glycérine, à la température ambiante. Commenter.

► Le champ de pression vaut

$$p - p_0 = -\frac{3\mu a}{2} V_0 \frac{x_1}{r^3}$$

La force due à ce champ de pression appliquée à la boule vaut

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{F}}_p &= \int_{r=a} -p \underline{\mathbf{e}}_r a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= 3\pi\mu V_0 \int_0^\pi x_1 \left( \frac{x_1}{a} \underline{\mathbf{e}}_1 + \frac{x_2}{a} \underline{\mathbf{e}}_2 \right) \sin \theta d\theta \\
 &= 3\pi\mu a V_0 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \underline{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \sin \theta \underline{\mathbf{e}}_2 \sin \theta d\theta \\
 &= 3\pi\mu a V_0 \left( \left( \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right) \underline{\mathbf{e}}_1 + \left( \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \right) \underline{\mathbf{e}}_2 \right) \\
 &= 3\pi\mu a V_0 \left( \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \underline{\mathbf{e}}_1 + \left[ \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^\pi \underline{\mathbf{e}}_2 \right) \\
 &= 2\pi\mu a V_0 \underline{\mathbf{e}}_1
 \end{aligned} \tag{11.58}$$

On passe ensuite à la contribution des forces visqueuses liées à l'action des contraintes déviatoriques :

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{F}}_v &= \int_{r=a} \underline{\sigma}^{\text{dev}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_r ds = \int_{r=a} \sigma_{r\theta} \underline{\mathbf{e}}_\theta ds \\
 &= \int_0^\pi \sigma_{r\theta} (-\sin \theta \underline{\mathbf{e}}_1 + \cos \theta \underline{\mathbf{e}}_2) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= -3\pi V_0 \mu a \left( \left( \int_0^\pi -\sin^3 \theta d\theta \right) \underline{\mathbf{e}}_1 + \left( \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \right) \underline{\mathbf{e}}_2 \right)
 \end{aligned}$$

La dernière intégrale est nulle et, comme  $\sin^3 \theta = \sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta$ , on a

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

Finalement,

$$\underline{\mathbf{F}}_v = 4\pi V_0 \mu a \underline{\mathbf{e}}_1$$

La somme des deux contributions conduit à la valeur annoncée (11.57).

On remarque que la linéarité par rapport à la vitesse du fluide par rapport à la sphère, à la viscosité du fluide et au rayon de la sphère. Par contre il n'y a pas de dépendance par rapport à la masse volumique car les efforts d'inertie ont été négligés (nombre de Reynolds suffisamment faible) de sorte que la masse volumique n'intervient plus dans l'équation (11.48). Ce résultat doit donc être reconstruit dans le cas d'écoulements à nombre de Reynolds plus élevé.

La proportionnalité de la traînée par rapport au produit  $V_0 \mu a$  peut être prévue à l'avance par analyse dimensionnelle. Seule cette combinaison conduit en effet à une force.

Le problème de la résistance de la sphère dans un écoulement de Stokes ne conduit donc pas au paradoxe de d'Alembert, contrairement au cas du fluide parfait incompressible.

L'application numérique à  $\mu_{\text{eau}} = 10^{-3}$  Pa.s  $\mu_{\text{glycerine}} = 2$  Pa.s conduit, dans la configuration proposée, à  $F_{\text{eau}} = 0.02$  N et  $F_{\text{glycerine}} = 38$  N. Il est clair que l'effort dans le cas de l'eau est très faible, ce qui souligne la faible viscosité de l'eau.

### 11.7.5 Epilogue malheureux

La solution en vitesses mise en évidence précédemment vérifie certes les équations (11.48), les conditions aux limites requises et la loi de comportement. Hélas, on va le voir, elle ne remplit pas toutes les conditions qui ont présidé à l'établissement des équations de Stokes (11.48). Elle n'est par conséquent pas satisfaisante et des efforts supplémentaires doivent être déployés. Seules des solutions approchées ont été développées notamment grâce à l'équation d'Oseen<sup>14</sup> ou par la méthode des développements asymptotiques rac-cordés (Landau and Lifchitz, 1989) (p. 90).

Les équations (11.48) sont obtenues en négligeant les efforts d'inertie  $\underline{\mathcal{L}} \cdot \underline{v}$ . Montrer, avec très peu de calculs, que, suffisamment loin de la sphère, ces efforts sont de l'ordre de grandeur suivant :

$$\|\underline{\mathcal{L}} \cdot \underline{v}\| \sim V_0^2 \frac{a}{r^2} \quad (11.59)$$

Justifier ensuite l'ordre de grandeur suivant, suffisamment loin de la sphère :

$$\left\| \frac{\mu}{\rho} \Delta \underline{v} \right\| \sim \frac{\mu V_0 a}{\rho r^3} \quad (11.60)$$

En déduire que la solution proposée précédemment n'est valable que pour  $r$  inférieur à un rayon critique que l'on déterminera.

Faire l'application numérique pour l'eau et la glycérine dans la configuration proposée à la question 11.7.4. Conclure.

Indiquer des conditions plus favorables d'utilisation de la solution déficiente.

Il n'en demeure pas moins que la formule (11.57) de la traînée précédemment établie fournit un bon ordre de grandeur et est largement utilisée en pratique.

Dans le cas de l'obstacle cylindrique dans un fluide de Stokes, la situation est plus dramatique encore car le champ des vitesses que l'on peut proposer en suivant la démarche utilisée pour la sphère et basée sur l'emploi de fonctions harmoniques, permet certes de remplir les conditions aux limites en  $r = a$  mais diverge à l'infini, cf. (Guazzelli et al., 2011) (p. 50).

► L'ordre de grandeur des composantes de  $\underline{\mathcal{L}}$  loin de la sphère est  $V_0 a / r^2$  d'après les résultats de la question 11.7.3. La vitesse y est de l'ordre de  $V_0$  et on obtient ainsi l'ordre de grandeur (11.59).

Comme les termes dominants de  $\text{grad } \underline{v}$  sont en  $r^{-2}$  pour  $r \gg a$ , l'ordre de grandeur des termes du laplacien des vitesses est  $r^{-3}$ . Par conséquent les termes de l'équation de Stokes (11.48), divisés par  $\rho$  sont de l'ordre indiqué par (11.60).

Dès lors, les termes d'inertie sont négligeables devant les termes de viscosité tant que

$$V_0^2 \frac{a}{r^2} \ll \frac{\mu V_0 a}{\rho r^3} \implies r \ll \frac{\mu}{\rho V_0}$$

La première condition pour que le domaine de validité de la solution ne soit pas vide est que  $\mu/\rho V_0 \gg a$ . Autrement dit, le nombre de Reynolds  $\rho V_0 a / \mu \ll 1$  doit être suffisamment petit. C'est le cas lorsque la vitesse  $V_0$  est suffisamment petite et/ou lorsque la particule est suffisamment petite. Il s'avère que ce rayon critique est très petit pour l'eau et même la glycérine dans les conditions avec  $V_0 = 1 \text{ m.s}^{-1}$ . Il faut des vitesses  $V_0$  de l'ordre du  $\text{mm.s}^{-1}$  pour que la solution, dans le cas de la glycérine, soit valable quelques dizaines de centimètres autour d'une sphère de 1 m. Ou bien, la solution est valable dans le cas des toutes petites sphères, de l'ordre du millimètre pour la glycérine. Cela explique l'emploi des résultats précédents en mécanique des suspensions, des fluides comportant des particules dispersées ou des solutions colloïdales, cf. (Guazzelli et al., 2011).

14. Carl Wilhelm Oseen (1878-1944), né à Lund en Suède, et professeur à Uppsala.



**Deuxième partie**

**ANNEXES**



## 12 Tenseurs

*Wir stellen endlich in dritte Linie Zustände, die durch eine Zahlgrösse und eine zweiseitige Richtung charakterisiert sind. Ein solcher Zustand lässt sich durch eine Strecke veranschaulichen, die von einem festem Punkt aus gleichweit nach beiden Seiten reicht. Man könnte ihn demgemäß als bivectoriell, die für ihn charakteristische Grösse als Bivector bezeichnen, indessen würde dadurch eine Verwandschaft mit den Vektoren ausgedrückt werden, die in Wahrheit nicht vorhanden ist. Wir wollen uns deshalb nur darauf stützen, dass Zustände der geschilderten Art bei Spannungen und Dehnungen auftreten, und sie deshalb tensorielle<sup>a</sup>, die für sie charakteristischen physikalischen Grössen aber Tensoren<sup>a</sup> nennen.*

Woldemar Voigt, *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle*, 1898.

---

*a.* C'est moi qui souligne. Voilà, à ma connaissance, le texte qui introduit pour la première fois le mot *tenseur*. Ce fait est mentionné par W. Voigt lui-même dans sa synthèse de 1910 (Voigt, 1966) (remarquer la référence à P. Curie) :

Zu der Einführung des Tensorbegriffes<sup>1)</sup>) hat in erster Linie die Behandlung der Kristallphysik Anlaß gegeben, bei der, infolge der hier nötigen scharfen Unterscheidung verschiedener Symmetrieverhältnisse, die früher vielfach geübte Vermischung ein- und zweiseitiger gerichteter Größen und Zusammenfassung aller unter den Vektorbegriff auf

---

<sup>1)</sup> W. Voigt, Die elementaren physikalischen Eigenschaften der Kristalle, Leipzig 1898. Einzelnes hierher Gehöriges bereits bei P. Curie, Journ. de phys. (3) T. 3, p. 393, 1894.

### 12.1 Algèbre tensorielle

L'algèbre tensorielle s'appuie sur les notions d'algèbre linéaire acquises en classes préparatoires et les étend à des situations plus générales. **Pourquoi les tenseurs ?** L'intérêt des tenseurs est d'offrir une représentation intrinsèque des lois physiques, c'est-à-dire indépendante de tout système de coordonnées. Libre à l'utilisateur ensuite de choisir, après coup, un repère et d'y exprimer les composantes des grandeurs tensorielles introduites. Il pourra alors mettre en pratique l'algèbre des matrices bien maîtrisée grâce aux enseignements passés. Les grandeurs physiques sont représentées par des tenseurs d'ordre et de variance spécifiques, notions introduites dans cette annexe.

Une introduction mathématique à l'algèbre tensorielle est proposée dans le cours de l'Ecole des Mines (Legrand, 2003). Une présentation plus complète est donnée dans (Le-

grand, 1971). On reprend ici certains éléments en introduisant les notations spécifiques à ce cours.

### 12.1.1 Tenseurs sur un espace vectoriel $E$

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n = 1, 2$  ou  $3$ , sur le corps des réels (les résultats s'appliquent au corps des complexes, mais nous n'en profiterons pas dans ce cours). Les éléments de  $E$  sont appelés **vecteurs**. Ils sont soulignés :  $\underline{u} \in E$ . L'ensemble des formes linéaires sur  $E$  s'appelle **l'espace dual**  $E^*$  de  $E$ . La notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , crochets de dualité, est introduite pour désigner l'action d'une forme linéaire sur son argument :

$$\langle \underline{u}^*, \underline{v} \rangle = \underline{u}^*(\underline{v}) \in \mathbb{R}, \quad \forall \underline{u}^* \in E^*, \forall \underline{v} \in E \quad (12.1)$$

On peut en principe aller plus loin en introduisant le **bidual**  $E^{**}$  de  $E$ , i.e. l'ensemble des formes linéaires sur  $E^*$ . Le bidual s'identifie en fait à  $E$  lui-même. Si  $\underline{u} \in E$  et  $\underline{v}^* \in E^*$ , on définit l'élément  $\underline{u}^{**} \in E^{**}$  tel que

$$\langle \underline{u}^{**}, \underline{v}^* \rangle := \langle \underline{v}^*, \underline{u} \rangle \quad (12.2)$$

Il s'agit d'un isomorphisme permettant l'identification de  $E$  et de son bidual. On peut dès lors utiliser les crochets de dualité de manière symétrique :

$$\langle \underline{u}^*, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}^{**}, \underline{u}^* \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u}^* \rangle \quad (12.3)$$

Soit  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$  une base quelconque de  $E$ . La **base duale**  $(\underline{e}^{*i})_{i=1,n}$  de  $E^*$  associée est l'unique base telle que

$$\langle \underline{e}^{*i}, \underline{e}_j \rangle = \delta_j^i \quad (12.4)$$

où  $\delta_j^i$  est le symbole de Kronecker. Les éléments de  $E$  et de son dual se décomposent de manière unique dans ces bases :

$$\underline{u} = u^i \underline{e}_i, \quad \underline{v}^* = v_i^* \underline{e}^{*i} \quad (12.5)$$

où la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés est adoptée. Chaque composante s'obtient en faisant opérer le vecteur de base adapté :

$$u^i = \langle \underline{e}^{*i}, \underline{u} \rangle, \quad v_j^* = \langle \underline{v}^*, \underline{e}_j \rangle \quad (12.6)$$

#### Définition

Pour deux entiers  $p$  et  $q$ , on appelle **tenseur p-contravariant et q-covariant** toute forme multilinéaire sur  $(E^*)^p \times E^q$ . Il s'agit donc d'une application qui à  $p$  éléments de  $E^*$  et à  $q$  éléments de  $E$  attribue un réel, avec des propriétés de linéarité sur chaque argument. Le couple  $(p, q)$  s'appelle **variance** du tenseur. La somme  $p + q$  s'appelle **l'ordre du tenseur**. On distingue donc les

- **tenseurs d'ordre 0.** On convient qu'il s'agit des scalaires. L'ensemble des tenseurs d'ordre 0 est identifié à  $\mathbb{R}$ .

- **tenseurs d'ordre 1.**

- $\star (p, q) = (1, 0)$  : Il s'agit des **vecteurs**, i.e. les éléments de  $E$ . En effet, la définition indique qu'un tenseur d'ordre 1 associe un réel à tout élément de  $E^*$ . Les tenseurs 1-fois contravariants sont donc les éléments du bidual, identifiés aux vecteurs de  $E$ . L'ensemble des tenseurs 1-fois contravariants est donc l'espace  $E$  lui-même.

*En mécanique des milieux continus, les directions de l'espace, les fibres matérielles sont des tenseurs 1-fois contravariants, i.e. des vecteurs.*

- \*  $(p, q) = (0, 1)$  : Il s'agit des **covecteurs**, c'est le nom que l'on donne aussi aux éléments du dual  $E^*$ . En effet, la définition d'un tenseur 1-fois covariant indique qu'il associe à tout élément de  $E$  un réel, c'est donc un élément du dual. L'ensemble des tenseurs 1-fois covariant n'est autre que  $E^*$ , l'ensemble des covecteurs.

*En mécanique des milieux continus, l'élément de surface  $\underline{ds}$  (et donc aussi la normale  $\underline{n}$ ) est un covecteur. En effet, c'est la grandeur qui opère sur un vecteur  $\underline{v}$  pour donner le volume du cylindre engendré par l'élément de surface et le vecteur  $\underline{v}$  :*

$$\langle \underline{ds}, \underline{v} \rangle = dv$$

*Pour un espace euclidien, l'opération précédente sera remplacée par le produit scalaire  $\underline{ds} \cdot \underline{v} = dv$ .*

*En physique, les forces sont fondamentalement des covecteurs. En effet, elles opèrent sur les vecteurs vitesses pour fournir le scalaire "puissance"  $\langle \underline{f}, \underline{v} \rangle$ . Elles opèrent de même sur les vecteurs de déplacement pour fournir le scalaire "travail". La modélisation de efforts en physique consiste en la recherche de telles formes linéaires.*

- **tenseurs d'ordre 2.** Ils sont notés à l'aide d'un ~ dans ce cours.

- \*  $(p, q) = (2, 0)$  : Il s'agit des tenseurs 2-fois contravariants. Ils opèrent sur des couples de covecteurs pour donner un scalaire :

$$\tau \quad 2 - \text{fois contravariant} : E^* \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs d'ordre 2, 2-fois contravariants est noté  $E \otimes E$ .

- \*  $(p, q) = (0, 2)$  : Il s'agit des tenseurs 2-fois covariants. Ils opèrent sur des couples de vecteurs pour donner un scalaire :

$$\tau \quad 2 - \text{fois covariant} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs d'ordre 2, 2-fois covariants est noté  $E^* \otimes E^*$ .

*En mécanique des milieux continus, le tenseur des déformations infinitésimales  $\underline{\varepsilon}$  est fondamentalement un tenseur 2-fois covariant. Il opère sur le couple de vecteurs  $(\underline{M}, \underline{M})$  où  $\underline{M}$  est une direction matérielle pour donner l'allongement relatif de ce vecteur au cours de la transformation :*

$$\lambda(\underline{M}) - 1 = \underline{\varepsilon}(\underline{M}, \underline{M}) = \underline{M} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{M}$$

*d'après l'équation (2.112) introduite dans le cours.*

- \*  $(p, q) = (1, 1)$  : Les tenseurs d'ordre 2, 1-fois contravariants et 1-fois covariants opèrent sur des couples (covecteur,vecteur) pour donner un scalaire.

$$\tau \quad 1 - \text{fois contravariant}, 1 - \text{fois covariant} : E^* \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs 1-fois contravariants et 1-fois covariants est noté  $E \otimes E^*$ . On verra qu'on peut les identifier aussi à des **endomorphismes de  $E$** .

Les tenseurs d'ordre 2, 1-fois covariants et 1-fois contravariants opèrent sur des couples (vecteur,covecteur) pour donner un scalaire.

$$\tau \quad 1 - \text{fois covariant}, 1 - \text{fois contravariant} : E \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

L'ensemble des tenseurs 1-fois covariants et 1-fois contravariants est noté  $E^* \otimes E$ . On verra qu'on peut les identifier aussi à des **endomorphismes de  $E^*$** .

*En mécanique des milieux continus, selon l'approche de construction de Cauchy, le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  est fondamentalement un tenseur d'ordre 2, 1-fois covariant 1-fois contravariant, élément de  $E^* \otimes E$ . En effet, il opère sur le couple  $(\underline{v}, \underline{n})$  où la vitesse  $\underline{v}$  est un vecteur et la normale à une facette  $\underline{n}$  est un covecteur, pour donner le scalaire puissance surfacique*

$$\underline{\sigma}(\underline{v}, \underline{n}) =: \underline{v} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$

*où l'on a anticipé sur la contraction entre tenseurs d'ordres 2 et 1. Vu comme un endomorphisme sur  $E^*$ , le tenseur des contraintes associe au covecteur  $\underline{n}$  le covecteur force surfacique  $\underline{t}$ , c'est le théorème de Cauchy de la page 89.*

- **tenseurs d'ordre 3.** On se contente d'un exemple. Les tenseurs d'ordre 3 opérant sur  $E^* \times E \times E$  sont dits 1-fois contravariants et 2-fois covariants. L'ensemble de ces tenseurs est noté  $E \otimes E^* \otimes E^*$ .  
*Les propriétés piézoélectriques des cristaux sont représentées par un tenseur d'ordre 3.*
- **tenseurs d'ordre 4.** Ils jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'élasticité.  
*Ils sont notés  $\underline{\Delta}$  dans ce cours.*

Toute grandeur physique possède une variance fondamentale. Ce fait n'empêche certes pas de travailler avec d'autres de ses représentants mais connaître la variance fondamentale de la notion physique introduite, qui doit apparaître dans sa définition même, permet de mieux comprendre pourquoi certaines formules impliquant la grandeur en question revêtent des formes particulières qui semblent compliquées au premier abord. C'est le cas par exemple pour la formule de Nanson (2.41) donnant le transport d'un élément de surface (covecteur), mais aussi de la loi de comportement du fluide élastique (7.14).

### Produit tensoriel

Le produit tensoriel, noté  $\otimes$  est l'opération permettant de construire des tenseurs d'ordre 2 à partir de vecteurs et de covecteurs. Le **produit tensoriel de deux vecteurs**  $\underline{a}, \underline{b} \in E$  est le tenseur d'ordre 2, 2-fois contravariant, qui à tout couple de covecteur  $(\underline{u}^*, \underline{v}^*) \in E^* \times E^*$  associe

$$(\underline{a} \otimes \underline{b})(\underline{u}^*, \underline{v}^*) := \langle \underline{u}^*, \underline{a} \rangle \langle \underline{v}^*, \underline{b} \rangle \in \mathbb{R} \quad (12.7)$$

La définition s'étend aisément au produit d'un vecteur et d'un covecteur, ainsi qu'au produit de deux covecteurs. Par exemple,  $\underline{a} \otimes \underline{b}^*$  est le tenseur d'ordre 2, 1-fois contravariant et 1-fois covariant tel que

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}^*)(\underline{u}^*, \underline{v}) := \langle \underline{u}^*, \underline{a} \rangle \langle \underline{b}^*, \underline{v} \rangle \in \mathbb{R} \quad (12.8)$$

Ainsi,

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in E \otimes E, \quad \underline{a} \otimes \underline{b}^* \in E \otimes E^*, \quad \underline{a}^* \otimes \underline{b} \in E^* \otimes E, \quad \underline{a}^* \otimes \underline{b}^* \in E^* \otimes E^*$$

### Décomposition d'un tenseur

Soit  $\underline{A} \in E \otimes E^*$ , un tenseur d'ordre 2, 1-fois contravariant et 1-fois covariant, c'est-à-dire une application de  $E^* \times E$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\underline{u}^*$  et  $\underline{v}$  un covecteur et un vecteur de

composantes respectives  $u_i^*$  et  $v^i$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\underline{u}^*, \underline{v}) &= \mathcal{A}(u_i^* \underline{e}^{*i}, v^j \underline{e}_j) = u_i^* v^j \mathcal{A}(\underline{e}^{*i}, \underline{e}_j) \\ &= \langle \underline{u}^*, \underline{e}_i \rangle \langle \underline{e}^{*j}, \underline{v} \rangle \mathcal{A}(\underline{e}^{*i}, \underline{e}_j) \\ &= \mathcal{A}(\underline{e}^{*i}, \underline{e}_j) (\underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j})(\underline{u}^*, \underline{v})\end{aligned}\quad (12.9)$$

où l'on a utilisé (12.6) et (12.8). On en déduit la décomposition suivante du tenseur  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\underline{e}^{*i}, \underline{e}_j) \underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j} = A^i{}_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j}, \quad \text{avec } A^i{}_j = \mathcal{A}(\underline{e}^{*i}, \underline{e}_j) \quad (12.10)$$

Les  $A^i{}_j$  sont les composantes du tenseur  $\mathcal{A}$  dans la base  $(\underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j})_{i,j=1,n}$ . On montre que les  $(\underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j})_{i,j=1,n}$  constituent une base des tenseurs d'ordre 2, 1-fois contravariants 1-fois covariants, et que la décomposition (12.10) est unique. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que la connaissance des composantes  $A^i{}_j$  permet de calculer l'image par  $\mathcal{A}$  de n'importe quel couple  $(\underline{u}^*, \underline{v})$ . Cela fait  $n^2$  composantes, i.e. le nombre de tenseurs de base  $\underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j}$ . Il suffit alors de montrer que cet ensemble n'est pas lié, i.e. que les  $\underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j}$  sont linéairement indépendants. C'est acquis dès que  $(\underline{e}_i)$  est une base de  $E$ .

La notation indicelle  $A^i{}_j$  permet de reconnaître au premier coup d'œil qu'il s'agit d'un tenseur d'ordre 2 (2 indices) 1-fois contravariant (premier indice en haut), 1-fois covariant (second indice en bas). L'ordre des indices est important car un tenseur de  $E \otimes E^*$  est différent d'un tenseur de  $E^* \otimes E$  puisqu'ils n'opèrent pas sur les mêmes arguments. La décomposition doit s'écrire de manière automatique, sachant que la convention d'Einstein de sommation ne porte que sur les paires d'indices répétés de variances distinctes (l'un en haut, l'autre en bas). Les composantes  $A^i{}_j$  peuvent se ranger dans une matrice  $n \times n$  (premier indice : numéro de ligne, second indice : numéro de colonne), appelée **matrice des composantes** de  $\mathcal{A}$  dans la base des  $(\underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j})_{i,j=1,n}$ . La matrice associée à  $\mathcal{A}$  est notée  $[\mathcal{A}]$ .

Lorsque  $\mathcal{A}$  est de la forme  $\mathcal{A} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ , ses composantes sont  $A^{ij} = a^i b^j$  :

$$\begin{aligned}\underline{a} \otimes \underline{b} &= a^i b^j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \in E \otimes E \\ \underline{a} \otimes \underline{b}^* &= a^i b_j^* \underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j} \in E \otimes E^* \\ \underline{a}^* \otimes \underline{b} &= a_i^* b^j \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}_j \in E^* \otimes E \\ \underline{a}^* \otimes \underline{b}^* &= a_i^* b_j^* \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}^{*j} \in E^* \otimes E^*\end{aligned}\quad (12.11)$$

Les composantes du tenseur  $\underline{a} \otimes \underline{b}$  forment une matrice qui s'obtient par le produit du vecteur colonne  $[a^i]$  par le vecteur ligne  $[b^i]^T$  :

$$[\underline{a} \otimes \underline{b}] = [\underline{a}] [\underline{b}]^T \quad (12.12)$$

La décomposition (12.10) s'étend aux tenseurs d'ordre quelconque. On a le résultat remarquable suivant : *tout tenseur se décompose en une somme de produits tensoriels du même ordre*. Par contre, un tenseur d'ordre 2 quelconque  $\mathcal{A}$  ne s'exprime pas nécessairement comme un produit tensoriel unique de deux (co-)vecteurs. En effet, de manière intuitive, un produit du type  $\underline{a} \otimes \underline{b}$  ne met en jeu que  $2n$  composantes indépendantes, et l'on aura donc du mal en général à représenter ainsi les  $n^2$  composantes de  $\mathcal{A}$ . Plus précisément, on va voir que le produit  $\underline{a} \otimes \underline{b}$  s'interprète aussi comme une application linéaire de  $E^*$  dans  $E$ . En dimension  $n = 3$ , son rang est au plus 1 (2 valeurs propres nulles), alors que le rang des tenseurs de  $E \otimes E^*$  peut atteindre 3.

### Transposition

Soit  $\underline{A} \in E \otimes E^*$ , on appelle transposé du tenseur  $\underline{A}$  l'unique tenseur noté  $\underline{A}^T \in E^* \otimes E$  tel que

$$\underline{A}^T(\underline{u}, \underline{v}^*) = \underline{A}(\underline{v}^*, \underline{u}), \quad \forall \underline{u} \in E, \forall \underline{v}^* \in E^* \quad (12.13)$$

On vérifie que le tenseur  $\underline{A}^T$  admet comme matrice de composantes  $[A_i^T]^j$  la transposée de la matrice  $[A^i_j]$  des composantes de  $\underline{A}$  dans la base  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$  :

$$\begin{aligned} \underline{A}^T(\underline{u}, \underline{v}^*) &= \underline{A}(\underline{v}^*, \underline{u}) = A^i_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j})(\underline{v}^*, \underline{u}) \\ &= A^i_j \langle \underline{e}^{*j}, \underline{u} \rangle \langle \underline{v}^*, \underline{e}_i \rangle \\ &= A^j_i (\underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}_j)(\underline{u}, \underline{v}^*) \end{aligned}$$

d'où

$$\underline{A}^T = A_i^T{}^j \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}_j = A^j_i \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}_j, \quad A_i^T{}^j = A^j_i \quad (12.14)$$

La définition de la transposition s'étend selon la même logique à tout type de tenseur d'ordre 2.

### Contraction

L'opération de contraction d'un tenseur a pour effet d'abaisser l'ordre du tenseur de 2. Appliquée à un tenseur d'ordre 3  $\underline{\underline{\tau}} \in E^* \otimes E^* \otimes E$ , on définit la contraction  $\underline{\tau}_c$  de  $\underline{\underline{\tau}}$  par

$$\underline{\tau}_c(\underline{u}) := \underline{\underline{\tau}}(\underline{u}, \underline{e}_i, \underline{e}^{*i}) = \tau_{ki}{}^i u^k \quad (12.15)$$

où, comme d'habitude, on somme sur les indices répétés de variance différente. Autrement dit,

$$\underline{\tau}_c = \tau_{ki}{}^i \underline{e}^{*k} \quad (12.16)$$

On ne contracte que les indices de variance différente. Appliquée à un tenseur d'ordre 2, 1-fois contravariant 1-fois covariant, cela donne le scalaire

$$A_c = A^i{}_i =: \text{trace } \underline{A} \quad (12.17)$$

que l'on définit comme la trace de  $\underline{A}$ .

Le **produit contracté**, noté avec un point, d'un vecteur et d'un covecteur donne le scalaire

$$\underline{a} \cdot \underline{b}^* := \langle \underline{b}^*, \underline{a} \rangle = a^i b_i^* = \text{trace}(\underline{a} \otimes \underline{b}^*) \quad (12.18)$$

Une conséquence est que l'on peut aussi contracter un tenseur  $\underline{A}$  de  $E \otimes E^*$  avec un vecteur :

$$\underline{A} \cdot \underline{v} = A^i{}_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j}) \cdot \underline{v} := A^i{}_j \underline{e}_i \underline{e}^{*j} \cdot \underline{v} = A^i{}_j v^j \underline{e}_i \quad (12.19)$$

Cela donne donc un vecteur de  $E$ . D'autres combinaisons sont bien sûr possibles.

Le **produit doublement contracté**, noté à l'aide du double point :, de deux tenseurs d'ordre 2  $\underline{A} \in E \otimes E$  et  $\underline{B} \in E^* \otimes E^*$  fournit le scalaire

$$\underline{A} : \underline{B} = A^{ij} B_{ij} = \text{trace}([\underline{A}] [\underline{B}]^T) = \text{trace}(\underline{A} \cdot \underline{B}^T) \quad (12.20)$$

La définition précédente du produit doublement contracté n'est pas la seule possible mais c'est celle qui est adoptée dans les notations de ce cours<sup>1</sup>.

---

1. Conséquence de cette convention dans le cas de tenseurs euclidiens : le produit doublement contracté est

### Endomorphismes et tenseurs d'ordre 2

Les endomorphismes sur  $E$  sont les applications linéaires de  $E$  dans  $E$ . Il constituent l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$ . A chaque application linéaire  $t$  de  $E$  dans  $E$ , on peut associer le tenseur d'ordre 2  $\tilde{\mathbf{T}} \in E \otimes E^*$  défini par

$$\tilde{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{v}}) = \langle \underline{\mathbf{u}}^*, t(\underline{\mathbf{v}}) \rangle = \underline{\mathbf{u}}^*.t(\underline{\mathbf{v}}) \quad (12.21)$$

L'endomorphisme  $t$  est classiquement représenté par une matrice de composantes  $t_k^j$  dans la base  $(\underline{\mathbf{e}}_i)_{i=1,n}$ . Ces composantes s'identifient à celles du tenseur  $\tilde{\mathbf{T}}$  d'ordre 2 associé :

$$\tilde{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{e}}^{*i}, \underline{\mathbf{e}}_j) = \langle \underline{\mathbf{e}}^{*i}, \sum_{k=1}^n t_k^j \underline{\mathbf{e}}_k \rangle = t_i^j = T^i{}_j \quad (12.22)$$

Inversement, à tout tenseur  $\tilde{\mathbf{T}} \in E \otimes E^*$ , on peut associer l'endomorphisme sur  $E$  tel que

$$t(\underline{\mathbf{v}}) := \tilde{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{v}} = T^i{}_j v^j \underline{\mathbf{e}}_i \quad (12.23)$$

Il s'agit en fait d'un isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E)$  et  $E \otimes E^*$ . On établit de la même façon l'isomorphisme entre les endomorphismes sur  $E^*$  et  $E^* \otimes E$ , entre les applications linéaires de  $E$  dans  $E^*$ ,  $\mathcal{L}(E, E^*)$ , et  $E^* \otimes E^*$ , et enfin les applications linéaires de  $E^*$  dans  $E$ ,  $\mathcal{L}(E^*, E)$ , et  $E \otimes E^*$ .

### Changement de base

On cherche maintenant à exprimer les composantes des tenseurs dans une autre base quelconque  $(\underline{\mathbf{e}}'_i)_{i=1,n}$  de  $E$  qui se déduit de  $(\underline{\mathbf{e}}_i)_{i=1,n}$  :

$$\underline{\mathbf{e}}'_i = P_i^k \underline{\mathbf{e}}_k, \quad \underline{\mathbf{e}}_i = (P^{-1})_i^k \underline{\mathbf{e}}'_k \quad \text{avec} \quad P_i^k = \langle \underline{\mathbf{e}}^{*k}, \underline{\mathbf{e}}'_i \rangle \quad (12.24)$$

On a coutume de ranger les scalaires  $P_i^k$  au sein de la **matrice de passage**  $[P]$  en stipulant que l'indice du bas désigne le numéro de colonne, et l'indice du haut désigne le numéro de ligne<sup>2</sup>. On rappelle que cette matrice de passage permet de passer des coordonnées d'un vecteur d'une base à une autre selon

$$\underline{\mathbf{x}} = x^i \underline{\mathbf{e}}_i = x'^k \underline{\mathbf{e}}'_k = x'^k P_k^i \underline{\mathbf{e}}_i \implies x^i = P_k^i x'^k \quad (12.25)$$

En notation matricielle, la relation donnant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles s'écrit :

$$[x] = [P] [x'] \quad (12.26)$$

défini par

$$\underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{B}} = \text{trace}(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}^T) = \text{trace}(\underline{\mathbf{A}}^T \cdot \underline{\mathbf{B}}) = A_{ij} B_{ij}$$

Il y a deux raisons à ce choix. L'une est que  $\underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{A}}$  désigne simplement la somme des carrés des composantes de  $\underline{\mathbf{A}}$  et permet de construire une norme sur les endomorphismes de  $E$ . La seconde raison pratique est que l'on peut alors écrire pour une fonction  $f(\underline{\mathbf{A}})$  (en anticipant sur la dérivation des champs de tenseurs) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\mathbf{A}}} : \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial A_{ij}} \frac{\partial A_{ij}}{\partial t}$$

Dans de nombreux ouvrages, c'est la convention  $\underline{\mathbf{A}} : \underline{\mathbf{B}} = \text{trace}(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) = A^{ij} B_{ji}$  qui est adoptée. Les deux définitions coïncident bien sûr dans le cas du produit doublement contracté de tenseurs euclidiens symétriques.

2. Remarquer que les indices ne sont pas décalés ici car on n'a pas besoin dans ce paragraphe d'associer à cette famille de scalaire un tenseur, même si c'est tout à fait possible (voir à ce propos la note 3).

en appliquant les règles classiques de multiplication matrice-vecteur (Ramis et al., 1985). On peut vérifier que

$$\underline{e}'^{*j} = (P^{-1})_k^j \underline{e}^{*k} \quad (12.27)$$

est la base duale des  $(\underline{e}_i')$ . En effet,

$$\underline{e}'^{*j} \cdot \underline{e}_i' = (P^{-1})_k^j P_i^l \underline{e}^{*k} \cdot \underline{e}_l = (P^{-1})_k^j P_i^k = \delta_k^j \quad (12.28)$$

On peut inverser la relation (12.27)

$$\underline{e}^{*j} = P_k^j \underline{e}'^{*k} \quad (12.29)$$

Les coordonnées d'un covecteur dans la nouvelle base s'expriment alors en fonction de ces anciennes coordonnées par l'intermédiaire de la transposée de la matrice de passage<sup>3</sup>

$$\underline{x}^* = x'_k \underline{e}'^{*k} = x_i \underline{e}^{*i} = x_i P_k^i \underline{e}'^{*k} \implies x'_k = P_k^i x_i, \quad [x'^*] = [P]^T [x^*] \quad (12.30)$$

Soit un tenseur  $\underline{A}$  d'ordre 2, 2-fois contravariant, et soient  $A^{ij}$  et  $A'^{ij}$  ses composantes respectives dans les bases  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$  et  $(\underline{e}_i')_{i=1,n}$  :

$$\underline{A} = A^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = A^{ij} (P^{-1})_i^k (P^{-1})_j^l \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l \quad (12.31)$$

d'où les relations de changement de base

$$A'^{kl} = (P^{-1})_i^k (P^{-1})_j^l A^{ij} \quad (12.32)$$

Des formules analogues existent pour les autres variances des tenseurs d'ordre 2 :

$$\underline{A} = A_{ij} \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}^{*j} = A_{ij} P_k^i P_l^j \underline{e}'^{*k} \otimes \underline{e}'^{*l}, \quad A'_{kl} = P_k^i P_l^j A_{ij} \quad (12.33)$$

$$\underline{A} = A_i{}^j \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}_j = A_i{}^j P_k^i (P^{-1})_j^l \underline{e}'^{*k} \otimes \underline{e}'_l, \quad A'_k{}^l = P_k^i (P^{-1})_j^l A_i{}^j \quad (12.34)$$

$$\underline{A} = A^i{}_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j} = A^i{}_j (P^{-1})_i^k P_j{}^l \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'^{*l}, \quad A'^k{}_l = (P^{-1})_i^k P_l^j A^i{}_j \quad (12.35)$$

Ces relations entre composantes d'un tenseur selon différentes bases jouent un rôle fondamental. En effet, en pratique, pour mettre en évidence les lois physiques, on n'a accès qu'à des scalaires dont on peut se demander s'ils représentent les composantes d'un tenseur, i.e. d'une grandeur intrinsèque possédant des propriétés de (multi)linéarité. Pour le vérifier, il suffit de regarder comment se transforment les scalaires en question lorsqu'on

---

3. On peut associer aux formules de changement de base (12.24) un endomorphisme  $\underline{P}$  (les images des vecteurs de la base initiale par cet endomorphisme sont les vecteurs de la nouvelle base). Dès lors, les formules (12.29) indiquent que c'est l'endomorphisme transposé associé qui permet de passer d'une base duale à l'autre selon le schéma

$$\begin{array}{ccc} (\underline{e}_i) & \xrightarrow{\underline{P}} & (\underline{e}_i') \\ (\underline{e}^i) & \xleftarrow{\underline{P}^T} & (\underline{e}'^i) \end{array}$$

En effet, soient  $\underline{P}$  et  $\underline{Q}$  les endomorphismes sur  $E$  et  $E^*$  respectivement tels que

$$\underline{e}'_i = \underline{P} \cdot \underline{e}_i, \quad \underline{e}'^{*i} = \underline{Q} \cdot \underline{e}^{*i}$$

Ces bases sont duales l'une de l'autre si

$$\langle \underline{e}'^{*i}, \underline{e}'_j \rangle = \langle \underline{Q} \cdot \underline{e}^{*i}, \underline{P} \cdot \underline{e}_j \rangle = \langle \underline{P}^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{e}^{*i}, \underline{e}_j \rangle = \delta_j^i$$

L'unicité de la base duale de  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$  implique que  $\underline{P}^T \cdot \underline{Q} = \underline{1}$ , l'identité.

change de repère. Si les relations de changement de base sont conformes à (12.32) (ou à l'une des relations (12.32) à (12.35)), alors il existe derrière ces scalaires une grandeur tensorielle dont on définira le sens physique.

A ce stade, on introduit la notation  $\underline{A}^R$  due à (Truesdell and Euvrard, 1974) pour  $\underline{R} \in GO(E)$  dont la définition précise dépend de la variance considérée :

$$\underline{A}..^R = \underline{R}^T \underline{A}.. \underline{R} \quad (12.36)$$

$$\underline{A}^{..R} = \underline{R}^{-1} \underline{A}^{..} \underline{R}^{-T} \quad (12.37)$$

$$\underline{A}^{.R} = \underline{R}^{-1} \underline{A}^{.} \underline{R} \quad (12.38)$$

$$\underline{A}^{.R} = \underline{R}^T \underline{A}^{.} \underline{R}^{-T} \quad (12.39)$$

Cette définition s'étend aux exposants  $F$  pour  $F$  application linéaire inversible entre deux espaces vectoriels.

Les formules de changement de base s'étendent de manière automatique aux tenseurs d'ordre et de variance quelconques<sup>4</sup>.

### 12.1.2 Tenseurs euclidiens

L'espace physique  $E$  est euclidien. Il est muni d'un **produit scalaire**, i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive. Il s'agit donc d'un tenseur d'ordre 2 particulier noté  $\underline{G} \in E^* \otimes E^*$ , que l'on appelle aussi **tenseur métrique** :

$$\underline{G}(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{G}(\underline{v}, \underline{u}) \in \mathbb{R}, \quad \underline{G}(\underline{u}, \underline{u}) \geq 0, \quad (\underline{G}(\underline{u}, \underline{u}) = 0 \implies \underline{u} = 0) \quad (12.40)$$

On note  $g_{ij}$  les composantes du tenseur métrique dans une base  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$  :

$$\underline{G} = g_{ij} \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}^{*j}, \quad g_{ij} = \underline{G}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) \quad (12.41)$$

Le caractère bilinéaire de  $\underline{G}$  implique donc que

$$\underline{G}(\underline{u}, \underline{v}) = u^i v^j \underline{G}(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = u^i v^j g_{ij} = \underline{u} \cdot \underline{G} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v} \quad (12.42)$$

---

4. Les formules de passage (12.32) à (12.35) s'écrivent respectivement de la manière suivante en notation matricielle

$$[A'^{kl}] = [P^{-1}] [A^{ij}] [P^{-1}]^T$$

$$[A'_{kl}] = [P]^T [A_{ij}] [P]$$

$$[A'_k{}^l] = [P]^T [A_i{}^j] [P^{-1}]^T$$

$$[A'^k{}_l] = [P^{-1}] [A^i{}_j] [P]$$

Les règles classiques de multiplication matrice-vecteur s'appliquent alors sans réserve. Les indices introduits entre les crochets sont là simplement pour indiquer la variane du tenseur d'ordre 2 considéré. On insiste toutefois sur la supériorité de la notation indicelle qui évite toute mémorisation des relations précédentes. En effet, la cohérence de l'écriture avec les  $P_k^i$  permet de retrouver de manière automatique les relations de passage. En outre, la notation indicelle donne accès aux nouvelles composantes pour des tenseurs d'ordre quelconque (3, 4...) de manière systématique.

La dernière relation matricielle de cette note est exactement la formule de changement de base pour les endomorphismes sur les espaces vectoriels de dimension finie, largement utilisée dans les classes préparatoires. C'est bien légitime car les composantes  $A^i{}_j$  sont les composantes d'un tenseur appartenant à  $E \otimes E^*$ , espace des endomorphismes de  $E$ . En effet, un tenseur  $\underline{A}$  de  $E \otimes E^*$  opère sur un vecteur  $\underline{x}$  pour donner le vecteur  $\sigma^i{}_j (\underline{e}^{*j} \cdot \underline{x}) \underline{e}_i$ . La dernière formule n'est autre que  $M' = P^{-1} M P$  tirée de (Ramis et al., 1985). L'usage ne se limite pas à ce type de transformations, les trois autres étant d'emploi aussi fréquent et légitime, ce qui montre la généralisation qu'apporte la notion de tenseurs par rapport à la seule étude des endomorphismes d'espaces vectoriels.

Dans le dernier terme, le point relie deux vecteurs, c'est la notation pour le produit scalaire. Les points intervenant dans le quatrième terme sont les points de contraction.

Le produit scalaire permet d'identifier  $E$  à son dual  $E^*$  par l'intermédiaire de l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\gamma : \quad E &\longrightarrow E^* \\ \gamma(\underline{v}) = \underline{G} \cdot \underline{v} &= g_{ij} v^j \underline{e}^{*i}\end{aligned}\tag{12.43}$$

La matrice de l'application linéaire  $\gamma$  n'est autre que la matrice des  $[g_{ij}]$ . Comme  $\underline{G}$  est défini positif, la matrice  $[g_{ij}]$  est inversible et l'on note  $[g^{ij}]$  les composantes de son inverse. Il s'agit des composantes de l'application linéaire  $\gamma^{-1}$ . Cela permet de définir un produit scalaire sur  $E^*$  :

$$\underline{G}^* = g^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \in E \otimes E\tag{12.44}$$

Le tenseur métrique permet de construire de manière canonique un covecteur à partir d'un vecteur et inversement.

A  $\underline{x} = x^i \underline{e}_i$ , on associe  $\underline{x}^\flat = g_{ij} x^j \underline{e}^{*i}$ . A  $\underline{y} = y_i \underline{e}^{*i}$ , on associe  $\underline{y}^\sharp = g^{ij} x^j \underline{e}_i$ .

Ce sont les *isomorphismes musicaux* (ou ascenseurs d'indices). La procédure s'étend aux tenseurs d'ordre 2 :

A  $\underline{T} = T^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ , on associe  $\underline{T}^\flat = g_{kj} T^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*k}$  et  ${}^\flat \underline{T} = g_{ki} T^{ij} \underline{e}^{*k} \otimes \underline{e}_j$ .

A  $\underline{T} = T_{ij} \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}^{*j}$ , on associe  $\underline{T}^\sharp = g^{kj} T_{ij} \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}_k$  et  ${}^\sharp \underline{T} = g^{ki} T_{ij} \underline{e}_k \otimes \underline{e}^{*j}$ .

Les isomorphismes musicaux s'appliquent également aux tenseurs d'ordre supérieur.

### Base réciproque

On appelle base réciproque ou parfois, abusivement, base duale<sup>5</sup> de  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$  dans  $E$ , l'unique base  $(\underline{e}^i)_{i=1,n}$  de  $E$  telle que

$$\underline{e}^i \cdot \underline{e}_j = \delta_j^i\tag{12.45}$$

On peut vérifier que cette propriété implique que la base réciproque n'est autre que

$$\underline{e}^i = \underline{G}^* \cdot \underline{e}^{*i} = g^{ij} \underline{e}_j\tag{12.46}$$

En effet,

$$\begin{aligned}(\underline{G}^* \cdot \underline{e}^{*i}) \cdot \underline{e}_j &= (g^{kl} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \cdot \underline{e}^{*i}) \cdot \underline{e}_j = (g^{kl} \langle \underline{e}^{*i}, \underline{e}_l \rangle \underline{e}_k) \cdot \underline{e}_j \\ &= g^{ki} \underline{e}_k \cdot \underline{e}_j = g^{ki} g_{kj} = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i\end{aligned}$$

On peut maintenant exprimer les composantes d'un vecteur  $\underline{v} \in E$  dans les deux bases introduites

$$\underline{v} = v^i \underline{e}_i = v_i \underline{e}^i\tag{12.47}$$

Les composantes de  $\underline{v}$  dans la base  $(\underline{e}^i)_{i=1,n}$ , notés  $v_i$ , se calculent de la manière suivante :

$$v_k = \underline{v} \cdot \underline{e}_k = v^i \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = v^i g_{ik} = g_{ki} v^i\tag{12.48}$$

Il faut remarquer que les  $v_i$  sont aussi les composantes de  $\gamma(\underline{v}) = \underline{G} \cdot \underline{v}$  dans la base  $(\underline{e}^{*i})_{i=1,n}$  de  $E^*$ . Par l'identification de  $E$  et de son dual, on oubliera dans la suite  $\gamma(\underline{v})$  mais on en gardera un souvenir à travers les composantes  $v_i$  de  $\underline{v}$  dans la base réciproque. On a vu en effet au travers de la relation (12.46) que la base réciproque n'est autre que

---

5. On réserve l'expression base duale à une base de  $E^*$ .

l'image inverse de la base duale  $(\underline{e}^{*i})_{i=1,n}$  de  $E^*$  par  $\gamma$  :

$$\gamma(\underline{e}^i) = \underline{G} \cdot \underline{e}^i = \underline{e}^{*i} \quad (12.49)$$

Pour caractériser les **vecteurs** de  $E$ , on dispose maintenant deux représentations : ses **composantes contravariantes**  $v^i$  dans la base  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$ , et ses **composantes covariantes**  $v_i$  dans la base réciproque  $(\underline{e}^i)_{i=1,n}$ .

La figure 12.1 illustre dans le cas bidimensionnel les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur  $\underline{v}$ . La base  $(\underline{e}_i)$  est normée mais non orthogonale :  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  font un angle de  $\pi/2 + \theta$ . Les vecteurs de la base réciproque ont alors une norme égale à  $1/\cos \theta$  et font un angle de  $\pi/2 - \theta$ . Les projections sur les axes  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  parallèlement à ces vecteurs fournissent les composantes  $v^i$ , tandis que les projections orthogonales sur ces axes donnent les composantes  $v_i = \underline{v} \cdot \underline{e}_i$ .

Les bases réciproques jouent en particulier un rôle essentiel en physique des solides (diffraction des rayons X, cristallographie, les vecteurs de la base initiale sont alors dictées par les directions atomiques qui n'ont pas toujours le bon goût de former un trièdre ortho-normé).

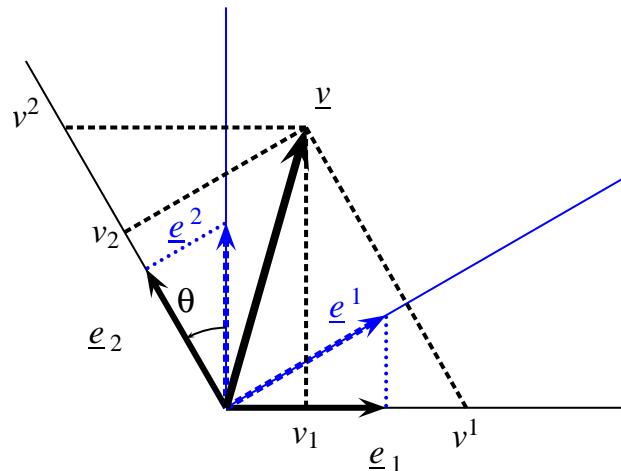


Figure 12.1 : Base initiale normée et sa base réciproque dans le cas bidimensionnel. Les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur  $\underline{v}$  apparaissent comme des projections sur les axes initiaux.

#### Représentation des tenseurs euclidiens

Les tenseurs euclidiens sont identifiés aux tenseurs de  $E$ ,  $E \otimes E$ ,  $E \otimes \dots \otimes E$ . En vertu de l'identification de  $E$  et de son dual, on fait l'économie des tenseurs faisant intervenir  $E^*$ . On verra que ce n'est pas une restriction car les éléments de  $E$ ,  $E \otimes E$ ,  $E \otimes \dots \otimes E$ , permettent de construire tous les tenseurs possibles sur  $E$ . Les tenseurs euclidiens peuvent être représentés par leurs composantes selon la base  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$  ou sa base réciproque  $(\underline{e}^i)_{i=1,n}$ .

Les tenseurs euclidiens d'ordre 1 s'écrivent

$$\underline{v} = v^i \underline{e}_i = v_i \underline{e}^i, \quad v_i = g_{ij} v^j \quad (12.50)$$

Les tenseurs euclidiens d'ordre 2 s'écrivent

$$\underline{T} = T^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = T_i^j \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j = T^i_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = T_{ij} \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \quad (12.51)$$

avec les formules de changement de base

$$T_i^j = g_{ik} T^{kj}, \quad T^i_j = g_{kj} T^{ik}, \quad T_{ij} = g_{ik} g_{jl} T^{kl} \quad (12.52)$$

Les  $T^{ij}, T_{ij}, T_i^j, T^i_j$  sont les **composantes du même tenseur  $\underline{T}$**  dans des bases différentes. Mais on peut associer à chaque jeu de composantes un nouveau tenseur en réintroduisant l'espace dual  $E^*$  :

$$v^i \longrightarrow \underline{v} = v^i \underline{e}_i \in E \quad (12.53)$$

$$v_i \longrightarrow \underline{v}^* = v_i \underline{e}^{*i} \in E^* \quad (12.54)$$

$$T^{ij} \longrightarrow \underline{T} = T^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \in E \otimes E \quad (12.55)$$

$$T^i_j \longrightarrow \underline{T}^{(1)} = T^i_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}^{*j} \in E \otimes E^* \quad (12.56)$$

$$T_i^j \longrightarrow \underline{T}^{(2)} = T_i^j \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}_j \in E^* \otimes E \quad (12.57)$$

$$T_{ij} \longrightarrow \underline{T}^* = T_{ij} \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}^{*j} \in E^* \otimes E^* \quad (12.58)$$

Un tenseur euclidien d'ordre 2 possède donc 4 représentants dans  $E \otimes E, E \otimes E^*, E^* \otimes E, E^* \otimes E^*$ . Dans la pratique, il suffit de travailler avec le premier représentant, quitte à utiliser des jeux de composantes différents selon le problème posé.

Le tenseur métrique possède lui aussi 4 types de composantes. Les composantes  $g^{ij}$  et leur inverse  $g_{ij}$  ont déjà été rencontrées. Il reste

$$g^i_j = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad g_i^j = g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j \quad (12.59)$$

Les opérations de produit tensoriel et de contraction s'appliquent aux tenseurs euclidiens et sont couramment utilisées en physique et en mécanique. Ces opérations peuvent être effectuées à l'aide des composantes. Les règles de calcul sont rassemblées dans la table 12.1.

On note  $\underline{1}$  le tenseur euclidien unité, i.e. l'application linéaire identité sur  $E$  :

$$\underline{1} := \delta_j^i \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j = \delta_i^j \underline{e}^i \otimes \underline{e}_j = g_{ij} \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j = g^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (12.60)$$

*En mécanique des milieux continus, le tenseur des contraintes de traction selon une direction  $\underline{d}$  est souvent représenté par le produit tensoriel*

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}$$

*qui est d'ordre 2, 2-fois contravariant. On a traité jusqu'ici le tenseur des contraintes comme un tenseur d'ordre 2, 1-fois covariant, 1-fois contravariant. Pour faire le lien avec la représentation précédente de la traction, il faut remplacer  $\underline{d} \otimes \underline{d}$  par  $\gamma(\underline{d}) \otimes \underline{d}$ . Mais l'identification de  $E$  et de son dual rendent cette discussion caduque et l'on traitera donc le tenseur des contraintes comme un tenseur euclidien.*

### Cas des bases orthonormées

Les formules de changement de base pour les tenseurs euclidiens sont les mêmes que celles décrites à la page 307 à condition de supprimer simplement les étoiles \*. Lorsque

la base  $(\underline{e}_i)_{i=1,n}$  est orthonormée,

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_i^j \quad (12.61)$$

Les bases initiale et réciproque sont alors identiques :

$$\underline{e}^i = \underline{e}_i, \quad (12.62)$$

Les composantes  $g_{ij}$  du produit scalaire dans une base orthonormée sont celles de l'identité :

$$g_{ij} = \delta_i^j = g^{ij} \quad (12.63)$$

Une conséquence fondamentale est que les 4 types de composantes d'un tenseur euclidien d'ordre 2 coïncident :

$$T^{ij} = T^i{}_j = T_i{}^j = T_{ij} \quad (12.64)$$

**En base orthonormée, on ne se préoccupe plus de la position des indices. On les met toujours en bas et on somme sur tous les indices répétés.** Les règles de calcul tensoriel se simplifient considérablement. Elles sont indiquées sur le tableau 12.1. Dans ce tableau, la notation  $[xx]$  signifie “la matrice des composantes du tenseur  $xx$ ”. Ainsi,  $[\underline{a}]$  est le vecteur colonne des composantes du vecteur  $\underline{a}$  et  $[\underline{a}]^T$  est donc un vecteur ligne.  $[\underline{T}]$  est la matrice  $3 \times 3$  des composantes du tenseur euclidien  $\underline{T}$ .

#### Tenseurs euclidiens d'ordre 2 symétriques

Un tenseur euclidien  $\underline{D}$  d'ordre 2 est dit symétrique si

$$\underline{D}^T = \underline{\underline{D}} \quad (12.65)$$

Il peut donc être vu comme un endomorphisme auto-adjoint ou comme une forme bilinéaire symétrique. L'algèbre des tenseurs d'ordre 2 symétriques sur  $E$  de dimension 3 est de dimension 6.

#### 12.1.3 Algèbre extérieure et pseudo-tenseurs

##### Pseudo-tenseur d'orientation

On introduit le symbole des permutations  $\epsilon_{ijk}$  qui vaut 0 dès que deux au moins des indices sont égaux. Pour des indices  $(i, j, k)$  distincts,  $\epsilon_{ijk}$  est le signe de la permutation  $(i, j, k)$  du triplet  $(1, 2, 3)$ . Il vaut 1 lorsque  $(i, j, k)$  est une permutation paire de  $(1, 2, 3)$ , et  $-1$  pour une permutation impaire :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou, de manière plus concise,

$$\epsilon_{ijk} = (i - j)(j - k)(k - i) \quad (12.66)$$

On a les identités remarquables suivantes (Germain, 1973a; Germain and Muller, 1995)

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \quad (12.67)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km} \quad (12.68)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad (12.69)$$

**Opérations sur les tenseurs dans une base quelconque**  
(sommation sur les indices répétés de variances distinctes)

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u^i v_i = u_i v^i$$

$$\underline{T} \cdot \underline{v} = T^{ij} v_j \underline{e}_i = T_{ij} v^j \underline{e}^i = T^i{}_j v^j \underline{e}_i = T_i{}^j v_j \underline{e}^i$$

$$\underline{v} \cdot \underline{T} = v_i T^{ij} \underline{e}_j = v^i T_{ij} \underline{e}^j = v_i T^i{}_j \underline{e}^j = v^i T_i{}^j \underline{e}_j$$

$$\underline{u} \cdot \underline{T} \cdot \underline{v} = u^i T_{ij} v^j = u_i T^i{}_j v^j = u^i T_i{}^j v_j = u_i T^{ij} v_j$$

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A^{ij} B_{ij} = A^i{}_j B_i{}^j = A_i{}^j B^i{}_j = A_{ij} B^{ij}$$

**Opérations sur les tenseurs dans une base orthonormée**  
(sommation sur les indices répétés)

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_i v_i = [\underline{u}]^T [\underline{v}]$$

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i b_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad [\underline{a} \otimes \underline{b}] = [\underline{a}] [\underline{b}]^T$$

$$(\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v} = \underline{b} \cdot \underline{v} \underline{a}, \quad \underline{u} \cdot (\underline{a} \otimes \underline{b}) = \underline{u} \cdot \underline{a} \underline{b}$$

$$\underline{T} \cdot \underline{v} = T_{ij} v_j \underline{e}_i, \quad [\underline{T} \cdot \underline{v}] = [\underline{T}] [\underline{v}]$$

$$\underline{v} \cdot \underline{T} = v_i T_{ij} \underline{e}_j, \quad [\underline{v} \cdot \underline{T}] = [\underline{T}]^T [\underline{v}]$$

$$\underline{u} \cdot \underline{T} \cdot \underline{v} = u_i T_{ij} v_j = [\underline{u}]^T [\underline{T}] [\underline{v}]$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = A_{ik} B_{kj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \quad [\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}] = [\underline{\underline{A}}] [\underline{\underline{B}}]$$

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = A_{ij} B_{ij} = \text{trace}([\underline{\underline{A}}] [\underline{\underline{B}}]^T)$$

Tableau 12.1: Récapitulatif : opérations sur les tenseurs euclidiens en base quelconque ou orthonormée. Dans le cas orthonormé, on indique aussi les opérations matricielles correspondantes.

On introduit alors, ici dans le contexte euclidien, le pseudo-tenseur d'orientation

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\Omega}}} := \epsilon_{ijk} \underline{e}^i \otimes \underline{e}^j \otimes \underline{e}^k =: \underline{\underline{\epsilon}} \quad (12.70)$$

Il est également appelé (pseudo-)tenseur de Levi-Civita. On adoptera parfois la notation alternative indiquée au dernier terme de droite. Ses composantes se transforment de la

manière suivante par changement de base :

$$\underline{\underline{\underline{\mathcal{O}}}} = \epsilon_{ijk} P_p^i P_q^j P_r^k \underline{e}'^p \otimes \underline{e}'^q \otimes \underline{e}'^r = (\det P^T) \epsilon_{pqr} \underline{e}'^p \otimes \underline{e}'^q \otimes \underline{e}'^r \quad (12.71)$$

On voit que le tenseur d'orientation a les mêmes composantes dans toutes les bases orthonormées de même orientation que la base des  $(\underline{e}_i)$ . Dans ce sens, c'est le tenseur d'orientation de ces bases. Plus généralement, on appelle *pseudo-tenseur*, ou *tenseur axial*, tout objet mathématique ayant la même représentation qu'un tenseur dans toutes les bases orthonormées d'une même orientation. Le tenseur d'orientation précédent est un exemple de pseudo-tenseur.

Le tenseur d'orientation possède également des composantes contravariantes de la forme

$$\underline{\underline{\underline{\mathcal{O}}}} = (\det \underline{g}) \epsilon_{pqr} \underline{e}_p \otimes \underline{e}_q \otimes \underline{e}_r \quad (12.72)$$

faisant apparaître le déterminant du tenseur métrique. Dans le cas de bases orthonormées, les composantes contravariantes du tenseur d'orientation sont

$$\epsilon^{ijk} := \epsilon_{ijk}$$

Le tenseur d'orientation est également appelée *forme volume* dans la mesure où, à tout trièdre de vecteurs, il associe le volume algébrique du parallélépipède formé par ces vecteurs, au volume de la base  $\mathcal{B}$  près :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\mathcal{O}}}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)} &= \epsilon_{ijk} (\underline{e}^i \cdot \underline{v}_1) (\underline{e}^1 \cdot \underline{v}_2) (\underline{e}^k \cdot \underline{v}_3) \\ &= \epsilon_{ijk} v_1^i v_2^j v_3^k = \det[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]_{\mathcal{B}} \\ &= \text{Vol}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) / \text{Vol } \mathcal{B} \end{aligned} \quad (12.73)$$

### Tenseurs d'ordre 2 antisymétriques

Un tenseur euclidien  $\underline{W}$  d'ordre 2 est dit antisymétrique si

$$\underline{W}^T = -\underline{W}, \quad W_{ji} = -W_{ij} \quad (12.74)$$

Pour simplifier, on se place dans une base orthonormée pour les expressions en composantes. Pour tout tenseur  $\underline{\underline{T}}$  d'ordre 2, il existe une décomposition unique en une partie symétrique  $\underline{\underline{T}}^s$  et une partie antisymétrique  $\underline{\underline{T}}^a$  telles que

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^s + \underline{\underline{T}}^a \quad (12.75)$$

$$\underline{\underline{T}}^s := \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \quad (12.76)$$

$$\underline{\underline{T}}^a := \frac{1}{2} (\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \quad (12.77)$$

On vérifiera que par construction

$$\underline{\underline{T}}^{sT} = \underline{\underline{T}}^s, \quad \underline{\underline{T}}^{aT} = -\underline{\underline{T}}^a \quad (12.78)$$

D'autre part, on peut dire que  $\underline{\underline{T}}^s$  et  $\underline{\underline{T}}^a$  sont "orthogonaux" dans le sens suivant :

$$\underline{\underline{T}}^s : \underline{\underline{T}}^a = 0 \quad (12.79)$$

On déduit de la décomposition (12.75) que la dimension de l'espace des tenseurs d'ordre 2 antisymétriques est 3.

Un tenseur d'ordre 2 antisymétrique  $\underline{W}$  peut être représenté de manière équivalente par le (pseudo)-vecteur  $\underline{\overset{\times}{W}}$  défini par

$$\underline{\overset{\times}{W}} := -\frac{1}{2} \underline{\epsilon} : \underline{W} \quad (12.80)$$

On peut aussi exprimer le tenseur antisymétrique en fonction du vecteur axial  $\underline{\overset{\times}{W}}$  associé :

$$\underline{W} := -\underline{\epsilon} \cdot \underline{\overset{\times}{W}} \quad (12.81)$$

ce qui s'écrit sous forme matricelle

$$[\underline{W}] = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & -W_{31} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ W_{31} & -W_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\overset{\times}{W}_3 & \overset{\times}{W}_2 \\ \overset{\times}{W}_3 & 0 & -\overset{\times}{W}_1 \\ -\overset{\times}{W}_2 & \overset{\times}{W}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.82)$$

### Produit vectoriel

Soit  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  deux vecteurs de  $E$ . On appelle produit vectoriel de  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$ , noté  $\underline{u} \wedge \underline{v}$  le (pseudo)-vecteur défini par :

$$\underline{u} \wedge \underline{v} := \underline{\epsilon} : (\underline{u} \otimes \underline{v}) = \epsilon_{ijk} u_j v_k \underline{e}_i \quad (12.83)$$

Le produit vectoriel est donc relié au vecteur associé à la partie antisymétrique de  $\underline{u} \otimes \underline{v}$  par

$$\text{axial}(\underline{u} \otimes \underline{v}) = -\frac{1}{2} \underline{u} \wedge \underline{v} \quad (12.84)$$

On rappelle que

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}, \quad (\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot (\underline{a} \wedge \underline{b}) = (\underline{a} \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{b}) - (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 \quad (12.85)$$

Les définitions (12.82) ont en fait été choisies pour que l'on puisse écrire la relation suivante pour tout vecteur  $\underline{x} \in E$  et tout tenseur  $\underline{W}$  antisymétrique

$$\underline{W} \cdot \underline{x} = \underline{\overset{\times}{W}} \wedge \underline{x}$$

### Produit mixte et déterminant

Le produit mixte de trois vecteurs  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$  est défini par

$$[\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}] := \underline{x} \cdot (\underline{y} \wedge \underline{z}) = \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k \quad (12.86)$$

Il permet d'exprimer la trace et le déterminant du tenseur d'ordre 2  $\underline{A}$

$$\text{trace } \underline{A} := \frac{[\underline{A} \cdot \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3] + [\underline{e}_1, \underline{A} \cdot \underline{e}_2, \underline{e}_3] + [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{A} \cdot \underline{e}_3]}{[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]} \quad (12.87)$$

$$\det \underline{\mathcal{A}} := \frac{[\underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{e}_1, \underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{e}_2, \underline{\mathcal{A}} \cdot \underline{e}_3]}{[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]} \quad (12.88)$$

En composantes, cela donne

$$\text{trace } \underline{\mathcal{A}} = A_{11} + A_{22} + A_{33}, \quad \det \underline{\mathcal{A}} = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}$$

Plus généralement, on définit :

- Déterminant d'un trièdre ordonné de vecteurs de  $E$

$$\text{Vol}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = \det[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3]_{\mathcal{B}} \text{Vol } \mathcal{B}$$

- Déterminant d'une matrice :

$$\det[M] = \epsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} M_{ip} M_{jq} M_{kr}$$

- Déterminant d'un endomorphisme  $\underline{\mathcal{A}}$  sur  $E$

$$\text{Vol}(\underline{\mathcal{A}} \underline{v}_1, \underline{\mathcal{A}} \underline{v}_2, \underline{\mathcal{A}} \underline{v}_3) = (\det \underline{\mathcal{A}}) \text{Vol}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$$

Le symbole de Levi-Civita permet de calculer le déterminant d'un endomorphisme :

$$\det \underline{\mathcal{A}} = \epsilon^{ijk} A^1{}_i A^2{}_j A^3{}_k = \epsilon_{ijk} A^i{}_1 A^j{}_2 A^k{}_3$$

#### 12.1.4 Transformations orthogonales et rotations

Un tenseur d'ordre 2  $\underline{\mathcal{Q}}$  est dite orthogonale si

$$\underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{\mathcal{Q}}^T = \underline{\mathcal{Q}}^T \cdot \underline{\mathcal{Q}} = \underline{1} \quad (12.89)$$

Si en outre  $\det \underline{\mathcal{Q}} = 1$ , il s'agit d'une rotation. Il existe une multitude de représentations possibles pour les rotations. On introduit successivement les angles d'Euler et le vecteur rotation.

#### Rotations et produit vectoriel

Soient  $\underline{\mathcal{Q}}$  une rotation et  $\underline{a}, \underline{b}$  deux vecteurs. Alors,

$$\underline{\mathcal{Q}} \cdot (\underline{a} \wedge \underline{b}) = (\underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{a}) \wedge (\underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{b}) \quad (12.90)$$

En effet,  $\forall \underline{v}$ ,

$$\begin{aligned} [\underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{a}, \underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{b}, \underline{v}] &= ((\underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{a}) \wedge (\underline{\mathcal{Q}} \cdot \underline{b})) \cdot \underline{v} \\ &= (\det \underline{\mathcal{Q}})[\underline{a}, \underline{b}, \underline{\mathcal{Q}}^T \cdot \underline{v}] = (\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot (\underline{\mathcal{Q}}^T \cdot \underline{v}) = (\underline{\mathcal{Q}} \cdot (\underline{a} \wedge \underline{b})) \underline{v} \end{aligned} \quad (12.91) \quad (12.92)$$

En rapprochant (12.91) et (12.92) et en vertu de la linéarité des opérateurs employés, on obtient le résultat annoncé<sup>6</sup>.

---

6. Ce résultatat s'étend à une transformation linéaire inversible  $\underline{\mathcal{F}}$  sous la forme :  $(\underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{a}) \wedge (\underline{\mathcal{F}} \cdot \underline{b}) = (\det \underline{\mathcal{F}}) \underline{\mathcal{F}}^{-T} \cdot (\underline{a} \wedge \underline{b})$

### Angles d'Euler-Bunge

Soit  $\mathcal{B} = (\underline{e}_i)_{\{i=1,3\}}$  une base orthonormée directe (BOND) de l'espace euclidien orienté de dimension 3. On désigne dans la suite de manière imagée par le mot **cristal** un trièdre direct de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux. L'orientation d'un cristal par rapport à un premier repérage est donnée par les trois angles

$$\phi_1, \Phi, \phi_2$$

d'après (Bunge, 1982).

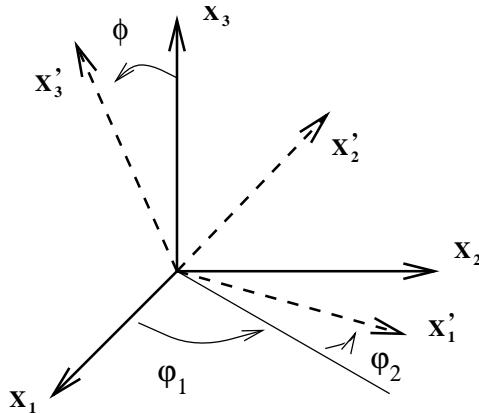


Figure 12.2 : Définitions des angles d'Euler.

Repérage initial : directions  $X_1 X_2 X_3$  base  $\mathcal{B} = (\underline{e}_i)$   
 Cristal : directions  $X'_1 X'_2 X'_3$  base  $\mathcal{B}' = (\underline{e}'_i)$   
 On considère la rotation  $\tilde{\mathbf{R}}$  telle que

$$\underline{e}'_i = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \underline{e}_i$$

et la matrice de passage  $P$  telle que

$$[X']_{\mathcal{B}'} = [P][X]_{\mathcal{B}}$$

On a donc

$$[P] = [\tilde{\mathbf{R}}^T]_{\mathcal{B}}$$

Pour passer des axes du premier repère à ceux du cristal, on peut considérer les opérations successives suivantes :

- rotation d'angle  $\phi_1$  autour de l'axe  $X_3$  (**précession**)

$$X_1 X_2 X_3 \longrightarrow \hat{X}_1 \hat{X}_2 X_3$$

$$\mathcal{B} \longrightarrow \hat{\mathcal{B}}$$

$$[P_1], \tilde{\mathbf{R}}_1$$

- rotation d'angle  $\Phi$  autour de l'axe  $\hat{X}_1$  (**nutation**)

$$\hat{X}_1 \hat{X}_2 X_3 \longrightarrow \hat{X}_1 \check{X}_2 X'_3$$

$$\hat{\mathcal{B}} \longrightarrow \check{\mathcal{B}}$$

$$P_2, \underline{\mathbf{R}}_2$$

- rotation d'angle  $\phi_2$  autour de l'axe  $X'_3$  (**rotation propre**)

$$\hat{X}_1 \check{X}_2 X'_3 \longrightarrow X'_1 X'_2 X'_3$$

$$\check{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{B}'$$

$$P_3, \underline{\mathbf{R}}_3$$

On a :

$$\underline{\mathbf{e}}'_i = \underline{\mathbf{R}}_3 \cdot \check{\underline{\mathbf{e}}}_i = \underline{\mathbf{R}}_3 \cdot \underline{\mathbf{R}}_2 \cdot \underline{\mathbf{e}}_i = \underline{\mathbf{R}}_3 \cdot \underline{\mathbf{R}}_2 \cdot \underline{\mathbf{R}}_1 \cdot \underline{\mathbf{e}}_i$$

$$[X'] = [P_3] [\check{X}] = [P_3] [P_2] [\hat{X}] = [P_3] [P_2] [P_1] [X]$$

d'où

$$\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{R}}_3 \cdot \underline{\mathbf{R}}_2 \cdot \underline{\mathbf{R}}_1, \quad [P] = [P_3] [P_2] [P_1]$$

Remarquer que  $P = [R_1^T]_{\mathcal{B}} [R_2^T]_{\mathcal{B}} [R_3^T]_{\mathcal{B}}$

$$[R_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P_1^T]$$

$$[R_2]_{\check{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} = [P_2^T]$$

$$[R_3]_{\check{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [P_3^T]$$

d'où

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \Phi & \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \Phi & \sin \phi_2 \sin \Phi \\ -\cos \phi_1 \sin \phi_2 - \sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \Phi & -\sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \Phi & \cos \phi_2 \sin \Phi \\ \sin \phi_1 \sin \Phi & -\cos \phi_1 \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

Pour obtenir ce résultatat en passant par les tenseurs de rotation, il faut exprimer les composantes de  $\underline{\mathbf{R}}$  dans  $\mathcal{B}$  en faisant attention d'utiliser les composantes des  $\underline{\mathbf{R}}_i$  dans la même base :

$$[R_2]_{\mathcal{B}} = [R_1]_{\mathcal{B}} [R_2]_{\check{\mathcal{B}}} [R_1]^T_{\mathcal{B}}$$

$$[R_3]_{\mathcal{B}} = ([R_2]_{\mathcal{B}} [R_1]_{\mathcal{B}}) [R_3]_{\check{\mathcal{B}}} ([R_1]_{\mathcal{B}} [R_2]^T_{\mathcal{B}})$$

On trouve alors que

$$[R_3]_{\mathcal{B}} [R_2]_{\mathcal{B}} [R_1]_{\mathcal{B}} = [R_1]_{\mathcal{B}} [R_2]_{\check{\mathcal{B}}} [R_3]_{\check{\mathcal{B}}} = [P^T]$$

i.e.,

$$[R]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \Phi & -\cos \phi_1 \sin \phi_2 - \sin \phi_1 \cos \phi_2 \cos \Phi & \sin \phi_1 \sin \Phi \\ \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2 \cos \Phi & -\sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos \Phi & -\cos \phi_1 \sin \Phi \\ \sin \phi_2 \sin \Phi & \cos \phi_2 \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (12.93)$$

### Vecteur rotation

La rotation  $\tilde{\mathbf{R}}$  peut être représentée par le vecteur rotation

$$\underline{\Phi} = \theta \underline{n}$$

où  $\underline{n}$  est l'axe de la rotation (unitaire) et  $\theta$  l'angle de la rotation (en radian) et on a

$$\tilde{\mathbf{R}} = \cos \theta \mathbf{1} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \underline{\Phi} \otimes \underline{\Phi} - \frac{\sin \theta}{\theta} \underline{\epsilon} \cdot \underline{\Phi}$$

On peut montrer que

$$\tilde{\mathbf{R}} = \exp(-\underline{\epsilon} \cdot \underline{\Phi})$$

(représentation de Lie), ce qui donne

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{1} - \underline{\epsilon} \cdot \underline{\Phi}$$

lorsque l'angle de rotation est faible. On remarquera que l'axe de la rotation est donné par la partie antisymétrique de  $\tilde{\mathbf{R}}$  :

$$\overset{\times}{\tilde{\mathbf{R}}} = -\frac{1}{2} \underline{\epsilon} : \tilde{\mathbf{R}} = -\frac{1}{2} \epsilon_{klm} R_{lm} \underline{e}_k = \sin \theta \underline{n}$$

où l'on a défini le vecteur  $\overset{\times}{\tilde{\mathbf{R}}}$  associé à la partie antisymétrique  $\tilde{\mathbf{R}}^a$  du tenseur  $\tilde{\mathbf{R}}$ . On trouvera également l'axe en cherchant le vecteur propre pour la valeur 1. L'angle quant à lui s'obtient par la trace

$$\text{trace } \tilde{\mathbf{R}} = 2 \cos \theta + 1$$

### Vitesse de rotation

Pour exprimer la vitesse de rotation définie par :

$$\tilde{\mathbf{W}} = \dot{\tilde{\mathbf{R}}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T$$

on préfèrera utiliser le vecteur rotation plutôt que les angles d'Euler qui peuvent conduire à certaines indéterminations. On a :

$$\dot{\underline{\Phi}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \cdot \overset{\times}{\tilde{\mathbf{W}}}$$

où

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{1} + \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \underline{\Phi} \otimes \underline{\Phi} - \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \right)^2 \underline{\epsilon} \cdot \underline{\Phi}$$

La matrice associée est

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_1^2 & \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_1 \Phi_2 - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \Phi_3 & \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_1 \Phi_3 + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \Phi_2 \\ \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_1 \Phi_2 + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \Phi_3 & \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_2^2 & \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_2 \Phi_3 - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \Phi_1 \\ \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_1 \Phi_3 - \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \Phi_2 & \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_2 \Phi_3 + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \Phi_1 & \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\theta}}{\theta^2} \Phi_3^2 \end{bmatrix}$$

## 12.2 Applications linéaires entre deux espaces vectoriels

On remarque que l'algèbre tensorielle considère des applications multilinéaires opérant sur les éléments d'un espace vectoriel et de son dual. En mécanique des milieux continus, nous sommes amenés à manipuler également des applications linéaires opérant sur deux espaces vectoriels distincts<sup>7</sup>. Nous suivons les notations de (Stumpf and Hoppe, 1997), article de revue traitant des applications de l'algèbre linéaire à la mécanique des milieux continus. Ces notations sont en accord avec (Marsden and Hughes, 1994) et peuvent différer dans certains ouvrages mathématiques. La présentation est volontairement limitée aux stricts besoins de la mécanique des milieux continus et les notations choisies pour les différents ensembles et grandeurs y font délibérément référence.

### 12.2.1 Déterminant (intrinsèque) d'une application linéaire

Soit une application linéaire  $\tilde{\mathbf{F}}$  de  $E_0$  sur  $E$  où  $E_0, E$  sont espaces vectoriels orientés sur  $\mathbb{R}$ , avec des bases respectives  $\mathcal{B}_0 = (\underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{E}}_2, \underline{\mathbf{E}}_3)$  et  $\mathcal{B} = (\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3)$ . On définit alors successivement :

- Déterminant de la matrice de  $\tilde{\mathbf{F}}$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}$

$$\det[\tilde{\mathbf{F}}]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} = \det[\tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_2, \tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_3]_{\mathcal{B}}$$

- Déterminant de l'application linéaire  $\tilde{\mathbf{F}}$

$$\text{Vol}(\tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{V}}_1, \tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{V}}_2, \tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{V}}_3) = (\det \tilde{\mathbf{F}}) \text{ Vol}(\underline{\mathbf{V}}_1, \underline{\mathbf{V}}_2, \underline{\mathbf{V}}_3)$$

$$\text{Vol}(\tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_1, \tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_2, \tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_3) = (\det \tilde{\mathbf{F}}) \text{ Vol}(\mathcal{B}_0)$$

$$\text{Vol}(\underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_2, \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_3) = \det[\underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_2, \underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{E}}_3]_{\mathcal{B}} \text{ Vol}(\mathcal{B})$$

d'où

$$\det \tilde{\mathbf{F}} = \det[\tilde{\mathbf{F}}]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} \frac{\text{Vol}(\mathcal{B})}{\text{Vol}(\mathcal{B}_0)}$$

### 12.2.2 Opérateur adjoint d'une application linéaire sur deux espaces vectoriels

On considère deux espaces vectoriels  $E_0$  et  $E_t$  de même dimension finie et leurs espaces duals  $E_0^*$ ,  $E_t^*$ .

On appelle  $(\underline{\mathbf{E}}_I)$  et  $(\underline{\mathbf{e}}_i)$  des bases respectives de  $E_0$  et  $E_t$ . Les bases duals associées sont respectivement  $(\underline{\mathbf{E}}^{*I})$  et  $(\underline{\mathbf{e}}^{*i})$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{F}} : E_0 \rightarrow E_t$ , une application linéaire de  $E_0$  sur  $E_t$ .

On appelle (opérateur) adjoint de  $\tilde{\mathbf{F}}$  l'unique application linéaire  $\tilde{\mathbf{F}}^* : E_t^* \rightarrow E_0^*$ , telle que

$$< \tilde{\mathbf{F}}^* \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{u}}_0 > = < \underline{\mathbf{u}}^*, \tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{u}}_0 > \quad \forall (\underline{\mathbf{u}}_0, \underline{\mathbf{u}}^*) \in E_0 \times E_t^* \quad (12.94)$$

où  $<, >$  désigne les crochets de dualité respectifs des espaces en jeu. Les composantes<sup>8</sup> de  $\tilde{\mathbf{F}}$  par rapport aux bases adaptées sont :

$$\tilde{\mathbf{F}} = F_J^i \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*J} \quad (12.95)$$

7. Il n'est pas nécessaire de généraliser la notion de tenseur sur des produits cartésiens d'espace distincts et leur duals associés. En effet, l'utilisation de ces concepts s'effectue dans le contexte euclidien permettant l'identification de  $E$  et de son dual  $E^*$ , alors qu'il n'y aura pas d'identification canonique possible entre les deux espaces vectoriels  $E_0$  et  $E_t$ . Ceci limite sérieusement la portée d'une théorie des tenseurs sur ces espaces. C'est pourquoi la discussion se réduit aux applications linéaires dans ce paragraphe. La notion de produit tensoriel d'espaces vectoriels distincts est par contre d'un usage fréquent (Legrand, 1979).

8. Remarquer que la notation  $F_J^i$  est utilisée à la place de  $F^i{}_J$  légitime. C'est que nous utilisons délibérément la notation matricielle pour ces applications linéaires, et non pas une véritable notation tensorielle pour les raisons discutées dans la note précédente.

où la notion de produit tensoriel a été étendue au cas d'espaces vectoriels distincts de manière naturelle. Si l'on choisit la base convective  $\underline{e}_i = \delta_i^j \underline{F} \underline{E}_j$ , lorsque  $\underline{F}$  est inversible, alors  $F_J^i = \delta_J^i$ .

Les composantes de l'adjoint de  $\underline{F}$  sont :

$$\underline{F}^* = F^{*j}{}_I \underline{E}^{*I} \otimes \underline{e}_j = F_I^j \underline{E}^{*I} \otimes \underline{e}_j \quad (12.96)$$

c'est-à-dire que les composantes de  $\underline{F}$  et  $\underline{F}^*$  dans ces bases sont identiques. En effet,

$$\begin{aligned} <\underline{e}^{*i}, \underline{F} \underline{E}_J> &= <\underline{e}^{*i}, F_J^k \underline{e}_k> = F_J^i \\ &= <\underline{F}^* \underline{e}^{*i}, \underline{E}_J> = <F^{*i}{}_I \underline{E}^{*I}, \underline{E}_J> = F^{*i}_J \end{aligned}$$

*Matrice des composantes de  $\underline{F}$  par rapport aux bases  $(\underline{E}_I, \underline{e}_j)$*

Donnons, dans le cas tridimensionnel, une représentation matricielle aux composantes de  $\underline{F}$  dans les bases choisies. On note  $(\underline{E}_I, \underline{E}_{II}, \underline{E}_{III})$  avec des chiffres romains les trois vecteurs de la base choisie pour  $E_0$  (cas d'espaces de dimension 3).

Soit  $\underline{u} \in E_0$ , on calcule

$$\begin{aligned} \underline{F} \underline{u} &= \underline{F} (u^I \underline{E}_I + u^{II} \underline{E}_{II} + u^{III} \underline{E}_{III}) \\ &= F_J^i \underline{e}_i \otimes \underline{E}^J (u^I \underline{E}_I + u^{II} \underline{E}_{II} + u^{III} \underline{E}_{III}) \\ &= (F_I^i u^I + F_{II}^i u^{II} + F_{III}^i u^{III}) \underline{e}_i \end{aligned}$$

ce qui conduit à la représentation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} (Fu)^1 \\ (Fu)^2 \\ (Fu)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I^1 & F_{II}^1 & F_{III}^1 \\ F_I^2 & F_{II}^2 & F_{III}^2 \\ F_I^3 & F_{II}^3 & F_{III}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^I \\ u^{II} \\ u^{III} \end{bmatrix}$$

On voit que les composantes de  $\underline{F}$  peuvent être rangées dans une matrice  
 $F^i{}_J \leftarrow$  numéro de ligne  
 $F_J \leftarrow$  numéro de colonne.

*Matrice des composantes de  $\underline{F}^*$  par rapport aux bases  $(\underline{e}^{*i}, \underline{E}^{*J})$*

Soit  $\underline{u}^* \in E_t^*$ , on calcule

$$\begin{aligned} \underline{F}^* \underline{u}^* &= \underline{F}^* (u_1^* \underline{e}^{*1} + u_2^* \underline{e}^{*2} + u_3^* \underline{e}^{*3}) \\ &= F_I^j \underline{E}^{*I} \otimes \underline{e}_j (u_1^* \underline{e}^{*1} + u_2^* \underline{e}^{*2} + u_3^* \underline{e}^{*3}) \\ &= (F_I^1 u_1^* + F_I^2 u_2^* + F_I^3 u_3^*) \underline{E}^{*I} \end{aligned}$$

ce qui conduit à la représentation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} (F^* u^*)_I \\ (F^* u^*)_{II} \\ (F^* u^*)_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I^1 & F_I^2 & F_I^3 \\ F_{II}^1 & F_{II}^2 & F_{II}^3 \\ F_{III}^1 & F_{III}^2 & F_{III}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{bmatrix}$$

On voit que la matrice de  $\underline{F}^*$  est la transposée de la matrice  $\underline{F}$ .

espaces	$E_0$	$E_t$
tenseur métrique	$\underline{G} : E_0 \longrightarrow E_0^*$	$\underline{g} : E_t \longrightarrow E_t^*$
base directe	$\underline{E}_I$	$\underline{e}_i$
	$G_{IJ} = \underline{E}_I \cdot \overset{G}{\underline{E}}_J$	$g_{ij} = \underline{e}_i \cdot \overset{g}{\underline{e}}_j$
base duale	$\underline{E}^{*I}$	$\underline{e}^{*i}$
	$\underline{G} = G_{IJ} \underline{E}^{*I} \otimes \underline{E}^{*J}$	$\underline{g} = g_{ij} \underline{e}^{*i} \otimes \underline{e}^{*j}$
base reciproque	$\underline{E}^I = G^{IJ} \underline{E}_J$	$\underline{e}^i = g^{ij} \underline{e}_j$
(changement de base)	$G^{IJ} = \underline{E}^I \cdot \overset{G}{\underline{E}}_J$	$g^{ij} = \underline{e}^i \cdot \overset{g}{\underline{e}}_j$
	$\underline{E}^{*I} = \underline{G} \underline{E}^I$	$\underline{e}^{*i} = \underline{g} \underline{e}^i$

Tableau 12.2: Récapitulatif : structures euclidiennes des espaces  $E_0$  et  $E_t$ 

## 12.2.3 Transposition d'une application linéaire sur deux espaces vectoriels euclidiens

Les espaces vectoriels  $E_0$  et  $E_t$  sont maintenant munis d'une structure euclidienne par le truchement des tenseurs métriques respectifs  $\underline{G}$  et  $\underline{g}$ , c'est-à-dire des formes bilinéaires symétriques. Les caractéristiques de ces structures sont rappelées dans le tableau 12.2. L'opérateur transposé, en bref le transposé, d'une application linéaire  $\underline{F} : E_0 \longrightarrow E_t$  est l'application linéaire  $\underline{F}^T : E_t \longrightarrow E_0$  défini à partir de l'adjoint de  $\underline{F}$  par

$$\underline{F}^T = \underline{G}^{-1} \underline{F}^* \underline{g} \quad (12.97)$$

L'adjoint et le transposé de  $\underline{F}$  sont illustrés sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} E_0^* & \xleftarrow{\quad \underline{F}^* \quad} & E_t^* \\ \uparrow \underline{G} & & \uparrow \underline{g} \\ E_0 & \xleftarrow[\underline{F}]{} & E_t \end{array}$$

Si l'on choisit la base convective  $\underline{e}_i = \delta_i^j \underline{F} \underline{E}_j$  lorsque  $\underline{F}$  est inversible, alors  $\underline{E}^I = \delta_i^I \underline{F}^T \underline{e}^i$ .

Composantes de  $\underline{F}^T$  par rapport aux bases ( $\underline{e}_i, \underline{E}_j$ )

Un préalable consiste à remarquer que

$$\underline{G}^{-1} (\underline{A}^* \otimes \underline{b}) \underline{g} = (\underline{G}^{-1} \underline{A}^*) \otimes (\underline{g} \underline{b}) \quad \forall (\underline{A}^*, \underline{b}) \in E_0^* \times E_t$$

En effet,  $\forall \underline{u} \in E_t$ ,

$$\underline{G}^{-1} (\underline{A}^* \otimes \underline{b}) \underline{g} \underline{u} = \underline{G}^{-1} \underline{A}^* < \underline{b}, \underline{g} \underline{u} >_{E_t} = \underline{G}^{-1} \underline{A}^* < \underline{g} \underline{b}, \underline{u} >_{E_t} = ((\underline{G}^{-1} \underline{A}^*) \otimes (\underline{g} \underline{b})) \underline{u}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}^T &= \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}^* \tilde{\mathbf{g}} = F_I^j (\tilde{\mathbf{G}}^{-1} \underline{\mathbf{E}}^{*I}) \otimes (\underline{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{e}}_j) \\ &= F_I^j \underline{\mathbf{E}}^I \otimes g_{jk} \underline{\mathbf{e}}^{*k} = F_I^j g_{jk} \underline{\mathbf{E}}^I \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*k}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\tilde{\mathbf{F}}^T = G^{IJ} F_J^k g_{kj} \underline{\mathbf{E}}_I \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j} \quad (12.98)$$

Dans le cas où les bases sont orthonormées, on voit que  $F_J^T = F_I^j$  et que la matrice des composantes de  $\tilde{\mathbf{F}}^T$  est alors la transposée de la matrice des composantes de  $\tilde{\mathbf{F}}$ .

*Endomorphismes symétriques et applications linéaires orthogonales sur des espaces vectoriels euclidiens*

La notion de transposé d'une application linéaires permet de définir les notions d'endomorphismes symétriques et d'endomorphismes orthogonaux.

Un endomorphisme  $\tilde{\mathbf{U}} : E_0 \rightarrow E_0$  est symétrique si

$$\tilde{\mathbf{U}}^T = \tilde{\mathbf{U}} \iff \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^*\tilde{\mathbf{G}}$$

Une application linéaire inversible  $\tilde{\mathbf{R}} : E_0 \rightarrow E_t$  est orthogonale si

$$\tilde{\mathbf{R}}^T = \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \iff \tilde{\mathbf{R}}^*\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}$$

Ces notions s'appliquent à la décomposition polaire d'une application linéaire inversible  $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{R}}$ , cf. théorème 1, section 2.2.6.

Noter qu'il faut considérer les applications suivantes

$$\tilde{\mathbf{R}} : E_0 \rightarrow E_t \quad \tilde{\mathbf{U}} : E_0 \rightarrow E_0 \quad \tilde{\mathbf{V}} : E_t \rightarrow E_t$$

#### 12.2.4 Opérations de transport : images directe et réciproque

L'application linéaire  $\tilde{\mathbf{F}}$  est supposée inversible. Elle est alors utilisée comme *agent de transport* d'objets définis sur  $E_0$  et  $E_t$ . On définit ainsi l'image directe  $F_\triangleright(\tilde{\mathbf{G}})$  par  $\tilde{\mathbf{F}}$ , ou *push-forward* de la métrique  $\tilde{\mathbf{G}}$ , et l'image réciproque  $F_\triangleleft(\tilde{\mathbf{g}})$  par  $\tilde{\mathbf{F}}^{-1}$ , ou *pull-back* de la métrique  $\tilde{\mathbf{g}}$ , en utilisant les diagrammes commutatifs suivants<sup>9</sup> :

$$\begin{array}{ccc} E_t & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{g}}} & E_t^* \\ \tilde{\mathbf{F}} \uparrow & & \downarrow \tilde{\mathbf{F}}^* \\ E_0 & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{F}}_\triangleleft(\tilde{\mathbf{g}})} & E_0^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{G}}} & E_0^* \\ \tilde{\mathbf{F}} \downarrow & & \uparrow \tilde{\mathbf{F}}^* \\ E_t & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{F}}_\triangleright(\tilde{\mathbf{G}})} & E_t^* \end{array}$$

Cela conduit aux formules de transport des métriques :

$$F_\triangleleft(\tilde{\mathbf{g}}) = \tilde{\mathbf{F}}^* \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{F}} \quad F_\triangleright(\tilde{\mathbf{G}}) = \tilde{\mathbf{F}}^{-*} \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} \quad (12.99)$$

9. On adopte les notations  $F_\triangleleft(t)$  et  $F_\triangleright(T)$  proposées par (Stumpf and Hoppe, 1997) moins ambiguës que les notations mathématiques usuelles  $F^*t$  et  $F_*T$ .

A partir de l'expression (12.97) de l'adjoint en fonction du transposé, on obtient les expressions alternatives suivantes :

$$F_{\triangleleft}(\tilde{\mathbf{g}}) = \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{C}} = {}^b \tilde{\mathbf{C}} \quad (12.100)$$

$$F_{\triangleright}(\tilde{\mathbf{G}}) = \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{B}}^{-1} = {}^b (\tilde{\mathbf{B}}^{-1}) = (\tilde{\mathbf{B}}^\sharp)^{-1} \quad (12.101)$$

en utilisant les isomorphismes musicaux, c'est-à-dire les ascenseurs d'indices, et les tenseurs de Cauchy-Green droit et gauche<sup>10</sup> :

$$\tilde{\mathbf{C}} := \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}} \quad C^I{}_J = F^{T I}{}_k F^k{}_J \quad \tilde{\mathbf{B}} := \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}}^T \quad B^i{}_j = F^i{}_K F^{T K}{}_j \quad (12.102)$$

qui sont des endomorphismes sur  $E_0$  et  $E_t$  respectivement.

Les images directe et réciproque des tenseurs métriques définissent effectivement de nouvelles métriques sur les espaces concernés. Par exemple,  $F_{\triangleleft}(\tilde{\mathbf{g}})$  instaure une nouvelle métrique sur  $E_0$ , héritée de  $\tilde{\mathbf{g}}$  et distincte de  $\tilde{\mathbf{G}}$ . En effet, pour  $\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{Y}} \in E_0^2$ ,

$$(\tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{X}}) \overset{g}{\cdot} (\tilde{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{Y}}) = F^i_I X^I g_{ij} F^j_J Y^J = \underline{\mathbf{X}} \cdot (\tilde{\mathbf{F}}^* \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{F}}) \cdot \underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{X}} \cdot {}^b \tilde{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{X}} \overset{F_{\triangleleft}(g)}{\cdot} \underline{\mathbf{Y}} \quad (12.103)$$

De même,  $F_{\triangleright}(\tilde{\mathbf{G}})$  instaure une métrique sur  $E_t$ , héritée de  $\tilde{\mathbf{G}}$  et distincte de  $\tilde{\mathbf{g}}$ . En effet, pour  $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in E_t^2$ ,

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{x}}) \overset{G}{\cdot} (\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{y}}) &= F^{-1}{}_i^I x^i G_{IJ} F^{-1}{}_j^J y^j = \underline{\mathbf{x}} \cdot (\tilde{\mathbf{F}}^{-*} \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1}) \cdot \underline{\mathbf{y}} \\ &= \underline{\mathbf{x}} \cdot (\underline{\mathbf{L}}^\sharp)^{-1} \cdot \underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}} \overset{F_{\triangleright}(G)}{\cdot} \underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (12.104)$$

### Dérivées convectives

Les opérations de transport s'appliquent également aux dérivées temporelles. On définit par exemple la dérivée convective de la métrique  $\tilde{\mathbf{g}}$  de la manière suivante :

$$F_{\triangleright} \left( \frac{d}{dt} F_{\triangleleft}(\tilde{\mathbf{g}}) \right) = F_{\triangleright} \left( \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{F}}^* \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{F}}) \right) = \tilde{\mathbf{F}}^{-*} \left( \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{F}}^* \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{F}}) \right) \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = \dot{\tilde{\mathbf{g}}} + \underline{\mathbf{L}}^* \tilde{\mathbf{g}} + g \underline{\mathbf{L}} \quad (12.105)$$

où  $\underline{\mathbf{L}} = \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \tilde{\mathbf{F}}^{-1}$  et  $\underline{\mathbf{L}}^* = \tilde{\mathbf{F}}^{-*} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}^*$ .

---

10. Définitions conformes à (Marsden and Hughes, 1994)

### 12.2.5 Prenons acte de l'identification entre un espace euclidien et son dual

La structure euclidienne des espaces considérées permet l'identification<sup>11</sup> suivante :

$$E_0^* \stackrel{G}{=} E_0 \quad E_t^* \stackrel{g}{=} E_t \quad (12.106)$$

Rien ne permet par contre d'identifier les espaces  $E_0 \neq E_t$ , considérés ici comme fondamentalement distincts.

Dès lors, on remplace chaque instance d'un vecteur de la base duale par le vecteur de la base réciproque associée par la métrique inverse. Dans le cas du tenseur métrique cela donne, comme on l'a vu :

$$\tilde{\mathbf{g}} = g_{ij} \underline{\mathbf{e}}^{*i} \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{g}} = g_{ij} \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j = \delta_i^k \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}^i = g^{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = \delta_i^k \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}_k \quad (12.107)$$

que l'on identifie au tenseur identité  $\mathbb{I}_{E_t}$  sur  $E_t$ . Une identification similaire existe pour  $\tilde{\mathbf{G}}$  sur  $E_0$ .

De même, on est amené à définir :

$$\tilde{\mathbf{F}} = F_J^i \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*J} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{F}} := F_J^i \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{E}}^J \quad (12.108)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^* = F^{*i}_J \underline{\mathbf{E}}^{*J} \otimes \underline{\mathbf{e}}_i = F_J^i \underline{\mathbf{E}}^{*J} \otimes \underline{\mathbf{e}}_i \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{F}}^* := F^{*i}_J \underline{\mathbf{E}}^J \otimes \underline{\mathbf{e}}_i = F_J^i \underline{\mathbf{E}}^J \otimes \underline{\mathbf{e}}_i \quad (12.109)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^T = F^{TJ}_J \underline{\mathbf{E}}_I \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j} = G^{IJ} F_J^k g_{kj} \underline{\mathbf{E}}_I \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j}$$

$$\longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{F}}^T := F^{TJ}_J \underline{\mathbf{E}}_I \otimes \underline{\mathbf{e}}^j = F_J^i \underline{\mathbf{E}}^J \otimes \underline{\mathbf{e}}_i = \tilde{\mathbf{F}}^* \quad (12.110)$$

L'identification conduit à confondre les notions d'adjoint et de transposé de  $\tilde{\mathbf{F}}$ .

Examinons les conséquences de l'identification pour un endomorphisme sur  $E_t$  :

$$\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}_j^i \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}_j^i \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \quad (12.111)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^* = L^{*i}_j \underline{\mathbf{e}}^{*i} \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = L^j_i \underline{\mathbf{e}}^{*i} \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \quad \longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{L}}^* := L^{*i}_j \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = L^j_i \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \quad (12.112)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^T = L^{Ti}_j \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j} = g^{ik} L^l_k g_{lj} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j}$$

$$\longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{L}}^T := L^{Ti}_j \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j = L^j_i \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = \tilde{\mathbf{L}}^* \quad (12.113)$$

Le tenseur euclidien  $\tilde{\mathbf{L}}$  peut être représenté par ses quatre variances :

$$\tilde{\mathbf{L}} = L^i_j \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j = L^{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = L_i^j \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = L_{ij} \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \quad (12.114)$$

Il en va de même de la transposée de  $\tilde{\mathbf{L}}$  :

$$\tilde{\mathbf{L}}^T = L^{Ti}_j \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j = L^{Tij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = L^{Tj}_i \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j = L_{ij}^T \underline{\mathbf{e}}^i \otimes \underline{\mathbf{e}}^j \quad (12.115)$$

11. A propos de l'identification, noter cet encadré dans le livre de (Marsden and Hughes, 1994) (p. 46) :

In classical tensor analysis, a vector and one-form are indistinguishable in the sense that we have the representations

$v = v^a e_a = v_a e^a$ , and  $\alpha = \alpha_a e^a = \alpha^a e_a$ .

In tensor analysis on manifolds one avoids confusing vectors and one-forms.

Lorsque nous aborderons l'analyse tensorielle sur les variétés différentiables qui modélisent les corps matériels, nous procèderons comme proposé dans ce paragraphe en prenant acte de l'identification. Toutefois, nous gardeons l'usage de l'algèbre sur les variétés notamment pour l'identification des arguments de la loi de comportement, en effectuant les transmутations distinguant les espaces et leur dual.

D'après la définition (12.113) de la transposée, on identifie alors les composantes :

$$\begin{aligned} L^T{}_i{}^j &= L^j{}_i \\ L^{Tij} &= g^{ik} L^T{}_k{}^j = g^{ik} L^j{}_k = L^j{}_k g^{ki} = L^{ji} \\ L^T_{ij} &= L^T{}_i{}^k g_{kj} = L^k{}_i g_{kj} = g^{jk} L^k{}_i = L_{ji} \\ L^{Ti}{}_j &= g^{ik} L^T{}_k{}^l g_{lj} = g^{ik} L^l{}_k g_{lj} = g_{jl} L^l{}_k g^{ki} = L_j{}^i \end{aligned}$$

## 12.3 Analyse tensorielle

### 12.3.1 Champs de tenseurs

Soit  $\Omega$  un ensemble de points de l'espace affine euclidien  $\mathcal{E}$ , d'espace vectoriel associé  $E$ . On appelle champ de tenseur sur  $\Omega$  toute application  $T(M)$  de  $\Omega$  sur l'espace des tenseurs. Il s'agit donc d'une application qui à tout point  $M \in \Omega$  associe le tenseur  $T(M)$  de  $E \otimes \dots \otimes E$ , l'ordre du tenseur étant le même d'un point à un autre. En pratique, on demande à l'ensemble  $\Omega$  de ne pas être tout à fait quelconque. Il doit s'agir au moins d'une variété différentiable, c'est-à-dire possédant en tout point (ou au moins "presque partout") un paramétrage local suffisamment régulier (différentiable presque partout). Les champs de tenseurs sont omniprésents en mécanique :

- **champ de scalaires.** La masse volumique  $\rho(M)$  notée aussi  $\rho(\underline{x})$  où  $\underline{x}$  désigne le vecteur position du point  $M \in \Omega$ , est un champ de scalaires sur un corps matériel identifié à sa position  $\Omega$ .
- **champ de vecteurs.** Les champs de vecteurs-position  $\underline{x}(M)$ , de déplacements  $\underline{u}(M)$ , de vitesses  $\underline{v}(\underline{x})$  sont des exemples de champs de vecteurs définis sur le corps matériel  $\Omega$ .
- **champ de tenseurs d'ordre 2.** Le champ des vitesses de déformation  $\tilde{\mathbf{D}}(\underline{x}, t)$  et le champ des contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{x}, t)$  sont des exemples de champs de tenseurs d'ordre 2 définis sur le corps matériel  $\Omega$  à tout instant.
- **champ de tenseurs d'ordre 4.** Les propriétés élastiques d'un milieu continu définissent un champ de tenseurs d'ordre 4  $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(M)$  sur le corps matériel  $\Omega$ . Si le champ est **uniforme**, c'est-à-dire si  $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(M)$  prend la même valeur en tout point de  $\Omega$ , le milieu continu est dit **homogène**. Il est dit **hétérogène** sinon.

L'analyse tensorielle consiste à étudier les variations d'un champ de tenseurs d'un point à un autre.

En chaque point on travaillera sur les composantes du tenseur défini en ce point. Il faut donc choisir une base  $(\underline{e}_i)_{i=1,3}$  de  $E$ . En toute généralité, il s'agira d'une **base mobile**,  $(\underline{e}_i(\underline{x}))_{i=1,3}$ , i.e. dépendant de la position  $\underline{x}$ , les  $\underline{e}_i(\underline{x})$  constituant eux-mêmes des champs de vecteurs. Pour un système de coordonnées quelconques  $M(q^i)$ , les vecteurs de la base naturelle sont définis par

$$\underline{e}_i = \frac{\partial M}{\partial q^i} \quad (12.116)$$

Si les composantes sont cartésiennes, les coordonnées  $q^i$  sont notées  $x^i$  et les champs  $\underline{e}_i(M)$  sont uniformes. On aura besoin en général de coordonnées cylindriques, sphériques qui sont associées à des bases mobiles orthogonales.

### 12.3.2 Opérateurs différentiels

La dérivée d'un champ de tenseurs  $T(\underline{x})$  suivant un vecteur  $\underline{v} \in E$  est définie comme la limite suivante :

$$D_{\underline{v}} T = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{T(\underline{x} + \lambda \underline{v}) - T(\underline{x})}{\lambda} \quad (12.117)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Lorsqu'elle existe, cette dérivée donne un champ de tenseurs du même type que  $T(\underline{x})$ . Dans une base  $(\underline{e}_i(\underline{x}))_{i=1,3}$ , on note

$$\frac{\partial T}{\partial q^i} = D_{\underline{e}_i} T \quad (12.118)$$

La dérivée selon un vecteur permet de construire l'opérateur

#### Gradient d'un champ de tenseurs

Le gradient d'un champ de tenseurs  $T(M)$  est l'opérateur

$$\nabla T : \underline{v} \mapsto D_{\underline{v}} T \quad (12.119)$$

Il est noté  $\nabla T$ . On montre que c'est un opérateur linéaire par rapport à  $\underline{v}$  (cf. cours d'analyse des classes préparatoires, chapitre "application linéaire tangente"). C'est donc un champ de tenseur d'ordre  $p+q+1$  si  $p+q$  est l'ordre du champ de tenseur  $T(M)$ . Son action sur un vecteur s'écrit aussi

$$\nabla T \cdot \underline{v} = D_{\underline{v}} T \quad (12.120)$$

En particulier, en appliquant le gradient de  $T$  aux vecteurs de bases  $(\underline{e}_i)$ , on obtient

$$\nabla T \cdot \underline{e}_k = D_{\underline{e}_k} T = \frac{\partial T}{\partial q^k} \quad (12.121)$$

$$\nabla T \cdot \underline{v} = v^k \frac{\partial T}{\partial q^k} = \frac{\partial T}{\partial q^k} < \underline{e}^{*k}, \underline{v} > \quad (12.122)$$

On en déduit la forme très générale suivante du champ de gradient d'un champ de tenseur :

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial q^k} \otimes \underline{e}^{*k} \quad (12.123)$$

formule qui a l'avantage d'être valable pour tout système de coordonnées. Remarquer que **l'opérateur gradient augmente de 1 l'ordre du champ de tenseur initial**. Avec les conventions faites pour les tenseurs euclidiens, on peut faire l'économie de la base dual et travailler uniquement avec la base réciproque. On remplace alors simplement  $\underline{e}^{*k}$  par  $\underline{e}^k$  pour la définition du gradient d'un champ de tenseurs euclidiens.

On peut faire le lien avec la notion de différentielle introduite en classes préparatoires en introduisant la différentielle d'un champ de tenseurs par

$$dT = \nabla T \cdot dM \quad (12.124)$$

Projetée sur une base  $(\underline{e}_i)_{i=1,3}$ , cela signifie<sup>12</sup>

$$\underline{\mathbf{OM}} = x^i \underline{e}_i, \quad \underline{\mathbf{dM}} = dx^i \underline{e}_i \quad (12.125)$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x^i} < \underline{e}^{*i}, \underline{\mathbf{dM}} > = \frac{\partial T}{\partial x^i} dx^i \quad (12.126)$$

et on reconnaît les formules usuelles du calcul différentiel.

### Divergence

**L'opérateur différentiel divergence abaisse de 1 l'ordre du champ de tenseur.** Il est défini comme une contraction du tenseur gradient :

$$\operatorname{div} T := (\nabla T)_c = \frac{\partial T}{\partial q^i} \cdot \underline{e}^{*i} \quad (12.127)$$

Il suffit d'enlever l'étoile pour obtenir la définition de la divergence d'un champ de tenseurs euclidiens. Pour appliquer l'opérateur divergence à un tenseur  $T$ , il faut que l'ordre de  $\nabla T$  soit au moins 2 afin qu'on puisse le contracter. Il faut donc que  $T$  soit au moins d'ordre 1 (vecteur, covecteur).

### Rotationnel

**L'opérateur différentiel rotationnel conserve l'ordre du champ de tenseur.** On en donne ici la définition dans le cas des tenseurs euclidiens à partir du produit vectoriel et du tenseur gradient :

$$\operatorname{rot} T := \frac{\partial T}{\partial q^i} \wedge \underline{e}^i \quad (12.128)$$

Pour appliquer l'opérateur rotationnel (*curl* en anglais) à un tenseur  $T$ , il faut que  $T$  soit au moins d'ordre 1 pour pouvoir effectuer le produit vectoriel.

### Opérateurs différentiels en coordonnées cartésiennes orthonormées

Si le système de coordonnées est cartésien orthonormé, on vérifiera que les opérateurs différentiels prennent les formes simples suivantes :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \underline{e}_i = f_{,i} \underline{e}_i \quad (12.129)$$

$$\nabla \underline{u} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_j} \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = u_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (12.130)$$

$$\operatorname{div} \underline{u} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_j} \cdot \underline{e}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} \quad (12.131)$$

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} = \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial x_j} \cdot \underline{e}_j = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_j} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_k) \cdot \underline{e}_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = \sigma_{ij,j} \underline{e}_i \quad (12.132)$$

---

12. En particulier, on peut vérifier que

$$\nabla \underline{\mathbf{OM}} \cdot \underline{\mathbf{dM}} = \left( \frac{\partial M}{\partial q^i} \otimes \underline{e}^{*i} \right) \cdot \underline{\mathbf{dM}} = \underline{e}_i < \underline{e}^{*i}, \underline{\mathbf{dM}} > = dx^i \underline{e}_i = \underline{\mathbf{dM}}$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{u}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_j} \wedge \underline{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{\mathbf{e}}_i \wedge \underline{\mathbf{e}}_j = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \underline{\mathbf{e}}_k = \epsilon_{ijk} u_{i,j} \underline{\mathbf{e}}_k \quad (12.133)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{A}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial x_k} \wedge \underline{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes (\underline{\mathbf{e}}_j \wedge \underline{\mathbf{e}}_k) = \epsilon_{mjk} A_{ij,k} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_m \quad (12.134)$$

où l'on a introduit la notation fréquente en physique,

$$,i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On définit aussi certaines combinaisons des opérateurs précédents. L'opérateur **laplacien** est introduit de manière intrinsèque comme la divergence du gradient. Dans le cas cartésien orthonormé, le laplacien d'une fonction scalaire s'écrit donc

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (12.135)$$

Le laplacien n'est autre que la trace du second gradient de  $f$  :

$$\nabla \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \quad (12.136)$$

Les définitions précédentes permettent par exemple d'établir aisément la propriété bien connue :

$$\Delta \underline{\mathbf{u}} = \text{grad div } \underline{\mathbf{u}} + \text{rot rot } \underline{\mathbf{u}} \quad (12.137)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \underline{\mathbf{u}} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_j} \right) \wedge \underline{\mathbf{e}}_i = \left( \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \wedge \underline{\mathbf{e}}_i \\ &= - \left( \underline{\mathbf{e}}_i \cdot \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \underline{\mathbf{e}}_j + \underline{\mathbf{e}}_i \cdot \underline{\mathbf{e}}_j \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{u}}}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= -\text{grad div } \underline{\mathbf{u}} + \Delta \underline{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

*Exemple : cas des coordonnées cylindriques*

Les coordonnées cylindriques sont  $(r, \theta, z)$  :

$$\underline{\mathbf{OM}} = r \underline{\mathbf{e}}_r + z \underline{\mathbf{e}}_z \quad (12.138)$$

$$\underline{\mathbf{dM}} = dr \underline{\mathbf{e}}_r + rd\theta \underline{\mathbf{e}}_\theta + dz \underline{\mathbf{e}}_z \quad (12.139)$$

Les vecteurs de base sont :

$$\underline{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial \underline{\mathbf{OM}}}{\partial r}, \quad \underline{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\mathbf{OM}}}{\partial \theta}, \quad \underline{\mathbf{e}}_z = \frac{\partial \underline{\mathbf{OM}}}{\partial z} \quad (12.140)$$

On calcule le gradient d'une fonction scalaire  $f(r, \theta, z)$  en évaluant sa différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (12.141)$$

$$= \left[ \frac{\partial f}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{bmatrix} \quad (12.142)$$

$$= [\nabla f] [\underline{dM}] \quad (12.143)$$

ce qui permet d'identifier

$$[\nabla f] = \left[ \frac{\partial f}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \quad (12.144)$$

On voit qu'il s'agit d'un covecteur mais on pourra l'identifier à un vecteur puisqu'on est dans le cadre euclidien (prendre le transposé de la matrice-ligne précédente).

La même démarche de construction du gradient est appliquée à un champ de vecteurs :

$$\underline{u} = u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta + u_z \underline{e}_z \quad (12.145)$$

$$\underline{du} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial r} dr + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} dz \quad (12.146)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} dr + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta - u_\theta d\theta + \frac{\partial u_r}{\partial z} dz \right) \underline{e}_r \\ &+ \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr + u_r d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} dz \right) \underline{e}_\theta \\ &+ \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} dr + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \right) \underline{e}_z \end{aligned} \quad (12.147)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{bmatrix} \quad (12.148)$$

ce qui permet d'identifier  $[\nabla \underline{u}]$ .

Une manière systématique d'exprimer les opérateurs différentiels dans le cas de systèmes de coordonnées  $(q^i)_{i=1,3}$  non cartésiens consiste à revenir aux expressions intrinsèques (12.123) et (12.127) du gradient et de la divergence. Dans le cas des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , les vecteurs des bases canoniques directe et réciproque sont :

$$\underline{e}_1 := \underline{e}_r, \quad \underline{e}_2 := r \underline{e}_\theta, \quad \underline{e}_3 := \underline{e}_z \quad (12.149)$$

$$\underline{e}^1 := \underline{e}_r, \quad \underline{e}^2 := \frac{1}{r} \underline{e}_\theta, \quad \underline{e}^3 := \underline{e}_z \quad (12.150)$$

La définition intrinsèque du gradient d'un champ de vecteur  $\underline{u}(r, \theta, z)$  est :

$$\begin{aligned} \nabla \underline{u} &= \frac{\partial \underline{u}}{\partial r} \otimes \underline{e}^1 + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta} \otimes \underline{e}^2 + \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} \otimes \underline{e}^3 \\ &= \frac{\partial \underline{u}}{\partial r} \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta} \otimes \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial z} \otimes \underline{e}_z \end{aligned} \quad (12.151)$$

En développant  $\underline{u}$  selon (12.145) et en effectuant les dérivations suivant la règle de Leibniz, on obtient l'expression du gradient en cylindriques :

$$\begin{aligned}\nabla \underline{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial u_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{u_r}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \frac{u_\theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta \\ &+ \frac{\partial u_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z\end{aligned}\quad (12.152)$$

Les composantes obtenues sont bien sûr identiques à la matrice (12.148).

La même méthodologie permet de déterminer sans ambiguïté la divergence d'un champ de tenseurs du second ordre  $\underline{\sigma}$  représenté en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{\sigma} &= (\nabla \underline{\sigma})_c = \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial q^i} \cdot \underline{e}^i \\ &= \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial r} \cdot \underline{e}_r + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \theta} \cdot \underline{e}_\theta + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial z} \cdot \underline{e}_z\end{aligned}\quad (12.153)$$

En introduisant les composantes du tenseur  $\underline{\sigma}$  en coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \sigma_{rr} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \sigma_{r\theta} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) \\ &+ \sigma_{\theta z} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) + \sigma_{rz} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r)\end{aligned}\quad (12.154)$$

et le fait que

$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta, \quad \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r$$

on calcule successivement<sup>13</sup>

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial r} \cdot \underline{e}_r = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \underline{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} \underline{e}_z \quad (12.155)$$

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \theta} \cdot \underline{e}_\theta = \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \underline{e}_r + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \underline{e}_r + 2\sigma_{r\theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} \underline{e}_z + \sigma_{rz} \underline{e}_z \quad (12.156)$$

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial z} \cdot \underline{e}_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \underline{e}_z + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \underline{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \underline{e}_r \quad (12.157)$$

---

13. Pour ne masquer aucune étape du calcul, on indique aussi que le fait que

$(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_r = \underline{e}_r, \quad (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta) \cdot \underline{e}_r = 0, \quad \text{etc.}$

est utilisé abondamment dans les calculs (12.155) à (12.157).

L'expression de la divergence de  $\underline{\sigma}$  en coordonnées cylindriques en découle

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\sigma} &= \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r \\ &+ \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \right) \underline{e}_\theta \\ &+ \left( \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right) \underline{e}_z \end{aligned} \quad (12.158)$$

Elle est d'un grand usage dans la résolutions de nombreux problèmes aux limites.

### 12.3.3 Intégration des champs de tenseurs

#### Théorème de la divergence

**Théorème 29 (Théorème de la divergence)** Soit  $\Omega$  une région bornée régulière<sup>14</sup> de l'espace  $\mathcal{E}$  de frontière  $\partial\Omega$ , et soient  $f, \underline{v}, \underline{T}$  des champs de tenseurs respectivement d'ordre 0, 1 et 2, continus et possédant des dérivées premières sur  $\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla f \, dv = \int_{\partial\Omega} f \underline{n} \, ds, \quad \int_{\Omega} f_{,i} \, dv = \int_{\partial\Omega} f n_i \, ds \quad (12.159)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{v} \, dv = \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds, \quad \int_{\Omega} v_{i,i} \, dv = \int_{\partial\Omega} v_i n_i \, ds \quad (12.160)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{T} \, dv = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{n} \, ds, \quad \int_{\Omega} T_{ij,j} \, dv = \int_{\partial\Omega} T_{ij} n_j \, ds \quad (12.161)$$

où  $\underline{n}$  est le champ de vecteur normal unitaire sortant sur  $\partial\Omega$ .

On a donné les expressions intrinsèques de ces théorèmes ainsi que leur traduction en composantes cartésiennes orthonormées. Ces relations sont souvent appelées formules de Gauss. On parlera dans ce cours simplement de théorèmes de la divergence.

Très important dans le calcul pratique en mécanique, ce théorème peut s'énoncer aussi de la manière symbolique et synthétique suivante :

$$\int_{\Omega} \bullet_{,i} \, dV = \int_{\partial\Omega} \bullet n_i \, ds \quad (12.162)$$

où le point  $\bullet$  peut être remplacé par n'importe quelle composante de tenseur. Dès qu'une telle configuration est rencontrée dans un calcul, on pourra essayer d'appliquer cette règle qui pourra conduire au résultat souhaité ou amener des simplifications. Cette expression du théorème est limitée au système de coordonnées cartésiennes.

Les théorèmes de la divergence permettent un va-et-vient entre volume et surface d'une région de l'espace. En pratique, cela montre que des actions locales surfaciques (efforts surfaciques par exemple) sont fondamentalement liés à des actions volumiques (efforts internes). Ce point joue un rôle essentiel dans la représentation des efforts en mécanique (cf. chapitre 3).

Un va-et-vient similaire est possible entre une surface  $S$  et la ligne  $L$  sur laquelle elle s'appuie via les formules de Stokes, pour un champ de vecteurs  $\underline{u}$  et de tenseurs d'ordre

14. On entend par là un domaine fermé dont le bord est lisse par morceaux et sur lequel peut être défini le vecteur unitaire de la normal extérieure  $\underline{n}$  en tout point, sauf éventuellement sur des arêtes ou des sommets. Une surface est lisse si le plan tangent y varie continûment.

$2 \underline{A}$  :

$$\int_L \underline{u} \cdot d\underline{l} = - \int_S (\text{rot } \underline{u}) \cdot \underline{n} ds, \quad \int_L u_i dl_i = - \int_S \epsilon_{kij} u_{i,j} n_k ds \quad (12.163)$$

$$\int_L \underline{A} \cdot d\underline{l} = - \int_S (\text{rot } \underline{A}) \cdot \underline{n} ds, \quad \int_L A_{ij} dl_j = - \int_S \epsilon_{mjk} A_{ij,k} n_m ds \quad (12.164)$$

La formule (12.164) est une conséquence de (12.163). Pour le voir il faut appliquer (12.163) au vecteur de composantes  $A_j^{(i)} = A_{ij}$  à  $i$  fixé.

Ces formules sont étroitement liées à la formule de Green 23.9 sur les formes différentielles. Si l'on en croit le roman intitulé *La formule de Stokes* (Audin, 2016), il faut mentionner la “liste de ceux qui n'ont pas donné leur nom à cette formule, Gauss, Ampère, Ostrogradski, Poisson, Green, Thomson (Lord Kelvin), Hankel”, Cartan, de Rham...<sup>15</sup>

## 12.4 Quelques résultats importants d'algèbre et analyse tensorielles en mécanique des milieux continus

### 12.4.1 Théorème de Cayley-Hamilton et invariants d'un tenseur

On rappelle le

**Théorème 30 (Cayley-Hamilton)** Pour tout endomorphisme  $\underline{A}$  sur  $E$  de dimension 3, le polynôme de  $\underline{A}$  suivant est nul

$$\underline{A}^3 - I_1 \underline{A}^2 + I_2 \underline{A} - I_3 \underline{1} = 0 \quad (12.166)$$

Ses coefficients  $I_i$ , appelés **invariants principaux de  $\underline{A}$** , sont les coefficients du polynôme caractéristique de  $\underline{A}$  :

$$\det(\lambda \underline{1} - \underline{A}) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (12.167)$$

**Preuve.** Le théorème de Cayley-Hamilton est un résultat majeur de l'algèbre linéaire enseignée dans les classes préparatoires et n'est donc pas démontré ici (Ramis et al., 1985). Les coefficients du polynôme caractéristique peuvent s'exprimer en fonction de produits mixtes dans une base quelconque  $(\underline{e}_i)$  (cf. équation (2.36) pour la définition du produit mixte) :

$$\begin{aligned} \det(\underline{A} - \lambda \underline{1})[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3] &= [(\underline{A} - \lambda \underline{1}) \cdot \underline{e}_1, (\underline{A} - \lambda \underline{1}) \cdot \underline{e}_2, (\underline{A} - \lambda \underline{1}) \cdot \underline{e}_3] \\ &= -\lambda^3 [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3] \\ &+ \lambda^2 ([\underline{A} \cdot \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3] + [\underline{e}_1, \underline{A} \cdot \underline{e}_2, \underline{e}_3] + [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{A} \cdot \underline{e}_3]) \\ &- \lambda ([\underline{e}_1, \underline{A} \cdot \underline{e}_2, \underline{A} \cdot \underline{e}_3] + [\underline{A} \cdot \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{A} \cdot \underline{e}_3] \\ &+ [\underline{A} \cdot \underline{e}_1, \underline{A} \cdot \underline{e}_2, \underline{e}_3]) + [\underline{A} \cdot \underline{e}_1, \underline{A} \cdot \underline{e}_2, \underline{A} \cdot \underline{e}_3] \end{aligned} \quad (12.168)$$

15. La forme ultime du théorème est donnée par Elie Cartan et Georges de Rham, respectivement dans le cadre de l'algèbre extérieure et de la topologie différentielle :

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega \quad (12.165)$$

L'identification de l'équation précédente avec la relation (12.167) conduit à l'expression suivante des invariants principaux

$$I_1 = \text{trace } \underline{\mathbf{A}} := \frac{[\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3] + [\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3] + [\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_3]}{[\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3]} \quad (12.169)$$

$$I_2 = \frac{[\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_3] + [\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_3] + [\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3]}{[\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3]}$$

$$I_3 = \det \underline{\mathbf{A}} := \frac{[\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_3]}{[\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3]} \quad (12.170)$$

La valeur des coefficients du polynôme caractéristique ne dépend pas du choix de la base des  $(\underline{\mathbf{e}}_i)$ .  $\square$

Les invariants principaux  $I_2$  et  $I_3$  peuvent aussi se mettre sous la forme :

$$I_1 = \text{trace } \underline{\mathbf{A}} \quad (12.171)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}((\text{trace } \underline{\mathbf{A}})^2 - \text{trace } \underline{\mathbf{A}}^2) = (\text{trace } \underline{\mathbf{A}}^{-1}) \det \underline{\mathbf{A}} \quad (12.172)$$

$$I_3 = \frac{1}{6}((\text{trace } \underline{\mathbf{A}})^3 - 3(\text{trace } \underline{\mathbf{A}})(\text{trace } \underline{\mathbf{A}}^2) + 2(\text{trace } \underline{\mathbf{A}}^3)) \quad (12.173)$$

La seconde relation (12.172)b utilisant l'inverse de  $\underline{\mathbf{A}}$  n'est bien sûr valable que dans le cas où  $\underline{\mathbf{A}}$  est inversible. Le polynôme caractéristique admet (au moins dans  $\mathbb{C}$ ) trois racines  $a_1, a_2, a_3$ .

Les invariants principaux s'expriment en fonction de ces racines :

$$I_1 = a_1 + a_2 + a_3 \quad (12.174)$$

$$I_2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 \quad (12.175)$$

$$I_3 = a_1 a_2 a_3 = \det \underline{\mathbf{A}} \quad (12.176)$$

Les expressions précédentes indiquent que les ensembles  $\{a_1, a_2, a_3\}, \{I_1, I_2, I_3\}$  et  $\{\text{trace } \underline{\mathbf{A}}, \text{trace } \underline{\mathbf{A}}^2, \text{trace } \underline{\mathbf{A}}^3\}$  contiennent la même information et sont donc équivalents. Ils méritent le nom d'invariants puisque leurs valeurs ne dépendent pas de la base choisie. Ils sont équivalents à la connaissance des racines du polynôme caractéristique. A partir de là, on peut construire une multitude d'invariants comme autant de fonctions de ces trois racines.

#### 12.4.2 Lemme de Poincaré

**Théorème 31 (Poincaré)** Soit  $\underline{\omega} = P_i \underline{dx}^i$  une 1-forme différentielle sur un ouvert simplement connexe d'un espace vectoriel de dimension finie, alors

$$\left( \underline{\omega} \text{ est exacte, i.e. } \exists f, \text{ tel que } \underline{\omega} = df, \text{i.e. } \forall i, P_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \iff \forall i, j, \frac{\partial P_i}{\partial x^j} = \frac{\partial P_j}{\partial x^i}$$

La démonstration de ce théorème est plus rapide dans le cas d'un ouvert étoilé.

#### 12.4.3 La différentielle de la fonction inverse sur les tenseurs d'ordre 2

**Théorème 32** Différentielle de l'inverse des tenseurs d'ordre 2. La différentielle de l'application  $\text{inv} : \underline{\mathbf{A}} \mapsto \underline{\mathbf{A}}^{-1}$  sur l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 inversibles vaut

$$d(\underline{\mathbf{A}}^{-1}) = -\underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} \quad (12.177)$$

**Preuve.** Le résultat s'établit formellement de la manière suivante

$$\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \underline{\mathbf{1}} \implies d(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1}) = d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} + \underline{\mathbf{A}} \cdot d(\underline{\mathbf{A}}^{-1}) = 0$$

ce qui entraîne

$$d(\underline{\mathbf{A}}^{-1}) = -\underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} \quad (12.178)$$

le résultat annoncé. L'expression correspondante en composantes pour un tenseur euclidien se calcule de la même manière :

$$\frac{\partial A_{ij}^{-1}}{\partial A_{kl}} = -A_{ik}^{-1} A_{lj}^{-1} \quad (12.179)$$

□

#### 12.4.4 La différentielle du déterminant d'un tenseur du second ordre inversible

**Théorème 33 (Différentielle du déterminant d'un tenseur d'ordre 2)** *La différentielle de l'application déterminant sur les tenseurs du second ordre inversible  $\underline{\mathbf{A}}$  vaut*

$$\frac{d \det \underline{\mathbf{A}}}{d \underline{\mathbf{A}}} = (\det \underline{\mathbf{A}}) \underline{\mathbf{A}}^{-T} \quad (12.180)$$

**Preuve.** On revient à la définition de l'application linéaire tangente de la fonction déterminant considérée :

$$\det(\underline{\mathbf{A}} + d\underline{\mathbf{A}}) - \det \underline{\mathbf{A}} = \frac{d \det \underline{\mathbf{A}}}{d A_{pq}} dA_{pq} + o(d\underline{\mathbf{A}}) \quad (12.181)$$

On multiplie cette équation par le déterminant de 3 vecteurs quelconques  $[\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3]$  :

$$\begin{aligned} & (\det(\underline{\mathbf{A}} + d\underline{\mathbf{A}}) - \det \underline{\mathbf{A}})[\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3] \\ &= [(\underline{\mathbf{A}} + d\underline{\mathbf{A}}) \cdot \underline{\mathbf{v}}_1, (\underline{\mathbf{A}} + d\underline{\mathbf{A}}) \cdot \underline{\mathbf{v}}_2, (\underline{\mathbf{A}} + d\underline{\mathbf{A}}) \cdot \underline{\mathbf{v}}_3] - [\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_3] \\ &= [d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_3] + [\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_1, d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_3] + [\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_2, d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_3] + o(d\underline{\mathbf{A}}) \\ &= (\det \underline{\mathbf{A}}) ([\underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3] + [\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3] + [\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot d\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_3]) \\ &= (\det \underline{\mathbf{A}}) \text{trace}(\underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot d\underline{\mathbf{A}})[\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \underline{\mathbf{v}}_3] + o(d\underline{\mathbf{A}}) \end{aligned} \quad (12.182)$$

Il reste à faire l'identification suivante

$$\text{trace}(\underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot d\underline{\mathbf{A}}) = A_{pq}^{-1} dA_{qp} = A_{pq}^{-T} dA_{pq}$$

de sorte que

$$\frac{d \det \underline{\mathbf{A}}}{d A_{pq}} = (\det \underline{\mathbf{A}}) A_{pq}^{-T} \quad (12.183)$$

ce qui conduit au résultat annoncé<sup>16</sup>.  $\square$

Au passage on a utilisé le résultat d'algèbre linéaire suivant,  $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ,

$$[\underline{A} \cdot \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] + [\underline{v}_1, \underline{A} \cdot \underline{v}_2, \underline{v}_3] + [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{A} \cdot \underline{v}_3] = (\text{trace } \underline{A})[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] \quad (12.184)$$

La démonstration se fait en trois temps en utilisant une base orthonormée  $(\underline{e}_i)$  :

- Pour  $\underline{A} = \underline{a} \otimes \underline{b}$  et  $\underline{v}_i = \underline{e}_i$ ,

$$\begin{aligned} [(\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3] &+ [\underline{e}_1, (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{e}_2, \underline{e}_3] + [\underline{e}_1, \underline{e}_2, (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{e}_3] \\ &= a_1 b_1 [\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3] + a_2 b_2 [\underline{e}_1, \underline{e}_3, \underline{e}_2] + a_3 b_3 [\underline{e}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3] \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \underline{a} \cdot \underline{b} = \text{trace}(\underline{a} \otimes \underline{b}) \end{aligned}$$

- Pour  $\underline{A} = \underline{a} \otimes \underline{b}$  et les  $\underline{v}_i$  quelconques,

$$\begin{aligned} &[(\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] + [\underline{v}_1, (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v}_2, \underline{v}_3] + [\underline{v}_1, \underline{v}_2, (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{v}_3] \\ &= v_1^1 v_2^2 v_3^3 ([(\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{e}_i, \underline{e}_j, \underline{e}_k] + [\underline{e}_i, (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{e}_j, \underline{e}_k] + [\underline{e}_i, \underline{e}_j, (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{e}_k]) \\ &= (\text{trace } \underline{a} \otimes \underline{b})[\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3] \end{aligned}$$

- Le cas général pour  $\underline{A} = A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$  et des  $\underline{v}_i$  quelconques découle alors du résultat précédent et de la linéarité des opérations introduites.

## 12.5 Théorèmes de représentation

On envisage des fonctions réelles ou tensorielles de variables réelles ou tensorielles. On exploite les propriétés d'invariance de ces fonctions lorsqu'on applique des opérations de symétrie à leurs arguments.

### 12.5.1 Rappels sur les groupes de symétrie

Les opérations de symétrie consistent de manière générale à appliquer au système une transformation linéaire inversible. Un ensemble  $G$  muni du produit · possède une structure de **groupe** si et seulement si :

1.  $A, B \in G \implies A \cdot B \in G$
2.  $A, B, C \in G \implies A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
3. Il existe un élément identité  $1 \in G$  tel que  $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$
4.  $\forall A \in G, \exists A^{-1} \in G$ , appelé inverse de  $A$ , tel que  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$

Les tenseurs d'ordre 2 inversibles sur un espace euclidien  $E$  ont une structure de groupe et constituent le **groupe linéaire**  $GL(E)$ . Le groupe linéaire général possède de nombreux sous-groupes :

- Le **groupe spécial linéaire**  $SL(E)$  ou **groupe unimodulaire**  $\mathcal{U}(E)$ <sup>17</sup>

$$\mathcal{U}(E) = \{\underline{M} \in GL(E), \det \underline{M} = 1\} \triangleleft GL(E)$$

des endomorphismes unimodulaires est un sous-groupe distingué (ou normal) de  $GL(E)$ .

16. On en déduit le résultat suivant utile en mécanique

$$\overbrace{\det \underline{A}}^{\bullet} = \frac{d(\det \underline{A})}{d\underline{A}} : \dot{\underline{A}} = (\det \underline{A}) \underline{A}^{-T} : \dot{\underline{A}} = (\det \underline{A}) \text{trace}(\dot{\underline{A}} \cdot \underline{A}^{-1})$$

Appliquée au jacobien du gradient de la transformation  $\underline{F}$ , ce résultat fournit la formule de la variation de volume (2.217).

17. d'après (Ramis et al., 1985) p. 351.

- Le **groupe orthogonal**  $GO(E)$  sur un espace euclidien  $E$  contient les transformations linéaires qui préservent le produit scalaire :

$$GO(E) = \{\tilde{P} \in GL(E), \quad \tilde{P}^T G \tilde{P} = G\} < \mathcal{U}(E)$$

où  $G$  est le tenseur métrique associé au produit scalaire.

$$\begin{aligned} \tilde{P} \in GO(E) &\iff (\forall \underline{u}, \underline{v} \in E, (\tilde{P} \cdot \underline{u}) \cdot (\tilde{P} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{v}) \\ &\iff (\tilde{P} \in GL(E) \text{ et } \tilde{P}^{-1} = \tilde{P}^T) \end{aligned} \quad (12.185)$$

Par conséquent,  $\tilde{P} \in GO(E) \implies |\det \tilde{P}| = 1$ .

- Le **groupe spécial orthogonal** ou **groupe des rotations**  $SO(E) = GO(E) \cap \mathcal{U}(E)$  des endomorphismes orthogonaux à déterminant égal à 1.

$$SO(E) = \{\tilde{Q} \in GO(E), \det \tilde{Q} = 1\} \quad (12.186)$$

C'est l'ensemble des **rotations** sur  $E$ . Une rotation est un tenseur orthogonal à déterminant positif.

- Les **groupes ou classes cristallographiques**  $Cristal(E) \subset SO(E)$  sont des sous-groupes du groupe spécial orthogonal. Ils contiennent donc exclusivement des rotations<sup>18</sup>. En cristallographie, on distingue 32 groupes de symétrie (ponctuelle) regroupés en 6 systèmes d'orientation des réseaux (Phan and Podvin, 2003). Les 6 systèmes d'orientation regroupent les 14 réseaux de Bravais, données dans le tableau 12.3. Ces groupes sont en général des **groupes finis** car il contiennent un nombre fini d'éléments, à savoir des rotations par rapport à des axes très particuliers et des valeurs d'angles finies et commensurables. Seules les classes d'isotropie et isotropie transverse sont des groupes continus.

On a les imbrications suivantes

$$Cristal(E) \subset SO(E) \subset GO(E) \subset GL(E)$$

$$Cristal(E) \subset SO(E) \subset \mathcal{U}(E) \subset GL(E)$$

On rappelle que le groupe linéaire  $GL(E)$  est engendré par le groupe unimodulaire et les homothéties  $\tilde{P} = \alpha \tilde{1}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

On peut se demander s'il existe un groupe de transformations, distinct de  $\mathcal{U}(E)$ , contenant les rotations mais aussi d'autres transformations unimodulaires. La réponse est négative et résulte du

**Théorème 34 (Maximalité du groupe spécial orthogonal)** *Le groupe spécial orthogonal est maximal dans le groupe unimodulaire, i.e.*

$$SO(E) \subset G \subset \mathcal{U}(E) \implies (G = SO(E) \quad \text{ou} \quad G = \mathcal{U}(E)) \quad (12.187)$$

**Preuve.** Ce résultat dû à Noll (1965) est important dans l'analyse des comportements de fluides et solides conduite au chapitre 7. On en trouvera une esquisse de démonstration dans (Bertram, 2005).  $\square$

---

18. En cristallographie, on garde  $Cristal(E) \subset GO(E)$  puisque les **miroirs**, symétries par rapport à des plans, qui sont des transformations linéaires à déterminant négatif, jouent un rôle important. On se limite dans ce cours aux rotations. Le groupe complet  $GO(E)$  est engendré à partir des rotations et de l'inversion  $-\tilde{1}$ . Dans l'étude des symétries des propriétés des matériaux, on pourra s'interroger sur l'invariance des propriétés des matériaux par inversion et inclure celle-ci, le cas échéant, dans le groupe des symétries.

SYSTÈME	SYMMÉTRIE MINIMALE DU CRISTAL	SYMMÉTRIE DU RÉSEAU	CARACTÉRISTIQUES DU PRIMITIF	RÉFÈRE CONVENTIONNEL	DEUX FACES OPPOSÉES CENTRALES	CENTRE (OU RHOMBODRIQUE)	FACE CENTRÉE
TRICLINIQUE (asymétrique)	aucune	$\bar{1}$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma$ $a \neq b \neq c$		P		
MONOCLINIQUE (chirale)			Première orientation : $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$ $a \neq b \neq c$		P	B	
			Deuxième orientation : $\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$ $a \neq b \neq c$		P	C	
ORTHORHOMBIQUE	trois éléments binaires trirectangulaires	$\frac{2}{m} mm$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ $a \neq b \neq c$		P	C	
QUADRATIQUE (tetragonale)	un axe 4 ou $\bar{4}$	$\frac{4}{m} mmm$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ $a = b \neq c$		P	I	
HEXAGONAL.	un axe 3	$P : \frac{6}{m} mm$ $R : \bar{3}m$	$\alpha = \beta = 90^\circ$ $\gamma = 120^\circ$ $a = b \neq c$		P	R	
CUBIQUE	quatre axes 3 et trois miroirs ou trois axes 2 trirectangulaires	$m\bar{3}m$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ $a = b = c$		P	I	

Tableau 12.3: Systèmes et modes de réseaux : les 14 réseaux de Bravais, tableau tiré de (Phan and Podvin, 2003).

### 12.5.2 Fonctions isotropes

On considère des fonctions dont les variables peuvent être des scalaires  $a$ , des vecteurs  $\underline{a} \in E$  ou des tenseurs euclidiens d'ordre 2  $\tilde{A}$ . Ces fonctions peuvent être à valeurs réelles (elles seront alors notées  $f(a, \underline{a}, \tilde{A})$ ), à valeurs vectorielles (notées  $\underline{f}(a, \underline{a}, \tilde{A})$ ) ou à valeurs tensorielles d'ordre 2 (notées  $\tilde{f}(a, \underline{a}, \tilde{A})$ ).

**Définition.** Une fonction  $f, \underline{f}, \tilde{f}$  des arguments  $(a, \underline{a}, \tilde{A})$  est dite **isotrope** si,  $\forall a, \underline{a}, \tilde{A}$  et  $\forall \underline{Q} \in GO(E)$

$$f(a, \underline{Q} \cdot \underline{a}, \underline{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \underline{Q}^T) = f(a, \underline{a}, \tilde{A}) \quad (12.188)$$

$$\underline{f}(a, \underline{Q} \cdot \underline{a}, \underline{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \underline{Q}^T) = \underline{Q} \cdot \underline{f}(a, \underline{a}, \tilde{A}) \quad (12.189)$$

$$\tilde{f}(a, \underline{Q} \cdot \underline{a}, \underline{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \underline{Q}^T) = \underline{Q} \cdot \underline{f}(a, \underline{a}, \tilde{A}) \cdot \underline{Q}^T \quad (12.190)$$

Ces définitions imposent des conditions drastiques sur la forme des fonctions mises en jeu que l'on va établir successivement selon l'ordre du tenseur argument. Noter que, *a priori*, les conditions d'isotropie portent sur toutes les transformations orthogonales  $\underline{Q}$  et pas seulement sur les rotations. On se restreint d'abord au cas où les fonctions ne dépendent que d'un seul argument. On ne s'attarde pas sur les fonctions d'une variable scalaire puisque la définition précédente n'implique aucune restriction. On considère d'abord les fonctions à variable vectorielle :

**Théorème 35 (Fonction isotrope d'une variable vectorielle)** *Les fonctions  $f, \underline{f}, \tilde{f}$  d'une variable vectorielle  $\underline{a}$  sont isotropes si et seulement si on a respectivement*

$$f(\underline{a}) = h(\underline{a} \cdot \underline{a}) \quad (12.191)$$

$$\underline{f}(\underline{a}) = h(\underline{a} \cdot \underline{a})\underline{a} \quad (12.192)$$

$$\tilde{f}(\underline{a}) = f_0(\underline{a} \cdot \underline{a})\mathbf{1} + f_1(\underline{a} \cdot \underline{a})\underline{a} \otimes \underline{a} \quad (12.193)$$

*La représentation (12.193) n'est valable que pour des fonctions tensorielles  $\tilde{f}$  symétriques, cas auquel on se restreint ici.*

**Preuve.** Soit  $\underline{a} \in E$ , pour tout autre vecteur  $\underline{b}$  de même norme que  $\underline{a}$  (i.e.  $\underline{b} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{a}$ ), il existe une rotation  $\underline{Q}$  telle que  $\underline{b} = \underline{Q} \cdot \underline{a}$ . Si  $f$  est isotrope, alors

$$f(\underline{b}) = f(\underline{Q} \cdot \underline{a}) = f(\underline{a})$$

d'après la définition (12.188). Par suite,  $f(\underline{a})$  ne dépend que de la norme de  $\underline{a}$  et non de sa direction. Réciproquement, on vérifie qu'une fonction de la forme  $h(\underline{a} \cdot \underline{a})$  est isotrope. Cela établit la relation (12.191).

Pour établir la représentation (12.192) des fonctions vectorielles à variable vectorielle isotropes, on commence par remarquer que pour  $\underline{a} = \underline{0}$ , on doit avoir pour toute rotation  $\underline{Q}$ :

$$\underline{f}(\underline{0}) = \underline{f}(\underline{Q} \cdot \underline{0}) = \underline{Q} \cdot \underline{f}(\underline{0}) \Rightarrow \underline{f}(\underline{0}) = \underline{0}$$

ce qui est compatible avec la représentation (12.192). Ensuite, pour  $\underline{a} \neq \underline{0}$ , il existe un vecteur  $\underline{b}$  orthogonal à  $\underline{a}$  tel que  $f(\underline{a})$  s'écrive

$$f(\underline{a}) = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} \quad (12.194)$$

Appliquons alors à  $f(\underline{a})$  la rotation  $R_{\underline{a}}^{\pi}$  d'angle  $\pi$  autour de l'axe  $\underline{a}$ . Clairement,  $\underline{a}$  est

inchangé et  $\underline{b}$  se transforme en  $-\underline{b}$  de sorte que

$$\begin{aligned}\underline{R}_{\underline{a}}^{\pi} \cdot \underline{f}(\underline{a}) &= \underline{f}(R_{\underline{a}}^{\pi} \cdot \underline{a}) = \underline{f}(\underline{a}) \\ &= \alpha \underline{R}_{\underline{a}}^{\pi} \cdot \underline{a} + \beta \underline{R}_{\underline{a}}^{\pi} \cdot \underline{b} = \alpha \underline{a} - \beta \underline{b}\end{aligned}$$

En rapprochant les deux équations précédentes avec (12.194), on en déduit que  $\beta = 0$ .  $\alpha$  doit alors être une fonction scalaire isotrope de  $\underline{a}$ , ce qui conduit à la représentation (12.192). Réciproquement, une telle représentation conduit bien à une fonction isotrope. Enfin, pour la dernière identité, on introduit la fonction vectorielle

$$\underline{g}(\underline{a}) = \underline{f}(\underline{a}) \cdot \underline{a}$$

On calcule alors pour une transformation orthogonale  $\underline{Q}$

$$\underline{g}(\underline{Q} \cdot \underline{a}) = \underline{f}(\underline{Q} \cdot \underline{a}) \cdot (\underline{Q} \cdot \underline{a}) = \underline{Q} \cdot \underline{f}(\underline{a}) \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{Q} \cdot \underline{a} = \underline{Q} \cdot \underline{f}(\underline{a}) \cdot \underline{a} = \underline{Q} \cdot \underline{g}(\underline{a})$$

de sorte que  $\underline{g}(\underline{a})$  est une fonction vectorielle isotrope qui admet donc la représentation (12.192) :

$$\underline{g}(\underline{a}) = h(\underline{a} \cdot \underline{a}) \underline{a}$$

Cela signifie ni plus ni moins que  $\underline{a}$  est un vecteur propre de  $\underline{f}(\underline{a})$ . Comme  $\underline{f}(\underline{a})$  est supposé être un tenseur d'ordre 2 symétrique, il admet la décomposition spectrale

$$\underline{f}(\underline{a}) = h(\underline{a} \cdot \underline{a}) \underline{a} \otimes \underline{a} + \beta \underline{b} \otimes \underline{b} + \gamma \underline{c} \otimes \underline{c}$$

où les vecteurs propres  $\underline{b}$  et  $\underline{c}$  sont unitaires, et les  $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$  deux à deux orthogonaux. On considère alors la transformation orthogonale  $\underline{Q}$  telle que

$$\underline{Q} \cdot \underline{a} = \underline{a}, \quad \underline{Q} \cdot \underline{b} = \underline{c}, \quad \underline{Q} \cdot \underline{c} = -\underline{b}$$

En appliquant la relation  $\underline{Q} \cdot \underline{f}(\underline{a}) \cdot \underline{Q}^T = \underline{f}(\underline{Q} \cdot \underline{a})$ , on montre que  $\beta = \gamma$ . Par suite on peut construire la représentation (12.193). On finit en vérifiant que la fonction (12.193) est bien isotrope.  $\square$

Dans le cours de mécanique des milieux continus, on travaille plutôt avec des fonctions de variables tensorielles d'ordre 2 comme les contraintes ou les déformations. On se limite d'ailleurs souvent à des tenseurs symétriques  $\underline{A}$ .

**Théorème 36 (Théorème de Rivlin et Erickson)** *Les fonctions isotropes à valeurs réelles, vectorielles ou tensorielles symétriques d'ordre 2 dépendant de la variable tensorielle symétrique d'ordre 2  $\underline{A}$  ont la représentation suivante*

$$f(\underline{A}) = h(a_1, a_2, a_3) \tag{12.195}$$

$$\underline{f}(\underline{A}) = 0 \tag{12.196}$$

$$\underline{f}(\underline{A}) = \alpha_0 \underline{1} + \alpha_1 \underline{A} + \alpha_2 \underline{A}^2 \tag{12.197}$$

où les  $a_i$  sont les valeurs propres de  $\underline{A}$  et les  $h, \alpha_i$  des fonctions quelconques des invariants principaux de  $\underline{A}$  ou des fonctions symétriques des valeurs propres de  $\underline{A}$ .

**Preuve.** Les invariants d'un tenseur d'ordre 2 symétrique ont été définis au paragraphe 4.2.1. A nouveau, la preuve que ces conditions sont suffisantes et définissent bien des

fonctions isotropes de l'argument  $\tilde{A}$  est directe en vérifiant que, pour tout  $\tilde{Q} \in GO(E)$  :

$$f(\tilde{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{Q}^T) = f(\tilde{A}), \quad \underline{f}(\tilde{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{Q}^T) = \tilde{Q} \cdot \underline{f}(\tilde{A}), \quad \tilde{f}(\tilde{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{Q}^T) = \tilde{Q} \cdot \tilde{f}(\tilde{A}) \cdot \tilde{Q}^T$$

On s'attache plutôt ici au caractère nécessaire de ces conditions. Soient  $A$  et  $B$  deux tenseurs d'ordre 2 symétriques ayant les même valeurs propres  $a_i$ . Ils sont diagonalisables sous la forme

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i, \quad \tilde{B} = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{d}_i \otimes \underline{d}_i$$

où les vecteurs propres unitaires soient reliés par une transformation orthogonale  $\tilde{Q} \in GO(E)$  telle que  $\underline{d}_i = \tilde{Q} \cdot \underline{e}_i$  et  $\tilde{B} = \tilde{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{Q}^T$ . Alors

$$f(B) = f(\tilde{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{Q}^T) = f(A)$$

On en déduit que la fonction  $f$  ne dépend pas des directions propres de  $\tilde{A}$  mais seulement de ses valeurs propres. Il reste à garantir que cette fonction  $h(a_1, a_2, a_3)$  ne privilégie aucune valeur propre par rapport aux autres en la prenant symétrique par rapport à ces trois arguments, ou bien, de manière équivalente, en la considérant comment fonction des trois invariants  $I_1, I_2, I_3$  du tenseur  $A$ . Ceci établit la représentation (12.196). Au lieu de parler de fonction scalaire de la variable tensorielle, on parlera plutôt d'invariant scalaire de  $\tilde{A}$ .

En écrivant  $\underline{f}(\tilde{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{Q}^T) = \tilde{Q} \cdot \underline{f}(\tilde{A})$  avec  $\tilde{Q} = -\mathbf{1}$ , on trouve  $\underline{f}(A) = 0, \forall A$ . C'est la condition (12.196). Il n'existe donc pas de fonction vectorielle à variable tensorielle d'ordre 2 (même non symétrique d'ailleurs) autre que la fonction constante égale au vecteur nul.

La démonstration de la représentation (12.197) est plus délicate. On va d'abord montrer que tout vecteur propre de  $\tilde{A}$  (symétrique) est aussi vecteur propre de  $\underline{f}(\tilde{A})$  pour une fonction isotrope  $\tilde{f}$ . Soient  $\underline{e}_i$  les vecteurs propres unitaires et deux à deux orthogonaux de  $\tilde{A}$ . On construit la transformation orthogonale  $\tilde{Q}$  telle que

$$\tilde{Q} \cdot \underline{e}_1 = \underline{e}_1, \quad \tilde{Q} \cdot \underline{e}_2 = -\underline{e}_2, \quad \tilde{Q} \cdot \underline{e}_3 = -\underline{e}_3$$

On vérifiera que cette transformation est telle que  $\tilde{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{Q}^T = \tilde{A}$  en appliquant  $\tilde{Q}$  de part

et d'autre de  $\tilde{A} = \sum_{i=1}^3 a_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ . Par suite

$$\tilde{f}(\tilde{Q} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{Q}^T) = \tilde{f}(\tilde{A}) = \tilde{Q} \cdot \tilde{f}(\tilde{A}) \cdot \tilde{Q}^T$$

On en déduit que

$$\tilde{f}(\tilde{A}) \cdot \tilde{Q} = \tilde{Q} \cdot \tilde{f}(\tilde{A})$$

et donc

$$\tilde{Q} \cdot \tilde{f}(\tilde{A}) \cdot \underline{e}_1 = \tilde{f}(\tilde{A}) \cdot \tilde{Q} \cdot \underline{e}_1 = \tilde{f}(\tilde{A}) \cdot \underline{e}_1$$

Etant donné le choix de la transformation  $\tilde{Q}$ , ceci n'est possible que si  $\tilde{f}(\tilde{A}) \cdot \underline{e}_1$  est colinéaire à  $\underline{e}_1$ . On montre ainsi tour à tour que chaque  $\underline{e}_i$  est un vecteur propre de

$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{A}})$ . Par conséquent,  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{A}})$  se diagonalise en

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{A}}) = \sum_{i=1}^3 b_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i \quad (12.198)$$

Il est alors possible de déterminer  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  en fonction des  $b_i$  tels que le tenseur  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{A}})$  donné par l'équation (12.198) se mette sous la forme (12.197). Les  $\alpha_i$  sont solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_1^2\alpha_2 = b_1 \\ \alpha_0 + a_2\alpha_1 + a_2^2\alpha_2 = b_2 \\ \alpha_0 + a_3\alpha_1 + a_3^2\alpha_2 = b_3 \end{cases} \quad (12.199)$$

dont le déterminant égal à  $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$  est non nul lorsque les valeurs propres  $a_i$  sont distinctes. Les  $\alpha_i$  sont des fonctions de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . La condition d'isotropie de  $\tilde{f}$  s'écrit

$$\alpha_0(\tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^T) \mathbf{1} + \alpha_1(\tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^T) \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_2(\tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^T) \tilde{\mathbf{A}}^2 = \alpha_0(\tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{1} + \alpha_1(\tilde{\mathbf{A}}) \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_2(\tilde{\mathbf{A}}) \tilde{\mathbf{A}}^2$$

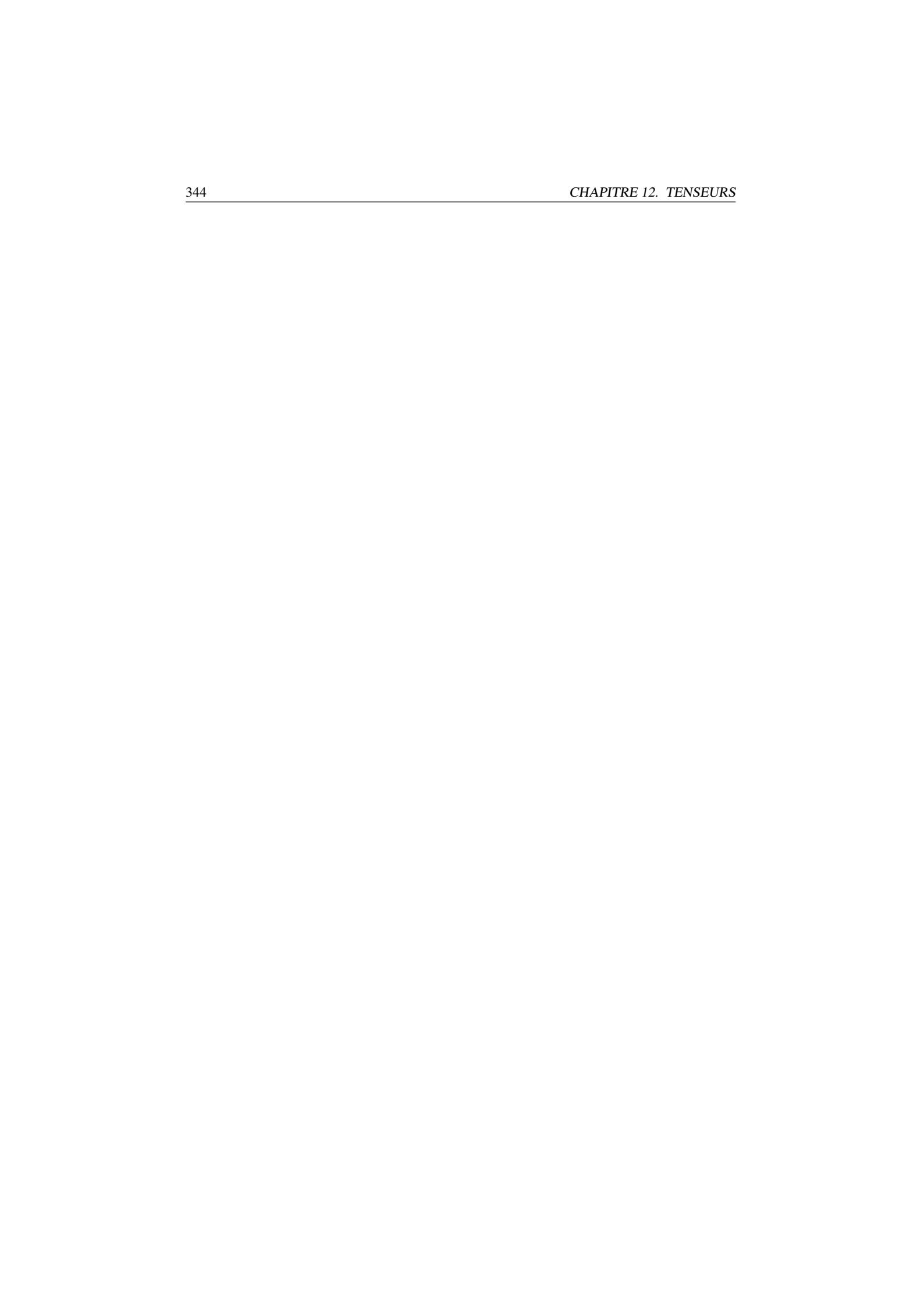
Comme les trois tenseurs  $\{\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}^2\}$  sont linéairement indépendants<sup>19</sup>, on en déduit que les fonctions  $\alpha_i(\tilde{\mathbf{A}})$  sont isotropes :

$$\alpha_0(\tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^T) = \alpha_0(\tilde{\mathbf{A}}), \quad \alpha_1(\tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^T) = \alpha_1(\tilde{\mathbf{A}}), \quad \alpha_2(\tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^T) = \alpha_2(\tilde{\mathbf{A}})$$

Elles sont donc des fonctions symétriques des valeurs propres ou fonctions arbitraires des invariant principaux de  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Lorsque  $\tilde{\mathbf{A}}$  possède deux valeurs propres distinctes, on montre que  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{A}})$  a aussi deux valeurs propres distinctes de sorte que l'on peut prendre  $\alpha_2 = 0$  dans la représentation (12.197). Lorsque les trois valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{A}}$  sont identiques, tous les vecteurs non nuls sont vecteurs propres de  $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{A}})$  aussi de sorte que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .  $\square$

---

19. En effet,  $\alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_2 \tilde{\mathbf{A}}^2 = 0$  implique que les  $\alpha_i$  sont solutions du système (S) avec  $b_i = 0$  (système homogène). Comme les  $a_i$  sont distincts, on en déduit que les  $\alpha_i$  sont nuls.



## 13 Formulation des lois de conservation

Il est possible de formuler les lois de conservation d'une manière plus formelle mais systématique. C'est l'objet de cette annexe. Les équations de bilan font le point sur des grandeurs physiques globales définies comme des intégrales sur des volumes qui dépendent en général du temps. L'objet des théorèmes de transport est d'évaluer la variation temporelle de ces intégrales.

### 13.1 Forme générale d'une équation de bilan

Les lois fondamentales de la mécanique portant sur des grandeurs tensorielles  $f$  peuvent s'exprimer sous la forme générale suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} f dv = \int_{\partial\mathcal{D}_t} \underline{\mathbf{q}}_f \cdot \underline{\mathbf{n}} ds + \int_{\mathcal{D}_t} \sigma_f dv \quad (13.1)$$

pour tout sous-domaine régulier  $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$  d'un corps matériel  $\mathcal{M}$  dans la configuration actuelle, possédant le champ de vecteur normal  $\underline{\mathbf{n}}$  unitaire et orienté vers l'extérieur de  $\mathcal{D}_t$ . Les quantités  $f$  et  $\sigma_f$  sont des champs de tenseurs d'ordre  $m$  et  $\underline{\mathbf{q}}_f$  un champ de tenseur d'ordre  $m+1$ . La relation stipule que la variation temporelle de la quantité  $f$  sur le domaine  $\mathcal{D}_t$  est due au **flux** de  $\underline{\mathbf{q}}_f$  à travers la surface  $\partial\mathcal{D}_t$  et au terme **source** volumique  $\sigma_f$ . L'apport volumique  $\sigma_f$  peut provenir de sources extérieures ou à une production interne associée au mouvement du corps.

La forme générale (13.1) d'équation de bilan fait en fait explicitement appel à l'hypothèse d'une densité surface ne dépendant que de la normale  $\underline{\mathbf{n}}$  à la surface  $\partial\mathcal{D}$ , ce qui constitue une restriction de la formulation qui s'avère suffisante dans la pratique. Dans le cas des efforts mécanique appliqués à un corps matériel, on a vu que cette hypothèse correspond au postulat de Cauchy (3.3.2).

Si le corps  $\mathcal{M}$  est isolé (pas de flux  $\underline{\mathbf{q}}_f$ ) et en absence de sources ( $\sigma_f = 0$ ), la quantité totale de  $f$  est donc constante. On dit qu'elle est conservée et (13.1) s'appelle **loi de conservation**. Il reste à expliciter la variation de la quantité totale de  $f$  en utilisant en particulier les théorèmes de transport.

### 13.2 Théorèmes de transport (forme intégrale)

#### 13.2.1 Cas d'une fonction $f$ continue

On souhaite suivre une quantité au cours du temps sur un *volume de contrôle*  $V(t)$ , non nécessairement matériel.

**Théorème 37 (Equation de transport dite de Reynolds)** Soit  $V(t)$  une région régulière de l'espace  $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$  et  $w_n$  la vitesse normale sortante au point  $\underline{x} \in \partial V(t)$ . Alors, pour toute champ de tenseur continu  $f(\underline{x}, t)$  admettant une dérivée temporelle, on a

$$\frac{d}{dt} \int_V f dv = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial V} f w_n ds \quad (13.2)$$

**Preuve.** Par définition

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_V f dv &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{V(t+h)} f(\underline{x}, t+h) dv - \int_{V(t)} f(\underline{x}, t) dv \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{V(t+h)} f(\underline{x}, t+h) dv - \int_{V(t)} f(\underline{x}, t+h) dv \right) \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{V(t)} f(\underline{x}, t+h) dv - \int_{V(t)} f(\underline{x}, t) dv \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{V(t+h)-V(t)} f(\underline{x}, t+h) dv + \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{x}, t) dv \quad (13.3)
 \end{aligned}$$

La région  $V(t+h) - V(t)$  est balayée par  $\partial V$  dans l'intervalle de temps  $[t, t+h]$  (cf. figure 13.1a). Autrement dit, elle peut être découpée en petits volumes  $\Delta v(\underline{x}, t)$  égaux à

$$\Delta v(\underline{x}, t) = w_n(\underline{x}, t) h \Delta s \quad (13.4)$$

En conséquence le premier terme de (13.3) devient

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{V(t+h)-V(t)} f(\underline{x}, t+h) dv &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{V(t+h)-V(t)} f(\underline{x}, t+h) w_n(\underline{x}, t) h ds \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{V(t+h)-V(t)} f(\underline{x}, t+h) w_n(\underline{x}, t) ds \\
 &= \int_{\partial V(t)} f(\underline{x}, t) w_n(\underline{x}, t) ds
 \end{aligned}$$

ce qui prouve la relation (13.2).  $\square$

On remarque que la vitesse de propagation d'une surface géométrique est par définition un champ de vecteur défini le long de  $\mathcal{S}$  colinéaire à la normale en tout point. En effet cette vitesse est, par définition, la limite du vecteur  $\underline{M}_t \underline{M}_{t+\Delta t} / \Delta t$  où  $M_t$  est sur  $\mathcal{S}(t)$  et  $M_{t+\Delta t}$  est l'intersection de la droite colinéaire à  $\underline{n}(t)$  passant par  $M_t$ .

### 13.2.2 Cas d'un volume matériel

Un cas particulier est celui d'un volume matériel  $\mathcal{D}_t$ , c'est-à-dire dont le bord est toujours constitué des mêmes points matériels. Dans ce cas la vitesse normale sortante d'un point du bord coïncide avec la vitesse normale du point matériel correspondant :

$$w_n(\underline{x}, t) = \dot{\underline{x}} \cdot \underline{n} = \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} \quad (13.5)$$

où  $\underline{n}$  est la normale sortante au point  $\underline{x} \in \partial V(t)$ . Le théorème (13.2) prend alors la forme

$$\frac{d}{dt} \int_V f dv = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial V} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds \quad (13.6)$$

La démonstration peut se faire d'une manière différente de la précédente en se ramenant à un domaine fixe matériel de référence. En effet, le domaine matériel  $\mathcal{D} \subset \Omega_t$  est une région de la configuration actuelle d'un corps matériel  $\mathcal{M}$  et on peut lui associer le domaine  $\mathcal{D}_0$  correspondant sur la configuration de référence. De même la densité  $f(\underline{x}, t)$

est représentée par  $F(\underline{X}, t)$  sur  $\Omega_0$ . On peut alors effectuer le changement de variable  $\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$  dans l'intégrale à calculer et introduire le jacobien correspondant

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} f dv &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0} F J dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_0} (\dot{F} J + F \dot{J}) dV \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \dot{f} dv + \int_{\mathcal{D}_t} f(\operatorname{div} \underline{v}) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + (\operatorname{grad} f) \cdot \underline{v} + f(\operatorname{div} \underline{v}) \right) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div}(f \underline{v}) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds
\end{aligned} \tag{13.7}$$

où l'on a utilisé la formule de la dérivée matérielle (2.174), la formule d'évolution du jacobien (2.215) et finalement le théorème de la divergence (12.161).

Formellement, le résultat précédent permet de mettre en évidence une règle pratique très efficace de calcul de la dérivée d'une intégrale sur un domaine mobile. Il "suffit" de dériver sous le signe intégrale en pensant à dériver aussi l'élément de volume  $dv$ . En effet, on peut constater formellement que cette règle conduit au même résultat que le théorème (13.6) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} f dv = \int_{\mathcal{D}_t} \overbrace{f dv}^{\bullet} \tag{13.8}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f} dv + f \overbrace{dv}^{\bullet}) \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} (\dot{f} + f \operatorname{div} \underline{v}) dv \\
&= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds
\end{aligned} \tag{13.9}$$

où (2.215) a été utilisé à nouveau. C'est cette règle que l'on a utilisée dans l'établissement des équations de bilan des grandeurs physiques quantité de mouvement et énergie.

### 13.2.3 Cas d'un volume présentant une surface singulière

Sur la figure 13.1b, on envisage l'existence au sein d'un domaine matériel  $\mathcal{D}$  d'une **surface orientée**  $\mathcal{S}$  **singulière** pour le champ  $f(\underline{x}, t)$ . On entend par là que  $f$  est continue sur  $\mathcal{D} - \mathcal{S}$  mais présente une **discontinuité** au travers de  $\mathcal{S}$ . Le **saut de  $f$**  est défini comme

$$[\![f]\!] := f^+ - f^- \tag{13.10}$$

où  $f^+$  et  $f^-$  sont les limites à droite et à gauche respectivement en un point de  $\mathcal{S}$ , i.e. en venant de  $\mathcal{D}^+$  et de  $\mathcal{D}^-$ . La propriété de continuité de part et d'autre de  $\mathcal{S}$  garantit que ces limites à droite et gauche de  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  ne dépendent pas du trajet dans  $\mathcal{D}^+$  ou  $\mathcal{D}^-$  respectivement pris pour atteindre  $\underline{x}$ . Les frontières  $(\partial \mathcal{D})^+$  et  $(\partial \mathcal{D})^-$  sont définies de

telle sorte que le contour de  $\mathcal{D}$  soit la réunion de ces deux bords

$$\partial\mathcal{D} = (\partial\mathcal{D})^+ \cup (\partial\mathcal{D})^- \quad (13.11)$$

On a alors le

**Théorème 38 (Equation de transport avec surface singulière)** Soit  $\mathcal{D}(t)$  un domaine matériel de l'espace et  $\mathcal{S}(t)$  une surface singulière pour le champ de tenseurs  $f$  continu sur le reste de  $\mathcal{D}$ . Alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} f dv = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{D}} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds - \int_{\mathcal{S}} [f] w_n ds \quad (13.12)$$

où  $w_n$  est la vitesse normale sortante d'un point  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  et  $[f]$  le saut de  $f$  à travers  $\mathcal{S}$ .

**Preuve.** On applique successivement le théorème de transport (13.2) aux domaines  $\mathcal{D}^+$  et  $\mathcal{D}^-$  en remarquant que chaque domaine possède une frontière matérielle  $(\partial\mathcal{D})^\pm$  et la surface non nécessairement matérielle  $\mathcal{S}$  dont la propagation est pilotée par la vitesse normale  $w_n$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^+} f dv = \int_{\mathcal{D}^+} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{(\partial\mathcal{D})^+} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds + \int_{\mathcal{S}} f^+ (-w_n) ds \quad (13.13)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}^-} f dv = \int_{\mathcal{D}^-} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{(\partial\mathcal{D})^-} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds + \int_{\mathcal{S}} f^- w_n ds \quad (13.14)$$

La somme des deux équations précédentes fournit exactement le théorème 38.  $\square$

### 13.3 Equations de champ et équations aux discontinuités

Dès lors, la forme générale de l'équation de bilan (13.1) d'une quantité  $f$  sur un domaine matériel  $\mathcal{D}$  traversé par une surface singulière  $\mathcal{S}$  s'écrit

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{D}} f \underline{v} \cdot \underline{n} ds - \int_{\mathcal{S}} [f] w_n ds = \int_{\partial\mathcal{D}} \underline{q}_f \cdot \underline{n} ds + \int_{\mathcal{D}} \sigma_f dv \quad (13.15)$$

Les points  $\underline{x}$  pour lesquels tous les tenseurs impliqués sont continus sont dits **réguliers**. Les points  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  sont dits **singuliers**

On considère d'abord des domaines  $\mathcal{D}$  n'interceptant pas la surface  $\mathcal{S}$ . Pour de tels ensembles de points réguliers, l'équation (13.1) devient

$$\int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \underline{v} - \underline{q}_f) - \sigma_f \right) dv = 0 \quad (13.16)$$

où l'on a utilisé une fois de plus le théorème de la divergence (12.161). La quantité  $f \underline{v}$  (ou  $\underline{f} \otimes \underline{v}$  si  $f$  est un vecteur par exemple, plus généralement un tenseur d'ordre quelconque) s'appelle **flux convectif** de  $f$ . L'intégrande étant continu et l'équation étant valable pour tout tel sous-domaine  $\mathcal{D}$ , il doit s'annuler en tout point  $\underline{x}$ . On obtient la forme locale de l'équation de bilan valable en tout point régulier de  $\Omega_t$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \underline{v} - \underline{q}_f) - \sigma_f = 0 \quad (13.17)$$

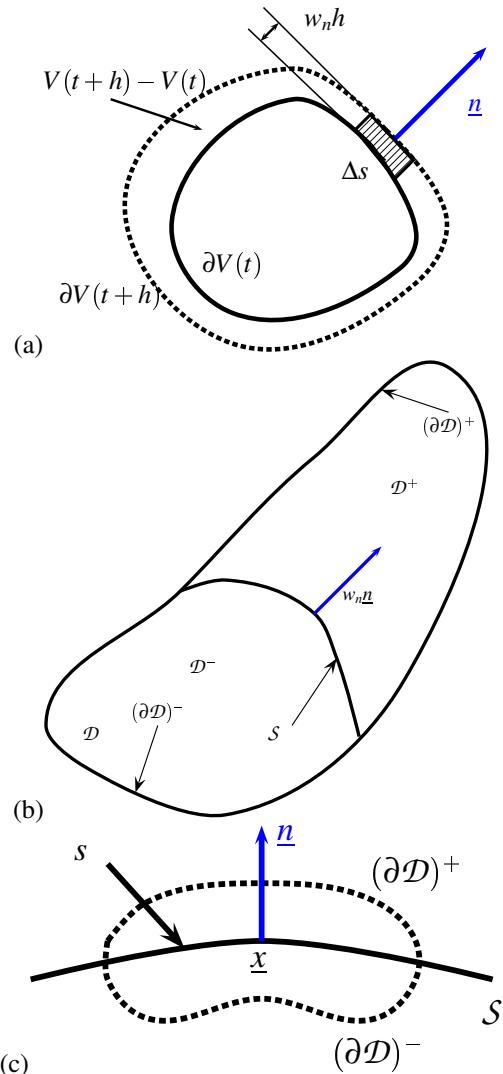


Figure 13.1 : Etablissement des théorèmes de transport : (a) Domaine  $V$  à frontière mobile, (b) propagation d'une surface singulière  $S$  dans un domaine  $D$ , (c) voisinage  $D$  d'un point singulier  $\underline{x} \in S$  pour l'établissement des conditions de discontinuité.

Une autre forme possible équivalente est bien sûr

$$\dot{f} + f \operatorname{div} \underline{v} - \operatorname{div} \underline{q}_f - \sigma_f = 0 \quad (13.18)$$

On considère ensuite un point singulier  $\underline{x} \in S$ . Pour cela, on prend un domaine  $D$  qui constitue un voisinage de  $\underline{x}$  et qui contient la portion de surface

$$s = D \cap S \quad (13.19)$$

On va calculer la limite de (13.15) lorsque  $(\mathcal{D})^+$  et  $(\mathcal{D})^-$  tendent vers  $s$  d'une façon telle que le volume de  $\mathcal{D}$  tende vers 0 tandis que  $s$  reste inchangée (cf. figure 13.1c). Si  $\partial f/\partial t$  et  $\sigma_f$  sont bornés sur  $\mathcal{D}$ , alors les intégrales de volume dans (13.15) disparaissent à la limite et il ne reste plus que

$$\int_s \left( [f(\underline{v} \cdot \underline{n} - w_n)] - [\underline{q}_f] \cdot \underline{n} \right) ds = 0 \quad (13.20)$$

Valable pour toute portion de surface  $s$  et pour tout  $\underline{x} \in \mathcal{S}$ , l'équation précédente implique que l'intégrande doit s'annuler en tout point  $\underline{x} \in \mathcal{S}$  (sauf éventuellement sur un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  de mesure nulle). On obtient les équations locales de saut à travers une surface singulière :

$$[f(\underline{v} \cdot \underline{n} - w_n)] - [\underline{q}_f] \cdot \underline{n} = 0 \quad (13.21)$$

Ces conditions sont appelées **équations de Rankine-Hugoniot**.

## 14 Variance fondamentale des tenseurs de la mécanique des milieux continus

La variance fondamentale d'un tenseur représentant une grandeur mécanique est considérée dans cette annexe comme la variance qui émerge naturellement de sa définition physique. Le vecteur position par exemple est un vecteur, la force sera considéré comme un covecteur, etc. La structure euclidienne des espaces en jeu permet de construire les autres variances du tenseur considéré pour les besoin des calculs. Il est cependant utile de garder à l'esprit la variance d'origine de la définition de la grandeur. C'est l'objet de ce chapitre que de passer en revue les grandeurs de la mécanique des milieux continus et de discuter leur variance fondamentale.

### 14.1 Gradient de la transformation et déformations

La transformation du milieu continu et le champ de déplacement sont notés

$$\underline{x} = x^i \underline{e}_i = \Phi(\underline{X}, t) = \underline{X} + \underline{u} \quad (14.1)$$

Le gradient de la transformation est l'application linéaire tangente

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \Phi}{\partial X^J} \otimes \underline{\underline{E}}^J = (\delta_J^i + \frac{\partial u^i}{\partial X^J}) \underline{e}_i \otimes \underline{\underline{E}}^{*J} = \underline{\underline{F}}^i{}_J \underline{e}_i \otimes \underline{\underline{E}}^{*J} \quad (14.2)$$

Les notations utilisées sont celles de l'étude d'une application linéaire d'un espace vectoriel euclidien  $E_0$ , muni de la métrique  $\underline{\underline{G}}$ , sur un espace euclidean  $E$ , muni de la métrique  $\underline{\underline{g}}$ . Elles ont été introduites au paragraphe 12.2. On rappelle la définition de la transposée en fonction de l'adjoint :  $\underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{F}}^* \underline{\underline{g}}$ , cf. Eq. (12.97).

La décomposition polaire du gradient de la transformation conduit à la définition de la rotation propre  $\underline{\underline{R}}$ , de la déformation pure lagrangienne  $\underline{\underline{U}}$  et de la déformation pure eulérienne  $\underline{\underline{V}}$  :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{S}} \iff F^i{}_J = \underline{\underline{R}}^i{}_K U^K{}_J = \underline{\underline{R}}^i{}_K G^{KL} S_{LJ} \quad (14.3)$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{g}} \underline{\underline{R}} \iff F^i{}_J = \underline{\underline{V}}^i{}_k R^k{}_J = \underline{\underline{T}}^{ik} g_{kl} R^l{}_J \quad (14.4)$$

Les endomorphismes  $\underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{V}}$  sont symétriques tandis que l'application linéaire  $\underline{\underline{R}}$  est orthogonale. Par ailleurs,  $\underline{\underline{U}} =^\# \underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{T}}^\flat$ .

Les tenseurs de Cauchy-Green sont construits à partir du gradient de la transformation de la manière suivante :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} \iff C_{IJ} = F_I^{*k} g_{kl} F^l{}_J \iff {}^\flat \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^* \underline{\underline{g}} \underline{\underline{F}} \quad (14.5)$$

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T \iff B^{ij} = F^i{}_K G^{KL} F_L^{*j} \iff \underline{\underline{B}}^\sharp = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{F}}^* \quad (14.6)$$

L'utilisation d'indices majuscules permet en outre de distinguer les tenseurs purement lagrangiens des tenseurs purement eulériens ou mixtes. Les tenseurs  $\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{U}}$  et  $\underline{\underline{V}}$  sont

symétriques :

$$\tilde{\mathbf{C}}^T = \tilde{\mathbf{C}} \iff C_{IJ} = C_{JI} \quad (14.7)$$

## 14.2 Histoire des déformations

Pour décrire le passé de déformation du point matériel à partir d'une configuration à l'instant  $t$ , on peut utiliser le *gradient de la transformation relative* :

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau)\tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t) \iff \tilde{\mathbf{F}}_t^i{}_j(\tau) = F^i{}_J(\tau)F^{-1}{}^J{}_j(t)$$

Le gradient relatif de la transformation admet lui aussi une décomposition polaire<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) &= \tilde{\mathbf{R}}_t(\tau)\tilde{\mathbf{U}}_t(\tau) \iff F_t^i{}_j = \mathbf{R}_t^i{}_k(\tau)g^{kl}\mathbf{U}_{tlj}(\tau) \\ \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) &= \tilde{\mathbf{V}}_t(\tau)\tilde{\mathbf{R}}_t(\tau) \iff F_t^i{}_j = \mathbf{V}_t^{ik}(\tau)g_{kl}\mathbf{R}_t^l{}_j(\tau) \end{aligned}$$

On définit ensuite les histoires de déformation en suivant (Truesdell and Euvrard, 1974) :

$$\tilde{\mathbf{F}}_t^t(s) = \tilde{\mathbf{F}}_t(t-s), \quad \tilde{\mathbf{R}}_t^t(s) = \tilde{\mathbf{R}}_t(t-s), \quad \tilde{\mathbf{U}}_t^t(s) = \tilde{\mathbf{U}}_t(t-s), \quad \forall s \geq 0 \quad (14.8)$$

On note l'ensemble des cas particuliers suivants :

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(0) = \tilde{\mathbf{F}}(0) \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t), \quad \tilde{\mathbf{F}}_0(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(0), \quad \tilde{\mathbf{F}}_t(t) = \mathbf{1} \quad (14.9)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_t^t(0) = \tilde{\mathbf{F}}_t(t) = \mathbf{1}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_t^t(t) = \tilde{\mathbf{F}}_t(0) = \tilde{\mathbf{F}}(0) \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t), \quad \tilde{\mathbf{R}}_t^t(0) = \tilde{\mathbf{U}}_t^t(0) = \mathbf{1} \quad (14.10)$$

Dans le cas particulier où  $\tilde{\mathbf{F}}(0) = \mathbf{1}$ , on a

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(0) = \tilde{\mathbf{F}}_t^t(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(t), \quad \tilde{\mathbf{F}}_0(\tau) = \tilde{\mathbf{F}}(\tau) \quad (14.11)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_t^t(t) = \tilde{\mathbf{R}}_t(0) = \tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t), \quad \tilde{\mathbf{U}}_t^t(t) = \tilde{\mathbf{U}}_t(0) = \tilde{\mathbf{V}}^{-1}(t) \quad (14.12)$$

## 14.3 Vitesses et gradient des vitesses

La vitesse, définie ci-dessous, est un vecteur de  $E$  :

$$\underline{\mathbf{V}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial x^i}{\partial t}(\underline{\mathbf{X}}, t) \underline{\mathbf{e}}_i = \mathbf{V}^i(\underline{\mathbf{X}}, t) \underline{\mathbf{e}}_i = \mathbf{v}^i(\underline{\mathbf{x}}, t) \underline{\mathbf{e}}_i \quad (14.13)$$

La variance du gradient des vitesses s'en déduit :

$$\tilde{\mathbf{L}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j} = \mathbf{L}^i{}_j \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}^{*j} \quad (14.14)$$

On définit ensuite le taux de déformation  $\tilde{\mathbf{D}}$  et le taux de rotation  $\tilde{\mathbf{W}}$  comme les parties symétrique et antisymétrique, respectivement, du gradient des vitesses dans sa représentation 2 fois covariante :

$$L_{ij} = g_{ik} L^k{}_j = \mathbf{D}_{ij} + \mathbf{W}_{ij} \quad (14.15)$$

---

1. La notation  $\tilde{\mathbf{R}}_t(\tau), \tilde{\mathbf{U}}_t(\tau)$  présente une ambiguïté. En effet, en général

$$\tilde{\mathbf{R}}_t(\tau) \neq \tilde{\mathbf{R}}(\tau)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t), \quad \tilde{\mathbf{U}}_t(\tau) \neq \tilde{\mathbf{U}}(\tau)\tilde{\mathbf{U}}^{-1}(t)$$

Pourquoi privilégier les composantes  $D_{ij}$  plutôt que  $D^{ij}$ ? En raison de la relation qui existe entre  $\underline{D}$  et  $\dot{\underline{C}}$ :

$$\underline{D} = \underline{F}^{-*} \cdot \dot{\underline{C}} \cdot \underline{F}^{-1}, \quad D_{ij} = F_i^I \dot{C}_{IJ} F_j^J \quad (14.16)$$

où la variance fondamentale  $C_{IJ}$  du tenseur de Cauchy-Green droit est indiscutable.

#### 14.4 Forces et contraintes

Les forces  $\underline{f}$  sont fondamentalement des covecteurs puisqu'elles servent à bâtir le travail et la puissance à partir des vecteurs déplacement et vitesse<sup>2</sup>:

$$p(\underline{v}) = \langle \underline{f}^*, \underline{v} \rangle = \underline{f} \cdot \underline{v} = f_i v^i \quad (14.17)$$

L'accélération est indissociable des efforts d'inertie. Elle est donc de même nature tensielle comme cela apparaît dans la densité de puissance des efforts d'inertie:

$$p^{(a)} = \rho \underline{a} \cdot \underline{v} = \rho a_i v^i \quad (14.18)$$

La densité de puissance des efforts intérieurs fournit la variance fondamentale du tenseur des contraintes, lorsqu'il est introduit par la méthode des puissances virtuelles:

$$p^{(i)} = \underline{\sigma} : \underline{D} = \sigma^{ij} D_{ij} \quad (14.19)$$

Noter que ce n'est pas la variance du tenseur des contraintes construit par la méthode de Cauchy :  $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ ,  $t_i = \sigma_i^j n_j$ , i.e.

$$\underline{\sigma}^{Cauchy} = {}^b\underline{\sigma}, \quad \underline{\sigma} = {}^\sharp \underline{\sigma}^{Cauchy}$$

C'est la variance  $\sigma^{ij}$  qui intervient dans l'écriture du comportement puisque la fonctionnelle de comportement est amenée à être substituée dans l'expression de la puissance en vue de l'évaluation du premier et du second principes de la thermodynamique.

Le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\underline{\Pi}$  est défini par l'identité suivante portant sur la puissance des efforts intérieurs :

$$2J\underline{\sigma} : \underline{D} = \underline{\Pi} : \dot{\underline{C}} = \underline{\Pi}^{IJ} \dot{C}_{IJ}, \quad \text{avec} \quad \underline{\Pi} = J \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-*} \quad (14.20)$$

Les composantes et matrices correspondantes sont :  $\Pi^{IJ} = J F^{-1I}_i \sigma^{ij} F^{-*}_j{}^J$ .  
On est amené dans le cours à introduire le tenseur des contraintes de Mandel :

$$\underline{M} = \underline{C} \underline{\Pi} = \underline{F}^T J \underline{\sigma} \underline{F}^{-*}, \quad M^{IJ} = C^I{}_K \Pi^{KJ} = F^{TI}{}_i \sigma^{ij} F^{-*}_j{}^J \quad (14.21)$$

On voit que le transport sur la configuration de référence s'effectue avec  $\underline{F}^T$  au lieu de  $\underline{F}^{-1}$ .

#### 14.5 Changements de base

On passe de la base eulérienne  $(\underline{e}_i)_{i=1,3}$  à la base eulérienne  $(\underline{e}'_i)_{i=1,3}$  par la matrice de passage  $\underline{P}$  inversible :

$$\underline{e}'_i = P_i^k \underline{e}_k, \quad x^i = P_k^i x'^k, \quad [x^i] = [P][x'^k], \quad \underline{x} = \underline{P} \underline{x}' \quad (14.22)$$

$$\underline{e}'^i = P^{-1i}_k \underline{e}^k, \quad x_i = P^{-1i}_k x'_k, \quad [x_i] = [P^{-1}]^T [x'_k], \quad \underline{x} = \underline{P}^{-T} \underline{x}' \quad (14.23)$$

2. On parle aussi de *distribution* de forces, ce qui est cohérent avec leur caractère fondamental de forme.

où l'indice du haut dans  $P_k^i$  indique le numéro de ligne de la matrice de passage, et l'indice du bas désigne le numéro de colonne.

Le changement de base eulérienne, à base lagrangienne fixée, se traduit de la manière suivante dans le cas du gradient de la transformation :

$$\tilde{\mathbf{F}} = F'^i{}_I \underline{\mathbf{e}}'_i \otimes \underline{\mathbf{E}}^I = P_i^k F'^i{}_I \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{E}}^I, \quad F^k{}_I = P_i^k F'^i{}_I, \quad \mathbf{F} = \mathbf{P} \mathbf{F}' \quad (14.24)$$

Les composantes de  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{C}}$  ne sont pas affectées par un changement de base eulérienne. On en déduit que la rotation propre  $\underline{\mathbf{R}}$  se transforme de la même façon que  $\underline{\mathbf{F}}$ , à savoir  $\underline{\mathbf{R}} = \mathbf{P} \underline{\mathbf{R}}'$ .

Il en va autrement de l'histoire de déformation :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_t &= F'^i{}_j \underline{\mathbf{e}}'_i \otimes \underline{\mathbf{e}}'^j = F'^i{}_j P_i^k P^{-1}_l \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l, \quad F_t^k{}_l = P_i^k F'^i{}_j P^{-1}_l, \quad \mathbf{F}_t = \mathbf{P} \mathbf{F}'_t \mathbf{P}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{R}}_t &= R'^i{}_j \underline{\mathbf{e}}'_i \otimes \underline{\mathbf{e}}'^j = R'^i{}_j P_i^k P^{-1}_l \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l, \quad R_t^k{}_l = P_i^k R'^i{}_j P^{-1}_l, \quad \mathbf{R}_t = \mathbf{P} \underline{\mathbf{R}}'_t \mathbf{P}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{U}}_t &= U'_{tij} \underline{\mathbf{e}}'^i \otimes \underline{\mathbf{e}}'^j = U'_{tij} P^{-1}_i P^{-1}_k P^{-1}_l \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l, \quad U_{tikl} = P^{-1}_i U'_{tij} P^{-1}_l, \quad \mathbf{U}_t = \mathbf{P}^{-T} \mathbf{U}'_t \mathbf{P}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{V}}_t &= V'^{ij} \underline{\mathbf{e}}'_i \otimes \underline{\mathbf{e}}'_j = V'^{ij} P_i^k P_j^l \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_l, \quad V_t^{kl} = P_i^k V'^{ij} P_j^l, \quad \mathbf{V}_t = \mathbf{P} \mathbf{V}'_t \mathbf{P}^T \end{aligned}$$

#### *Changements de base dépendant du temps*

On peut aussi considérer des bases différentes à chaque instant de l'histoire du mouvement au point matériel considéré. Une telle famille de changements de bases est définie par

$$\underline{\mathbf{e}}'_i(t) = P_i^k(t) \underline{\mathbf{e}}_k$$

de sorte que les grandeurs cinématiques se transforment selon les règles suivantes :

$$\mathbf{F}(t) \longrightarrow \mathbf{P}^{-1}(t) \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{R}(t) \longrightarrow \mathbf{P}^{-1}(t) \mathbf{R}'(t)$$

Les variables d'histoire de déformations se transforment de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}(\tau) \mathbf{F}^{-1}(t) \longrightarrow \mathbf{P}^{-1}(\tau) \mathbf{F}_t(\tau) \mathbf{P}(t)$$

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{g}^{-1} \mathbf{U}_t(\tau) \longrightarrow \mathbf{P}^{-1}(\tau) \mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{g}^{-1} \mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{P}(t)$$

Dans la dernière expression, on fait apparaître la transformation de la métrique,  $\mathbf{g}^{-1}(t) \longrightarrow \mathbf{P}^{-1}(t) \mathbf{g}^{-1}(t) \mathbf{P}^{-T}(t)$ , afin de trouver les règles de transformation des histoires de déformation et de rotation :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t(\tau) &= \mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{g}^{-1} \mathbf{U}_t(\tau) \longrightarrow \mathbf{P}^{-1}(\tau) \mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{P}(t) \mathbf{P}^{-1}(t) \mathbf{g}^{-1} \mathbf{P}^{-T}(t) \mathbf{P}^T(t) \mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{R}_t(\tau) &\longrightarrow \mathbf{P}^{-1}(\tau) \mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{U}_t(\tau) &\longrightarrow \mathbf{P}^T(t) \mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{P}(t) \end{aligned}$$

On donne enfin les formules de changements de base pour le taux de déformation et le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\tilde{\mathbf{D}} = D'_{ij} \underline{\mathbf{e}}'^i \otimes \underline{\mathbf{e}}'^j = D'_{ij} P^{-1}_i P^{-1}_j \underline{\mathbf{e}}^k \otimes \underline{\mathbf{e}}^l, \quad D_{kl} = P^{-1}_i D'_{ij} P^{-1}_l, \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}^{-T} \mathbf{D}' \mathbf{P}^{-1}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma'^{ij} \underline{\mathbf{e}}'_i \otimes \underline{\mathbf{e}}'_j = \sigma'^{ij} P_i^k P_j^l \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_l, \quad \sigma^{kl} = P_i^k \sigma'^{ij} P_j^l, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{P}^T$$

## 14.6 Dérivation temporelle convective

A chaque tenseur  $\mathbf{A}$ , purement eulérien, on associe le tenseur purement lagrangien  $\mathbb{A}$  par le transport convectif (*pull-back* ou image réciproque) approprié. Pour un tenseur d'ordre deux, les quatre représentants de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbb{A}$  sont liés par

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{IJ} &= F^* \overset{i}{A}_{ij} F^j{}_J, \quad \mathbb{A}_{..} = \mathbf{F}^* \mathbf{A}_{..} \mathbf{F} \\ \mathbb{A}_I{}^J &= F_I{}^* \overset{i}{A}_i{}^j F^{-*}{}_j{}^J, \quad \mathbb{A}_{\cdot\cdot} = \mathbf{F}^* \mathbf{A}_{\cdot\cdot} \mathbf{F}^{-*} \\ \mathbb{A}^I{}_J &= F^{-1} \overset{i}{A}_i{}^j F^j{}_J, \quad \mathbb{A}^{\cdot\cdot} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}^{\cdot\cdot} \mathbf{F} \\ \mathbb{A}^{IJ} &= F^{-1} \overset{i}{A}_i{}^j F^{-*}{}_j{}^J, \quad \mathbb{A}^{\cdot\cdot\cdot} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{A}^{\cdot\cdot\cdot} \mathbf{F}^{-*}\end{aligned}$$

Les dérivées convectives par rapport au temps de ces grandeurs sont alors définies de la manière suivante :

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}_{..} = \mathbf{F}^{-*} \dot{\mathbb{A}}_{..} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{A}}_{..} + \mathbf{L}^* \mathbf{A}_{..} + \mathbf{A}_{..} \mathbf{L} \quad \text{Cotter - Rivlin} \quad (14.25)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}^{\cdot\cdot} = \mathbf{F}^{-*} \dot{\mathbb{A}}^{\cdot\cdot} \mathbf{F}^* = \dot{\mathbf{A}}^{\cdot\cdot} + \mathbf{L}^* \mathbf{A}^{\cdot\cdot} - \mathbf{A}^{\cdot\cdot} \mathbf{L}^* \quad (14.26)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}^{\cdot\cdot\cdot} = \mathbf{F} \dot{\mathbb{A}}^{\cdot\cdot\cdot} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{A}}^{\cdot\cdot\cdot} - \mathbf{L} \mathbf{A}^{\cdot\cdot\cdot} + \mathbf{A}^{\cdot\cdot\cdot} \mathbf{L} \quad (14.27)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \mathbf{F} \dot{\mathbb{A}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \mathbf{F}^* = \dot{\mathbf{A}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \mathbf{L} \mathbf{A}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} - \mathbf{A}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \mathbf{L}^* \quad \text{Oldroyd ou Lie} \quad (14.28)$$

Les noms données à ces dérivées convectives sont tirés de l'ouvrage (Bertram, 2005).

### Dérivation temporelle objective d'un champ de vecteurs

Il existe bien entendu des relations similaires pour les tenseurs  $\mathbf{a}$  purement eulérien d'ordre 1, au nombre de deux selon la variance du vecteur :

$$\overset{\nabla}{\mathbf{a}}_{..} = \dot{\mathbf{a}}_{..} + \mathbf{L}^T \mathbf{a}_{..} \quad (14.29)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{a}}^{\cdot\cdot} = \dot{\mathbf{a}}^{\cdot\cdot} - \mathbf{L} \mathbf{a}^{\cdot\cdot} \quad (14.30)$$

Plus généralement, on définit la :

- Dérivée convective d'un vecteur  $\underline{\mathbf{g}} = g^i \underline{\mathbf{e}}_i$

$$\overset{\nabla}{\underline{\mathbf{g}}} = \tilde{\mathbf{F}} \left( \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{g}}) \right) = \dot{\underline{\mathbf{g}}} - \tilde{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{g}}$$

Une variante consiste à transporter la densité massique du champ de vecteurs pour obtenir :

$$\overset{\nabla}{\underline{\mathbf{g}}} = \tilde{\mathbf{F}} \left( \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{F}}^{-1} J \underline{\mathbf{g}}) \right) = \dot{\underline{\mathbf{g}}} - \tilde{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{g}} + J(\text{trace } \tilde{\mathbf{D}}) \underline{\mathbf{g}}$$

- Dérivée convective d'un covecteur  $\underline{\mathbf{g}} = g_i \underline{\mathbf{e}}^i$

$$\overset{\nabla}{\underline{\mathbf{g}}} = \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \left( \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{g}}) \right) = \dot{\underline{\mathbf{g}}} + \tilde{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{g}}$$

- Dérivée de Jaumann d'un champ de vecteurs, définie comme la demi-somme des dérivées convectives précédentes :

$$\overset{\nabla}{\underline{\mathbf{g}}} = \dot{\underline{\mathbf{g}}} - \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{g}}$$

- Dérivée par rapport à un référentiel tournant  $\tilde{\mathbf{Q}}(t)$  dont le taux de rotation est  $\tilde{\mathbf{W}}^Q = \dot{\tilde{\mathbf{Q}}}\tilde{\mathbf{Q}}^T$  :

$$\overset{\nabla}{\underline{\mathbf{g}}} = \tilde{\mathbf{Q}} \left( \frac{d}{dt} (\tilde{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{g}}) \right) = \dot{\underline{\mathbf{g}}} - \mathbf{W}^Q \underline{\mathbf{g}}$$

### 14.7 Variance et loi de comportement

L'expression (14.20) de la puissance des efforts intérieurs suggère que la loi de comportement relie les composantes contravariantes du tenseur des contraintes aux composantes covariantes d'une mesure de déformation (et de son histoire).

Un exemple particulier de loi de comportement d'un solide hyperélastique isotrope est

$$\begin{aligned} \Pi^{IJ} &= f(C_{KL}) = \varphi_0 G^{IJ} + \varphi_1 G^{IK} C_{KL} G^{LJ} \\ \Pi^{\cdot\cdot} &= f(\tilde{C}) = \varphi_0 \mathbf{G}^{-1} + \varphi_1 \mathbf{G}^{-1} \tilde{C} \cdot \mathbf{G}^{-1} \end{aligned} \quad (14.31)$$

où  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont des fonctions constitutives. Cette loi est invariante par changement de base orthonormée :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} f(\mathbf{C}) \mathbf{P}^{-T} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}^{-T} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}^{-T} \\ &= \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{G}^{-1} = f(\mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P}) \end{aligned}$$

en utilisant le fait que  $\mathbf{P}^T \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{P}^{-1}$ . Cette relation traduit le caractère isotrope du comportement. Remarquer que pour le fluide élastique, on trouve que  $\tilde{\Pi}$  est proportionnel à  $\tilde{C}^{-1}$  qui sont de même variance, comme il se doit.

Considérons la forme de la loi de comportement reliant plutôt les endomorphismes associés :

$$\Pi^I{}_J = f(C^I{}_J) \varphi_0 \delta^I_J + \varphi_1 C^I{}_J, \quad \Pi^{\cdot\cdot} = f(\mathbf{C}^{\cdot\cdot}) \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{C}^{\cdot\cdot}.$$

Sous cette forme, la loi est invariante par un changement de base quelconque :

$$\mathbf{P}^{-1} f(\mathbf{C}^{\cdot\cdot}) \mathbf{P} = \varphi_0 \mathbf{I} + \varphi_1 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} = f(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^{\cdot\cdot} \mathbf{P})$$

### 14.8 Variance, isotropie de l'espace et seconde loi de Newton

La seconde loi de Newton relie, dans un référentiel galiléen, les forces aux accélérations. Une relation générale de ce type prend la forme

$$F_i = m_i{}^j a_j \quad (14.32)$$

$$m_i{}^j \rightarrow P_i^k m_k{}^l P_l^{-1}, \quad \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{P}^T \mathbf{m} \mathbf{P}^{-T}$$

Le principe d'isotropie de l'espace implique donc que

$$\mathbf{P} \mathbf{m} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{m}, \quad \forall \mathbf{P}, \text{ orthogonal et constant}$$

En dimension 2 comme en dimension 3, cette propriété n'est vérifiée que par les tenseurs sphériques :

$$m_i{}^j = m \delta_i^j, \quad \text{et} \quad F_i = m a_i \quad (14.33)$$

où  $m$  est la masse scalaire usuelle.

A noter qu'*in fine*, la loi obtenue est invariante par tout changement de base constant (non dépendant du temps) et pas seulement pour les changements de bases orthonormées. Toutefois ce résultat est acquis en se restreignant aux matrices  $\mathbf{P}$  orthogonales par l'utilisation de l'isotropie de l'espace.

La seconde loi de Newton n'est pas à proprement parler une loi de comportement. C'est une relation universelle de type bilan. Cela se reflète aussi sur la structure tensorielle de l'équation. L'équation (14.32) relie deux formes linéaires. Le principe d'isotropie de l'espace permet de trouver directement sa forme réduite. Au contraire, la loi de comportement envisagée (14.31) relie un "vecteur" (composantes contravariantes)  $\Pi^{IJ}$  à une "forme"  $C_{KL}$  (composantes covariantes). Ces grandeurs lagrangiennes sont indifférentes au choix de la base "eulérienne". La réduction de cette loi est possible par des considérations de symétries.

On pourrait aussi étudier la seconde loi de Newton en utilisant des composantes de variance différente. Par exemple, en considérant les composantes contravariantes de l'accélération :

$$F_i = m_{ij} a^j \quad (14.34)$$

Le "tenseur de masse" n'est plus un endomorphisme et opère de  $E$  dans  $E^*$ . La règle de transformation correspondante est

$$m_{ij} \longrightarrow P_i^k m_{kl} P_l^j, \quad \mathbf{m} \longrightarrow \mathbf{P}^T \mathbf{m} \mathbf{P}$$

Les changements de base considérés doivent conserver la métrique :  $\mathbf{P}^T g \mathbf{P} = g$ . La propriété d'invariance exigée est donc

$$\mathbf{P}^T \mathbf{m} \mathbf{P} = \mathbf{m}, \quad \forall \mathbf{P}, \text{orthogonale}$$

En dimension 3, cette propriété conduit à

$$\mathbf{m} = m \mathbf{g}$$

résultat conforme à (14.33). En dimension 2, toutefois le résultat est différent

$$\mathbf{m} = m \mathbf{g} + \mu \sqrt{\det \mathbf{g}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cela plaide pour l'énoncé des principes d'invariance en physique à l'aide des variables avec leur variance "naturelle".



## 15 De Newton à Cauchy : dynamique newtonienne

L'approche présentée ici consiste à partir des lois de Newton régissant les interactions entre particules locales et à effectuer des opérations de moyennes sur une fenêtre d'observation de taille finie et constituant le volume élémentaire représentatif de la mécanique des milieux continus. Elle est due aux travaux de (Noll, 1955; Murdoch and Bedaux, 1994; Dreyer and Kunik, 2000).

Les équations de départ sont celles de la dynamique newtonienne d'un système de  $N$  particules, rassemblées ci-dessous et écrites par rapport à un référentiel galiléen. La position de la particule numéro  $\alpha$  est le vecteur  $\underline{x}^\alpha$  et sa vitesse vaut

$$\dot{\underline{x}}^\alpha = \frac{d\underline{x}^\alpha}{d\vartheta} \quad (15.1)$$

où la variable  $\vartheta$  désigne le temps microscopique. La seconde loi de Newton s'écrit

$$m^\alpha \ddot{\underline{x}}^\alpha(\vartheta) = \underline{f}^\alpha(\vartheta) \quad (15.2)$$

où la particule est soumise aux efforts  $\underline{f}^\alpha$  consistant en un champ extérieur  $\underline{b}^\alpha$ , tel que la gravité, et aux interactions avec toutes les autres particules  $\beta \neq \alpha$  :

$$\underline{f}^\alpha = \underline{b}^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \underline{f}^{\alpha\beta} \quad (15.3)$$

Les forces d'interaction sont supposées dériver d'un potentiel :

$$\underline{f}^{\alpha\beta} = -\frac{\partial \phi_{\alpha\beta}}{\partial \underline{x}^\alpha} \quad (15.4)$$

De tels potentiels atomiques sont largement utilisés en dynamique moléculaire. L'exposé est limité ici au cas idéal des potentiels de paires pour lesquels le potentiel d'interaction entre deux particules ne dépend que du vecteur reliant les deux particules :

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi(\underline{R}^{\alpha\beta}) \quad (15.5)$$

$$\text{avec } \underline{R}^{\alpha\beta} = \underline{x}^\beta - \underline{x}^\alpha \quad (15.6)$$

L'objectif est d'obtenir, par le jeu d'opérations de moyennes, les équations de bilan macroscopiques rappelées ci-dessous sous deux formes équivalentes :

*Conservation de la masse*

$$\dot{\rho} + \rho \text{trace} \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{trace} \left( \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial \underline{x}} \right) = 0 \quad (15.7)$$

$$\dot{\rho} + \rho \underline{v} \cdot \nabla = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \underline{v}) \cdot \nabla = 0. \quad (15.8)$$

*Conservation de la quantité de mouvement*

$$\rho \dot{\underline{v}} - \underline{\sigma} \cdot \nabla = \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + (\rho \underline{v} \otimes \underline{v} - \underline{\sigma}) \cdot \nabla = \rho \underline{b} \quad (15.9)$$

où les forces de volumes sont notées  $\underline{b}$ .

*Conservation du moment cinétique*

$$\rho \underline{c} - \underline{\epsilon} : \underline{\sigma} = 0 \quad (15.10)$$

où  $\underline{c}$  représente une densité de couples volumiques.

*Conservation de l'énergie (énergie interne  $e(t, \underline{x})$ , source de chaleur  $r$ )*

$$\rho \dot{e} - \underline{\sigma} : \underline{v} \otimes \nabla + \underline{q} \cdot \nabla - r = 0 \quad (15.11)$$

$$\frac{\partial \rho(e + \frac{1}{2} \underline{v}^2)}{\partial t} + \left( \rho(e + \frac{1}{2} \underline{v}^2) \underline{v} - \underline{v} \cdot \underline{\sigma} + \underline{q} \right) \cdot \nabla - \rho \underline{b} \cdot \underline{v} - r = 0 \quad (15.12)$$

où  $t$  est le temps macroscopique.

### 15.1 Définition et propriétés de la fonction fenêtre d'observation

Un outil mathématique simple permettant de passer du microscopique au macroscopique est l'introduction d'une fonction "fenêtre d'observation",  $\chi(t, \underline{x})$ , où  $t$  est le temps macroscopique, ayant les propriétés suivantes :

(i)  $\chi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, différentiable et positive,  $\chi(t, \underline{x}) \geq 0$ .

(ii)  $\text{supp}(\chi) \subset ]0, +\infty) \times \mathbb{R}^3$ .

(iii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t, \underline{x}) dt d^3x = 1$ .

La deuxième propriété indique que la fonction s'annule pour les valeurs petites (ici dès  $\vartheta \leq 0$ ) et les valeurs suffisamment grandes du temps microscopique. La troisième propriété signifie que la fonction fenêtre va être utilisée comme une fonction de poids permettant de moyenner les grandeurs physiques aussi bien en temps qu'en espace. En effet, les échelles microscopiques de temps et d'espace sont toutes les deux trop petites par rapport aux échelles macroscopiques. On peut penser à une fonction créneau sur un support de largeur donnée et correspondant à la taille du VER. Toutefois une telle fonction n'a pas la régularité souhaitée et on lui préférera une fonction rapidement décroissante autour de  $\underline{x}$  et de  $t$  et caractérisée par un support de taille caractéristique. La fonction créneau peut alors être obtenue comme limite de telles fenêtre régulières.

Pour chaque particule  $\alpha$ , on définit

$$\chi_\alpha(\vartheta, t, \underline{x}) = \chi(\vartheta - t, \underline{x}^\alpha(\vartheta) - \underline{x}) \quad (15.13)$$

Les deux propriétés suivantes seront utilisées à plusieurs reprises dans la déduction des équations macroscopiques :

$$\frac{\partial \chi_\alpha}{\partial t}(\vartheta, t, \underline{x}) = -\frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \vartheta}(\vartheta, t, \underline{x}) - \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \underline{x}}(\vartheta, t, \underline{x}) \cdot \dot{\underline{x}}^\alpha(\vartheta) \quad (15.14)$$

$$\chi_\alpha(\vartheta, t, \underline{x}) - \chi_\beta(\vartheta, t, \underline{x}) = \left( \underline{R}^{\alpha\beta} \int_0^1 \chi(\vartheta - t, \underline{x}^\alpha(\vartheta) - \underline{x} + \mu \underline{R}^{\alpha\beta}) d\mu \right) \cdot \nabla \quad (15.15)$$

La propriété (15.14) se déduit directement de la définition de  $\chi_\alpha(\vartheta, t, \underline{x})$ . La preuve de la propriété (15.15) commence par l'identité

$$\chi(\vartheta - t, \underline{x}^\alpha(\vartheta) - \underline{x}) - \chi(\vartheta - t, \underline{x}^\beta(\vartheta) - \underline{x}) = - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \mu} \chi(\vartheta - t, \underline{x}^\alpha(\vartheta) - \underline{x} + \mu \underline{R}^{\alpha\beta}) d\mu \quad (15.16)$$

En vertu de la règle de Leibniz, la dérivation par rapport à  $\mu$  peut être transformée en la divergence qui apparaît dans (15.15).

## 15.2 Equations de bilan déduites de la dynamique newtonienne

La fonction macroscopique de densité de masse est définie par

$$\rho(t, \underline{x}) = \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \chi_\alpha(\vartheta, t, \underline{x}) d\vartheta \quad (15.17)$$

On calcule la dérivée partielle de la densité de masse en fonction du temps macroscopique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial t} d\vartheta \\ &= - \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \vartheta} d\vartheta - \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}}^\alpha d\vartheta \end{aligned} \quad (15.18)$$

Le premier terme dans le membre de droite de l'équation (15.18) s'annule en vertu de la propriété (ii) de la fonction fenêtre d'observation.

On adopte la définition suivante de la densité de quantité de mouvement macroscopique

$$\rho \underline{v} = \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \dot{\underline{x}}^\alpha(\vartheta) \chi_\alpha(\vartheta, t, \underline{x}) d\vartheta \quad (15.19)$$

ce qui garantit que l'équation (15.18) soit de la forme macroscopique souhaitée (15.8).

On calcule ensuite la dérivée de la densité de quantité de mouvement (15.19) par rapport au temps macroscopique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} &= \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \dot{\underline{x}}^\alpha(\vartheta) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial t}(\vartheta, t, \underline{x}) d\vartheta \\ &= - \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \dot{\underline{x}}^\alpha(\vartheta) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \vartheta} d\vartheta - \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \dot{\underline{x}}^\alpha(\vartheta) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \underline{x}}(\vartheta, t, \underline{x}) \cdot \dot{\underline{x}}^\alpha d\vartheta \end{aligned} \quad (15.20)$$

$$= \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \ddot{\underline{x}}^\alpha(\vartheta) \chi_\alpha d\vartheta - \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \dot{\underline{x}}^\alpha(\vartheta) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \underline{x}}(\vartheta, t, \underline{x}) \cdot \dot{\underline{x}}^\alpha d\vartheta \quad (15.21)$$

où le premier terme du membre de droite de l'équation (15.21) se déduit de (15.20) par intégration par parties et en prenant à nouveau en compte la propriété (ii) de la fonction

fenêtre d'observation. Par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \left( \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \underline{\dot{x}}^\alpha \otimes \underline{\dot{x}}^\alpha \chi_\alpha d\vartheta \right) \cdot \nabla &= \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \underline{\ddot{x}}^\alpha(\vartheta) \chi_\alpha d\vartheta \\ &= \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \underline{b}^\alpha \chi_\alpha d\vartheta + \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \underline{f}^{\alpha\beta} \chi_\alpha(\vartheta, t, \underline{x}) d\vartheta \end{aligned} \quad (15.22)$$

où les équations du mouvement (15.2) et la définition des micro-forces (15.3) ont été substituées.

Le second terme du membre de droite peut être transformé en utilisant la loi de Newton d'action et de réaction et la propriété (15.15) de la fonction d'observation :

$$\underline{f}^{\alpha\beta} = -\underline{f}^{\beta\alpha} \quad (15.23)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \underline{f}^{\alpha\beta} \chi_\alpha d\vartheta &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} (\underline{f}^{\alpha\beta} \chi_\alpha - \underline{f}^{\beta\alpha} \chi_\alpha) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} (\underline{f}^{\alpha\beta} (\chi_\alpha - \chi_\beta)) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \left( \underline{f}^{\alpha\beta} \otimes \underline{R}^{\alpha\beta} \int_0^1 \chi(\vartheta - t, \underline{x}^\alpha(\vartheta) - \underline{x} + \mu \underline{R}^{\alpha\beta}) d\mu \right) d\vartheta \right) \cdot \nabla \end{aligned} \quad (15.24)$$

Le second terme du membre de gauche de l'équation (15.22) doit être modifié en introduisant les vitesses relatives  $\underline{C}^\alpha$  caractérisant l'agitation thermique et définies par

$$\underline{C}^\alpha(\vartheta, t, \underline{x}) = \underline{\dot{x}}^\alpha(\vartheta) - \underline{v}(t, \underline{x}) \quad (15.25)$$

Cette définition se traduit par

$$\int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \underline{C}^\alpha \chi_\alpha d\vartheta = 0 \quad (15.26)$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \underline{\dot{x}}^\alpha \otimes \underline{\dot{x}}^\alpha \chi_\alpha d\vartheta &= \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha (\underline{v} + \underline{C}^\alpha) \otimes (\underline{v} + \underline{C}^\alpha) \chi_\alpha d\vartheta \\ &= \rho \underline{v} \otimes \underline{v} + \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha \underline{C}^\alpha \otimes \underline{C}^\alpha \chi_\alpha d\vartheta \end{aligned} \quad (15.27)$$

Lorsqu'on substitue les relations (15.24) et (15.27) dans l'équation (15.22), on obtient l'équation de bilan macroscopique (15.9) à condition d'adopter les définitions suivantes

pour les forces de volumes macroscopiques et le tenseur des contraintes

$$\rho \underline{\mathbf{b}} = \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \underline{\mathbf{b}}^\alpha \chi_\alpha d\vartheta \quad (15.28)$$

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\sigma}} &= \int_0^\infty \left( \sum_{\alpha=1}^N m^\alpha (-\underline{\mathbf{C}}^\alpha \otimes \underline{\mathbf{C}}^\alpha) \chi_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \left( \underline{\mathbf{f}}^{\alpha\beta} \otimes \underline{\mathbf{R}}^{\alpha\beta} \int_0^1 \chi(\vartheta - t, \underline{\mathbf{x}}^\alpha(\vartheta) - \underline{\mathbf{x}} + \mu \underline{\mathbf{R}}^{\alpha\beta}) d\mu \right) \right) d\vartheta \end{aligned} \quad (15.29)$$

Cette expression du tenseur des contraintes de Cauchy a le mérite d'illustrer la dépendance intime par rapport aux interactions entre particules. Elle représente une extension de la **formule du viriel**, en mécanique statistique, obtenue dans le cas où la fonction d'observation est un Dirac au point et au temps considéré. Cette expression conduit à un tenseur des contraintes généralement non symétrique. Lorsque les interactions entre particules sont des forces centrales, i.e. lorsque  $\underline{\mathbf{f}}^{\alpha\beta}$  a la même direction que  $\underline{\mathbf{R}}^{\alpha\beta}$ , le tenseur des contraintes est symétrique.

L'introduction du moment cinétique conduit, avec le traitement statistique précédent, à l'apparition, dans le cas général, de couples de contraintes non discutés ici.

L'équation de bilan d'énergie est obtenue par un raisonnement similaire qui s'appuie sur les définitions suivantes des grandeurs continues en fonction des quantités discrètes. L'énergie totale du système est constituée des énergies cinétique et potentielle :

$$\rho \varepsilon = \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{1}{2} m^\alpha \dot{\underline{\mathbf{x}}}^\alpha \cdot \dot{\underline{\mathbf{x}}}^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \phi_{\alpha\beta} \right) \chi_\alpha d\vartheta \quad (15.30)$$

Cette densité d'énergie macroscopique se décompose en une partie liée à l'énergie interne et en une partie correspondant à la densité macroscopique d'énergie cinétique :

$$\rho \varepsilon = \rho e + \frac{1}{2} \rho \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{v}} \quad (15.31)$$

$$\rho e = \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{1}{2} m^\alpha \underline{\mathbf{C}}^\alpha \cdot \underline{\mathbf{C}}^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \phi_{\alpha\beta} \right) \chi_\alpha \quad (15.32)$$

On obtient également la définition du vecteur flux de chaleur ainsi que de la source de chaleur  $r$ , en fonction des grandeurs discrètes :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{q}} &= \int_0^\infty \left( \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{1}{2} m^\alpha \underline{\mathbf{C}}^\alpha \cdot \underline{\mathbf{C}}^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\beta \neq \alpha} \phi_{\alpha\beta} \right) \underline{\mathbf{C}}^\alpha \chi_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} (\underline{\mathbf{C}}^\alpha + \underline{\mathbf{C}}^\beta) \cdot \underline{\mathbf{f}}^{\alpha\beta} \underline{\mathbf{R}}^{\alpha\beta} \int_0^1 \chi(\vartheta - t, \underline{\mathbf{x}}^\alpha(\vartheta) - \underline{\mathbf{x}} + \mu \underline{\mathbf{R}}^{\alpha\beta}) d\mu \right) d\vartheta \end{aligned} \quad (15.33)$$

$$r = \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \dot{\underline{x}}^\alpha \cdot \underline{b}^\alpha \chi_\alpha d\vartheta = \rho \underline{b} \cdot \underline{v} + \int_0^\infty \sum_{\alpha=1}^N \underline{C}^\alpha \cdot \underline{b}^\alpha \chi_\alpha d\vartheta \quad (15.34)$$

### 15.3 Non-objectivité des contraintes

Les expressions des grandeurs physiques macroscopiques ont été obtenues dans un référentiel galiléen. On peut donc s'interroger sur la façon dont se transposent ces grandeurs dans un référentiel quelconque en mouvement  $\tilde{Q}(t)$  par rapport au référentiel galiléen.

Les grandeurs impliquées se transforment de la manière suivante par changement de référentiel :

$$\underline{x}^\alpha \longrightarrow \tilde{Q}(\vartheta) \cdot \underline{x}^\alpha, \quad \underline{f}^\alpha \longrightarrow \tilde{Q}(\vartheta) \cdot \underline{f}^\alpha, \quad \underline{R}^{\alpha\beta} \longrightarrow \tilde{Q}(\vartheta) \cdot \underline{R}^{\alpha\beta}$$

On a fait l'hypothèse d'objectivité des forces microscopiques. On dit qu'une grandeur tensorielle est objective s'il elle se transforme dans un changement de référentiel comme ses composantes dans un changement de base. Les grandeurs  $\underline{C}^\alpha$  ne sont pas objectives puisque le taux de rotation du référentiel intervient dans la règle de transformation des vitesses locale. En général, le tenseur des contraintes n'est pas une grandeur objective. Il est intrinsèquement défini par rapport à un référentiel galiléen.

Toutefois, si  $\tilde{Q}(t)$  varie peu à l'échelle du temps caractéristique du support de la fenêtre d'observation temporelle, la variation  $\dot{\tilde{Q}}(\vartheta)$  peut être négligée dans les intégrales et  $\tilde{Q}(\vartheta)$  remplacé par  $\tilde{Q}(t)$ . La fenêtre temporelle de moyennation est typiquement de l'ordre de quelques centaines ou milliers de temps de collisions entre particules d'un gaz. Pour cette classe de changements de référentiels lentement variables, le tenseur des contraintes et le flux de chaleur apparaissent comme des grandeurs objectives d'après les formules (15.29) et (15.33).

## 16 Invariance galiléenne et interaction entre deux particules

On illustre ici la mise en application du principe d'invariance galiléenne dans le cas d'une situation physique bien connue en mécanique newtonienne, à savoir la représentation de la force d'interaction entre deux particules. Dans le cadre de la mécanique du point, la force d'interaction  $\underline{f}$  exercée par la particule 2 sur la particule 1 est supposée ne dépendre que de la position des particules :

$$\underline{f}_{2 \rightarrow 1} = \hat{\underline{f}}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) \quad (16.1)$$

On va montrer que la condition d'invariance galiléenne conduit à réduire notamment l'espace des fonctions  $\hat{\underline{f}}$  envisageables pour décrire les interactions entre particules.

Les quantités en jeu dans la relation (16.1) se transforment de la manière suivante par transformation galiléenne :

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 &\longrightarrow \underline{x}'_1 = \underline{Q}_0 \cdot \underline{x}_1 + \underline{v}_0 t + \underline{c}_0, & \underline{x}'_2 &= \underline{x}_2 \longrightarrow \underline{Q}_0 \cdot \underline{x}_2 + \underline{v}_0 t + \underline{c}_0 \\ \underline{f}_{2 \rightarrow 1} &\longrightarrow \underline{f}'_{2 \rightarrow 1} = \underline{Q}_0 \cdot \underline{f}_{2 \rightarrow 1} \end{aligned} \quad (16.2)$$

Les deux premières transformations découlent de la définition (6.18). La troisième est l'expression de l'invariance galiléenne pour les forces<sup>1</sup>.

Dire que la loi d'interaction (16.1) est invariante par transformation galiléenne signifie que

$$\underline{f}'_{2 \rightarrow 1} = \hat{\underline{f}}(\underline{x}'_1, \underline{x}'_2)$$

où intervient la même fonction vectorielle  $\hat{\underline{f}}$  que dans (16.1). La relation précédente est valable pour tous  $\underline{Q}_0$ ,  $\underline{v}_0$  et  $\underline{c}_0$ . En particulier, pour  $\underline{Q}_0 = \underline{1}$  et  $\underline{v}_0 = 0$ , on doit avoir

$$\underline{f}'_{2 \rightarrow 1} = \hat{\underline{f}}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \hat{\underline{f}}(\underline{x}_1 + \underline{c}_0, \underline{x}_2 + \underline{c}_0), \quad \forall \underline{c}_0$$

En prenant  $\underline{c}_0 = -\underline{x}_2$  en fixant la seconde particule, on voit que

$$\hat{\underline{f}}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \hat{\underline{f}}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2, \underline{0}) = \hat{\underline{g}}(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)$$

pour tout point  $\underline{x}_1$ .

On applique ensuite à la fonction  $\hat{\underline{g}}$  le principe d'invariance par une transformation orthogonale  $\underline{Q}_0$  :

$$\underline{Q}_0 \cdot \hat{\underline{g}}(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) = \hat{\underline{g}}(\underline{Q}_0 \cdot (\underline{x}_2 - \underline{x}_1))$$

qui traduit le caractère isotrope (tensoriel) de la fonction  $\hat{\underline{g}}$ . Pour  $\underline{u} = \underline{x}_1 - \underline{x}_2$  fixé, on choisit une transformation orthogonale  $\underline{Q}_0$  laissant  $\underline{u}$  invariant ( $\underline{Q}_0 \cdot \underline{u} = \underline{u}$ ). On en

---

1. propriété équivalente à l'*isotropie de l'espace*.

déduit que  $\underline{Q}\hat{\underline{g}}(\underline{u}) = \hat{\underline{g}}(\underline{u})$  et par conséquent que  $\hat{\underline{g}}(\underline{u})$  est aligné avec  $\underline{u}$  :

$$\hat{\underline{g}}(\underline{u}) = g(\underline{u})\underline{u}$$

La fonction scalaire  $g$  est isotrope. Conformément au théorème 35 établi en annexe au paragraphe 12.5.2, équation (12.191), page 340, cette fonction ne peut dépendre que de la norme du  $\underline{u}$ . On obtient la forme réduite de la loi d'interaction (16.1) :

$$\hat{\underline{f}}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = g(\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|)(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \quad (16.3)$$

La force d'interaction est donc dirigée par le vecteur reliant les deux points et son intensité ne dépend que de la distance entre ces points.

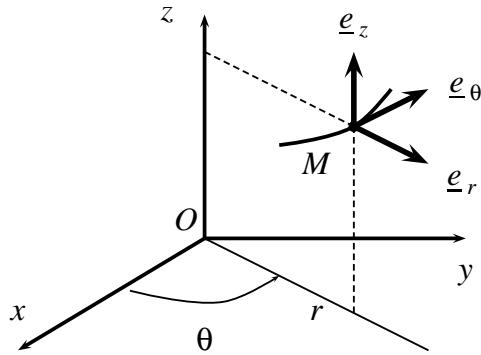
Cette démonstration est due à (Noll, 2004) à ceci près que Noll établit le résultat (16.3) en invoquant la condition d'invariance euclidienne ou principe d'indifférence matérielle (MFI) évoqué au paragraphe 6.3, condition beaucoup plus (trop) restrictive que l'invariance galiléenne. Ironie du sort, il s'avère que l'invariance galiléenne est suffisante pour établir le résultat.

La forme (16.3) des forces d'interaction entre deux particules est souvent introduite sans justification dans les ouvrages de mécanique du point.

## 17 Formulaire d'analyse tensorielle en coordonnées cylindriques et sphériques

### 17.1 Coordonnées cylindriques

#### 17.1.1 Définition des coordonnées



$$\underline{OM} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z \quad (17.1)$$

$$d\underline{M} = dr \underline{e}_r + rd\theta \underline{e}_\theta + dz \underline{e}_z \quad (17.2)$$

$$\underline{e}_r = \frac{\partial \underline{OM}}{\partial r}, \quad \underline{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{OM}}{\partial \theta}, \quad \underline{e}_z = \frac{\partial \underline{OM}}{\partial z} \quad (17.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} = 0, & \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} = 0, & \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} = \underline{e}_\theta, & \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{e}_r, & \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (17.4)$$

#### 17.1.2 Champ scalaire

champ scalaire

$$f(r, \theta, z)$$

gradient

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z \quad (17.5)$$

laplacien

$$\Delta = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (17.6)$$

#### 17.1.3 Champ de vecteurs

champ de vecteurs

$$\underline{u} = u_r(r, \theta, z) \underline{e}_r + u_\theta(r, \theta, z) \underline{e}_\theta + u_z(r, \theta, z) \underline{e}_z$$

gradient

$$[\nabla \underline{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (17.7)$$

divergence

$$\operatorname{div} \underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (17.8)$$

laplacien

$$\Delta \underline{u} = \operatorname{div} (\nabla \underline{u}) = (\Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2}) \underline{e}_r + (\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2}) \underline{e}_\theta + \Delta u_z \underline{e}_z \quad (17.9)$$

#### 17.1.4 Champ de tenseurs d'ordre 2

champ de tenseurs

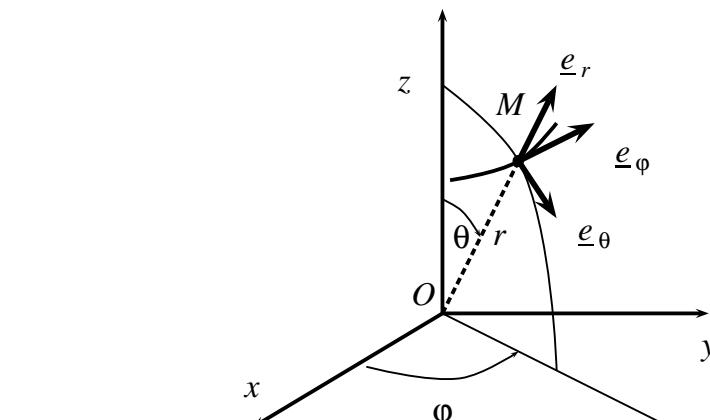
$$\underline{T} = T_{ij}(r, \theta, z) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

divergence

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{T} &= \left( \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right) \underline{e}_r \\ &+ \left( \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \right) \underline{e}_\theta \\ &+ \left( \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} \right) \underline{e}_z \end{aligned} \quad (17.10)$$

## 17.2 Coordonnées sphériques

### 17.2.1 Définition des coordonnées



coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned} \underline{OM} &= r \underline{e}_r \\ \underline{dM} &= dr \underline{e}_r + rd\theta \underline{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \underline{e}_\varphi \end{aligned} \quad (17.11)$$

vecteurs de base

$$\underline{\mathbf{e}}_r = \frac{\partial \underline{\mathbf{OM}}}{\partial r}, \quad \underline{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\mathbf{OM}}}{\partial \theta}, \quad \underline{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \underline{\mathbf{OM}}}{\partial \varphi} \quad (17.12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_r}{\partial r} = 0, & \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_\theta}{\partial r} = 0, & \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \underline{\mathbf{e}}_\theta, & \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{\mathbf{e}}_r, & \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \underline{\mathbf{e}}_\varphi, & \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \underline{\mathbf{e}}_\varphi, & \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta \underline{\mathbf{e}}_r - \cos \theta \underline{\mathbf{e}}_\theta \end{cases} \quad (17.13)$$

### 17.2.2 Champ scalaire

champ scalaire

$$f(\underline{\mathbf{OM}}) = f(r, \theta, \varphi) \quad (17.14)$$

gradient

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underline{\mathbf{e}}_\varphi \quad (17.15)$$

laplacien

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r}}_{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right)} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cotan \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (17.16)$$

### 17.2.3 Champ de vecteurs

champ de vecteurs

$$\underline{\mathbf{u}} = u_r(r, \theta, \varphi) \underline{\mathbf{e}}_r + u_\theta(r, \theta, \varphi) \underline{\mathbf{e}}_\theta + u_\varphi(r, \theta, \varphi) \underline{\mathbf{e}}_\varphi \quad (17.17)$$

gradient dans la base  $(\underline{\mathbf{e}}_r, \underline{\mathbf{e}}_\theta, \underline{\mathbf{e}}_\varphi)$

$$\nabla \underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \cotan \theta u_\varphi \right) \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \cotan \theta u_\theta + u_r \right) \end{bmatrix} \quad (17.18)$$

divergence

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{u}} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \cotan \theta \frac{u_\theta}{r} + 2 \frac{u_r}{r} \quad (17.19)$$

laplacien

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\mathbf{u}} = \operatorname{div}(\nabla \underline{\mathbf{u}}) &= \left( \Delta u_r - \frac{2}{r^2}(u_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}) \right) \underline{\mathbf{e}}_r \\ &+ \left( \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right) \underline{\mathbf{e}}_\theta \\ &+ \left( \Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \cotan \theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \right) \underline{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned}\quad (17.20)$$

#### 17.2.4 Champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{OM}}) = \underline{\mathbf{T}}(r, \theta, \varphi) = T_{ij}(r, \theta, \varphi) \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \quad (17.21)$$

divergence

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} &= \left( \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cotan \theta) \right) \underline{\mathbf{e}}_r \\ &+ \left( \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cotan \theta + 3T_{r\theta}) \right) \underline{\mathbf{e}}_\theta \\ &+ \left( \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3T_{r\varphi} + 2T_{\theta\varphi} \cotan \theta) \right) \underline{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned}\quad (17.22)$$

## 18 Eléments bibliographiques par thèmes

### Ouvrages de mécanique des milieux continus en langue française

- Ciarlet, P.G. (1986). *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris.
- Duvaut, G. (1998). *Mécanique des milieux continus*. Dunod, Paris.
- Germain, P. (1973). *Cours de mécanique des milieux continus T.I./Théorie générale*. Masson, Paris.
- Germain, P. (1986). *Mécanique, tomes I et II*. Ellipses, Paris.
- Germain, P. et Muller, P. (1995). *Introduction a la mecanique des milieux continus*. Masson, Paris, 1995.
- Mandel, J. (1966–1994). *Cours de mecanique des milieux continus*. Editions Jacques Gabay, Paris.
- Mandel, J. (1974). *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables*, Académie Polonaise des Sciences, Varsovie.
- Salençon, J. (2002). *Mécanique des milieux continus, tomes I à III*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique.
- Truesdell, C. (1974). *Introduction a la mecanique rationnelle des milieux continus*. Masson, Paris.

### Ouvrages de mécanique des milieux continus en langue étrangère

- Bertram, A. (2005). *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*. Springer, Berlin.
- Bertram, A. (1989). *Axiomatische Einfuehrung in die Kontinuumsmechanik*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- Haupt, P. (2000). *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer Verlag.
- Liu, I.-S. (2002). *Continuum mechanics*. Springer.
- Ogden, R. (1997). *Non-linear elastic deformations*. Dover, New York.
- Ziegler, F. (1995). *Mechanics of solids and fluids*. Springer Verlag.

### Aspects physiques et thermodynamiques

- Fer, F. (1970). *Thermodynamique macroscopique*. Gordon & Breach.
- Müller, I. (1985). *Thermodynamics*. Pitman Publishing Limited, London.
- Phillips, R. (2001). *Crystals, defects and microstructures : Modeling across scales*. Cambridge University Press.
- Teodosiu, C. (1982). *Elastic models of crystal defects*. Springer Verlag, Berlin.

### Aspects mathématiques

- Abraham, R., Marsden, J.E., Ratiu, T. (1988). *Manifolds, tensor analysis and applications*. Springer verlag, Applied mathematical sciences 75.

- Brillouin, L. (1938–1987). *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Editions Jacques Gabay, Paris.
- Cartan, H. (1985). *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris.
- Legrand, G. (1971). *Algèbre linéaire et multilinéaire et géométrie différentielle*. Masson et Cie, Paris.
- Lichnerowicz, A. (1946–1987). *Eléments de calcul tensoriel*. Edition Jacques Gabay, Paris.
- Schwartz, L. (1975). *Les tenseurs*. Hermann, Paris.

**Aspects historiques**

- Dugas, R. (1959–1996). *Histoire de la mécanique*. Editions Jacques Gabay, Paris.
- Mach, E. (1933). *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt. Édition française : La Mécanique, Exposé historique et critique de son développement, éditions Jacques Gabay, Paris, 1987.
- Timoshenko, S.P. (1953–1983). *History of strength of materials*. Dover.

**Mécanique et matériaux**

- Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.L. et Forest, S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermès, Paris.
- François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. (1991). *Comportement mécanique des matériaux. Volume 1 : élasticité et élastoplasticité*. Hermès, Paris.
- François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. (1993). *Comportement mécanique des matériaux. Volume 2 : endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact*. Hermès, Paris.
- Lemaître, J., Chaboche, J.L., Benallal, A., Desmorat, R. (2020) *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.
- Müller, I et Strehlow, P. (2004). *Rubber and rubber balloons : Paradigms and thermodynamics*. Springer, Berlin.

**Mécanique des structures**

- Avril, J. (1974). *Encyclopédie Vishay d'analyse des contraintes*. Vishay–Micromesures, Paris.
- Gérardin, M. et Rixen, D. (1993) *Théorie des vibrations*. Masson, Paris.

**Troisième partie**

**PRATIQUE**



## 19 Quelques transformations finies

Ce chapitre est consacré à l'étude géométrique de quelques grandes transformations du milieu continu. Il n'y est question que de cinématique. On essaie d'aller aussi loin que possible dans la description de la transformation du milieu sans recourir au calcul des efforts ni à la loi de comportement. Les deux premières sections concernent des transformations homogènes avec une large place à l'étude approfondie du glissement simple, cette école de la cinématique, tandis que les deux dernières sections abordent des transformations hétérogènes.

### 19.1 Distorsion simple

La distorsion simple est la transformation plane suivante dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \frac{\gamma}{2}X_2 \\ x_2 = X_2 + \frac{\gamma}{2}X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad (19.1)$$

dont l'intensité est  $\gamma$ . La transformation est illustrée sur la figure 19.1 pour deux valeurs de  $\gamma$  dans un corps de forme initiale carrée sur lequel une grille a été déposée. La forme finale est un losange. Le gradient de la transformation et le tenseur de Cauchy-Green droit sont :

$$[\tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\tilde{\mathbf{C}}] = [\tilde{\mathbf{F}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{4} & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \frac{\gamma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19.2)$$

Le gradient de la transformation est symétrique. C'est donc une déformation pure :  $\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{U}}$ .

La distorsion s'accompagne d'une diminution de volume :

$$\det \tilde{\mathbf{F}} = 1 - \frac{\gamma^2}{4} \quad (19.3)$$

Le gradient de la transformation distorsion s'identifie au tenseur  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  défini par (2.107) :

$$[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] = [\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19.4)$$

Dans le contexte infinitésimal, le résultat (2.135) indique que la distorsion simple ne peut pas être distinguée du glissement simple. Cela peut étonner dans la mesure où le glissement simple est une transformation isochore contrairement à la distorsion. Dans le contexte infinitésimal toutefois, la variation de volume (19.3) qui est en  $\gamma^2$  est effectivement négligeable.

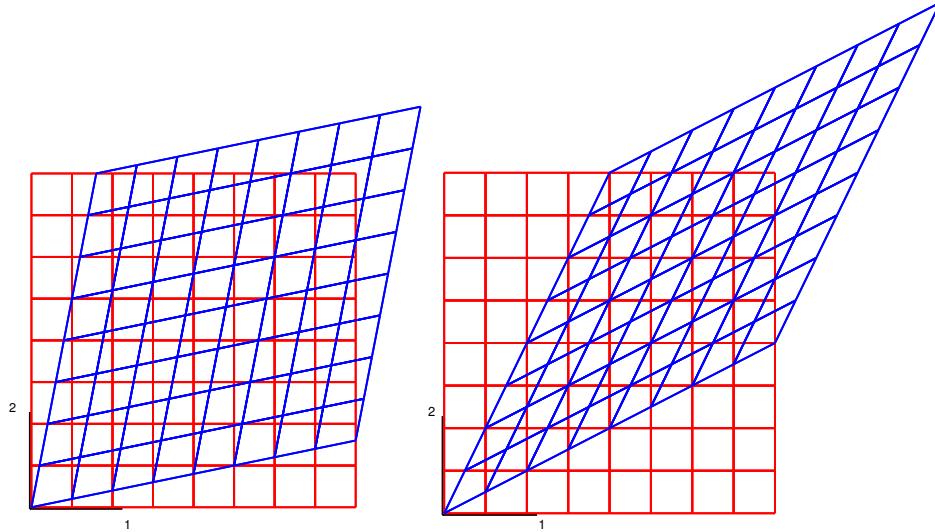


Figure 19.1 : Distorsion simple d'un carré muni d'une grille :  $\gamma = 0.2$  à gauche,  $\gamma = 0.4$ , à droite. La configuration initiale carrée et la configuration finale losange sont superposées.

## 19.2 Le glissement simple

Le glissement simple est une transformation fascinante, apparemment simple mais d'une insoudable richesse. Elle est difficile à réaliser expérimentalement mais nous l'envisageons ici du point de vue théorique. Les principales caractéristiques du glissement simple ont été présentées aux paragraphes 2.2.7 et 2.4.6. Des approfondissements sont proposés dans ce paragraphe. On rappelle la cinématique du glissement, illustrée sur la figure 2.8 :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \gamma X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

où  $\gamma$  est la valeur du glissement. Le gradient de la transformation vaut

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{1} + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \quad [\tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie que  $J = 1$  et que, par conséquent, la transformation est isochore. Les éléments de la décomposition polaire de  $\tilde{\mathbf{F}}$  sont donnés par les expressions (2.63) et (2.64).

### 19.2.1 Directions propres des déformations de Cauchy-Green

On considère un milieu continu soumis à une transformation homogène de glissement simple. Deux configurations sont privilégiées : la configuration initiale et la configuration après un glissement  $\gamma$  fixé. Construire le losange  $OB'CA$  à partir des points de coordonnées initiales  $O(0, 0)$ ,  $B(-\gamma/2, 1)$  et  $A$  sur l'axe 1. Ce losange est défini sur la configuration initiale. Montrer qu'il se transforme en un losange  $OB'C'A$  par glissement simple de valeur  $\gamma$ . Remarquer que ce n'est pas le cas à tout autre instant intermédiaire.

Identifier alors deux directions orthogonales sur la configuration de référence qui se transforment en deux directions orthogonales.

En déduire les directions principales du tenseur de déformation pure  $\tilde{U}$  et de la déformation de Cauchy-Green droit. Cette construction géométrique présentée par J. Mandel dans (Mandel, 1994), est illustrée sur la figure 19.2.

► Le losange a pour côté  $OB$  dont la longueur est  $\sqrt{1 + \gamma^2/4}$ . Les coordonnées des points  $A$  et  $C$  s'en déduisent :

$$A\left(\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}, 0\right) \quad C\left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}, 1\right)$$

Les points  $O$  et  $A$  sont inchangés dans le glissement considéré. Comme la transformation est homogène, les points  $B'$  et  $C'$  images de  $B$  et  $C$  après glissement s'obtiennent par exemple de la manière suivante :

$$\underline{OB}' = \underline{F} \cdot \underline{OB}, \quad [\underline{OB}'] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{OC}' = \underline{F} \cdot \underline{OC}, \quad [\underline{OC}'] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On constate que les vecteurs  $\underline{OC}$  et  $\underline{AB}$  sont orthogonaux :

$$\underline{OC} \cdot \underline{AB} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Le parallélogramme  $OACB$  est donc un losange.

On trouve aussi que les vecteurs  $\underline{OC}'$  et  $\underline{AB}'$  sont orthogonaux :

$$\underline{OC}' \cdot \underline{AB}' = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{2} - \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Le parallélogramme  $OAC'B'$ , transformé de  $OACB$  par glissement de valeur  $\gamma$  est donc aussi un losange. On vient donc de trouver deux directions matérielles orthogonales à  $t = t_0$  et qui se transforment en directions à nouveau orthogonales à  $t$ . Ces directions sont les couples de diagonales des losanges étudiés. En ajoutant à ces deux vecteurs  $\underline{OC}$  et  $\underline{AB}$  la direction  $\underline{e}_3$  orthogonale au plan de glissement, on obtient un trièdre vérifiant les hypothèses du théorème 2. Ce théorème permet de conclure que  $\underline{OC}$  et  $\underline{AB}$  sont des directions principales de  $\underline{C}$  et de  $\underline{U}$ . On peut vérifier que les transformés de  $\underline{OC}$  et  $\underline{AB}$  par un glissement  $\gamma_0 \neq 0$  différent de  $\gamma$  fixé ne sont pas deux à deux orthogonaux.

Ainsi, les diagonales  $OC$  et  $AB$  sont les directions propres de  $\underline{U}$  dans le plan de glissement tandis que les diagonales  $OC'$  et  $AB'$  sont celles de  $\underline{V}$ .

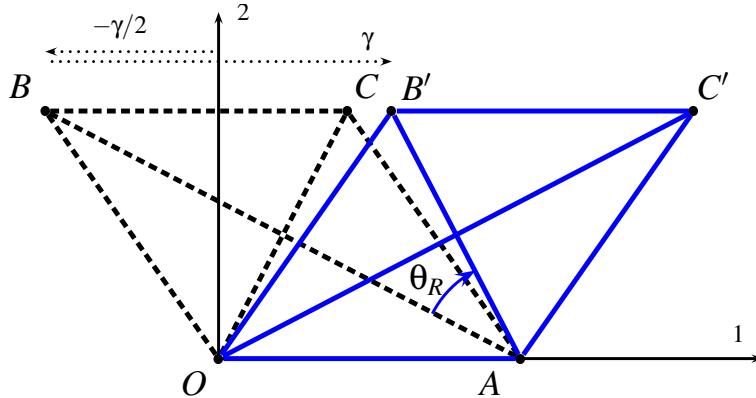


Figure 19.2 : Construction géométrique des directions principales du tenseur des déformations pures pour un glissement simple dans la direction horizontale d'amplitude  $\gamma = F_{12}$ .

### 19.2.2 Fibres matérielles allongées et raccourcies lors du glissement

Pour un glissement  $\gamma$  donné, déterminer les orientations des fibres matérielles de  $\Omega_0$  qui se sont raccourcies ainsi que de celles qui se sont allongées.

► Soit

$$\underline{A} = -\sin \Theta \underline{e}_1 + \cos \Theta \underline{e}_2 \quad (19.5)$$

une direction matérielle de  $\Omega_0$  caractérisée par l'angle  $\Theta$  qu'elle fait avec l'axe  $\underline{e}_2$ . Par glissement, elle se transforme en

$$\underline{a} = \underline{F} \cdot \underline{A}, \quad [\underline{a}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \Theta + \gamma \cos \Theta \\ \cos \Theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'élongation relative est le rapport des normes de  $\underline{a}$  et  $\underline{A}$  d'après (2.72) :

$$\lambda = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{A}|} = |\underline{F} \cdot \underline{A}| = \sqrt{1 - 2\gamma \sin \Theta \cos \Theta + \gamma^2 \cos^2 \Theta} \quad (19.6)$$

La fibre s'est donc allongée si

$$\lambda > 1 \iff \gamma \cos \Theta (\gamma \cos \Theta - 2 \sin \Theta) > 0$$

Pour un glissement  $\gamma$  donné, cette inéquation permet de déterminer le(s) secteur(s) angulaire(s) issu(s) de  $O$  contenant les directions matérielles qui s'allongent en glissant. Le(s) secteur(s) complémentaires contiennent les fibres qui se raccourcissent. Ces secteurs sont représentés sur la figure 19.3 pour trois valeurs du glissement. Pour les faibles glissements, les fibres du premier et du troisième quadrants s'allongent tandis que la plupart de celles du second et quatrième quadrants se raccourcissent. Les directions principales du tenseur de déformation pure, données par (2.59) et (2.60) sont représentées sur la figure. Ce sont les bissectrices des secteurs angulaires mis en évidence. Les secteurs angulaires contenant les fibres qui se raccourcissent (en gris sur la figure) tendent à s'écraser sur

l'axe horizontal lorsque la valeur du glissement augmente.

La direction  $\underline{V}_1$  (resp.  $\underline{V}_2$ ) est celle qui s'allonge le plus (resp. le moins). Pour le voir, calculons la dérivée de  $\lambda(\Theta)$  :

$$-2\lambda \frac{d\lambda}{d\Theta} = \sin 2\Theta \gamma^2 + 2\gamma \cos 2\Theta \quad (19.7)$$

Cette expression s'annule en

$$\tan 2\Theta = -\frac{2}{\gamma} \iff \Theta = -\frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2}{\gamma} + k\frac{\pi}{2} \quad (19.8)$$

Ces angles caractérisent effectivement les directions principales de  $\underline{U}$  données par (2.59) et (2.60). D'après ces expressions, on doit trouver

$$\tan \Theta_1 = \frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4}), \quad \tan \Theta_2 = \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})$$

La formule de trigonométrie  $\tan 2\Theta = 2 \tan \Theta / (1 - \tan^2 \Theta)$  permet effectivement de constater l'équivalence entre les expressions précédentes et (19.8).

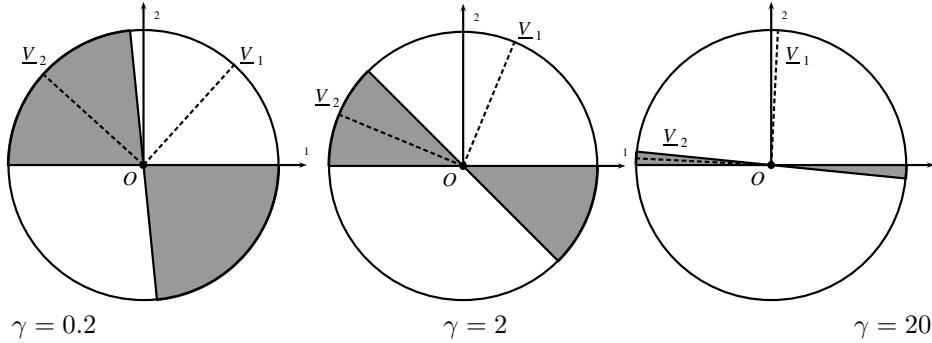


Figure 19.3 : Pour un milieu continu soumis à un glissement simple  $\gamma = F_{12}$  dans le plan  $(1, 2)$  selon la direction  $\underline{e}_1$ , sont représentés en grisé les secteurs angulaires contenant les directions matérielles sur la configuration initiale qui se raccourcissent lors du glissement, pour trois valeurs différentes du glissement  $\gamma$ . Les secteurs complémentaires en blanc contiennent les directions qui s'allongent. Les directions principales du tenseur des déformations pures sont superposées sur le schéma.

#### Ellipsoïde des dilatations

Calculons la déformée par glissement simple du cercle unité :

$$X_1^2 + X_2^2 - 1. = 0 \quad (19.9)$$

$$(x_1 - \gamma x_2)^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$x_1^2 - 2\gamma x_1 x_2 + (1 + \gamma^2)x_2^2 - 1 = 0 \quad (19.10)$$

Les points matériels transformés sont situés sur l'ellipse dont les axes principaux sont les transformées par glissement des directions principales unitaires de  $\underline{U}$ ,  $\underline{V}_1$  et  $\underline{V}_2$ . Le

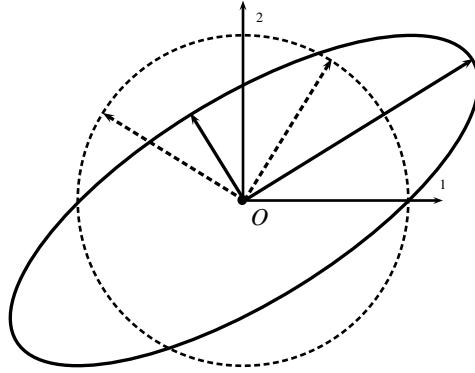


Figure 19.4 : Ellipse des dilatations (en trait plein) pour un glissement  $\gamma = F_{12} = 1$ . L'ellipse est la transformée du cercle unité tracé en pointillé. Les directions principales  $\underline{V}_1, \underline{V}_2$  et leurs transformées  $\underline{v}_1, \underline{v}_2$  sont respectivement les lignes pointillées et en trait plein.

cercle initial, l'ellipse (dite des dilatations), les directions  $\underline{V}_1$  et  $\underline{V}_2$  et leurs transformées sont représentées sur la figure 19.4 pour  $\gamma = 1$ . Noter que pour toute autre valeur du glissement, les transformées de  $\underline{V}_1$  et  $\underline{V}_2$  fixées initialement ne sont pas orthogonales.

### 19.2.3 Un festival de rotations

#### Rotation propre

La rotation propre intervient dans la décomposition polaire du gradient de la transformation :

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U} = \underline{V} \cdot \underline{R}$$

C'est la rotation propre  $\underline{R}$  qui permet de passer des directions principales de  $\underline{U}$  à celles de  $\underline{V}$  d'après (2.92). En glissement simple,  $\underline{R}$  est une rotation d'axe  $\underline{e}_3$  et d'angle  $\theta_R$ . Elle transforme la direction  $AB$  en  $AB'$  et la direction  $OC$  en  $OC'$ . Il est donc possible de lire  $\theta_R$  sur la figure 19.2 en calculant le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \cos \theta_R &= \frac{\underline{AB} \cdot \underline{AB}'}{|\underline{AB}| |\underline{AB}'|} = \frac{2}{\left(2\left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right) + \gamma\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}\right)^{1/2} \left(2\left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right) - \gamma\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} \end{aligned}$$

ou

$$\tan^2 \theta_R = \frac{\gamma^2}{4}$$

La figure 19.2 pour  $\gamma > 0$  permet de conclure sur le signe de l'angle :

$$\tan \theta_R = -\frac{\gamma}{2}$$

ce qui est conforme au résultat (2.65) trouvé de manière purement analytique dans le cours.

#### Vitesses de rotation

La vitesse de rotation propre en glissement simple s'obtient à partir de (2.65) :

$$\dot{\theta}_R = -\frac{\frac{\dot{\gamma}}{2}}{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (19.11)$$

Il est important de remarquer que la vitesse de rotation propre ne coïncide pas avec celle du taux de rotation  $\underline{W}$  calculé au paragraphe 2.4.6, équations (2.244) et (2.246) :

$$\dot{\theta}_W = -\frac{\gamma}{2} \quad (19.12)$$

L'angle  $\theta_W$  grandit donc indéfiniment proportionnellement à  $\gamma$ . C'est un comportement bien différent de  $\theta_R$  qui tend vers  $-\pi/2$  lorsque le glissement tend vers l'infini. Ce fait illustre les significations tout à fait différentes de ces deux rotations : le taux de rotation a une signification instantanée donnée par le théorème 9, tandis que la rotation propre mesure une rotation par rapport à une configuration de référence donnée. Ces différences sont illustrées à nouveau dans la suite.

Une autre vitesse de rotation importante est la vitesse de rotation des directions principales de  $\underline{D}$ . Cette vitesse de rotation est en général distincte de  $\underline{W}$ , malgré ce qu'une lecture erronée du théorème 9 pourrait laisser croire. En glissement simple, le tenseur vitesse de déformation  $\underline{D}$  est donné par (2.244). A chaque instant ses directions principales sont à  $\pm\pi/4$  de l'axe  $\underline{e}_2$ . La vitesse de rotation de ces directions est donc nulle, contrairement à  $\theta_R$  et  $\theta_W$ ...

#### Vitesses de rotations moyennes

On considère à nouveau une fibre matérielle  $\underline{A}$  dans la configuration initiale, faisant un angle  $\Theta$  avec  $\underline{e}_2$  et qui se transforme en  $\underline{a}$  par glissement simple. Soit  $\theta$  l'angle que fait alors  $\underline{a}$  avec  $\underline{e}_2$  :

$$-\tan \theta = \frac{-\sin \Theta + \gamma \cos \Theta}{\cos \Theta} = -\tan \Theta + \gamma \quad (19.13)$$

La vitesse de rotation de la fibre matérielle est donc :

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{\gamma}}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{\dot{\gamma}}{1 + (\gamma - \tan \Theta)^2} \quad (19.14)$$

Calculons la vitesse de rotation moyenne des fibres matérielles du milieu sur l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  :

$$\dot{\theta}_L := \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\theta} d\Theta = -\frac{1}{\pi} \dot{\gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{1 + (\gamma - \tan \Theta)^2} \quad (19.15)$$

où l'indice  $L$  (pour lagrangien) a été introduit dans la notation pour indiquer qu'il s'agit d'une moyenne sur la configuration de référence. Le calcul de l'intégrale précédente peut

se faire grâce au changement de variable

$$u = \tan \Theta, \quad du = (1 + u^2) d\Theta$$

De la sorte,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Theta}{1 + (\gamma - \tan \Theta)^2} &= \int \frac{du}{(1 + (\gamma - u)^2)(1 + u^2)} \\ &= \frac{1}{\gamma^2 + 4} \int \left( -\frac{1}{\gamma} \frac{2u - 2\gamma}{1 + (\gamma - u)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 + (\gamma - u)^2} + \frac{1}{1 + u^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{2u}{1 + u^2} \right) du \\ &= \frac{1}{\gamma^2 + 4} \left( \frac{1}{\gamma} \log \frac{1 + u^2}{1 + (\gamma - u)^2} - \text{atan}(\gamma - u) + \text{atan} u \right) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\dot{\theta}_L = -\frac{\dot{\gamma}}{2} \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (19.16)$$

expression identique à (19.11). La vitesse moyenne des fibres matérielles dessinées sur la configuration de référence est donc exactement égale à la vitesse de rotation propre, ce qui fournit une interprétation supplémentaire de la rotation propre dans le cas du glissement simple.

On peut aussi considérer les directions matérielles  $\underline{a}$  tracées à l'instant  $t$  faisant un angle  $\theta$  avec  $\underline{e}_2$ . Leur vitesse instantanée est obtenue en prenant la configuration actuelle comme configuration de référence ( $\Theta = \theta$ ) dans (19.14) :

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{\gamma}}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{1}{\pi} \dot{\gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (19.17)$$

La vitesse moyenne de rotation instantanée des fibres matérielles à  $t$  est

$$\dot{\theta}_c := \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dot{\theta} d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (19.18)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^2} = \left[ \frac{u}{2(1 + u^2)} + \frac{1}{2} \text{atan } u \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= -\frac{\dot{\gamma}}{2} \end{aligned} \quad (19.19)$$

qui n'est autre que la vitesse angulaire associée au taux de rotation du milieu  $\dot{\theta}_W$  (cf. (19.12)). Il s'agit là d'une interprétation supplémentaire du taux de rotation en glissement simple comme vitesse de rotation moyenne.

#### 19.2.4 Rotation relative dans le glissement de deux lignes matérielles initialement orthogonales

On se demande comment varie l'angle que font deux directions matérielles données initialement au cours du glissement simple. Dans quel cas, ces directions se rapprochent-elles (l'angle diminue-t-il ?) ? Dans quel cas ces directions s'éloignent-elles l'une de l'autre

(l'angle augmente-t-il ?) ? La réponse n'est pas complètement intuitive et on demande de la donner pour deux directions  $(\underline{M}_1, \underline{M}_2)$  initialement orthogonales, le vecteur  $\underline{M}_1$  faisant un angle  $\alpha$  avec la direction de glissement  $\underline{e}_1$ . L'étude du cas  $\gamma > 0$  est suffisante.

► Les directions matérielles initiales  $\underline{M}_1$  et  $\underline{M}_2$  sont définies par

$$\underline{M}_1 = \cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2, \quad \underline{M}_2 = -\sin \alpha \underline{e}_1 + \cos \alpha \underline{e}_2$$

Elles se transforment respectivement en  $\underline{m}_1$  et  $\underline{m}_2$  par glissement. Elles font alors un angle  $\varphi$  qui, d'après (2.77), est donné par

$$\cos \varphi = \frac{\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2}{|\underline{m}_1| |\underline{m}_2|} = \frac{\underline{M}_1 \cdot \underline{C} \cdot \underline{M}_2}{\lambda(\underline{M}_1) \lambda(\underline{M}_2)} \quad (19.20)$$

Cette expression fait intervenir le tenseur de Cauchy-Green droit (2.55). Le calcul donne alors

$$\cos \varphi = \frac{\gamma \cos 2\alpha + \frac{\gamma^2}{2} \sin 2\alpha}{\sqrt{1 + \gamma \sin 2\alpha + \gamma^2 \sin^2 \alpha} \sqrt{1 - \gamma \sin 2\alpha + \gamma^2 \cos^2 \alpha}} \quad (19.21)$$

On vérifie que les deux vecteurs sont orthogonaux ( $\varphi = \pi/2$ ) pour  $\gamma = 0$ . Pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire lorsque les directions initiales coïncident respectivement avec  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ , l'angle  $\varphi$  évolue de la façon suivante

$$\cos \varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{1}{\gamma} \quad (19.22)$$

Il tend vers 0 pour de forts glissements, c'est-à-dire que les directions se referment progressivement. Dans le cas général, l'angle  $\varphi$  que font les deux directions au cours du glissement tend vers la limite suivante lorsque le glissement augmente :

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \cos \varphi = \frac{\sin 2\alpha}{2|\sin \alpha| |\cos \alpha|} = \text{signe}(\sin 2\alpha) \quad (19.23)$$

Ainsi,

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \cos \varphi = 1 \Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \varphi = 0 \quad (19.24)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < 0 \Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \cos \varphi = -1 \Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \varphi = \pi \quad (19.25)$$

Lorsque  $\underline{M}_1$  est dans le premier quadrant, les directions ont donc tendance à se refermer et font finalement un angle nul. Au contraire, lorsque  $\underline{M}_1$  est dans le quatrième quadrant, les directions tendent à s'ouvrir et font finalement un angle plat. Ces évolutions sont illustrées pour différents angles  $\alpha$  par les courbes de la figure 19.5. Les exemples donnés montrent que la décroissance de l'angle  $\varphi$  pour des angles  $\alpha$  positif est monotone. L'évolution est plus complexe pour les angles  $-\pi/8 < \alpha < 0$  puisque les directions commencent par se rapprocher pour finalement se séparer et former l'angle plat prévu. Pour confirmer ce comportement qui n'a rien d'évident de prime abord, on étudie les cas

$\gamma$	0	$1/2\varepsilon$	$+\infty$
$\varphi$	$\pi/2$	$\searrow$	$4\varepsilon$

Tableau 19.1: Tableau de variation de la fonction  $\varphi(\gamma)$  donnant l'évolution de l'angle entre deux directions matérielles initialement orthogonales et dont le premier fait un angle  $\alpha = -\varepsilon$  faible avec la direction de glissement  $e_1$ .

- $\varphi = \varepsilon$  où  $\varepsilon \ll 1$ . Le développement limité de (19.21) donne

$$\cos \varphi \simeq \frac{\gamma + \varepsilon \gamma^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 + 2\varepsilon\gamma^3 + \varepsilon^2\gamma^4}} \quad (19.26)$$

La dérivée de cette fonction par rapport à  $\gamma$  est positive pour  $\gamma > 0$ , i.e.  $\cos \varphi$  est monotone croissant. L'angle  $\varphi$  décroît donc de manière monotone de  $\pi/2$  à 0 lorsque la valeur du glissement augmente.

- $\varphi = -\varepsilon$  où  $\varepsilon \ll 1$ . Le développement limité de (19.21) donne

$$\cos \varphi \simeq \frac{\gamma - \varepsilon \gamma^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 - 2\varepsilon\gamma^3 + \varepsilon^2\gamma^4}} \quad (19.27)$$

Le tableau de variation de cette fonction constitue la table 19.1. L'angle  $\varphi$  diminue d'abord jusqu'à une valeur d'autant plus faible que  $\varepsilon$  est petit puis grandit à nouveau pour atteindre l'angle plat prévu.

Ce mouvement relatif des lignes matérielles est illustré sur les figures 19.6 à 19.8. Les cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha > 0$  sont représentés à diverses étapes sur les figures 19.6 et 19.7.

La figure 19.8 correspondant à  $\alpha < 0$  montre clairement que les directions matérielles ont d'abord tendance à se rapprocher pour finalement s'écartier et former un angle plat.

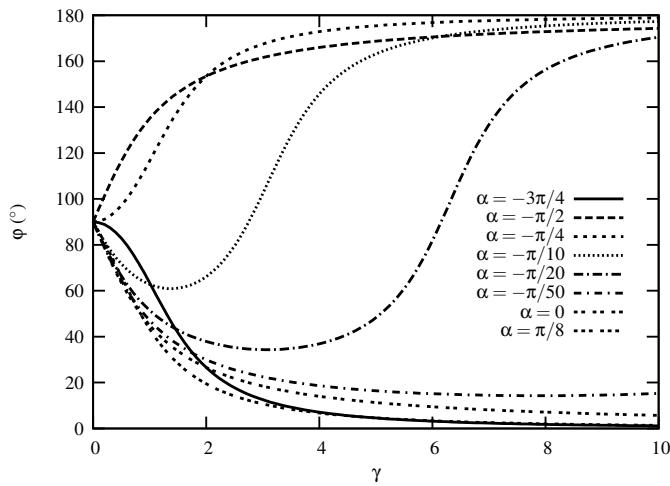
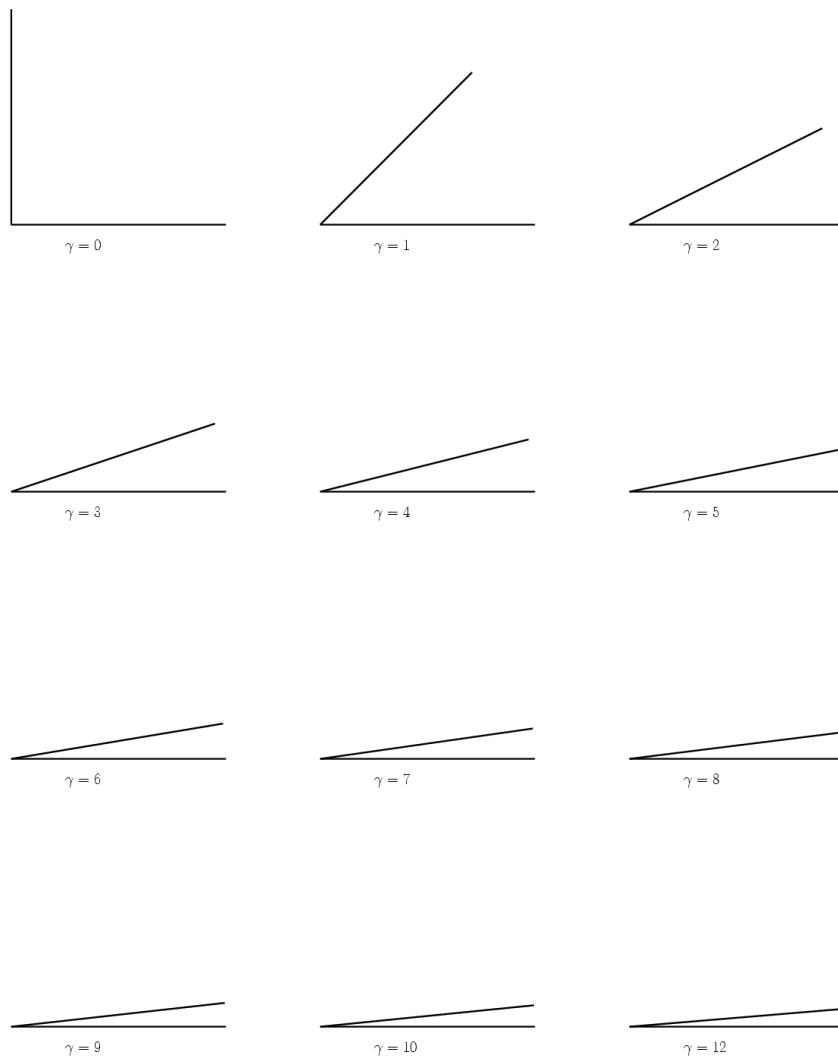
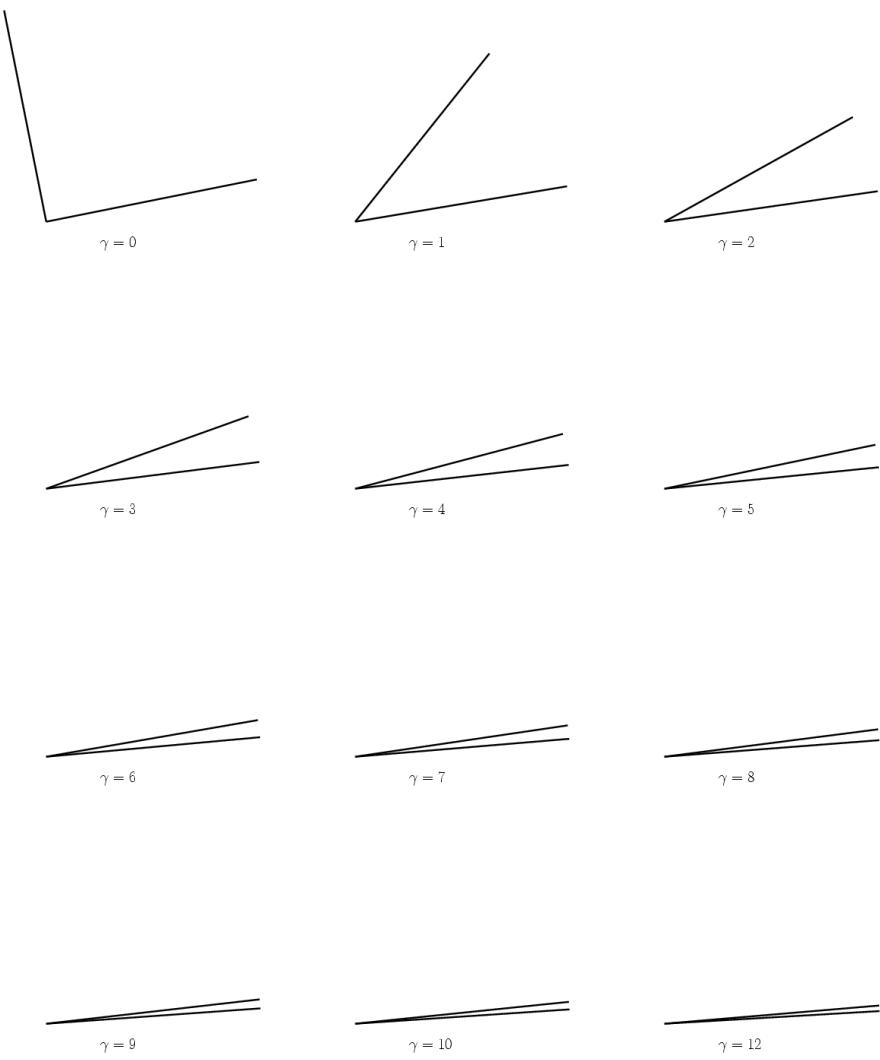


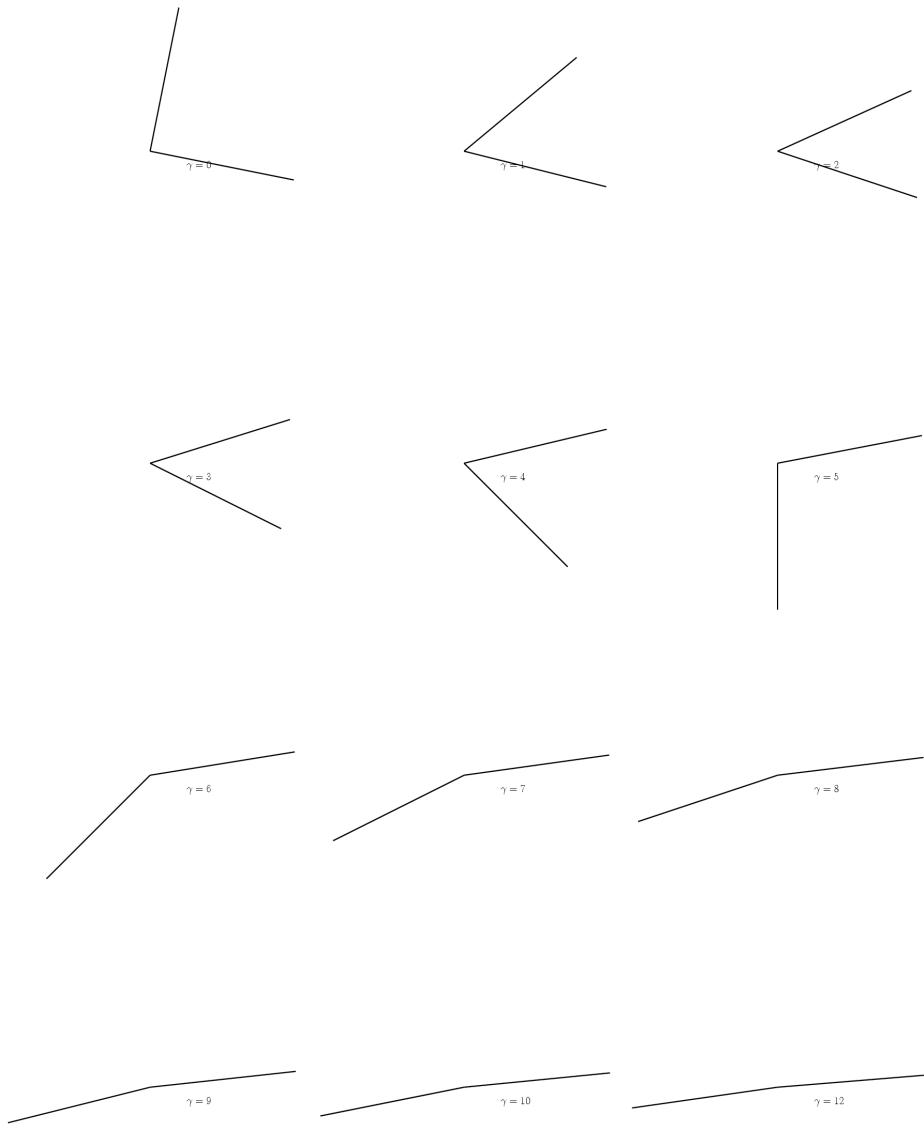
Figure 19.5 : Rotation relative de deux directions matérielles initialement orthogonales lors du glissement, en fonction de leur orientation initiale  $\alpha$ .



*Figure 19.6 : Mouvement de deux vecteurs unitaires initialement orthogonaux au cours du glissement simple dans la direction horizontale ( $\gamma = F_{12}$ ). Les deux vecteurs coïncident initialement avec  $e_1$  et  $e_2$  respectivement.*



*Figure 19.7 : Mouvement de deux vecteurs unitaires initialement orthogonaux au cours du glissement simple dans la direction horizontale ( $\gamma = F_{12}$ ). Les deux vecteurs font initialement un angle  $\tan \theta = 0.2$  avec  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  respectivement.*



*Figure 19.8 : Mouvement de deux vecteurs unitaires initialement orthogonaux au cours du glissement simple dans la direction horizontale ( $\gamma = F_{12}$ ). Les deux vecteurs font initialement un angle  $\tan \theta = -0.2$  avec  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$  respectivement.*

### 19.3 La flexion circulaire

La flexion circulaire consiste à transformer un bloc rectangulaire en un tube cylindrique circulaire comme sur la figure 19.9. C'est une transformation hétérogène pouvant mettre en jeu des déformations et des rotations importantes.

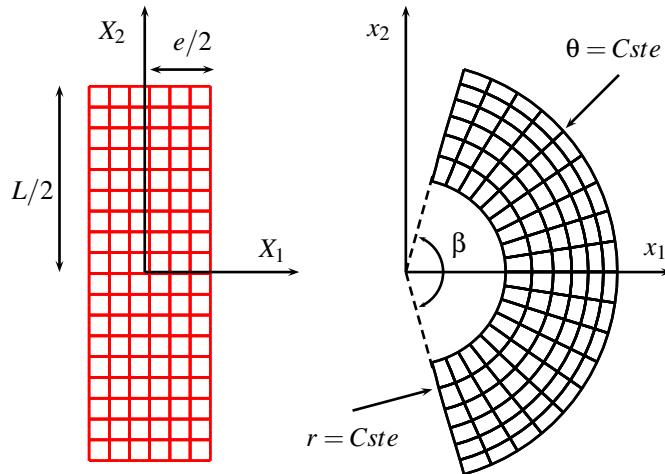


Figure 19.9 : Cinématique de la flexion circulaire : configuration de référence à gauche munie d'un repérage cartésien, et configuration actuelle à droite, munie d'un repérage cartésien et d'un repérage cylindrique.

#### 19.3.1 Déformations et rotations par flexion circulaire

Pour représenter la transformation de manière aussi concise que possible, on utilise des repères différents sur la configuration de référence et sur la configuration finale :

- un repère cartésien orthonormé sur la configuration de référence avec la base  $(\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3)$  et les coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  désignant la position initiale du point matériel ;
- un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x_3)$  pour indiquer la position actuel du point matériel ; l'origine est le centre de courbure du barreau fléchi ; les vecteurs de base sont  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ .

La transformation du bloc rectangulaire de longueur  $L$  et d'épaisseur  $e$  en un tube de courbure  $\beta$ , comme sur la figure 19.9, est la suivante :

$$r = f(X_1), \quad \theta = g(X_2), \quad z = X_3 \quad (19.28)$$

dans le cas des déformations planes. La position actuelle de chaque point matériel est repérée par

$$\underline{x}(X_1, X_2, X_3) = f(X_1)\underline{e}_r(X_2) + X_3\underline{e}_z \quad (19.29)$$

Le gradient de la transformation doit être calculé en utilisant des bases distinctes au départ et à l'arrivée.

On revient pour cela à la définition intrinsèque (12.123) de l'opérateur gradient :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &= \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X_1} \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*1} + \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X_2} \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*2} + \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X_3} \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*3} \\ &= \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X_1} \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X_2} \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X_3} \otimes \underline{\mathbf{E}}_3\end{aligned}\quad (19.30)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial r}{\partial X_1} \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + r \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_r}{\partial X_2} \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \frac{\partial z}{\partial X_3} \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{E}}_3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial X_1} \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + f \frac{\partial \theta}{\partial X_2} \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{E}}_3 \\ &= f' \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + fg' \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{E}}_3\end{aligned}\quad (19.31)$$

La matrice correspondante de l'application linéaire  $\tilde{\mathbf{F}}$  s'écrit

$$[\tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & fg' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (19.32)$$

par rapport aux bases  $(\underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{E}}_2, \underline{\mathbf{E}}_3)$  et  $(\underline{\mathbf{e}}_r, \underline{\mathbf{e}}_\theta, \underline{\mathbf{e}}_z)$ . La transformation (19.31) peut se mettre sous la forme de la composition de deux transformations successives, ce qui permet de mieux l'interpréter :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \underbrace{(\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{E}}_3)}_{\tilde{\mathbf{R}}} \cdot \underbrace{(f' \underline{\mathbf{E}}_1 \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + fg' \underline{\mathbf{E}}_2 \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \underline{\mathbf{E}}_3 \otimes \underline{\mathbf{E}}_3)}_{\tilde{\mathbf{U}}}\quad (19.33)$$

La transformation  $\tilde{\mathbf{R}}$  est effectivement une rotation puisqu'elle transforme  $\underline{\mathbf{E}}_1$  en  $\underline{\mathbf{e}}_r$ ,  $\underline{\mathbf{E}}_2$  en  $\underline{\mathbf{e}}_\theta$  et laisse  $\underline{\mathbf{E}}_3$  invariant. Cette application linéaire est donc la rotation d'angle  $-\beta/2 \leq \theta \leq \beta/2$  et d'axe  $\underline{\mathbf{E}}_3$ . Quant à  $\tilde{\mathbf{U}}$ , il s'agit d'un tenseur symétrique. La composée de transformation (19.33) représente donc la décomposition polaire de  $\tilde{\mathbf{F}}$ . La flexion circulaire implique en chaque point matériel une déformation pure selon les axes  $(X_1, X_2)$  et une rotation dépendant de la cote  $X_2$  uniquement, comme l'indique la figure 19.9.

Une autre décomposition possible de  $\tilde{\mathbf{F}}$  est

$$\tilde{\mathbf{F}} = \underbrace{(f' \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r + fg' \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{e}}_z)}_{\tilde{\mathbf{V}}} \cdot \underbrace{(\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{E}}_3)}_{\tilde{\mathbf{R}}}\quad (19.34)$$

c'est-à-dire une rotation (la même que précédemment !, comme il se doit dans la décomposition polaire) suivie d'une déformation pure. On calcule les tenseurs des déformations de Cauchy-Green droit et gauche

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{U}}^2 = f'^2 \underline{\mathbf{E}}_1 \otimes \underline{\mathbf{E}}_1 + g'^2 f^2 \underline{\mathbf{E}}_2 \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \underline{\mathbf{E}}_3 \otimes \underline{\mathbf{E}}_3\quad (19.35)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{V}}^2 = f'^2 \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r + g'^2 f^2 \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{e}}_z\quad (19.36)$$

définis respectivement, comme on le lit sur les formules, sur la configuration initiale et sur la configuration actuelle.

### 19.3.2 Cas d'une transformation isochore

La transformation (19.33) conduit à une variation de volume

$$\det \tilde{\mathbf{F}} = ff'g' \quad (19.37)$$

La transformation est isochore lorsque  $f$  et  $g$  sont solutions de l'équation différentielle

$$f(X_1)f'(X_1)g'(X_2) = 1$$

qui se décline en deux autres équations différentielles

$$g'(X_2) = A, \quad f'(X_1)f(X_1) = B, \quad \text{avec} \quad AB = 1$$

La première équation différentielle donne

$$g(X_2) = AX_2 + D$$

Les conditions cinématiques suivantes sont imposées :

$$g(0) = 0, \quad g\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\beta}{2}$$

Ainsi,

$$\theta = g(X_2) = \frac{\beta}{L}X_2$$

Cette première intégration donne  $B = 1/A = L/\beta$ . L'intégration de la seconde équation différentielle conduit alors à

$$f = \sqrt{\frac{2L}{\beta}X_1 + C}$$

où  $C$  est une constante d'intégration que l'on va remplacer par une autre grandeur liée à la notion de

#### Fibre neutre

La fibre neutre est constituée des fibres matérielles qui ne subissent pas d'allongement au cours de la flexion circulaire. L'observation de la figure 19.9 suggère l'existence d'une telle fibre neutre séparant la région du bloc rectangulaire où les lignes  $X_1 = Cste$  se sont allongées pour devenir les lignes  $r = Cste$ , de la région où ces lignes se sont raccourcies. Elle correspond donc à la fibre de cote  $X_1 = \delta$  telle que

$$f'(\delta) = 1 = \frac{2L}{\beta} \frac{1}{2\sqrt{C + 2L\delta/\beta}} \implies C = \frac{L}{\beta} \left( \frac{L}{\beta} - 2\delta \right)$$

L'angle de courbure  $\beta$  imposé au bloc est relié au

#### Rayon de courbure de la fibre neutre

La fibre neutre, initialement la droite  $X_1 = \delta$ , est un arc de cercle de rayon  $R$  et de longueur  $R\beta$ . La fibre neutre n'étant ni allongée, ni raccourcie, on a

$$R = \frac{L}{\beta} \quad (19.38)$$

La fonction  $f$  s'écrit alors de la manière suivante :

$$f(X_1) = R \sqrt{1 + \frac{2}{R}(X_1 - \delta)} \quad (19.39)$$

Encore faut-il que

$$\delta < \frac{R - e}{2}$$

Typiquement,  $\delta$  est proche de 0 ou du moins<sup>1</sup>  $\delta = \mathcal{O}(e)$ , voire  $\delta = o(e)$ . En fait, on a  $\delta = \mathcal{O}(e^2/L)$ .

### 19.3.3 Cas d'une plaque mince

Selon ses dimensions caractéristiques par rapport à l'angle de courbure imposé  $\beta$ , le bloc rectangulaire subit des déformations et rotations plus ou moins grandes. Voici les situations importantes :

- **cas des petites déformations.** Cette situation correspond à

$$|\underline{\mathbf{E}}| \ll 1 \iff \frac{e\beta}{L} = \frac{e}{R} \ll 1 \quad (19.40)$$

Petite déformation n'est pas synonyme de "petite rotation". En effet si la plaque est suffisamment mince, le rapport  $e/L$  peut être suffisamment petit pour que des rotations  $\beta$  non infinitésimales soient acceptables tout en remplaçant la condition des petites déformations précédente. Cette situation caractéristique des plaque mince est illustrée sur la figure 2.12(a).

- **cas des petites rotations.** Les rotations sont petites lorsque

$$\beta \ll 1 \quad (19.41)$$

Les rotations peuvent être petites et les déformations importantes. C'est le cas des blocs épais pour lesquels la moindre flexion entraîne des déformations importantes loin de la fibre neutre.

- **cas des petites transformations.** La transformation est infinitésimale lorsque les conditions (19.40) et (19.41) sont remplies simultanément.

Le cas limite des plaques infiniment minces est obtenu en prenant  $e = 0$ . La transformation se réduit à

$$r = R, \quad \theta = \frac{X_2}{R}$$

dont le gradient est

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{E}}_3$$

Il s'agit d'une rotation pure et  $\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{1}}$ , autrement dit la déformation est "nulle". C'est le cas par exemple des feuilles de papier d'aluminium utilisées dans l'emballage qui sont si minces qu'elles adoptent toutes les formes imposées sans effort.

1. Pour que la fibre neutre soit excentrée, il faudrait imposer un effort extérieur résultant.

#### 19.4 Gonflement et cavitation

On considère dans ce paragraphe les transformations isochores à symétrie sphérique que peuvent subir une boule ou une sphère creuse de centre  $O$ . Le repérage des points matériels  $M$  dans la configuration de référence est

$$\underline{OM} = R \underline{E}_R$$

L'image de  $M$  par la transformation à symétrie sphérique est

$$r(R) \underline{e}_r, \quad \text{avec } \underline{e}_r = \underline{E}_R$$

Le gradient de la transformation, en coordonnées sphériques, vaut

$$\tilde{\underline{F}} = \frac{dr}{dR} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{r}{R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{r}{R} \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi \quad (19.42)$$

La transformation est isochore si

$$\det \tilde{\underline{F}} = \frac{dr}{dR} \frac{r^2}{R^2} = 1$$

Il s'agit d'une équation différentielle pour la fonction  $r(R)$  dont la famille de solution est

$$r = \sqrt[3]{R^3 + C} \quad (19.43)$$

où  $C$  est une constante d'intégration. La résolution plus avant du problème commande de préciser la géométrie initiale :

- **Sphère creuse** de rayon intérieur initial  $R_0$ . Si le rayon intérieur final est  $R_1$ , la transformation complète est

$$r = \sqrt[3]{R^3 + R_1^3 - R_0^3}$$

Une telle transformation caractérise par exemple un sphère en caoutchouc soumise à une pression interne et/ou externe.

- **Boule**. La constante  $C$  caractérise l'apparition d'un trou dans la boule :

$$r(R=0) = C^{1/3} = R_0$$

$$r = \sqrt[3]{R^3 + R_0^3} \quad (19.44)$$

Le centre de la boule s'est transformé en une sphère de rayon  $R_0$  ! Un tel phénomène existe, c'est la cavitation qui peut se produire aussi bien dans les fluides que dans les solides (où elle correspond à un endommagement). La transformation présente un point de "fission" ! La transformation inverse de la cavitation est l'implosion pour laquelle on assiste à la "fusion" de la sphère intérieure d'une cavité en un point central.

Dans le cas de la cavitation, le gradient de la transformation isochore est

$$[\tilde{\underline{F}}] = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{(R^3+R_0^3)^{2/3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(R^3+R_0^3)^{1/3}}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(R^3+R_0^3)^{1/3}}{R} \end{bmatrix} \quad (19.45)$$

Il présente une singularité en  $R = 0$  :

$$F_{rr}(R = 0) = 0, \quad F_{\theta\theta} = \infty, \quad F_{\varphi\varphi} = \infty$$

Pourtant, la transformation (19.44) est continue ! Il ne s'agit que d'une singularité de son gradient... La mécanique des milieux continus intègre l'existence de telles singularités en des points, lignes ou surfaces isolés. L'exemple ci-dessus en est une illustration très simple. Ces singularités ont en général une signification mécanique forte : cavitation, endommagement...



## 20 Quelques tourbillons

### 20.1 Le vorticimètre

Le vorticimètre est un montage élémentaire permettant de mesurer le taux rotation local à la surface d'un fluide dans un écoulement plan.

Il s'agit un assemblage rigide formé de deux tiges orthogonales. Soit  $\underline{e}_z$  la direction orthogonale au plan du croisillon. On dépose l'assemblage à la surface d'un fluide en mouvement dans ce plan et on observe la rotation et la translation du montage. Les directions unitaires parallèles à chaque élément du croisillon sont appelées  $\underline{m}_1$  et  $\underline{m}_2$ . La vitesse instantanée de chaque vecteur coïncide avec celle de la ligne de fluide sous-jacente. Or l'évolution de la direction d'une fibre matérielle a été calculée au paragraphe 2.4.3. Elle est caractérisée par l'équation (2.210) qui, appliquée aux directions  $\underline{m}_1$  et  $\underline{m}_2$ , donne

$$\begin{aligned}\dot{\underline{m}}_1 &= \underline{L} \cdot \underline{m}_1 - (\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_1) \underline{m}_1 \\ \dot{\underline{m}}_2 &= \underline{L} \cdot \underline{m}_2 - (\underline{m}_2 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_2) \underline{m}_2\end{aligned}$$

Suivons l'évolution de l'angle entre un axe du croisillon et une direction fixe de l'espace  $\underline{a}$  :

$$\cos \varphi_1 = \underline{m}_1 \cdot \underline{a}$$

$$\frac{d}{dt} \cos \varphi_1 = -\sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 = \dot{\underline{m}}_1 \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \underline{L} \cdot \underline{m}_1 - (\underline{m}_1 \cdot \underline{D} \cdot \underline{m}_1) \underline{m}_1 \cdot \underline{a} \quad (20.1)$$

Le choix de  $\underline{a}$  n'importe pas si l'on s'intéresse à  $\dot{\varphi}$  seulement. A un instant donné, on choisit judicieusement  $\underline{a}$  pour calculer la vitesse angulaire de chaque branche du croisillon :

$$\varphi_1 = \text{angle}(\underline{a} = \underline{m}_2, \underline{m}_1) = -\frac{\pi}{2} \implies \dot{\varphi}_1 = \underline{m}_2 \cdot \underline{L} \cdot \underline{m}_1$$

$$\varphi_2 = \text{angle}(\underline{a} = \underline{m}_1, \underline{m}_2) = \frac{\pi}{2} \implies \dot{\varphi}_2 = -\underline{m}_1 \cdot \underline{L} \cdot \underline{m}_2$$

L'assemblage est rigide ( $\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2 = 0$  à chaque instant). En conséquence, la fibre matérielle de fluide avec laquelle une branche donnée de l'assemblage coïncide diffère en général d'un instant à l'autre. La vitesse de rotation du solide rigide se calcule selon les règles usuelles en mécanique des solides indéformables. Pour un assemblage constitué de deux branches géométriques identiques, cette vitesse est la moyenne des vitesses instantanées précédentes :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} = \underline{m}_2 \cdot \underline{W} \cdot \underline{m}_1 \\ &= \underline{m}_2 \cdot (\overset{\times}{\underline{W}} \wedge \underline{m}_1) = \overset{\times}{\underline{W}} \cdot (\underline{m}_1 \wedge \underline{m}_2) = \overset{\times}{\underline{W}} \cdot \underline{e}_z\end{aligned}$$

La vitesse de rotation du croisillon rigide est exactement donnée par le taux de rotation du fluide  $\underline{W}$ . C'est ainsi que le vorticimètre permet de mesurer le taux de rotation du milieu. Un disque de liège marqué d'une croix peut jouer le même rôle. En effet, le taux de rotation est alors la moyenne de la vitesse de rotation moyenne de tous les couples de lignes orthogonales que l'on peut dessiner sur le disque, chacun de ces couples ayant une vitesse moyenne égale au taux de rotation.

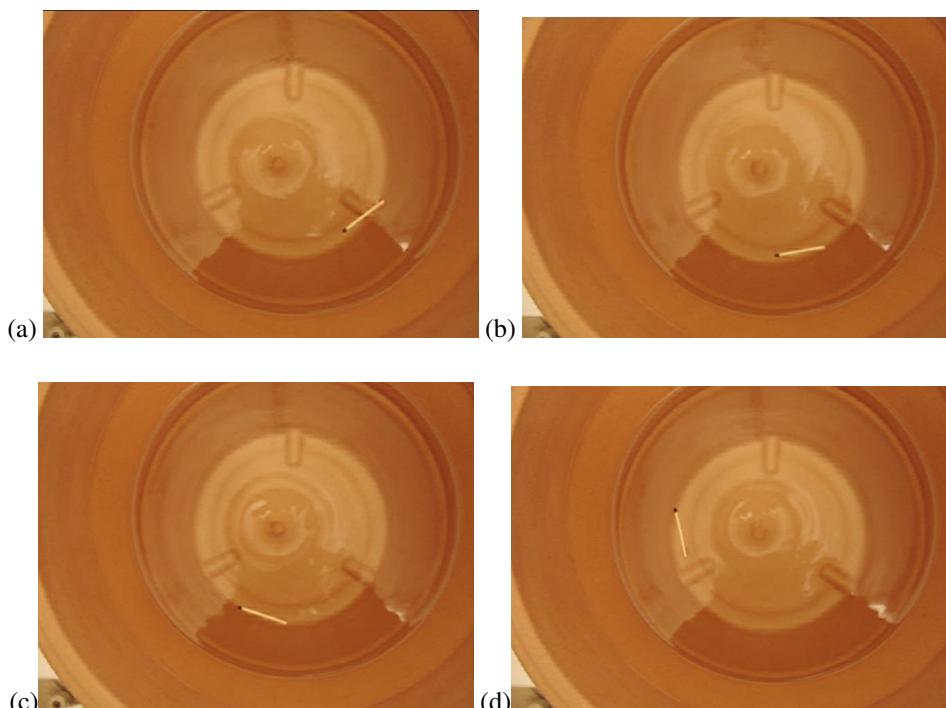
Nous utilisons dans la suite le vorticimètre pour mesurer expérimentalement le taux de

rotation d'un tourbillon.

## 20.2 Le tourbillon ponctuel

### 20.2.1 Le vorticimètre et le tourbillon ponctuel

Le montage expérimental de la figure 20.1 est rudimentaire mais suffisant pour étudier la cinématique d'un tourbillon. Le tourbillon est obtenu à l'aide d'un récipient axisymétrique rempli d'eau et percé au fond d'un trou central. Le trou doit être suffisamment petit pour que la variation de volume d'eau soit imperceptible le temps de l'expérience et suffisamment gros pour qu'un tourbillon se forme... Le tourbillon central est visible sur la figure 20.1(a).



*Figure 20.1 : Mouvement d'une allumette dans un tourbillon simple central : quatre instantanés successifs (a), (b), (c) et (d).*

La trajectoire d'une allumette posée à la surface de l'eau est illustrée par quatre positions successives qui montrent qu'elle décrit un cercle autour du tourbillon. Ces observations permettent de proposer la forme du champ de vitesses régnant dans le fluide :

$$\underline{v}(r, \theta, z, t) = f(r) \underline{e}_\theta \quad (20.2)$$

dans le repère cylindrique d'axe  $\underline{e}_z$  coïncidant avec le tourbillon. Le champ de vitesses est axisymétrique (indépendant de  $\theta$ ) et, en première approximation, ne dépend pas de la cote  $z$  non plus. Sa direction tangentielle est clairement indiquée par l'allumette de la figure 20.1. La fonction  $f(r)$  reste à déterminer, ce que l'expérience suivante va permettre de faire. L'observation indique que  $f(r)$  est une fonction décroissante de  $r$ .

Lorsque le vorticimètre est placé près du tourbillon, nous observons sur la figure 20.3 que le croisillon ne tourne pas par rapport à une direction fixe de l'image. Les directions du croisillon restent toujours parallèles à elles-mêmes. Il ne subit qu'une translation d'ensemble, sauf toutefois au centre du tourbillon.

On déduit de l'étude du paragraphe 20.1 que le taux de rotation associé au tourbillon simple est nul en  $r \neq 0$  :

$$\tilde{\mathbf{W}} = 0 \implies \text{rot } \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (20.3)$$

L'écoulement associé au tourbillon simple est donc irrotationnel, excepté dans l'œil du cyclone !

Exploitons cette observation pour préciser le champ des vitesses proposé. Le gradient des vitesses eulérien en coordonnées cylindriques est donné par (17.7) issu du formulaire.

$$\tilde{\mathbf{L}} = -\frac{v_\theta}{r} \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_r \quad (20.4)$$

Remarquer que la transformation est localement isochore

$$\text{trace } \tilde{\mathbf{D}} = \text{div } \underline{\mathbf{v}} = 0$$

Le taux de rotation est la partie antisymétrique de  $\tilde{\mathbf{L}}$  :

$$[\tilde{\mathbf{W}}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{v_\theta}{r} - \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 \\ \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation

$$\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{f}{r} + \frac{df}{dr} = 0$$

permet de déterminer  $f = \alpha/r$ . On met le champ de vitesses sous la forme :

$$\underline{\mathbf{v}}(r, \theta, z, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \underline{\mathbf{e}}_\theta \quad (20.5)$$

où  $\Gamma$  est la circulation de  $\underline{\mathbf{v}}$  le long d'un cercle dont le centre est le centre du tourbillon

$$\Gamma = \oint \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_\theta r d\theta \quad (20.6)$$

La circulation  $\Gamma$  caractérise l'intensité du tourbillon. Le champ des vitesses du tourbillon présente une singularité en  $r = 0$  où la vitesse devient infinie.

Le gradient des vitesses (20.4) se réduit à

$$\tilde{\mathbf{L}} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} (\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta + \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_r) = \tilde{\mathbf{D}} \quad (20.7)$$

Il est effectivement symétrique.

La suite de cette partie consiste à étudier plus en détail la cinématique du tourbillon simple ainsi identifiée.

### 20.2.2 Cinématique du tourbillon simple

Quelle type de transformation subit chaque point du fluide dans un tourbillon ?

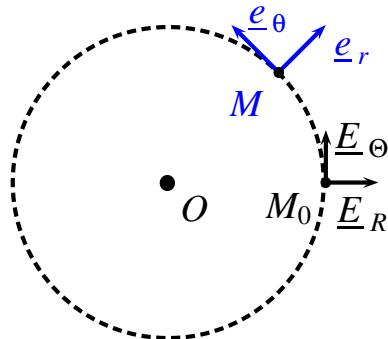


Figure 20.2 : Trajectoire d'un point  $M_0$  dans un mouvement de tourbillon de centre  $O$  et définition des bases locales de coordonnées cylindriques pour la configuration initiale et la configuration actuelle.

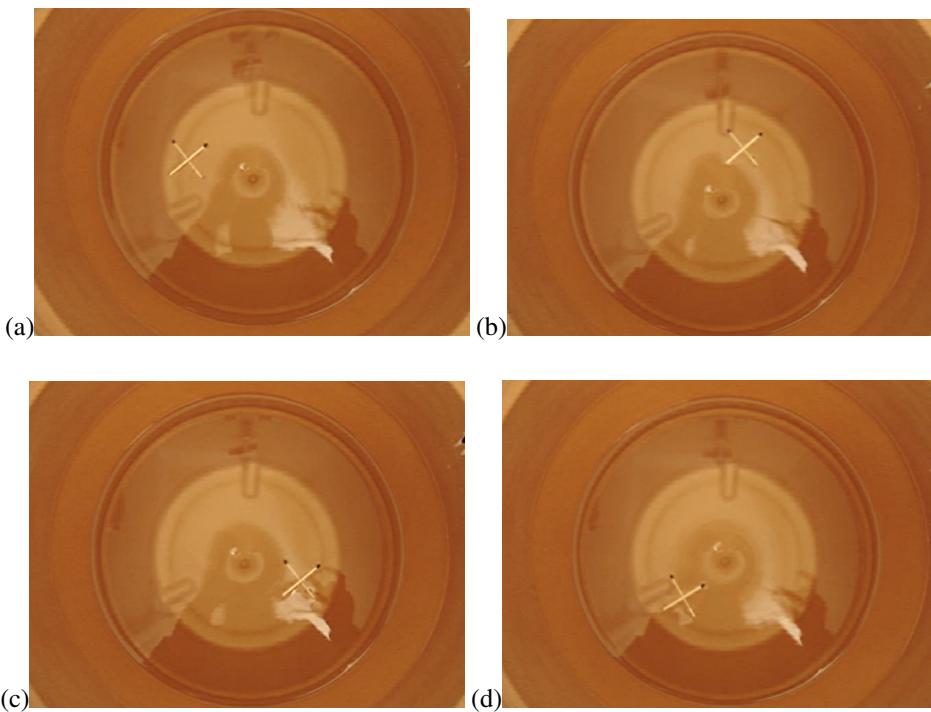


Figure 20.3 : Mouvement d'un vorticimètre dans un tourbillon simple central : quatre instantanés successifs (a), (b), (c) et (d).

Commençons par étudier les **lignes du courant** du milieu, c'est-à-dire les lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse en ce point à un instant donné. Autrement dit, il s'agit des courbes enveloppes du champ des vitesses (20.5). Une telle courbe est décrite par la pointe du vecteur  $\underline{\alpha}(s)$  avec le paramétrage  $s$ . Le vecteur tangent à cette courbe est sa

dérivée par rapport à  $s$  et doit être parallèle au vecteur vitesse du fluide en ce point. Cela se traduit par l'équation

$$\frac{d\underline{\chi}}{ds}(s) = \lambda(s)\underline{v}(\underline{\chi}(s), t) \quad (20.7)$$

Le paramétrage peut être choisi pour que  $\lambda(s) = 1$ .

Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  des points de la ligne de courant étudiée sont paramétrées par  $s$ . L'équation (20.7) s'écrit donc

$$\frac{dr}{ds}\underline{e}_r + r\frac{d\theta}{ds}\underline{e}_\theta + \frac{dz}{ds}\underline{e}_z = \frac{\Gamma}{2\pi r}\underline{e}_\theta \quad (20.8)$$

qui s'intègre en

$$(r = Cste, \quad \theta = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}s + Cste, \quad z = Cste)$$

représentation paramétrique d'un cercle dont le centre est celui du tourbillon. Les lignes de courant sont donc les cercles autour du tourbillon.

Continuons en déterminant les **trajectoires** des éléments de fluide. Cela revient à passer de la représentation eulérienne (20.5) du mouvement à sa représentation lagrangienne. Pour un point matériel donné  $\underline{X}_0$ , on intègre le champ de vitesse

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{v}(\underline{x}(t), t)$$

ce qui conduit ici à la même équation (20.8) qui s'intègre en

$$\begin{cases} r = R \\ \theta = \Theta + \frac{\Gamma}{2\pi R^2}t \\ z = Z \end{cases} \quad (20.9)$$

Le point  $M_0(R, \theta, Z)$  représente la position du point matériel considéré dans la configuration de référence, tandis que  $M(r, \theta, z)$  est sa position actuelle.

On note  $(\underline{E}_R, \underline{E}_\theta, \underline{E}_Z)$  la base locale cylindrique pour la configuration de référence.

On note  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$  la base locale cylindrique pour la configuration actuelle.

Ces bases sont représentées sur la figure 20.2. Il s'agit bien en général de bases distinctes puisque  $\underline{E}_r$  parallèle à  $OM_0$  ne pointe pas dans la même direction que  $\underline{e}_r$  qui est, quant à lui, parallèle à  $OM$ . Elles ne coïncident que périodiquement. Le système (20.9) constitue la représentation lagrangienne du tourbillon simple.

Les trajectoires sont donc les cercles de rayon  $R$  autour de O. Trajectoires et lignes de courant sont des notions distinctes mais lorsque le champ des vitesses ne dépend pas explicitement du temps  $t$  (régime stationnaire), elles se confondent.

#### *Gradient de la transformation tourbillon*

La transformation tourbillon est donnée par

$$\underline{x}(R, \Theta, Z, t) = R\underline{e}_r + Z\underline{e}_z \quad (20.10)$$

d'après (20.9). Le repérage de la particule initiale est  $R, \Theta, Z$  et la base associée à ce repérage est

$$(\underline{E}_1 = \underline{E}_R, \underline{E}_2 = R\underline{E}_\theta, \underline{E}_3 = \underline{E}_Z)$$

D'après la définition (12.123) de l'opérateur gradient selon des bases mobiles,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &= \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial R} \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*1} + \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \Theta} \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*2} + \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial Z} \otimes \underline{\mathbf{E}}^{*3} \\ &= \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial R} \otimes \underline{\mathbf{E}}_R + \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \Theta} \otimes \frac{\underline{\mathbf{E}}_\Theta}{R} + \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial Z} \otimes \underline{\mathbf{E}}_Z\end{aligned}\quad (20.11)$$

Le calcul du premier terme mérite attention :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial R} &= \underline{\mathbf{e}}_r + R \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_r}{\partial R} \\ &= \underline{\mathbf{e}}_r + R \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial R} \\ &= \underline{\mathbf{e}}_r - \frac{\Gamma t}{\pi R^2} \underline{\mathbf{e}}_\theta\end{aligned}\quad (20.12)$$

De même,

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \Theta} = R \frac{\partial \underline{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} = R \underline{\mathbf{e}}_\theta$$

Finalement,

$$\tilde{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{E}}_R + \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_\Theta + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{E}}_Z - \frac{\Gamma t}{\pi R^2} \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_R\quad (20.13)$$

La matrice de l'application linéaire  $\tilde{\mathbf{F}}$  s'écrit donc

$$[\tilde{\mathbf{F}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\Gamma t}{\pi R^2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (20.14)$$

par rapport aux bases  $(\underline{\mathbf{E}}_i)_{i=1,3}, (\underline{\mathbf{e}}_i)_{i=1,3}$  respectivement de départ et d'arrivée. Cette transformation peut être décomposée de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}\quad (20.15)$$

$$\text{avec } \tilde{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{E}}_R + \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_\Theta + \underline{\mathbf{e}}_z \otimes \underline{\mathbf{E}}_Z\quad (20.16)$$

$$\text{et } \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{1} - 2\alpha(R)t \underline{\mathbf{E}}_\Theta \otimes \underline{\mathbf{E}}_R\quad (20.17)$$

La cinématique du tourbillon est donc la composition d'un glissement simple égal à

$$\alpha(R)t := \frac{\Gamma t}{2\pi R^2}\quad (20.18)$$

et d'une rotation  $\tilde{\mathbf{Q}}$ . Le glissement s'effectue dans le plan de l'écoulement suivant la direction  $\underline{\mathbf{E}}_\Theta$ . Les cercles concentriques en  $O$  glissent les uns par rapport aux autres d'une quantité décroissante avec  $R$ . Il n'est pas évident de reconnaître à première vue dans  $\tilde{\mathbf{Q}}$  une rotation. Pour le voir, il faut remarquer qu'elle transforme  $\underline{\mathbf{E}}_R$  en  $\underline{\mathbf{e}}_r$ ,  $\underline{\mathbf{E}}_\Theta$  en  $\underline{\mathbf{e}}_\theta$ . Seul  $\underline{\mathbf{E}}_Z = \underline{\mathbf{e}}_z$  est invariant par  $\tilde{\mathbf{Q}}$ . Il s'agit donc de la rotation d'axe  $\underline{\mathbf{e}}_z$  et d'angle  $\theta - \Theta = \alpha t$ .

Le glissement simple a été abondamment analysé aux paragraphes 2.2.7, 2.4.6 et 19.2. La décomposition polaire du glissement simple est connue et permet donc d'accéder à celle

de la transformation tourbillon :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}^{gliss}, \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{R}}^{gliss} \cdot \underline{\underline{U}}^{gliss} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}^{gliss} \quad (20.19)$$

La rotation propre  $\underline{\underline{R}}^{gliss}$  et le tenseur symétrique  $\underline{\underline{U}}^{gliss}$  issus de la décomposition polaire du glissement sont données par les expressions (2.64) et (2.63) au prix toutefois d'une transposition car la direction de glissement est ici le deuxième axe. L'angle de rotation propre du glissement a aussi été déterminé et vaut  $-\text{atan}(\alpha t)$ . La rotation propre totale en chaque point dans le mouvement tourbillonnaire est donc  $\underline{\underline{R}}$ .

C'est la composée de deux rotations de même axe. L'angle de rotation total est donc

$$\alpha t - \text{atan}(\alpha t)$$

La transformation tourbillon est caractérisée par un taux de rotation nul mais par une rotation propre non nul ! Il n'y a rien là de paradoxal car on a vu à plusieurs reprises que la signification de ces deux types de rotation est différente et le résultat présent en est une illustration supplémentaire.

### 20.2.3 Cas d'un assemblage rigide faisant un angle donné

Que se passe-t-il lorsque l'assemblage rigide est constitué de deux tiges faisant un angle donné  $\varphi_0$  ? Le cas  $\varphi_0 = \pi/2$  correspond au vorticimètre. Quel est le mouvement de l'assemblage dans les autres cas ? Les directions de l'assemblage sont à nouveau caractérisées par les vecteurs unitaires  $\underline{\underline{m}}_1$  et  $\underline{\underline{m}}_2$  tels que

$$\underline{\underline{m}}_1 \cdot \underline{\underline{m}}_2 = \cos \varphi_0$$

avec  $0 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$ . On suit la variation de l'angle  $\varphi_1$  entre la branche  $\underline{\underline{m}}_1$  et une direction fixe de l'espace, ici  $\underline{\underline{e}}_1$ . On définit aussi l'angle  $\psi_1$  que fait  $\underline{\underline{m}}_1$  avec  $\underline{\underline{e}}_\theta$  :

$$\varphi_1 = \text{angle}(\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{m}}_1), \quad \psi_1 = \text{angle}(\underline{\underline{e}}_\theta, \underline{\underline{m}}_1) = \varphi_1 - \theta$$

$$\underline{\underline{e}}_1 = \cos \theta \underline{\underline{e}}_r - \sin \theta \underline{\underline{e}}_\theta, \quad \underline{\underline{m}}_1 = \cos \psi_1 \underline{\underline{e}}_r + \sin \psi_1 \underline{\underline{e}}_\theta$$

Des définitions similaires sont introduites pour  $\varphi_2$  et  $\psi_2$ , concernant la branche  $\underline{\underline{m}}_2$ . La vitesse de rotation de  $\underline{\underline{m}}_1$  par rapport à  $\underline{\underline{e}}_1$  est donnée par (20.1) qui s'écrit ici :

$$\begin{aligned} -\sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 &= \underline{\underline{e}}_1 \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{m}}_1 - (\underline{\underline{m}}_1 \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{m}}_1) \underline{\underline{m}}_1 \cdot \underline{\underline{e}}_1 \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} (\underline{\underline{e}}_1 \cdot (\sin \psi_1 \underline{\underline{e}}_r + \cos \psi_1 \underline{\underline{e}}_\theta)) \\ &\quad - \cos \varphi_1 \underline{\underline{m}}_1 \cdot (\sin \psi_1 \underline{\underline{e}}_r + \cos \psi_1 \underline{\underline{e}}_\theta)) \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \underbrace{(\cos \theta \sin \psi_1 - \sin \theta \cos \psi_1)}_{=\sin(\psi_1 - \theta) = \sin(\varphi_1 - 2\theta)} - 2 \cos \psi_1 \sin \psi_1 \cos \varphi_1 \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} (\sin(\varphi_1 - 2\theta) - \cos \varphi_1 \sin 2\psi_1) \end{aligned} \quad (20.20)$$

Or  $\sin(\varphi_1 - 2\theta) = \sin(2\psi_1 - \varphi_1) = \sin 2\psi_1 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos 2\psi_1$ , ce qui permet de factoriser le terme  $\sin \varphi_1$  dans le membre de droite de (20.20). Finalement,

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \cos 2\psi_1 \quad (20.21)$$

La même expression relie  $\dot{\varphi}_2$  et  $\psi_2$ . On va utiliser la vitesse de rotation de  $\underline{e}_r$  par rapport à  $\underline{e}_1$  qui, d'après (20.9), vaut

$$\dot{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}$$

L'assemblage rigide constitué des branches 1 et 2 supposées géométriquement identiques tourne à la vitesse moyenne  $\dot{\varphi} := (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)/2$  par rapport à la direction fixe  $\underline{e}_1$  et à la vitesse angulaire  $\dot{\psi}$  par rapport à la direction mobile  $\underline{e}_r$  :

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &:= \frac{\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2}{2} - \dot{\theta} \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(1 + \frac{1}{2}(\cos 2\psi_1 + \cos 2\psi_2)) = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(1 + \cos(\psi_1 + \psi_2) \cos(\psi_1 - \psi_2))\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\dot{\psi} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}(1 + \cos 2\psi \cos \varphi_0) \quad (20.22)$$

Lorsque les branches sont orthogonales ( $\varphi_0 = \pi/2$ ), on retrouve le fait que  $\dot{\varphi} = \dot{\psi} + \dot{\theta} = 0$ , c'est-à-dire que le montage n'effectue qu'un mouvement de translation.

L'équation différentielle (20.22) est à variables séparables :

$$\frac{d\psi}{1 + \cos 2\psi \cos \varphi_0} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} dt$$

Une primitive du membre de gauche est

$$\begin{aligned}\int \frac{d\psi}{1 + \cos 2\psi \cos \varphi_0} &= \frac{2}{2\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_0)}} \operatorname{atan} \left( \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0}} \tan \psi \right) \\ &= \frac{1}{\sin \varphi_0} \operatorname{atan} \left( \tan \frac{\varphi_0}{2} \tan \psi \right)\end{aligned}$$

L'équation différentielle s'intègre donc en

$$\operatorname{atan} \left( \tan \frac{\varphi_0}{2} \tan \psi \right) = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} (\sin \varphi_0) t + \pi E \left( \frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi^2 r^2} t - \frac{1}{2} \right)$$

où  $E()$  désigne la fonction partie entière. Ce terme correspond à la constante d'intégration ramenant le membre de gauche dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  de sorte que l'équation admette une solution  $\psi$  à chaque instant  $t$ , la fonction  $\operatorname{atan}$  ne prenant que des valeurs dans  $]-\pi/2, \pi/2[$ . De l'équation précédente, on déduit, par passage à la tangente des deux membres que

$$\tan \psi = -\frac{\tan \left( \frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi r^2} t \right)}{\tan \frac{\varphi_0}{2}} \quad (20.23)$$

d'où

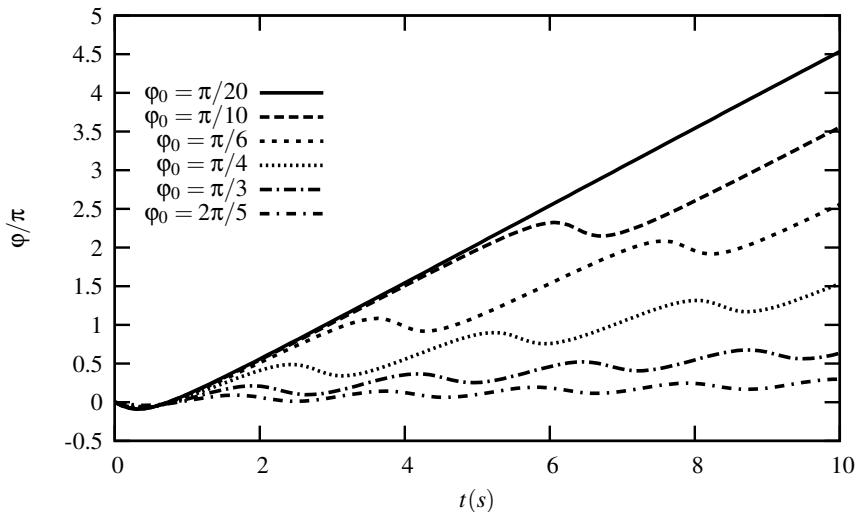
$$\psi = -\operatorname{atan} \frac{\tan \left( \frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi r^2} t \right)}{\tan \frac{\varphi_0}{2}} - \pi E \left( \frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi^2 r^2} t + \frac{1}{2} \right) \quad (20.24)$$

le multiple de  $\pi$  garantissant que la fonction est définie et continue pour tous les instants  $t$  et nulle en  $t = 0$ .

A chaque instant, l'angle de rotation de l'assemblage avec la direction fixe  $\underline{e}_1$  vaut donc

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} t - \text{atan} \left( \frac{\tan(\frac{\Gamma \sin \varphi_0}{2\pi r^2} t)}{\tan \frac{\varphi_0}{2}} \right) - \pi E \left( \frac{\Gamma}{2\pi^2 r^2} + \frac{1}{2} \right) \quad (20.25)$$

Ainsi, lorsque  $\varphi_0 = 0$ , le comportement de l'assemblage est le même que celui de l'alumette seule de la figure 20.1, ainsi que le montre un passage à la limite  $\varphi_0 \rightarrow 0$ . Il tourne en suivant la base mobile dont la vitesse est  $\dot{\theta}$ . Lorsque  $\varphi_0 = \pi/2$ , le croisillon a un mouvement de pure translation comme sur la figure 20.3. Pour des valeurs intermédiaires, on observe une dérive d'ensemble de l'assemblage par rapport à une direction fixe, agrémentée d'oscillations comme sur la figure 20.4.



*Figure 20.4 : Angle de rotation  $\varphi$  par rapport à une direction fixe de l'espace d'un assemblage rigide constitué de deux tiges faisant un angle de  $\varphi_0$  dans un mouvement de tourbillon simple, en fonction du temps en secondes, pour différentes valeurs de  $\varphi_0$ . Les paramètres utilisés sont  $r = 0.1 \text{ m}$ ,  $\Gamma = 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  dans l'expression (20.25).*

#### 20.2.4 Cas d'un assemblage articulé

Imaginons que la croix formée par les deux tiges rigides étudiées soit articulée de sorte que l'angle formé puisse évoluer dans le mouvement. Décrire cette évolution dans le cas où les tiges sont initialement orthogonales.

► L'étude du glissement simple au chapitre 19 nous permet de conclure assez rapidement. En effet la cinématique du tourbillon combine à chaque instant un glissement simple et une rotation. En se plaçant dans le repère mobile emmené par cette rotation, on peut donc observer un mouvement de type glissement simple. Le mouvement relatif des tiges est donc le même que celui illustré sur les figures 19.6 à 19.8. Suivant la position relative de la première tige avec  $\underline{E}_R$ , les tiges vont donc se refermer définitivement ou s'ouvrir pour former un angle plat.



## 21 Déformations libres

On appelle déformation libre un champ de déformations susceptible d'exister en l'absence de toute contrainte : déformation d'origine thermique, de transformation de phases, déformation plastique, d'origine électromagnétique (déformation piézoélectrique, magnétostriction...), etc. Il s'agit alors de champs de déformations compatibles. Ces champs peuvent être homogènes ou hétérogènes comme on va le voir au paragraphe 21.1. Si toutefois les conditions aux limites ou d'interface ne sont pas compatibles avec le développement du champ de déformation libre, des contraintes souvent considérables peuvent apparaître. Un champ de déformation d'origine élastique vient s'y superposer afin de restaurer la compatibilité du champ de déformations totales.

### 21.1 Compatibilité des déformations d'origine thermique

#### 21.1.1 Déformations infinitésimales d'origine thermique

Dans le contexte infinitésimal, un point matériel élevé à la température  $T$  par rapport à l'état de référence  $T_0$  subit une dilatation thermique de la forme :

$$\tilde{\varepsilon}^{th} = (T - T_0) \alpha \quad (21.1)$$

où  $\alpha$  est le tenseur des dilatations thermiques linéarisées autour de  $T_0$ , propriété intrinsèque du matériau. Dans le cas d'un matériau isotrope<sup>1</sup>, ce tenseur d'ordre 2 est purement sphérique et ne fait intervenir qu'un seul coefficient de dilatation  $\alpha$  :

$$\tilde{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0) \mathbf{1} \quad (21.2)$$

La figure 21.1 illustre le champ de déplacement dans le cas où le champ de température  $T$  est homogène. On envisage plus généralement dans ce paragraphe des champs de température  $T(\underline{x})$  non nécessairement homogènes.

A quelle condition, le champ de déformation d'origine thermique (21.2) est-il compatible ? Autrement dit, quel champ de température peut se développer dans un corps matériel supposé homogène et par ailleurs libre d'effort à sa frontière, sans y engendrer de contraintes ?

► Le champ (21.2) où  $T(\underline{X})$  est supposé pouvoir varier dans le corps matériel tandis que  $\alpha$  est considéré comme homogène. On lui applique les conditions de compatibilité (2.142). Elles conduisent au système suivant :

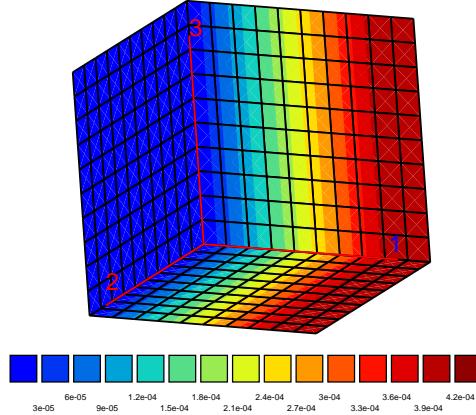
$$\left\{ \begin{array}{l} T_{,11} + T_{,22} = 0 \\ T_{,22} + T_{,33} = 0 \\ T_{,33} + T_{,11} = 0 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{,12} = 0 \\ T_{,23} = 0 \\ T_{,31} = 0 \end{array} \right. \quad (21.3)$$

La notation  $T_{,1}$  désigne la dérivée partielle de  $T$  par rapport à la coordonnée  $X_1$ . La combinaison des équations (21.3)<sub>4</sub> et (21.3)<sub>6</sub>, (21.3)<sub>4</sub> et (21.3)<sub>5</sub>, puis (21.3)<sub>5</sub> et (21.3)<sub>6</sub> conduit à la dépendance spatiale suivante du champ de température :

$$T_{,1} = a(X_1), \quad T_{,2} = b(X_2), \quad T_{,3} = c(X_3) \quad (21.4)$$

---

1. Reconsidérer l'exercice dans le cas général anisotrope.



*Figure 21.1 : Champ de déplacement  $u_1$  dû à une variation de température de  $50^\circ\text{C}$  dans un cube d'acier de 1 mm de côté ( $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ). Les conditions aux limites en déplacement sont telles que la face  $x_1 = 0$  ne peut pas se déplacer selon l'axe 1, tandis que le point matériel coïncidant avec l'origine des axes est fixé. De plus, le point de coordonnées  $(0, 1, 0)$  ne peut pas se déplacer dans la direction 3. Les faces du cube sont libres d'effort.*

où  $a, b$  et  $c$  sont trois fonctions à préciser.

En substituant ces expressions dans les équations (21.3)<sub>1</sub> à (21.3)<sub>3</sub>, on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} a_{,1} + b_{,2} = 0 \\ b_{,2} + c_{,3} = 0 \\ c_{,3} + a_{,1} = 0 \end{cases} \quad (21.5)$$

La première équation (21.5)<sub>1</sub> signifie que  $a_{,1}(X_1) = -b_{,2}(X_2)$  est une constante. Il en va de même pour  $c_{,3}$ . Le système (21.5) est par conséquent un système linéaire homogène d'inconnues  $a_{,1}, b_{,2}, c_{,3}$ . Il s'ensuit que :

$$a_{,1} = b_{,2} = c_{,3} = 0 \quad (21.6)$$

La forme du champ de températures conduisant à un champ de dilatation thermique compatible en découle :

$$T = AX_1 + BX_2 + CX_3 + D \quad (21.7)$$

où  $A, B, C, D$  sont quatre constantes. Le champ de température est donc affine. Pour un tel champ de température, la déformation d'origine thermique est compatible de sorte que

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon}^{total} = \tilde{\varepsilon}^{th} \quad (21.8)$$

Si les conditions à la frontière du corps matériel ne s'opposent pas aux déplacements qui s'ensuivent, un tel champ existe donc sans contraintes, i.e. sans contribution élastique  $\tilde{\varepsilon}^e$ . Plus généralement, on montre que tout champ de déformation affine

$$\varepsilon = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{X}} + \tilde{\varepsilon}_0 \quad (21.9)$$

avec  $\tilde{\mathbf{A}}$  un tenseur d'ordre 3 constant, est compatible.

### 21.1.2 Déformée d'un corps soumis à un gradient de température

On étudie en détail la forme que prend un corps matériel soumis à un champ de température affine de la forme (21.7). Le système de coordonnées cartésiennes selon une base orthonormée est choisi de telle sorte que le gradient de température soit selon la direction 3 :

$$\alpha(T - T_0) = A X_3, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} AX_3 & 0 & 0 \\ 0 & AX_3 & 0 \\ 0 & 0 & AX_3 \end{bmatrix} \quad (21.10)$$

Si  $T_1$  est la température à l'altitude  $X_3 = 0$ , et  $T_2$  la température à l'altitude  $X_3 = H$ , et en prenant la référence  $T_0 = T_1$ , alors le coefficient  $A$  n'est autre que

$$A = \frac{\alpha(T_2 - T_1)}{H} \quad (21.11)$$

Quel est (sont) le(s) champ(s) de déplacements associé(s) au champ de déformation (21.10) ?

► On met en œuvre ici la démarche systématique qui, à partir d'un champ de déformation donné, permet de trouver la famille des déplacements correspondants. La méthode peut sembler fastidieuse mais elle a le mérite de conduire immanquablement à la famille de solutions cherchée. Toute tentative pour la court-circuiter en "intégrant à vue" peut se solder par une suite de calculs inextricables... La difficulté vient du fait que l'on cherche une famille de champs de vecteur  $\underline{u}$  dont le gradient symétrisé est égal au champ de déformation  $\underline{\varepsilon}$  donné. La tâche serait plus aisée si la donnée du problème était le champ de gradient  $\underline{F}$  complet.

Le point de départ est le gradient de la rotation infinitésimale qui s'exprime en fonction du gradient de la déformation selon l'expression (2.145) :

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i} \quad (21.12)$$

A partir du champ de déformation  $\underline{\varepsilon}$  donné (21.10), on calcule :

$$\begin{aligned} \omega_{12,1} &= 0, & \omega_{23,1} &= 0, & \omega_{31,1} &= -\varepsilon_{11,3} = -A, \\ \omega_{12,2} &= 0, & \omega_{23,2} &= \varepsilon_{22,3} = A, & \omega_{31,2} &= 0, \\ \omega_{12,3} &= 0, & \omega_{23,3} &= 0, & \omega_{31,3} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\omega_{12} = -r, \quad \omega_{23} = AX_2 - p, \quad \omega_{31} = -AX_1 - q \quad (21.13)$$

où  $p, q, r$  sont trois constantes d'intégration.

Le gradient du champ de déplacement est la somme de la déformation infinitésimale  $\underline{\varepsilon}$  et de la rotation infinitésimale  $\underline{\omega}$  :

$$\begin{aligned} [u_{ij}] &= [\varepsilon_{ij}] + [\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} AX_3 & -r & AX_1 + q \\ r & AX_3 & AX_2 - p \\ -AX_1 - q & p - AX_2 & AX_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AX_3 & 0 & AX_1 \\ 0 & AX_3 & AX_2 \\ -AX_1 & -AX_2 & AX_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (21.14) \end{aligned}$$

où l'on a isolé la rotation infinitésimale arbitraire dont le vecteur rotation est  $[p, q, r]$ .

Dans la suite, cette rotation n'est pas écrite par commodité. Elle sera réintroduite dans le résultat final.

Il s'agit maintenant d'intégrer le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= AX_3, \quad u_{2,1} = 0, \quad u_{3,1} = -AX_1 \\ u_{1,2} &= 0, \quad u_{2,2} = AX_3, \quad u_{3,2} = -AX_2 \\ u_{1,3} &= AX_1, \quad u_{2,3} = AX_2, \quad u_{3,3} = AX_3 \end{aligned}$$

L'intégration du système précédent conduit au champ de déplacement :

$$u_1 = AX_1 X_3 + c_1, \quad u_2 = AX_2 X_3 + c_2, \quad u_3 = \frac{A}{2}(-X_1^2 - X_2^2 + X_3^2) + c_3 \quad (21.15)$$

Les constantes  $c_1, c_2, c_3$  désignent une translation arbitraire. Il faut ajouter au champ précédent la rotation infinitésimale arbitraire :

$$\left[ \begin{array}{c} p \\ q \\ r \end{array} \right] \wedge \left[ \begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array} \right] \quad (21.16)$$

Seules des conditions aux limites précises en déplacement permettent de fixer la translation  $[c_1, c_2, c_3]^T$  et la rotation  $[p, q, r]^T$ .

Les champs de températures, de déformations et de déplacements sont illustrés pour un cube d'acier sur la figure 21.3.

#### *Contexte infinitésimal*

Préciser les conditions de validité de la solution précédente dans le contexte infinitésimal. Donner en particulier les gradients de température licites dans le cas d'une barre cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ .

► Les composantes des tenseurs de déformation  $\varepsilon$  et de rotation  $\tilde{\omega}$  doivent rester suffisamment petites. Dans le cas d'une barre cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  par exemple, les conditions s'écrivent :

$$|p|, |q|, |r| \ll 1, \quad |AX_3| \leq |AH| \ll 1, \quad |AX_1| \leq |AR| \ll 1 \quad (21.17)$$

Elles impliquent les conditions suivantes sur le gradient de température imposé vis-à-vis de la géométrie de la barre :

$$|\alpha(T_2 - T_1)| \ll 1, \quad |\alpha(T_2 - T_1)| \ll \frac{H}{R} \quad (21.18)$$

Dans le cas d'une barre ou d'une tige (i.e.  $R/H \ll 1$ ), la condition (21.18)<sub>1</sub> est la plus restrictive. Si cette barre est en acier,  $\alpha \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , et si des valeurs  $|\alpha\Delta T|$  de l'ordre de 0.01 sont visées, alors les variations de température licites peuvent aller jusqu'à  $\Delta T \sim 1000^\circ\text{C}$ , sans quitter le contexte des transformations infinitésimales.

Dans le cas d'un disque ou plus généralement d'une plaque (i.e.  $H/R \ll 1$ ), la condition

$(21.18)_2$  est la plus restrictive. Prenons par exemple  $H/R \sim 0.01$ . En tenant compte de  $(21.18)_2$ , on doit donc viser des valeurs  $|\alpha\Delta T|$  de l'ordre de 0.0001. Si la plaque est en acier, les variations de température licites ne pourront dépasser  $\Delta T \sim 10^\circ\text{C}$ . Cette situation est beaucoup plus restrictive que le cas de la barre car, dans le cas d'une plaque mince, des déformations très faibles peuvent s'accompagner de rotations significatives conduisant à de grands déplacements. Le contexte infinitésimal cesse donc d'être valide de manière précoce, comme on l'a déjà fait remarquer page 56.

On rappelle toutefois que, même si les conditions (21.18) sont remplies, ce qui garantit que la solution (21.15) est licite, on n'est pas à l'abri d'instabilités que seules des analyses sortant du contexte infinitésimal permettent de prévoir.

### Déformée d'un plan

Que devient le plan  $X_3 = 0$  dans le champ de déformation précédent ?

► La position actuelle  $\underline{x}$  d'un point matériel s'exprime en fonction de sa position initiale et de son déplacement selon :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + u_1 = X_1 + AX_1 X_3 \\ x_2 = X_2 + u_2 = X_2 + AX_2 X_3 \\ x_3 = X_3 + u_3 = X_3 + \frac{A}{2}(X_3^2 - X_1^2 - X_2^2) \end{cases} \quad (21.19)$$

Les points situés initialement sur le plan d'équation  $X_3 = 0$  se transforment donc en

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = -\frac{A}{2}(X_1^2 + X_2^2) \end{cases} \quad (21.20)$$

Ils se trouvent donc sur la surface d'équation

$$x_3 + \frac{A}{2}(x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad (21.21)$$

Il s'agit de l'équation d'un **paraboloïde de révolution** d'axe 3. Une coupe de ce paraboloïde par le plan  $X_2 = 0$  est visible sur la figure 21.2.

Dans le contexte infinitésimal, les termes  $|AX_1|$  et  $|AX_2|$ , ou de manière équivalente  $|Ax_1|$  et  $|Ax_2|$ , sont des infinitésimales d'ordre  $\mathcal{O}(h)$  (cf. équation (21.17)). En réécrivant l'équation (21.21) sous la forme

$$Ax_3 + \frac{1}{2}((Ax_1)^2 + (Ax_2)^2) = 0$$

on voit que le terme  $|Ax_3|$  est de l'ordre  $\mathcal{O}(h^2)$ . Par conséquent, l'équation de la déformée du plan initial  $X_3 = 0$  est tout aussi bien

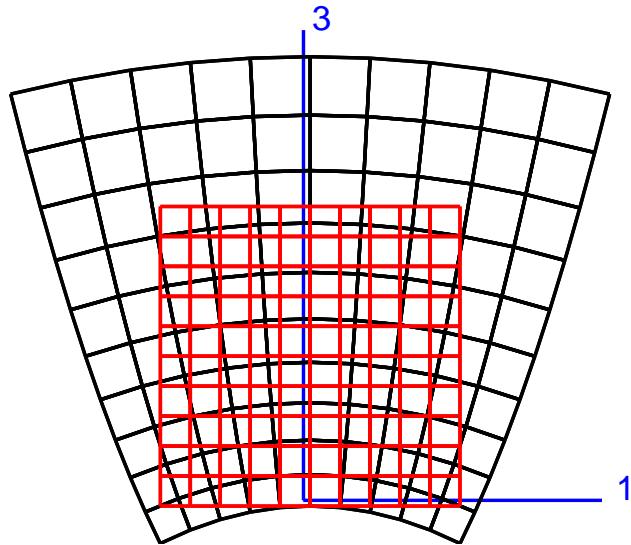
$$Ax_3 + \frac{1}{2}((Ax_1)^2 + (Ax_2)^2 + (Ax_3)^2) = 0 \quad (21.22)$$

car la correction ajoutée  $(Ax_3)^2$  est d'ordre  $\mathcal{O}(h^4)$ , deux ordres inférieurs aux termes de l'expression initiale. Dans le contexte infinitésimal, le paraboloïde est alors **indiscernable** de sa sphère osculatrice d'équation (21.22). Le rayon de la sphère (ou le rayon de courbure minimal du paraboloïde) est  $1/A$ . Son centre a pour coordonnées  $[0, 0, -1/A]$ . Remarquer que le contexte infinitésimal via la condition (21.17) exige que le rayon de

courbure de la déformée soit significativement plus grand que  $R$  :

$$R \ll \frac{1}{|A|}$$

Des conclusions similaires peuvent être tirées pour des plans de cote initiale  $X_3 \neq 0$ . La transformée de ces plans est visible sur la figure 21.2.



*Figure 21.2 : Déformée d'un carré d'acier de côté 1 mm soumis à un gradient constant de température de  $100^\circ\text{C}$  :  $T = 0^\circ\text{C}$  sur la face  $X_3 = 0$  et  $T = 100^\circ\text{C}$  sur la face  $X_3 = 1$ . Le coefficient de dilatation est  $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Les déplacements sont amplifiés d'un facteur 1000 pour l'illustration. Le carré rouge représente l'état initial. Le carré déformé est en noir. Les axes sont en bleu. Cette figure s'obtient en considérant la coupe  $X_2 = 0$  du cube de la figure 21.3.*

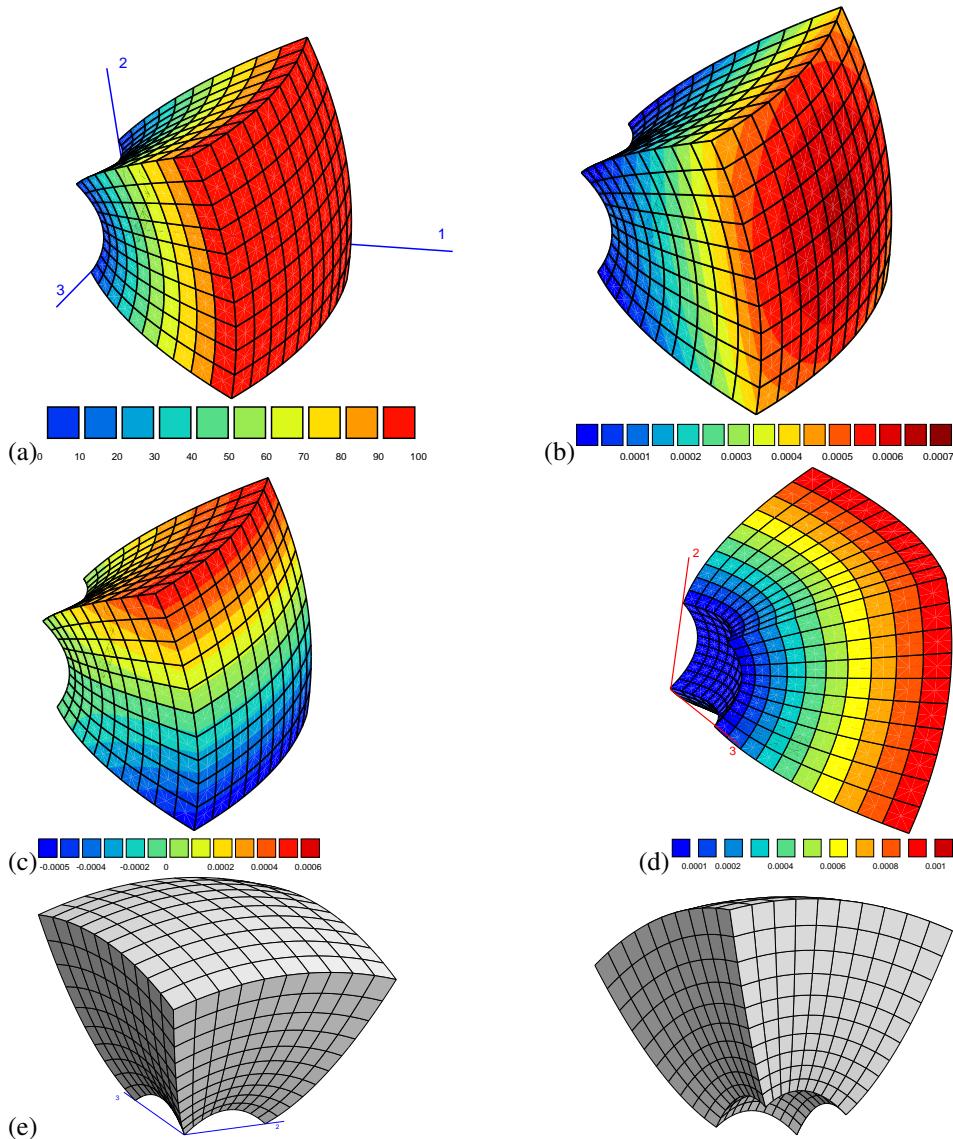


Figure 21.3 : Cube d'acier de côté 1 mm soumis à un gradient constant de température de  $100^\circ\text{C} : T = 0^\circ\text{C}$  sur la face  $x_1 = 0$  et  $T = 100^\circ\text{C}$  sur la face  $x_1 = 1$ . Le coefficient de dilatation est  $\alpha = 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ . Les déplacements sont amplifiés d'un facteur 2000 pour l'illustration. Les faces du cube sont libres d'effort. Les champs représentés sont : (a) le champ de température, (b) le champ de déplacement  $u_1$ , (c) le champ de déplacement  $u_2$ , (d) le champ de déformation  $\varepsilon_{11}$ , (e) deux vues de la déformée.

## 21.2 Effet bilame

Les composants constitués de plusieurs couches de matériaux différents sont très fréquents dans les systèmes électromécaniques ou microélectroniques. La connaissance de leurs propriétés mécaniques est essentielle afin de leur garantir une durée de vie suffisante et d'éviter l'apparition de défauts. Ces composants sont souvent le siège de contraintes d'origine thermique dues à la différence de propriétés thermoélastiques des matériaux utilisés. On envisage ici le cas élémentaire du bilame constitué de deux couches possédant des coefficients de dilatation distincts. L'objet des sections 21.2 et 21.3 est de mettre en évidence l'effet bilame de manière quantitative et d'en déduire ensuite quelques conséquences dans le domaine des composants électroniques (microprocesseurs, etc.).

On considère une plaque composée de deux couches de matériaux différents. La géométrie de la plaque est engendrée par translation le long d'un axe  $OX_3$  à partir d'une surface plane  $S$  dont le contour extérieur est de forme quelconque. L'épaisseur de la plaque obtenue est supposée significativement plus petite que les deux autres dimensions caractéristiques.

Le repérage est cartésien orthonormé. Une vue en perspective et une section  $OX_1OX_3$  du bicoche font l'objet de la figure 21.4. La couche inférieure constitue le substrat, d'épaisseur  $h_s$ . Il est recouvert d'une couche ou film d'épaisseur  $h_f$ . L'épaisseur totale de la plaque est  $h = h_s + h_f$ . Conformément au système de coordonnées cartésiennes indiqué sur la figure 21.4, l'interface entre les deux matériaux est à la cote  $X_3 = 0$ . L'origine  $O$  du repère est un point de l'interface situé loin des bords de la plaque. La surface inférieure  $S$ , la surface supérieure et l'interface ont pour équations respectives  $X_3 = -h_s$ ,  $X_3 = h_f$  et  $X_3 = 0$ . Le domaine d'espace occupé par la plaque peut donc être noté  $S \times ]-h_s, h_f[$ . On notera  $\partial S$  la ligne du bord de  $S$  et  $\partial S \times ]-h_s, h_f[$  la surface latérale de la plaque.

L'interface est supposée parfaite<sup>2</sup>, c'est-à-dire que, dans les conditions de chargement du problème, aucune décohésion ni fissure ne peuvent apparaître à l'interface.

Le substrat est constitué d'un matériau thermoélastique linéarisé isotrope (module de Young  $E_s$ , coefficient de Poisson  $\nu_s$ , coefficient de dilatation thermique  $\alpha_s$ ). La couche supérieure est constituée d'un matériau thermoélastique linéarisé isotrope (module de Young  $E_f$ , coefficient de Poisson  $\nu_f$ , coefficient de dilatation thermique  $\alpha_f$ ). Chaque matériau est supposé dans son état naturel lorsqu'il est à la température de référence  $T_0$ . L'objectif de cette section est de déterminer la forme que prend le bicoche lorsqu'on le porte à la température  $T$ , supposée telle que l'on reste dans le contexte infinitésimal. Dans tout le problème, on se place délibérément dans l'hypothèse des petites perturbations.

On adopte l'approche en contraintes et l'on recherche si un champ de contraintes internes biaxiales de la forme

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \underline{\sigma}^s = \sigma_{11}^s(X_3)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22}^s(X_3)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad \text{pour } -h_s < X_3 < 0 \\ \underline{\sigma} &= \underline{\sigma}^f = \sigma_{11}^f(X_3)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22}^f(X_3)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad \text{pour } 0 < X_3 < h_f\end{aligned}$$

peut s'établir dans le bicoche lorsqu'il est porté à la température  $T$ . Seules deux composantes non nulles des contraintes sont donc recherchées, avec en outre une dépendance par rapport à la seule variable  $X_3$ .

Les contraintes revêtent la même forme dans le substrat et le film mais sont représentées *a priori* par des fonctions différentes caractérisées par les exposants  $s$  et  $f$ , respectivement. L'isotropie du problème dans le plan  $OX_1OX_2$  incite à penser que ces contraintes sont équi-biaxiales. Les contraintes recherchées sont donc telles que :

$$\sigma_{11}^s(X_3) = \sigma_{22}^s(X_3), \quad \sigma_{11}^f(X_3) = \sigma_{22}^f(X_3) \tag{21.23}$$

2. Les deux couches métalliques peuvent être soudées, brasées ou colaminées.

Aucun chargement mécanique extérieur n'est appliqué au composant. Seule la température, supposée homogène dans la plaque à chaque instant, passe de la valeur initiale  $T_0$  à la valeur actuelle  $T$ .

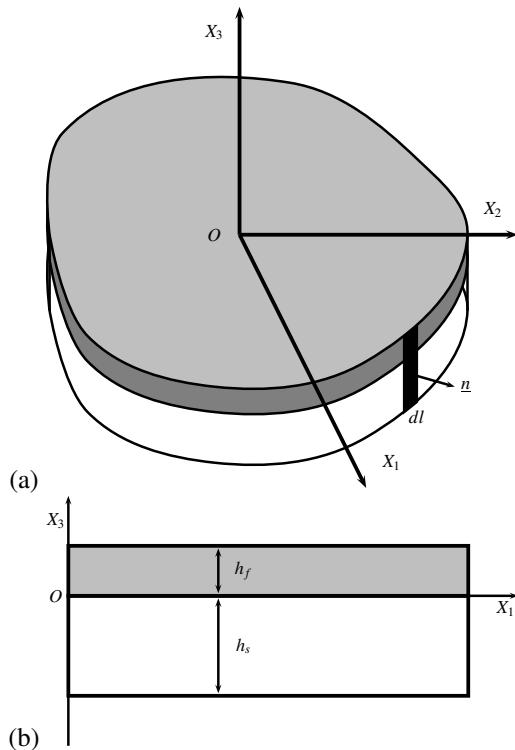


Figure 21.4 : Vue en perspective d'une plaque bicouche dans son état initial (a), section initiale ( $X_1 \geq 0, X_2 = 0$ ) (b).

### 21.2.1 Etat de contraintes équi-biaxiales

Etudier les conditions d'équilibre local du champ de contraintes proposé au sein de la plaque. Justifier en outre que l'on ait considéré que  $\sigma_{33} = 0$ .

► Le champ de contraintes proposé est à divergence nulle. En effet, les dérivées partielles  $\sigma_{11,3}$  et  $\sigma_{22,3}$  sont les seules qui soient susceptibles d'être non nulles. Elles n'interviennent pas dans l'expression de la divergence des contraintes. Un tel champ est donc admissible du point de vue des équations d'équilibre. Le choix  $\sigma_{33} = 0$  est compatible avec l'existence des surfaces libres  $X_3 = -h_s$ ,  $X_3 = h_f$  et avec la troisième équation d'équilibre impliquant la dérivée de  $\sigma_{33}$  par rapport à  $X_3$ . Il faut en outre vérifier la condition d'interface :

$$[\sigma] \cdot \underline{n} = [\sigma] \cdot \underline{e}_3 = 0$$

### 21.2.2 Déformations des couches

Calculer indépendamment dans chaque couche les déformations élastiques puis totales en fonction des contraintes introduites précédemment et de l'écart de température  $T - T_0$ . La notation suivante pour le module d'élasticité biaxiale sera adoptée :

$$M_s := \frac{E_s}{1 - \nu_s}, \quad M_f := \frac{E_f}{1 - \nu_f} \quad (21.24)$$

► La loi d'élasticité isotrope linéarisée fournit, indépendamment dans chaque couche, l'expression des déformations élastiques en fonction des contraintes :

$$\underline{\varepsilon}^e = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{trace } \boldsymbol{\sigma}) \underline{1} \quad (21.25)$$

On en déduit que

$$\varepsilon_{11}^e = \varepsilon_{22}^e = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_{11}, \quad \varepsilon_{33}^e = -\frac{2\nu}{E} \sigma_{11} \quad (21.26)$$

Par souci de concision, on n'a pas mis l'exposant  $s$  ou  $f$  caractéristique de chaque couche mais il y a bien deux jeux d'équations du type précédent. La déformation totale s'obtient en ajoutant la déformation thermique :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{th} \quad \text{avec} \quad \underline{\varepsilon}^{th} = \alpha(T - T_0) \underline{1} \quad (21.27)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1 - \nu}{E} \sigma_{11} + \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{33} = -\frac{2\nu}{E} \sigma_{11} + \alpha(T - T_0) \quad (21.28)$$

Ces relations font intervenir les modules d'élasticité biaxiale  $M_s$  et  $M_f$ .

### 21.2.3 Équations de compatibilité

En utilisant les conditions de compatibilité pour le champ de déformations établi précédemment, montrer que, dans chaque couche, les contraintes recherchées sont des fonctions affines. Donner ensuite l'expression des déformations totales à l'aide de ces fonctions affines et de la température.

► Les équations de compatibilité fournissent les relations suivantes :

$$\varepsilon_{11,33} = 0, \quad \varepsilon_{22,33} = 0 \quad (21.29)$$

En substituant les relations (21.28) dans les équations de compatibilité, on trouve

$$\sigma_{11,33} = 0 \implies \sigma_{11} = aX_3 + b \quad (21.30)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes par couche, à déterminer. On a tenu compte du fait que la température est supposée homogène. Les déformations aussi sont affines :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1}{M} (aX_3 + b) + \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{33} = -\frac{2\nu}{E} (aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) \quad (21.31)$$

### 21.2.4 Déplacements

Trouver, indépendamment dans chaque couche, la forme précise du champ de déplacements, à un mouvement de corps rigide infinitésimal près, à savoir les trois com-

posantes :

$$\underline{u} = u_1(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_1 + u_2(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_2 + u_3(X_1, X_2, X_3)\underline{e}_3 \quad (21.32)$$

On ne cherchera pas, pour l'instant, à identifier les constantes apparues lors du processus d'intégration.

► La méthode systématique pour construire le champ de déplacements à partir du champ de déformations précédent consiste à calculer le gradient de la rotation  $\underline{\omega}$  par la formule (2.145). Cela donne

$$\begin{aligned} \omega_{12,1} &= 0, & \omega_{23,1} &= 0, & \omega_{31,1} &= -\varepsilon_{11,3} = -\frac{a}{M}, \\ \omega_{12,2} &= 0, & \omega_{23,2} &= \varepsilon_{22,3} = \frac{a}{M}, & \omega_{31,2} &= 0, \\ \omega_{12,3} &= 0, & \omega_{23,3} &= 0 & \omega_{31,3} &= 0 \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations fournit

$$\omega_{12} = 0, \quad \omega_{23} = \frac{a}{M}X_2, \quad \omega_{31} = -\frac{a}{M}X_1$$

sans mentionner les termes constants  $p, q, r$  associés à une rotation infinitésimale que l'on ajoutera à la fin. Le gradient du déplacement s'écrit donc

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \frac{aX_3 + b}{M} + \alpha(T - T_0) & u_{2,1} &= 0 & u_{3,1} &= -\frac{a}{M}X_1 \\ u_{1,2} &= 0 & u_{2,2} &= \frac{aX_3 + b}{M} + \alpha(T - T_0) & u_{3,2} &= -\frac{a}{M}X_2 \\ u_{1,3} &= \frac{a}{M}X_1 & u_{2,3} &= \omega_{23} = \frac{a}{M}X_2 & u_{3,3} &= -\frac{2\nu}{E}(aX_3 + b) + \alpha(T - T_0) \end{aligned}$$

L'intégration des équations précédentes conduit aux expressions suivantes des composantes du déplacement

$$u_1 = \frac{1}{M}(aX_3 + b)X_1 + \alpha(T - T_0)X_1 \quad (21.33)$$

$$u_2 = \frac{1}{M}(aX_3 + b)X_2 + \alpha(T - T_0)X_2 \quad (21.34)$$

$$u_3 = -\frac{a}{M}\left(\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2}\right) - \frac{2\nu}{E}\left(a\frac{X_3^2}{2} + bX_3\right) + \alpha(T - T_0)X_3 \quad (21.35)$$

auquel s'ajoute le mouvement de corps rigide infinitésimal  $\{(p, q, r), \underline{c}\}$ .

On a omis de mettre l'indication  $s$  ou  $f$  sur les coefficients  $E, \nu, M, \alpha$  et les constantes d'intégration  $a, c$ . Les champs de déplacements trouvés ont la même forme dans chaque couche mais des coefficients et constantes *a priori* distinctes.

### 21.2.5 Contraintes dans chaque couche

Montrer que les contraintes se mettent sous la forme suivante :

$$\sigma_{11}^s = M_s(AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0)), \quad \sigma_{11}^f = M_f(AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0)) \quad (21.36)$$

où  $A$  et  $C$  sont deux constantes à déterminer plus tard. Il faudra en particulier établir que ces constantes sont les mêmes dans les deux couches.

Calculer alors le saut des contraintes à la traversée de l'interface entre les deux matériaux. Une telle discontinuité est-elle acceptable pour la solution du problème posé ?

► Les déplacements ont été établis dans chaque couche. Il faut maintenant se préoccuper de ce qui se passe à l'interface. Celle-ci étant supposée parfaite, les déplacements y sont continus :

$$\begin{aligned} u_1^s(X_1, X_2, 0) &= u_1^f(X_1, X_2, 0), \quad u_2^s(X_1, X_2, 0) = u_2^f(X_1, X_2, 0), \\ u_3^s(X_1, X_2, 0) &= u_3^f(X_1, X_2, 0) \end{aligned}$$

Examinons d'abord la condition sur  $u_3$ . Pour  $X_3 = 0$ , la composante  $u_3$  comporte le terme quadratique :

$$-\frac{a^{s,f}}{M_{s,f}}\left(\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2}\right)$$

Pour que les fonctions  $u_3^s$  et  $u_3^f$  coïncident à l'interface, pour toute valeur de  $X_1$ , il faut que les coefficients de ces monomes soient identiques :

$$\frac{a^s}{M_s} = \frac{a^f}{M_f} = A \quad (21.37)$$

où l'on introduit le coefficient unique  $A$ . À l'interface  $X_3 = 0$ , les composantes  $u_1$  et  $u_2$  prennent la forme :

$$u_1^{s,f} = \frac{b^{s,f}}{M_{s,f}}X_1 + \alpha_{s,f}(T - T_0)X_1, \quad u_2^{s,f} = \frac{b^{s,f}}{M_{s,f}}X_2 + \alpha_{s,f}(T - T_0)X_2$$

à un mouvement de corps rigide près. Ces déplacements ne peuvent coïncider que si

$$\frac{b^s}{M_s} + \alpha_s(T - T_0) = \frac{b^f}{M_f} + \alpha_f(T - T_0) = C \quad (21.38)$$

où l'on introduit la constante unique  $C$ . Muni de ces constantes identiques dans les deux couches, on est en mesure d'évaluer à nouveau les contraintes. On a vu que, dans chaque couche :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^s &= a^sX_3 + b^s = M^s(AX_3 + C - \alpha^s(T - T_0)), \\ \sigma_{11}^f &= a^fX_3 + b^f = M^f(AX_3 + C - \alpha^f(T - T_0)) \end{aligned}$$

C'est la forme annoncée dans l'énoncé.

La discontinuité des contraintes à l'interface s'écrit :

$$[\sigma_{11}] = [\sigma_{22}] = (M_s - M_f)C - (M_s\alpha_s - M_f\alpha_f)(T - T_0) \quad (21.39)$$

Une discontinuité de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  est tout à fait licite puisque seules les composantes du vecteur-contrainte doivent être continues à la traversée de toute surface de normale  $\underline{\epsilon}_3$ , à savoir les composantes  $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$  qui sont nulles dans les deux couches.

Achever la détermination des déplacements en fonction de  $A$  et  $C$ . On utilisera les conditions aux limites suivantes :

$$u_1(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = u_2(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = u_3(0, 0, 0) = 0$$

$$u_1(0, 0, X_3 = h_f) = u_2(0, 0, X_3 = h_f) = 0$$

$$u_2(X_1 = L, 0, 0) = 0$$

où le point de coordonnées  $(L, 0, 0)$  est un point donné supposé appartenir à la plaque.

► Les déplacements (21.35) vérifient les conditions aux limites proposées. Il reste donc à fixer le mouvement de corps rigide adapté à ces conditions de Dirichlet. Un tel mouvement infinitésimal est de la forme :

$$\begin{aligned} u_1 &= -rX_2 + qX_3 + c_1 \\ u_2 &= rX_1 - pX_3 + c_2 \\ u_3 &= -qX_1 + pX_2 + c_3 \end{aligned}$$

La première condition exige que  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ .

La deuxième condition exige alors que  $p = q = 0$ .

La troisième condition exige que  $r = 0$ .

Les conditions aux limites proposées sont donc nécessaires et suffisantes pour fixer le mouvement de corps rigide du solide, laissé indéterminé lors de l'intégration.

On exprime maintenant les déplacements en fonction de A et C :

$$u_1 = AX_1X_3 + CX_1 \quad (21.40)$$

$$u_2 = AX_2X_3 + CX_2 \quad (21.41)$$

$$u_3 = -A\left(\frac{X_1^2}{2} + \frac{X_2^2}{2}\right) - \frac{2\nu}{1-\nu}(AX_3^2 + CX_3) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0)X_3 \quad (21.42)$$

### 21.2.6 Torseur des efforts résultant

Calculer le torseur des efforts résultant sur un élément de la surface latérale  $\partial S \times ]-h_s, h_f[$ , engendré par le segment du bord  $X_1 = Constante1, X_2 = Constante2$ , d'épaisseur  $h$  et de largeur infinitésimale  $dl$  comme sur la figure 21.4(a). Le vecteur normal en chaque point du bord a pour composantes  $(n_1, n_2, 0)$ . Comme on ne préjuge pas de la forme du bord de la plaque, ces composantes  $n_1, n_2$  peuvent être quelconques. On exprimera le torseur résultant en fonction de  $A, C, T - T_0$  et des caractéristiques du bicoche.

Etablir alors le système linéaire permettant de déterminer finalement  $A$  et  $C$ .

La détermination explicite de  $A$  et  $C$  est repoussée à la partie suivante du problème.

Indiquer enfin dans quelles circonstances la démarche adoptée jusqu'ici conduit effectivement à une solution satisfaisante du problème posé.

► On calcule la résultante (linéique) des efforts sur une surface d'équation  $X_1 = Cste, X_2 = Cste$  et d'épaisseur infinitésimale. La troisième composante de cette résultante est nulle. Les deux premières composantes d'intérêt sont :

$$R_1 = \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} n_1 dX_3 = \left( \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 \right) n_1 \quad (21.43)$$

$$R_2 = \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{22} n_2 dX_3 = \left( \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{22} dX_3 \right) n_2 \quad (21.44)$$

puisque le vecteur normal est constant le long de l'élément de surface cylindrique considéré.

Le moment (linéique) résultant, quant à lui, s'exprime de la façon suivante :

$$\underline{M} = \int_{-h_s}^{h_f} \begin{bmatrix} -\sigma_{22}X_3n_2 \\ \sigma_{11}X_3n_1 \\ \sigma_{11}(X_1n_2 - X_2n_1) \end{bmatrix} dX_3 \quad (21.45)$$

Par conséquent,

$$M_1 = \left( \int_{-h_s}^{h_f} -\sigma_{11}X_3 dX_3 \right) n_2, \quad M_2 = \left( \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11}X_3 dX_3 \right) n_1 \quad (21.46)$$

$$M_3 = n_2 X_1 \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 - n_1 X_2 \int_{X_3=-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 \quad (21.47)$$

On est donc amené à calculer deux intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 &= \int_{-h_s}^0 M_s(AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0)) dX_3 \\ &\quad + \int_0^{h_f} M_f(AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0)) dX_3 \\ &= -M_s A \frac{h_s^2}{2} + M_s(C - \alpha_s(T - T_0)) h_s \\ &\quad + M_f A \frac{h_f^2}{2} + M_f(C - \alpha_f(T - T_0)) h_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11}X_3 dX_3 &= \int_{-h_s}^0 M_s(AX_3^2 + CX_3 - \alpha_s(T - T_0)X_3) dX_3 \\ &\quad + \int_0^{h_f} M_f(AX_3^2 + CX_3 - \alpha_f(T - T_0)X_3) dX_3 \\ &= M_s A \frac{h_s^3}{3} - M_s(C - \alpha_s(T - T_0)) \frac{h_s^2}{2} \\ &\quad + M_f A \frac{h_f^3}{3} + M_f(C - \alpha_f(T - T_0)) \frac{h_f^2}{2} \end{aligned}$$

Comme aucun effort extérieur n'est appliqué au composant, ces deux résultantes s'annulent. Comme l'une au moins des composantes  $n_1$  ou  $n_2$  est non nulle, le torseur résultant est nul si et seulement si les deux intégrales sont nulles :

$$\int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11} dX_3 = 0, \quad \int_{-h_s}^{h_f} \sigma_{11}X_3 dX_3 = 0$$

On en déduit un système de deux équations d'inconnues  $A$  et  $C$  :

$$(M_f h_f^2 - M_s h_s^2) \frac{A}{2} + (M_s h_s + M_f h_f) C = (M_s h_s \alpha_s + M_f h_f \alpha_f) (T - T_0) \quad (21.48)$$

$$(M_s h_s^3 + M_f h_f^3) \frac{A}{3} + (M_f h_f^2 - M_s h_s^2) \frac{C}{2} = (M_f h_f^2 \alpha_f - M_s h_s^2 \alpha_s) \frac{T - T_0}{2} \quad (21.49)$$

On vérifiera que les épaisseurs  $h_s$  et  $h_f$  jouent un rôle symétrique dans ce système, comme il se doit puisque l'origine du repère est sur l'interface. Pour le voir, changer  $h_s$  en  $-h_s$ , c'est-à-dire prendre  $h_s$  algébrique, les épaisseurs sont alors interchangeables.

La démarche proposée a permis de déterminer un champ de contraintes et un champ de déplacements satisfaisant les équations de champs et remplissant les conditions aux limites au moins au sens de Saint-Venant. En effet, la solution en contrainte ne permet pas de garantir que le vecteur-contrainte soit nul point par point sur le bord de la plaque mais assure la nullité du torseur résultant sur chaque élément du bord. Le principe de Saint-Venant indique alors que la solution trouvée est satisfaisante assez loin du bord, ce qui est assuré dans presque toute la pièce dans le cas d'un disque aplati tel que

$$\frac{h}{L} \ll 1$$

où  $L$  est la plus petite des deux dimensions caractéristiques de la base de la plaque.

#### 21.2.7 Comparaison avec un modèle numérique

Le problème peut aussi être résolu de manière numérique pour des valeurs particulières des caractéristiques du composant, par exemple grâce à la méthode des éléments finis. La déformée et le champ de contraintes obtenus numériquement pour une plaque à bord circulaire sont donnés sur la figure 21.5 dans le cas d'un disque bilame constitué d'une couche d'invar (alliage de fer et de nickel) et d'une couche de laiton d'épaisseur identique. Le bilame a été chauffé de 100°C part rapport à la température ambiante, température à laquelle le bilame est un disque parfait sans contraintes internes.

Commenter la qualité de la solution trouvée précédemment.

► Le champ de contraintes observé semble effectivement indépendant de  $X_1$ , sauf près du bord libre  $X_1 = L$ . Les profils semblent linéaires dans chaque couche.

La méthode proposée ne permet pas de préciser l'effet de bord visible sur la simulation numérique. On voit que, près du bord, l'invariance des contraintes vis-à-vis de  $r$  n'est plus de mise. On montre en fait que les contraintes  $\sigma_{33}$  et  $\sigma_{13}$  se développent et présentent une singularité au point où l'interface rencontre le bord (Freund and Suresh, 2003).

#### 21.2.8 Résolution du système

La solution établie dans la partie précédente ne dépend plus que de deux paramètres, solutions du système linéaire mis en évidence au paragraphe 21.2.6. La solution de ce

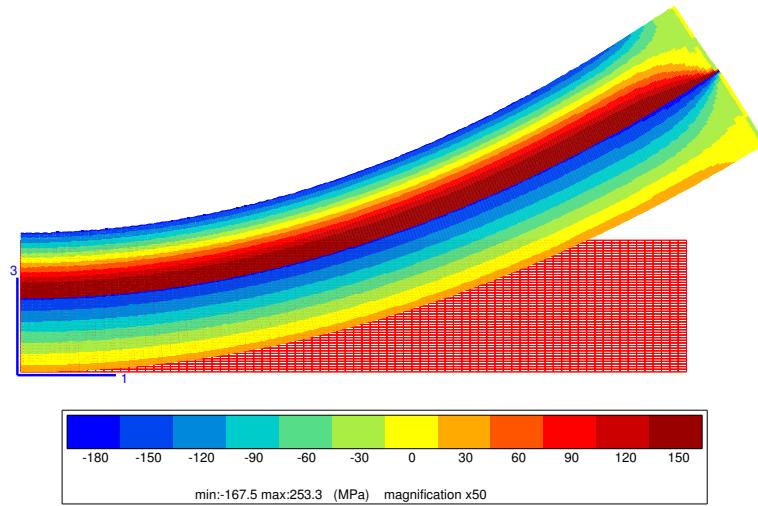


Figure 21.5 : Etats initial et déformé (fortement amplifié) d'une section  $X_1 \geq 0, X_3$  d'un bilame constitué d'une couche d'invar (haut) et d'une couche de laiton (bas) de même épaisseur. Le champ de contrainte  $\sigma_{11}$  dans le bilame est donné sous forme d'isovaleurs dont le code de couleur est fourni.

système est donnée ici explicitement :

$$A = 6 \frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_f - \alpha_s)(T - T_0) \left(1 + \frac{h_f}{h_s}\right) \Delta^{-1} \quad (21.50)$$

$$\Delta = 1 + 4 \frac{M_f h_f}{M_s h_s} + 6 \frac{M_f h_f^2}{M_s h_s^2} + 4 \frac{M_f h_f^3}{M_s h_s^3} + \frac{M_f^2 h_f^4}{M_s^2 h_s^4} \quad (21.51)$$

$$\frac{C\Delta}{T - T_0} = \left( \alpha_s + 4\alpha_f \frac{M_f h_f}{M_s h_s} + 3(\alpha_s + \alpha_f) \frac{M_f h_f^2}{M_s h_s^2} + 4\alpha_s \frac{M_f h_f^3}{M_s h_s^3} + \alpha_f \frac{M_f^2 h_f^4}{M_s^2 h_s^4} \right) \quad (21.52)$$

On ne demande pas d'établir ces résultats.

Plusieurs applications sont envisagées dans la suite concernant les bilames et les couches minces sur un substrat, configuration fréquente en microélectronique.

### 21.2.9 Bilame de laiton et d'invar

On considère, comme au paragraphe 21.2.7, un bicouche constitué d'une couche inférieure en laiton et d'une couche supérieure en invar. L'invar est un alliage de fer et de nickel aux propriétés remarquables élaboré par le métallurgiste Guillaume en 1897 (35-38% de nickel en poids, cf. (Béranger et al., 1996)). Il possède le coefficient de dilatation le plus faible parmi les métaux et alliages industriels, près de 20 fois plus faible que le fer et 10 fois plus faible que le nickel purs, à température ambiante. En outre, son coefficient de dilatation varie peu sur une large gamme de température (jusqu'à 100 à 200°C selon les compositions). Pour ces raisons, l'invar est utilisé comme matériau de structure des méthanières géantes qui sillonnent les mers avec leur cargaison de gaz cryogénique. Il est aussi utilisé dans les bilames métalliques souvent en association avec le laiton. Pour

construire un bilame, on associe un métal à faible coefficient de dilatation avec un métal à fort coefficient de dilatation.

On considère ici un tel bilame de laiton et d'invar dont les caractéristiques thermoélastiques sont données dans le tableau 21.1 et supposées ne pas varier avec la température dans le domaine de température considéré. La géométrie étudiée est telle que  $h_s = h_f = h/2$ . Comme les résultats en contraintes et déformations ne dépendent pas explicitement des valeurs de  $h_f$  et  $h_s$  mais seulement du rapport de ces longueurs, on ne donne pas ici l'épaisseur réelle du composant. Le bilame, initialement dans son état naturel, est soumis à un écart de température  $T - T_0 = 100^\circ\text{C}$ .

Vérifier que les conditions permettant de respecter le contexte infinitésimal sont remplies. Tracer les profils de déplacements  $u_1/h$  et  $u_3/h$  de la ligne  $X = 2 = X_3 = 0$  en fonction de la distance à l'origine  $X_1/h$ .

Tracer de même les profils de déformations  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{33}$ , d'une part, et de contrainte  $\sigma_{11}$ , d'autre part, le long de l'axe  $X_1 = X_2 = 0$ , en fonction de la cote relative  $X_3/h$ .

Pour expliciter les fonctions en jeu, on tirera profit du fait que dans le cas du laiton et de l'invar :

$$\frac{M_f}{M_s} = 2$$

Indiquer enfin l'endroit du bilame où la contrainte est la plus forte. Calculer la valeur numérique de cette contrainte maximale.

Donner l'expression de l'écart de température pour lequel la plasticité peut apparaître dans le laiton supposé obéir à un critère de plasticité de Tresca avec une limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction. On suppose que l'invar garde un comportement purement élastique.

► Dans le cas particulier du couple laiton/invar, on a

$$\Delta = 33, \quad A = \frac{8}{11}(\alpha_f - \alpha_s) \frac{T - T_0}{h_s}, \quad C = \frac{T - T_0}{11}(5\alpha_s + 6\alpha_f)$$

Remarquer que, dans le cas présent,  $T - T_0 > 0 \implies C > 0, A < 0$ .

Pour tester la validité du contexte infinitésimal, on calcule le gradient du champ de déplacement déterminé au paragraphe 21.2.4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} &= AX_3 + C, & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} &= AX_1, & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} &= -AX_1 \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_3} &= -\frac{2\nu}{1-\nu}(AX_3 + C) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T - T_0) \end{aligned}$$

Des conditions suffisantes pour le respect du contexte infinitésimal sont :

$$|\alpha_{s,f}(T - T_0)| \ll 1 \implies |AX_3| \leq |Ah| \ll 1, |C| \ll 1$$

$$|(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0)| \frac{L}{h_s} \ll 1 \implies |AX_1| \leq |AL| \ll 1$$

La première condition est remplie dans le cas du bilame laiton/invar étudié. La deuxième condition donne une limite supérieure à la plus grande dimension caractéristique du bâche en fonction de son épaisseur.

A l'interface, i.e. en  $X_3 = 0$ , les déplacements valent :

$$u_1 = CX_1, \quad u_3 = -\frac{A}{2}X_1^2$$

matériau	$E$ (GPa)	$\nu$	$\alpha (\times 10^{-6} \text{K}^{-1})$
aluminium	70	0.33	23
invar	210	0.33	1.2
laiton	103	0.34	19
silicium	150	0.17	3

Tableau 21.1: Propriétés thermoélastiques à 20°C de quelques matériaux.

Le déplacement radial est linéaire avec une pente positive tandis que le déplacement axial imprime au plan  $X_3 = 0$  une courbure positive  $-A$ . Suffisamment loin du bord du disque et *a fortiori* sur l'axe  $X_1 = X_2 = 0$ , les déformations sont les suivantes :

$$\varepsilon_{11} = AX_3 + C, \quad \varepsilon_{33}^{f,s} = -\frac{2\nu_{f,s}}{1-\nu_{f,s}}(AX_3 + C) + \frac{1+\nu_{f,s}}{1-\nu_{f,s}}\alpha_{f,s}(T - T_0)$$

Quant aux contraintes, on trouve :

$$\frac{\sigma_{11}^f}{2M_s(T - T_0)} = \frac{\alpha_f - \alpha_s}{11}\left(8\frac{X_3}{h_s} - 5\right), \quad \frac{\sigma_{11}^s}{M_s(T - T_0)} = \frac{\alpha_f - \alpha_s}{11}\left(8\frac{X_3}{h_s} + 6\right)$$

Les profils de déplacements, déformations et contraintes dans le bilame laiton/invar considéré sont données sur la figure 21.6. Remarquer que la base du composant s'allonge radialement et se courbe avec la concavité tournée vers le haut. La déformation  $\varepsilon_{11}$  est linéaire sur toute l'épaisseur du composant et continue à l'interface. Au contraire, la composante  $\varepsilon_{33}$  et les contraintes présentent une discontinuité au passage de l'interface. Le profil de contraintes étant affine par morceaux, il suffit, pour trouver la contrainte maximale, de calculer la valeur de la contrainte successivement en  $X_3/h_s = -1$ ;  $X_3/h_s = 0^-$ ;  $X_3/h_s = 0^+$ ;  $X_3/h_s = 1$ , ce qui donne :

$$\frac{\sigma_{11}}{M_s(T - T_0)(\alpha_s - \alpha_f)} = \frac{2}{11}; \quad -\frac{6}{11}; \quad \frac{10}{11}; \quad -\frac{6}{11}$$

La contrainte est donc maximale à l'interface du côté de l'invar. Noter la valeur obtenue de 253 MPa calculée à cet endroit, qui risque fort d'outrepasser la limite d'élasticité de l'invar. Il est donc probable que, porté à cette température, le bilame sera le siège de déformations plastiques et qu'une courbure résiduelle plastique persistera après le retour à la température ambiante.

### 21.3 Mécanique des microsystèmes

On revient d'abord au cas général d'un bicouche constitué de deux matériaux quelconques, avant d'aborder deux applications concernant la micromécanique des microsystèmes.

#### 21.3.1 La formule de Stoney

Donner l'expression simplifiée de la courbure  $c$  que prend le composant quand il est chauffé, dans le cas d'un film mince sur un substrat, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{h_f}{h_s} \ll 1 \tag{21.53}$$

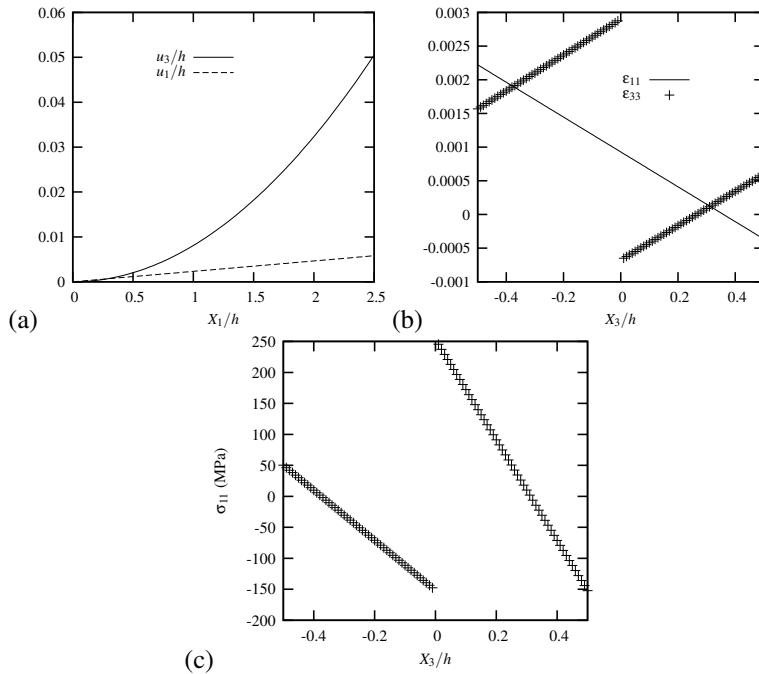


Figure 21.6 : Bilame moitié laiton, moitié invar chauffé de  $100^\circ\text{C}$  : (a) déplacements de l’interface du bicouche  $X_3 = 0$ , (b) déformations et (c) contraintes le long de l’axe  $X_1 = X_2 = 0$ .

Pour cela, on développera les expressions (21.50) à (21.52) au premier ordre.

Indiquer quelle condition supplémentaire sur les caractéristiques du bicouche conduit à l’expression suivante donnant la courbure  $c$  qu’adopte le bicouche lorsqu’il est chauffé :

$$c = \frac{6M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \quad (21.54)$$

C’est la formule dite de Stoney (Stoney, 1909) constamment utilisée dans la recherche/développement en microsystèmes et microélectronique (MEMS<sup>3</sup>) pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe 21.3.4.

► L’expression (21.42) du déplacement  $u_3$  montre une dépendance en  $X_1^2$  responsable de la courbure que prennent les surfaces d’équation  $X_3 = \text{Cste}$ . La courbure, par rapport à chacun des axes  $X_1$  et  $X_2$ , est donnée par le double du coefficient de cette dépendance quadratique :

$$c = -A \quad (21.55)$$

Chaque surface déformée présente une double courbure et prend donc la forme de calotte

sphérique de rayon  $-1/A$ , dans le contexte infinitésimal.

Le développement au premier ordre en  $h_f/h_s$  de l'expression (21.50) conduit à l'état de courbure suivant :

$$c \simeq 6 \frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} (\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \left(1 + \frac{h_f}{h_s}\right) \left(1 + 4 \frac{M_f}{M_s} \frac{h_f}{h_s}\right)^{-1} \quad (21.56)$$

La formule de Stoney est alors obtenue lorsque

$$M_f h_f \ll M_s h_s \quad (21.57)$$

Cette condition combine les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques des couches.

### 21.3.2 Contraintes dans un film mince sur un substrat

En se plaçant dans les hypothèses de Stoney, i.e. lorsque la condition (21.53) et la condition supplémentaire requise au paragraphe précédent sont satisfaites, établir la forme simplifiée des contraintes dans le substrat et le film.

Calculer alors les contraintes moyennes dans le film et dans le substrat :

$$\bar{\sigma}_{11}^s = \frac{1}{h_s} \int_{-h_s}^0 \sigma_{11}^s dX_3, \quad \bar{\sigma}_{11}^f = \frac{1}{h_f} \int_0^{h_f} \sigma_{11}^f dX_3 \quad (21.58)$$

Vérifier que l'équilibre requis de ces contraintes moyennes est satisfait par les expressions trouvées.

Montrer que, dans tout bicouche constitué d'un substrat et d'un film mince, le plan neutre, associé à une contrainte nulle, se situe toujours dans le substrat, à une distance à l'interface égale aux deux tiers de l'épaisseur du substrat, c'est-à-dire en

$$X_3 = -\frac{2h_s}{3} \quad (21.59)$$

► Les conditions (21.53) et (21.57) étant requises, on peut adopter l'expression (21.54) pour  $A$  et la suivante pour  $C$  en développant (21.52) au premier ordre :

$$C \simeq (\alpha_s + 4\alpha_f \frac{M_f h_f}{M_s h_s})(1 - 4 \frac{M_f h_f}{M_s h_s})(T - T_0) \simeq (\alpha_s + 4(\alpha_f - \alpha_s) \frac{M_f h_f}{M_s h_s})(T - T_0) \quad (21.60)$$

Les contraintes sont données par les relations (21.36) dans chaque couche. Avec les développements limités précédents, les contraintes dans le film valent :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}^f}{M_f} &= AX_3 + C - \alpha_f(T - T_0) \simeq (\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \left(1 - 4 \frac{M_f h_f}{M_s h_s} - 6 \frac{M_f h_f}{M_s h_s^2} X_3\right) \\ &\simeq (\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \end{aligned} \quad (21.61)$$

Le premier terme, constant, domine dans le film :

$$\bar{\sigma}_{11}^f = \bar{\sigma}_{22}^f \simeq M_f(\alpha_s - \alpha_f)(T - T_0) \quad (21.62)$$

C'est une relation remarquable puisqu'elle ne dépend que des propriétés thermoélastiques du film et du désaccord de dilatation entre le film et le substrat.

Dans le substrat, la contrainte est d'un ordre de grandeur inférieure :

$$\frac{\sigma_{11}^s}{M_s} = AX_3 + C - \alpha_s(T - T_0) \simeq (\alpha_f - \alpha_s)(T - T_0) \frac{M_f h_f}{M_s h_s} (6 \frac{X_3}{h_s} + 4) \quad (21.63)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}^s}{M_s} \simeq \frac{M_f h_f}{M_s h_s} (\alpha_f - \alpha_s)(T - T_0) \quad (21.64)$$

La contrainte moyenne sur tout le volume du bicouche est nulle, comme il se doit, en l'absence de chargement extérieur<sup>4</sup> :

$$h_s \bar{\sigma}_{11}^s + h_f \bar{\sigma}_{11}^f = 0 \quad (21.65)$$

Au vu des contraintes quasi-constantes régnant dans le film mince, la fibre neutre est à rechercher dans le substrat :

$$\sigma_{11}^s = 0 \implies X_3 \simeq -\frac{2h_s}{3} \quad (21.66)$$

d'après la relation (21.63). La fibre neutre est donc située aux deux tiers en dessous de l'interface, indépendamment des propriétés thermoélastiques du bilame, respectant toutefois les hypothèses de Stoney.

### 21.3.3 Contraintes résiduelles dans un dépôt d'aluminium sur un substrat de silicium

Un wafer de silicium est constitué d'un substrat monocristallin de silicium sur lequel les différentes couches métalliques ou autres sont déposées pour fabriquer des composants électroniques. On étudie ici les contraintes qui se développent dans un film d'aluminium d' $1 \mu\text{m}$  d'épaisseur déposé sur un substrat de silicium de  $500 \mu\text{m}$  d'épaisseur. Le dépôt s'effectue à une température de  $50^\circ\text{C}$ . A la fin du dépôt, le substrat et le film sont supposés être dans leur état naturel. A cette température de  $50^\circ\text{C}$ , le composant est un disque parfait de rayon égal à 200 mm. Il est ensuite refroidi jusqu'à la température ambiante de  $20^\circ\text{C}$ .

Calculer successivement la courbure résiduelle du composant, et les contraintes moyennes dans le film et le substrat. Commenter.

La contrainte trouvée dans le film est relativement proche de la limite d'élasticité de l'aluminium massif. On fait remarquer toutefois que les métaux sous forme de films minces, voire nanométriques, ont en général une limite d'élasticité significativement plus importante qu'à l'état massif.

On traitera le silicium comme un matériau isotrope avec les propriétés indiquées dans le tableau 21.1, propriétés supposées constantes dans le domaine de température concerné. On y trouvera aussi les autres caractéristiques des matériaux nécessaires au calcul, supposées indépendantes de la température.

► Les hypothèses de Stoney sont remplies dans le cas du composant considéré :

$$\frac{h_f}{h_s} = 2.10^{-3}, \quad \frac{M_f h_f}{M_s h_s} = 1.1 10^{-3} \quad (21.67)$$

de sorte que les formules établies dans ces conditions peuvent être utilisées. La courbure

4. C'est pourquoi on parle de contraintes résiduelles ou internes.

est donnée par la relation (21.54) :

$$c = 8.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}, \quad \frac{1}{c} = 120 \text{ m} \quad (21.68)$$

La courbure est positive, ce qui correspond à une interface de concavité tournée vers le haut. Le rayon de courbure de 120 m est infiniment plus grand que la taille du composant. Cette courbure est toutefois tout à fait mesurable, par exemple grâce à des méthodes optiques dont la résolution est typiquement de 15 km (Freund and Suresh, 2003). La mesure de la courbure du composant permet d'accéder, grâce aux calculs précédents, à une estimation de la contrainte dans le film. La formule (21.62) donne :

$$\sigma_{11}^f = \sigma_{22}^f = 63 \text{ MPa} \quad (21.69)$$

Il s'agit d'une contrainte de traction. En effet, le coefficient de dilatation de l'aluminium est plus élevé que celui du silicium et l'écart entre la température d'élaboration et la température ambiante est de -30°C. La contrainte moyenne dans le substrat n'est que de -0.13 MPa en raison de sa grande épaisseur. La limite d'élasticité de l'aluminium massif et de ses alliages varie de 50 à 150 MPa. Toutefois, elle est beaucoup plus élevée dans les films minces en raison de leur microstructure spécifique.

#### 21.3.4 Contraintes d'épitaxie

Les déformations d'origine thermique ne sont pas les seules causes du développement de contraintes au sein d'un revêtement sur un substrat. En microélectronique, les couches déposées sont souvent en épitaxie avec le substrat, c'est-à-dire que les rangées d'atomes du substrat se prolongent exactement en les rangées atomiques de la couche. C'est le cas par exemple des dépôts de silicium-germanium sur un substrat de silicium monocristallin. Toutefois, le paramètre cristallin<sup>5</sup>  $a_{SiGe} = 0.5476 \text{ nm}$  du silicium-germanium (pour 80% de silicium et 20% de germanium dans le composé binaire) est légèrement plus grand que le paramètre du silicium  $a_{Si} = 0.5431 \text{ nm}$  en raison de l'implantation des atomes de germanium. Pour que les rangées atomiques se prolongent du substrat au film, il faut donc que les plans atomiques du film se rapprochent légèrement. Les contraintes naissent justement de l'écart entre la valeur du paramètre cristallin *in situ* et la valeur d'équilibre sans contrainte (à savoir  $a_{Si}$  pour le silicium et  $a_{SiGe}$  pour le silicium-germanium). Si le film n'était pas contraint de croître en épitaxie avec le substrat, il se déformerait librement de la quantité :

$$\varepsilon_{11}^{*f} = \varepsilon_{22}^{*f} = \varepsilon_{33}^{*f} = \frac{a_{SiGe} - a_{Si}}{a_{Si}} \quad (21.70)$$

par rapport au substrat de silicium. La déformation totale dans le film est donc la somme d'une déformation élastique et de la déformation libre d'épitaxie :

$$\varepsilon_{11}^f = \varepsilon_{11}^{ef} + \varepsilon_{11}^{*f} \quad (21.71)$$

Le substrat de silicium, quant à lui, est tel que

$$\varepsilon_{11}^{*s} = 0 \quad (21.72)$$

En utilisant une analogie avec le problème précédent des contraintes d'origine thermique dans un film mince sur un substrat, calculer les contraintes dans le film et la courbure du composant.

Pour le silicium-germanium considéré, on prendra  $M_f = 170 \text{ GPa}$ . Les caractéristiques

---

5. Le paramètre cristallin est la plus petite distance inter-réticulaire, c'est-à-dire entre plans atomiques.

géométriques du dépôt sont :  $h_f = 100 \text{ nm}$ ,  $h_s = 1 \text{ mm}$ .

► La déformation libre d'épitaxie s'apparente à la dilatation thermique et l'on a l'analogie suivante :

$$\frac{a_{SiGe} - a_{Si}}{a_{Si}} \equiv \alpha_f(T - T_0), \quad \text{et} \quad 0 \equiv \alpha_s(T - T_0)$$

Ce désaccord paramétrique vaut 0.83%. L'épitaxie entre le film et le substrat oblige le film à accommoder élastiquement la déformation imposée par le substrat. Le contexte est tout à fait semblable au cas du film mince siège de déformations thermiques sur un substrat. Les formules (21.54) et (21.62) s'appliquent de la façon suivante :

$$\bar{\sigma}_{11}^f = \bar{\sigma}_{\theta\theta}^f \simeq M_f \frac{a_{Si} - a_{SiGe}}{a_{Si}} = -1403 \text{ MPa}$$

$$c = \frac{6M_f}{M_s h_s^2} h_f \frac{a_{Si} - a_{SiGe}}{a_{Si}} = -5.63 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

ce qui donne un rayon de courbure de -177 m. Noter les contraintes considérables de compression qui règnent dans le film après élaboration, dues à des déformations élastiques proches du %. Il y a en fait si peu de défauts cristallins dans ces couches nanométriques que de telles contraintes peuvent exister sans provoquer de déformation plastique.

## 21.4 Mécanique et changement de phase à l'état solide

Les changements de phase ne sont pas l'apanage des transitions solide-liquide ou liquide-gaz. De tels changements peuvent avoir lieu tout en restant à l'état solide. Un arrangement périodique particulier des atomes dans un cristal correspond alors à la notion de phase. Par exemple, les atomes de fer pur à la température et à la pression ambiantes sont ordonnés dans une structure dite cubique centrée (phase *ferritique*) caractérisée par une maille élémentaire en forme de cube dont tous les sommets et le centre sont occupés par un atome de fer. A 912°C, à la pression ambiante, la ferrite se transforme en *austénite* dont la structure ordonnée est cubique à faces centrées, c'est-à-dire que les atomes de fer occupent désormais les sommets et les centres des faces du cube. Ce changement de structure s'accompagne d'un changement du volume du cube élémentaire et des distances inter-atomiques. Il s'agit d'une déformation de transformation. Dans les métaux et alliages, ces changements de phase se produisent en général avec une certaine cinétique de sorte que la phase initiale  $\beta$  ne se transforme pas instantanément et en masse en la nouvelle phase  $\alpha$ . Au contraire, une multitude de précipités de phase  $\alpha$  aux formes variées (sphériques, en plaquettes ou cubiques, comme sur la figure 21.7) se forment au sein de la matrice  $\beta$ . A la fin de la transformation, la phase  $\alpha$  occupe le domaine  $\Omega_\alpha$ , de volume  $V_\alpha$ , tandis que la phase résiduelle occupe le domaine  $\Omega_\beta$ , au sein du solide  $\Omega$  de volume  $V$ . On appelle  $\phi = V_\alpha/V$  la fraction volumique de phase  $\alpha$  formée.

La phase  $\alpha$  est le siège d'une déformation libre  $\varepsilon^*$ , appelée déformation de transformation. La déformation de transformation est prise nulle<sup>6</sup> dans la phase  $\beta$ . La déformation totale dans la phase  $\alpha$  se décompose en une partie élastique et une partie due à la déformation de transformation :

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^e + \varepsilon^* \tag{21.73}$$

tandis que la déformation au sein du domaine  $\beta$  est purement élastique. La déformation de transformation a le même statut de déformation libre que la déformation thermique en

6. Cette hypothèse ne réduit pas la généralité du problème étudié. Si la phase  $\beta$  possède une déformation de transformation  $\varepsilon_\beta^* \neq 0$ , les expressions des contraintes calculées dans ce problème sont encore valables à condition de remplacer  $\varepsilon^*$  par  $\varepsilon_\alpha^* - \varepsilon_\beta^*$ , grâce à un changement de configuration initiale adéquat.

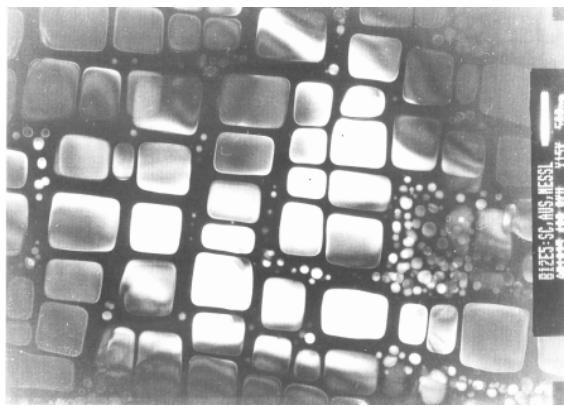
thermoélasticité. A ce titre, les déformations de transformation peuvent provoquer l'apparition de contraintes locales en raison des possibles incompatibilités de déformation entre phases. La déformation d'origine thermique, quant à elle, n'est pas considérée dans ce problème car on se place dans le cas isotherme à la température de transformation.

L'objectif de cette section est d'estimer les contraintes qui se développent dans un solide élastique lorsqu'une transformation de phase  $\beta \rightarrow \alpha$  se produit. Deux morphologies typiques sont considérées et conduisent à des distributions de contraintes internes différentes.

Dans tout le problème, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, dans le cas statique. Le comportement élastique des deux phases est isotrope. Les propriétés élastiques des phases sont notées  $E_\alpha, \nu_\alpha, \kappa_\alpha, \mu_\alpha, E_\beta, \nu_\beta, \kappa_\beta, \mu_\beta$ . La déformation de transformation de la phase  $\alpha$  est sphérique :

$$\tilde{\varepsilon}^* = \varepsilon^* \mathbf{1}$$

On suppose qu'aucun phénomène de glissement ou de fissuration ne se produit aux interfaces entre les phases.



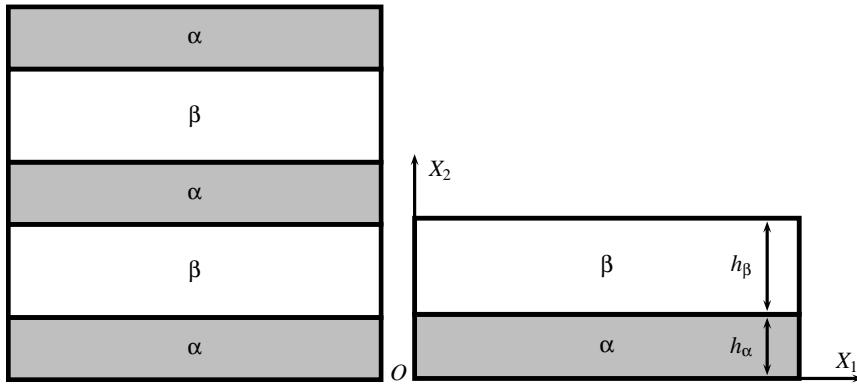
*Figure 21.7 : Microstructure biphasée d'un superalliage à base de nickel vue au microscope électronique à transmission. On distingue des précipités carrés et de plus petits précipités sphériques (en blanc et en gris) au sein d'une matrice en noir. La fraction volumique de phase blanche/grise est de 68%. L'échelle est indiquée par la barre blanche verticale (à droite) qui mesure 500 nm.*

#### 21.4.1 Morphologie lamellaire

On considère le cas où les phases  $\alpha$  et  $\beta$  apparaissent sous la forme de couches alternées d'épaisseurs respectives  $h_\alpha$  et  $h_\beta$  comme sur la figure 21.8. On note  $h = h_\alpha + h_\beta$ .

L'alternance de couches est supposée infinie (périodique) dans la direction 2 et chaque couche est illimitée dans les directions 1 et 3. Dans cette section, le corps  $\Omega$  est supposé libre de tout effort appliqué.

Les symétries de cette répartition des phases assurent qu'un plan d'équation  $X_1 = X_0$  se transforme en un plan parallèle. Il en va de même des plans d'équations  $X_2 = X_0$  et  $X_3 = X_0, \forall X_0$ .



#### Contraintes et déformations résiduelles

Justifier que l'on recherche des déformations et contraintes homogènes dans chaque phase, de la forme :

$$[\varepsilon_\alpha] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_\beta] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad (21.74)$$

$$[\sigma_\alpha] = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\alpha \end{bmatrix}, \quad [\sigma_\beta] = \begin{bmatrix} \sigma_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\beta \end{bmatrix} \quad (21.75)$$

où  $\varepsilon_1, \varepsilon_2^\alpha, \varepsilon_2^\beta, \sigma_\alpha$  et  $\sigma_\beta$  sont les inconnues du problème.

Toutes les couches de phase  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) sont le siège des mêmes contraintes  $\sigma_\alpha$  (resp.  $\sigma_\beta$ ) homogènes, de la forme précédente. Il est donc suffisant de se ramener à l'étude du motif élémentaire de la figure 21.8 à droite, où le système de coordonnées choisi, cartésien orthonormé, est indiqué.

Justifier le terme de *contraintes résiduelles*.

► L'homogénéité des contraintes et des déformations assure que les équations d'équilibre, en l'absence de forces de volume et dans le cas statique, et les équations de compatibilité sont satisfaites. Chaque plan d'équation  $X_1 = X_0$ , donc perpendiculaire à l'interface  $\alpha/\beta$  se transforme en un plan parallèle, sans discontinuité à l'interface. Cela implique que la déformation  $\varepsilon_{11}$  est la même pour  $\alpha$  et  $\beta$ . Le même raisonnement s'applique pour les plans  $X_3 = X_0$  de sorte que  $\varepsilon_{33}^\alpha = \varepsilon_{33}^\beta$ . Pour des raisons de symétrie, les directions 1 et 3 sont indiscernables de sorte que  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{11}$ , noté  $\varepsilon_1$ .

Les plans parallèles à l'interface se transforment en des plans parallèles mais les déformations  $\varepsilon_{22}$  peuvent différer d'une phase à l'autre tout en respectant la continuité du déplacement à l'interface.

La cellule élémentaire de la figure 21.8 est un parallélépipède qui se transforme en un parallélépipède de sorte qu'aucun cisaillement  $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}$  ou  $\varepsilon_{31}$  ne peut apparaître. Cette cinématique est compatible avec le fait que la dilatation  $\varepsilon^*$  de la phase  $\alpha$  est supposée isotrope.

L'élasticité isotrope implique que les tenseurs de contraintes sont eux aussi décrits par des matrices diagonales, avec  $\sigma_{11} = \sigma_{33}$ . Le corps est libre d'efforts appliqués à l'infini. Cette condition est remplie en particulier en imposant :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_2 = 0 \quad (21.76)$$

Cette condition implique que  $\sigma_{22}$  doit s'annuler. Or cette contrainte se transmet à l'interface :

$$\underline{\sigma}^\alpha \cdot \underline{e}_2 = \underline{\sigma}^\beta \cdot \underline{e}_2 = 0 \implies \sigma_{22}^\alpha = \sigma_{22}^\beta = 0 \quad (21.77)$$

Si l'on demande en outre que  $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_1 = 0$ , on obtient  $\sigma_{11} = 0$  dans les deux phases de sorte qu'aucune contrainte ne peut se développer. On va donc satisfaire la condition d'absence d'efforts surfaciques appliqués à l'infini, au sens de Saint-Venant, en exigeant, dans la section suivante, que la résultante de ces efforts soit nulle sur le bord droit du motif élémentaire. On admet donc l'existence de contraintes  $\sigma_{11}^\alpha, \sigma_{11}^\beta$  non nulles. En réalité il y aura un effet de bord là où les couches débouchent à la surface, avec des contraintes non homogènes. Il s'établit donc un champ de contraintes biaxiales au sein de l'empilement. Il s'agit de contraintes internes ou résiduelles, à divergence et à résultante nulles.

#### *Relations entre les contraintes*

Montrer que les composantes  $\sigma_\alpha$  et  $\sigma_\beta$  vérifient les deux relations suivantes :

$$h_\alpha \sigma_\alpha + h_\beta \sigma_\beta = 0 \quad (21.78)$$

$$\frac{\sigma_\alpha}{M_\alpha} - \frac{\sigma_\beta}{M_\beta} = -\varepsilon^* \quad (21.79)$$

avec

$$M_\alpha = \frac{E_\alpha}{1 - \nu_\alpha}, \quad M_\beta = \frac{E_\beta}{1 - \nu_\beta} \quad (21.80)$$

Calculer alors ces contraintes.

En déduire enfin les déformations  $\varepsilon_1, \varepsilon_2^\alpha, \varepsilon_2^\beta$ .

► On calcule la résultante des efforts sur le bord droit de la cellule élémentaire de la figure 21.8, prise d'épaisseur unitaire :

$$\int_S \sigma_{11} dS = \int_{S_\alpha} \sigma_\alpha dS + \int_{S_\beta} \sigma_\beta dS = h_\alpha \sigma_\alpha + h_\beta \sigma_\beta \quad (21.81)$$

Cette résultante doit être nulle en l'absence d'efforts appliqués, ce qui conduit à l'équation (21.78).

Les relations d'élasticité isotrope peuvent être appliquées à partir de cet état de contraintes :

$$\varepsilon_1^\beta = \frac{1 + \nu_\beta}{E_\beta} \sigma_\beta - \frac{\nu_\beta}{E_\beta} 2\sigma_\beta = \frac{1 - \nu_\beta}{E_\beta} \sigma_\beta = \frac{\sigma_\beta}{M_\beta} \quad (21.82)$$

Dans la phase  $\alpha$ , il faut introduire aussi la déformation de transformation :

$$\varepsilon_1^\alpha = \varepsilon^* + \frac{1 + \nu_\alpha}{E_\alpha} \sigma_\alpha - \frac{\nu_\alpha}{E_\alpha} 2\sigma_\alpha = \varepsilon^* + \frac{1 - \nu_\alpha}{E_\alpha} \sigma_\alpha = \varepsilon^* + \frac{\sigma_\alpha}{M_\alpha} \quad (21.83)$$

La compatibilité des déformations exige que  $\varepsilon_1^\alpha = \varepsilon_1^\beta$ , ce qui conduit à l'équation (21.79) recherchée. La résolution du système d'équations (21.78) et (21.79) conduit aux expres-

sions suivantes des contraintes :

$$\sigma_\alpha = -\frac{\varepsilon^*}{h_\alpha} \left( \frac{1}{h_\alpha M_\alpha} + \frac{1}{h_\beta M_\beta} \right)^{-1}, \quad \sigma_\beta = \frac{\varepsilon^*}{h_\beta} \left( \frac{1}{h_\alpha M_\alpha} + \frac{1}{h_\beta M_\beta} \right)^{-1} \quad (21.84)$$

Les déformations en découlent :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_\beta}{M_\beta} = \varepsilon^* \left( 1 + \frac{h_\beta M_\beta}{h_\alpha M_\alpha} \right)^{-1} \quad (21.85)$$

$$\varepsilon_2^\beta = -\frac{2\nu_\beta}{E_\beta} \sigma_\beta, \quad \varepsilon_2^\alpha = \varepsilon^* - \frac{2\nu_\alpha}{E_\alpha} \sigma_\alpha \quad (21.86)$$

### Cadre infinitésimal

Indiquer sous quelles conditions la solution établie précédemment satisfait les hypothèses des petites perturbations.

► Les transformations sont homogènes et conduisent à des champs de déplacements affines. Lors de l'intégration, une rotation homogène de l'ensemble de l'empilement apparaît. Cette rotation doit rester infinitésimale. Les déformations, quant à elles, restent infinitésimales tant que

$$|\varepsilon^*| \left( 1 + \frac{h_\beta M_\beta}{h_\alpha M_\alpha} \right)^{-1} \ll 1 \quad (21.87)$$

La condition porte donc fondamentalement sur la déformation de transformation  $\varepsilon^*$  qui doit donc rester d'amplitude suffisamment petite.

### Energie élastique

Montrer que la moyenne de l'énergie élastique du multi-couches se met sous la forme

$$W^e = \frac{9}{2} \phi (1 - \phi) \kappa^* \varepsilon^{*2} \quad (21.88)$$

avec

$$\frac{1}{\kappa^*} = \frac{1 - \phi}{\kappa_\alpha} + \frac{\phi}{\kappa_\beta} + \frac{3(1 - \phi)}{4\mu_\alpha} + \frac{3\phi}{4\mu_\beta} \quad (21.89)$$

où  $\phi = h_\alpha/h$  est la fraction volumique de phase  $\alpha$  dans le mélange. Les coefficients  $\kappa_\alpha$  et  $\kappa_\beta$  sont les modules de compressibilité respectifs des deux phases, et  $\mu_\alpha, \mu_\beta$  leurs modules de cisaillement.

► L'énergie élastique moyenne calculée sur le motif élémentaire de longueur et

d'épaisseur unitaires, vaut :

$$\begin{aligned}
 W^e &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e dX_2 \\
 &= \frac{1}{2h} \int_0^{h_\alpha} \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^e dX_2 + \frac{1}{2h} \int_{h_\alpha}^{h_\alpha+h_\beta} \boldsymbol{\sigma}_\beta : \boldsymbol{\varepsilon}_\beta^e dX_2 \\
 &= \frac{h_\alpha}{2h} \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^e + \frac{h_\beta}{2h} \boldsymbol{\sigma}_\beta : \boldsymbol{\varepsilon}_\beta^e \\
 &= \frac{h_\alpha}{h} \sigma_\alpha (\varepsilon_1 - \varepsilon^*) + \frac{h_\beta}{h} \sigma_\beta \varepsilon_1 \\
 &= -\frac{h_\alpha}{h} \sigma_\alpha \varepsilon^* \\
 \end{aligned} \tag{21.90}$$

$$= \varepsilon^{*2} \left( \frac{h}{h_\alpha M_\alpha} + \frac{h}{h_\beta M_\beta} \right)^{-1} \tag{21.91}$$

$$= \varepsilon^{*2} \left( \frac{1}{\phi M_\alpha} + \frac{1}{(1-\phi)M_\beta} \right)^{-1} = \phi(1-\phi)\varepsilon^{*2} \left( \frac{1-\phi}{M_\alpha} + \frac{\phi}{M_\beta} \right)^{-1} \tag{21.92}$$

Remarquons alors l'identité suivante entre les différents modules d'élasticité :

$$\frac{1-\nu}{E} = \frac{1}{3} \frac{1+\nu}{E} + \frac{2}{3} \frac{1-2\nu}{E} = \frac{1}{6\mu} + \frac{2}{9\kappa} \tag{21.93}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 \frac{1-\phi}{M_\alpha} + \frac{\phi}{M_\beta} &= (1-\phi) \left( \frac{1}{6\mu_\alpha} + \frac{2}{9\kappa_\alpha} \right) + \phi \left( \frac{1}{6\mu_\beta} + \frac{2}{9\kappa_\beta} \right) \\
 &= \frac{2}{9} \left( \frac{1-\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{\phi}{\kappa_\beta} + \frac{3(1-\phi)}{4\mu_\alpha} + \frac{3\phi}{4\mu_\beta} \right) = \frac{2}{9\kappa^*} \\
 \end{aligned} \tag{21.94}$$

ce qui conduit à l'expression annoncée (21.89).

Les contraintes (21.84) s'écrivent alors sous la forme plus concise :

$$\sigma_\alpha = -\frac{9}{2}(1-\phi)\kappa^*\varepsilon^*, \quad \sigma_\beta = \frac{9}{2}\phi\kappa^*\varepsilon^* \tag{21.95}$$

### Déformation moyenne

Si la phase  $\alpha$  se déformait librement sans interagir élastiquement avec la phase  $\beta$ , la déformation moyenne de l'ensemble, ainsi désolidarisé, serait  $\phi\varepsilon^*\mathbf{1}$ . Il en va autrement dans le cas du multi-couches avec interface parfaite, c'est ce que l'on va établir dans cette section.

Montrer d'abord que la variation relative de volume du motif élémentaire bicouche est

$$3\phi\varepsilon^* \left( 1 + \kappa^*(1-\phi) \left( \frac{1}{\kappa_\beta} - \frac{1}{\kappa_\alpha} \right) \right)$$

Commenter.

Montrer ensuite, en calculant le déviateur des déformations totales moyennes, que le

multi-couches ne se contracte (ou dilate) pas de la même façon selon les directions 1 et 2. De quelle propriété mécanique dépend le signe de la composante selon la direction 1 du déviateur de la déformation moyenne ?

► La variation relative de volume dans chaque phase est donnée par la trace du tenseur des déformations. Cette variation moyenne pour l'ensemble du biphasé s'obtient en calculant la moyenne de la trace des déformations :

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta V}{V} &= 2\varepsilon_1 + \phi\varepsilon_\alpha + (1 - \phi)\varepsilon_\beta \\
 &= \phi\varepsilon^* + \sigma_\beta \left( \frac{2}{M_\beta} + (1 - \phi) \left( \frac{2\nu_\alpha}{E_\alpha} - \frac{2\nu_\beta}{E_\beta} \right) \right) \\
 &= \phi\varepsilon^* + \frac{9}{2}\phi\varepsilon^*\kappa^* \left( \frac{2}{M_\beta} + (1 - \phi) \left( \frac{2\nu_\alpha}{E_\alpha} - \frac{2\nu_\beta}{E_\beta} \right) \right) \\
 &= \phi\varepsilon^* \left( 3 - 2 + \frac{9}{2}\kappa^* \left( \frac{2}{M_\beta} + (1 - \phi) \left( \frac{2\nu_\alpha}{E_\alpha} - \frac{2\nu_\beta}{E_\beta} \right) \right) \right) \\
 &= \phi\varepsilon^* \left( 3 + 9\kappa^*(1 - \phi) \left( \frac{1 - 2\nu_\beta}{E_\beta} - \frac{1 - 2\nu_\alpha}{E_\alpha} \right) \right) \\
 &= 3\phi\varepsilon^* \left( 1 + (1 - \phi)\kappa^* \left( \frac{1}{\kappa_\beta} - \frac{1}{\kappa_\alpha} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{21.96}$$

On voit que la correction de variation de volume est entièrement due à la différence des modules de compressibilité des deux phases. Cette correction peut être négative ou positive selon le signe de cette différence. Si les modules de compressibilité sont égaux, alors la variation de volume est la même que si les deux phases étaient indépendantes.

Le déviateur des déformations est défini comme

$$\xi_\alpha^{\text{dev}} = \xi_\alpha - \frac{\text{trace } \xi_\alpha}{3} \mathbf{1}, \quad \xi_\beta^{\text{dev}} = \xi_\beta - \frac{\text{trace } \xi_\beta}{3} \mathbf{1}$$

Le déviateur moyen vaut

$$\xi^{\text{dev}} = \phi\xi_\alpha^{\text{dev}} + (1 - \phi)\xi_\beta^{\text{dev}}$$

Dans le cas présent, on trouve

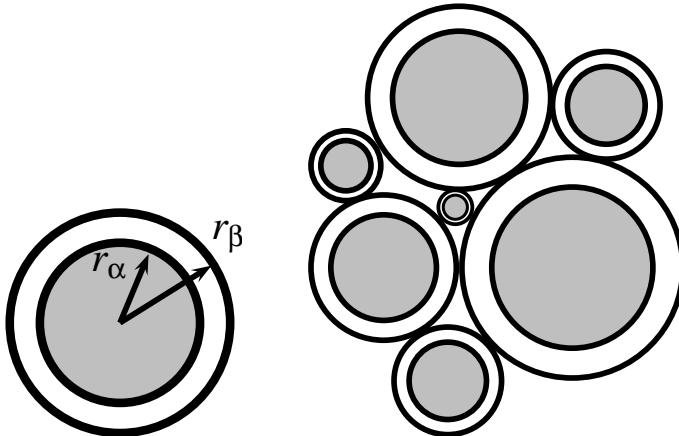
$$[\xi_\alpha^{\text{dev}}] = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2^\alpha}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\xi_\beta^{\text{dev}}] = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2^\beta}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21.97}$$

avec  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2^\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{2\mu_\alpha}$  et  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2^\beta = \frac{\sigma_\beta}{2\mu_\beta}$ . On en déduit la première composante déviatorique moyenne :

$$\varepsilon_{11}^{\text{dev}} = \frac{3}{2}\phi(1 - \phi)\kappa^*\varepsilon^* \left( \frac{1}{2\mu_\beta} - \frac{1}{2\mu_\alpha} \right) \tag{21.98}$$

les autres composantes étant  $\varepsilon_{22}^{\text{dev}} = -2\varepsilon_{11}^{\text{dev}}$ ,  $\varepsilon_{33}^{\text{dev}} = \varepsilon_{11}^{\text{dev}}$ . C'est donc la différence de module de cisaillement qui règle l'anisotropie de déformation du multi-couches entre les directions 1 et 2. Si la phase  $\beta$  est moins rigide que la phase  $\alpha$  et pour une déformation de transformation  $\varepsilon^* > 0$ , alors on a une dilatation dans le sens 1 et une contraction selon 2 (en plus de l'expansion isotrope calculée précédemment).

#### 21.4.2 Assemblage de sphères concentriques



*Figure 21.9 : Assemblage élémentaire de sphères concentriques (à gauche). La phase  $\alpha$  est en gris et la phase  $\beta$  en blanc. L'assemblage de Hashin représenté à droite correspond à un arrangement de motifs élémentaires sphériques concentriques de rayon extérieur variable, tangents deux à deux, les centres de ces sphères étant situés sur le même plan. Les disques concentriques remplissent le plan, de manière fractale, mais ils n'ont pas pu être tous représentés. L'empilement considéré dans le problème correspond au cas tridimensionnel non représenté ici. On peut aussi imaginer de tels arrangements de cylindres concentriques.*

La phase  $\alpha$  peut aussi se développer sous forme d'inclusions au sein d'une matrice  $\beta$ . On considère alors un motif élémentaire constitué d'un noyau sphérique de phase  $\alpha$ , de rayon  $r_\alpha$  et d'une coquille de phase  $\beta$ , de rayon  $r_\beta$ , comme sur la figure 21.9. Le rapport des rayons est lié à la fraction volumique  $\phi$  de la phase  $\alpha$  :

$$\frac{r_\alpha^3}{r_\beta^3} = \phi \quad (21.99)$$

Pour obtenir une fraction volumique visée de phase  $\alpha$ , on peut imaginer une distribution dans l'espace de sphères concentriques élémentaires sans recouvrement.

Les assemblages élémentaires sont de rayon extérieur variable, le rayon intérieur étant lié par (21.99), et sont tangents deux à deux. Une illustration de ce que pourrait être une telle répartition<sup>7</sup> est donnée sur la figure 21.9.

Le noyau du motif de sphères concentriques est constitué de la phase  $\alpha$  qui subit la déformation de transformation  $\tilde{\varepsilon}^* = \varepsilon^* \mathbf{1}$ , comme dans la partie précédente. Les propriétés élastiques des phases sont comme indiquées dans la première partie. Le motif élémentaire étudié est libre de tout effort extérieur surfacique ou volumique appliqué.

#### Champs des déplacements, déformations et contraintes

On propose une résolution par la méthode des déplacements. On choisit un système de coordonnées sphériques. La symétrie sphérique du problème invite à rechercher la seule

7. De tels assemblages ont été proposés par (Hashin, 1962) pour l'étude des propriétés des matériaux hétérogènes.

composante non nulle de déplacement, à savoir le déplacement radial,  $u_r(r)$ . On note respectivement  $u_r^\alpha(r)$  et  $u_r^\beta(r)$  le déplacement radial dans les phases  $\alpha$  et  $\beta$ .

Mettre en évidence l'équation différentielle régissant  $u_r(r)$ .

Trouver la forme générale de la solution dans chacune des phases.

Donner les expressions des contraintes et déformations faisant intervenir les constantes d'intégration.

► Un champ de déplacement  $\underline{u} = u_r(r)\underline{e}_r$  produit le champ des déformations

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}$$

les autres composantes étant nulles. En vertu des lois de l'élasticité isotrope, ces déformations produisent les contraintes suivantes :

$$\sigma_\beta = \lambda_\beta(\text{trace } \underline{\varepsilon}_\beta) \underline{1} + 2\mu_\beta \underline{\varepsilon}_\beta \quad (21.100)$$

$$\sigma_{rr}^\beta = (\lambda_\beta + 2\mu_\beta) \frac{du_r^\beta}{dr} + 2\lambda_\beta \frac{u_r^\beta}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta}^\beta = \sigma_{\varphi\varphi}^\beta = \lambda_\beta \frac{du_r^\beta}{dr} + 2(\lambda_\beta + \mu_\beta) \frac{u_r^\beta}{r} \quad (21.101)$$

Les équations d'équilibre, en l'absence de forces de volume et dans le cas statique, se résument à

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (21.102)$$

En insérant les expressions précédentes des composantes des contraintes pour la phase  $\beta$ , on obtient l'équation différentielle suivante :

$$(\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \left( \frac{d^2 u_r^\beta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r^\beta}{dr} - 2 \frac{u_r^\beta}{r^2} \right) = 0 \quad (21.103)$$

dont une forme équivalente est

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{du_r^\beta}{dr} + \frac{2}{r} u_r^\beta \right) = 0 \quad (21.104)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$u_r^\beta(r) = A_\beta r + \frac{B}{r^2} \quad (21.105)$$

Dans l'inclusion de phase  $\alpha$ , il ne faut pas oublier la déformation de transformation :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \lambda_\alpha(\text{trace } \underline{\varepsilon}_\alpha - \text{trace } \underline{\varepsilon}^*) \underline{1} + 2\mu_\alpha(\underline{\varepsilon}_\alpha - \underline{\varepsilon}^*) \\ \sigma_{rr}^\alpha &= (\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \frac{du_r^\alpha}{dr} + 2\lambda_\alpha \frac{u_r^\alpha}{r} - (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)\varepsilon^* \\ \sigma_{\theta\theta}^\alpha &= \sigma_{\varphi\varphi}^\alpha = \lambda_\alpha \frac{du_r^\alpha}{dr} + (\lambda_\alpha + \mu_\alpha) \frac{u_r^\alpha}{r} - (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)\varepsilon^* \end{aligned}$$

Toutefois, il s'avère que le déplacement  $u_r^\alpha$  vérifie finalement la même équation différentielle (21.104). La solution est donc de la forme (21.105), à ceci près que le terme en  $1/r^2$  est nécessairement nul pour éviter une singularité peu plausible du déplacement en  $r = 0$  :

$$u_r^\alpha(r) = A_\alpha r \quad (21.106)$$

Il s'ensuit que les déformations et les contraintes sont sphériques dans l'inclusion :

$$\underline{\varepsilon}_\alpha = A_\alpha \underline{1}, \quad \underline{\sigma}_\alpha = 3\kappa_\alpha (A_\alpha - \varepsilon^*) \underline{1} \quad (21.107)$$

Au contraire, les composantes radiales et orthoradielles diffèrent dans la matrice :

$$\underline{\varepsilon}_\beta = (A_\beta - \frac{2B}{r^3}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + (A_\beta + \frac{B}{r^3}) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \quad (21.108)$$

$$\underline{\sigma}_\beta = (3\kappa_\beta A_\beta - 4\mu_\beta \frac{B}{r^3}) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + (3\kappa_\beta A_\beta + 2\mu_\beta \frac{B}{r^3}) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \quad (21.109)$$

*Conditions aux limites et d'interface ; cas du fer ou de l'acier (ferrite/austénite)*

A l'aide des conditions en  $r = r_\alpha$  et en  $r = r_\beta$ , déterminer toutes les constantes d'intégration apparues lors de la résolution précédente.

Tracer les profils de déformations et de contraintes en fonction de  $r$  au sein de l'assemblage, dans le cas de l'austénite et de la ferrite dans le fer (ou plus généralement l'acier) pour lesquelles les modules d'élasticité peuvent être considérés comme identiques pour les deux phases. On prendra les valeurs suivantes :

$$E = 200000 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.3, \quad \phi = 0.1, \quad \varepsilon^* = 0.01 \quad (21.110)$$

Commenter les discontinuités possibles à l'interface.

► Les conditions aux limites et à l'interface sont les suivantes :

- *Continuité du déplacement en  $r = r_\alpha$* , ce qui implique que

$$A_\alpha r_\alpha = A_\beta r_\alpha + \frac{B}{r_\alpha^2} \quad (21.111)$$

- *Condition de surface libre en  $r = r_\beta$* . Le vecteur contrainte y est donc nul de sorte que  $\sigma_{rr}^\beta = 0$ . On en déduit la relation :

$$3\kappa_\beta A_\beta - \frac{4\mu_\beta}{r_\beta^3} B = 0 \quad (21.112)$$

- *Continuité du vecteur-contrainte en  $r = r_\alpha$* . Cela signifie que

$$\underline{\sigma}_\alpha \cdot \underline{e}_r = \underline{\sigma}_\beta \cdot \underline{e}_r$$

On en déduit la relation suivante :

$$3\kappa_\alpha (A_\alpha - \varepsilon^*) = 3\kappa_\beta A_\beta - \frac{4\mu_\beta}{r_\alpha^3} B \quad (21.113)$$

De l'équation (21.112), on tire

$$B = \frac{r_\beta^3}{4\mu_\beta} 3\kappa_\beta A_\beta \quad (21.114)$$

De l'équation (21.111), on tire alors  $A_\alpha = A_\beta \left(1 + \frac{r_\beta^3}{r_\alpha^3} \frac{3\kappa_\beta}{4\mu_\beta}\right)$ .

Ces relations sont finalement substituées dans la condition (21.113) pour fournir :

$$A_\beta \left( \kappa_\alpha \left( 1 + \frac{r_\beta^3}{r_\alpha^3} \frac{3\kappa_\beta}{4\mu_\beta} \right) + \kappa_\beta \left( \frac{r_\beta^3}{r_\alpha^3} - 1 \right) \right) = \kappa_\alpha \varepsilon^* \quad (21.115)$$

Enfin, les constantes recherchées sont :

$$A_\alpha = \varepsilon^* \left( 1 + \frac{\kappa_\beta}{\kappa_\alpha} \frac{\frac{r_\beta^3}{r_\alpha^3} - 1}{\frac{r_\beta^3}{r_\alpha^3} \frac{3\kappa_\beta}{4\mu_\beta} + 1} \right)^{-1} \quad (21.116)$$

$$A_\beta = \varepsilon^* \left( 1 + \frac{r_\beta^3}{r_\alpha^3} \frac{3\kappa_\beta}{4\mu_\beta} + \frac{\kappa_\beta}{\kappa_\alpha} \left( \frac{r_\beta^3}{r_\alpha^3} - 1 \right) \right)^{-1} \quad (21.117)$$

$$B = \varepsilon^* r_\alpha^3 \left( 1 + \frac{r_\alpha^3}{r_\beta^3} \frac{4\mu_\beta}{3\kappa_\beta} + \frac{4\mu_\beta}{3\kappa_\alpha} \left( 1 - \frac{r_\alpha^3}{r_\beta^3} \right) \right)^{-1} \quad (21.118)$$

Les profils de déformations et de contraintes ont été tracées sur la figure 21.10. La composante de déformation  $\varepsilon_{\theta\theta}$  doit être continue pour des raisons de compatibilité à l'interface. Par contre, la composante  $\varepsilon_{rr}$  est discontinue. En raison de la continuité du vecteur-contrainte à l'interface, la composante  $\sigma_{rr}$  est continue. Il n'en va pas de même pour  $\sigma_{\theta\theta}$ .

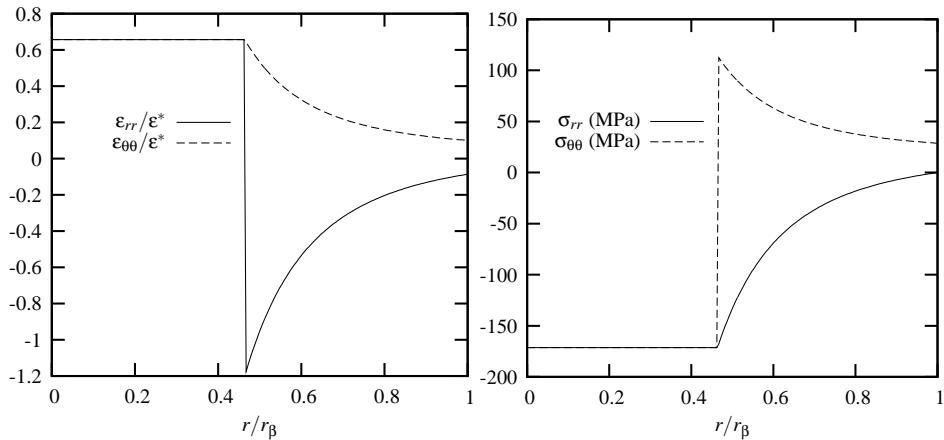


Figure 21.10 : Profils de déformation et de contrainte dans un assemblage de sphères concentriques, la ferrite étant au cœur et l'austénite autour. La fraction volumique de ferrite est de 10%.

#### Energie élastique

Montrer que l'énergie élastique moyenne du motif élémentaire d'assemblage de sphères se met sous la forme :

$$\bar{W}^e = \frac{9}{2} \phi (1 - \phi) \bar{\kappa}^* \varepsilon^{*2} \quad (21.119)$$

avec

$$\frac{1}{\kappa^*} = \left( \frac{1-\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{\phi}{\kappa_\beta} + \frac{3}{4\mu_\beta} \right) \quad (21.120)$$

Montrer que lorsque les modules d'élasticité des deux phases prennent les mêmes valeurs, alors la moyenne de l'énergie élastique est la même pour l'assemblage de sphères concentriques que pour le multi-couches.

Montrer qu'il n'en va pas de même lorsque les propriétés élastiques diffèrent, en calculant le rapport des énergies élastiques moyennes des deux microstructures.

Quelle est la propriété élastique qui discrimine les deux types de microstructures ?

► L'énergie élastique moyenne stockée dans le motif élémentaire vaut :

$$\begin{aligned} \bar{W}^e &= \frac{3}{4\pi r_\beta^3} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e dV \\ &= \frac{3}{8\pi r_\beta^3} \int_0^{r_\beta} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{3}{2r_\beta^3} \int_0^{r_\beta} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e r^2 dr \\ &= \frac{3}{2r_\beta^3} \left( \int_0^{r_\alpha} \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^e r^2 dr + \int_{r_\alpha}^{r_\beta} \boldsymbol{\sigma}_\beta : \boldsymbol{\varepsilon}_\beta^e r^2 dr \right) \end{aligned} \quad (21.121)$$

On calcule successivement

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^e = 9\kappa_\alpha (A_\alpha - \varepsilon^*)^2 \quad (21.122)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\beta : \boldsymbol{\varepsilon}_\beta^e = 9\kappa_\beta A_\beta^2 + 12\mu_\beta \frac{B^2}{r^6} \quad (21.123)$$

à l'aide des expressions des contraintes établies à la question 21.4.2. Ensuite,

$$\int_0^{r_\alpha} \boldsymbol{\sigma}_\alpha : \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^e r^2 dr = 3\kappa_\alpha (A_\alpha - \varepsilon^*)^2 r_\alpha^2 \quad (21.124)$$

$$\int_{r_\alpha}^{r_\beta} \boldsymbol{\sigma}_\beta : \boldsymbol{\varepsilon}_\beta^e r^2 dr = 3\kappa_\beta A_\beta^2 (r_\beta^3 - r_\alpha^3) - 4\mu_\beta B^2 \left( \frac{1}{r_\beta^3} - \frac{1}{r_\alpha^3} \right) \quad (21.125)$$

En sommant ces contributions,

$$\bar{W}^e = \frac{9}{2} \kappa_\alpha (A_\alpha - \varepsilon^*)^2 \frac{r_\alpha^3}{r_\beta^3} + \frac{9}{2} \kappa_\beta A_\beta^2 \left( 1 - \frac{r_\alpha^3}{r_\beta^3} \right) - 6\mu_\beta \frac{B^2}{r_\beta^3} \left( \frac{1}{r_\beta^3} - \frac{1}{r_\alpha^3} \right) \quad (21.126)$$

On peut exprimer les constantes  $A_\alpha$  et  $B$  en fonction de  $A_\beta$  en utilisant les relations (21.113) et (21.114) dont on tire en particulier

$$\kappa_\alpha (A_\alpha - \varepsilon^*) = \kappa_\beta A_\beta \left( 1 - \frac{r_\beta^3}{r_\alpha^3} \right)$$

L'expression précédente de l'énergie élastique moyenne se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\bar{W}^e &= \frac{9}{2} \frac{\kappa_\beta^2}{\kappa_\alpha} A_\beta^2 \frac{(1-\phi)^2}{\phi} + \frac{9}{2} \kappa_\beta A_\beta^2 (1-\phi) - \frac{27}{8} \frac{\kappa_\beta^2}{\mu_\beta} A_\beta^2 \frac{1-\phi}{\phi} \\ &= \frac{9}{2} A_\beta^2 \frac{1-\phi}{\phi} \kappa_\beta^2 \left( \frac{1-\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{\phi}{\kappa_\beta} + \frac{3}{4\mu_\beta} \right)\end{aligned}\quad (21.127)$$

A ce stade, on reprend l'expression (21.115) donnant  $A_\beta$  que l'on met sous la forme

$$A_\beta \left( \frac{1-\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{\phi}{\kappa_\beta} + \frac{3}{4\mu_\beta} \right) = \frac{\phi \varepsilon^*}{\kappa_\beta}$$

en faisant apparaître ainsi le même facteur que dans (21.127). On aboutit de la sorte à l'expression de l'énergie moyenne sous la forme recherchée :

$$\bar{W}^e = \frac{9}{2} \phi (1-\phi) \varepsilon^{*2} \left( \frac{1-\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{\phi}{\kappa_\beta} + \frac{3}{4\mu_\beta} \right)^{-1} \quad (21.128)$$

Cette énergie ne dépend pas de la taille du motif élémentaire mais seulement de la fraction volumique.

Lorsque les modules d'élasticité des deux phases coïncident, les énergies stockées correspondantes sont égales et valent

$$\bar{W}^e = W^e = \frac{9}{2} \phi (1-\phi) \varepsilon^{*2} \left( \frac{1}{\kappa} + \frac{3}{4\mu} \right) \quad (21.129)$$

de sorte que les morphologies multi-couches et assemblages de sphères concentriques conduisent à la même énergie stockée. Aucune de ces deux morphologies n'est donc à privilégier du point de vue de l'énergie dans le cas de l'élasticité homogène, c'est-à-dire lorsque les deux phases ont le même comportement élastique.

Au contraire, une différence d'énergie apparaît dans le cas de l'élasticité hétérogène :

$$\frac{\bar{W}^e}{W^e} = \frac{\bar{\kappa}^*}{\kappa^*} = \frac{\langle \frac{1}{\kappa} \rangle + \frac{3}{4} \langle \frac{1}{\mu} \rangle}{\langle \frac{1}{\kappa} \rangle + \frac{3}{4\mu_\beta}} \quad (21.130)$$

où l'on a introduit la notation<sup>8</sup> :

$$\langle \frac{1}{\kappa} \rangle = \frac{1-\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{\phi}{\kappa_\beta}, \quad \langle \frac{1}{\mu} \rangle = \frac{1-\phi}{\mu_\alpha} + \frac{\phi}{\mu_\beta} \quad (21.131)$$

Ce ratio d'énergie se met sous la forme :

$$\frac{\bar{W}^e}{W^e} - 1 = \frac{1-\phi}{\frac{4}{3} \langle \frac{1}{\kappa} \rangle + \langle \frac{1}{\mu} \rangle} \left( \frac{1}{\mu_\alpha} - \frac{1}{\mu_\beta} \right) \quad (21.132)$$

qui est du signe de la différence  $\mu_\beta - \mu_\alpha$  entre les modules de cisaillement des deux

8. Remarquer qu'il ne s'agit pas de l'opérateur moyenne des propriétés élastiques car la fraction volumique de phase  $\alpha$  est  $\phi$  et non  $1-\phi$ .

phases. On obtient donc le résultat peu intuitif *a priori* que la configuration multi-couches emmagasine moins d'énergie élastique que l'assemblage sphérique lorsque le module de cisaillement de la matrice  $\beta$  est plus rigide que celui de l'inclusion. Le facteur discriminant est le module de cisaillement de chaque phase. Le module de compressibilité, quant à lui, n'affecte pas le signe de la différence entre les deux microstructures considérées.

#### *Stabilité élastique lors de la précipitation*

Déduire de la discussion précédente une indication sur la stabilité de la forme des précipités dans une matrice, lors d'un changement de phase.

► On sait qu'en thermodynamique, les états observés dans les solides correspondent à un minimum de l'énergie libre dont une partie est l'énergie d'origine élastique. Par conséquent, la configuration sphérique sera plus stable lorsque la matrice est moins rigide que l'inclusion (en terme de module de cisaillement). Au contraire, des précipités croissant dans une matrice plus rigide auront tendance à adopter la forme de plaquettes, voire d'aiguilles.

#### *Variation de volume*

Calculer la variation relative de volume de l'assemblage élémentaire de sphères concentriques lors du changement de phase.

► La variation de volume est donnée par

$$\Delta V = \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\mathbf{u}} \, dV = \int_{\Omega} \left( \frac{du_r}{dr} + \frac{2u_r}{r} \right) dV = 4\pi r_{\alpha}^3 A_{\alpha} + 4\pi(r_{\beta}^3 - r_{\alpha}^3)A_{\beta} \quad (21.133)$$

car  $\operatorname{div} \underline{\mathbf{u}}_{\alpha} = 3A_{\alpha}$  et  $\operatorname{div} \underline{\mathbf{u}}_{\beta} = 3A_{\beta}$ . Pour obtenir une expression plus concise, on introduit une formulation alternative de  $A_{\beta}$  :

$$A_{\beta} = \phi \varepsilon^* \frac{\bar{\kappa}^*}{\kappa_{\beta}} \quad (21.134)$$

pour finalement obtenir

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\phi \varepsilon^* \bar{\kappa}^* \left( \frac{1}{\kappa_{\beta}} + \frac{3}{4\mu_{\beta}} \right) = 3\phi \varepsilon^* \left( 1 + \bar{\kappa}^*(1-\phi) \left( \frac{1}{\kappa_{\beta}} - \frac{1}{\kappa_{\alpha}} \right) \right) \quad (21.135)$$

L'expression du membre de droite a le mérite de mettre en évidence la correction apportée par l'hétérogénéité élastique à la dilatation libre moyenne  $3\phi \varepsilon^*$ . Cette correction est nulle si les deux phases ont le même module de compressibilité.

#### 21.4.3 Plasticité dans la matrice

Les contraintes internes induites par un changement de phase peuvent être suffisamment grandes pour que la limite d'élasticité soit franchie au cours de la transformation. Calculer la déformation de transformation critique  $\varepsilon_0^*$  pour laquelle la limite d'élasticité  $\sigma_0$  est atteinte dans la phase  $\beta$ . On adoptera le critère de Tresca. On donnera cette expression successivement dans le cas de la morphologie lamellaire et pour l'assemblage de sphères. Commenter.

Calculer numériquement  $\varepsilon_0^*$  dans le cas de l'austénite et de la ferrite pour  $\phi = 0.1$  et en prenant  $\sigma_0 = 100$  MPa.

► Le multi-couches est dans un état de contraintes biaxiales. Le critère de plasticité est satisfait dans la phase  $\beta$  lorsque

$$|\sigma_\beta| = \sigma_0$$

ce qui conduit à

$$|\varepsilon_0^*| = \frac{2\sigma_0}{9\phi\kappa^*} \quad (21.136)$$

Dans le cas de l'assemblage de sphères, c'est la différence des contraintes orthoradiale et radiale qui importe :

$$|\sigma_{\theta\theta}^\beta - \sigma_{rr}^\beta| = 6\mu_\beta \frac{|B|}{r^3} = \frac{r_\alpha^3}{r^3} \frac{9}{2} \left( \frac{1-\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{\phi}{\kappa_\beta} + \frac{3}{4\mu_\beta} \right)^{-1} = \sigma_0 \quad (21.137)$$

La plasticité débute donc en  $r = r_\alpha^+$  pour

$$\varepsilon_0^* = \frac{2\sigma_0}{9\bar{\kappa}^*} \quad (21.138)$$

Dans le cas de la ferrite et de l'austénite,  $\kappa^* = \bar{\kappa}^*$  et on trouve  $\varepsilon_0^* = 0.0035$  pour le multi-couches et  $\varepsilon_0^* = 0.00035$  pour l'assemblage de sphères. La différence vient du fait que les contraintes sont homogènes dans les lamelles du multi-couches alors qu'il y a une concentration de contrainte en  $r = r_\alpha^+$  pour le motif inclusion-matrice. Ces valeurs critiques de déformation de transformation sont très faibles. Dans la pratique, le changement de phase est donc nécessairement accompagné de plasticité ou de viscoplasticité à haute température.

#### 21.4.4 Prise en compte de l'énergie d'interface

L'interface entre les deux phases  $\alpha$  et  $\beta$  représente un surcoût énergétique en raison de l'arrangement atomique local différent de celui qui règne en volume. L'énergie d'interface  $\gamma$  est mesurée en  $\text{J.m}^{-2}$ . L'objet de cette section est de comparer les énergies élastique et d'interface en jeu lors d'un changement de phase, dans le cas d'une inclusion isolée de phase  $\alpha$  de rayon  $r_\alpha$  dans une matrice infinie de phase  $\beta$ . Les propriétés élastiques et de transformation des phases sont les mêmes que dans les parties précédentes. Aucun chargement extérieur n'est appliqué.

##### Energie élastique d'une inclusion dans une matrice

Montrer que l'énergie élastique totale dans le domaine  $\Omega$  constitué de l'inclusion  $\Omega_\alpha$  entourée de la matrice  $\Omega_\beta$  peut se calculer de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e dV = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\alpha} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* dV \quad (21.139)$$

Pour établir ce résultat, valable pour un domaine  $\Omega$  fini ou infini, quelle que soit la forme de l'inclusion  $\Omega_\alpha$ , on utilisera le fait que, en l'absence de chargement extérieur appliqué :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = 0 \quad (21.140)$$

Utiliser le champ de contrainte dans une inclusion sphérique établi à la question 21.4.2 en le particularisant au cas d'une matrice  $\Omega_\beta$  infinie, pour calculer l'intégrale du membre de droite de l'équation (21.139), en fonction des propriétés élastiques des phases, de la déformation de transformation  $\varepsilon^*$  et du rayon  $r_\alpha$  de l'inclusion sphérique.

► On part du calcul suivant, réalisé en coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u_i n_j dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dS = 0 \quad (21.141)$$

On a utilisé successivement le fait que le tenseur des contraintes est à divergence nulle en l'absence d'efforts de volume, puis que le vecteur-contrainte est nul sur le bord  $\partial\Omega$  en l'absence d'efforts surfaciques appliqués. Le passage volume  $\leftrightarrow$  surface résulte du théorème de la divergence. Il s'agit en fait de l'expression du théorème des travaux virtuels en absence d'efforts extérieurs. Par suite,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) dV = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* dV = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* dV \quad (21.142)$$

La dernière étape du calcul tient compte du fait que  $\varepsilon^* = 0$  dans la phase  $\beta$ . L'énergie élastique totale est donc fournie par le résultat d'un calcul sur la seule inclusion  $\Omega_{\alpha}$ . Pour évaluer cette intégrale, on se restreint au cas d'une inclusion sphérique au sein d'une matrice infinie. D'après les calculs réalisés au paragraphe 21.4.2, la contrainte, constante au sein de l'inclusion, est donnée par la seconde relation (21.107). Dans le cas d'une matrice infinie, i.e.  $\phi = 0$ , le coefficient  $A_{\alpha}$ , donné par (21.116), devient :

$$A_{\alpha} = \varepsilon^* \left( 1 + \frac{4\mu_{\beta}}{3\kappa_{\alpha}} \right)^{-1}$$

On en déduit l'expression recherchée :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^e dV = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\alpha}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* dV = 4\pi r_{\alpha}^3 \frac{6\kappa_{\alpha}\mu_{\beta}}{3\kappa_{\alpha} + 4\mu_{\beta}} \varepsilon^{*2} \quad (21.143)$$

### *Energie de surface de l'inclusion*

Calculer l'énergie d'interface inclusion-matrice en fonction de  $r_{\alpha}$  et de  $\gamma$ .

Justifier que l'énergie d'interface est prépondérante pour les petits précipités tandis que c'est l'énergie élastique calculée précédemment qui domine pour les gros précipités.

Montrer que le rayon de transition autour duquel énergie d'interface et énergie élastique sont du même ordre de grandeur, s'exprime comme :

$$r_{\alpha} = \gamma \frac{3\kappa_{\alpha} + 4\mu_{\beta}}{6\kappa_{\alpha}\mu_{\beta}\varepsilon^{*2}} \quad (21.144)$$

Calculer numériquement ce rayon critique dans le cas de l'acier en supposant que les deux phases ont les mêmes caractéristiques élastiques et que  $\varepsilon^* = 0.01$ . On prendra une valeur typique de l'énergie  $\gamma = 1 \text{ J.m}^{-2}$ .

► L'énergie d'interface vaut  $4\pi r_{\alpha}^2 \gamma$ . L'énergie élastique, quant à elle, est proportionnelle au cube du rayon de l'inclusion. C'est donc l'énergie d'interface qui domine pour les petites tailles d'inclusions, i.e. pour les germes de phase  $\alpha$ .

Au contraire, les effets élastiques sont plus importants pour les inclusions de grande taille. Le rayon de transition (21.144) s'obtient en calculant le rapport de l'énergie élastique (21.143) divisée par l'énergie de surface.

Pour obtenir la valeur numérique, penser à utiliser l'unité  $\gamma = 10^{-6} \text{ J.mm}^{-2}$  si les mo-

dules d'élasticité sont exprimés en MPa. On trouve

$$r_\alpha = 10^{-7} \text{ m} = 100 \text{ nm}$$

valeur tout à fait réaliste de précipités en phase de croissance ou de maturation. On peut comparer cette dimension à la taille des précipités de la figure 21.7.

#### *Stabilité et précipitation*

Revenir sur la discussion de la question 21.4.2 en tenant compte de l'existence d'une énergie de surface.

► Considérons le cas d'un précipité sphérique au sein d'une matrice plus rigide (en terme de module de cisaillement). D'après la discussion de la question 21.4.2, la forme sphérique n'est pas stable et une forme sphéroïdale aplatie ou allongée (plaquettes ou aiguilles) est sans doute préférable du point de vue de la minimisation de l'énergie élastique. La forme sphérique minimise toutefois l'énergie d'interface et va donc avoir tendance à stabiliser la forme sphérique au moins pour les petites tailles de précipités. Au-delà d'une certaine taille, les formes en cigares ou en plaquettes seront moins coûteuses du point de vue énergétique.

#### *21.4.5 Effet d'une charge appliquée*

Lors du changement de phase, une charge extérieure est appliquée et maintenue, sous la forme d'un effort surfacique imposé  $\underline{\underline{t}}^d$  sur le contour extérieur :

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}^d = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}, \quad \forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad (21.145)$$

où  $\underline{\Sigma}$  est un tenseur symétrique donné uniforme et constant.

#### *Travail des efforts appliqués*

On note  $W^{\text{ext}}$  le travail des efforts extérieurs appliqués ramené à l'unité de volume :

$$W^{\text{ext}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{t}}^d \cdot \underline{u} \, dS \quad (21.146)$$

Montrer que

$$W^{\text{ext}} = \underline{\Sigma} : \frac{1}{V} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} \, dV \quad (21.147)$$

► C'est à nouveau une application du théorème de la divergence :

$$W^{\text{ext}} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \Sigma_{ij} n_j u_i \, dV = \frac{1}{V} \Sigma_{ij} \int_{\Omega} u_{i,j} \, dV = \frac{1}{V} \Sigma_{ij} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \, dV \quad (21.148)$$

en vertu de la symétrie de  $\Sigma_{ij}$ .

#### *Assemblage de sphères soumis à une pression hydrostatique.*

Le motif élémentaire de sphères concentriques est soumis, pendant le changement de phase, à une pression hydrostatique

$$\underline{\Sigma} = -p_0 \underline{\underline{1}} \quad (21.149)$$

appliquée en  $r = r_\beta$ . Calculer les champs de contraintes et de déformations à l'issue du changement de phase, la pression  $p_0$  étant maintenue.

Montrer, en calculant l'énergie élastique résultante  $\widehat{W}^e$ , que cette pression induit une énergie élastique supplémentaire sans couplage avec l'énergie due au changement de phase proprement dit.

► La solution du problème s'obtient en utilisant le théorème de superposition. La solution du problème d'un biphasé, sans déformation libre supplémentaire, soumis à une pression extérieure  $p_0$  s'ajoute à la solution trouvée pour le changement de phase sans effort extérieur appliqué. Cela donne :

$$\varepsilon_{rr}^\alpha = \varepsilon_{\theta\theta}^\alpha = \varepsilon_{\varphi\varphi}^\alpha = A_\alpha - \frac{p_0}{3\kappa_\alpha}, \quad \sigma_{rr}^\alpha = \sigma_{\theta\theta}^\alpha = \sigma_{\varphi\varphi}^\alpha = -p_0 + 3\kappa_\alpha(A_\alpha - \varepsilon^*) \quad (21.150)$$

$$\varepsilon_{rr}^\beta = A_\beta - \frac{2B}{r^3} - \frac{p_0}{3\kappa_\beta}, \quad \sigma_{rr}^\beta = -p_0 + 3\kappa_\beta A_\beta - 4\mu_\beta \frac{B}{r^3} \quad (21.151)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^\beta = \varepsilon_{\varphi\varphi}^\beta = A_\beta + \frac{B}{r^3} - \frac{p_0}{3\kappa_\beta}, \quad \sigma_{\theta\theta}^\beta = \varepsilon_{\varphi\varphi}^\beta = -p_0 + 3\kappa_\beta A_\beta + 2\mu_\beta \frac{B}{r^3} \quad (21.152)$$

On reprend le calcul de l'énergie élastique réalisé au paragraphe 21.4.2 en mettant en évidence les termes supplémentaires induits par la présence du terme de pression  $p_0$  :

$$\underline{\sigma}_\alpha : \underline{\varepsilon}_\alpha^e = 9\kappa_\alpha(A_\alpha - \varepsilon^*)^2 - 6p_0(A_\alpha - \varepsilon^*) + \frac{p_0^2}{\kappa_\alpha} \quad (21.153)$$

$$\underline{\sigma}_\beta : \underline{\varepsilon}_\beta^e = 9\kappa_\beta A_\beta^2 + 12\mu_\beta \frac{B^2}{r^6} - 6p_0 A_\beta + \frac{p_0^2}{\kappa_\beta} \quad (21.154)$$

L'intégration sur l'assemblage élémentaire conduit en fait à la disparition des termes de couplage et l'énergie moyenne vaut alors :

$$\widehat{W}^e = \bar{W}^e + \frac{p_0^2}{2} \left( \frac{\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{1-\phi}{\kappa_\beta} \right)$$

En fait cette absence de couplage est générale. Pour le voir, appelons  $\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}$  les champs solutions du problème de changement de phase en l'absence de chargement extérieur et  $\tilde{\underline{\sigma}}, \tilde{\underline{\varepsilon}}$  les solutions du problème sans changement de phase mais à chargement extérieur surfacique imposé. La solution  $\widehat{\underline{\sigma}}, \widehat{\underline{\varepsilon}}$  du problème de changement de phase sous charge est la superposition de ces champs :

$$\widehat{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma} + \tilde{\underline{\sigma}}, \quad \widehat{\underline{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon} + \tilde{\underline{\varepsilon}} \quad (21.155)$$

Remarquer que  $\tilde{\underline{\varepsilon}}^e = \tilde{\underline{\varepsilon}}$ . L'énergie élastique vaut donc :

$$2\widehat{W}^e = \int_{\Omega} \widehat{\underline{\sigma}} : \widehat{\underline{\varepsilon}}^e dV = \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^e dV + \int_{\Omega} \tilde{\underline{\sigma}} : \tilde{\underline{\varepsilon}} dV + \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \tilde{\underline{\varepsilon}} dV + \int_{\Omega} \tilde{\underline{\sigma}} : \underline{\varepsilon}^e dV \quad (21.156)$$

Le premier terme de couplage est nul :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \tilde{\underline{\varepsilon}} dV = \int_{\partial\Omega} \underline{t}^d \cdot \tilde{\underline{u}} dS = 0 \quad (21.157)$$

Le second terme de couplage s'avère égal au premier ! En effet,

$$\int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e dV = \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\boldsymbol{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e dV = \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma} dV = 0 \quad (21.158)$$

d'où le résultat  $\widehat{W}^e = \bar{W}^e + \tilde{W}^e$ . Il s'agit d'un exemple d'application du théorème dit de réciprocité de Maxwell-Betti.

### *Energie potentielle de l'assemblage de sphères concentriques*

Calculer le travail des efforts appliqués en distinguant la contribution due au changement de volume associé au changement de phase et la contribution associée à la variation de volume due à la pression appliquée.

On appelle énergie potentielle la différence entre l'énergie élastique stockée et le travail des efforts appliqués :

$$W_p = \widehat{W}^e - W^{\text{ext}} \quad (21.159)$$

On admet que la forme optimale du précipité doit conduire à une diminution de l'énergie potentielle. Montrer que l'application d'une pression  $p_0 > 0$  est effectivement favorable, au premier ordre en  $p_0$ , à la croissance de l'inclusion  $\alpha$  sphérique, à condition que le module de compressibilité de la matrice  $\beta$  soit supérieur à celui de l'inclusion.

#### ► Le travail des efforts extérieurs vaut

$$W^{\text{ext}} = -p_0 \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega} \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS = -p_0 \frac{1}{V} \int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{\mathbf{u}} dV = -p_0 \frac{\Delta V}{V} \quad (21.160)$$

La variation de volume a deux origines. La première est liée au changement de phase et a été calculée au paragraphe 21.4.2. La seconde est due à la superposition de la pression appliquée ce qui conduit à la variation de volume supplémentaire :

$$\Delta \tilde{V} = \frac{-p_0}{\kappa_\alpha} \frac{4\pi}{3} r_\alpha^3 + \frac{-p_0}{\kappa_\beta} \frac{4\pi}{3} (r_\beta^3 - r_\alpha^3) \quad (21.161)$$

ce qui donne

$$\frac{\Delta \tilde{V}}{V} = -p_0 \left( \frac{\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{1-\phi}{\kappa_\beta} \right) \quad (21.162)$$

Finalement, le travail moyen des efforts extérieurs vaut

$$W^{\text{ext}} = -p_0 3\phi \varepsilon^* \left( 1 + \left( 1 - \frac{1}{\kappa_\beta} - \frac{1}{\kappa_\alpha} \right) \right) + p_0^2 \left( \frac{\phi}{\kappa_\alpha} + \frac{1-\phi}{\kappa_\beta} \right) \quad (21.163)$$

Au premier ordre en  $p_0$ , c'est-à-dire en négligeant les termes en  $p_0^2$  dans les expressions de  $\widehat{W}^e$  et de  $W^{\text{ext}}$ , le travail des efforts extérieur introduit une contribution linéaire en  $p_0$ . Lorsque  $\kappa_\beta > \kappa_\alpha$ , la contribution  $-W^{\text{ext}}$  fait diminuer l'énergie potentielle lorsque  $p_0 > 0$  augmente. L'application de cette pression est donc favorable à la croissance de l'inclusion sphérique de phase  $\alpha$ .

*Stabilisation de la microstructure lamellaire par superposition d'une charge appliquée*

On soumet le motif multi-couches au chargement extérieur déviatorique suivant :

$$[\tilde{\Sigma}] = \begin{bmatrix} -\Sigma/2 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma/2 \end{bmatrix} \quad (21.164)$$

où  $\Sigma$  est la constante de chargement donnée.

Le calcul des contraintes supplémentaires induites par ce chargement extérieur, en plus des contraintes résiduelles de changement de phase, ne pose pas de difficulté majeure mais n'est pas demandé ici. On se contente d'évaluer le travail des efforts extérieurs pour estimer dans quel cas le chargement extérieur est favorable à la formation de plaquettes de phase  $\alpha$ . Calculer  $W^{\text{ext}}$  pour le chargement (21.164). Montrer que lorsque la phase  $\beta$  est moins rigide que la phase  $\alpha$  et que le chargement dans la direction perpendiculaire est de compression ( $\Sigma < 0$ ), alors le travail des efforts extérieurs est positif (pour une déformation de transformation  $\varepsilon^* > 0$ ). Commenter.

► On part du résultat (21.147) obtenu précédemment et, en remarquant que le chargement appliqué est purement déviatorique, on obtient :

$$\begin{aligned} W^{\text{ext}} &= \frac{1}{V} \tilde{\Sigma} : \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} dV = \tilde{\Sigma} : \int_{\Omega} \varepsilon^{\text{dev}} dV \\ &= \begin{bmatrix} -\Sigma/2 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma/2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{\text{dev}} & 0 & 0 \\ 0 & -2\varepsilon_{11}^{\text{dev}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11}^{\text{dev}} \end{bmatrix} = -3\Sigma\varepsilon_{11}^{\text{dev}} \end{aligned}$$

On a vu au paragraphe 21.4.1 que lorsque la phase  $\beta$  est moins rigide que la phase  $\alpha$ , la déformation déviatorique  $\varepsilon_{11}^{\text{dev}}$  est positive ( $\varepsilon^* > 0$ ). Si la charge appliquée  $\Sigma$  est négative, le travail des efforts extérieurs est positif et vient donc diminuer l'énergie potentielle  $W_p$ , favorisant ainsi le changement de phase.

#### 21.4.6 Epilogue

La mécanique joue donc un rôle dans la formation d'une nouvelle phase. Le problème a permis de distinguer les morphologies lamellaire et inclusionnaire. En fait l'énergie élastique moyenne correspondante ne diffère que si les propriétés élastiques des deux phases sont distinctes. On montre en fait plus généralement que lorsque les propriétés élastiques des phases sont homogènes et isotropes et si les déformations de transformations sont isotropes, l'énergie élastique stockée en raison du changement de phase ne dépend pas de la répartition particulière des phases, mais seulement des fractions volumiques des phases, des modules d'élasticité et de la déformation de transformation. La démonstration de ce résultat important n'est pas donnée ici et le lecteur est renvoyé à la référence (Fratzl et al., 1999). Ce théorème est parfois appelé théorème de Bitter-Crum. En conséquence de ce théorème, la mécanique ne peut affecter la morphologie des précipités que dans les cas suivants :

- l'élasticité est hétérogène ; c'est le cas abordé dans ce chapitre ;
- l'élasticité ou la déformation de transformation sont anisotropes.

Un exemple important est celui de la stabilité d'une inclusion sphérique ou ellipsoïdale dans une matrice caractérisée par une élasticité cubique. En effet, les aubes de turbine de moteur d'avion sont réalisées en monocristal de superalliage à base de nickel, de symétrie cubique. Ils ont la structure biphasée présentée sur la figure 21.7. Leur forme d'équilibre, sphérique ou cuboïdale, résulte d'une minimisation d'énergies dues au chargement appliqué et à l'anisotropie élastique et de l'énergie d'interface (Pineau, 1976).

## 22 Réservoirs sous pression

### 22.1 Statique du réservoir sous pression

Un tube homogène de longueur courante  $l$ , de rayon interne  $r_i$ , de rayon externe  $r_e$  et d'épaisseur  $e = r_e - r_i$  est soumis à une pression interne  $p_i$  et à une pression externe  $p_e$  (figure 22.1). Il est d'autre part soumis à une densité surfacique homogène d'effort  $\Sigma$  (algébrique) axial (selon  $z$ ) sur la surface  $z = L$ , et  $-\Sigma$  en  $z = 0$ . On cherche à obtenir des informations sur les contraintes qui règnent dans le tube, sans tenir compte de la nature du matériau dont il est constitué. Il s'agit donc d'une analyse purement statique du problème du réservoir sous pression.

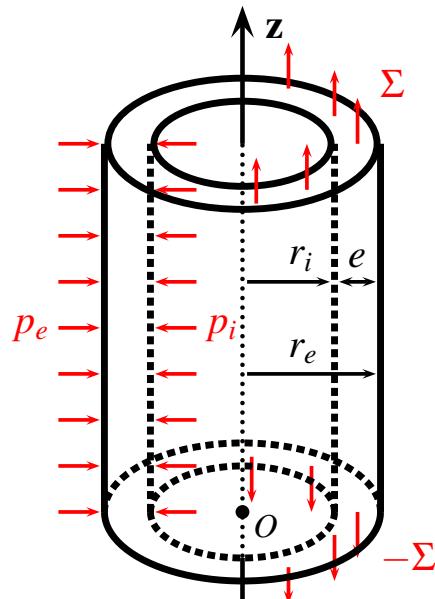


Figure 22.1 : Tube sous pression interne  $p_i$ , externe  $p_e$  et chargement axial  $\Sigma$ .

#### 22.1.1 Conditions à la frontière du tube

Définir les conditions de chargement en tout point de la frontière du tube. On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $\underline{e}_z$ . On ne tient pas compte des forces de gravitation.

- On travaille sur la configuration actuelle sur laquelle les efforts sont appliqués. Le problème est posé en effort uniquement :

- En  $z = l$ , le vecteur contrainte est égal à la densité d'effort imposée :

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}^d = \Sigma \underline{\mathbf{e}}_z = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_z = \begin{bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (22.1)$$

On en déduit que,  $\forall r, \theta$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z = l) = \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = l) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \theta, z = l) = \Sigma \quad (22.2)$$

- En  $z = 0$ , le vecteur contrainte est égal à la densité d'effort imposée :

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}^d = -\Sigma \underline{\mathbf{e}}_z = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (-\underline{\mathbf{e}}_z) = \begin{bmatrix} -\sigma_{rz} \\ -\sigma_{\theta z} \\ -\sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (22.3)$$

On en déduit que,  $\forall r, \theta$

$$\sigma_{rz}(r, \theta, z = 0) = \sigma_{\theta z}(r, \theta, z = 0) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \theta, z = 0) = \Sigma \quad (22.4)$$

Remarquer que  $\sigma_{zz}$  prend la même valeur aux extrémités.

- En  $r = r_e$ , le vecteur normal  $\underline{\mathbf{n}}$  sortant est  $\underline{\mathbf{e}}_r$  et l'effort appliqué est  $-p_e \underline{\mathbf{e}}_r$  :

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}^d = -p_e \underline{\mathbf{e}}_r = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_r = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta r} \\ \sigma_{zr} \end{bmatrix} \quad (22.5)$$

On en déduit que,  $\forall \theta, z$ ,

$$\sigma_{rr}(r = r_e, \theta, z) = -p_e, \quad \sigma_{\theta r}(r = r_e, \theta, z) = \sigma_{zr}(r = r_e, \theta, z) = 0 \quad (22.6)$$

On peut aussi obtenir le résultat précédent en raisonnant de la manière suivante. La pression appliquée l'est en général à l'aide d'un fluide où règne la pression  $p_e$ . La condition d'équilibre à l'interface fluide/solide est donc une condition de saut :

$$\underline{\mathbf{t}}^{fluid} + \underline{\mathbf{t}}^{tube} = [\underline{\boldsymbol{\sigma}}] \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 = (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{fluid} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{tube}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = (-p_e \underline{\mathbf{1}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \underline{\mathbf{e}}_r \quad (22.7)$$

ce qui est conforme au résultat (22.6).

- En  $r = r_i$ , le vecteur normal  $\underline{\mathbf{n}}$  sortant est  $-\underline{\mathbf{e}}_r$  et l'effort appliqué est  $p_i \underline{\mathbf{e}}_r$  :

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}^d = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (-\underline{\mathbf{e}}_r) = p_i \underline{\mathbf{e}}_r = \begin{bmatrix} -\sigma_{rr} \\ -\sigma_{\theta r} \\ -\sigma_{zr} \end{bmatrix} \quad (22.8)$$

On en déduit que,  $\forall \theta, z$ ,

$$\sigma_{rr}(r = r_i, \theta, z) = -p_i, \quad \sigma_{\theta r}(r = r_i, \theta, z) = \sigma_{zr}(r = r_i, \theta, z) = 0 \quad (22.9)$$

On peut aussi obtenir le résultat précédent en raisonnant de la manière suivante. La pression appliquée l'est en général à l'aide d'un fluide où règne la pression  $p_i$ . La condition d'équilibre à l'interface fluide/solide est donc une condition de saut :

$$\underline{\mathbf{t}}^{fluid} + \underline{\mathbf{t}}^{tube} = [\underline{\boldsymbol{\sigma}}] \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0 = (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{fluid} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{tube}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = (-p_i \underline{\mathbf{1}} - \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot (-\underline{\mathbf{e}}_r) \quad (22.10)$$

ce qui est conforme au résultat (22.9).

### 22.1.2 Equilibre des efforts appliqués

Un préalable à toute recherche de solution au problème de statique posé est de vérifier que les efforts appliqués sont compatibles avec l'équilibre du tube. Faire cette vérification.

► Les efforts extérieurs sont compatibles avec l'équilibre si leur torseur est nul.

Le torseur d'un système de forces est le triplet  $\{\hat{O}, \underline{R}, \underline{M}\}$  composé de la résultante de l'ensemble des forces appliquées  $\underline{R}$  et du moment résultant  $\underline{M}$  de ces forces calculé par rapport au point  $O$ . On comptabilise les forces ponctuelles  $\underline{F}_i$ , la densité linéique de forces  $\underline{F}_L$ , la densité surfacique de forces  $\Sigma$  et la densité volumique de forces  $\underline{F}_V$ . On évalue cette résultante dans le cas du tube pour lequel seules des densités surfaciques d'efforts ont été envisagées ( $\underline{F}_i = 0, \underline{F}_L = 0, \underline{F}_V = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \underline{F}_i + \int_L \underline{F}_L dl + \int_S \Sigma ds + \int_V \underline{F}_V dv \\ &= \underbrace{\int_{z=l} \Sigma \underline{e}_z ds}_{0} + \underbrace{\int_{z=0} (-\Sigma) \underline{e}_z ds}_{0} + \underbrace{\int_{r=r_e} (-p_e) \underline{e}_r r_e d\theta dz}_{0} + \underbrace{\int_{r=r_i} p_i \underline{e}_r r_i d\theta dz}_{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le moment résultant par rapport au point 0 vaut quant à lui :

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \underline{OM}_i \wedge \underline{F}_i + \int_L \underline{OM} \wedge \underline{F}_L dl + \int_S \underline{OM} \wedge \Sigma ds + \int_V \underline{OM} \wedge \underline{F}_V dv \\ &= \int_{z=l} \underline{OM} \wedge \Sigma \underline{e}_z r dr d\theta + \int_{z=0} \underline{OM} \wedge (-\Sigma) \underline{e}_z r dr d\theta \\ &\quad + \int_{r=r_e} \underline{OM} \wedge (-p_e) \underline{e}_r r_e d\theta dz + \int_{r=r_i} \underline{OM} \wedge p_i \underline{e}_r r_i d\theta dz \\ &= \underbrace{\left( \int_{z=l} \underline{OM} r dr d\theta \right)}_{\parallel \underline{e}_z \quad 0} \wedge \Sigma \underline{e}_z + \underbrace{\left( \int_{z=0} \underline{OM} r dr d\theta \right)}_{=0} \wedge (-\Sigma) \underline{e}_z \\ &\quad + \left( \int z dz \right) \underbrace{\left( \int (-p_e) \underline{e}_z \wedge \underline{e}_r r_e d\theta \right)}_{\propto \int \underline{e}_\theta d\theta = 0} + \left( \int z dz \right) \left( \int p_i \underline{e}_z \wedge \underline{e}_r r_i d\theta \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le résultat est toujours valable si l'on calcule le moment par rapport à un autre point  $O'$  puisque les torseurs  $\{O, \underline{R}, \underline{M}\}$  et  $\{O', \underline{R}, \underline{M}'\}$  sont alors reliés par

$$\underline{M}' = \underline{M} + \underline{O}' \underline{O} \wedge \underline{R} \quad (22.11)$$

Finalement, les efforts indiqués sont bel et bien statiquement admissibles.

### 22.1.3 Considérations de symétrie

Est-il possible de réduire la dépendance des composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes vis-à-vis des variables  $(r, \theta, z)$  ?

► Des restrictions dues aux symétries en jeu dans le problème seront envisageables si les conditions de symétrie portent simultanément sur :

- **la géométrie.** Le tube présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $\underline{e}_z$ , ainsi qu'une invariance par translation le long de  $\underline{e}_z$ .
- **le chargement.** Le chargement appliqué aux surfaces extérieure et intérieure, ainsi qu'aux extrémités, présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $\underline{e}_z$ . Le chargement appliqué aux surfaces extérieure et intérieure présente une invariance par translation le long de  $\underline{e}_z$ .
- **le matériau.** Le tube est supposé homogène, c'est-à-dire constitué du même matériau en tout point. On fait par ailleurs l'hypothèse ici que les propriétés mécaniques du matériau sont invariantes par rotation autour de  $\underline{e}_z$  et par symétrie par rapport à tout plan perpendiculaire à  $\underline{e}_z$ . Dans le cas contraire, les simplifications qui vont suivre ne sont pas licites et le problème devient sensiblement plus complexe.

Il résulte de ces considérations une invariance attendue du champ des contraintes par rapport aux variables  $\theta$  et  $z$ . On cherche donc un tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}(r)$ .

#### 22.1.4 Etablissement de quelques informations sur les contraintes au sein du tube

Pousser au maximum la démarche de détermination des contraintes au sein du tube. On commencera par décompter les équations et les inconnues et à en tirer la conséquence qui s'impose. A l'aide des conditions d'équilibre et des conditions à la frontière, réduire le nombre de composantes *a priori* non nulles pour le tenseur des contraintes. Evaluer enfin la contrainte moyenne le long d'un segment  $r \in [r_i, r_e]$  à  $\theta$  et  $z$  donnés :

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle := \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta} dr \quad (22.12)$$

► En l'absence de forces de volume, les équations d'équilibre pour un champ de contraintes ne dépendant que de la variable  $r$  se réduisent à

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (22.13)$$

$$\frac{d\sigma_{\theta r}}{dr} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} = 0 \quad (22.14)$$

$$\frac{d\sigma_{zr}}{dr} + \frac{\sigma_{zr}}{r} = 0 \quad (22.15)$$

On cherche six composantes de contraintes satisfaisant les trois équations précédentes. On ne peut donc pas espérer *a priori* les déterminer toutes sans plus d'informations (en particulier sur le comportement du matériau). Toutefois, on va voir que de nombreuses informations peuvent être obtenues sur ces contraintes. Remarquer que les composantes  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{\theta z}$  n'apparaissent pas dans les équations (22.13) à (22.15). Voici les informations que l'on peut tirer des équations d'équilibre et des conditions aux limites :

- La composante  $\sigma_{zz}$  ne dépend pas de  $z$  et vaut  $\Sigma$  en  $z = 0$  et  $z = l$  d'après (22.3) et (22.2). Par conséquent, le champ de contrainte axiale est homogène dans le tube et vaut,  $\forall r, \theta, z$ ,

$$\sigma_{zz} = \Sigma \quad (22.16)$$

- La composante  $\sigma_{\theta z}$  ne dépend pas de  $z$  et s'annule en  $z = 0$  et  $z = l$  d'après (22.3) et (22.2). Par conséquent, en tout point du tube,

$$\sigma_{\theta z} = 0 \quad (22.17)$$

- Les composantes  $\sigma_{r\theta}$  et  $\sigma_{rz}$  s'obtiennent en intégrant les équations (22.14) et (22.15) :

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\alpha}{r^2}, \quad \sigma_{rz} = \frac{\beta}{r} \quad (22.18)$$

Les constantes d'intégration  $\alpha$  et  $\beta$  s'obtiennent en considérant les conditions aux limites (22.6) et (22.9) en  $r = r_e$  et  $r = r_i$ , où ces composantes s'annulent. Par conséquent,  $\forall r, \theta, z$ ,

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0 \quad (22.19)$$

- La composante  $\sigma_{rr}$  passe de  $-p_i$  en  $r = r_i$  à  $-p_e$  en  $r = r_e$ . On ne pourra pas en dire plus avant de donner des spécifications plus précises sur le comportement du matériau.

Finalement, le tenseur des contraintes a la forme suivante :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{rr}\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z, \quad [\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (22.20)$$

Les équations ne permettent pas de déterminer  $\sigma_{\theta\theta}$  point par point dans la paroi du tube. Il est cependant possible d'évaluer sa moyenne, en se servant de l'équation d'équilibre (22.14) :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{\theta\theta} \rangle &= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \sigma_{\theta\theta} dr \\ &= \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \left( r \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \sigma_{rr} \right) dr = \frac{1}{r_e - r_i} \int_{r_i}^{r_e} \frac{d}{dr} (r\sigma_{rr}) dr \\ &= \frac{1}{r_e - r_i} (r_e \sigma_{rr}(r_e) - r_i \sigma_{rr}(r_i)) \end{aligned} \quad (22.21)$$

d'où le résultat remarquable<sup>1</sup>

$$\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = \frac{p_i r_i - p_e r_e}{r_e - r_i} \quad (22.22)$$

### 22.1.5 Cas d'un tube fermé par une calotte de forme quelconque

Le réservoir cylindrique est fermé à une extrémité par une calotte de forme absolument quelconque schématisée sur la figure 22.2. La calotte est soumise aux efforts suivants :

- La surface intérieure  $\mathcal{S}_i$  subit la pression  $p_i$  du fluide intérieur. Soit  $\underline{n}_i$  le champ de normales sortantes (*a priori* distinctes de  $-\underline{e}_r$ ).

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i = -p_i \underline{n}_i \quad (22.23)$$

- La surface extérieure  $\mathcal{S}_e$  subit la pression  $p_e$  du fluide extérieur. Soit  $\underline{n}_e$  le champ de normales sortantes (*a priori* distinctes de  $\underline{e}_r$ ).

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_e = -p_e \underline{n}_e \quad (22.24)$$

1. Le résultat (22.22) est appelé *formule des chaudronniers*.

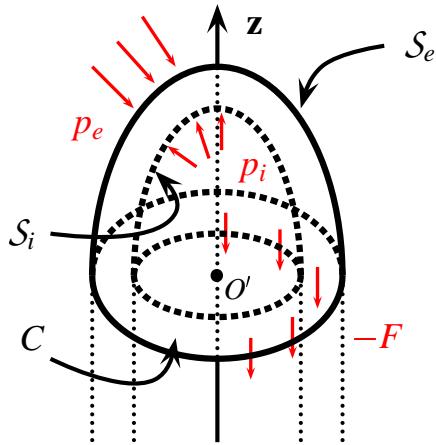


Figure 22.2 : Calotte de forme quelconque fermant le tube sous pression interne  $p_i$  et externe  $p_e$ . La couronne  $C$  est soumise à la densité surfacique homogène d'effort axial  $-\Sigma \underline{e}_z$ .

- La couronne  $C$  est soumise à la densité surfacique homogène d'efforts  $-\Sigma \underline{e}_z$  :

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot (-\underline{e}_z) = -\Sigma \underline{e}_z \quad (22.25)$$

Etudier les conditions d'équilibre de la calotte.

► On calcule d'abord l'effort résultant sur la couronne  $C$  :

$$\begin{aligned} \underline{R}_c &= \int_C \underline{\sigma} \cdot \underline{n} ds = -\Sigma \int_C \underline{e}_z ds \\ &= -\Sigma \pi (r_e^2 - r_i^2) \underline{e}_z \end{aligned} \quad (22.26)$$

puis la résultante des efforts s'exerçant sur la surface  $S_i$ . Pour cela, on appelle :

$$\partial\Omega_i = S_i \cup D_i \quad (22.27)$$

où  $D_i$  est le disque de centre  $O'$  et de rayon  $r_i$  (cf. figure 22.2). La surface fermée  $\partial\Omega_i$  délimite le volume  $\Omega_i$ . On calcule alors :

$$\begin{aligned} \underline{R}_i &= \int_{S_i} \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i ds = \int_{S_i} (p_i \underline{1}) \cdot (-\underline{n}_i) ds \\ &= \int_{\partial\Omega_i} (p_i \underline{1}) \cdot (-\underline{n}_i) ds - \int_{D_i} (p_i \underline{1}) \cdot (-\underline{e}_z) ds = \underbrace{\int_{\Omega_i} \operatorname{div}(p_i \underline{1}) dv}_{0} + p_i \int_{D_i} \underline{e}_z ds \\ &= p_i \pi r_i^2 \underline{e}_z \end{aligned}$$

On a utilisé le théorème de la divergence dans la deuxième ligne de l'équation précédente et le fait que le champ  $p_i \underline{1}$  est constant sur  $\Omega_i$ . En effet, le champ de normales sortantes à la surface  $\partial\Omega_i$  de  $\Omega_i$  est  $-\underline{n}_i$ .

De même, on introduit le volume  $\Omega_e$  dont la frontière est

$$\partial\Omega_e = \mathcal{S}_e \cup D_e$$

où  $D_e$  est le disque de centre  $O'$  et de rayon  $r_e$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}}_e &= \int_{\mathcal{S}_e} \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{n}}_e \, ds = - \int_{\mathcal{S}_e} (p_e \mathbf{1}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_e \, ds \\ &= - \int_{\partial\Omega_e} (p_e \mathbf{1}) \cdot \underline{\mathbf{n}}_e \, ds + \int_{D_e} (p_e \mathbf{1}) \cdot (-\underline{\mathbf{e}}_z) \, ds \\ &= \underbrace{- \int_{\Omega_e} \operatorname{div}(p_e \mathbf{1}) \, dv}_{0} + p_e \int_{D_e} (-\underline{\mathbf{e}}_z) \, ds \quad (22.28) \\ &= -p_e \pi r_e^2 \underline{\mathbf{e}}_z \quad (22.29) \end{aligned}$$

Le théorème de la divergence a été utilisé à la ligne (22.28).

La calotte est en équilibre si la résultante des forces est nulle :

$$\underline{\mathbf{R}}_c + \underline{\mathbf{R}}_i + \underline{\mathbf{R}}_e = 0 \quad (22.30)$$

On obtient finalement

$$\Sigma = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (22.31)$$

L'étape suivante consiste à calculer les moments qui s'appliquent sur la calotte. On commence par le moment par rapport à  $O'$  des forces s'exerçant sur  $\mathcal{S}_i$  :

$$\Gamma_{O'}^{\mathcal{S}_i} = \int_{\mathcal{S}_i} \underline{\mathbf{O}'M} \wedge (-p_i \underline{\mathbf{n}}_i) \, ds = \int_{\mathcal{S}_i} \underline{\mathbf{O}'M} \wedge p_i \underline{\mathbf{n}}' \, ds \quad (22.32)$$

où  $\underline{\mathbf{n}}' = -\underline{\mathbf{n}}_i$ . On explicite ensuite le produit vectoriel précédent sous la forme :

$$\begin{aligned} [\underline{\mathbf{O}'M} \wedge \underline{\mathbf{n}}'] &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} yn'_3 - zn'_2 \\ zn'_1 - xn'_3 \\ xn'_2 - yn'_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{bmatrix} \\ &= [\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{n}}'] \quad (22.33) \end{aligned}$$

où  $x, y, z$  et  $n'_1, n'_2, n'_3$  sont respectivement les coordonnées cartésiennes du point  $M$  et du vecteur  $\underline{\mathbf{n}}'$ . On a introduit le tenseur antisymétrique  $\underline{\mathbf{A}}$ . On vérifiera que le champ de tenseurs antisymétriques  $\underline{\mathbf{A}}$  a la propriété suivante :

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{A}} = 0 \quad (22.34)$$

En conséquence, l'équation (22.32) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\underline{\Gamma}_{O'}^{S_i} &= p_i \int_{S_i} \underline{A} \cdot \underline{n}' ds \\ &= p_i \int_{\partial \Omega_i} \underline{A} \cdot \underline{n}' ds - p_i \int_{D_i} \underline{A} \cdot (-\underline{e}_z) ds = p_i \int_{\Omega_i} \operatorname{div} \underline{A} dv + p_i \int_{D_i} \underline{A} \cdot \underline{e}_z ds \\ &= p_i \int_{D_i} \underline{O}' \underline{M} \wedge \underline{e}_z ds = p_i \int_{D_i} r \underline{e}_r \wedge \underline{e}_z ds = 0\end{aligned}$$

Le théorème de la divergence a été utilisé à la deuxième ligne de l'équation précédente. Un calcul tout à fait analogue montre que

$$\underline{\Gamma}_{O'}^{S_e} = 0 \quad (22.35)$$

Enfin,

$$\underline{\Gamma}_{O'}^C = \int_C \underline{O}' \underline{M} \wedge (-\Sigma \underline{e}_z) ds = \int_C r \underline{e}_r \wedge \underline{e}_z ds = 0 \quad (22.36)$$

Le moment résultant est donc nul et la calotte est en équilibre si  $\Sigma$  est donnée par (22.31). On n'a pas eu besoin de connaître point par point les champs  $\underline{n}_i$  et  $\underline{n}_e$  de sorte que les résultats obtenus sont valables quelle que soit la forme de la calotte s'appuyant sur la couronne  $C$ .

#### 22.1.6 Cas d'un tube mince

Indiquer la (les) composante(s) de contraintes prépondérante(s) dans le cas d'un tube mince.

► On introduit le rayon  $R$  tel que

$$r_e = R + \frac{e}{2}, \quad r_i = R - \frac{e}{2} \quad (22.37)$$

Dans le cas d'un tube mince, on a

$$\frac{e}{R} \ll 1 \quad (22.38)$$

En conséquence, l'expression (22.22) devient

$$<\sigma_{\theta\theta}> = \frac{(p_i - p_e)R}{e} + \mathcal{O}(1) \quad (22.39)$$

On voit que la contrainte tangentielle moyenne devient d'autant plus grande, que  $e/R$  est petit. Il n'est pas possible d'établir ici strictement le résultat mais on peut d'ores-et-déjà l'annoncer :  $\sigma_{\theta\theta}$  devient prépondérante par rapport à  $\sigma_{rr}$  qui reste, quant à elle, de l'ordre de  $-p_e$  et  $-p_i$ .

Si le tube est libre d'efforts axiaux ( $\Sigma = 0$ , i.e. tube ouvert), le tube mince est essentiellement dans un état de **traction simple**. Le dimensionnement du réservoir sous pression va alors porter sur  $<\sigma_{\theta\theta}>$  afin d'éviter son écatement.

Si le tube est fermé par une calotte, la contrainte axiale vaut :

$$\sigma_{zz} = \Sigma = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} + \mathcal{O}(1) \simeq \frac{\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle}{2} \quad (22.40)$$

d'après le résultat (22.31). La contrainte axiale est donc deux fois moindre que la contrainte circonférentielle qui reste donc prépondérante.

## 22.2 Elastostatique du réservoir sous pression

On considère à nouveau le problème du réservoir sous pression mais, dans cette partie, on prend explicitement en compte le comportement mécanique du matériau constitutif du tube. On considère que le comportement du matériau est convenablement décrit par l'élasticité linéarisée isotrope. La géométrie et le chargement mécanique sont indiqués sur la figure 22.1. Les composantes des déplacements, déformations et contraintes sont données dans le système de coordonnées cylindriques d'axe  $\underline{e}_z$ , axe du tube.

### 22.2.1 Distribution des déplacements, déformations et contraintes

Les conditions aux limites du problème ont été précisées au paragraphe 22.1.1. On adopte ici la méthode des déplacements. Postuler la forme du champ de déplacements que subit le tube. Trouver l'équation différentielle qui les régit, puis l'intégrer. Déterminer enfin déformations et contraintes de manière exhaustive. Distinguer *in fine* le cas du tube ouvert (libre selon  $z$ ) du cas du tube fermé.

► Les propriétés de symétrie relatives à la géométrie, au chargement et au matériau ont été discutées au paragraphe 22.1.3. On en déduit en particulier que le champ de déplacement présente une symétrie de révolution. Il ne dépend *a priori* que des variables  $(r, z)$ . On le cherche sous la forme :

$$\underline{u} = f(r) \underline{e}_r + g(z) \underline{e}_z \quad (22.41)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions inconnues à déterminer. On calcule ensuite le gradient de la transformation proposée en utilisant l'opérateur correspondant en coordonnées cylindriques :

$$[\nabla \underline{u}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g' \end{bmatrix} = [\underline{\varepsilon}] \quad (22.42)$$

Le gradient du champ de déplacement (22.41) étant symétrique, il coïncide avec le tenseur des déformations infinitésimales  $\underline{\varepsilon}$ . La dérivée de  $f$  (resp.  $g$ ) par rapport à  $r$  (resp.  $z$ ) est notée  $f'$  (resp.  $g'$ ).

L'étape suivante consiste à calculer le champ des contraintes à l'aide des relations d'élasticité linéarisée. On suppose que le tube est initialement dans un état naturel (i.e.

sans contraintes initiales). La loi d'élasticité est écrite à l'aide des coefficients de Lamé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{trace } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \lambda(f' + \frac{f}{r} + g') + 2\mu f' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r} + g') + 2\mu \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r} + g') + 2\mu g' \end{bmatrix} \quad (22.43)$$

Les composantes de contraintes non nulles sont donc  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ . Ce résultat est conforme à l'analyse purement statique proposée au paragraphe 22.1.4. Il est temps d'utiliser les équations d'équilibre établies dans ce même paragraphe. En se limitant aux composantes de contraintes *a priori* non nulles, et en l'absence de forces volumiques, ces équations se réduisent à

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (22.44)$$

$$\sigma_{zz,z} = 0 \quad (22.45)$$

La seconde équation (22.45) à une contrainte axiale constante :

$$\sigma_{zz} = C \quad (22.46)$$

où  $C$  est une constante à déterminer. En substituant les valeurs de contraintes (22.43) dans l'équation d'équilibre (22.44), on obtient l'équation différentielle<sup>2</sup> régissant la fonction  $f$  :

$$f'' - \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r} = (f' + \frac{f}{r})' = 0 \quad (22.47)$$

L'équation précédente s'intègre en

$$f = ar + \frac{b}{r} \quad (22.48)$$

où  $a, b$  sont deux constantes d'intégration. Ceci permet d'évaluer les déformations et les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = a - \frac{b}{r^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = a + \frac{b}{r^2} \\ \varepsilon_{zz} = c \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{array} \right. \quad (22.49)$$

---

2. Il est remarquable que les modules d'élasticité n'apparaissent plus dans (22.47) alors qu'ils étaient présents dans l'expression des contraintes (22.43). Cela vient du fait que les modules se factorisent et que l'équation obtenue (22.47) est en fait :

$$(\lambda + 2\mu)(f'' - \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{r}) = 0$$

Le déplacement axial se déduit de la valeur constante  $c$  trouvée pour  $\varepsilon_{zz}$  :

$$u_z = g = cz + d \quad (22.50)$$

Les constantes introduites sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} A = (\lambda + \mu)2a + \lambda c \\ B = 2\mu b \\ C = (\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1-\nu}{E}A - \frac{\nu}{E}C \\ b = \frac{B}{2\mu} \\ c = \frac{1}{E}(C - 2\nu A) \end{cases} \quad (22.51)$$

En raison de la plus grande simplicité des expressions, on a utilisé le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  pour les formules donnant  $a, b, c$  en fonction de  $A, B, C$ . Les multiples formules de passage entre les coefficients de Lamé et la paire  $(E, \nu)$  se trouvent dans la table 8.1. Pour identifier les constantes, on utilise les conditions aux limites (22.6) et (22.9) qui portent sur  $\sigma_{rr}$  en  $r = r_i$  et  $r = r_e$ . On résout donc le système linéaire,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r_i) = -p_i = A - \frac{B}{r_i^2} \\ \sigma_{rr}(r_e) = -p_e = A - \frac{B}{r_e^2} \end{cases} \quad (22.52)$$

et on trouve

$$A = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad B = \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2} r_i^2 r_e^2 \quad (22.53)$$

Pour  $p_i - p_e > 0$ , la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale en  $r = r_i$  et vaut :

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = \frac{p_i(r_e^2 + r_i^2) - 2p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \quad (22.54)$$

Les profils de contrainte pour deux géométries différentes de tube sont tracés sur la figure 22.3. On observe en particulier que si le tube est mince l'état de contrainte est quasi-mécaniquement homogène dans l'épaisseur. Pour se rendre compte de la façon dont les éléments de matériau élastique se déforment, l'état déformé est illustré sur la figure 22.4.

Les résultats obtenus ne dépendent en fait que des rapports de longueurs  $r/r_i$  et  $r_e/r_i$ . Pour un même chargement en pression et un même rapport  $r_e/r_i$ , deux tubes de rayons intérieurs distincts présenteront des profils de contraintes et de déformations identiques, en fonction de  $r/r_i$ . En particulier, les contraintes maximales seront identiques. L'analyse s'applique donc aussi bien à une aiguille de seringue qu'à un réservoir d'hydrocarbures. Il n'y a pas d'effet d'échelles ou d'effet de taille absolue dans ces situations régulières d'élastostatique.

### 22.2.2 Différentes conditions aux extrémités du tube

On distingue successivement :

- Le tube est **libre** à ses extrémités. Dans ce cas, la contrainte axiale  $\sigma_{zz} = \Sigma = 0$  de sorte que :

$$\sigma_{zz} = 0 \implies C = 0 \quad (22.55)$$

En contrepartie, le tube se déforme axialement selon :

$$\varepsilon_{zz} = c = -\frac{2\nu A}{E} \quad (22.56)$$

où  $A$  est donné par (22.53).

- Le tube est **bloqué** à ses extrémités, ce qui signifie que tout déplacement axial est empêché. Dans ce cas,

$$\varepsilon_{zz} = c = 0 \implies \sigma_{zz} = C = 2\nu A \quad (22.57)$$

où  $A$  est donné par (22.53). Si  $A$  est négatif (cela dépend du chargement en pression et des caractéristiques géométriques du tube), les contraintes axiales sont de compression. Au contraire, il s'agit de contraintes de traction si  $A \geq 0$ . Une telle condition à la limite n'est possible que si le tube est coincé, encastré ou collé aux extrémités.

- Le tube est muni d'une calotte à l'une de ses extrémités. Cette situation a été analysée du point de vue statique au paragraphe 22.1.5. On a mis en évidence l'existence d'une densité surfacique d'efforts axiaux  $\Sigma$  donnée par (22.31). On en déduit :

$$\sigma_{zz} = C = \Sigma = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_i^2 - r_e^2} = A \quad (22.58)$$

### 22.2.3 Cas d'un tube mince

Lorsque le tube est mince, en reprenant les notations (22.37), faire les développements limités qui s'imposent et décrire les états de contraintes tangentielles et axiale.

► Dans le cas d'un tube mince de rayon  $R$  et d'épaisseur  $e$  définis par les équations (22.37) et tels que  $e/R \ll 1$ , les expressions précédentes se simplifient. Des développements limités par rapport à  $e/R$  fournissent :

$$A = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} + \mathcal{O}(1), \quad B = \frac{(p_i - p_e)R^3}{2e} + \mathcal{O}(1) \quad (22.59)$$

Les contraintes se réduisent alors à

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_i - p_e)R}{e}, \quad \sigma_{rr} = 0 \quad (22.60)$$

Les expressions précédentes sont correctes à l'ordre  $\mathcal{O}(1)$ . Clairement, la composante prépondérante est la contrainte de traction ou de compression  $\sigma_{\theta\theta}$ . Le résultat (22.60)

### Déplacements

$$\underline{u} = \left( ar + \frac{b}{r} \right) \underline{e}_r + (cz + d) \underline{e}_z$$

### Déformations

$$\underline{\varepsilon} = \left( a - \frac{b}{r^2} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left( a + \frac{b}{r^2} \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + c \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

div  $\underline{u}$  = trace  $\underline{\varepsilon}$  =  $2a + c = Cste$

### Contraintes

$$\underline{\sigma} = \left( A - \frac{B}{r^2} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left( A + \frac{B}{r^2} \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + C \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

trace  $\underline{\sigma}$  =  $2A + C = Cste$

### Changement

$$A = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}, \quad B = \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2} r_i^2 r_e^2$$

$C = 0$  (libre),  $C = 2\nu A$  (bloqué),  $C = A$  (calotte),  $C = \Sigma$  (donné)

$$a = \frac{1-\nu}{E} A - \frac{\nu}{E} C, \quad b = \frac{B}{2\mu}, \quad c = \frac{1}{E} (C - 2\nu A)$$

$$A = (\lambda + \mu)2a + \lambda c, \quad B = 2\mu b, \quad C = (\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a$$

Tableau 22.1: Récapitulatif : élastostatique du tube sous pression interne et externe avec ou sans effort axial.

est d'une importance pratique considérable et mérite d'être mémorisé<sup>3</sup>. Le choix de l'épaisseur d'un tube pour un chargement donné est critique puisque la contrainte tend vers l'infini lorsque l'épaisseur diminue.

La valeur de la composante axiale  $\sigma_{zz}$  dépend des conditions aux extrémités :

- **Tube libre.** Dans ce cas, la contrainte axiale  $\sigma_{zz}$  est nulle. L'état de contrainte du tube mince sous pression se réduit à un état de **traction/compression simple**, selon le signe de  $p_i - p_e$ . Il est important de se rappeler que l'application d'une pression interne à un tube mince (libre à ses extrémités) met le tube en traction simple selon la direction tangentielle. Comme le comportement des matériaux est très souvent caractérisé en traction simple, ces données expérimentales sont directement applicables au dimensionnement d'un tel tube sous pression.
- **Tube bloqué selon  $z$ .** La contrainte axiale engendrée vaut

$$\sigma_{zz} = \nu \frac{(p_i - p_e)R}{e} = \nu \sigma_{\theta\theta} \quad (22.61)$$

au premier ordre.

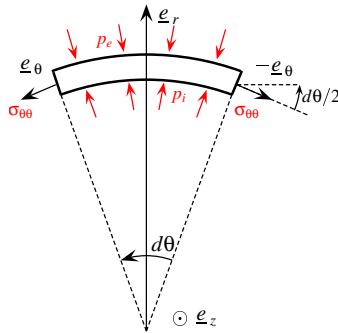
- **Tube terminé par une calotte.** Le résultat (22.58) donne, dans le cas du tube mince :

$$\sigma_{zz} = A = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} \quad (22.62)$$

au premier ordre. La contrainte axiale vaut donc la moitié de la contrainte circonférentielle qui reste par conséquent prépondérante.

Remarquer en particulier que, dans les deux derniers cas,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  sont du même signe.

3. On peut d'ailleurs retrouver rapidement ce résultat en raisonnant de la manière suivante. On considère le secteur de tube suivant d'angle  $d\theta$  et de hauteur  $dz$  :



On voit que les pressions appliquées sont équilibrées par la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$ . On calcule alors la résultante des efforts appliqués à cet élément de volume dans la direction  $e_r$  :

$$\underbrace{(p_i - p_e) R d\theta dz}_{\text{pression appliquée}} = 2 \underbrace{\sigma_{\theta\theta} \sin \frac{d\theta}{2} edz}_{\text{composante de la réaction du tube}}$$

Pour le petit angle  $d\theta$  considéré, la fonction sinus peut être remplacé par son argument, ce qui conduit à la relation cherchée (22.60). Dans ce calcul, on suppose implicitement que  $\sigma_{\theta\theta}$  est homogène dans l'épaisseur du tube, approximation licite pour le tube mince seulement.

#### 22.2.4 Respect du contexte infinitésimal

Les résultats précédents ne sont pertinents que si la transformation reste infinitésimale. Cela suppose en particulier que les composantes de déformations  $|\varepsilon_{rr}|$  et  $|\varepsilon_{\theta\theta}|$  sont petites devant 1. Il en va donc de même de

$$|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}| = 2|a| \ll 1, \quad |\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\theta\theta}| = \frac{2|b|}{r^2} \ll 1$$

Pour un tube mince libre à ses extrémités par exemple, cela implique

$$2|a| \sim \frac{2|A|}{E} \sim \frac{|p_i - p_e|R}{Ee} \ll 1, \quad \frac{2|b|}{r^2} \sim \frac{2|B|}{R^2 E} \sim \frac{|p_i - p_e|R}{Ee} \ll 1$$

où  $E$  est le module d'Young. Le contexte infinitésimal est donc respecté tant que

$$\frac{|p_i - p_e|}{E} \ll \frac{e}{R} \quad (22.63)$$

La condition concerne le chargement appliqué  $p_i - p_e$  et la géométrie du tube. Pour  $e/R \ll 1$ , on voit que  $|p_i - p_e|/E$  doit être un infiniment petit d'ordre 2. Cette condition laisse toutefois la place à un large domaine d'application puisque le module d'Young est très élevé (pour les métaux en tout cas, 200000 MPa par exemple pour un acier) et les pressions appliquées se comptent en bars (1 bar =  $10^5$  Pa = 0.1 MPa). On reviendra à ces ordres de grandeurs au paragraphe 22.2.6.

La condition (22.63) garantit certes la validité de l'analyse dans le contexte infinitésimal mais n'assure en rien la pertinence de la solution. En effet, une telle solution peut s'avérer instable et d'autres solutions doivent être envisagées hors du carcan infinitésimal, en particulier des modes de flambage du tube, en particulier si  $p_e > p_i$ . De telles instabilités deviennent d'autant plus probables que le tube est mince.

#### 22.2.5 Cavité dans un massif infini

Le comportement d'une cavité soumise à une pression interne  $p_i$  dans un massif infini siège pour  $r \rightarrow \infty$  d'une pression  $p_e$  s'obtient en faisant tendre  $r_e$  vers l'infini dans les formules de la table 22.1. En particulier,

$$A = -p_e, \quad B = (p_i - p_e)r_i^2$$

Dans le cas où  $p_i = 0$ , on définit le coefficient de concentration de contrainte au bord du trou comme le rapport

$$K_T = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_i)}{\sigma_{\theta\theta}(r_e)} = 2$$

i.e. deux fois la pression appliquée à l'infini.

#### 22.2.6 Dimensionnement du réservoir sous pression

Si, pour un tube de géométrie donnée, la pression appliquée est trop grande, on risque d'atteindre localement la limite d'élasticité, voire de rupture, du matériau. Il est donc essentiel d'utiliser un critère de dimensionnement du tube pour donner les limites de validité du comportement élastique de la structure. En utilisant le critère de plasticité de Tresca (cf. le paragraphe 4.4.4 et l'expression de ce critère (4.62)), indiquer, pour un tube

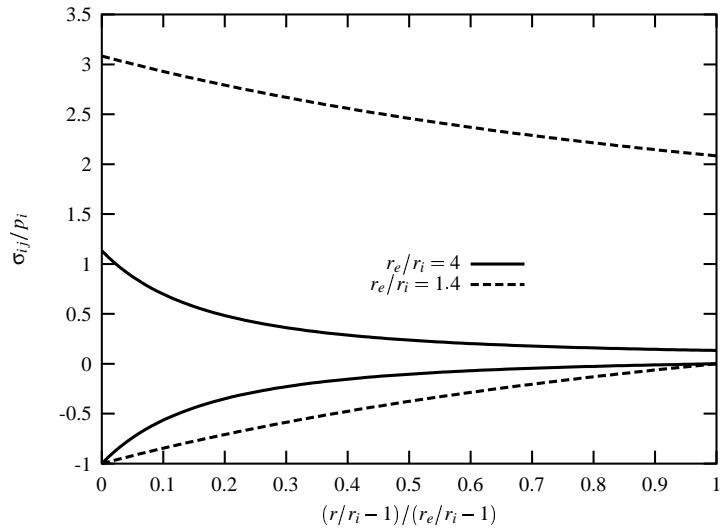


Figure 22.3 : Profils de contraintes dans des réservoirs sous pression interne uniquement avec deux rapports de rayons distincts. La composante positive est  $\sigma_{\theta\theta}$ , la composante négative est  $\sigma_{rr}$ . Le tube est supposé libre dans la direction axiale.

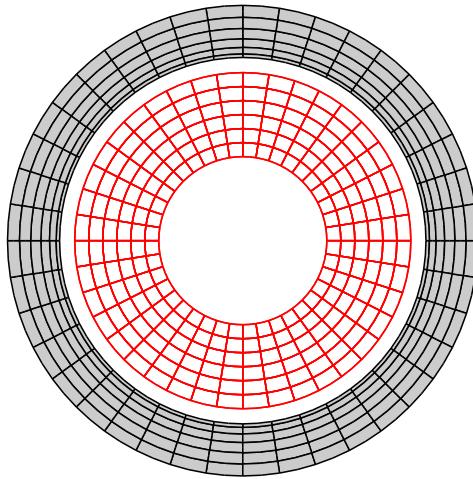


Figure 22.4 : Déformation d'un tube sous pression interne avec  $r_e/r_i = 2$ . L'état initial est au centre (en rouge). L'état final déformé est grisé. La déformation a été démesurément exagérée (facteur 1000) pour l'illustration.

fermé par une calotte par exemple, à quel endroit de la structure la plasticité va apparaître. Fournir un critère de dimensionnement du tube en fonction de l'écart de pression appliquée  $|p_i - p_e|$  et du rapport des rayons  $r_i/r_e$ . Reprendre enfin l'analyse avec le critère de von Mises.

► Le critère de Tresca consiste à comparer l'écart maximum entre les contraintes principales à une valeur critique  $\sigma_0$ , égale à la limite d'élasticité en traction du matériau. Le matériau se comporte de manière élastique en un point donné tant que

$$\text{Sup } |\sigma_i - \sigma_j| = \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_0 \quad (22.64)$$

où les  $\sigma_i$  sont les contraintes principales classées dans l'ordre décroissant. Dans le cas du tube sous pression, le tenseur des contraintes est diagonal (cf. équation (22.49)) de sorte que les contraintes principales sont  $\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}$ . Pour comparer ces contraintes principales entre elles, dans le cas du tube muni d'une calotte, on évalue les différences

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} = \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \frac{B}{r^2} \quad (22.65)$$

Les résultats (22.49) et (22.58) ont été utilisés. Il est alors aisément de ranger les contraintes principales dans l'ordre croissant :

$$\sigma_{rr} < \sigma_{zz} < \sigma_{\theta\theta} \quad \text{si } p_e \leq p_i, \quad \sigma_{\theta\theta} < \sigma_{zz} < \sigma_{rr} \quad \text{si } p_i \leq p_e \quad (22.66)$$

Dans tous les cas de chargement, l'écart maximal entre les contraintes principales est  $|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|$ . Le comportement du tube reste donc élastique au point matériel considéré tant que

$$|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}| = \frac{2|B|}{r^2} < \sigma_0 \quad (22.67)$$

En conséquence, la plasticité va apparaître entre premier lieu en  $r = r_i$  où la différence  $|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|$  est maximale. Par suite, la structure dans son ensemble reste dans le domaine élastique si  $2|B|/r_i^2 < \sigma_0$ . En tenant compte de l'expression (22.53) donnant  $B$ , on aboutit au critère suivant<sup>4</sup> :

$$\Delta p := |p_i - p_e| < \Delta p_c := \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r_e^2}\right) \quad (22.68)$$

La courbe correspondante donnant l'écart de pression critique en fonction du rapport des rayons du tube fait l'objet de la figure 22.5. Le choix de la géométrie est un paramètre-clé dans le dimensionnement du réservoir. Pour un diamètre intérieur donné, le fait d'accroître le rayon extérieur, i.e. l'épaisseur, permet d'augmenter la limite de pression admissible. Mais ce bénéfice va en s'amenuisant puisque la pression critique tend vers

$$\Delta p_c^\infty = \frac{\sigma_0}{2} \quad (22.69)$$

lorsque  $r_e \rightarrow \infty$ . Même un tube d'épaisseur infinie, i.e. une cavité cylindrique dans

4. Il est également possible de recourir au critère de von Mises, cf. section 4.4.5. Les composantes non nulles du déviateur des contraintes sont  $\sigma_{11}^{\text{dev}} = -(C - A)/3 - B/r^2, \sigma_{22}^{\text{dev}} = -(C - A)/3 + B/r^2, \sigma_{33}^{\text{dev}} = 2(C - A)/3$ . La contrainte équivalente de von Mises vaut ainsi  $\sigma_{eq} = J_2(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{(C - A)^2 + 3B^2/r^4}$ . Elle est maximale en  $r = r_i$ . Dans le cas du réservoir avec couvercle,  $C = A$ , le comportement du réservoir reste élastique si

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}|B|}{r_i^2} < \sigma_0 \implies \Delta p < \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{r_i^2}{r_e^2}\right)$$

Si l'on adopte la même limite d'élasticité en traction,  $\sigma_0$ , pour Tresca et von Mises, le critère de Tresca est donc plus restrictif dans le cas du tube sous pression que le critère de von Mises.

un massif, peut plastifier. Ce résultat a des implications importantes notamment en mécanique des sols, pour le dimensionnement de galeries ou de tunnels par exemple. La convergence en  $r_e/r_i$  étant lente, on gagne peu sur la limite autorisée lorsqu'on augmente l'épaisseur du tube, ce qui d'ailleurs conduit à un surcroît de matière et donc de coût prohibitif. Un autre levier pour le dimensionnement du réservoir est le **choix du matériau** qui détermine la limite d'élasticité  $\sigma_0$  intervenant dans le critère (22.68). On considère les deux exemples suivants pour un tube tel que  $r_e/r_i = 1.01$  :

- le choix d'un alliage d'aluminium pour lequel  $\sigma_0 = 400$  MPa conduit un écart de pression critique  $\Delta p_c \simeq 4$  MPa soit 40 bars.
- le choix d'un acier à haute résistance pour lequel  $\sigma_0 = 1000$  MPa conduit un écart de pression critique  $\Delta p_c \simeq 10$  MPa soit 100 bars.

Le choix entre l'aluminium et l'acier à haute résistance est aussi une affaire de coût. D'autres paramètres rentrent en ligne de compte, comme la résistance du matériau à l'apparition et à la propagation de fissure, sa résistance à la corrosion, mais aussi la plus ou moins grande facilité de mise en œuvre du matériau pour la réalisation du réservoir (soudabilité, usinage...), etc. Certains de ces points seront abordés dans le cours (Cailletaud, 2003), et les exercices correspondants, dont plusieurs prolongent l'analyse présentée dans cet exercice.

On n'introduit pas ici de coefficient de sécurité venant pondérer, dans une approche d'ingénieur plus complète, la valeur critique  $\Delta p_c$  prévue en raison des incertitudes et de la variabilité du matériau et de la géométrie de la structure. De tels facteurs font l'objet de normes dont on trouvera une introduction et les références nécessaires dans (Trotignon, 1997; Ashby, 2000).

Un aspect essentiel du dimensionnement du tube consiste d'autre part à étudier ses conditions de stabilité, notamment les critères d'apparition des différents modes de flambage. Une telle analyse n'est pas entreprise dans ce paragraphe.

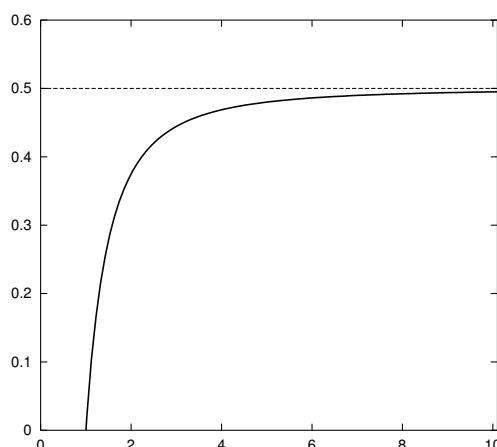


Figure 22.5 : Dimensionnement d'un réservoir sous pression : écart de pression critique  $\Delta p_c$  normalisé par la limite d'élasticité  $\sigma_0$  en fonction du rapport des rayons du réservoir sous pression. Au-delà de cette limite le comportement du tube cesse d'être élastique linéaire. L'asymptote  $\sigma_0/2$  est aussi représentée.

### 22.3 Frettage

Le frettage est une méthode d'assemblage utilisée depuis l'antiquité<sup>5</sup> et fréquente aujourd'hui dans de nombreuses applications industrielles. L'assemblage fretté constitue un exemple simple de structure qui, bien que soumise à aucun chargement extérieur, est le siège de contraintes internes auto-équilibrées. Le calcul de ces contraintes résiduelles est possible dans le cas de deux tubes frettés à l'aide des résultats obtenus dans les sections précédentes.

On montre enfin l'avantage que présente un assemblage de deux tubes frettés, vis-à-vis d'un tube simple, en terme de limite d'élasticité de l'ensemble.

#### 22.3.1 Opération de frettage de deux tubes

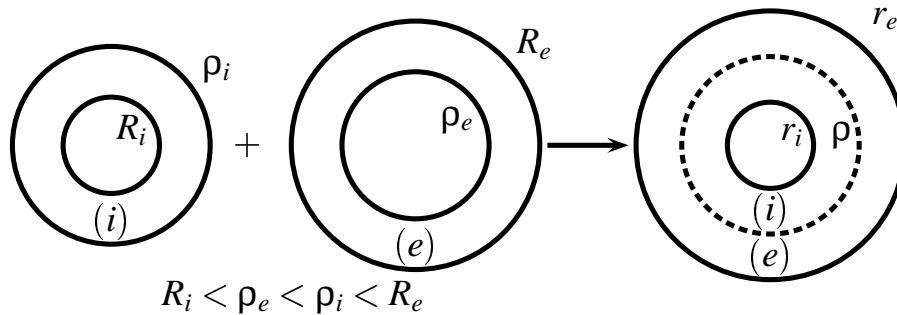


Figure 22.6 : Frettage de deux tubes.

On considère deux tubes de rayons intérieur et extérieur initiaux  $R_i, \rho_i$  et  $\rho_e, R_e$  respectivement, tels que

$$R_i < \rho_e < \rho_i < R_e \quad (22.70)$$

Le frettage consiste à insérer le premier tube, dit *tube intérieur*, noté (i), dans le second, dit *tube extérieur*, noté (e). Comme  $\rho_i \neq \rho_e$ , il est nécessaire de déformer les deux tubes pour qu'un tel assemblage soit possible. A la fin de l'opération, le tube intérieur a pour rayon intérieur  $r_i$  et pour rayon extérieur  $\rho$ , tandis que le tube extérieur a pour dimensions finales  $\rho$  et  $r_e$ . Ces grandeurs sont indiquées sur la figure 22.6. Le frettage est possible en insérant en force le tube intérieur, ou bien en chauffant le tube extérieur. Dans ce dernier cas, le tube extérieur se dilate et, si la dilatation thermique est suffisante, ses dimensions sont telles que l'on peut insérer plus aisément le tube intérieur. Lorsque le tube extérieur refroidit, le frettage se réalise. On peut aussi refroidir le tube intérieur.

A l'issue de l'opération, le tube extérieur exerce une pression  $p_{init}$  sur le tube intérieur. Plus précisément, le vecteur contrainte en un point du tube intérieur tel que  $r = \rho$  vaut

$$\underline{\sigma}^{(i)} \cdot \underline{n}^{(i)} = \underline{\sigma}^{(i)} \cdot \underline{e}_r = \underline{t}^{d(i)} = -p_{init} \underline{e}_r \quad (22.71)$$

où l'exposant (i) fait référence au tube intérieur. De manière équivalente, le vecteur contrainte en point homologue du tube extérieur en  $r = \rho$  vaut

$$\underline{\sigma}^{(e)} \cdot \underline{n}^{(e)} = \underline{\sigma}^{(e)} \cdot (-\underline{e}_r) = \underline{t}^{d(e)} = p_{init} \underline{e}_r \quad (22.72)$$

<sup>5</sup>. Les celtes ont utilisé ce procédé pour le cerclage des roues. Le cercle métallique extérieur était chauffé pour être fretté sur la roue en bois.

où l'exposant ( $e$ ) fait référence au tube extérieur. En  $r = r_i, r_e$ , le tube est libre d'effort. Pour chaque tube, les conditions de chargement sont du type étudié dans l'analyse des tubes sous pression interne et externe au paragraphe 22.2. On pourra donc utiliser directement les résultats obtenus pour déterminer contraintes et déformations dans les tubes de l'assemblage fretté.

Le contact entre les deux tubes est supposé parfait et collant (sans glissement), une fois l'assemblage réalisé.

A l'issue de l'opération de frettage, aucun chargement extérieur n'est appliqué à l'assemblage. Le torseur des efforts appliqués est nul et, pourtant, l'assemblage fretté est le siège de contraintes et de déformations qui sont calculées au paragraphe 22.3.2. On vérifiera que ces contraintes sont à divergence nulle (on dit qu'elles sont **auto-équilibrées**) et ne conduisent à aucune force ni moment résultants. On parle aussi de **contraintes résiduelles**.

### 22.3.2 Caractéristiques de l'assemblage fretté

Lorsque les rayons initiaux  $(R_i, \rho_i, \rho_e, R_e)$  sont donnés, les caractéristiques  $(r_i, \rho, r_e, p_{init})$  de l'assemblage fretté sont inconnues et doivent être déterminées à partir des données géométriques et des matériaux.

Le tube intérieur est soumis à la pression “extérieure”  $p_e = p_{init}$  en suivant les notations du paragraphe 22.2. Le tube extérieur est soumis à la pression “intérieure”  $p_i = p_{init}$ . Les tubes sont supposés libres à leurs extrémités (voir table 22.1). La solution en déplacement est donnée par (22.41) :

$$\underline{u}^{(i)} = \left( \frac{1-\nu}{E} A^{(i)} r + \frac{B^{(i)}}{2\mu r} \right) \underline{e}_r - \frac{2\nu A^{(i)}}{E} \underline{e}_z \quad (22.73)$$

$$\underline{u}^{(e)} = \left( \frac{1-\nu}{E} A^{(e)} r + \frac{B^{(e)}}{2\mu r} \right) \underline{e}_r - \frac{2\nu A^{(e)}}{E} \underline{e}_z \quad (22.74)$$

Les constantes  $A^{(i,e)}$  et  $B^{(i,e)}$  s'expriment en fonction de  $p_{init}$  :

$$A^{(i)} = \frac{p_{init} \rho_i^2}{R_i^2 - \rho_i^2}, \quad A^{(e)} = \frac{p_{init} \rho_e^2}{R_e^2 - \rho_e^2} \quad (22.75)$$

$$B^{(i)} = \frac{p_{init}}{R_i^2 - \rho_i^2} R_i^2 \rho_i^2, \quad B^{(e)} = \frac{p_{init}}{R_e^2 - \rho_e^2} R_e^2 \rho_e^2 \quad (22.76)$$

On en déduit les relations qui lient  $r_i$  avec  $R_i$ , et  $r_e$  avec  $R_e$  :

$$r_i = R_i + \frac{1-\nu}{E} A^{(i)} R_i + \frac{B^{(i)}}{2\mu R_i} \quad (22.77)$$

$$r_e = R_e + \frac{1-\nu}{E} A^{(e)} R_e + \frac{B^{(e)}}{2\mu R_e} \quad (22.78)$$

Les cylindres  $r = \rho_i$  et  $r = \rho_e$  se transforment en cylindres de rayons :

$$\rho'_i = \rho_i + \frac{1-\nu}{E} A^{(i)} \rho_i + \frac{B^{(i)}}{2\mu \rho_i} \quad (22.79)$$

$$\rho'_e = \rho_e + \frac{1-\nu}{E} A^{(e)} \rho_e + \frac{B^{(e)}}{2\mu \rho_e} \quad (22.80)$$

Les tubes (*i*) et (*e*) sont en contact si

$$\rho'_i = \rho'_e = \rho \quad (22.81)$$

En tenant compte de la condition précédente, les équations (22.77) à (22.80) constituent un système de quatre équations à quatre inconnues ( $r_i, r_e, \rho, p_{init}$ ). Dans la pratique, on peut faire un choix judicieux de ( $R_i, \rho_i, \rho_e, R_e$ ) pour obtenir les caractéristiques souhaitées de l'assemblage fretté. Le paramètre-clef est la différence

$$\epsilon = \rho_i - \rho_e \quad (22.82)$$

La différence entre les équations (22.79) et (22.80) fournit

$$\begin{aligned} \epsilon + \frac{1-\nu}{E} (A^{(i)}\rho_i - A^{(e)}\rho_e) + \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{B^{(i)}}{\rho_i} - \frac{B^{(e)}}{\rho_e} \right) &= 0 \\ \epsilon + \frac{1-\nu}{E} p_{init} \left( \frac{\rho_i^3}{R_i^2 - \rho_i^2} + \frac{\rho_e^3}{\rho_e^2 - R_e^2} \right) + \frac{1+\nu}{E} p_{init} \left( \frac{R_i^2 \rho_i}{R_i^2 - \rho_i^2} + \frac{R_e^2 \rho_e}{\rho_e^2 - R_e^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'équation suivante qui fournit  $p_{init}$  :

$$\frac{E\epsilon}{p_{init}} = (1-\nu) \left( \frac{\rho_i^3}{\rho_i^2 - R_i^2} + \frac{\rho_e^3}{R_e^2 - \rho_e^2} \right) + (1+\nu) \left( \frac{R_i^2 \rho_i}{\rho_i^2 - R_i^2} + \frac{R_e^2 \rho_e}{R_e^2 - \rho_e^2} \right) \quad (22.83)$$

Les calculs précédents ne sont valides que pour  $\epsilon > 0$ , ce qui implique  $p_{init} > 0$  d'après l'équation (22.83). Ces conditions garantissent la cohésion de l'assemblage.

Pour l'utilisation de l'assemblage fretté, on a plutôt besoin d'une relation entre  $p_{init}$  et les caractéristiques finales du frettage, i.e. ( $r_i, r_e, \rho$ ). Une telle relation est en fait contenue dans la précédente (22.83), en faisant jouer le contexte infinitésimal. Pour le voir, on revient à la relation (22.79) sous la forme :

$$\rho = \rho_i + a^{(i)}\rho_i + \frac{b^{(i)}}{\rho_i} \quad (22.84)$$

On a vu au paragraphe 22.2.4 que, dans le contexte infinitésimal,  $|a^{(i)}| \ll 1$  et  $|b^{(i)}|/\rho_i^2 \ll 1$ . L'équation précédente implique alors que  $\rho$  et  $\rho_i$  sont du même ordre. Des arguments similaires prouvent que  $R_i, r_i$  d'une part et  $R_e, r_e$  d'autre part sont du même ordre. Par suite, dans le contexte infinitésimal, l'équation (22.83) est indiscernable de

$$\frac{E\epsilon}{p_{init}} = (1-\nu)\rho^3 \left( \frac{1}{\rho^2 - r_i^2} + \frac{1}{r_e^2 - \rho^2} \right) + (1+\nu)\rho \left( \frac{r_i^2}{\rho^2 - r_i^2} + \frac{r_e^2}{r_e^2 - \rho^2} \right) \quad (22.85)$$

Finalement

$$p_{init} = E \frac{\epsilon}{2\rho} \frac{(\rho^2 - r_i^2)(r_e^2 - \rho^2)}{\rho^2(r_e^2 - r_i^2)} \quad (22.86)$$

### 22.3.3 Contraintes initiales dans l'assemblage fretté

L'assemblage fretté est le siège de contraintes résiduelles qui se calculent grâce aux résultats rassemblés dans la table 22.1. Le champ de contraintes résiduelles  $\sigma^{(0)}$  est décrit

successivement dans le tube intérieur et dans le tube extérieur :

$$r_i \leq r \leq \rho \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(0)} = A^{(i)} - \frac{B^{(i)}}{r^2} = \frac{p_{init}\rho^2}{r_i^2 - \rho^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right) < 0 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = A^{(i)} + \frac{B^{(i)}}{r^2} = \frac{p_{init}\rho^2}{r_i^2 - \rho^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) < 0 \\ \sigma_{zz}^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (22.87)$$

$$\rho \leq r \leq r_e \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^{(0)} = A^{(e)} - \frac{B^{(e)}}{r^2} = \frac{p_{init}\rho^2}{r_e^2 - \rho^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right) < 0 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = A^{(e)} + \frac{B^{(e)}}{r^2} = \frac{p_{init}\rho^2}{r_e^2 - \rho^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2}\right) > 0 \\ \sigma_{zz}^{(0)} = 0 \end{array} \right. \quad (22.88)$$

Conformément à ce que suggère l'intuition, le tube intérieur est en compression selon  $\underline{\epsilon}_\theta$  tandis que le tube extérieur est en traction. Les contraintes radiales négatives garantissent la cohésion de l'assemblage. On peut en outre vérifier que

$$\sigma_{rr}(r_i) = \sigma_{rr}(r_e) = 0$$

On peut montrer aussi que la moyenne  $\langle \sigma \rangle$  des contraintes sur les deux tubes est nulle. Cette équation est en fait équivalente à la relation (22.85).

Pendant l'opération de frettage, on suppose que le glissement entre les deux tubes est suffisant pour que les contraintes axiales  $\sigma_{zz}$  restent nulles. En conséquence, les deux tubes risquent de ne pas avoir la même longueur finale (à calculer...). On les découpe en général pour ajuster les extrémités, ou bien on les soude. On suppose dans la suite qu'un tel glissement n'a plus lieu et que les deux tubes peuvent être considérés comme soudés l'un à l'autre sur toute leur longueur (on vérifiera que c'est effectivement possible dans les résultats ultérieurs). Dans les calculs qui vont suivre, l'assemblage fretté est muni d'une calotte.

#### 22.3.4 Assemblage fretté chargé

L'assemblage fretté fermé peut être soumis à un chargement en pression interne  $p_i$  et en pression externe  $p_e$ . La pression interne s'exerce en fait sur la paroi interne du tube interne ( $i$ ), tandis que la pression externe s'exerce sur la paroi externe du tube externe ( $e$ ).

Il s'agit dès lors d'un problème d'élasticité linéarisée dans le cadre des petites perturbations pour un solide dans un état initial supposé quasi-naturel. Cet état initial est décrit par le champ d'auto-contraintes  $\underline{\sigma}^{(0)}$  déterminé dans la section précédente. La solution s'obtient à partir de celle obtenue pour les réservoirs sous pression (cf. table 22.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(0)} + A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{zz} = C \end{array} \right. \quad (22.89)$$

avec

$$A = \frac{p_e r_e^2 - p_i r_i^2}{r_i^2 - r_e^2}, \quad B = \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2} r_i^2 r_e^2, \quad C = A \quad (22.90)$$

A ce stade, on peut se demander si les pressions exercées ne conduisent pas les deux tubes

à se désolidariser, ce qui conduirait à la ruine de l'assemblage. Pour le savoir, on évalue la pression en  $r = \rho$  :

$$\begin{aligned} -p := \sigma_{rr}(\rho) &= -p_{init} + \frac{p_e r_e^2 - p_i r_i^2}{r_i^2 - r_e^2} - \frac{p_i - p_e}{r_e^2 - r_i^2} \frac{r_i^2 r_e^2}{\rho^2} \\ &= -p_{init} + \underbrace{\frac{p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{\rho^2}\right)}_{<0} + \underbrace{\frac{p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(\frac{r_i^2}{\rho^2} - 1\right)}_{<0} \quad (22.91) \end{aligned}$$

Ce résultat montre que les tubes restent bien accolés et qu'il n'y a pas de glissement relatif.

### 22.3.5 Optimisation de l'assemblage fretté

On détermine maintenant la limite d'élasticité de l'assemblage fretté en utilisant le critère de Tresca invoqué au paragraphe 22.2.6. Le critère de dimensionnement (22.68) peut en fait être appliqué successivement aux tubes (*i*) and (*e*). Le point de fonctionnement de chaque composant de l'assemblage reste donc dans le domaine d'élasticité tant que

$$|p_i - p| < \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{r_i^2}{\rho^2}\right) \quad (\text{tube intérieur}) \quad (22.92)$$

$$|p - p_e| < \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r_e^2}\right) \quad (\text{tube extérieur}) \quad (22.93)$$

On a admis, au passage, que, dans chaque tube, les contraintes principales sont rangées dans l'ordre (22.66), ce qui reste à vérifier<sup>6</sup>.

Optimiser l'utilisation du tube fretté signifie maximiser l'écart de pression admissible  $|p_i - p_e|$ . Cet écart est majoré par

$$|p_i - p_e| \leq |p_i - p| + |p - p_e| < \frac{\sigma_0}{2} \left(2 - \frac{r_i^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{r_e^2}\right) \quad (22.94)$$

La borne supérieure est maximale<sup>7</sup> pour

$$\rho = \sqrt{r_i r_e} \quad (22.95)$$

En substituant cette valeur dans (22.96), on trouve le domaine d'élasticité maximal de l'assemblage fretté :

$$\Delta p = |p_i - p_e| < \Delta p_c = \sigma_0 \left(1 - \frac{r_i}{r_e}\right) \quad (22.96)$$

6. La vérification indique que cet ordre est respecté dans le tube extérieur mais pas nécessairement dans le tube intérieur, auquel cas il faut reprendre l'analyse. On trouve en fait que le critère élaboré dans la suite reste le même dans ce dernier cas.

7. Pour cela, on cherche le minimum de la fonction

$$\frac{r_i^2}{x} + \frac{x}{r_e^2}$$

pour  $r_i^2 \leq x \leq r_e^2$ , ce qui donne  $x^2 = r_i^2 r_e^2$ .

En comparant le critère (22.68) pour le tube simple avec le critère pour l'assemblage fretté (22.96), on constate le gain significatif apporté par les contraintes initiales : l'écart de pression maximal autorisé, obtenu pour  $r_e/r_i \rightarrow \infty$  est deux fois plus grand pour l'assemblage fretté que pour le tube simple<sup>8</sup>. Pour une pression  $\Delta p$  acceptable pour les deux structures, on constate que l'assemblage fretté adéquat est plus mince que le tube seul correspondant requis. Le rayon intermédiaire  $\rho$  donné par (22.95) représente une valeur optimale de ce paramètre pour l'assemblage fretté. Le critère (22.96) est représenté sur la figure 22.7.

Il est possible aussi d'optimiser la pression de fretteage  $p_{init}$ . La pression  $p$ , liée à  $p_{init}$  par (22.91), doit être telle que les inégalités (22.93) soient toujours satisfaites. Lorsque la valeur optimale du rayon intermédiaire (22.95) est substituée dans (22.93), les deux critères deviennent :

$$|p_i - p| < \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{r_i}{r_e}\right) \quad (\text{tube intérieur}) \quad (22.97)$$

$$|p - p_e| < \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{r_i}{r_e}\right) \quad (\text{tube extérieur}) \quad (22.98)$$

Les valeurs critiques sont donc identiques. L'idée est alors de choisir  $p$  telle que les deux critères (22.98) soient atteints simultanément, ce qui n'est possible que pour  $p_i - p = p - p_e$ . Cette condition fournit la pression intermédiaire optimale pour l'assemblage fretté :

$$p = \frac{p_e + p_i}{2} \iff p_{init} = \frac{p_i - p_e}{2} \frac{r_e - r_i}{r_e + r_i} \quad (22.99)$$

La valeur optimale de  $p$  a été introduite dans (22.91) pour trouver la pression initiale intermédiaire optimale  $p_{init}$  correspondante. Dans ces conditions, la limite d'élasticité est atteinte pour la première fois en  $r = r_i$  et  $r = \rho = \sqrt{r_i r_e}$  simultanément. La pression optimale  $p_{init}$  est obtenue pour un jeu  $\epsilon$  optimal entre les deux tubes initiaux. La valeur du jeu est donnée par la relation (22.86), ce qui conduit à

$$\epsilon = \rho \frac{\Delta p}{E} = \sqrt{r_i r_e} \frac{|p_i - p_e|}{E} \quad (22.100)$$

En toute rigueur, il reste à vérifier qu'avec les valeurs choisies pour  $\rho$  et  $p_{init}$ , la structure reste élastique dans les conditions de chargement (22.98).

## 22.4 Sphère sous pression

Les contraintes et déformations dans une boule de rayon extérieur  $r_e$  percée d'une cavité concentrique de rayon  $r_i$  s'obtiennent de manière très similaire au cas du cylindre. On se contente ici de donner les résultats consignés dans le tableau 22.2 lorsqu'une pression interne  $p_i$  et une pression externe  $p_e$  sont appliquées.

Pour établir ces formules, on part d'un déplacement de la forme  $\underline{u} = u(r)\underline{e}_r$  dans un système de coordonnées sphériques dont l'origine est le centre de la boule creuse. Son

8. La limite d'élasticité est certes doublée, mais on peut montrer que la charge limite, définie comme l'écart de pression pour lequel les tubes sont entièrement plastifiés, reste inchangée.

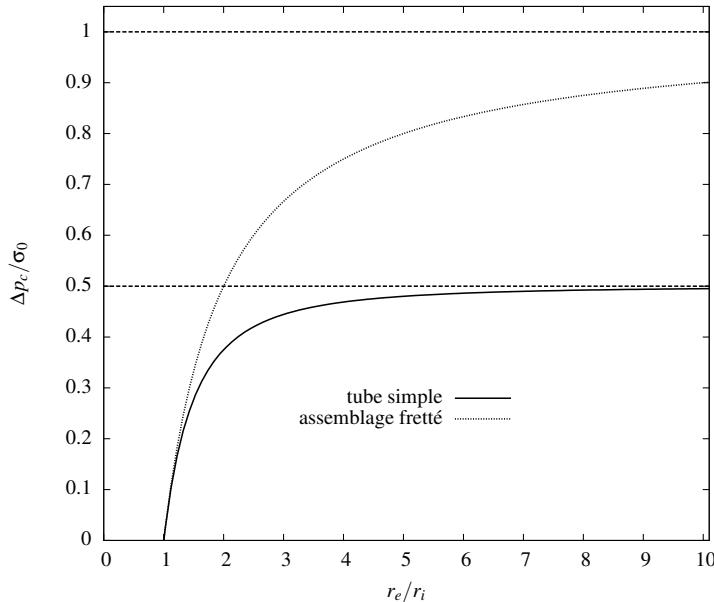


Figure 22.7 : Dimensionnement d'un réservoir sous pression : comparaison entre un tube simple et un assemblage fretté. L'écart de pression critique  $\Delta p_c$  normalisé par la limite d'élasticité  $\sigma_0$  est tracé en fonction du rapport des rayons du réservoir sous pression. Au-delà de cette limite le comportement du réservoir cesse d'être élastique linéaire. Les asymptotes  $\sigma_0/2$  et  $\sigma_0$  sont aussi représentées.

gradient est

$$\text{grad } \underline{\mathbf{u}} = u' \underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r + \frac{u}{r} (\underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta + \underline{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \underline{\mathbf{e}}_\varphi)$$

Sa divergence est la trace du gradient. Elle est notée  $v(r)$  :

$$\text{div } \underline{\mathbf{u}} = u' + 2\frac{u}{r} = v(r)$$

Les contraintes sont calculées par la loi de Hooke linéarisée pour les corps homogènes et isotropes. On montre que la divergence du tenseur des contraintes prend la forme simple :

$$\text{div } \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \sigma_{rr} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \right) \underline{\mathbf{e}}_r = (\lambda + 2\mu)v'(r) \underline{\mathbf{e}}_r$$

L'équilibre des contraintes exige donc que la divergence  $v(r)$  soit un champ constant<sup>9</sup>, ce qui fournit la forme du déplacement donnée dans le tableau 22.2.

Donnons également l'expression des contraintes orthoradielles dans le cas où la paroi est mince  $e/R \ll 1$  :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{(p_i - p_e)R}{2e} \quad (22.101)$$

à comparer avec (22.60) dans le cas du cylindre.

9. C'était également le cas pour le réservoir cylindrique sous pression, il faut le remarquer.

### Déplacements

$$\underline{u} = \left( ar + \frac{b}{r^2} \right) \underline{e}_r$$

### Déformations

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon} &= \left( a - \frac{2b}{r^3} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left( a + \frac{b}{r^3} \right) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \\ \operatorname{div} \underline{u} &= \operatorname{trace} \underline{\varepsilon} = 3a = Cste\end{aligned}$$

### Contraintes

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \left( A - \frac{2B}{r^3} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \left( A + \frac{B}{r^3} \right) (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) \\ \operatorname{trace} \underline{\sigma} &= 3A = Cste\end{aligned}$$

### Chargement

$$\begin{aligned}A &= \frac{p_i r_i^3 - p_e r_e^3}{r_e^3 - r_i^3} & B &= \frac{p_i - p_e}{2(r_e^3 - r_i^3)} r_i^3 r_e^3 \\ a &= \frac{1-2\nu}{E} A, & b &= \frac{B}{2\mu} \\ A &= (3\lambda + \mu)2a = 3\kappa a\end{aligned}$$

Tableau 22.2: Récapitulatif : élastostatique de la sphère sous pression interne et externe.

Le comportement d'une cavité sphérique soumise à une pression interne  $p_i$  dans un massif infini siège pour  $r \rightarrow \infty$  d'une pression  $p_e$  s'obtient en faisant tendre  $r_e$  vers l'infini dans les formules de la table 22.2. En particulier,

$$A = -p_e, \quad B = \frac{p_i - p_e}{2} r_i^2$$

Dans le cas où  $p_i = 0$ , on définit le coefficient de concentration de contrainte au bord du trou comme le rapport

$$K_T = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r_i)}{\sigma_{\theta\theta}(r_e)} = \frac{3}{2}$$

i.e. 1.5 fois la pression appliquée à l'infini, contre 2 dans le cas du cylindre.

## 23 Torsion

### 23.1 Introduction

La solution du problème de torsion d'une barre cylindrique de section quelconque a été établie par A. Barré de Saint-Venant<sup>1</sup> entre 1853 et 1855. Pour aborder sa résolution, il est utile de commencer par un préliminaire d'ordre mathématique sur les problèmes aux limites de Dirichlet et de Neumann pour les fonctions harmoniques.

#### 23.1.1 Problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques

On considère un domaine  $\Omega$  de l'espace ou du plan, supposé simplement connexe, de frontière  $\partial\Omega$ . Le problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques consiste à chercher les fonctions  $\psi$  à laplacien nul et prenant des valeurs imposées sur le contour  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \psi(\underline{x}) = f(\underline{x}) & \forall \underline{x} \in \partial\Omega \end{cases} \quad (23.1)$$

où la fonction  $f$  est supposée continue. Les fonctions à laplacien nul sont dites **harmoniques**.

Si le contour  $\partial\Omega$  est suffisamment régulier, le problème de Dirichlet admet une solution unique.

#### 23.1.2 Problème de Neumann pour les fonctions harmoniques

On considère un domaine  $\Omega$  de l'espace, supposé simplement connexe, de frontière  $\partial\Omega$ . Le problème de Neumann pour les fonctions harmoniques consiste à chercher les fonctions  $\varphi$  à laplacien nul et à flux imposé  $q^d$  sur la frontière :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \nabla\varphi \cdot \underline{n} = q^d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (23.2)$$

On établit d'abord une condition nécessaire à l'existence d'une solution. Pour cela, on évalue le flux total de  $\varphi$  sortant de  $\Omega$  :

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \underline{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla\varphi dV = \int_{\Omega} \Delta\varphi dV = 0 \quad (23.3)$$

Le théorème de la divergence (12.159) a été utilisé au passage. Dans le calcul précédent est apparue la dérivée normale de  $\varphi$  en un point matériel  $\underline{x} \in \partial\Omega$  définie comme

$$\frac{d\varphi}{dn} := \nabla\varphi \cdot \underline{n} \quad (23.4)$$

La donnée  $q^d$  doit être compatible avec la condition précédente. Une condition nécessaire d'existence d'une solution est par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} q^d dS = 0 \quad (23.5)$$

---

1. Adémard Barré de Saint-Venant (1797-1886)

Dans ces conditions, des résultats d'ordre mathématique montrent que la solution est déterminée de manière unique, à une constante additive près.

### Cas plan

Si  $\varphi(x, y)$  est une fonction du plan définie sur la surface plane  $S$ , simplement connexe, de bord  $\Gamma$ , le problème de Neumann s'écrit

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 & \text{sur } S \\ \nabla\varphi \cdot \underline{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} n_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y} n_2 = q^d & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (23.6)$$

Il est instructif de reprendre la preuve de la condition nécessaire (23.5) dans le cas bidimensionnel. Soit  $x(t), y(t)$  une paramétrisation du contour  $\Gamma$ . Le vecteur tangent en tout point de  $\Gamma$  est colinéaire à  $[x'(t) \ y'(t)]^T$  où la notation  $x' = dx/dt$  est utilisée. Le vecteur normal à  $\Gamma$  dans le plan  $(x, y)$  est colinéaire à  $[y' \ -x']^T$ . On introduit l'élément de longueur  $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$  et l'abscisse curviligne  $s$  le long du contour. La dérivée normale de  $\varphi$  le long de  $\Gamma$  est

$$\frac{d\varphi}{dn} = \nabla\varphi \cdot \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y} x' \right) \quad (23.7)$$

L'intégration de ce flux le long de  $\Gamma$  conduit à

$$\int_{\Gamma} \frac{d\varphi}{dn} ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx \right) = \int_S \underbrace{\left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right)}_{\Delta\varphi=0} dxdy = 0 \quad (23.8)$$

car  $y'ds = dy\sqrt{x'^2 + y'^2}$  et  $x'ds = dx\sqrt{x'^2 + y'^2}$ . Pour passer de la deuxième à la troisième égalité, on a utilisé le théorème de Green, qui n'est guère qu'un cas particulier du théorème de la divergence dans le cas bidimensionnel :

**Théorème 39 (Théorème de Green)** *Soit  $P, Q$  deux fonctions régulières définies sur une surface  $S$  du plan, de frontière  $\Gamma$ , alors*

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (23.9)$$

On obtient finalement la condition nécessaire d'existence de solution pour le problème de Neumann bidimensionnel

$$\int_{\Gamma} q^d dl = 0 \quad (23.10)$$

Il ne s'agit en fait que d'un cas particulier de (23.5), démontré plus haut en toute généralité.

### 23.2 Torsion élastostatique d'un barreau cylindrique

On considère un barreau cylindrique de section courante  $S$  de forme quelconque (simplement connexe, c'est-à-dire d'un seul "tenant" et sans trou ni "poignée") et de longueur

$\ell$ , comme l'indique la figure 23.1. L'axe du cylindre est l'axe 3. Le barreau est constitué d'un matériau homogène et isotrope. Il est soumis aux efforts suivants :

- les efforts volumiques sont nuls ou négligés ;
- les surfaces latérales, i.e.  $\partial S \setminus (S_0 \cup S_\ell)$ , sont libres :

$$\underline{t}^d = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 \quad (23.11)$$

- les extrémités  $S_0$  et  $S_\ell$  sont soumises à des densités surfaciques d'effort dont seul le torseur résultant est donné sur chaque extrémité. Le torseur des efforts appliqués à la section  $S_\ell$  est

$$\{O, \underline{R} = 0, \underline{M}_0 = C \underline{e}_3\} \quad (23.12)$$

Le torseur des efforts appliqués à la section  $S_0$  est

$$\{O, \underline{R} = 0, \underline{M}_0 = -C \underline{e}_3\} \quad (23.13)$$

Un couple  $C$  selon l'axe  $\underline{e}_3$  est donc appliqué à l'extrémité  $S_\ell$  et le couple opposé à l'autre extrémité. La résultante des forces sur chaque section est nulle.

On peut vérifier que le torseur résultant des efforts appliqués au barreau est nul.

De manière similaire au cas de la flexion traité à la section 9.2.2, on est confronté à un problème aux limites mal posé, puisque seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné au lieu du vecteur contrainte ou déplacement en chaque point des extrémités. On ne peut donc attendre de solution unique au problème posé. Toutefois, en vertu du principe de Saint-Venant exposé à la section 9.2.3, il existe une solution qui, suffisamment loin des extrémités, ne dépend quasiment pas de la façon dont les efforts sont appliqués aux extrémités. C'est cette solution qui nous intéresse ici. Pour la mettre en évidence, une certaine distribution particulière d'efforts ou de déplacements sera admise aux extrémités, compatible avec le torseur appliqué. Pour un tel choix, la solution devient bel et bien unique.

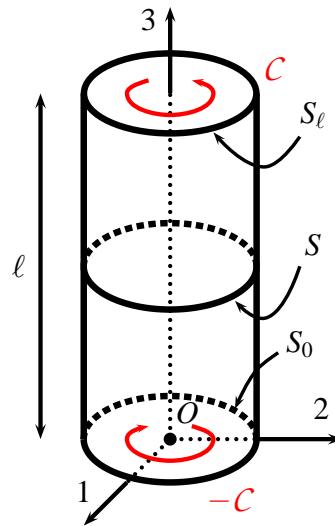


Figure 23.1 : Torsion d'un barreau cylindrique : schéma de principe.

### 23.2.1 Méthode des déplacements

Bien que le problème ait été posé en terme d'efforts par l'intermédiaire du moment  $\mathcal{C}$ , c'est vers une solution par la méthode des déplacements que l'on se tourne ici. En effet, on imagine que l'application du moment d'axe 3 va provoquer une rotation des sections par rapport à cet axe.

Proposer, dans le contexte infinitésimal, une cinématique dictant une rotation relative d'une section de cote donnée à la suivante. On supposera que la section  $S_0$  ne bouge pas tandis que la section  $S_\ell$  subit la rotation maximale.

- Si l'on suppose qu'une section de cote  $X_3 = Z$  subit une rotation  $\underline{Q}$  d'axe  $\underline{e}_3$  et d'angle  $\theta$ , chaque point de cette section aura pour nouvelle position :

$$\underline{x} = \underline{X}_Z + \underline{Q} \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) \quad (23.14)$$

On calcule le déplacement associé :

$$\underline{u}(\underline{X}) = (\underline{Q} - \underline{1}) \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) \quad (23.15)$$

Le centre de rotation  $\underline{X}_Z = Z\underline{e}_3$  ne jouera en fait aucun rôle dans la suite. Dans le contexte infinitésimal, la rotation  $\underline{Q}$  peut être remplacée par son vecteur axial  $\overset{\times}{\underline{Q}}$  tel que

$$\underline{u}(\underline{X}) = (\underline{Q} - \underline{1}) \cdot (\underline{X} - \underline{X}_Z) = \overset{\times}{\underline{Q}} \wedge (\underline{X} - \underline{X}_z) \quad (23.16)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 - X_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta X_2 \\ \theta X_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23.17)$$

Les matrices sont écrites dans le système de coordonnées cartésiennes orthonormées dont la base figure sur la figure 23.1. L'angle  $\theta$  est nul en  $X_3 = 0$  et maximal en  $X_3 = \ell$ . La fonction  $\theta(X_3)$  peut être intuitivement supposée monotone croissante. La nécessité d'une dépendance linéaire ou affine s'établit en calculant successivement déformations et contraintes. Les conditions d'équilibre local  $\sigma_{1j,j} = 0$  et  $\sigma_{2j,j} = 0$  conduisent à l'équation différentielle  $\theta''(X_3) = 0$ , de sorte que

$$\theta = \alpha X_3 \quad (23.18)$$

Le coefficient  $\alpha$  désigne un angle imposé par unité de longueur.

L'expérience courante nous indique, par exemple lors de la torsion de barre à section rectangulaire (tordre une gomme...), que, si chaque section subit effectivement une rotation, on ne peut exclure un gondolement ou gauchissement de la surface venant se superposer à la rotation : une section plane ne le reste pas nécessairement. On se propose donc de tester le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (23.19)$$

où le déplacement  $u_3$  correspond à un gauchissement de la surface  $X_3 = Cste$  après déformation. La fonction  $\varphi$  inconnue est la fonction de gauchissement. Le gradient de la

transformation vaut

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha X_3 & -\alpha X_2 \\ \alpha X_3 & 1 & \alpha X_1 \\ \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} & \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (23.20)$$

Il se décompose en une déformation et une rotation infinitésimales :

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) \\ \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) & \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (23.21)$$

$$[\underline{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha X_3 & -\frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + X_2 \right) \\ \alpha X_3 & 0 & \frac{\alpha}{2} \left( X_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} \right) \\ \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} + X_2 \right) & \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} - X_1 \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (23.22)$$

La déformation proposée ne s'accompagne d'aucun changement de volume puisque la trace de  $\underline{\varepsilon}$  est nulle. La barre ne s'allonge pas lorsqu'on la tord puisque  $\varepsilon_{33} = 0$ .

#### Evaluation des contraintes et des conditions d'équilibre

Dans le cadre de l'élasticité isotrope linéarisée, évaluer les contraintes engendrées par les déformations calculées précédemment. A quelles conditions portant sur la fonction de gauchissement, l'équilibre statique est-il réalisé ?

► Comme la trace de la déformation est nulle, la loi d'élasticité isotrope linéarisée à partir d'un état naturel (8.44), s'écrit :

$$\underline{\sigma} = 2\mu \underline{\varepsilon}, \quad [\underline{\sigma}] = \mu \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 & \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23.23)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement. En l'absence de forces volumiques et dans le cas statique, la divergence du tenseur des contraintes est nulle. En coordonnées cartésiennes orthonormées, cette condition s'écrit  $\sigma_{ij,j} = 0$ . La seule équation pertinente en tenant compte de la forme trouvée (23.23) pour le tenseur des contraintes, est

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \quad (23.24)$$

En substituant les composantes trouvées, on obtient la condition :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2} = \Delta \varphi = 0, \quad \forall \underline{X} \in S \quad (23.25)$$

pour toute section  $S$ . La fonction de gauchissement doit donc être harmonique pour que

la solution en déplacements proposée soit recevable.

La fonction de gauchissement doit en outre permettre de satisfaire les conditions à la frontière (23.11) à (23.13).

On commence par la condition de bord libre (23.11) que l'on écrit sur la frontière  $\Gamma$  d'une section courante  $S$  et de vecteur normal  $[n_1 \ n_2 \ 0]^T$  :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{t}}^d &= \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2)\underline{\mathbf{e}}_3 \\ &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1}n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}n_2 - X_2n_1 + X_1n_2 \right) \underline{\mathbf{e}}_3 = 0\end{aligned}\quad (23.26)$$

On aboutit à la condition supplémentaire portant sur  $\varphi$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}n_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}n_2 = \nabla \varphi \cdot \underline{\mathbf{n}} = \frac{d\varphi}{dn} = n_1X_2 - n_2X_1, \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Gamma \quad (23.27)$$

Remarquer que  $n_1X_2 - n_2X_1 = (\underline{\mathbf{n}} \wedge \underline{\mathbf{X}}) \cdot \underline{\mathbf{e}}_3$ . Au passage, on a reconnu le flux du gradient de  $\varphi$  à travers  $\Gamma$ , appelée aussi dérivée normale de  $\varphi$ , en suivant la définition (23.4). La condition de bord libre impose donc le flux de  $\varphi$ . Sur une section courante  $S$ , la fonction de gauchissement est donc solution de l'équation (23.25) avec la condition de flux imposé (23.27) sur son contour  $\Gamma$ . On reconnaît un problème de Neumann, du type (23.2), avec

$$q^d = n_1X_2 - n_2X_1, \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \in \Gamma \quad (23.28)$$

On sait qu'une condition nécessaire à l'existence d'une solution est que le flux total de la donnée  $q^d$  soit nul, i.e. la condition (23.5). Il faut vérifier cette condition dans le cas du flux (23.28). Le contour  $\Gamma$  admet une paramétrisation  $X_1(s), X_2(s)$  et un vecteur normal dans le plan  $(X_1, X_2)$  égal à  $[X'_2 \ -X'_1 \ 0]^T$ , ce qui permet d'évaluer l'intégrale

$$\int_{\Gamma} (n_1X_2 - n_2X_1) ds = \int_{\Gamma} \left( \frac{dX_2}{ds}X_2 + \frac{dX_1}{ds}X_1 \right) ds = \int_{\Gamma} (X_1 dX_1 + X_2 dX_2) = 0 \quad (23.29)$$

La dernière intégrale est effectivement nulle sur un contour fermé. D'après le préliminaire mathématique 23.1.2, la réalisation de la condition (23.5) garantit l'existence de la fonction de gauchissement et son unicité à une constante additive près correspondant à une translation selon  $\underline{\mathbf{e}}_3$ , qu'il reste à fixer.

Il reste à évaluer les conditions imposées sur les surfaces  $S_0$  et  $S_{\ell}$ , à savoir la résultante nulle et le moment appliqué  $C$ . Ce point fait l'objet de la section suivante.

### 23.2.2 Force résultante

On évalue d'abord la résultante des efforts induits par les contraintes calculées précédemment :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{R}} &= \int_{S_{\ell}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_3 dS \\ &= \mu\alpha \left( \int_{S_{\ell}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) dS \right) \underline{\mathbf{e}}_1 + \mu\alpha \left( \int_{S_{\ell}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) dS \right) \underline{\mathbf{e}}_2\end{aligned}\quad (23.30)$$

Le résultat semble dépendre de la fonction de gauchissement et donc de la géométrie particulière de la section. En fait, on va montrer qu'il n'en est rien. Pour le voir, on part

de la condition (23.27) portant sur  $\varphi$  établie plus haut et remplie sur  $\Gamma$  :

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) n_1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) n_2 = 0 \quad (23.31)$$

On multiplie l'expression précédente par  $X_1$  et on l'intègre sur le contour  $\Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} \left( X_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) n_1 + X_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) n_2 \right) ds = 0 \quad (23.32)$$

$$\int_{\Gamma} \left( \underbrace{X_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right)}_Q dX_2 - \underbrace{X_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right)}_P dX_1 \right) = 0 \quad (23.33)$$

Les termes  $P$  et  $Q$  ont été soulignés dans l'expression précédente afin de pouvoir appliquer le théorème de Green (23.9). L'expression précédente est donc égale à

$$\int_S \left( \frac{\partial}{\partial X_1} \left( X_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left( X_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) \right) \right) dS = 0 \quad (23.34)$$

$$\int_S \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) + X_1 \left( \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2}}_{=0 \text{ d'après (23.25)}} \right) \right) dS = 0 \quad (23.35)$$

On en déduit que

$$\int_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) dS = 0, \quad \int_S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) dS = 0 \quad (23.36)$$

La première équation (23.36)<sub>1</sub> résulte de la chaîne de calculs (23.35). La deuxième équation (23.36)<sub>2</sub> est le résultat que l'on obtient en suivant le même démarche mais en multipliant l'équation (23.31) par  $X_2$  au lieu de  $X_1$ . Les résultats (23.36) permettent de conclure que, pour toute fonction de gauchissement  $\varphi$  vérifiant (23.25) et (23.27), la résultante (23.30) des efforts sur la section  $S_\ell$  est nulle. Il en va de même pour la résultante sur la section  $S_0$ . Ces résultats sont compatibles avec le chargement imposé (23.12) et (23.13).

### 23.2.3 Rigidité de torsion

Il reste à calculer le moment résultant des forces sur la section  $S_\ell$  par rapport au point  $O$  :

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \int_{S_\ell} \underline{\mathbf{OM}} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) dS \quad (23.37)$$

$$\begin{aligned}
[\underline{\mathbf{M}}_O] &= \mu\alpha \int_{S_\ell} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \ell \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1 \\ 0 \end{bmatrix} dS \\
&= \mu\alpha \int_{S_\ell} \begin{bmatrix} -\ell(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) \\ \ell(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \\ X_1(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \end{bmatrix} dS \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu\alpha \int_{S_\ell} \left( X_1(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \end{bmatrix} \quad (23.38)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le résultat (23.36). Le moment résultant est donc porté par  $\underline{\mathbf{e}}_3$ . On peut l'identifier au couple imposé à  $S_\ell$ , à savoir  $\mathcal{C} \underline{\mathbf{e}}_3$  d'après (23.12) :

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha, \quad J := \int_S \left( X_1(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \quad (23.39)$$

La formule (23.39) relie le couple imposé  $\mathcal{C}$  à l'angle de rotation de section par unité de longueur axiale  $\alpha$ , par le biais de la **rigidité de torsion**  $\mu J$ . La rigidité de torsion dépend du module de cisaillement du matériau et de la géométrie de la section.  $J$  est appelé **inertie de torsion** de la section.

Une autre expression du moment d'inertie  $J$  peut être obtenue en reprenant la démarche mise en œuvre pour le calcul de la force résultante au paragraphe 23.2.2. On multiplie cette fois l'expression (23.31) par  $\varphi$ , on l'intègre sur le contour  $\Gamma$  et on applique le théorème de Green. On peut alors montrer que

$$\begin{aligned}
J &= \int_S \left( X_1(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1) - X_2(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2) \right) dS \\
&= \int_S \left( (\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2)^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1)^2 \right) dS \quad (23.40)
\end{aligned}$$

Cette expression met en valeur le fait que  $J$  soit positif quelle que soit la forme de la section non réduite à un point. Un couple  $\mathcal{C} > 0$  positif selon  $Z$  implique donc nécessairement une rotation des sections dans le même sens d'après (23.39), ce qui est conforme à l'intuition.

#### 23.2.4 Méthode des contraintes

Le problème de la torsion d'une barre cylindrique a été résolu dans les sections précédentes par la méthode des déplacements. Il est en fait tout aussi légitime de l'aborder du point de vue des contraintes. En effet, le moment de torsion sur une extrémité de la barre résulte de l'existence de contributions de contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$ .

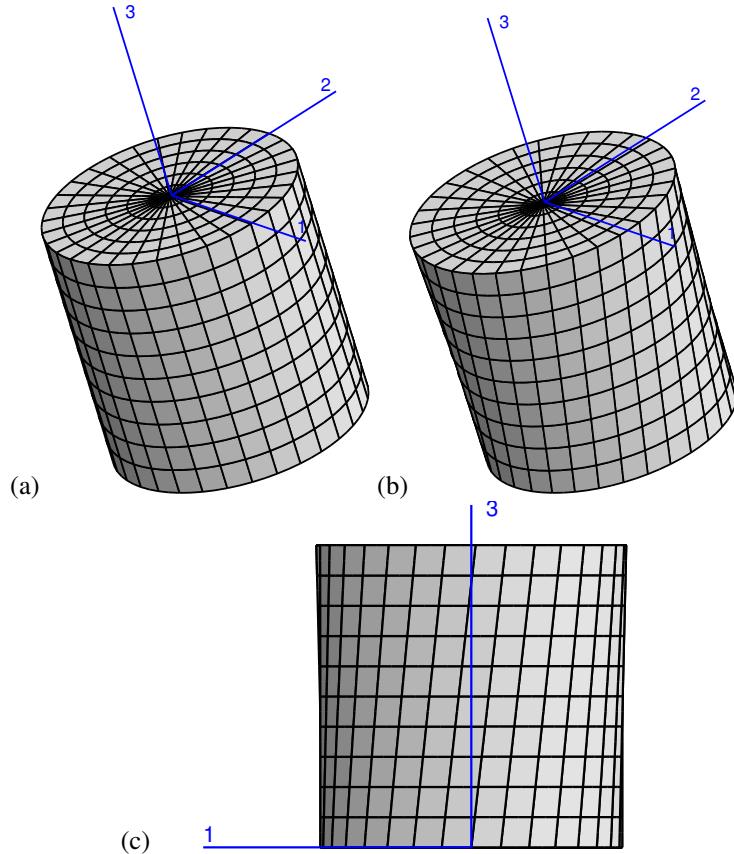


Figure 23.2 : Déformée d'une barre cylindrique à section circulaire ( $R = 1 \text{ mm}$ ,  $\ell = 2 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 10^\circ \text{mm}^{-1}$ ) : (a) état initial, (b) vue 3D de la déformée, (c) vue selon l'axe 2.

Cette remarque conduit à rechercher des contraintes de la forme :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (23.41)$$

Les équations d'équilibre indiquent que  $\sigma_{13,3} = \sigma_{23,3} = 0$  de sorte que ces contraintes de cisaillement sont des fonctions de  $X_1$  et  $X_2$ . Elles vérifient également

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial X_1} (\sigma_{31} + g(X_2)) = \frac{\partial}{\partial X_2} (-\sigma_{32} + f(X_1))$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables arbitraires. L'équation précédente montre que la forme différentielle  $\alpha(X_1, X_2) = (-\sigma_{32} + f(X_1))dX_1 + (\sigma_{31} + g(X_2))dX_2$  est exacte

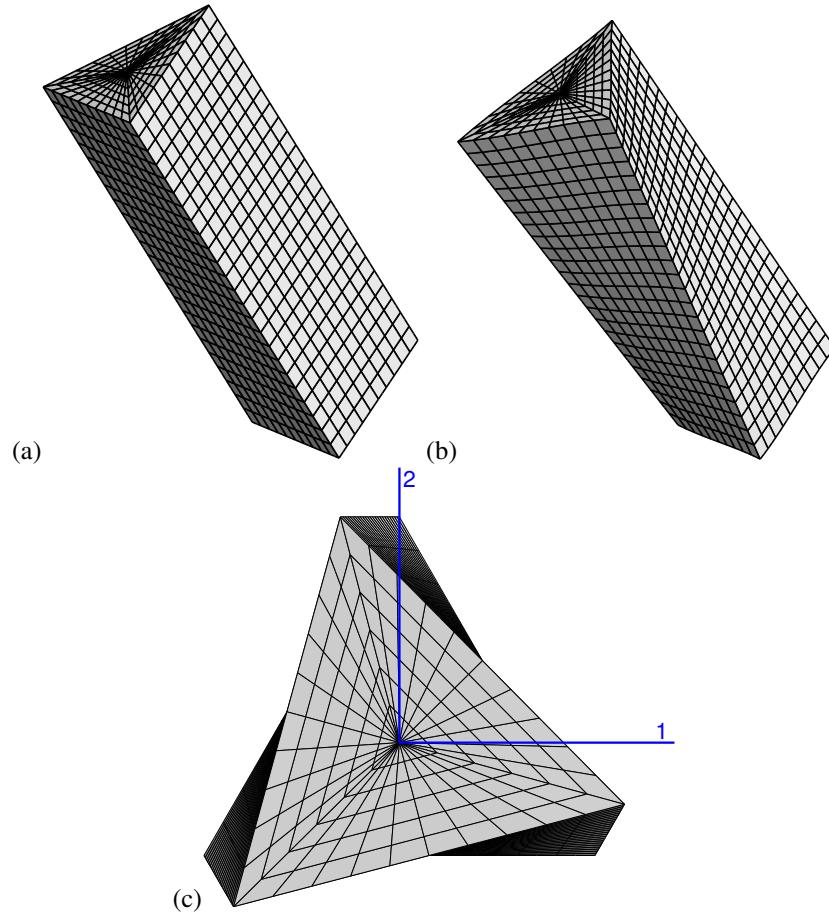


Figure 23.3 : Etat déformé d'une barre cylindrique à section triangulaire (côté  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $\ell = 4 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 8^\circ \text{ mm}^{-1}$ ) : (a) état initial, (b) état déformé, (c) vue de dessus (selon l'axe de torsion).

sur  $S$ . Il existe donc une fonction  $\Psi(X_1, X_2)$  telle que

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - g(X_2), \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} + f(X_1) \quad (23.42)$$

Les équations de compatibilité appliquées aux déformations  $\varepsilon_{31}$  et  $\varepsilon_{32}$  conduisent alors aux relations supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{31,22} - \sigma_{32,12} &= 0 = \frac{\partial}{\partial X_2} (\sigma_{31,2} - \sigma_{32,1}) = \frac{\partial}{\partial X_2} (\Delta\Psi - f' - g') \\ \sigma_{31,12} - \sigma_{32,11} &= 0 = \frac{\partial}{\partial X_1} (\sigma_{31,2} - \sigma_{32,1}) = \frac{\partial}{\partial X_1} (\Delta\Psi - f' - g') \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe une constante  $A$  telle que  $\Delta\Psi = -2A + f' + g'$ .

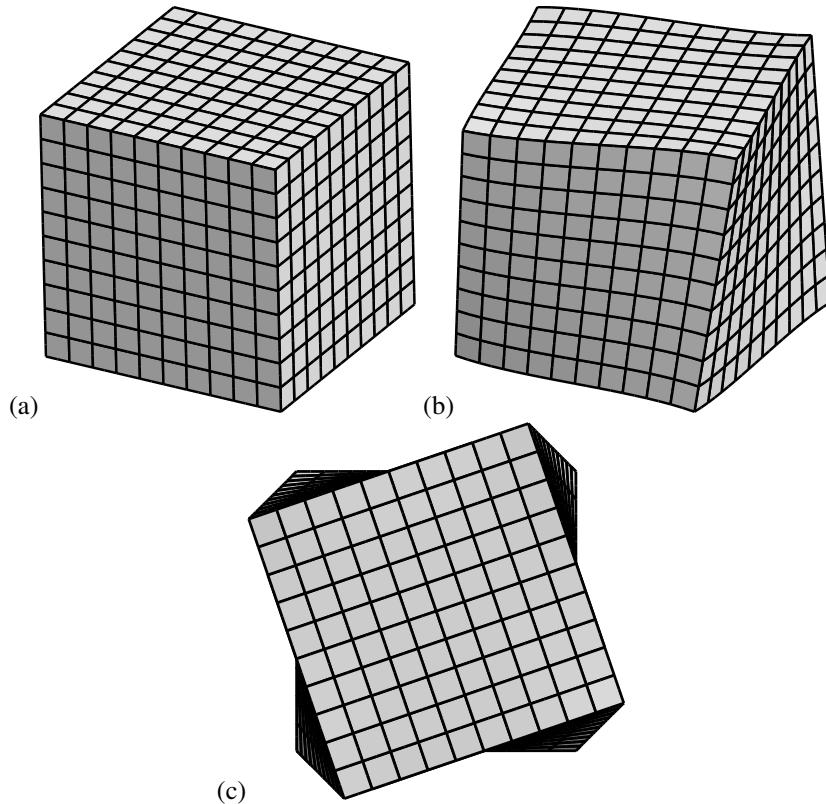


Figure 23.4 : Etat déformé d'une barre cylindrique à section carrée ( $côté a = 2 \text{ mm}$ ,  $\ell = 2 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 5^\circ \text{mm}^{-1}$ ) : (a) état initial, (b) état déformé, (c) vue de dessus (selon l'axe de torsion).

La condition au bord  $\Gamma$  de chaque section  $S$  s'écrit :

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0 \implies \sigma_{31}dX_2 - \sigma_{32}dX_1 = 0$$

Lorsque l'on prend  $f = g = 0$ , cette condition s'écrit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} dX_2 = d\Psi = 0$$

ce qui traduit que  $\Psi$  est constante le long du contour. La valeur de cette constante n'a pas d'importance car elle n'influence pas la valeur des contraintes. La fonction  $\Psi$  est alors solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \Psi = -2A & \text{sur } S \\ \Psi(\underline{X}) = \text{Cste} & \forall \underline{X} \in \Gamma \end{cases} \quad (23.43)$$

Il est possible de se ramener à un problème de Dirichlet (23.1) et donc à rechercher une fonction harmonique  $\psi$ , en utilisant les fonctions

$$f(X_1) = AX_1, \quad g(X_2) = AX_2$$

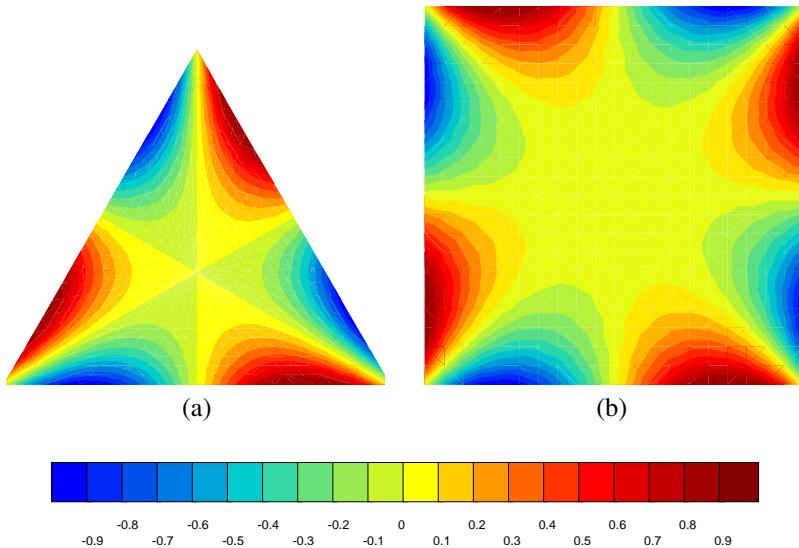


Figure 23.5 : Cartes de déplacement  $u_3$  normalisé par la valeur maximale pour une barre à section triangulaire (a) et carrée (b).

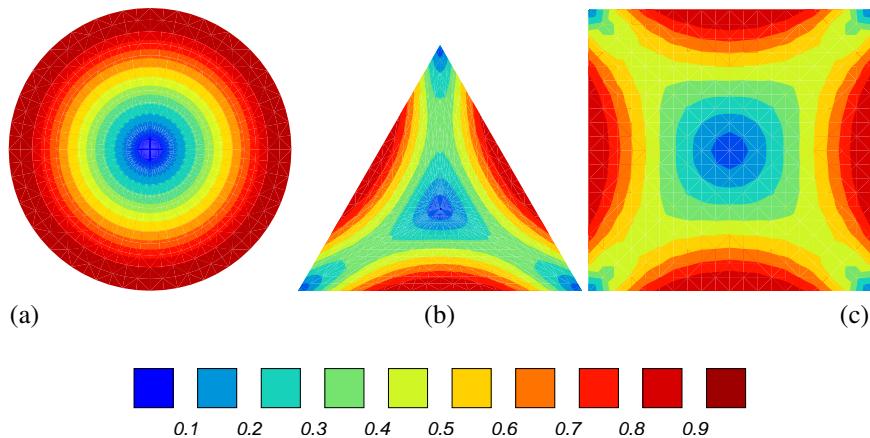


Figure 23.6 : Cartes de contrainte de cisaillement normalisée par la valeur maximale pour une barre à section circulaire (a), triangulaire (b) et carrée (c).

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{sur } S \\ \psi(\underline{x}) = \text{Cste} + \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) & \forall \underline{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (23.44)$$

Les deux fonctions précédentes sont liées par la relation :

$$\Psi = A(\psi - (X_1^2 + X_2^2)/2)$$

Les contraintes sont

$$\sigma_{31} = A \left( \frac{\partial \psi}{\partial X_2} - X_2 \right), \quad \sigma_{32} = -A \left( \frac{\partial \psi}{\partial X_1} - X_1 \right)$$

La constante  $A$  est directement liée au moment de torsion appliqué :

$$AJ = \mathcal{C}, \quad J = \int_{S_l} (X_1^2 + X_2^2 - X_1 \frac{\partial \psi}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2}) dS \quad (23.45)$$

La définition du moment d'inertie de torsion  $J$  est identique à celle déjà établie sous la forme (23.39). L'égalité de ces expressions apparaîtra dans le paragraphe suivant où la relation (23.47) entre  $\psi$  et la fonction de gauchissement de torsion  $\varphi$  sera établie.

#### Détermination des déplacements

La procédure systématique de construction du champ de déplacement peut être appliquée. Elle fait appel au calcul des rotations infinitésimales  $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$  :

$$\begin{aligned} \omega_{12,1} &= 0, \quad \omega_{12,2} = 0, \quad \omega_{12,3} = \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1} = -\frac{A}{\mu} \\ \omega_{23,1} &= -\varepsilon_{31,2} = \frac{A}{2\mu} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2^2} + 1 \right), \quad \omega_{23,2} = -\varepsilon_{32,2} = \frac{A}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2 \partial X_1}, \quad \omega_{23,3} = 0 \\ \omega_{31,1} &= \varepsilon_{31,1} = \frac{A}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2 \partial X_1}, \quad \omega_{31,2} = \varepsilon_{32,1} = -\frac{A}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2} - 1 \right), \quad \omega_{31,3} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\omega_{12} = -\frac{A}{\mu} X_3, \quad \omega_{23} = \frac{A}{2\mu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X_1} + X_1 \right), \quad \omega_{31} = \frac{A}{2\mu} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X_2} + X_2 \right) \quad (23.46)$$

à trois constantes près. Le fait que  $\psi$  soit harmonique a été utilisé dans l'intégration. Le gradient du déplacement s'obtient ensuite :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 0, \quad u_{1,2} = \omega_{12} = -\frac{A}{\mu} X_3, \quad u_{1,3} = \varepsilon_{13} - \omega_{31} = -\frac{A}{\mu} X_2 \\ u_{2,1} &= -\omega_{12} = \frac{A}{\mu} X_3, \quad u_{2,2} = 0, \quad u_{2,3} = \varepsilon_{23} + \omega_{23} = \frac{A}{\mu} X_1 \\ u_{3,1} &= \varepsilon_{31} + \omega_{31} = \frac{A}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial X_2}, \quad u_{3,2} = \varepsilon_{32} + \omega_{32} = -\frac{A}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial X_1}, \quad u_{3,3} = 0 \end{aligned}$$

La forme différentielle  $\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial X_2} dX_1 - \frac{\partial \psi}{\partial X_1} dX_2 = a dX_1 + b dX_2$  est telle que

$$\frac{\partial a}{\partial X_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2} = \frac{\partial b}{\partial X_1}$$

Il existe donc une fonction  $\varphi(X_1, X_2)$  telle que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} = \frac{\partial \psi}{\partial X_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial X_1} \quad (23.47)$$

La fonction  $\varphi$  est par conséquent harmonique. Le champ de déplacement s'intègre alors sous la forme (23.19) avec  $\alpha = A/\mu$ . La fonction  $\varphi$  est la fonction de gauchissement de torsion.

### 23.2.5 Barre de section circulaire

Lorsque la section de la barre est un disque de rayon  $R$ , le flux de la fonction de gauchissement donné par (23.28) devient :

$$q^d = n_1 X_2 - n_2 X_1 = \frac{1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} (X_1 X_2 - X_2 X_1) = 0 \quad (23.48)$$

Les solutions du problème de Neumann avec un flux imposé nul sont les fonctions constantes. En effet,  $\varphi = 0$  est à laplacien nul et à flux nul, c'est donc une solution du problème de Neumann. Les autres en diffèrent par une constante. On prend ici

$$\varphi_{disque} = 0 \quad (23.49)$$

Il n'y a donc pas de gauchissement des sections perpendiculaires à l'axe de torsion : elles restent planes. Les champs de déplacement, contraintes et déformations donnés par (23.19), (23.23) et (23.21) s'écrivent plus simplement en coordonnées cylindriques :

$$\underline{u} = \alpha Z r \underline{e}_\theta \quad (23.50)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2} r (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (23.51)$$

$$\underline{\sigma} = \mu \alpha r (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta) \quad (23.52)$$

$$\mathcal{C} = \mu J \alpha, \quad \text{avec} \quad J = \frac{\pi R^4}{2} \quad (23.53)$$

Seules les composantes  $u_\theta, \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{z\theta}, \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}$  sont actives. Elles sont linéaires en  $r$  et, comme prévu, indépendantes de  $Z$ . Les contraintes sont nulles sur l'axe de torsion. Pour un même angle de rotation  $\alpha$  par unité de longueur, la déformation est d'autant plus faible que le fil est mince de même donc que la contrainte. C'est pourquoi il est plus simple de tordre des fils que des barres ! Si le fil est élancé, les déplacements peuvent être grands alors même que les déformations restent faibles.

Le vecteur contrainte sur  $S_\ell$  correspond à une densité d'efforts purement tangentiels qui engendrent le moment de torsion  $\mathcal{C}$  :

$$\underline{t}^d = \mu \alpha r \underline{e}_\theta \quad (23.54)$$

L'état déformé d'une barre de section circulaire est illustré sur la figure 23.2. On voit en particulier que les droites  $X = Y = Cste$  initialement verticales se transforment en droites inclinées.

Plus généralement, la torsion de barres à section triangulaire et carrée est illustrée par les figures 23.3 et 23.4. Contrairement au cas de la section circulaire, les sections triangulaires ou carrées ne restent pas planes. La fonction de gauchissement n'est pas nulle. Le champ de déplacement  $u_z$  normalisé est présenté sur la figure 23.5. La fonction de gauchissement est nulle au centre mais ondule près des bords. Les figures 23.3(c) et 23.4(c) montrent par contre que, vues de dessus (selon  $\underline{e}_z$ ), les sections gardent leur forme et ne subissent qu'une rotation, conformément au champ (23.19).

Les champs de contraintes  $\sigma_{\theta z}$  sont illustrées par les figures 23.6 pour les trois types de

section. Les résultats présentés ici pour les sections triangulaires et carrées ont été obtenus de manière numérique par la méthode des éléments finis.

#### *Respect du contexte infinitésimal*

Les analyses précédentes supposent que les composantes des tenseurs de déformation (23.21) et rotation (23.22) restent infinitésimales. Dans le cas d'une barre de section circulaire ces résultats se traduisent par

$$|\alpha|R \ll 1, \quad |\alpha|\ell \ll 1 \quad (23.55)$$

La seconde condition faisant intervenir la longueur de la barre est la plus stricte et requiert que l'angle de torsion imposé aux extrémités soit suffisamment petit.

#### *Cas d'un tube mince*

La solution établie pour une barre à section circulaire est en fait valable aussi pour une tube d'épaisseur  $e$  quelconque. En effet, avec le champ de contraintes obtenu (23.23), le vecteur contrainte est nul en tout point d'une surface  $r = r^d$  donnée, de sorte que la solution s'applique directement à un tube. L'inertie de torsion pour le tube de rayon intérieur  $r_i$  et de rayon extérieur  $r_e$  vaut

$$J_{tube} = \pi \frac{r_e^4 - r_i^4}{2} \quad (23.56)$$

Lorsque, de plus, le tube est mince,  $r \simeq R$  si bien que contraintes et déformations peuvent être considérées comme constantes dans l'épaisseur du tube. Les champs de contraintes et de déformations sont quasi-homogènes. L'essai de torsion devient alors un bon candidat pour la caractérisation des matériaux puisque l'on recherche des états homogènes, autant que faire se peut. L'essai de torsion sur tube mince est une manière commode de réaliser pratiquement les conditions de glissement simple (dans le plan  $(\underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ ), qui sont difficiles à réaliser sur des tôles, en raison d'effets de bord plus marqués.

L'essai de torsion sur tube ou sur barre permet de déterminer le module de cisaillement  $\mu$  du matériau, tout comme l'essai de traction donne accès au module d'Young. Toutefois les précisions obtenues sur ces modules par ces essais de caractérisation statiques sont nettement moins bonnes qu'avec des essais dynamiques (vibrations). L'intérêt de l'essai sur tube mince apparaît plutôt lorsque l'on rentre dans le domaine de plasticité, problème abordé dans la section suivante.

### 23.3 Au-delà du régime élastique

#### 23.3.1 Rupture fragile d'une barre de section circulaire

Un exemple de rupture fragile d'une éprouvette métallique en torsion a été donné sur la figure 4.4 au chapitre 4 introduisant les contraintes. On demande d'expertiser cette rupture.

► La section de la partie utile de l'éprouvette est circulaire. Lors de l'essai de torsion, la contrainte maximale (en valeur absolue), dans la zone utile de l'éprouvette, est atteinte au bord  $r = R$  avec la valeur  $|\sigma_{\theta z}|^{max} = \mu |\alpha| R$ . L'état de contrainte est de cisaillement simple (cf. table 4.3). Les contraintes principales sont donc  $\sigma_{\theta z}, -\sigma_{\theta z}$ . Les directions principales sont

$$(\underline{e}_\theta + \underline{e}_z)/\sqrt{2}, \quad (\underline{e}_\theta - \underline{e}_z)/\sqrt{2}$$

Le critère de rupture fragile décrit au paragraphe 4.4.3 stipule que la rupture a lieu lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique  $\sigma_{rupt}$ . Pour la torsion de la barre, la rupture se produit donc pour :

$$|\alpha| = \alpha_{rupt} := \frac{\sigma_{rupt}}{\mu R} \quad (23.57)$$

On constate souvent en rupture fragile que la surface de rupture est perpendiculaire à la direction principale correspondant à la contrainte principale maximale. Dans le cas présent, ces directions sont à  $45^\circ$  des vecteurs  $e_\theta$  et  $e_z$ . Cela explique la surface de rupture hélicoïdale<sup>2</sup> observée sur la figure 4.4.

### 23.3.2 Limite d'élasticité d'une barre à section circulaire en torsion

Si le matériau est ductile, c'est un critère de plasticité qu'il faut invoquer pour prévoir la limite du fonctionnement élastique de la barre en torsion. Le critère de Tresca (4.62) est un critère classique de plasticité. Il porte sur la différence maximale entre les contraintes principales. Dans le cas de la barre de section circulaire en torsion, le critère devient donc

$$|\sigma_{\theta z}|^{max} = \frac{\sigma_0}{2} \quad (23.58)$$

où  $\sigma_0$  est la limite d'élasticité en traction. La contrainte est maximale en  $r = R$ , et c'est à cet endroit que la plasticité apparaît en premier. Ainsi, le fonctionnement de la barre reste élastique tant que :

$$|\alpha| < \frac{\sigma_0}{2\mu R} \quad (23.59)$$

Le critère peut aussi s'énoncer en fonction du couple imposé via l'équation (23.39) :

$$|\mathcal{C}| < \mathcal{C}^{max} := \frac{J\sigma_0}{2R} = \frac{\pi R^3 \sigma_0}{4} \quad (23.60)$$

Que deviennent ces valeurs critiques si l'on utilise le critère de von Mises (4.63) ?

### 23.4 Torsion de barres à sections elliptiques et triangulaires

L'objectif de cette partie est d'apporter des compléments à l'analyse de la torsion de barres cylindriques de section quelconque, cf. Fig. 23.1, dans le cas de l'élasticité linéarisée et isotrope. Le moment de torsion  $\mathcal{C}$  par rapport à l'axe du cylindre est appliqué aux extrémités de la barre. La section courante et son bord sont respectivement notés  $S$  et  $\Gamma$ . On suppose que  $S$  est simplement connexe, sauf pour la question 23.4.2. On étudie successivement les cas particuliers des sections de formes elliptique et triangulaire et on évalue leur résistance à la rupture et à la plasticité. Ces deux formes particulières sont choisies car il se trouve que les potentiels dont découle la solution ont une forme polynomiale simple de faible degré. Le cas de la section rectangulaire, par exemple, est plus complexe et donne lieu à l'utilisation de séries de Fourier pour expliciter les potentiels, ce qui n'est pas entrepris ici. On renvoie à (Sokolnikoff, 1946; Sadd, 2005) pour l'étude de la torsion des barres à section rectangulaire.

---

2. Cette observation est facile à faire sur une craie à section circulaire après torsion. La craie est un matériau fragile obéissant avec une bonne approximation au critère de rupture en contrainte normale maximale.

### 23.4.1 Préliminaire : retour sur les fonction de gauchissement et fonction de contrainte

On rappelle que l'analyse pionnière de Saint-Venant a montré que le champ de déplacement prend la forme suivante, dans une base cartésienne orthonormée :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases}$$

où le déplacement  $u_3$  correspond à un gauchissement de la surface  $X_3 = Cste$  après déformation. L'inconnue  $\varphi(X_1, X_2)$ , solution d'un problème de Neumann<sup>3</sup> s'appelle *fonction de gauchissement*.

Le coefficient  $\alpha$  désigne la rotation linéaire constante imposée et s'interprète comme le rapport  $\delta\theta/\ell$ , de la rotation relative  $\delta\theta$  appliquée entre les extrémités supérieure et inférieure, sur la longueur  $\ell$  du cylindre. La fonction de gauchissement est harmonique :  $\Delta\varphi = 0$ , où  $\Delta$  désigne ici l'opérateur laplacien.

Rappeler, sans détailler les calculs, les expressions des tenseurs des déformations et des contraintes à l'aide de la fonction de gauchissement  $\varphi$ . Une notation raccourcie est proposée pour désigner les dérivées partielles d'une fonction :

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial\varphi}{\partial X_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}$$

Cette notation sera utilisée dans la suite.

Rappeler de plus les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement sur le contour  $\Gamma$  de la section.

► Ces relations sont

$$\underline{\xi} = \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,1} - X_2)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \frac{\alpha}{2}(\varphi_{,2} + X_1)(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$$

$$\underline{\sigma} = \mu\alpha(\varphi_{,1} - X_2)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \mu\alpha(\varphi_{,2} + X_1)(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$$

La condition de bord libre se traduit par la condition de Neumann

$$\varphi_{,1} n_1 + \varphi_{,2} n_2 = n_1 X_2 - n_2 X_1, \quad \forall \underline{X} \in \Gamma \quad (23.61)$$

où  $n_1, n_2$  désigne les composantes cartésiennes du vecteur normal le long du contour  $\Gamma$  ( $n_3 = 0$ ), tandis que les conditions d'équilibre local statique en l'absence de forces volumiques se traduisent par la condition d'harmonicité de la fonction de gauchissement. Remarquer que la condition (23.61) a pour conséquence que, relativement à une similitude  $\lambda$ ,  $\varphi$  sera en  $\lambda^2$ , i.e. proportionnel à la surface.

On sait également que les contraintes engendrées par le champ des déplacements précédents dérivent d'un potentiel  $\Psi(X_1, X_2)$ , appelé *fonction de contrainte*, solution d'un problème de Dirichlet, sous la forme<sup>4</sup> :

$$\sigma_{31} = \frac{\partial\Psi}{\partial X_2} = \Psi_{,2}, \quad \sigma_{32} = -\frac{\partial\Psi}{\partial X_1} = -\Psi_{,1} \quad (23.62)$$

La fonction de contrainte vérifie l'équation aux dérivées partielles :  $\Delta\Psi = -2\mu\alpha$ , avec des conditions aux limites appropriées sur  $\Gamma$  vues en exercice.

La connaissance des fonctions  $\varphi$  ou  $\Psi$  permet de caractériser complètement la solution

3. cf. le problème aux limites de Neumann (23.6) et (23.28).

4. cf. le problème aux limites de Dirichlet (23.43).

du problème de torsion.

Donner l'expression du cisaillement, c'est-à-dire la norme de la contrainte tangentielle, notée  $\tau$ , agissant en chaque point de la section de normale  $\underline{n} = \underline{e}_3$ , du cylindre considéré, en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

On dit qu'une fonction  $f(X_1, X_2)$  de classe  $C^2$  est *sous-harmonique* si son laplacien est toujours positif :  $\Delta f \geq 0$ . On démontre<sup>5</sup> que toute fonction sous-harmonique sur une région du plan atteint sa (ses) valeur(s) maximale(s) sur le bord de cette région. En déduire que le cisaillement est maximal sur des points du contour  $\Gamma$  (on pourra s'aider de la fonction  $\tau^2$ ).

► Le vecteur-contrainte en chaque point de la section  $S$  a pour composante  $(\sigma_{31}, \sigma_{32}, 0)$ . La contrainte normale est donc nulle et la contrainte tangentielle vaut  $\tau = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2}$ . Calculons le laplacien de  $\tau^2 = \Psi_{,1}^2 + \Psi_{,2}^2$  :

$$\begin{aligned} (\tau^2)_{,1} &= 2\Psi_{,1}\Psi_{,11} + 2\Psi_{,2}\Psi_{,21}, \quad (\tau^2)_{,2} = 2\Psi_{,1}\Psi_{,12} + 2\Psi_{,2}\Psi_{,22} \\ (\tau^2)_{,11} &= 2\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,2}\Psi_{,211} + 2\Psi_{,11}^2 + 2\Psi_{,1}\Psi_{,111} \\ (\tau^2)_{,22} &= 2\Psi_{,22}^2 + 2\Psi_{,2}\Psi_{,222} + 2\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,1}\Psi_{,122} \end{aligned}$$

Comme  $\Psi_{,11} + \Psi_{,22} = -2\mu\alpha$ , on voit que  $\Psi_{,112} = -\Psi_{,111}$  et que  $\Psi_{,221} = -\Psi_{,222}$ . Le calcul du laplacien du cisaillement au carré se simplifie alors :

$$\Delta\tau^2 = 2\Psi_{,11}^2 + 4\Psi_{,12}^2 + 2\Psi_{,22}^2 \geq 0$$

Le carré du cisaillement est donc une fonction sous-harmonique, ce qui implique que le cisaillement trouve son maximum sur le contour  $\Gamma$ .

Si le contour est convexe, ce maximum est atteint aux points du contour les plus proches du centre géométrique de la section.

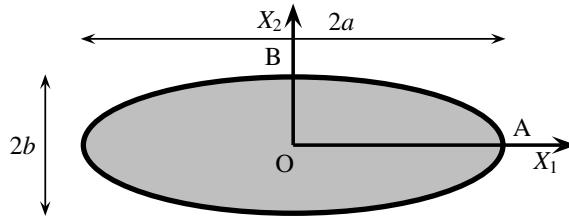


Figure 23.7 : Géométrie de la section elliptique d'une barre : repère, grand et petit axes.

### 23.4.2 Torsion d'une barre de section elliptique

La section de la barre, représentée sur la figure 23.7, est une ellipse dont le contour  $\Gamma$  a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1 \quad (23.63)$$

où  $2a$  et  $2b$  désignent respectivement le grand axe et le petit axe de l'ellipse. Les axes du repère coïncident avec les axes de symétrie de l'ellipse et l'origine est prise au centre.

5. Voir (Sokolnikoff, 1946) (p. 117) pour la preuve.

### Détermination de la fonction de gauchissement

Montrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 permet de remplir toutes les conditions du problème pour une section elliptique de barre en torsion :

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2 \quad (23.64)$$

On déterminera les valeurs des coefficients qui permettent de satisfaire toutes les conditions requises pour  $\varphi$ .

Montrer finalement que la fonction de gauchissement se met sous la forme

$$\varphi^\infty(X_1, X_2) = -kX_1X_2 \quad (23.65)$$

et on exprimera  $k$  en fonction de  $a$  et  $b$ , exclusivement.

► La première condition requise est que la fonction soit harmonique ce qui implique  $\Delta\varphi = 2A + 2C = 0$ , si bien que  $A = -C$ .

La fonction doit ensuite satisfaire les conditions aux limites de Neumann (23.61). Pour cela, on note que le vecteur normal en un point de l'ellipse  $\Gamma$  est parallèle au vecteur  $[X_1/a^2 \quad X_2/b^2 \quad 0]$ . La condition (23.61) s'écrit alors :

$$(2AX_1 + 2BX_2) \frac{X_1}{a^2} + (2BX_1 - 2AX_2) \frac{X_2}{b^2} = \frac{X_1X_2}{a^2} - \frac{X_1X_2}{b^2}$$

$$2A\left(\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2}\right) + 2B(a^{-2} + b^{-2})X_1X_2 = X_1X_2(a^{-2} - b^{-2})$$

L'identification fournit  $A = 0$  et  $2B = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$  ce qui conduit à la fonction (23.65) avec

$$k = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Cette relation implique que  $k < 1$ .

### Etude de la section déformée

Donner les conditions à satisfaire pour respecter le contexte infinitésimal.

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section  $S$  le gauchissement est maximal et donner la(les) valeur(s) correspondante(s) en fonction de  $a, b, \alpha$ .

► Maintenant que la fonction de gauchissement est déterminée, le champ de déplacement s'écrit

$$u_1 = -\alpha X_2 X_3, \quad u_2 = \alpha X_1 X_3, \quad u_3 = -k\alpha X_1 X_2$$

Le gradient du champ de déplacement vaut quant à lui

$$\text{Grad } \underline{u} = \alpha X_3 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) + \alpha X_1 (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 - k \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) - \alpha X_2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + k \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1)$$

Le contexte infinitésimal exige que les composantes du gradient du déplacement soient suffisamment petites :

$$|\alpha X_3| \leq |\delta\theta| \ll 1, \quad |\alpha X_1| \leq |\delta\theta| \frac{a}{\ell} \ll 1, \quad |\alpha X_2| \leq |\delta\theta| \frac{b}{\ell} \ll 1$$

$$|k\alpha X_1| \leq k|\delta\theta| \frac{a}{\ell} \ll 1, \quad |k\alpha X_2| \leq k|\delta\theta| \frac{b}{\ell} \ll 1$$

Dans le cas d'une barre élancée,  $\text{Max}(a, b) \ll \ell$ , la première condition reste la plus limi-

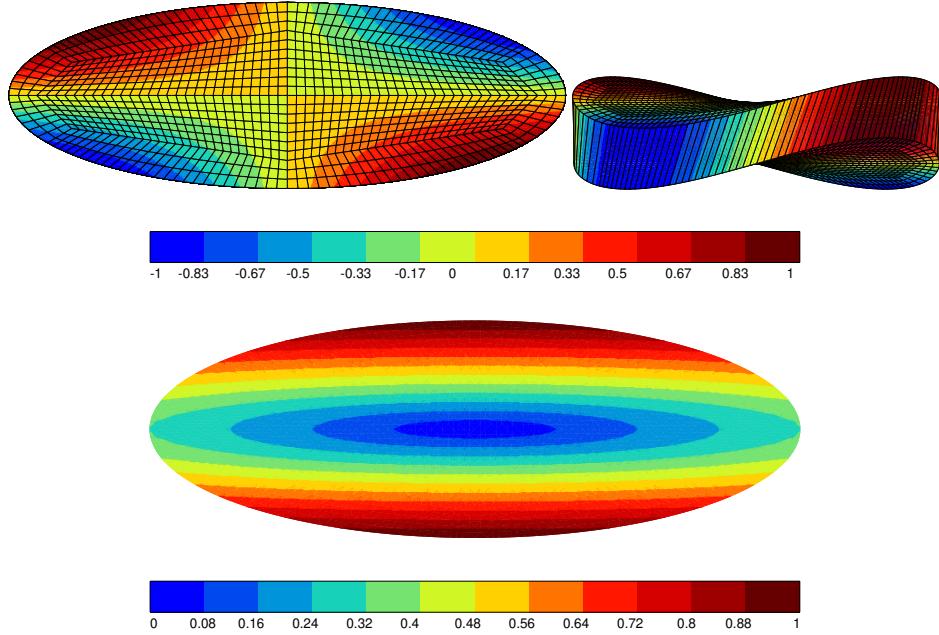


Figure 23.8 : Champ de déplacement  $u_3$  (gauchissement) normalisé par la valeur maximale atteinte : lignes de niveau dans la section elliptique (en haut à gauche) et vue de la déformée d'une tranche de profil (en haut à droite, déplacements exagérés d'un facteur 10). Lignes de niveau de la contrainte équivalente de von Mises normalisée par la valeur maximale (en bas). Le rapport des paramètres de l'ellipse est  $a/b = 3$ .

tante.

La fonction  $X_1 X_2$  est maximale sur le contour  $\Gamma$ . On peut calculer la valeur du carré du déplacement sur le bord de l'ellipse :

$$u_3^2 = k^2 \alpha^2 X_1^2 X_2^2 = k^2 \alpha^2 X_1^2 b^2 \left(1 - \frac{X_1^2}{a^2}\right)$$

Le maximum de cette quantité par rapport à  $X_1^2$  s'obtient en calculant

$$\frac{du_3^2}{dX_1^2} = k^2 \alpha^2 b^2 \left(1 - 2 \frac{X_1^2}{a^2}\right) = 0 \implies X_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad X_2 = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$$

En ces 4 points, on trouve le déplacement hors plan maximal :

$$u_3^{max} = \alpha k \frac{ab}{2} = \alpha \frac{ab(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)}$$

La distribution de  $u_3$  et les extrema associés sont visibles sur la figure 23.8.

### Rigidité de torsion

Exprimer le couple  $\mathcal{C}$  en fonction de l'angle linéique imposé  $\alpha$ .

Pour cela, on pourra établir le résultat ou bien utiliser des résultats connus sur la torsion. Par ailleurs, on admettra (ou on démontrera, bonus !) que les moments quadratiques concernés valent :

$$\int_S X_1^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{a^3 b}{4}, \quad \int_S X_2^2 dX_1 dX_2 = \pi \frac{ab^3}{4} \quad (23.66)$$

Vérifier qu'on retrouve le cas bien connu de la barre à section circulaire comme cas particulier de la formule établie.

Quelle est la valeur du rapport  $b/a$  permettant d'optimiser la rigidité de la barre sous la contrainte d'une surface de la section fixée ? Correspond-elle à un maximum ou à un minimum de la rigidité ?

Commenter la rigidité de torsion d'une barre à section elliptique lorsque le rapport  $b/a$  est petit.

► La relation entre le couple et l'angle linéique est  $\mathcal{C} = \mu J \alpha$  où l'expression de  $J$  est donnée par la formule (23.40) établie dans le chapitre consacré à la torsion des barres :

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right)^2 \right) dS \\ &= (1-k)^2 \int_S X_1^2 dS + (1+k)^2 \int_S X_2^2 dS \\ &= \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Les expressions suivantes ont été utilisées :

$$1+k = \frac{2a^2}{a^2 + b^2}, \quad 1-k = \frac{2b^2}{a^2 + b^2}$$

La rigidité de torsion de la barre est  $\mu J$ . L'optimisation de cette rigidité à aire imposée  $\pi ab = S_0$  est possible en éliminant  $b = S_0/\pi a$  dans l'expression précédent de  $J$  et en dérivant par rapport à  $a^2$ . Cette expression est alors proportionnelle à  $a^2/(S_0^2/\pi^2 + a^4)$  et sa dérivée s'annule en  $a^2 = S_0^2/\pi^2$  qui conduit à  $a = b$ . La fonction précédente est nulle en  $a = 0$  et en  $a = +\infty$  et atteint un maximum à la valeur annoncée. La barre à section circulaire présente donc le maximum de rigidité relative en torsion.

Lorsque le ratio  $b/a = \pi b^2/S_0$  devient faible devant 1, la rigidité élastique se met sous la forme :

$$\mu J = \mu \frac{\pi ab^3}{1 + b^2/a^2} \sim \mu \pi ab^3 = \mu S_0 b^2$$

et devient donc de plus en plus faible. Les barres aplatis sont donc peu rigides élastiquement en torsion, ce que révèle l'expérience de tous les jours.

Le calcul des moments quadratiques introduits peut se faire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_S X_1^2 dX_1 dX_2 &= \int_{-b}^b dX_2 \int_{-a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}} X_1^2 dX_1 = \int_{-b}^b \left[ \frac{X_1^3}{3} \right]_{-a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{X_2^2}{b^2}}} dX_2 \\ &= \frac{2a^3}{3} \int_{-b}^b (1 - \frac{X_2^2}{b^2})^{3/2} dX_2 = \frac{2a^3 b}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^{3/2} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{2a^3 b}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{2a^3 b}{3} \times \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

où le changement de variables  $X_2 = b \sin \theta$  a été utilisé. Un calcul similaire permet d'obtenir le second moment quadratique de la section.

#### *Limite d'élasticité et analyse limite*

Donner les contraintes principales, c'est-à-dire les valeurs propres du tenseur des contraintes, en chaque point de chaque section en fonction de  $\mu, \alpha, k, X_1, X_2$ , puis en remplaçant  $k$  par son expression en fonction de  $a$  et  $b$ .

On suppose que le matériau considéré est isotrope et a pour limite d'élasticité en traction simple la contrainte  $\sigma_0$  déterminée expérimentalement. Au-delà de cette valeur, un matériau fragile rompt tandis qu'un matériau ductile entre dans le régime élasto-plastique et se déforme donc de manière irréversible.

Proposer un critère de rupture fragile et un critère de plasticité.

Appliquer ces critères au cas de la torsion de la barre de section elliptique. Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section elliptique la limite d'élasticité est atteinte en premier.

Donner la valeur critique de l'angle linéique appliqué  $\alpha = \alpha_0$  pour laquelle cette limite d'élasticité est atteinte. Exprimer  $\alpha_0$  en fonction de  $\sigma_0, \mu, a$  et  $b$ , pour les deux critères.

► Le tenseur des contraintes est de la forme  $\underline{\sigma} = \tau_1(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \tau_2(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2)$ , avec  $\tau_1 = \sigma_{13} = -\mu\alpha(1+k)\bar{X}_2$  et  $\tau_2 = \sigma_{23} = \mu\alpha(1-k)\bar{X}_1$ . Il possède la valeur propre intermédiaire  $\sigma_2 = 0$  et les deux autres sont solutions de

$$\text{trace } \underline{\sigma} = 0 = \sigma_1 + \sigma_3, \quad \text{trace } \underline{\sigma}^2 = 2\tau_1^2 + 2\tau_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 = 2\sigma_1^2$$

La plus grande contrainte principale est égale au cisaillement en chaque point de la section :

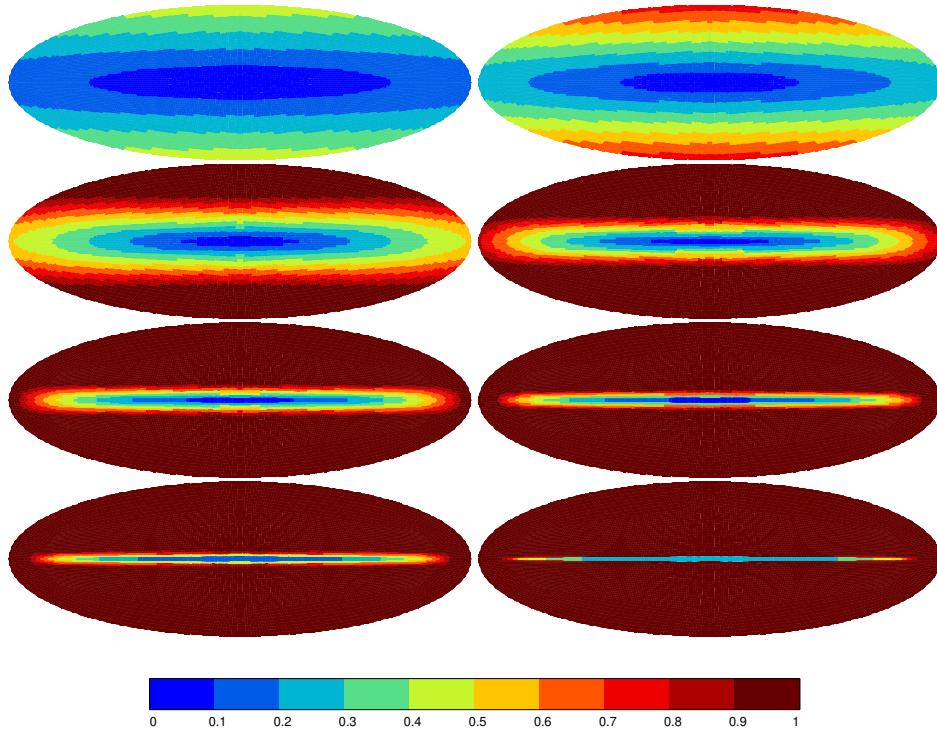
$$\sigma_1 = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} = \mu|\alpha| \sqrt{(1+k)^2 X_2^2 + (1-k)^2 X_1^2} = \frac{2\mu|\alpha|a^2b^2}{a^2+b^2} \sqrt{\frac{X_1^2}{a^4} + \frac{X_2^2}{b^4}}$$

La question préliminaire a permis d'établir que le cisaillement prend ses valeurs maximales sur la frontière  $\Gamma$  de la section. En tenant compte de l'équation de l'ellipse (23.63), la contrainte principale maximale vaut sur le bord  $\Gamma$

$$\sigma_1 = \frac{2\mu|\alpha|b}{a^2+b^2} \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)X_1^2}$$

Cette valeur est maximale en  $X_1 = 0, X_2 = \pm b$  ce qui donne

$$\sigma_1^{\max} = \frac{2ba^2}{a^2+b^2} \mu|\alpha|$$



*Figure 23.9 : Champ de la contrainte équivalente de von Mises divisée par la limite d'élasticité  $\sigma_0$  pour huit valeurs différentes de l'angle linéique de torsion imposée,  $\alpha$ . Cet angle linéique est croissant de la gauche vers la droite et de haut en bas.*

Pour un matériau fragile, le critère de contrainte principale positive maximale conduit à

$$\sigma_1^{\max} = \sigma_0 \implies \mu\alpha_0 = \frac{a^2 + b^2}{2ba^2}\sigma_0$$

Pour un matériau ductile obéissant au critère de Tresca, la limite d'élasticité est atteinte pour

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma_1^{\max} = \sigma_0 \implies \mu\alpha_0 = \frac{a^2 + b^2}{4ba^2}\sigma_0$$

où, on le rappelle,  $\sigma_0$  est la limite d'élasticité en traction simple. Dans le cas d'un critère de von Mises, cela donne

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}} = \sqrt{3}|\sigma_1^{\max}| = \sigma_0 \implies \mu\alpha_0 = \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{3}ba^2}\sigma_0$$

Les critères de Tresca et de von Mises prévoient des limites d'élasticité proches mais distinctes (rapport  $\sqrt{3}/2$ ). L'expérience permettra de décider lequel des deux critères est le mieux adapté pour le matériau considéré.

La figure 23.8 représente les lignes de niveau de la contrainte équivalente de von Mises. On vérifie la position des maxima de cette fonction le long du contour  $\Gamma$ .

La figure 23.9 présente la progression de la zone plastique si l'on continue à charger la barre au-delà de la limite d'élasticité déterminée précédemment dans le cas d'un critère de von Mises. La zone plastique est caractérisée par une valeur de la contrainte équivalente de von Mises égale à  $\sigma_0$  tandis qu'elle est plus faible dans le noyau élastique. La variable représentée est la contrainte équivalente de von Mises normalisée par  $\sigma_0$ . Ces résultats ont été obtenus grâce à un calcul par éléments finis dans le contexte non linéaire de l'élasto-plasticité. La courbe du moment de torsion en fonction de l'angle linéique est représentée sur la figure 23.10. Commenter cette figure et conclure sur la résistance de la barre en torsion.

Quelle propriété du matériau considéré peut-on mesurer sur la partie linéaire du début de la courbe ? Donner cette valeur et deviner quel matériau a pu être considéré pour ce calcul.

► On voit que le noyau élastique se réduit comme peau de chagrin lorsqu'on augmente le chargement. A la fin, il ne reste qu'une fine bande sur l'axe  $X_1$ . La courbe du moment en fonction de la torsion appliquée est d'abord linéaire comme il se doit. On peut d'ailleurs mesurer la pente qui doit être égale au module de cisaillement  $\mu = E/2(1 + \nu)$  d'après la relation  $C = \mu J\alpha$ . On trouve sur le graphe  $\mu \simeq 77$  GPa, ce qui, avec un coefficient de Poisson typique  $\nu = 0.3$  fournit un module de Young  $E \simeq 200$  GPa, typiquement le module d'un acier. La courbe sature ensuite au fur et à mesure que la plasticité envahit la barre. Le moment atteint une limite infranchissable qui représente la résistance maximale de la barre en torsion. On parle de charge limite de la barre, grandeur essentielle pour le dimensionnement des structures.

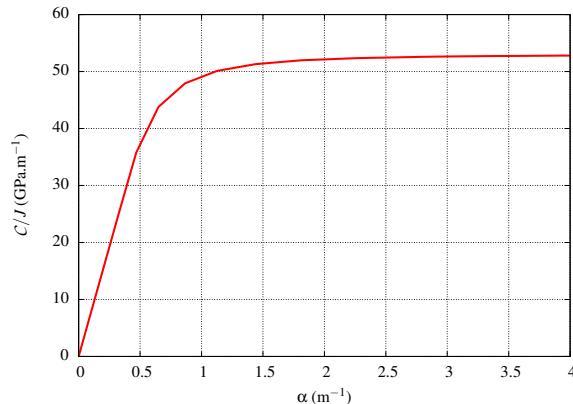


Figure 23.10 : Moment normalisé par le moment quadratique de torsion  $J$  en fonction de l'angle linéique appliqué pour une barre à section elliptique constituée d'un certain matériau dont le comportement est élasto-plastique.

#### Extension de la solution pour un tube de section elliptique creuse

Prouver que la solution établie précédemment pour une barre de section elliptique est également valide dans les parois d'un tube dont la section est bornée par deux ellipses semblables et concentriques comme sur la figure 23.11.

Le contour extérieur est toujours donné par l'équation (23.63) tandis que le contour intérieur a pour équation :

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = \eta^2 \quad (23.67)$$

où  $\eta$  est un nombre réel  $0 < \eta < 1$ .

Donner alors l'expression de la rigidité de torsion du tube en fonction en particulier du paramètre  $\eta$ .

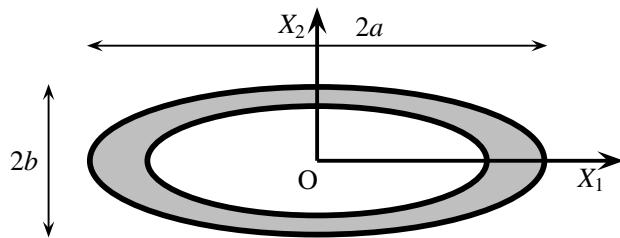


Figure 23.11 : Tube de section elliptique creuse.

► Le champ de contraintes établi précédemment a le bon goût de satisfaire les conditions de bord libre sur la paroi intérieure du tube. Cela vient du fait que le vecteur normal est parallèle au vecteur  $[X/a^2 \quad X/b^2 \quad 0]$  aussi bien pour les points de l'ellipse extérieure que pour ceux de l'ellipse intérieure. On vérifie alors que la condition

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0$$

est satisfaite à l'intérieur comme à l'extérieur en utilisant les contraintes calculées au paragraphe 23.4.2, avec la même valeur du paramètre  $k$ .

Le calcul de la rigidité de torsion fait intervenir les moments quadratiques de la section tubulaire :

$$\int_S X_1^2 dS = \int_{S(a,b)} X_1^2 dS - \int_{S(\eta a, \eta b)} X_1^2 dS = \pi \frac{a^3 b}{4} (1 - \eta^4)$$

où  $S(a,b)$ , resp.  $S(\eta a, \eta b)$ , désigne la surface de l'ellipse de paramètres  $a$  et  $b$ , resp.  $\eta a, \eta b$ . Finalement

$$\mu J = \mu \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - \eta^4)$$

### 23.4.3 Torsion d'une barre de section triangulaire

On considère la torsion d'une barre dont la section est triangulaire équilatérale, de hauteur  $3a$ , comme sur la figure 23.12.

#### Détermination de la fonction de gauchissement

La fonction polynomiale de degré deux utilisée pour la barre de section elliptique ne suffit pas pour le cas triangulaire.

Montrer qu'une fonction de gauchissement polynomiale de degré 3 de la forme

$$\varphi(X_1, X_2) = AX_1^3 + BX_1^2 X_2 + CX_1 X_2^2 + DX_2^3 \quad (23.68)$$

permet de répondre à la question.

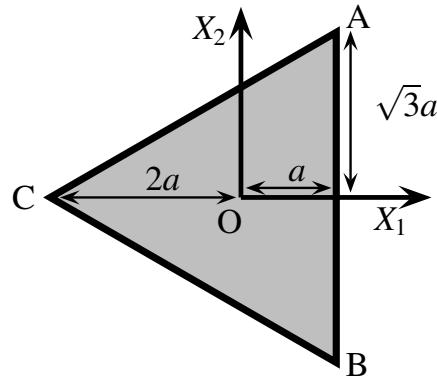


Figure 23.12 : Géométrie de la section triangulaire équilatérale d'une barre : hauteur de longueur  $3a$  et côté de longueur  $2a\sqrt{3}$ .

► Les sommets du triangle de la figure 23.12 ont pour coordonnées  $A(a, a\sqrt{3})$ ,  $B(a, -a\sqrt{3})$  et  $C(-2a, 0)$ . On en déduit les composantes des vecteurs normaux aux trois faces : côté  $AC$  :  $\underline{n} \parallel [-a\sqrt{3}, 3a, 0]$ ; côté  $BC$  :  $\underline{n} \parallel [a\sqrt{3}, 3a, 0]$ ; côté  $AB$  :  $\underline{n} \parallel [1, 0, 0]$ . Nous avons également besoin des équations des trois arêtes du triangle : arête  $AC$  :  $X_2 = (X_1 + 2a)/\sqrt{3}$ ; arête  $BC$  :  $X_2 = -(X_1 + 2a)/\sqrt{3}$ ; arête  $AB$  :  $X_1 = a$ . On calcule ensuite

$$\varphi_{,1} = 3AX_1^2 + 2BX_1X_2 + CX_2^2, \quad \varphi_{,2} = BX_1^2 + 2CX_1X_2 + 3DX_2^2$$

On vérifie aisément que cette fonction est harmonique si

$$3A + C = 0, \quad B + 3D = 0$$

La condition (23.61) s'écrit successivement :

- sur l'arête  $AB$  :

$$3Aa^2 + 2BaX_2 + CX_2^2 = X_2 \quad \forall X_2 \quad \Rightarrow \quad A = C = 0, \quad B = \frac{1}{2a}$$

- sur l'arête  $BC$  : on substitue  $X_2 = -(X_1 + 2a)/\sqrt{3}$  dans la condition (23.61) :

$$\varphi_{,1}a\sqrt{3} + \varphi_{,2}3a = a\sqrt{3}X_2 - 3aX_1 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{6a}$$

- sur l'arête  $AC$  : il reste à vérifier que les valeurs des constantes trouvées permettent de satisfaire également la condition (23.61) sur cette arête.

Finalement

$$\varphi^\Delta(X_1, X_2) = \frac{X_2}{6a}(3X_1^2 - X_2^2)$$

#### Etude de la section déformée

Indiquer à quel(s) endroit(s) de la section le déplacement hors plan  $u_3$  est maximum. Donner l'amplitude maximale du gauchissement correspondant.

► Le déplacement hors plan vaut

$$u_3(X_1, X_2) = \alpha \frac{X_2}{6a} (3X_1^2 - X_2^2)$$

Les maxima de cette fonction se trouvent sur les arêtes du bord. Les trois arêtes étant équivalentes du point de vue de la symétrie, on peut se contenter d'étudier ce déplacement le long de l'arête  $AB$  d'équation  $X_1 = a$  :

$$u_3(a, X_2) = \alpha \frac{X_2}{6a} (3a^2 - X_2^2)$$

Cette fonction a des extrema en  $X_2 = \pm a$ .

Le gauchissement maximum vaut donc

$$u_2(a, \pm a) = \pm \frac{\alpha a^2}{3}$$

Le champ de déplacement est illustré sur la figure 23.5(b).

#### *Rigidité de torsion*

Poser le calcul de la rigidité de torsion de la barre de section triangulaire équilatérale. Effectuer les premières étapes mais on ne demande pas d'achever ce long calcul. On admettra que la relation entre le couple de torsion et l'angle linéique de torsion est

$$\mathcal{C} = \frac{9\sqrt{3}}{5} a^4 \mu \alpha \quad (23.69)$$

d'après (Sadd, 2005).

► La fonction de gauchissement est utilisée maintenant pour calculer les contraintes :

$$\sigma_{31} = \mu \alpha (\varphi_{,1} - X_2) = \mu \alpha \frac{X_2}{a} (X_1 - a) \quad (23.70)$$

$$\sigma_{32} = \mu \alpha (\varphi_{,2} + X_1) = \frac{\mu \alpha}{2a} (X_1^2 - X_2^2 + 2aX_1) \quad (23.71)$$

Deux formules s'offrent à nous pour calculer  $J$ , à savoir (23.39) et (23.40) et nous choisissons la première :

$$\begin{aligned} J &= \int_S \left( X_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right) - X_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right) \right) dS \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-2a}^a dX_1 \int_{-(X_1+2a)/\sqrt{3}}^{(X_1+2a)/\sqrt{3}} (X_1^3 - 3X_1 X_2^2 + 2a(X_1^2 + X_2^2)) dX_2 \end{aligned} \quad (23.72)$$

#### *Limite d'élasticité et analyse limite*

Exprimer les contraintes dans la section triangulaire.

Dans le cas d'un matériau fragile, puis d'un matériau ductile, indiquer à quel(s) endroit(s) de la section la limite d'élasticité est atteinte et pour quelle valeur critique de l'angle linéique  $\alpha_0$ .

Au-delà de la limite d'élasticité, le calcul peut être mené par la méthode des éléments finis. Pour un critère de von Mises et en l'absence d'écrouissage, la progression de la zone plastique au sein de la section est présentée sur les figures 23.13 et 23.14 sous la forme des champs de la contrainte équivalente de von Mises d'une part et de la norme du tenseur des déformations plastiques d'autre part.

Commenter ces figures.

► Le champ de cisaillement est illustré sur la figure 23.6(b). Les deux seules composantes non nulles sont données par les équations (23.70) et (23.71). Le cisaillement maximal est atteint sur les bords du triangle. Pour des raisons de symétrie, il suffit de se concentrer sur l'une d'entre elles, par exemple  $AB$ . Le long de cette arête  $\sigma_{31}$  est nulle comme il se doit. Seule subsiste la composante de cisaillement

$$\sigma_{32} = \frac{\mu\alpha}{2a} (3a^2 - X_2^2)$$

On voit que les contraintes s'annulent sur les pointes du triangle  $X_2 = \pm\sqrt{3}a$ . Il apparaît également que cette contrainte est maximale au milieu de l'arête  $X_2 = 0$  :

$$\sigma_{32}^{max} = \frac{3a}{2} \mu\alpha$$

La contrainte principale maximale est égale à la valeur précédente de sorte que la limite d'élasticité est atteinte pour

$$\mu\alpha_0 = \frac{2\sigma_0}{3a}$$

dans le cas d'un matériau fragile dont la limite à rupture est  $\sigma_0$  en traction. S'il s'agit d'un matériau élasto-plastique avec un critère de Tresca et une limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction, il faut diviser par deux la valeur précédente de  $\alpha_0$ .

La figure 23.13 montre la fraction de la surface où la contrainte de cisaillement atteint  $\sigma_0$  augmente avec le chargement jusqu'à la limite où seules trois portions de médianes restent à des niveaux de contraintes plus faibles.

Noter en particulier le centre et les pointes du triangle qui restent à des niveaux proches de zéro. Le champ de déformation plastique est similaire avec trois lignes sans plasticité connectant le centre aux sommets.

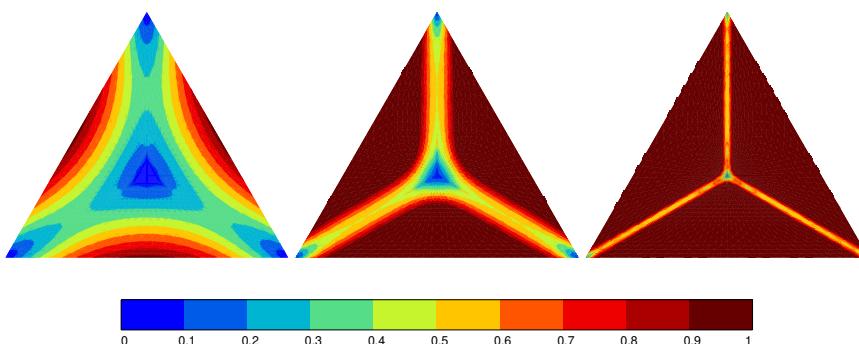
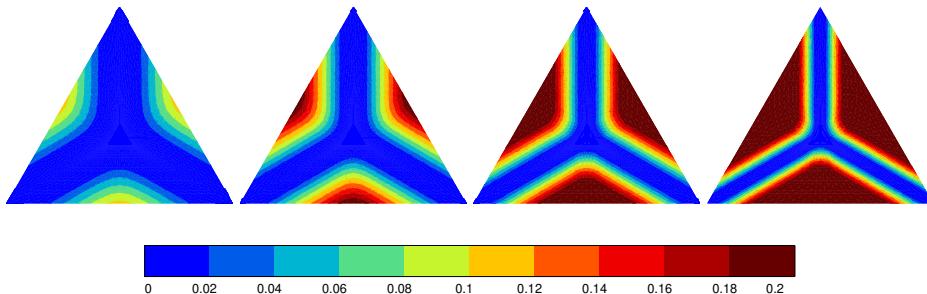


Figure 23.13 : Champ de contrainte équivalente de von Mises normalisée par la limite d'élasticité  $\sigma_0$  pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéaire  $\alpha$ .



*Figure 23.14 : Champ de la norme du tenseur des déformations plastiques (en %) pour la torsion d'une barre de section triangulaire. Les différents instantanés correspondent à des étapes du chargement croissant en angle linéique  $\alpha$ .*

#### Rigidité optimale

Pour une valeur donnée de la surface de la section de la barre, indiquer quelle section, elliptique, circulaire ou triangulaire, conduit à la plus grande rigidité de torsion.

Indiquer également pour quelle forme de section, le cisaillement maximal est le plus faible.

► On a déjà conclu que la section circulaire réalise le maximum de la rigidité de torsion pour une section elliptique. Soit  $S$  la valeur de la surface de la section recherchée, les moments quadratiques de torsion des barres circulaire et triangulaire sont respectivement

$$J^\circ = \frac{S^2}{2\pi}, \quad J^\triangle = \frac{S^2}{5\sqrt{3}}$$

de sorte que  $J^\circ > J^\triangle$ .

La contrainte principale maximale vaut

$$\sigma_1^{max\circ} = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \mu \alpha, \quad \sigma_1^{max\triangle} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}}} \mu \alpha$$

de sorte que  $\sigma_1^{max\circ} < \sigma_1^{max\triangle}$ .



## 24 Le problème de Saint-Venant

On considère une poutre cylindrique homogène  $\Omega$  de longueur  $\ell$  et de section droite<sup>1</sup> courante  $S$  simplement connexe de forme quelconque. Les frontières de  $\Omega$  sont ses extrémités, à savoir les sections  $S_0$  et  $S_\ell$ , et le contour latéral  $\mathcal{A}$ , de sorte que le bord  $\partial\Omega = S_0 \cup \mathcal{A} \cup S_\ell$ . Les barycentres des sections  $S_0$  et  $S_\ell$  sont respectivement les points  $O$  et  $G_\ell$ . L'axe 3 du système de coordonnées cartésiennes orthonormées utilisé dans ce problème désigne l'axe du cylindre unissant les barycentres de toutes les sections. Les axes 1 et 2 sont choisis parallèles aux directions principales d'inertie des sections droites :

$$\int_S X_1 dS = \int_S X_2 dS = \int_S X_1 X_2 dS = 0$$

Les moments d'inertie principaux des sections sont notés :

$$I_1 = \int_S X_2^2 dS, \quad I_2 = \int_S X_1^2 dS$$

Soit  $R$  une dimension caractéristique de la section, par exemple la plus grande demi-distance entre deux points quelconques de la section.

Le problème de Saint-Venant consiste à rechercher les contraintes et les déplacements qui règnent dans la poutre soumise à ses extrémités à un torseur d'efforts appliqués, la surface latérale étant libre de toute force. La section  $S_\ell$  de la poutre, de normale sortante  $\underline{n} = \underline{e}_3$ , est soumise à des efforts dont le torseur résultant est

$$\{G_\ell, \quad \underline{R}_\ell, \quad \underline{M}_\ell\}, \quad \underline{R}_\ell = T_1 \underline{e}_1 + T_2 \underline{e}_2 + N \underline{e}_3, \quad \underline{M}_\ell = M_1 \underline{e}_1 + M_2 \underline{e}_2 + M_3 \underline{e}_3$$

comme sur la figure 24.1. La poutre est en équilibre statique à condition que le torseur des efforts suivant soit appliqué à la section  $S_0$  de normale sortante  $-\underline{e}_3$  :

$$\{O, \underline{R}_0 = -\underline{R}_\ell, \underline{M}_O = -\underline{OG}_\ell \wedge \underline{R}_\ell - \underline{M}_\ell\}$$

ce qui donne

$$M_{O1} = -M_1 + \ell T_2, \quad M_{O2} = -M_2 - \ell T_1, \quad M_{O3} = -M_3 \quad (24.1)$$

L'application d'un effort normal  $N$ , les autres composantes du torseur étant nulles, correspond à l'essai de traction/compression simple traité au paragraphe 9.2.1 tandis que l'essai de flexion normale<sup>2</sup> associé à l'application d'un moment  $M_1$  ou  $M_2$  par rapport à l'un des axes d'inertie de la section, a fait l'objet du paragraphe 9.2.2. Le cas de l'application d'un couple de torsion pure  $M_3 = C$  à l'exclusion de toute autre composante non nulle du torseur est traité au chapitre 23. L'application des efforts résultants  $T_1$  et  $T_2$ , dits efforts tranchants, constitue la nouveauté de ce chapitre. Elle s'accompagne nécessairement, on le voit au travers de (24.1), de l'existence de moments de flexion  $M_1$  et  $M_2$  affines en  $X_3$ . C'est pourquoi l'application d'un effort  $T_1$  ou  $T_2$  est parfois appelée flexion simple<sup>3</sup>.

En l'état, le problème aux limites considéré est mal posé dans la mesure où seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné. Lorsque la poutre est suffisamment élancée, i.e.  $R/\ell \ll 1$ , le principe de Saint-Venant permet d'affirmer que la solution du

---

1. Une section droite désigne une section perpendiculaire à l'axe du cylindre.

2. On trouve les dénominations de flexion normale, flexion pure ou flexion circulaire (dans le contexte infinitésimal).

3. Noter également la dénomination de flexion complexe par (Mandel, 1994) !

problème ne dépend pratiquement pas de la façon dont ces efforts sont appliqués sur  $S_0$  et  $S_\ell$ .

L'objectif du chapitre est donc, d'une part, de proposer une distribution surfacique d'efforts permettant de réaliser les torseurs appliqués  $\{O, \underline{\mathbf{R}}_O, \underline{\mathbf{M}}_O\}$  et  $\{G_\ell, \underline{\mathbf{R}}_\ell, \underline{\mathbf{M}}_\ell\}$ , et, d'autre part, de résoudre le problème d'équilibre élastique linéarisé bien posé correspondant.

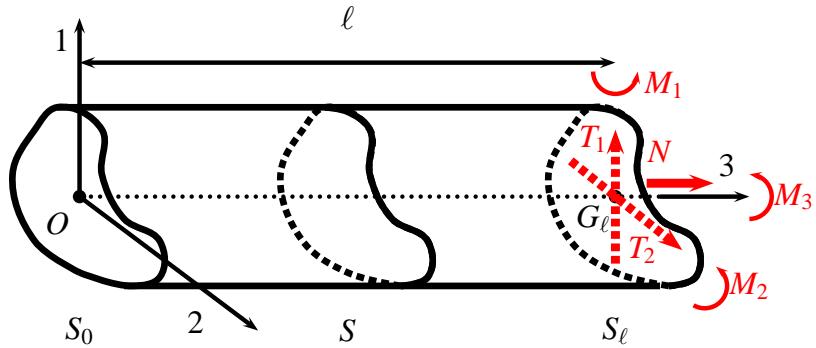


Figure 24.1 : Géométrie de la poutre étudiée ainsi que le torseur des efforts appliqués à l'extrémité  $S_\ell$ .

## 24.1 Statique du problème de Saint-Venant

### 24.1.1 Une propriété remarquable des contraintes

On s'intéresse aux états de contraintes permettant de satisfaire la propriété suivante : *le vecteur-contrainte qui s'exerce au point courant sur toute facette parallèle aux génératrices du cylindre est, lui aussi, parallèle aux génératrices.*

Quel est l'état de contrainte imposé par cette propriété ?

Montrer qu'une contrainte principale au moins est nulle et que les vecteurs propres correspondants sont perpendiculaires à  $\underline{e}_3$ .

► Le vecteur normal à une facette parallèle aux génératrices a pour composantes  $[n_1 \ n_2 \ 0]^T$ . Le vecteur-contrainte associé est parallèle aux génératrices si ses première et deuxième composantes sont nulles :

$$\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = 0, \quad \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = 0, \quad \forall n_1, n_2$$

Les contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  sont donc nulles, ce qui conduit à l'état de contraintes suivant :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (24.2)$$

Le déterminant de la matrice précédente est nulle de sorte qu'elle admet une valeur propre nulle. D'autre part, la trace de la matrice est  $\sigma_{33}$  ce qui indique que la somme des deux autres valeurs propres vaut  $\sigma_{33}$ . Les contraintes principales sont les racines du polynôme caractéristique en  $\sigma$  :

$$\sigma(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma - \sigma^2)$$

Les contraintes principales sont donc :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + \tau^2}), \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + \tau^2}), \text{ avec } \tau^2 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2$$

Les composantes de  $\sigma \cdot \underline{n}$  sont alors  $[\sigma_{13}n_3, \quad \sigma_{23}n_3, \quad \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3]$  pour un vecteur  $\underline{n}$  donné. Elles s'annulent lorsque  $\underline{n}$  est une direction principale pour la valeur propre nulle. Cela requiert en général que  $n_3$  de sorte que les directions principales correspondantes sont orthogonales à l'axe 3.

#### 24.1.2 Forme des contraintes dans le problème de Saint-Venant

On va montrer que les états de contraintes solutions du problème de Saint-Venant satisfont la propriété précédente<sup>4</sup>.

On considère donc l'état de contraintes (24.2). Etablir d'abord que les composantes  $\sigma_{13}$  et  $\sigma_{23}$  ne dépendent pas de la variable  $X_3$ .

Montrer que la contrainte  $\sigma_{33}$  est nécessairement de la forme :

$$\sigma_{33} = a_1 X_1 X_3 + a_2 X_2 X_3 + a_3 X_3 + a_4 X_1 + a_5 X_2 + a_6 \quad (24.3)$$

Montrer que l'on peut exprimer tous les coefficients de ce polynôme en fonction des composantes des forces et moments appliqués  $\underline{R}_\ell$  et  $\underline{M}_\ell$ .

► En l'absence de forces de volume et dans le cas statique, les conditions d'équilibre local exigent que la divergence du tenseur des contraintes s'annule en tout point de l'intérieur de  $\Omega$ . En particulier, les conditions

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = \sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = \sigma_{23,3} = 0$$

appliquées à la forme proposée (24.2) excluent la dépendance en  $X_3$  des composantes de cisaillement.

La loi d'élasticité isotrope linéarisée par rapport à l'état naturel fournit ensuite

$$[\underline{\varepsilon}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -\nu\sigma_{33} & 0 & (1+\nu)\sigma_{13} \\ 0 & -\nu\sigma_{33} & (1+\nu)\sigma_{23} \\ (1+\nu)\sigma_{13} & (1+\nu)\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (24.4)$$

Les équations de compatibilité (2.153) à (2.155) exigent alors que

$$\sigma_{33,22} + \sigma_{33,11} = 0, \quad \nu\sigma_{33,33} - \sigma_{33,22} = 0, \quad \sigma_{33,11} - \nu\sigma_{33,33} = 0$$

système homogène dont la solution est

$$\sigma_{33,11} = \sigma_{33,22} = \sigma_{33,33} = 0$$

La condition de compatibilité (2.157) indique en outre que  $\sigma_{33,12} = 0$ . Par conséquent la composante  $\sigma_{33}$  est affine par rapport aux variables  $X_1$  et  $X_2$  et les coefficient correspondants dépendent de  $X_3$  de manière affine, ce qui conduit à la forme (24.3).

Les valeurs des coefficients  $a_i$  s'obtiennent en calculant les contributions de  $\sigma_{33}$  aux forces et moments résultants sur les extrémités du barreau.

Les forces résultantes normales aux sections  $S_0$  et  $S_\ell$  sont égales à  $-N$  et  $N$  respective-

4. Cette caractérisation est due à Louis Brun.

ment :

$$\int_{S_0} \sigma_{33} dS = -a_6 S = -N, \quad \int_{S_\ell} \sigma_{33} dS = a_3 \ell S + a_6 S = N$$

On calcule ensuite le moment résultant sur la surface  $S_\ell$  :

$$\underline{\mathbf{M}}_\ell = \int_{S_\ell} \underline{\mathbf{G}_\ell \mathbf{M}} \wedge (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_3) dS = \begin{bmatrix} \int_{S_\ell} X_2 \sigma_{33} dS \\ \int_{S_\ell} -X_1 \sigma_{33} dS \\ \int_{S_\ell} X_1 \sigma_{23} - X_2 \sigma_{13} dS \end{bmatrix} \quad (24.5)$$

Les deux premières composantes fournissent les relations :

$$a_2 I_1 \ell + a_5 I_1 = M_1, \quad -a_1 I_2 \ell - a_4 I_2 = M_2$$

Le moment résultant sur la face  $S_0$  vaut ensuite

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \int_{S_0} \underline{\mathbf{OM}} \wedge (\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (-\underline{\mathbf{e}}_3)) dS = \begin{bmatrix} \int_{S_0} -X_2 \sigma_{33} dS \\ \int_{S_0} X_1 \sigma_{33} dS \\ \int_{S_0} -X_1 \sigma_{23} + X_2 \sigma_{13} dS \end{bmatrix}$$

Les deux premières composantes fournissent les relations :

$$-a_5 I_1 = -M_1 + \ell T_2, \quad -a_4 I_2 = -M_2 - \ell T_1$$

Finalement, on obtient

$$a_1 = \frac{T_1}{I_2}, \quad a_2 = \frac{T_2}{I_1}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{M_2 + \ell T_1}{I_2}, \quad a_5 = \frac{M_1 - \ell T_2}{I_1}, \quad a_6 = \frac{N}{S}$$

#### 24.1.3 Détermination des contraintes de cisaillement

Montrer que

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = 0 \quad (24.6)$$

et, par conséquent, que

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left( \sigma_{31} + a_1 \frac{X_1^2}{2} + f(X_2) \right) = \frac{\partial}{\partial X_2} \left( -\sigma_{32} - a_2 \frac{X_2^2}{2} - g(X_1) \right) \quad (24.7)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables arbitraires.

En déduire qu'il existe une fonction  $\Psi(X_1, X_2)$  permettant d'exprimer les contraintes de cisaillement sous la forme :

$$\sigma_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - a_1 \frac{X_1^2}{2} - f(X_2) \quad (24.8)$$

$$\sigma_{32} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} - a_2 \frac{X_2^2}{2} - g(X_1) \quad (24.9)$$

Montrer enfin que l'on peut choisir  $f$  et  $g$  de telle sorte que la fonction  $\Psi$  soit solution de l'équation

$$\Delta_2 \Psi = -2A \quad (24.10)$$

où  $A$  est une constante encore indéterminée.

Pour cela, on établira d'abord que les contraintes de cisaillement sont solutions des

équations de Poisson :

$$\Delta\sigma_{31} + \frac{a_1}{1+\nu} = 0, \quad \Delta\sigma_{32} + \frac{a_2}{1+\nu} = 0 \quad (24.11)$$

► La relation (24.6) est une conséquence de la première équation d'équilibre locale portant sur les contraintes, une fois que l'expression polynomiale (24.3) est prise en compte. La relation (24.7) s'en déduit. On considère alors la forme différentielle

$$\alpha(X_1, X_2) = a(X_1, X_2)dX_1 + b(X_1, X_2)dX_2$$

Les coefficients sont les fonctions

$$\begin{aligned} a(X_1, X_2) &= -\sigma_{32} - a_2 \frac{X_2^2}{2} - g(X_1), \\ b(X_1, X_2) &= \sigma_{31} + a_1 \frac{X_1^2}{2} + f(X_2) \end{aligned}$$

La relation (24.7) signifie que  $\partial a / \partial X_2 = \partial b / \partial X_1$ . Il s'ensuit que la forme différentielle  $\alpha$  est exacte. Il existe<sup>5</sup> donc une fonction  $\Psi(X_1, X_2)$  telle que  $\alpha = d\Psi$ . Les relations (24.8) et (24.9) s'en déduisent.

Pour établir les équations de Poisson (24.11), on a recours aux deux équations de compatibilité (2.156) et (2.158) encore inexploitées qui fournissent :

$$(1+\nu)\sigma_{23,12} = -\nu\sigma_{33,31} + (1+\nu)\sigma_{13,22}, \quad (1+\nu)\sigma_{13,12} = -\nu\sigma_{33,32} + (1+\nu)\sigma_{23,11}$$

Les termes  $\sigma_{23,12}$  et  $\sigma_{13,12}$  peuvent être éliminés des deux équations précédentes en dérivant l'équation d'équilibre  $\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3}$  par rapport à  $X_1$  d'une part et par rapport à  $X_2$  d'autre part. Les équations (24.11) s'en déduisent.

La fonction de contrainte  $\Psi$  peut alors être substituée dans les équations de Poisson pour obtenir :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{13} &= \Delta \frac{\partial\Psi}{\partial X_2} - a_1 - f''(X_2) = -\frac{a_1}{1+\nu} \\ \Delta\sigma_{23} &= -\Delta \frac{\partial\Psi}{\partial X_1} - a_2 - g''(X_1) = -\frac{a_2}{1+\nu} \end{aligned}$$

Le gradient du laplacien de  $\Psi$  peut être obtenu à partir des équations précédentes :

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \Delta\Psi = -g'' - \frac{\nu a_2}{1+\nu}, \quad \frac{\partial}{\partial X_2} \Delta\Psi = f'' + \frac{\nu a_2}{1+\nu}$$

Le choix

$$f(X_2) = -\frac{\nu a_1}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2}, \quad g(X_2) = -\frac{\nu a_2}{1+\nu} \frac{X_1^2}{2}$$

implique que le gradient de  $\Delta\Psi$  est nul et que par conséquent le laplacien de  $\Psi$  est constant.

---

5. En toute rigueur, le résultat est obtenu pour une section de poutre simplement connexe. La présence de trous au sein de la section ajoute des conditions sur les bords intérieurs des trous.

#### 24.1.4 Condition sur les surfaces latérales de la poutre

Le vecteur normal en tout point  $M \in \mathcal{A}$  a pour composantes  $[n_1, n_2, 0]$ . Le vecteur-contrainte en un tel point est donc

$$\underline{\mathbf{t}} = (\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2)\underline{\mathbf{e}}_3$$

Il doit s'annuler car la surface  $\mathcal{A}$  est libre d'effort, ce qui fournit la condition :

$$\sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 = 0 \quad (24.12)$$

qui indique que la contrainte tangentielle sur chaque section vaut

$$\underline{\tau} = \sigma_{31}\underline{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{32}\underline{\mathbf{e}}_2$$

Elle est orthogonale à  $\underline{n}$ , i.e.  $\underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0$ . Cette propriété résulte de la propriété générique des états de contraintes étudiés au paragraphe 24.1.1.

Donner les valeurs que doit prendre la fonction de contrainte  $\Psi$  sur le bord  $\partial S$  de chaque section  $S$ .

Montrer ensuite que  $\Psi$  se décompose en la somme d'une fonction harmonique  $\Psi_1(X_1, X_2)$  et d'une fonction polynomiale par rapport aux variables  $X_1$  et  $X_2$ .

Formuler le problème de Dirichlet dont  $\Psi_1$  est la solution unique.

Montrer enfin que cette fonction de contrainte  $\Psi_1$  se met sous la forme

$$\Psi_1 = a_1\psi_1 - a_2\psi_2 + A\psi \quad (24.13)$$

où les fonctions  $\psi_1(X_1, X_2)$ ,  $\psi_2(X_1, X_2)$  et  $\psi(X_1, X_2)$  sont harmoniques et vérifient les conditions de Dirichlet :

$$\psi = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2) + Cste, \quad d\psi_1 = \left(\frac{X_1^2}{2} - \frac{\nu}{1+\nu}\frac{X_2^2}{2}\right)dX_2, \quad d\psi_2 = \left(\frac{X_2^2}{2} - \frac{\nu}{1+\nu}\frac{X_1^2}{2}\right)dX_1 \quad (24.14)$$

Interpréter les trois contributions ainsi introduites. On est donc amené à résoudre trois problèmes de Dirichlet distincts assurés d'une solution unique. La fonction harmonique  $\psi$  est d'ailleurs solution du même problème de Dirichlet (23.44) que la fonction de contrainte de torsion introduite dans le chapitre consacré à la torsion. Cette fonction de contrainte caractérise donc l'effet de torsion du problème de Saint-Venant. On y reviendra.

► La condition au bord (24.12) s'exprime en fonction de  $\Psi$  et exige que

$$\left( \frac{\partial\Psi}{\partial X_2} - a_1 \frac{X_1^2}{2} + \frac{\nu a_1}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2} \right) n_1 - \left( \frac{\partial\Psi}{\partial X_1} + a_2 \frac{X_2^2}{2} - \frac{\nu a_2}{1+\nu} \frac{X_1^2}{2} \right) n_2 = 0$$

Comme  $n_1$  et  $n_2$  sont respectivement proportionnels à  $dX_2/ds$  et  $-dX_1/ds$  où  $s$  désigne l'abscisse curviligne le long du contour  $\partial S$ , la condition précédente devient :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial X_1} dX_1 = (a_1 \frac{X_1^2}{2} - \frac{\nu a_1}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2})dX_2 + (-a_2 \frac{X_2^2}{2} + \frac{\nu a_2}{1+\nu} \frac{X_1^2}{2})dX_1$$

Le membre de gauche est la variation  $d\Psi$  le long de  $\partial S$ . Cette condition implique que

$$d\Psi(X_1, X_2) = a_1 \frac{X_1^2}{2} dX_2 - \frac{\nu a_1}{1+\nu} d\frac{X_2^3}{6} - a_2 \frac{X_2^2}{2} dX_1 + \frac{\nu a_2}{1+\nu} d\frac{X_1^3}{6}, \quad \forall \underline{X} \in \partial S \quad (24.15)$$

La constante qui apparaît lors de l'intégration n'a pas d'importance puisque sa valeur ne modifie pas les contraintes.

Cherchons alors une fonction harmonique  $\Psi_1$  et une fonction polynomiale  $h(X_1, X_2)$  telle que  $\Psi = \Psi_1 + h$ . Comme  $\Delta\Psi_1 = 0$ , on doit avoir  $\Delta h = -2A$  ce qui conduit au choix  $h(X_1, X_2) = -A(X_1^2 + X_2^2)/2$ . La fonction harmonique  $\psi_1$  est donc solution d'un problème de Dirichlet et elle doit prendre les valeurs obtenues en intégrant :

$$d\Psi_1(X_1, X_2) = a_1 \frac{X_1^2}{2} dX_2 - \frac{\nu a_1}{1+\nu} d\frac{X_2^3}{6} - a_2 \frac{X_2^2}{2} dX_1 + \frac{\nu a_2}{1+\nu} d\frac{X_1^3}{6} + \frac{A}{2} d(X_1^2 + X_2^2), \quad (24.16)$$

$\forall \underline{X} \in \partial S$ , à une constante additive près. Cette condition aux limites incite à décomposer  $\Psi_1$  en trois fonctions harmoniques  $\psi_1, \psi_2, \psi$  prenant les valeurs (24.14) sur le contour  $\partial S$ .

Les deux premiers termes de la décomposition (24.13) mettent en valeur les contributions dues aux efforts tranchants  $T_1$  et  $T_2$  présents au travers des constantes  $a_1$  et  $a_2$ . Il reste à analyser la contribution proportionnelle à la constante  $A$  encore non précisée.

La fonction  $\psi$  est la fonction harmonique intervenant dans le problème de torsion étudié au paragraphe 23.2.4, cf. les conditions (23.44). La constante  $A$  apparaît donc liée au problème de torsion étudié dans la section suivante. Les fonctions harmoniques  $\psi_1$  et  $\psi_2$  caractérisent quant à elles les effets respectifs de l'application des effort tranchants  $T_1$  et  $T_2$ .

#### 24.1.5 Centre de torsion

En utilisant une condition encore inexploitée, montrer que la constante  $A$  peut être déterminée et mise sous la forme :

$$A = \frac{M_3 + T_1 X_2^C - T_2 X_1^C}{J} \quad (24.17)$$

où  $X_1^C, X_2^C$  sont les coordonnées d'un point C appelé centre de torsion<sup>6</sup> de la section  $S_l$  :

$$X_1^C = \frac{1}{I_2} \int_{S_l} X_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_2} + \frac{X_2}{2} \left( \frac{\nu}{1+\nu} X_2^2 - X_1^2 \right) dS \quad (24.18)$$

$$X_2^C = \frac{1}{I_1} \int_{S_l} X_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial X_1} + X_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial X_2} + \frac{X_1}{2} \left( \frac{\nu}{1+\nu} X_1^2 - X_2^2 \right) dS \quad (24.19)$$

Donner l'expression de  $J$  et son interprétation.

Même dans le cas où  $M_3 = 0$ , la constante  $A$  n'est en général pas nulle.

Imaginer des circonstances conduisant à  $A = 0$ .

► La condition encore inexploitée concerne le moment de torsion induit par la distribution de contraintes de cisaillement sur la section  $S_l$  et donné par la troisième composante de l'équation (24.5) :

$$\int_{S_l} (\sigma_{23} X_1 - \sigma_{13} X_2) dS = M_3 \quad (24.20)$$

On rappelle que les contraintes de cisaillement trouvées sont de la forme

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_2} - a_1 \frac{X_1}{2} + \frac{\nu a_1}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X_1} - a_2 \frac{X_2}{2} + \frac{\nu a_2}{1+\nu} \frac{X_1^2}{2} \quad (24.21)$$

6. ou centre de cisaillement dans de nombreux ouvrage.

où  $\Psi = a_1\psi_1 - a_2\psi_2 + A\psi - A(X_1^2 + X_2^2)/2$ .

Noter que les fonctions harmoniques  $\psi_1, \psi_2, \psi$  solutions des problèmes de Dirichlet définis dans la section précédente ne dépendent pas de  $A$ . La substitution de ces relations dans la condition de moment de torsion (24.20) conduit à l'équation

$$JA - T_1X_2^C + T_2X_1^C = M_3$$

où

$$J = \int_{S_l} (X_1^2 + X_2^2 - X_1 \frac{\partial \psi}{\partial X_1} - X_2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2}) dS$$

On reconnaît le moment d'inertie de torsion (23.45) introduit dans le chapitre consacré à la torsion. La constante  $A$  caractérise donc la torsion induite non seulement par le moment  $M_3$  mais également par les efforts tranchants.

Les facteurs de  $T_2$  et  $-T_1$  s'interprètent comme les coordonnées d'un point  $C$  données par les relations (24.18) et (24.19).

La signification mécanique de ce point apparaît lorsque l'on calcule le moment résultant sur la section  $S_l$  par rapport à ce point :

$$\underline{M}_l^C = \underline{CG}_l \wedge \underline{R}_l + \underline{M}$$

La troisième composante de ce moment par rapport à  $C$  intervient la relation (24.17) sous la forme :

$$M_{l3}^C = M_3 + T_1X_2^C - T_2X_1^C$$

La constante  $A$  est donc le rapport entre le moment de torsion par rapport au point  $C$  et le moment d'inertie de torsion  $J$ . Cela justifie la dénomination de centre de torsion pour le point  $C$ .

On voit que l'application d'une traction  $N$  et/ou de flexion  $M_1, M_2$  n'entraîne aucune torsion de la poutre quelque que soit la géométrie de la section. Par contre, dans le cas d'un effort tranchant  $T_1$  appliqué suivant un axe d'inertie de la section (avec  $\underline{M} = 0$  et  $N = T_2 = 0$ ), l'effet de torsion induite n'est en général pas nul. Le centre de torsion  $C$  est alors situé sur l'axe 1 comme on le voit.

## 24.2 Poutre de section quelconque soumise à un effort tranchant

Dans cette section, on étudie dans le détail le cas particulier du problème de Saint-Venant précédent obtenu en se limitant à l'application d'un effort tranchant.

On considère une poutre cylindrique  $\Omega$  de longueur  $L$  et de section droite<sup>7</sup> courante  $S$  de forme *a priori* quelconque. Les frontières de  $\Omega$  sont ses extrémités, à savoir les sections  $S_0$  et  $S_L$ , et le contour latéral  $\mathcal{A}$ , de sorte que  $\partial\Omega = S_0 \cup \mathcal{A} \cup S_L$ . Les barycentres des sections  $S_0$  et  $S_L$  sont respectivement les points  $O$  et  $G_L$ . L'axe 1 du système de coordonnées cartésiennes orthonormées utilisé dans ce problème désigne l'axe du cylindre unissant les barycentres de toutes les sections, comme sur la figure 24.2. Les axes 2 et 3 sont choisis parallèles aux directions principales d'inertie des sections droites :

$$\int_S X_2 dS = \int_S X_3 dS = \int_S X_2 X_3 dS = 0$$

Les moments quadratiques principaux des sections sont notés :

$$I_3 = \int_S X_2^2 dS, \quad I_2 = \int_S X_3^2 dS$$

7. Une section droite désigne une section perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Soit  $R$  une dimension caractéristique de la section, par exemple la plus grande demi-distance entre deux points quelconques de la section.

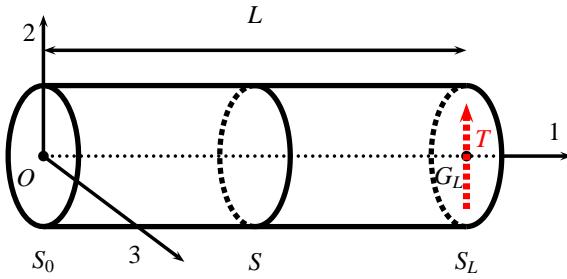


Figure 24.2 : Géométrie de la poutre étudiée ainsi que la charge  $T$  appliquée à l'extrémité  $S_L$ .

La section  $S_L$  de la poutre est soumise à des efforts dont le torseur résultant est

$$\{G_L, \underline{\mathbf{R}}_L, \underline{\mathbf{M}}_L\} = \{G_L, T\underline{\mathbf{e}}_2, 0\}$$

où  $T$  désigne l'effort résultant tangentiel appliqué sur  $S_L$  et traditionnellement appelé effort tranchant. Les surfaces latérales  $\mathcal{A}$  sont libres de tout effort appliqué.

Calculer le torseur  $\{O, \underline{\mathbf{R}}_0, \underline{\mathbf{M}}_0\}$  des efforts à appliquer à la section  $S_0$  pour que la poutre soumise à l'effort tranchant précédent soit en équilibre statique.

► L'équilibre statique exige que torseur des efforts appliqués à la structure dans son ensemble soit nul, ce qui implique

$$\underline{\mathbf{R}}_0 = -\underline{\mathbf{R}}_L = -T\underline{\mathbf{e}}_2, \quad \underline{\mathbf{M}}_0 = \underline{\mathbf{O}}\underline{\mathbf{G}}_L \wedge \underline{\mathbf{R}}_0 - \underline{\mathbf{M}}_L = -LT\underline{\mathbf{e}}_3$$

Il apparaît qu'il est nécessaire d'appliquer un moment  $-LT$  sur la section  $S_0$  pour contre-carrer le moment créé par rapport au point  $O$  par l'effort tranchant appliqué en  $S_L$ .

L'essai consistant à appliquer un tel effort tranchant à une poutre s'appelle flexion simple, par opposition à la flexion pure étudiée au chapitre 8.2.2 du cours.

En l'état, le problème aux limites considéré est mal posé dans la mesure où seul le torseur des efforts appliqués aux extrémités est donné. Lorsque la poutre est suffisamment élancée, i.e.  $R/L \ll 1$ , le principe de Saint-Venant permet d'affirmer que la solution du problème ne dépend pratiquement pas de la façon dont ces efforts sont appliqués sur  $S_0$  et  $S_L$ . L'objectif du problème est donc, d'une part, de proposer une distribution surfacique d'efforts permettant de réaliser les torseurs appliqués  $\{O, \underline{\mathbf{R}}_0, \underline{\mathbf{M}}_0\}$  et  $\{G_L, \underline{\mathbf{R}}_L, \underline{\mathbf{M}}_L\}$ , et, d'autre part, de résoudre le problème d'équilibre élastique linéarisé bien posé correspondant.

La poutre, initialement dans son état naturel, est constituée d'un matériau homogène de comportement élastique isotrope linéaire. Le module de Young et le coefficient de Poisson sont notés  $E$  et  $\nu$  respectivement. Dans l'ensemble du problème, on se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. L'effet de la gravité ou d'efforts volumiques en général n'est pas pris en compte. La situation envisagée est isotherme et on ne considère pas les variations de température durant l'essai.

### 24.2.1 Contraintes dans la poutre en flexion simple

Nous allons mettre en œuvre la méthode des contraintes pour résoudre le problème de la flexion simple. Le tenseur des contraintes est recherché de la forme

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24.22)$$

#### Dépendance des fonctions inconnues

Les composantes des contraintes de la forme (24.22) sont a priori des fonctions des variables  $X_1, X_2, X_3$ . Montrer toutefois que les composantes de cisaillement  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{13}$  ne peuvent pas dépendre de  $X_1$ .

► En l'absence de forces de volume et dans le cas statique, les conditions d'équilibre local exigent que la divergence du tenseur des contraintes s'annule en tout point de l'intérieur de  $\Omega$ . En particulier, les conditions

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0, \quad \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0$$

appliquées à la forme proposée (24.22) excluent la dépendance en  $X_1$  des composantes de cisaillement.

#### Forme des contraintes

Calculer le champ du tenseur des déformations régnant dans la poutre en fonction des composantes de contraintes inconnues.

En déduire que la composante axiale de contrainte est de la forme polynomiale suivante :

$$\sigma_{11} = a_1 X_1 X_2 + a_2 X_1 X_3 + a_3 X_1 + a_4 X_2 + a_5 X_3 + a_6 \quad (24.23)$$

où les  $(a_i)_{i=1,6}$  sont six constantes que l'on déterminera dans la suite.

Montrer également que les contraintes de cisaillement sont solutions des deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\Delta_2 \sigma_{12} + \frac{a_1}{1+\nu} = 0, \quad \Delta_2 \sigma_{13} + \frac{a_2}{1+\nu} = 0 \quad (24.24)$$

où  $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial X_3^2}$  est l'opérateur laplacien bidimensionnel dans le plan (2, 3) des sections droites de la poutre.

► La loi d'élasticité isotrope linéarisée par rapport à l'état naturel fournit

$$[\varepsilon] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & (1+\nu)\sigma_{12} & (1+\nu)\sigma_{13} \\ (1+\nu)\sigma_{12} & -\nu\sigma_{11} & 0 \\ (1+\nu)\sigma_{13} & 0 & -\nu\sigma_{11} \end{bmatrix} \quad (24.25)$$

La dérivée par rapport à  $X_1$  de l'équation d'équilibre local encore inexploitée fournit

$$\sigma_{11,11} + \sigma_{12,21} + \sigma_{13,31} = \sigma_{11,11} = 0$$

Les équations de compatibilité portant sur les composantes des déformations conduisent

aux conditions suivantes sur les composantes des contraintes

$$\sigma_{11,22} = 0, \quad \sigma_{11,33} = 0, \quad \sigma_{11,23} = 0$$

Ces trois conditions conduisent à la forme (24.23).

Les deux conditions de compatibilité non encore exploitées exigent que

$$(1 + \nu)\sigma_{12,23} - (1 + \nu)\sigma_{31,22} + \nu a_2 = 0, \quad (1 + \nu)\sigma_{13,23} - (1 + \nu)\sigma_{12,33} + \nu a_1 = 0$$

Or, les dérivées de la première équation d'équilibre par rapport à  $X_2$  et  $X_3$  indiquent que :

$$\sigma_{12,23} = -\sigma_{13,33} - a_2, \quad \sigma_{13,23} = -\sigma_{12,22} - a_1$$

La combinaison de ces résultats conduit aux équations de Poisson (24.24).

#### *Détermination des contraintes de cisaillement*

Montrer que

$$a_1 X_2 + a_2 X_3 + a_3 + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} = 0 \quad (24.26)$$

et, par conséquent, que

$$\frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{a_3}{2} X_2 + a_2 X_2 X_3 + \sigma_{12} + f(X_3) \right) = \frac{\partial}{\partial X_3} \left( -\frac{a_3}{2} X_3 - a_1 X_2 X_3 - \sigma_{13} - g(X_2) \right) \quad (24.27)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérивables arbitraires.

En déduire qu'il existe une fonction  $\psi(X_2, X_3)$  permettant d'exprimer les contraintes de cisaillement sous la forme :

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - \frac{a_3}{2} X_2 - a_2 X_2 X_3 - f(X_3) \quad (24.28)$$

$$\sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial X_2} - \frac{a_3}{2} X_3 - a_1 X_2 X_3 - g(X_2) \quad (24.29)$$

Montrer enfin que l'on peut choisir  $f$  et  $g$  de telle sorte que la fonction  $\psi$  soit solution de l'équation

$$\Delta_2 \psi = A \quad (24.30)$$

où  $A$  est une constante encore indéterminée.

► La relation (24.26) est une conséquence de la première équation d'équilibre locale portant sur les contraintes, une fois que l'expression polynomiale (24.3) est prise en compte. La relation (24.27) s'en déduit. On considère alors la forme différentielle

$$\alpha(X_2, X_3) = b(X_2, X_3) dX_2 + a(X_2, X_3) dX_3$$

avec

$$a(X_2, X_3) = \frac{a_3}{2} X_2 + a_2 X_2 X_3 + \sigma_{12} + f(X_3),$$

$$b(X_2, X_3) = -\frac{a_3}{2} X_3 - a_1 X_2 X_3 - \sigma_{13} - g(X_2)$$

La relation (24.27) signifie que  $\partial b / \partial X_3 = \partial a / \partial X_2$ . Il s'ensuit que la forme différentielle

$\alpha$  est exacte. Il existe<sup>8</sup> donc une fonction  $\psi(X_2, X_3)$  telle que  $\alpha = d\psi$ . Les relations (24.28) et (24.29) s'en déduisent.

On utilise ensuite le fait que les contraintes de cisaillement vérifient les équations de Poisson (24.24) :

$$\begin{aligned}\Delta_2 \sigma_{12} &= \frac{\partial}{\partial X_3} \Delta_2 \psi - f''(X_3) = -\frac{a_1}{1+\nu} \\ \Delta_2 \sigma_{13} &= -\frac{\partial}{\partial X_2} \Delta_2 \psi - g''(X_2) = -\frac{a_2}{1+\nu}\end{aligned}$$

Le choix

$$f(X_3) = \frac{a_1}{1+\nu} \frac{X_3^2}{2}, \quad g(X_2) = \frac{a_2}{1+\nu} \frac{X_2^2}{2}$$

implique que le gradient de  $\Delta_2 \psi$  est nul et que par conséquent le laplacien de  $\psi$  est constant.

#### Forces et moments résultants

Montrer que l'on peut déterminer les constantes du polynôme (24.3) en fonction des conditions de chargement de la poutre :

$$a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$$

$$a_1 = \frac{T}{I_3}, \quad a_4 = -\frac{LT}{I_3}$$

Le champ des contraintes prend ainsi la forme

$$\sigma_{11} = \frac{T}{I_3} X_2 (X_1 - L), \quad \sigma_{12} = \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - \frac{a_1}{1+\nu} \frac{X_3^2}{2}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial \psi}{\partial X_2} - a_1 X_2 X_3 \quad (24.31)$$

La forme des contraintes normales  $\sigma_{11}$  évoque les contraintes établies dans le cas de la flexion pure mais avec un moment variable  $T(X_1 - L)$  dépendant de la position  $X_1$ . C'est ainsi que l'application d'un effort tranchant s'accompagne nécessairement d'une composante de flexion, ce qui justifie la dénomination de flexion simple également attachée à cet essai.

► Les forces résultantes normales aux sections  $S_0$  et  $S_L$  sont nulles :

$$\int_{S_0} \sigma_{11} dS = a_6 S = 0, \quad \int_{S_L} \sigma_{11} dS = a_3 LS + a_6 S = 0$$

C'est pourquoi  $a_3 = a_6 = 0$ .

On calcule ensuite le moment résultant sur la surface  $S_L$  :

$$\underline{M}_L = \int_{S_L} \underline{G}_L \underline{M} \wedge (\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_1) dS = \left[ \begin{array}{c} \int_{S_L} X_2 \sigma_{13} - X_3 \sigma_{12} dS \\ \int_{S_L} X_3 \sigma_{11} dS \\ \int_{S_L} -X_2 \sigma_{11} dS \end{array} \right] = 0$$

---

8. En toute rigueur, le résultat est obtenu pour une section de poutre simplement connexe. La présence de trous au sein de la section ajoute des conditions sur les bords intérieurs des trous.

Les moments par rapport aux axes 2 et 3 sont nuls ce qui conduit à

$$a_2LI_2 + a_5I_2 = 0, \quad a_1LI_3 + a_4I_3 = 0$$

Le moment résultant sur la face  $S_0$  vaut ensuite

$$\underline{M}_O = \int_{S_0} \underline{OM} \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\underline{e}_1)) dS = \begin{bmatrix} \int_{S_0} -X_2\sigma_{13} + X_3\sigma_{12} dS \\ \int_{S_0} -X_3\sigma_{11} dS \\ \int_{S_0} X_2\sigma_{11} dS \end{bmatrix} = -LT\underline{e}_3$$

ce qui permet de déterminer  $a_5I_2 = 0$ ,  $a_4I_3 = -LT$  et finalement  $a_2 = 0$  et  $a_1 = T/I_3$ .

*Condition sur les surfaces latérales de la poutre*

Ecrire la condition qui lie les contraintes en tout point du bord  $\mathcal{A}$  de la poutre. Interpréter cette relation en introduisant la contrainte tangentielle

$$\underline{\tau} = \sigma_{12}\underline{e}_2 + \sigma_{13}\underline{e}_3$$

A ce stade, on ne cherchera pas à exploiter cette condition.

► Le vecteur normal en tout point  $M \in \mathcal{A}$  a pour composantes  $[0, n_2, n_3]$ . Le vecteur-contrainte en un tel point est donc

$$\underline{t} = (\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\underline{e}_1$$

Il doit s'annuler car la surface  $\mathcal{A}$  est libre d'effort, ce qui fournit la condition :

$$\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0 \tag{24.32}$$

qui indique que la contrainte tangentielle  $\underline{\tau}$  est orthogonale à  $\underline{n}$ , ou, autrement dit, qu'elle doit être tangente au contour extérieur de chaque section de la poutre.

### 24.2.2 Détermination des déplacements

La méthode systématique de construction du champ de déplacement à partir du champ de déformation établi dans la partie précédente est maintenant mise en œuvre. Montrer ainsi, au terme d'un travail méticuleux, que le champ de déplacement prend la forme

$$u_1 = \frac{a_1}{E}X_2 \left( \frac{X_1^2}{2} - LX_1 + \nu \frac{X_2^2}{6} - (2+\nu) \frac{X_3^2}{2} \right) + \frac{1+\nu}{E} \varphi(X_2, X_3) \tag{24.33}$$

$$u_2 = \frac{a_1}{E} \left( \frac{X_1^2}{2}(L - \frac{X_1}{3}) + \frac{\nu}{2}(X_1 - L)(X_3^2 - X_2^2) \right) + \frac{1+\nu}{E} AX_1 X_3 \tag{24.34}$$

$$u_3 = a_1 \frac{\nu}{E} (L - X_1) X_2 X_3 - \frac{1+\nu}{E} AX_1 X_2 \tag{24.35}$$

à un mouvement de corps rigide infinitésimal près. La composante  $u_1$ , engendrée par la flexion, fait intervenir la fonction  $\varphi(X_2, X_3)$ , solution, à une constante près, du système d'équations

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - AX_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}, \quad -2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2} + AX_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} \tag{24.36}$$

Justifier l'existence de cette fonction  $\varphi$ .

► On rappelle que les composantes non nulles du tenseur des déformations infinitésimales sont

$$E\varepsilon_{11} = a_1 X_2 (X_1 - L), \quad E\varepsilon_{22} = E\varepsilon_{33} = -\nu a_1 X_2 (X_1 - L)$$

$$E\varepsilon_{12} = (1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - a_1 \frac{X_3^2}{2}, \quad E\varepsilon_{13} = -(1 + \nu) \frac{\partial \psi}{\partial X_2} - a_1 (1 + \nu) X_2 X_3$$

La méthode systématique de construction des déplacements en coordonnées cartésiennes consiste à calculer le gradient des rotations infinitésimales qui s'exprime en fonction du gradient des déformations :

$$\omega_{12,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{12,1}, \quad \omega_{12,2} = \varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1}, \quad \omega_{12,3} = \varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1}$$

dont on déduit la composante de rotation par rapport à l'axe 3 :

$$\omega_{12} = \frac{a_1}{E} \left( X_1 \left( \frac{X_1}{2} - L \right) + \nu \frac{X_2^2}{2} - (1 + \nu) \frac{X_3^2}{2} \right) + \frac{1 + \nu}{E} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - AX_3 \right)$$

Au passage, on a utilisé le fait que le laplacien de  $\psi$  est égal à la constante  $A$ . De même,

$$\omega_{23,1} = \varepsilon_{21,3} - \varepsilon_{31,2}, \quad \omega_{23,2} = 0, \quad \omega_{23,3} = -\varepsilon_{33,2}$$

$$\omega_{31,1} = 0, \quad \omega_{31,2} = \varepsilon_{32,1} - \varepsilon_{12,3}, \quad \omega_{31,3} = \varepsilon_{33,1} - \varepsilon_{13,3}$$

L'intégration fournit

$$\omega_{23} = a_1 \frac{\nu}{E} (X_1 - L) X_3 + \frac{1 + \nu}{E} A X_1, \quad \omega_{31} = \frac{a_1}{E} X_2 X_3 + \frac{1 + \nu}{E} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X_2} - A X_2 \right) \quad (24.37)$$

Le gradient du déplacement est la somme des déformations et des rotations infinitésimales :

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= \varepsilon_{11} = \frac{a_1}{E} X_2 (X_1 - L) \\ u_{1,2} &= \varepsilon_{12} + \omega_{12} = \frac{a_1}{E} \left( \frac{X_1^2}{2} - L X_1 + \nu \frac{X_2^2}{2} - (2 + \nu) \frac{X_3^2}{2} \right) + \frac{1 + \nu}{E} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - A X_3 \right) \\ u_{1,3} &= \varepsilon_{13} + \omega_{13} = -(2 + \nu) \frac{a_1}{E} X_2 X_3 - \frac{1 + \nu}{E} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial X_2} - A X_2 \right) \end{aligned} \quad (24.38)$$

En vue d'intégrer les équations précédentes, on peut remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial X_3} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial X_3} - A X_3 \right) = \frac{\partial}{\partial X_2} \left( 2 \frac{-\partial \psi}{\partial X_2} + A X_2 \right)$$

en tenant compte du fait que le laplacien de  $\psi$  vaut  $A$ . Dans le cas d'une section simplement connexe, il existe donc une fonction  $\varphi$  vérifiant les conditions (24.36). Cette fonction permet alors d'intégrer les équations précédentes et d'obtenir la fonction  $u_1(X_1, X_2, X_3)$ . Le calcul de  $u_2$  et  $u_3$  est plus simple car il ne fait pas intervenir la fonction  $\varphi$  mais doit être fait soigneusement pour aboutir aux expressions annoncées.

#### Fonction de gauchissement

La fonction  $\varphi$  est appelée fonction de gauchissement. Montrer qu'elle est solution d'un problème de Neumann posé sur une section  $S$  de contour  $\partial S$ , que l'on explicitera.

Vérifier que la condition nécessaire d'existence d'une solution au problème de Neumann ainsi posé est remplie. On admettra alors qu'une telle solution existe et est unique, à une constante près.

► On vérifie d'abord que les relations (24.36) impliquent que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_3 \partial X_2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2 \partial X_3} = 0$$

Les contraintes de cisaillement doivent également satisfaire la condition (24.32) sur le bord  $\partial S$  de la section :

$$\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = \frac{\partial \psi}{\partial X_3}n_2 - \frac{\partial \psi}{\partial X_2}n_3 - \frac{a_1}{1+\nu} \frac{X_3^2}{2} n_2 - a_1 X_2 X_3 n_3 = 0 \quad (24.39)$$

En tenant compte des relations (24.36) liant les fonctions  $\psi$  et  $\varphi$ , on obtient la condition au bord :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} n_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} n_3 &= \text{Grad } \varphi \cdot \underline{n} = \left( \frac{a_1}{1+\nu} X_3^2 - A X_3 \right) n_2 + (2a_1 X_2 X_3 + A X_2) n_3 \\ &=: q^d(X_2, X_3) \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une condition de flux du gradient de  $\varphi$  imposé au bord à la valeur  $q^d$ . Comme on l'a vu au début du chapitre consacré à la torsion d'une barre cylindrique, une condition nécessaire d'existence d'une solution du problème de Poisson  $\Delta_2 \varphi = 0$  avec la condition de bord (24.40) est que la circulation de  $q^d$  le long de  $\partial S$  soit nulle. On pose :

$$P = -(2a_1 X_2 X_3 + A X_2), \quad Q = \frac{a_1}{1+\nu} X_3^2 - A X_3$$

On calcule alors la circulation de  $q^d$  le long du contour  $\partial S$  grâce à la formule de Green :

$$\int_{\partial S} q^d dl = \int_{\partial S} Q dX_3 + P dX_2 = \int_S \left( \frac{\partial Q}{\partial X_2} - \frac{\partial P}{\partial X_3} \right) dX_2 dX_3 = \int_S 2a_1 X_2 dX_2 dX_3 = 0$$

La condition nécessaire d'existence de la solution du problème de Neumann ainsi posé est bel et bien remplie.

#### Détermination de la constante A

A l'aide d'une condition encore inexploitée jusqu'ici, établir l'équation permettant de déterminer la constante  $A$  apparue dans la formule (24.30).

Montrer que si la section  $S$  admet l'axe 2 comme axe de symétrie, alors la constante  $A$  est nulle. On admettra ce résultat si l'on n'a pu l'établir.

► Un autre effet concomitant de l'application d'un effort tranchant à une poutre est une possible torsion de la poutre. L'effet de torsion est particulièrement visible sur les composantes de déplacement  $u_2$  et  $u_3$  au travers des termes proportionnels à  $A$  avec les monomes  $X_1 X_2$  et  $X_1 X_3$ , similaires à ceux trouvés dans l'étude de la torsion d'une barre de section quelconque.

Dans le cas présent, les moments de torsion  $M_1$  appliqués aux sections  $S_0$  et  $S_L$  sont nuls,

ce qui se traduit par la condition :

$$\int_{S_0} (X_2 \sigma_{13} - X_3 \sigma_{12}) dX_2 dX_3 = 0$$

condition apparue au paragraphe 24.2.1 mais non exploitée jusqu'ici. En introduisant les expressions (24.31) des contraintes et en tenant compte de (24.36), la condition suivante est obtenue :

$$\int_{S_0} (X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} - X_3 \frac{\partial \varphi}{\partial X_2}) dS - A(I_2 + I_3) + \int_{S_0} \frac{a_1}{1+\nu} X_3^3 dS = 0 \quad (24.40)$$

La première intégrale peut se transformer de la manière suivante grâce à la formule de Green :

$$\int_{S_0} \left( \frac{\partial}{\partial X_3} (X_2 \varphi) - \frac{\partial}{\partial X_2} (X_3 \varphi) \right) dS = - \int_{\partial S_0} \varphi (X_3 dX_2 + X_2 dX_3)$$

Cette intégrale est invariante si l'on ajoute une constante à  $\varphi$ , comme il se doit. L'évaluation de cette intégrale requiert la connaissance de  $\varphi$  assujettie à la connaissance de la géométrie de la section. Toutefois, on peut affirmer qu'elle dépend linéairement de  $A$  car le problème de Neumann considéré est linéaire par rapport à la constante imposée  $A$ . Il s'ensuit que l'équation (24.40) permet de déterminer  $A$  sans ambiguïté.

On en conclut que l'application d'un effort tranchant sur une poutre de section quelconque s'accompagne d'une torsion de la poutre en raison du couplage ainsi mis en évidence.

Lorsque la surface est invariante par la symétrie axiale  $X_3 \rightarrow -X_3$ , l'intégrale  $\int_{S_0} X_3^3 dX_2 dX_3$  s'annule et, par conséquent, la constante  $A$  est nulle aussi. Torsion et flexion simple sont alors découplées.

#### 24.2.3 Cas d'une poutre de section circulaire

Les résultats précédents sont maintenant explicités dans le cas d'une poutre en forme de cylindre de révolution. La section de la poutre correspond alors à un disque de rayon  $R$ .

##### Fonction de gauchissement pour une section circulaire

Dans le cas d'une section circulaire, la fonction  $\varphi$  prend la forme polynomiale suivante que l'on admettra<sup>9</sup> :

$$\varphi(X_2, X_3) = a_1 \frac{3+2\nu}{4(1+\nu)} \left( X_3^2 X_2 - \frac{X_2^3}{3} + R^2 X_2 \right) \quad (24.41)$$

Vérifier qu'il s'agit bel et bien de la solution, à une constante près, du problème de Neumann posé au paragraphe 24.2.2.

► Comme la section circulaire présente une symétrie centrale, la constante  $A$  est nulle d'après les résultats du paragraphe 24.2.2. On trouve alors effectivement que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_2^2} = -a_1 \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} X_2 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_3^2} \implies \Delta \varphi = 0$$

---

9. De manière équivalente, on a  $\psi(X_2, X_3) = a_1 \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \left( \frac{X_3^3}{3} - X_3 X_2 + R^2 X_3 \right)$ .

Dans le cas circulaire, le système de coordonnées cylindriques devient avantageux :

$$X_2 = r \cos \theta, \quad X_3 = r \sin \theta, \quad \underline{n} = [0 \quad \cos \theta \quad \sin \theta]^T, \quad 0 \leq r \leq R, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

où  $\underline{n}$  est la normale à la surface latérale  $\mathcal{A}$ . Nous allons vérifier que la condition de bord (24.40) est satisfaite. Pour cela, on voit d'une part que

$$\frac{a_1}{1+\nu} X_3^2 n_2 + 2a_1 X_2 X_3 n_3 = a_1 \frac{3+2\nu}{1+\nu} R^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

et d'autre part que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_2} R^2 \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial X_3} R^2 \sin \theta = a_1 \frac{3+2\nu}{1+\nu} R^2 \sin^2 \theta \cos \theta$$

#### *Etude du contexte infinitésimal*

Dans le cas d'une section circulaire, les champs de déplacements (24.33) à (24.35) prennent la forme suivante :

$$u_1 = \frac{a_1}{E} X_2 \left( X_1 \left( \frac{X_1}{2} - L \right) - \frac{1}{4} (X_2^2 + X_3^2) + \frac{1+2\nu}{4} R^2 \right) \quad (24.42)$$

$$u_2 = \frac{a_1}{E} \left( \frac{X_1^2}{2} \left( L - \frac{X_1}{3} \right) + \frac{\nu}{2} (X_1 - L)(X_3^2 - X_2^2) \right) \quad (24.43)$$

$$u_3 = a_1 \frac{\nu}{E} (L - X_1) X_2 X_3 \quad (24.44)$$

Donner les conditions portant sur  $T, E, R$  et  $L$  garantissant que les transformations obtenues restent infinitésimales. En notant  $\epsilon = R/L \ll 1$  l'élancement de la poutre, identifier quelle est la condition la plus sévère ?

► Calculons d'abord le moment quadratique pour une section circulaire :

$$I_3 = I_2 = \frac{\pi R^4}{4}$$

Les composantes du gradient du champ des déplacements doivent rester suffisamment petites. En particulier, la solution proposée est licite à condition que :

$$|u_{1,1}| = \left| \frac{a_1}{E} X_2 (X_1 - L) \right| \leq \left| \frac{a_1}{E} RL \right| \sim \frac{|T|}{ER^2} \frac{L}{R} \ll 1$$

$$|u_{1,3}| = \left| \frac{a_1}{E} X_2 X_3 \right| \leq \left| \frac{a_1}{E} R^2 \right| \sim \frac{|T|}{ER^2} \ll 1$$

Une condition supplémentaire est obtenue en exigeant que

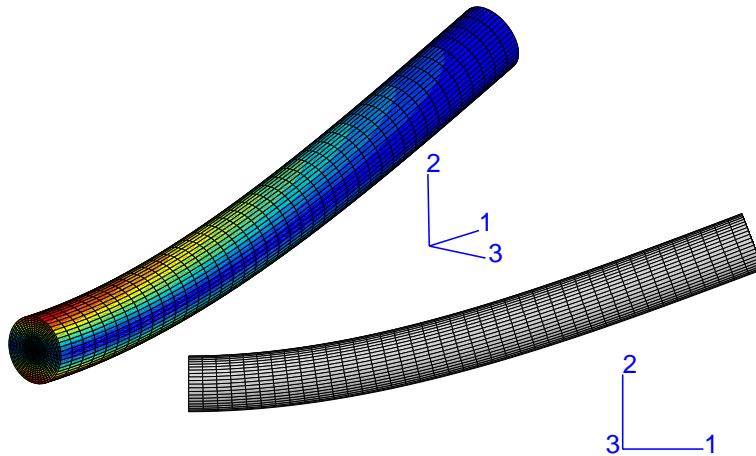
$$|u_{1,2}| \ll 1 \implies \left| \frac{a_1}{E} L^2 \right| \sim \frac{|T|}{ER^2} \frac{L^2}{R^2} \ll 1$$

L'analyse des autres composantes n'apporte pas de nouvelle restriction. En remarquant que l'élancement  $R/L = \epsilon$  doit être suffisamment petit pour que le principe de Saint-

Venant puisse s'appliquer, les trois conditions précédentes peuvent être réécrites respectivement sous la forme :

$$\frac{|T|}{ER^2} \ll \epsilon, \quad \frac{|T|}{ER^2} \ll 1, \quad \frac{|T|}{ER^2} \ll \epsilon^2$$

où il apparaît que c'est la dernière condition qui est la plus contraignante. Par exemple, si l'élancement est de 0,1, l'effort tranchant appliqué devra être plus petit qu'un centième de la force  $ER^2$ . Le fait que le module de Young soit 100 à 1000 fois plus grand que les contraintes typiques supportées par les matériaux laisse une marge de pertinence respectable à la solution obtenue dans l'hypothèse des petites perturbations.



*Figure 24.3 : Poutre de section circulaire encastrée d'un côté et soumise à une effort tranchant de l'autre : vue 3D montrant également le champ de contrainte équivalente de von Mises (valeurs presque nulles en bleu, et maximales en rouge), et vue de profil. L'élancement de la poutre est  $R/L = 0.05$ .*

#### Déformée de la fibre moyenne et gauchissement de la section

Quelle forme prend la fibre moyenne initialement située en  $X_2 = X_3 = 0$ ? Montrer que les sections droites ne restent pas planes après déformation. Pour cela on pourra étudier la déformée de la ligne d'équation  $X_1 = X_0, X_3 = 0$  à  $X_0$  fixé. On appelle gauchissement de la surface cet écart à la planéité que l'on illustrera graphiquement.

► La nouvelle position d'un point de la fibre moyenne est donnée par

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = -\frac{a_1}{E} \frac{X_1^2}{2} \left( \frac{X_1}{3} - L \right), \quad x_3 = 0$$

Le nouveau lieu des points de la ligne moyenne a donc pour équation :

$$x_2 = -\frac{a_1}{E} \left( \frac{x_1^3}{6} - \frac{L}{2} x_1^2 \right)$$

Cette forme combine la forme parabolique due à la flexion induite par l'effort tranchant

et un terme de degré 3 caractéristique de la flexion simple. La déformée de la poutre est illustrée en 3D sur la figure 24.3.

Les points de la ligne d'équation  $X_1 = X_0, X_3 = 0$  adoptent la nouvelle position

$$x_1 = X_0 + \frac{a_1}{E} \left( \left( \frac{X_0^2}{2} - LX_1 \right) X_2 - \frac{1}{4} (X_2^3 + (1+2\nu)R^2 X_2) \right)$$

$$x_2 = X_0 + \frac{a_1}{E} \left( L \frac{X_0^2}{2} - \frac{X_0^3}{6} - \frac{\nu}{2} (X_0 - L) X_2^2 \right), \quad x_3 = 0$$

Au premier ordre, l'équation de la ligne transformée est

$$x_1 = X_0 + x_2 \frac{a_1}{E} \left( \frac{X_0^2}{2} - LX_0 + \frac{1+2\nu}{4} R^2 \right) - \frac{x_2^3}{4}$$

La contribution en  $X_2^3$  représente l'écart à la planéité.

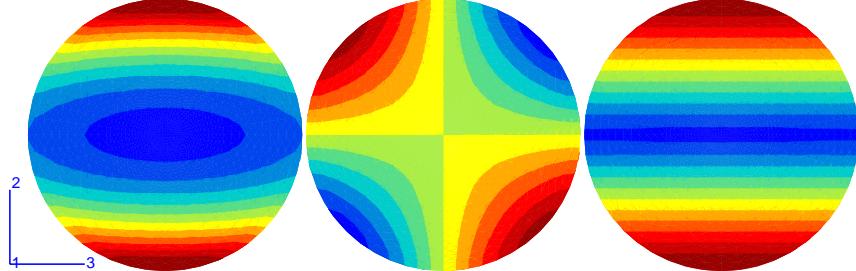


Figure 24.4 : Champs de contrainte  $\sigma_{12}$  (à gauche),  $\sigma_{13}$  (au milieu) et de la contrainte équivalente de von Mises (à droite), dans une section droite située au milieu de la poutre.

Les contraintes de cisaillement ne dépendent pas du choix de la section. Les valeurs minimales et maximales sont respectivement bleues et rouges.

### Analyse des contraintes et limite d'élasticité

En tout point de chaque section droite, donner l'expression de la contrainte normale à cette section.

A quel(s) endroit(s) la valeur absolue de cette contrainte normale est-elle maximale ? Quelle est la valeur de ce maximum en fonction de  $|T|$  et de la géométrie de la poutre.

Montrer que la norme de la contrainte tangentielle  $\|\boldsymbol{\tau}\|$  est maximale au centre de chaque section et prend la valeur :

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{max} = |a_1| \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} R^2 = \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} \frac{|T|}{\pi R^2} \quad (24.45)$$

Indiquer quelle est, de la contrainte normale maximale et du cisaillement maximal, la contrainte dominante.

On suppose que la limite d'élasticité du matériau constitutif de la poutre est bien décrite par un critère de von Mises. Indiquer, qualitativement, à quel endroit de la poutre la plasticité va apparaître en tout premier lieu.

► Dans le cas de la section circulaire, les contraintes prennent la forme :

$$\sigma_{11} = a_1(X_1 - L)X_2 \quad (24.46)$$

$$\sigma_{12} = a_1 \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)}(X_3^2 - X_2^2 + R^2) - \frac{a_1}{1+\nu} \frac{X_3^2}{2} \quad (24.47)$$

$$\sigma_{13} = -a_1 \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} X_2 X_3 \quad (24.48)$$

La contrainte normale à la section en chaque point est  $\sigma_{11}$ . Sa valeur maximale est atteinte en  $X_1 = 0, X_2 = \pm R$  et vaut :

$$|\sigma_{11}|_{max} = |a_1|RL = 4 \frac{|T|}{\pi R^2} \frac{L}{R} = 4 \frac{|T|}{\pi R^2} \frac{1}{\epsilon}$$

Sa dépendance en  $1/\epsilon$  en fait une contrainte forte de traction ou de compression en  $X_2 = \pm R$  selon le signe de  $T$ .

Les contraintes tangentielles s'expriment plus simplement en coordonnées cylindriques

$$\sigma_{12} = a_1 \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} r^2 \sin^2 \theta + a_1 \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} (R^2 - r^2), \quad \sigma_{13} = -a_1 \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} r^2 \sin \theta \cos \theta$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 &= \frac{a_1^2}{4^2(1+\nu)^2} ((1+2\nu)^2 r^4 \sin^2 \theta + (1+2\nu)(3+2\nu)r^2(R^2 - r^2) \sin^2 \theta \\ &\quad + (3+2\nu)^2 \frac{(R^2 - r^2)^2}{4}) \end{aligned}$$

La contrainte tangentielle est donc la plus grande le long de l'axe 3 correspondant à  $\theta = \pi/2$  comme le montre la figure 24.4. Le polynôme correspondant

$$\begin{aligned} \tau^2(r) &= \frac{a_1^2}{4^2(1+\nu)^2} ((1+2\nu)((1+2\nu)r^4 + (3+2\nu)r^2(R^2 - r^2)) \\ &\quad + (3+2\nu)^2 \frac{(R^2 - r^2)^2}{4}) \end{aligned}$$

prend sa valeur maximale en  $r = 0$ , donnée effectivement par (24.45).

Le rapport

$$\frac{|\sigma_{11}|_{max}}{\tau_{max}} = \frac{8(1+\nu)}{3+2\nu} \frac{L}{R} = \frac{8(1+\nu)}{3+2\nu} \frac{1}{\epsilon}$$

montre que la contrainte normale domine sur le cisaillement par un facteur  $1/\epsilon$ .

La contrainte équivalente de von Mises est définie par :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2}$$

où  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{dev}}$  représente le déviateur des contraintes. Une déformation plastique risque d'apparaître dès que la contrainte équivalente de von Mises atteint une valeur critique. On voit que les contraintes normales et tangentielles contribuent toutes les deux à la contrainte de von Mises. Comme la contrainte normale est dominante à l'extrémité  $S_0$ , il est probable que la plasticité va commencer en  $X_1 = 0, X_2 = \pm R$ . Le champ de contrainte

équivalente de von Mises est illustré sur la figure 24.4 à droite sur une section droite prise au milieu de la poutre et sur la figure 24.3 à gauche et confirme cette intuition.

#### *Application numérique : flèche de la poutre*

Dans le cas d'une poutre en acier de dimensions  $L = 100$  mm et  $R = 10$  mm encastrée en  $S_0$  et soumise à un effort tranchant  $T$ , réalisé en suspendant un poids de 100 kg à l'extrémité  $S_L$ , calculer la flèche de la poutre, définie comme le déplacement  $u_2$  du barycentre de la section  $S_L$ . L'enca斯特ment en  $S_0$  sera traduit ici par le fait que le barycentre de  $S_0$  ne se déplace pas et que la section  $S_0$  ne subit aucune rotation de corps rigide. Cette situation correspond peu ou prou au problème considéré par Galilée comme le montre le fameux dessin de la figure 24.5, à ceci près que Galilée a considéré une poutre en bois de section rectangulaire.

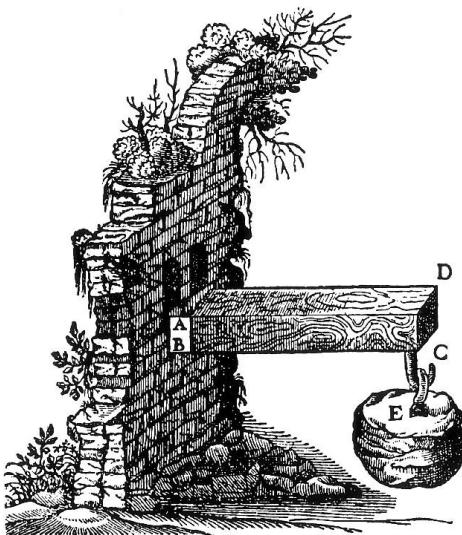


Figure 24.5 : Dessin paru dans les *Discorsi e Dimonstrazioni matematiche intorno a due nuoue scienze attenanti alla mecanica ed i movimenti locali* de Galilée (1638).

Evaluer les contraintes tangentielles et normales maximales. Pensez-vous que la limite d'élasticité soit franchie et que la poutre métallique soit irrémédiablement fléchie par cette charge ?

► La flèche  $\delta$  est calculée en  $X_1 = L, X_2 = X_3 = 0$  grâce à l'expression (24.43) du déplacement  $u_2$  :

$$\delta = \frac{a_1}{E} \frac{L^3}{3} = \frac{4T}{3\pi R E \epsilon^3}$$

Pour l'acier, le module de Young vaut typiquement 200000 MPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . On calcule alors une flèche de -0.2 mm lorsque l'on accroche un poids de 100 kg à l'extrémité de la poutre encastrée. La contrainte normale maximale atteinte est de 125 MPa tandis que le cisaillement maximal vaut 4.3 MPa. Un acier de bonne qualité peut tout à fait se comporter de manière élastique sous un tel chargement. La limite d'élasticité d'un acier peut aller de 100 MPa à plus de 3 GPa pour les aciers dits à haute résistance.

Cela dépend de sa composition métallurgique et des traitements thermomécaniques subis par l'acier lors de son élaboration. On vérifie également que les conditions du contexte infinitésimal sont bien remplies :  $T/(ER^2) \sim 10^{-5} \ll \epsilon^2 = 0.01$ . L'élançement de la poutre  $\epsilon = 0.1$  est toutefois un peu élevé.

#### *Remarque dans le cas d'une section annulaire*

Si la poutre est un tube, le problème de Neumann est à compléter par des conditions sur la frontière intérieure de la couronne. Remarquer que la fonction de gauchissement (24.41) ne convient plus, en raison de la présence du terme faisant intervenir le rayon extérieur  $R$  qui ne permet pas de satisfaire la condition intérieure. On trouvera dans le livre de (Muskhelishvili, 1977) les modifications à apporter à la fonction de gauchissement pour résoudre le problème du tube soumis à un effort tranchant.

#### *24.2.4 Epilogue : retour sur le problème de Saint-Venant*

Arrivés au terme de la résolution du problème de la flexion simple, et forts de la connaissance des solutions des problèmes de traction/compression simple, flexion pure et torsion d'une poutre acquises en exercice, justifier que nous sommes en mesure de fournir une solution exhaustive au problème dit de Saint-Venant consistant à imposer un torseur quelconque donné sur l'une des extrémités de la poutre.

Saint-Venant publia pour la première fois la solution générale de ce problème en 1856 dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences. Ce n'est toutefois que récemment que le principe de Saint-Venant, invoqué dans la résolution du problème du même nom, a été converti en théorème, pour une poutre suffisamment élancée, par (Toupin, 1965; Ladevèze, 1983).

Pour un exposé explicite de cette solution générale, on consultera avantageusement les références (Ballard and Millard, 2011), ainsi que les classiques (Mandel, 1994; Love, 1944; Muskhelishvili, 1977).

- La solution générale du problème de Saint-Venant résulte de la superposition de la solution de 6 problèmes indépendants : une résultante normale imposée (traction/compression d'une barre), 2 efforts tranchants dans les directions 2 et 3, un moment de torsion par rapport à l'axe 1 et deux moments de flexion par rapport aux axes 2 et 3. Les problèmes de traction, torsion et flexion normale ont déjà été traités dans les chapitres précédents. Le cas de l'effort tranchant a fait l'objet de ce chapitre. La solution du problème de Saint-Venant est donc désormais exhaustive.

## 25 Machines tournantes

Les machines tournantes sont fréquentes dans les structures industrielles. Les disques et arbres sont des pièces critiques par exemple dans les moteurs d'avion et dans les turbines pour la production d'énergie. Leur dimensionnement est d'une importance capitale pour l'intégrité de la structure en service. Ils sont soumis à des forces centrifuges importantes et ne doivent pas éclater. En guise d'exemple, un assemblage complet de turbines de moteur d'hélicoptère est présenté sur la figure 25.1(a) comprenant la partie froide (compresseur) et la partie chaude du moteur (turbines haute pression en sortie de chambre de combustion). Les spécificités du moteur d'hélicoptère par rapport au moteur d'avion de ligne sont sa taille limitée et des vitesses de rotation des turbines sensiblement plus élevées. Dans ce moteur, on distingue deux familles de disques :

- les **disques alésés** possèdent un alésage (trou) concentrique permettant le passage de l'arbre. Deux exemples sont donnés sur les figures 25.1(b) et (c).
- les **disques non alésés** sont situés en tête ou fin d'assemblage et ne possèdent pas de trou central (figure 25.1(d)).

Les disques sont munis d'aubes formant un monobloc (figure 25.1(b)) ou attachées grâce à des encoches comme sur les figures 25.1(c) et (d). Les disques non solidaires de l'arbre sont entraînés en rotation grâce à des barres reliant les disques et passant par les trous visibles sur les disques des figures 25.1(c) et (d).

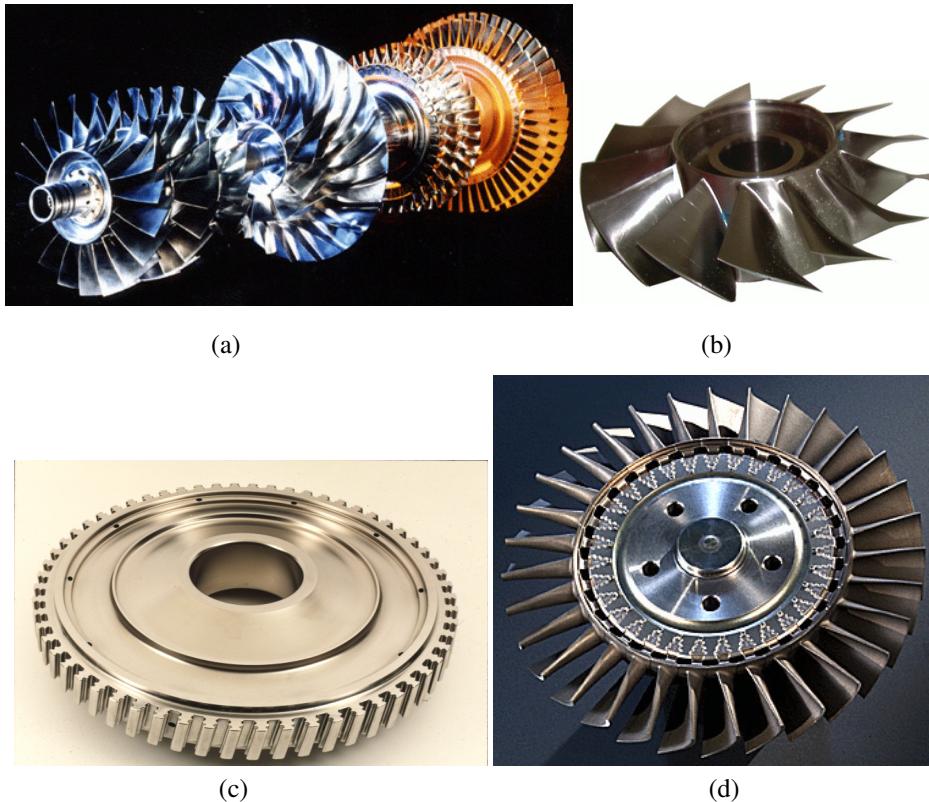
Le dimensionnement des disques de turbines vise à éviter l'éclatement aux vitesses de rotation souhaitées. La résistance à l'éclatement est testée lors d'essais de sur-vitesse sur banc. La figure 25.2 montre un disque de turbine de moteur d'hélicoptère qui a éclaté lors d'un tel essai. L'objectif de l'application traitée dans ce chapitre est d'évaluer les vitesses limites du fonctionnement élastique de disques alésés et non alésés. Les disques sont en général soumis à des températures élevées. Dans ce problème, on se place dans des conditions isothermes.

Dans les paragraphes 25.1 et 25.2, des expressions simplifiées des contraintes régnant dans les disques minces en rotation sont établies et appliquées à la prévision de l'entrée en plasticité et de la rupture des composants. Une solution complète du problème, au sens de Saint-Venant, est établie au paragraphe 25.3. Elle justifie *a posteriori* les expressions mises en avant dans les sections précédentes. L'établissement de cette solution nous conduit à mener ensuite une réflexion plus générale sur la déformation axisymétrique d'un composant cylindrique de longueur finie soumis à une large gamme de sollicitations. Une telle démarche est présentée au paragraphe 25.4. On établit au passage pour quels types de sollicitations la solution remplit les conditions de contraintes planes. Ces développements viennent en complément de la discussion sur la résolution de problèmes bidimensionnels en contraintes planes, entamée au paragraphe 9.3.2.

Le chapitre se termine par une évaluation des vitesses critiques dans les arbres en rotation.

### 25.1 Expressions simplifiées de la réponse élastique linéarisée d'un disque mince en rotation

On va déterminer la réponse élastique linéarisée d'un disque simplifié axisymétrique d'axe  $e_z$  présentant une section rectangulaire dans le plan  $(r, z)$  de rayon intérieur  $r_i$  et de rayon extérieur  $r_e$  comme sur la figure 25.3. On ne tient donc pas compte des variations d'épaisseur des disques réels. On supposera dans cette partie que le disque est libre d'effort en  $r = r_i$  (existence d'un jeu entre l'arbre et le disque). Dans ce problème, l'aubage n'est pas pris en compte pour des raisons de simplicité. Le disque est alors libre



*Figure 25.1 : (a) Vue d'ensemble de l'assemblage de turbines d'un moteur d'hélicoptère (source Turbomeca, cf. (Mazière, 2007)). (b) Disque alésé et son aubage (rouet de diamètre : 60 mm sans aubes). (c) Pour comparaison, disque alésé de moteur d'avion dépouillé de ses aubes (turbine haute pression, diamètre : 1000 mm). (d) Disque non alésé et ses aubes (diamètre du disque : 100 mm).*

d'effort en  $r = r_e$ .

On se restreint au contexte des petites perturbations et au cas des contraintes planes ( $\sigma_{zz} = 0$ ) licite pour un disque suffisamment mince. Le matériau a un comportement élastique isotrope linéarisé. La configuration initiale est supposée correspondre à un état naturel.

Le disque tourne à la vitesse angulaire  $\omega \underline{e}_z$  supposée constante (ou variant très lentement). Dans le problème, on va déterminer les composantes des champs de contraintes, de déformations et de déplacements dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , d'origine  $O$ , attaché au disque. On travaille donc dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire  $\omega \underline{e}_z$ .

### 25.1.1 Efforts centrifuges

Dans le référentiel tournant attaché au disque, les équations d'équilibre s'écrivent

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0 \quad (25.1)$$



Figure 25.2 : Disque de turbine éclaté après un essai de sur-vitesse sur banc (source Turbomeca, cf. (Mazière, 2007)). La géométrie initiale du disque est celle de la figure 25.1(d).

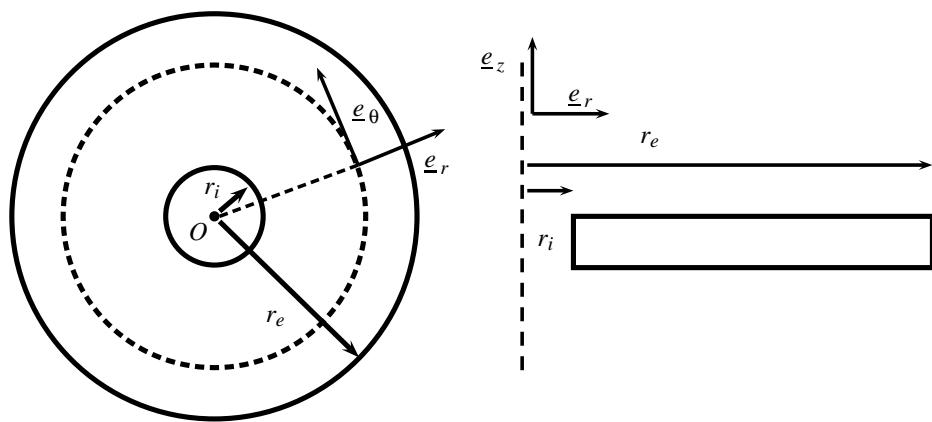


Figure 25.3 : Schématisation d'un disque de turbine alésé ; dimensions du disque et introduction des coordonnées cylindriques.

Montrer que les efforts volumiques induits par la vitesse d'entraînement du disque valent :

$$\rho \underline{f} = \rho \omega^2 r \underline{e}_r \quad (25.2)$$

► On calcule la vitesse d'entraînement du référentiel attaché au disque :

$$\underline{x}^* = \underline{Q}(t) \cdot \underline{x}$$

$$\dot{\underline{x}}^* = \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{Q}^T \cdot \underline{x}^* = \underline{W} \cdot \underline{x}^* = \underline{\omega} \wedge \underline{x}^*$$

où  $\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z$ . D'où

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{x}}^* &= \underline{\omega} \wedge \dot{\underline{x}}^* = \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{x}^*) \\ &= (\underline{\omega} \cdot \underline{x}^* \underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \underline{\omega}) \underline{x}^*) \\ &= -\omega^2 r \underline{e}_r \end{aligned} \quad (25.3)$$

pour  $\underline{x}^* = r \underline{e}_r$ , où  $\underline{e}_r$  est attaché au disque. Dans le référentiel attaché au disque, il existe donc une force d'inertie  $-\rho \ddot{\underline{x}}^*$ . On n'utilisera plus la notation  $\underline{x}^*$  dans la suite.

### 25.1.2 Forme du tenseur des contraintes

On cherche l'état de contraintes dans le disque sous la forme

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25.4)$$

Le disque simplifié (ainsi que les autres données du problème) étant axisymétrique, les composantes recherchées ne dépendent pas de la variable  $\theta$ . Dans ce problème, on va voir s'il est possible de trouver des expressions simplifiées de la solution, avec des contraintes qui sont indépendantes de la variable  $z$ . Les composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  sont donc recherchées comme des fonctions de la variable  $r$  seulement.

Déduire de (25.1) une équation portant sur les composantes recherchées du tenseur des contraintes.

► L'expression de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 en coordonnées cylindriques conduit à l'équation suivante portant sur les composantes de contraintes :

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad (25.5)$$

où  $\sigma'_{rr}$  désigne la dérivée par rapport à  $r$  de  $\sigma_{rr}$ .

### 25.1.3 Une condition de compatibilité

En utilisant une équation de compatibilité et les relations d'élasticité linéaire isotrope, établir la relation suivante

$$(1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\sigma'_{\theta\theta} - \nu \sigma'_{rr}) \quad (25.6)$$

où  $\sigma'_{rr}$  (resp.  $\sigma'_{\theta\theta}$ ) désigne la dérivée par rapport à  $r$  de  $\sigma_{rr}$  (resp.  $\sigma_{\theta\theta}$ ).

► En coordonnées cylindriques et lorsque les déformations ne dépendent que de  $r$ , une équation de compatibilité est

$$\varepsilon_{rr} = u'_r = (r\varepsilon_{\theta\theta})' = \varepsilon_{\theta\theta} + r\varepsilon'_{\theta\theta} \quad (25.7)$$

où  $u_r$  est la composante radiale de déplacement. Les déformations sont liées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu\sigma_{\theta\theta}}{E}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \frac{\nu\sigma_{rr}}{E},$$

Ces relations peuvent alors être substituées dans (25.7) ce qui conduit à (25.6).

#### 25.1.4 Détermination des contraintes

Intégrer le système des deux équations obtenues et montrer que les contraintes se mettent sous la forme

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{8}(3+\nu) + \frac{A}{r^2} + B \quad (25.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2 r^2}{8}(1+3\nu) - \frac{A}{r^2} + B \quad (25.9)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes d'intégration.

Donner enfin l'expression complète des contraintes en fonction des caractéristiques du disque et des propriétés du matériau.

► En éliminant  $\sigma_{\theta\theta}$  dans (25.5) et (25.6), on obtient l'équation différentielle suivante portant sur  $\sigma_{rr}$  :

$$r\sigma''_{rr} + 3\sigma'_{rr} + \rho\omega^2 r(3+\nu) = 0 \quad (25.10)$$

dont la résolution conduit à (25.8) et (25.9).

Les conditions aux limites retenues dans ce problème sont

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = \sigma_{rr}(r = r_e) = 0$$

ce qui donne

$$A = -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r_i^2 r_e^2, \quad B = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2(r_i^2 + r_e^2)$$

On obtient finalement l'expression complète des contraintes :

$$\sigma_{rr} = -\frac{3+\nu}{8}\frac{\rho\omega^2}{r^2}(r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2) \quad (25.11)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \left( (3+\nu) \left( \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) - (1+3\nu) \right) \quad (25.12)$$

#### 25.1.5 Déformations et déplacements

Les composantes du tenseur des déformations infinitésimales se déduisent des résultats précédents. En donner les expressions complètes.

► Les relations d'élasticité isotrope linéarisées fournissent les déformations suivantes :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left( 3(\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right) \quad (25.13)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left( (\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right) \quad (25.14)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left( 2(1 + \nu) - (3 + \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) \quad (25.15)$$

Montrer que les résultats précédents permettent de déterminer la composante radiale de déplacement  $u_r$ .

► Comme le déplacement radial vaut  $u_r = r\varepsilon_{\theta\theta}$ , il ne dépend pas de  $z$  et est entièrement déterminé :

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \left( (\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right) \quad (25.16)$$

Donnons au passage la composante  $u_\theta$ . Les dérivées partielles de  $u_\theta$  par rapport à  $r$  et  $z$  interviennent dans les deux composantes de déformation suivantes :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{r\theta} &= -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{aligned}$$

Comme ces deux cisaillements sont nuls dans le cadre de la solution recherchée,  $u_\theta$  est une fonction de  $r$  seulement et vaut

$$u_\theta = \alpha r \quad (25.17)$$

Cette composante représente une rotation infinitésimale d'angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $e_z$ . Fixons ce mouvement infinitésimal de corps rigide à  $\alpha = 0$  dans la suite.

Montrer qu'il n'est pas possible de déterminer  $u_z$ . On constate donc l'échec de la démarche précédente pour trouver une solution acceptable au problème posé. Quelle hypothèse initiale doit-on remettre en cause ?

Il est possible en fait de trouver une solution acceptable à ce problème, au moins au sens de Saint-Venant. Cette solution plus complexe est illustrée par la figure 25.4 et sera établie au paragraphe 25.3. Commenter la déformée du disque vis-à-vis des résultats précédents.

► L'intégration de l'équation (25.15) par rapport à  $z$  conduit à l'expression de  $u_z$  suivante :

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} z \left( 2(1 + \nu) - (3 + \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) + f(r) \quad (25.18)$$

où une fonction  $f$  de la coordonnée  $r$  doit être introduite. Pour la déterminer, il faut calculer la déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\nu(1 + \nu)}{2E} \rho\omega^2 r z + f'(r) \quad (25.19)$$

Dans la démarche développée précédemment, un tel cisaillement est nul. Or, il est impossible de déterminer une fonction  $f$  dépendant de  $r$  seulement et annulant le cisaillement précédent.

L'échec de la démarche de résolution proposée est patent et nous amène à remettre en question les hypothèses simplificatrices introduites au début du problème. Deux hypothèses peuvent légitimement être remises en question : le cadre même des contraintes planes et l'indépendance des contraintes par rapport à la variable  $z$ . Le caractère mince du disque nous a incité à tester ces hypothèses. Toutefois, l'argument de minceur, à lui seul, ne permet d'exclure ni la dépendance en  $z$  (le contre-exemple étant la flexion d'un disque mince), ni même l'existence de contraintes  $\sigma_{zz}$  ou  $\sigma_{rz}$  dans la solution, même si ces dernières doivent s'annuler à la surface libre du disque. On montrera au paragraphe 25.3 qu'il est possible de construire une solution acceptable, en contraintes planes, au problème posé, mais seulement au sens de Saint-Venant. La différence fondamentale entre cette solution acceptable et les champs proposés précédemment est la dépendance en  $z$  des contraintes et déformations.

Cependant, il s'avère que les expressions des contraintes et déformations proposées précédemment représentent fidèlement certains aspects de la solution véritable. C'est pourquoi on propose de continuer à travailler avec ces expressions que l'on appellera dans la suite "expressions simplifiées" de la solution acceptable. Pour cela, indiquer un argument qui incite à retenir l'expression suivante de  $u_z$  :

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho \omega^2 r^2}{4} z \left( 2(1 + \nu) - (3 + \nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) \quad (25.20)$$

Dans la suite du problème on travaille avec les expressions simplifiées des contraintes, déformations et déplacements ainsi déterminées.

► En vertu de la symétrie du disque (et des données du problème) par rapport au plan  $z = 0$ , la condition suivante est attendue :

$$u_z(r, z = 0) = 0, \quad \forall r \in [r_i, r_e] \quad (25.21)$$

Cette condition de symétrie entraîne la nullité de la fonction  $f(r)$  dans (25.18). Le déplacement  $u_z$  prend donc la forme annoncée. Cette condition ne remet pas en cause l'échec de la démarche proposée. Mais le champ de déplacement proposé constitue une expression simplifiée de la solution. Il est donc utile dans la pratique.

**La difficulté rencontrée pour remplir toutes les conditions de compatibilité avec la forme de solution initialement recherchée est typique des problèmes posés en contraintes planes. Les résultats obtenus de la sorte représentent des expressions simplifiées de la solution acceptable<sup>1</sup>. La pertinence de ces expressions simplifiées vient systématiquement de conditions de symétries particulières, dans le cas présent la symétrie par rapport au plan  $z = 0$ . Il sera utile de quantifier la correction apportée par la solution valide au sens de Saint-Venant.**

Les expressions simplifiées des contraintes, déformations et déplacements du disque mince alésé en rotation sont rassemblées dans la table 25.1.

1. sauf circonstance exceptionnellement favorable, autorisant une dépendance affine de la déformation  $\varepsilon_{zz}$  et donc aussi de la trace des contraintes avec les coordonnées  $x, y$  pour des conditions de contraintes planes selon  $z$ . Cette dépendance affine de la déformation  $\varepsilon_{zz}$  dans le contexte des contraintes planes est une conséquence des équations de compatibilité (cf. paragraphe 9.3.2).

### 25.1.6 Contexte infinitésimal

Le contexte des petites perturbations qui a présidé aux développements précédents exige en particulier que les déformations restent infinitésimales. Préciser les conditions correspondantes, en fonction de la vitesse de rotation et des caractéristiques du disque. On ne cherchera pas dans ce problème à analyser les conditions associées au caractère infinitésimal des rotations.

► Examinons d'abord la déformation circonférentielle,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2}{8E} \left( (\nu^2 - 1)r^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2}) \right) \\ &\geq \frac{\rho\omega^2}{8E} ((\nu^2 - 1)r_e^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1 + \nu)r_i^2)) \\ &\geq \frac{\rho\omega^2}{4E} (r_e^2(1 - \nu) + r_i^2(3 + \nu))\end{aligned}\quad (25.22)$$

ce qui montre que  $\varepsilon_{\theta\theta} \geq 0$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta} &\leq \frac{\rho\omega^2}{8E} ((\nu^2 - 1)r_i^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1 + \nu)r_e^2)) \\ &\leq \frac{\rho\omega^2}{4E} (r_i^2(1 - \nu) + r_e^2(3 + \nu)) \leq \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E}\end{aligned}\quad (25.23)$$

On examine ensuite les déformations radiales et axiales :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8E} \left( 3(\nu^2 - 1)r^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) - (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^2}) \right) \\ |\varepsilon_{rr}| &\leq \frac{\rho\omega^2}{8E} (3(1 - \nu^2)r_e^2 + (3 + \nu)((1 - \nu)(r_i^2 + r_e^2) + (1 + \nu)r_e^2)) \\ &\leq \frac{\rho\omega^2}{4E} (3 - \nu)r_e^2 \leq \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E}\end{aligned}\quad (25.24)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2}{4} (2(1 + \nu)r^2 - (3 + \nu)(r_i^2 + r_e^2)) \\ |\varepsilon_{zz}| &\leq \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2}{4} (2(1 + \nu)r_e^2 - (3 + \nu)(r_i^2 + r_e^2)) \\ &\leq 2 \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E}\end{aligned}\quad (25.25)$$

Pour établir ces inégalités, on a utilisé la propriété suivante du coefficient de Poisson :  $-1 < \nu < 0.5$  (cf. le résultat (8.65)). Les déformations précédentes sont infinitésimales si

$$\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{E} \ll 1 \quad (25.26)$$

L'expression (25.20) implique l'existence d'une déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \rho\omega^2 r z \quad (25.27)$$

Il se trouve que ce terme est du second ordre par rapport aux composantes de déformations retenues. En effet, d'après (25.26),

$$|\varepsilon_{rz}| = \frac{\nu(1+\nu)}{E} \rho \omega^2 r |z| \leq \frac{\rho \omega^2 r_e^2}{E} \frac{|z|}{r_e} \ll |\varepsilon_{rr}|, |\varepsilon_{\theta\theta}|, |\varepsilon_{zz}| \quad (25.28)$$

pourvu que  $|z|/r_e \ll 1$ , i.e. pourvu que le disque soit suffisamment mince. Cet argument ne peut pas être utilisé pour justifier les expressions simplifiées trouvées, au titre du contexte infinitésimal. En effet, un tel cisaillement  $\varepsilon_{rz}$  se traduit, en vertu de la loi d'élasticité isotrope, par une contrainte de cisaillement  $\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}$  non prise en compte dans la modélisation au paragraphe 25.1.2. Lorsque cette contrainte de cisaillement est insérée dans la première équation d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad (25.29)$$

les efforts volumiques sont corrigés et se transforment en  $(1+\nu)\rho\omega^2r$ , ce qui ne représente pas en général une perturbation infinitésimale des efforts appliqués, à moins que  $\nu$  soit idéalement nul.

Pour respecter le contexte infinitésimal, il reste encore à établir les conditions de rotations infinitésimales. Cette question sera abordée dans le cas de la solution correcte au sens de Saint-Venant établie au paragraphe 25.3.

#### 25.1.7 Contact avec le carter et prise en compte de l'aubage

Il existe un jeu initial entre l'extrémité des aubes et le carter du moteur. En service, un contact entre les aubes et un matériau abradable tapissant le carter est possible en raison des déformations du disque et des aubes. Ce léger contact garantit l'étanchéité de l'écoulement des gaz. L'augmentation du rayon du disque ne doit toutefois pas dépasser une valeur critique  $e$  sous peine d'un arrêt de fonctionnement du disque. Indiquer le jeu minimal  $e$  autorisé en fonction de la vitesse de rotation en service.

##### ► L'augmentation du rayon extérieur du disque est donné par le déplacement

$$u_r(r = r_e) = \frac{\rho \omega^2}{4E} r_e (r_e^2(1-\nu) + r_i^2(3+\nu)) \quad (25.30)$$

Pour une vitesse de rotation du disque donnée, des caractéristiques géométriques et mécaniques données, le jeu minimal autorisé est donc  $e = u_r(r = r_e)$  précédent, ou une fraction de cette valeur si une abrasion est autorisée.

Indiquer une manière approchée de prendre en compte l'influence des aubes sur la réponse du disque, tout en conservant la schématisation simplifiée axisymétrique du disque mince (figure 25.3).

Chaque aube exerce sur le disque une force égale à la résultante des forces centrifuges sur cette aube. On propose de distribuer de manière homogène cette force en tout point de la surface extérieure du disque sous la forme d'un effort surfacique donné :

$$\underline{\mathbf{t}}^d = \rho_{aube} \omega^2 r_a^2 \underline{\mathbf{e}}_r$$

La distance  $r_a$  est une distance effective définie à partir du rapport de  $n$  fois la norme de l'effort résultant sur chaque aube ( $n$ , nombre d'aubes) et de la surface extérieure du disque  $\pi r_e H$ ,  $2H$  étant l'épaisseur du disque. On est amené alors à reprendre les solutions

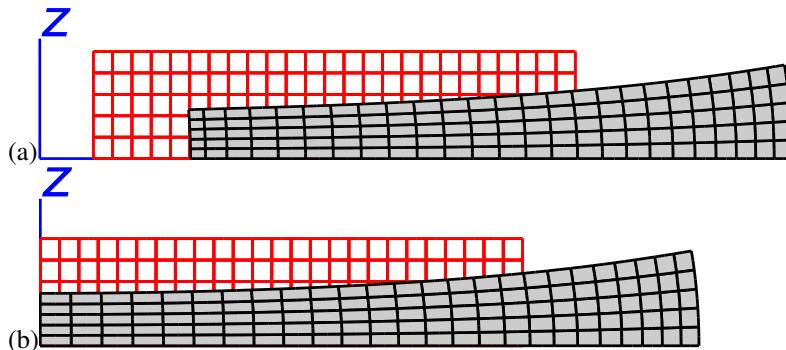


Figure 25.4 : Déformation des disques minces en rotation : (a) disque alésé, (b) disque non alésé. L'état initial est en rouge et l'état déformé en grisé. Les déformations ont été exagérées pour l'illustration.

en contraintes (25.8) et (25.9) et à identifier les constantes  $A$  et  $B$  avec les nouvelles conditions aux limites :

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = 0, \quad \sigma_{rr}(r = r_e) = \rho_{aube} \omega^2 r_a^2$$

## 25.2 Critères de plasticité et de rupture

On cherche ici les limites de fonctionnement du disque dans le régime élastique. Une vitesse de rotation critique est ainsi déterminée en fonction des caractéristiques du disque.

### 25.2.1 Seuil de plasticité et vitesse critique pour le disque mince alésé

On utilise le critère de Tresca pour prévoir le développement de déformations plastiques au sein du disque. On note  $\sigma_0$  la limite d'élasticité du matériau en traction. La fonction critère s'écrit

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \max_{(\sigma_i, \sigma_j)} (\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_0$$

où les  $\sigma_i$  désignent les contraintes principales. Le comportement du matériau reste purement élastique tant que

$$f(\boldsymbol{\sigma}) < 0$$

Tracer les profils de contraintes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  obtenues au paragraphe 25.1.4. On se placera dans la situation  $\nu > 0$  pertinente pour les classes de matériaux envisageables dans ce genre d'applications.

Indiquer en quel point du disque l'écoulement plastique va commencer.

Donner la vitesse de rotation  $\omega_e$  correspondante, associée à l'apparition possible de la plasticité.

Remarquer que la vitesse critique ne dépend pas du module de Young du matériau.

► La contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est une fonction décroissante de  $r$ , au moins pour  $\nu > 0$ . Elle prend les valeurs minimale et maximale suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^{min} &= \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4}((3 + \nu)r_i^2 + (1 - \nu)r_e^2) \\ \sigma_{\theta\theta}^{max} &= \sigma_{\theta\theta}(r = r_i) = \frac{\rho\omega^2}{4}((3 + \nu)r_e^2 + (1 - \nu)r_i^2)\end{aligned}$$

La différence

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{4}((1 - \nu)r^2 + (3 + \nu)\frac{r_i^2r_e^2}{r^2}) \geq 0 \quad (25.31)$$

est positive pour  $r_i \leq r \leq r_e$ . Ces contraintes normalisées par  $\sigma_{\theta\theta}^{min}$  sont tracées sur la figure 25.5. Les contraintes principales se rangent donc dans l'ordre

$$\sigma_{zz} = 0 \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta} \quad (25.32)$$

de sorte que le critère de Tresca devient :

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_0 < 0 \quad (25.33)$$

Pour une vitesse de rotation donnée, la fonction critère est maximale en  $r = r_i$ . C'est donc à cet endroit que va commencer l'écoulement plastique. Ceci devient possible lorsque

$$\sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_0$$

ce qui correspond à la vitesse critique

$$\rho\omega_e^2 = \frac{4\sigma_0}{r_i^2(1 - \nu) + r_e^2(3 + \nu)} \quad (25.34)$$

La vitesse critique dépend donc uniquement de la limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction, de la masse volumique et du coefficient de Poisson du matériau, ainsi que des caractéristiques géométriques  $r_i, r_e$  du disque.

En admettant que la plasticité s'initie au même endroit que pour le critère de Tresca, montrer que l'utilisation d'un critère de von Mises ne modifie pas la valeur de la vitesse limite du fonctionnement élastique.

► Le critère de von Mises fait intervenir la contrainte équivalente

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)}$$

(cf. paragraphe 4.4.5). Dans le cas du disque mince, elle vaut

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{rr}}$$

Elle prend la valeur  $\sigma_{\theta\theta}^{max}$  en  $r = r_i$  car la contrainte radiale s'y annule. En effet, le matériau en  $r = r_i$  est soumis à un état de traction simple selon  $e_\theta$ . En admettant que

la contrainte équivalente est effectivement maximale en  $r = r_i$ , on trouve donc la même vitesse limite qu'avec le critère de Tresca<sup>2</sup>.

### 25.2.2 Vitesse critique pour un disque en superalliage à base de nickel

Evaluer numériquement la vitesse critique  $\omega_e$  dans le cas d'un disque en superalliage à base de nickel de limite d'élasticité  $\sigma_0 = 1000 \text{ MPa}$ .

Les superalliages à base de nickel doivent leur nom à leur forte limite d'élasticité, même pour des hautes températures. On prendra les dimensions typiques pour les turbines d'hélicoptère :

$$r_i = 10 \text{ mm}, \quad r_e = 50 \text{ mm}$$

On donnera l'estimation trouvée en nombre de tours par minute.

► Les disques de turbines de compresseur sont en général en alliage de titane, tandis que ceux des turbines haute pression, soumises à des températures plus élevées sont en superalliage à base de nickel. Considérons ce dernier cas en prenant  $\rho = 8080 \text{ kg.m}^{-3}$  :

$$\omega_e = \sqrt{\frac{4 \times 10^9}{8080 (0.01^2(1 - 0.3) + 0.05^2(3 + 0.3))}} = 7750 \text{ rad.s}^{-1} \simeq 74000 \text{ tr.min}^{-1}$$

Les vitesses typiques de fonctionnement de moteur d'hélicoptère sont de  $60000 \text{ tr.min}^{-1}$ , contre  $20000 \text{ tr.min}^{-1}$  dans les moteurs d'avion.

### 25.2.3 Rupture brutale

Utiliser un critère de rupture fragile et déterminer la vitesse limite correspondante.

► Un critère de rupture fragile est le critère de contrainte normale positive maximale (cf. paragraphe 4.4.3). Dans le disque mince alésé, les contraintes principales sont rangées dans l'ordre (25.32). La contrainte normale positive maximale est donc  $\sigma_{\theta\theta}$ . A une vitesse donnée, elle est maximale en  $r = r_i$ , ce qui conduit à même vitesse critique  $\omega_e$  que celle donnée par (25.34).

### 25.2.4 Cas où le rayon de l'alésage est très faible

On envisage le cas de disques alésés pour lesquels  $r_i/r_e$  est très faible. Le passage à la limite  $r_i \rightarrow 0$  dans les résultats précédents doit être effectué avec précaution.

*Passage à la limite en un point  $0 < r \leq r_e$*

En considérant les contraintes déterminées au paragraphe 25.1.4, calculer les deux limites suivantes, lorsque l'on fait tendre  $r_i$  vers 0, en un point  $r$  donné du disque tel que  $0 < r \leq r_e$ , et fixé indépendamment de  $r_i$  :

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{rr}(r)$$

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r)$$

Tracer les profils de contraintes obtenues à la limite.

---

2. Un calcul un peu lourd montre que pour des valeurs pertinentes du coefficient de Poisson (en fait au moins pour  $\nu > -1/3$ ) la contrainte équivalente de von Mises est maximale en  $r = r_i$ . Par contre, elle n'est pas monotone par rapport à  $r$  pour toutes ces valeurs de  $\nu$ .

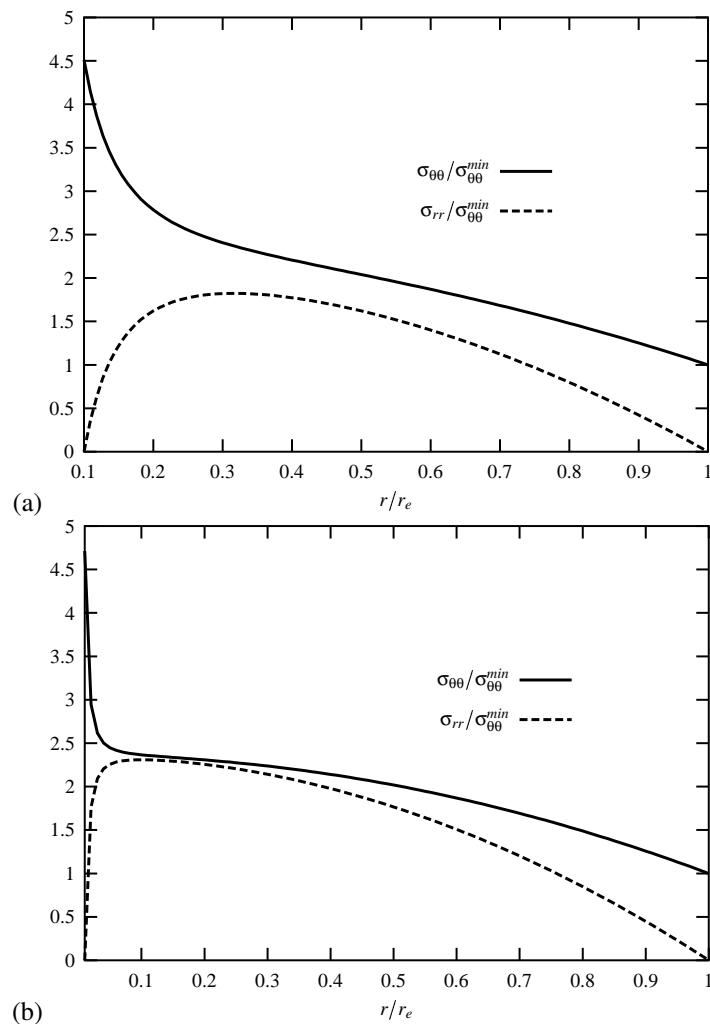


Figure 25.5 : Profil des contraintes radiale et circonférentielle dans un disque alésé mince en rotation, normalisées par la contrainte circonférentielle minimale : (a) cas  $r_e/r_i = 10$ , (b) cas  $r_e/r_i = 100$ . Pour les courbes, on a pris  $\nu = 0.3$ .

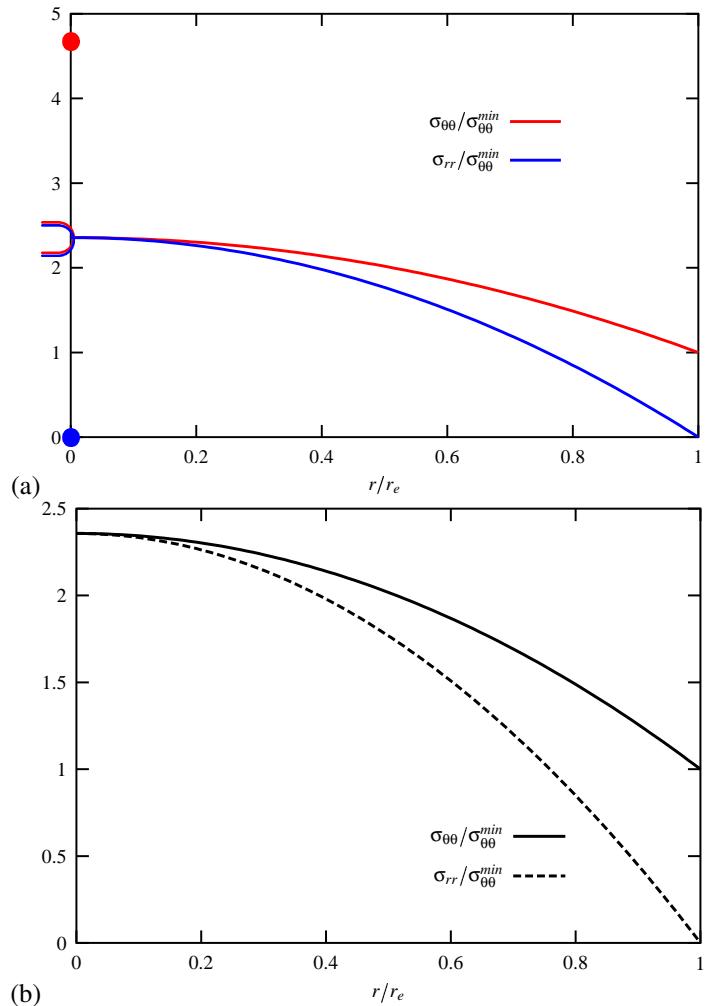


Figure 25.6 : Profil des contraintes radiale et circonférentielle dans un disque mince en rotation, normalisée par la contrainte circonférentielle minimale : (a) disque à alésage infinitésimal, (b) disque sans alésage. Pour les courbes, on a pris  $\nu = 0.3$ . Le signe  $\supset$  indique que le point entouré est exclus. Les valeurs en zéro des fonctions tracées en (a) sont données par les points.

► En faisant tendre  $r_i$  vers 0, pour  $0 < r \leq r_e$  fixé indépendamment de  $r_i$  dans les expressions (25.8) et (25.9), nous obtenons les fonctions

$$f_r(r) := \lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{rr}(r) = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_e^2 - r^2) \quad (25.35)$$

$$f_\theta(r) := \lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{\rho \omega^2}{8} ((3+\nu)r_e^2 - (1+3\nu)r^2) \quad (25.36)$$

*Passage à la limite en  $r = r_i$*

Déterminer cette fois la limite de la valeur des contraintes en  $r = r_i$  lorsque  $r_i$  tend vers 0 :

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{rr}(r_i)$$

$$\lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r_i)$$

Ajouter les points obtenus sur le tracé précédent.

Donner alors la vitesse limite de fonctionnement élastique d'un disque en rotation percé d'un trou central de rayon infinitésimal. Vérifier la cohérence du résultat avec l'expression  $\omega_e$  trouvée au paragraphe (25.2.1) dans le cas général.

► En faisant tendre  $r_i$  vers 0, pour  $r = r_i$  dans les expressions (25.8) et (25.9), nous obtenons les valeurs

$$f_r(0) := \lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{rr}(r_i) = 0 \quad (25.37)$$

$$f_\theta(0) := \lim_{r_i \rightarrow 0} \sigma_{\theta\theta}(r_i) = \frac{\rho \omega^2}{4} (3 + \nu) r_e^2 \quad (25.38)$$

On remarque que

$$f_\theta(0) = 2 \lim_{r \rightarrow 0, r > 0} f_\theta(r)$$

Autrement dit, la convergence des expressions des contraintes dans le disque alésé vers les fonctions  $f_r$  et  $f_\theta$  caractérisant les contraintes dans un disque dont l'alésage est infinitésimal, est une convergence simple mais non uniforme. La figure 25.5 pour deux valeurs du rapport  $r_i/r_e$  illustre ce fait. Les fonctions  $f_r$  et  $f_\theta$  présentent une discontinuité en  $r = 0$ .

Les profils de contraintes dans le disque à alésage infinitésimal sont représentées sur la figure 25.6(a).

Le critère de plasticité de Tresca sera atteint en premier lieu en  $r = 0$  pour  $f_\theta(0) = \sigma_0$  ce qui fournit la vitesse limite du disque à alésage infinitésimal :

$$\rho (\omega_e^{inf})^2 = \frac{4\sigma_0}{(3+\nu)r_e^2} \quad (25.39)$$

Remarquer que  $\omega_e^{inf}$  s'obtient en faisant  $r_i = 0$  dans l'expression (25.34) trouvée pour les disques à alésage quelconque.

### 25.2.5 Cas d'un disque mince non alésé

Des expressions simplifiées des contraintes et déformations régnant dans un disque mince non alésé peuvent être établies en suivant une démarche similaire à celle mise en œuvre

dans la situation précédente. On peut vérifier que ces expressions simplifiées coïncident avec l'état limite  $r_i \rightarrow 0$  déterminé au paragraphe 25.2.4, à condition toutefois de prolonger par continuité cette fonction en  $r = 0$ .

En déduire la vitesse limite de fonctionnement élastique du disque mince non alésé en rotation. Qu'en concluez-vous sur la résistance relative des disques alésé et non alésé ?

#### *Contraintes, déformations et déplacements*

Dans le cas du disque non alésé, l'équation différentielle à résoudre pour trouver  $\sigma_{rr}$  est toujours donnée par (25.10) lorsque le comportement du disque reste purement élastique. Les contraintes sont donc de la forme (25.8) et (25.9). L'absence de singularité attendue en  $r = 0$  implique que  $A = 0$ . La constante  $B$  est alors déterminée à l'aide de la condition à la limite

$\sigma_{rr}(r = r_e) = 0$ . Finalement, les contraintes sont

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2(3 + \nu)}{8}(r_e^2 - r^2) \quad (25.40)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)) \quad (25.41)$$

Constater que ces contraintes sont égales aux fonctions limites  $f_r$  et  $f_\theta$  sur  $]0, r_e]$  trouvées au paragraphe 25.2.4 pour les disques à alésage infinitésimal. Les valeurs des contraintes en  $r = 0$  sont obtenues en prolongeant par continuité ces fonctions en 0.

Les déformations associées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope sont

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - 3r^2(1 + \nu)) \quad (25.42)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + \nu)) \quad (25.43)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3 + \nu) - 2r^2(1 + \nu)) \quad (25.44)$$

Les déplacements  $u_r = r\varepsilon_{\theta\theta}$  et  $u_z$  tel que  $\partial u_z / \partial z = \varepsilon_{zz}$  s'en déduisent :

$$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1 - \nu)(r_e^2(3 + \nu) - r^2(1 + \nu)) \quad (25.45)$$

$$u_z = -\nu z \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3 + \nu) - 2r^2(1 + \nu)) \quad (25.46)$$

où la condition de symétrie  $u_z(z = 0) = 0$  a été utilisée.

Les contraintes, déformations et déplacements du disque mince non alésé en rotation sont rassemblées dans la table 25.2.

#### *Limite d'élasticité*

Les profils de contraintes trouvés sont illustrés sur la figure 25.6(b). Les contraintes sont à nouveau rangés dans l'ordre (25.32) de sorte que la recherche de la vitesse limite de fonction élastique du disque est similaire à l'analyse du paragraphe 25.2.1. En particulier,

$$\sigma_{\theta\theta}^{min} = \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) = \frac{\rho\omega^2}{4}(1 - \nu)r_e^2, \quad \sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_{\theta\theta}(r = 0) = \frac{\rho\omega^2}{8}(3 + \nu)r_e^2 \quad (25.47)$$

La vitesse limite est donc donnée par

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8\sigma_0}{r_e^2(3+\nu)} \quad (25.48)$$

Elle est  $\sqrt{2}$  fois plus grande que la valeur obtenue dans le cas du disque mince avec un alésage infinitésimal d'après les résultats du paragraphe 25.2.4. En l'absence d'alésage, l'état de contrainte au centre est équibiaxial en  $r = 0$  :

$$\sigma_{rr}(r = 0) = \sigma_{\theta\theta}(r = 0)$$

Noter la différence avec le cas alésé pour lequel le bord de l'alésage est caractérisé par un état de traction simple.

Cette étude montre qu'un disque alésé est plus vulnérable qu'un disque massif. Dans les applications industrielles, un disque massif sera donc préférable là où c'est possible.

### 25.3 Solution au sens de Saint-Venant du problème du disque

Le problème du disque mince (alésé ou non) en rotation est repris ici en gardant les conditions ( $\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$ ) mais en acceptant une dépendance en  $z$  pour les contraintes radiale et circonférentielle :

$$\underline{\sigma} = \sigma_{rr}(r, z)\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r, z)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (25.49)$$

Une telle dépendance a été reconnue comme nécessaire au cours de la démarche mise en œuvre aux paragraphes précédents. Le disque est d'épaisseur  $2H$ .

#### 25.3.1 Expressions générales des contraintes

Les relations (25.5) et (25.6) établies respectivement aux paragraphes 25.1.2 et 25.1.3 sont valables à condition de les écrire sous la forme :

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad (25.50)$$

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r\left(\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\right) \quad (25.51)$$

La dérivée partielle de  $\sigma_{rr}$  par rapport à  $r$  est alors solution de l'équation

$$r\frac{\partial^2\sigma_{rr}}{\partial r^2} + 3\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \rho\omega^2 r(3+\nu) = 0 \quad (25.52)$$

Les expressions générales des contraintes s'en déduisent :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r^2 + \frac{A(z)}{r^2} + B(z) \quad (25.53)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(1+3\nu)r^2 - \frac{A(z)}{r^2} + B(z) \quad (25.54)$$

où des fonctions  $A$  et  $B$  de la variable  $z$  seulement, ont été introduites.

#### 25.3.2 Equations de compatibilité

Les équations de compatibilité en coordonnées cylindriques ont une forme complexe et ne seront pas utilisées explicitement ici. On va procéder d'une manière différente en utilisant

### Contraintes

$$\sigma_{rr} = -\frac{3+\nu}{8} \frac{\rho\omega^2}{r^2} (r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8} \left( (3+\nu) \left( \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4} + \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) - (1+3\nu) \right)$$

### Déformations

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left( 3(\nu^2 - 1) + (3+\nu)((1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left( (\nu^2 - 1) + (3+\nu)((1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left( 2(1+\nu) - (3+\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right)$$

### Déplacements

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \left( (\nu^2 - 1) + (3+\nu)((1-\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1+\nu) \frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right)$$

$$u_z = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} z \left( 2(1+\nu) - (3+\nu) \frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right)$$

### Vitesse limite

$$\rho\omega_e^2 = \frac{4\sigma_0}{r_i^2(1-\nu) + r_e^2(3+\nu)}$$

Tableau 25.1: Récapitulatif : élastostatique d'un disque mince alésé animé d'une vitesse de rotation  $\omega$  (expressions simplifiées).

certaines relations directes entre déformations et déplacements. Les déplacements non nuls  $u_r$  et  $u_z$  sont des fonctions de  $r$  et  $z$ . En particulier, la composante  $u_r$  du déplacement n'est autre que  $r\varepsilon_{\theta\theta}$ . La condition de compatibilité  $\varepsilon_{rr} = \partial(r\varepsilon_{\theta\theta})/\partial r$  a en fait déjà été utilisée, de sorte que cette relation est automatiquement satisfaite. Par suite,

$$u_r = r\varepsilon_{\theta\theta} = r(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr})/E = -\frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu^2)r^3 - \frac{A(z)}{Er}(1+\nu) + B(z)r\frac{(1-\nu)}{E} \quad (25.55)$$

Le déplacement  $u_z$  se déduit de l'état de contraintes déterminé précédemment au travers de la relation

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\rho\omega^2}{2} \frac{\nu(1+\nu)}{E} r^2 - 2\frac{\nu}{E} B(z) \quad (25.56)$$

Contraintes
$\sigma_{rr} = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r_e^2 - r^2)$
$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+3\nu))$
Déformations
$\varepsilon_{rr} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - 3r^2(1+\nu))$
$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu))$
$\varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\rho\omega^2}{4E}(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu))$
Déplacements
$u_r = \frac{\rho\omega^2 r}{8E}(1-\nu)(r_e^2(3+\nu) - r^2(1+\nu))$
$u_z = -\nu \frac{\rho\omega^2}{4E} z(r_e^2(3+\nu) - 2r^2(1+\nu))$
Vitesse limite
$\rho\omega_e^2 = \frac{8\sigma_0}{r_e^2(3+\nu)}$

Tableau 25.2: Récapitulatif : élastostatique d'un disque mince non alésé animé d'une vitesse de rotation  $\omega$  (expressions simplifiées).

L'équation s'intègre en

$$u_z = \frac{\nu(1+\nu)}{E} \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 z - \frac{2\nu}{E} \int B(z) dz + f_z(r) \quad (25.57)$$

où la fonction  $f_z$  à déterminer ne dépend que de la variable  $r$ . La solution recherchée n'admet pas de cisaillement  $\sigma_{rz}$  :

$$\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} = 0 \implies \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad (25.58)$$

Cela se traduit par la relation

$$-\frac{A'(z)}{Er}(1+\nu) + B'(z)r \frac{1-\nu}{E} + \frac{\rho\omega^2}{E}\nu(1+\nu)rz + f'_z(r) = 0 \quad (25.59)$$

La dérivation de cette équation par rapport à  $z$  permet d'établir que

$$A''(z) = 0, \quad B''(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 \quad (25.60)$$

Les fonctions cherchées sont donc de la forme

$$A(z) = A_1 z + A_0, \quad B(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 \frac{z^2}{2} + B_1 z + B_0 \quad (25.61)$$

En revenant alors à la relation initiale (25.59), on obtient

$$-\frac{1+\nu}{Er}A_1 + \frac{1-\nu}{E}rB_1 + f'_z = 0 \quad (25.62)$$

ce qui fournit la fonction  $f_z$  cherchée :

$$f_z(r) = \frac{1+\nu}{E}A_1 \log \frac{r}{r_i} - B_1 \frac{1-\nu}{2E}(r^2 - r_i^2) \quad (25.63)$$

La constante d'intégration a été prise telle que  $u_z(r = r_i, z = 0) = 0$ .

### 25.3.3 Détermination complète des contraintes

La détermination complète des contraintes est présentée dans le cas où la solution présente une symétrie par rapport au plan  $z = 0$ . Cette condition de symétrie implique que

$$u_z(r, z = 0) = 0, \forall r \quad (25.64)$$

La fonction  $f_z$  doit donc être identiquement nulle. L'expression de  $f_z$  trouvée en (25.63) conduit alors à

$$B_1 = 0, \quad A_1 = 0$$

Les contraintes et déformation présentent donc une dépendance en  $z^2$  et des termes constants, en plus de la dépendance vis-à-vis de  $r$ .

A ce stade, il faut distinguer le cas du disque alésé et le cas du disque massif.

#### Disque alésé

La forme générale suivante des contraintes a été obtenue :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r^2 + \frac{A}{r^2} + B_2 z^2 + B_0 \quad (25.65)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{\rho\omega^2}{8}(1+3\nu)r^2 - \frac{A}{r^2} + B_2 z^2 + B_0 \quad (25.66)$$

où  $A$  a été mis pour  $A_0$  par simplicité. Le vecteur-contrainte en  $r = r_i$  et  $r = r_e$  est dirigé selon  $\underline{e}_r$  et prend les valeurs

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_i^2 + \frac{A}{r_i^2} + B_2 z^2 + B_0 \quad (25.67)$$

$$\sigma_{rr}(r = r_e) = -\frac{\rho\omega^2}{8}(3+\nu)r_e^2 + \frac{A}{r_e^2} + B_2 z^2 + B_0 \quad (25.68)$$

$$(25.69)$$

On voit qu'il n'est pas possible de trouver de constantes  $A$  et  $B_0$  permettant de remplir la condition de bord extérieur libre, i.e.

$$\sigma_{rr}(r = r_i) = \sigma_{rr}(r = r_e) = 0$$

à toute cote  $z$ . On va donc se contenter de rechercher une solution permettant de remplir cette condition en résultante seulement. La condition à la limite  $\underline{t} = 0$  ne sera donc pas remplie point par point sur les bords  $r = r_i$  et  $r_e$  mais seulement en résultante sur un secteur infinitésimal du disque  $r_i d\theta \times 2H$  ou  $r_e d\theta \times 2H$  :

$$\begin{aligned}\underline{dR} &= r_e d\theta \int_{r=r_e} \underline{t} dz = r_e d\theta \left( \int_{r=r_e} \sigma_{rr} dz \right) \underline{e}_r = 0 \\ &= r_e d\theta \left( -\frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu) r_e^2 2H + \frac{A}{r_e^2} 2H + 2B_2 \frac{H^3}{3} + B_0 2H \right) \underline{e}_r \quad (25.70)\end{aligned}$$

Une condition analogue doit être écrite en  $r = r_i$ . Deux équations portant sur les constantes d'intégration  $A$  et  $B_0$  s'en déduisent

$$\begin{aligned}B_0 + \frac{A}{r_i^2} &= \frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu) r_i^2 - B_2 \frac{H^2}{3} \\ B_0 + \frac{A}{r_e^2} &= \frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu) r_e^2 - B_2 \frac{H^2}{3}\end{aligned}$$

Il est effectivement possible de remplir la condition de résultante nulle au bord  $\underline{dR} = 0$  grâce aux valeurs

$$B_0 = \frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu) (r_e^2 + r_i^2) - B_2 \frac{H^2}{3}, \quad A = -\frac{\rho\omega^2}{8} (3 + \nu) r_i^2 r_e^2 \quad (25.71)$$

Il faut encore vérifier que le moment résultant sur chacun des bords infinitésimaux est bien nul. Un argument de symétrie permet en fait d'assurer cette condition.

La solution obtenue est une **solution acceptable au sens de Saint-Venant si le disque est suffisamment mince** :

$$H/r_e \ll 1, H/r_i \ll 1$$

En effet, les surfaces sur lesquelles les résultantes ont été calculées possèdent alors deux dimensions caractéristiques, à savoir  $H$  et  $r_{i/e} d\theta$ , qui sont faibles devant la dimension  $r_e - r_i$  du disque. Les expressions que nous allons proposer sont alors proches de la solution réelle pour  $r_i \ll r \ll r_e$ , c'est-à-dire en tout point assez loin des bords du disque alésé, en vertu du principe de Saint-Venant.

Voici enfin les expressions complètes des contraintes régnant dans un **disque mince alésé**, en régime élastostatique :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{\rho\omega^2 (3 + \nu)}{8r^2} (r^2 - r_i^2)(r^2 - r_e^2) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1 + \nu)}{2(1 - \nu)} \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{\rho\omega^2}{8r^2} ((1 + 3\nu)r^4 - (3 + \nu)((r_i^2 + r_e^2)r^2 + r_i^2 r_e^2) \\ &\quad + \rho\omega^2 \frac{\nu(1 + \nu)}{2(1 - \nu)} \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right)\end{aligned}$$

### *Disque non alésé*

Dans le cas du disque massif, les expressions des contraintes sous la forme (25.65) et (25.66) sont valables à condition de prendre  $A = 0$ , c'est-à-dire d'exclure toute singularité en  $r = 0$ . A nouveau il n'est pas possible de satisfaire la condition bord libre en tout point  $(r_e, z)$  du bord extérieur. Il est possible toutefois de trouver une constante  $B_0$  permettant d'annuler le torseur résultant sur tout secteur infinitésimal  $(r_e, d\theta)$  du bord extérieur :

$$B_0 = \frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}r_e^2 - B_2 \frac{H^2}{3}$$

La solution proposée ici est acceptable pour les disques minces

$$H/r_e \ll 1$$

en vertu du principe de Saint-Venant. Voici enfin les expressions des contraintes qui s'établissent dans un disque mince de rayon  $r_e$  et d'épaisseur  $2H$  :

$$\sigma_{rr} = -\frac{\rho\omega^2(3+\nu)}{8}(r^2 - r_e^2) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \quad (25.72)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8}((3+\nu)r_e^2 - (1+3\nu)r^2) + \rho\omega^2 \frac{\nu(1+\nu)}{2(1-\nu)} \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \quad (25.73)$$

Il apparaît clairement que les contributions en  $z^2$  et  $H^2$  sont numériquement négligeables dans les expressions précédentes par rapport aux autres contributions, dès lors que  $H/r_e \ll 1$ . Ce fait justifie *a posteriori* la pertinence des expressions simplifiées des contraintes données dans les tableaux 25.1 et 25.2.

#### 25.3.4 Déformations et déplacements

Voici les déformations et déplacements au sein d'un disque mince alésé en rotation :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left( 3(\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} - (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right) \\
&+ \frac{\rho\omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2 r^2}{8E} \left( (\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right) \\
&+ \frac{\rho\omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\
\varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left( 2(1 + \nu) - (3 + \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) \\
&- \frac{\rho\omega^2 \nu^2 (1 + \nu)}{E} \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\
u_r &= \frac{\rho\omega^2 r^3}{8E} \left( (\nu^2 - 1) + (3 + \nu)((1 - \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} + (1 + \nu)\frac{r_i^2 r_e^2}{r^4}) \right) \\
&+ \frac{\rho\omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) r \\
u_z &= \frac{\nu}{E} \frac{\rho\omega^2 r^2}{4} \left( 2(1 + \nu) - (3 + \nu)\frac{r_i^2 + r_e^2}{r^2} \right) z - \frac{\rho\omega^2 \nu^2 (1 + \nu)}{E} \left( \frac{H^2}{3} - \frac{z^2}{3} \right) z
\end{aligned}$$

Voici les déformations et déplacements au sein d'un disque mince sans alésage en rotation :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8E} (1 - \nu) ((3 + \nu)r_e^2 - 3(1 + \nu)r^2) + \frac{\rho\omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2}{8E} (1 - \nu) ((3 + \nu)r_e^2 - (1 + \nu)r^2) + \frac{\rho\omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\
\varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu\rho\omega^2}{4E} ((3 + \nu)r_e^2 - 2(1 + \nu)r^2) - \frac{\rho\omega^2 \nu(1 + \nu)}{E} \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) \\
u_r &= \frac{\rho\omega^2}{8E} (1 - \nu) ((3 + \nu)r_e^2 - (1 + \nu)r^2) r + \frac{\rho\omega^2}{2E} \nu(1 + \nu) \left( \frac{H^2}{3} - z^2 \right) r \\
u_z &= -\frac{\nu\rho\omega^2}{4E} ((3 + \nu)r_e^2 - 2(1 + \nu)r^2) - \frac{\rho\omega^2 \nu(1 + \nu)}{E} \left( \frac{H^2}{3} - \frac{z^2}{3} \right) z
\end{aligned} \tag{25.74}$$

Il apparaît clairement que les contributions en  $z^2$  et  $H^2$  sont numériquement négligeables dans les expressions précédentes par rapport aux autres contributions, dès lors que

$H/r_e \ll 1$ . Ce fait justifie *a posteriori* la pertinence des expressions simplifiées des déformations et déplacements donnés dans les tableaux 25.1 et 25.2.

### Déformée du disque

Les déformées typiques des disques alésés et non alésés sont représentées sur la figure 25.4. Analysons par exemple ce que devient la surface initiale  $z = H$  d'un disque sans alésage. Les points de ce plan se déplacent en

$$r' = r + u_r(r, H) \quad (25.75)$$

$$z' = H + u_z(r, H) \quad (25.76)$$

Dans le contexte infinitésimal, il est licite de remplacer  $r$  par  $r'$  dans la dernière équation. La surface déformée a donc aussi pour équation

$$z' - H - u_z(r', H) = 0$$

En tenant compte de l'expression (25.74) de  $u_z$ , cette surface apparaît comme une portion de paraboloïde de révolution qui, dans le contexte infinitésimal, ne peut être distingué de la sphère osculatrice de rayon

$$R = \frac{2E}{\rho\omega^2\nu(1+\nu)H} \quad (25.77)$$

De manière similaire, le bord libre  $r = r_e, \theta$  donné,  $|z| \leq H$  se transforme en une portion de parabole qui, dans le contexte infinitésimal, ne peut être distingué de la sphère osculatrice de rayon

$$R = \frac{E}{\rho\omega^2\nu(1+\nu)r_e} \quad (25.78)$$

Remarquer que les deux surfaces transformées étudiées restent orthogonales au point de coordonnées initiales  $(r_e, H)$ . Ce fait est dû à la nullité du cisaillement  $\varepsilon_{rz}$ .

Ces caractéristiques de la déformée du disque ont été mises en évidence en particulier dans (Amestoy, 2004).

#### 25.3.5 Comparaison avec une solution numérique obtenue par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis<sup>3</sup> permet d'obtenir une solution numérique approchée à la précision souhaitée du problème d'un cylindre de hauteur finie soumis à des efforts centrifuges. Il est intéressant d'utiliser cette méthode numérique pour déterminer la valeur du rapport  $H/r_e$  à partir de laquelle la solution établie précédemment au sens de Saint-Venant n'est plus acceptable. Le calcul par éléments finis a été mené pour trois valeurs  $H/r_e = 0.1; 0.5; 1$ . Les états déformés de ces trois disques, ainsi que le champ de contraintes  $\sigma_{zz}$  prévu par l'analyse numériques sont représentés sur la figure 25.7. Il est effectivement légitime de négliger  $\sigma_{zz}$  pour le disque mince. Par contre, dans un cylindre allongé, la contrainte  $\sigma_{zz}$  se développe au sein de l'échantillon et peut représenter jusqu'à 20% de la valeur maximale de la contrainte orthoradiale. On peut juger de la qualité de la solution au sens de Saint-Venant et des mérites des expressions simplifiées indépendantes de  $z$  établies au paragraphe 25.1 en observant la superposition des profils de contraintes

3. Une présentation détaillée de la méthode des éléments finis appliquée à différents problèmes de la physique et de la mécanique est offerte au travers du cours (Kern, 2004). Les documents sont disponibles sur le site [mms2.ensmp.fr](http://mms2.ensmp.fr).

théoriques et numériques sur la figure 25.8. La solution au sens de Saint-Venant et les expressions simplifiées coïncident avec la solution numérique pour  $H/r_e = 0.1$ . Les expressions simplifiées ne sont plus acceptables pour  $H/r_e = 0.5$  tandis que la solution au sens de Saint-Venant rend encore bien compte du champ obtenu par éléments finis. Il n'en va plus de même pour le cylindre allongé  $H/r_e = 1$  pour lequel des écarts notables existent entre la solution au sens de Saint-Venant et la solution éléments finis. En particulier, la figure 25.8(c) montre bien que l'expression (25.72) de la contrainte radiale conduit à une valeur  $\sigma_{rr}(r = r_e, z = 0)$  notablement éloignée de 0, alors que la méthode des éléments finis permet d'imposer cette condition de manière aussi précise que souhaitable.

## 25.4 Contraintes planes pour un cylindre de longueur finie

Les développements précédents incitent à reprendre le problème plus général de la déformation de cylindres au sein desquels s'établit un champ de contraintes de la forme :

$$\underline{\sigma}(r, z) = \sigma_{rr}\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}(r, z)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \quad (25.79)$$

Le disque est en état de contraintes planes, i.e. relevant d'une description strictement bidimensionnelle  $(r, \theta)$ , lorsqu'en outre les contraintes considérées ne dépendent pas de  $z$ . On va voir que la représentation (25.79) permet d'envisager un ensemble varié de conditions de chargements (efforts centrifuges, flexion axisymétrique, pression interne/externe) mais que l'état de contraintes planes ne peut pas exister, de manière exacte, en présence de forces de volume à divergence non nulle. Cette section illustre de manière remarquable l'approche en contraintes en mécanique des solides au comportement élastique linéarisé.

### 25.4.1 Approche par les équations de Beltrami en coordonnées cylindriques

La méthode des contraintes dans le traitement linéarisé de la statique des structures élastiques consiste à rechercher un champ de contraintes statiquement admissible et conduisant, *in fine*, à des déformations compatibles. Une condition nécessaire et suffisante est que le champ de contraintes proposé vérifie les équations d'équilibre et les équations de Beltrami (9.13) que l'on rappelle ici :

$$\Delta\underline{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\text{grad}(\text{grad}(\text{trace } \underline{\sigma})) + \frac{\nu}{1-\nu}\rho(\text{div } \underline{f})\underline{1} + \rho(\text{grad } \underline{f} + (\text{grad } \underline{f})^T) = 0 \quad (25.80)$$

Les efforts volumiques sont envisagés sous la forme générale

$$\rho\underline{f} = \rho f(r)\underline{e}_r \quad (25.81)$$

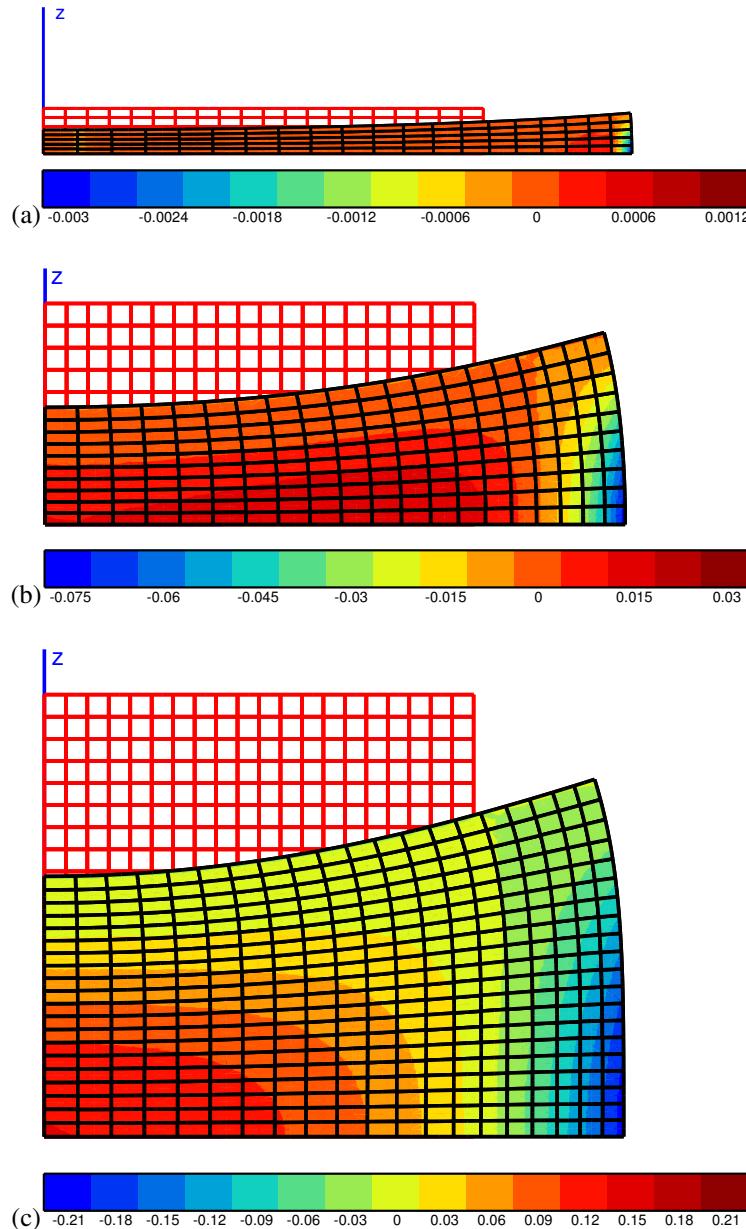
qui inclut le cas des efforts centrifuges  $f(r) = \omega^2 r$ .

Les équations de Beltrami doivent être explicitées dans le cas des coordonnées cylindriques et pour une distribution de contraintes de la forme (25.79). Exprimons d'abord le laplacien du tenseur des contraintes en partant de sa définition :

$$\Delta\underline{\sigma} = \text{div grad } \underline{\sigma} = \nabla \cdot (\nabla \underline{\sigma}) \quad (25.82)$$

Pour cela, il faut partir de la définition intrinsèque (12.123) du gradient d'un tenseur. Le gradient du tenseur des contraintes est

$$\text{grad } \underline{\sigma} = \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial r} \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \theta} \otimes \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial z} \otimes \underline{e}_z \quad (25.83)$$



*Figure 25.7 : Champ de contrainte  $\sigma_{zz}$  obtenu par la méthode des éléments finis, rapportée à la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  maximale dans un disque massif en rotation : (a)  $H/r_e = 0.1$ , (b)  $H/r_e = 0.5$ , (c)  $H/r_e = 1$ . Dans le cas (c), la composante  $\sigma_{zz}$  atteint 20% de la contrainte orthoradiale maximale. L'état initial du disque est représenté en rouge. Les déplacements ont été exagérés pour l'illustration. L'axe de rotation est z.*

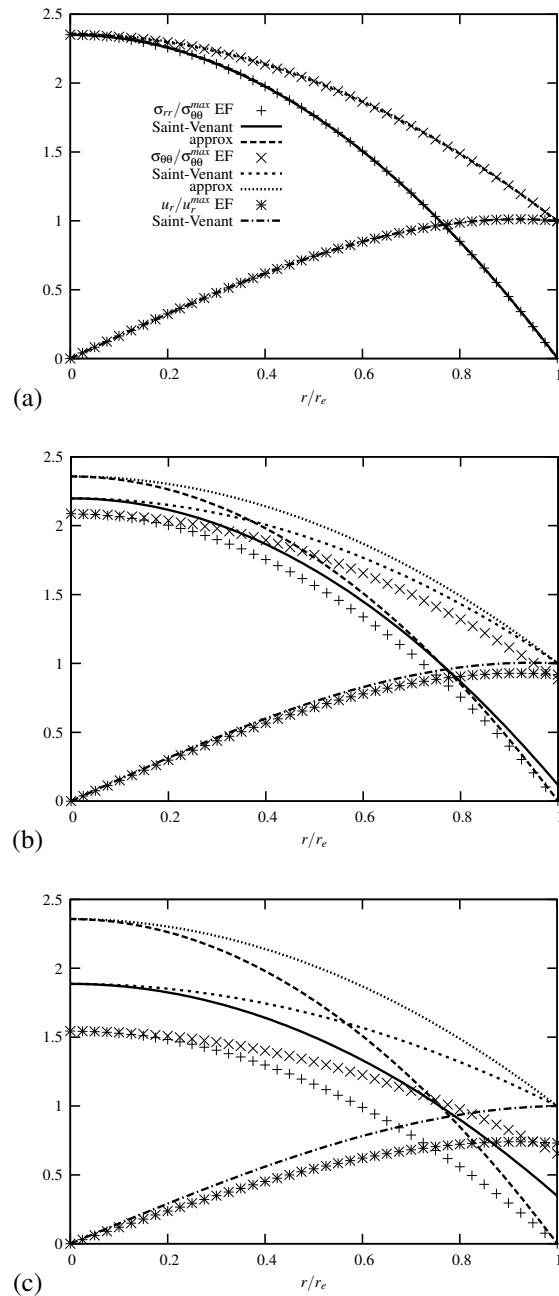


Figure 25.8 : Comparaison entre la solution approchée en contraintes (approx), la solution au sens de Saint-Venant et la solution numérique par la méthode des éléments finis (EF), pour les profils de contraintes radiale et orthoradiale, et le déplacement  $u_r$  en  $z = 0$ . La comparaison est effectuée pour trois cylindres massifs en rotation de hauteurs différentes : (a)  $H/r_e = 0.1$ , (b)  $H/r_e = 0.5$ , (c)  $H/r_e = 1$ .

Dans le cas particulier d'un champ de la forme (25.79), cela donne

$$\begin{aligned}\text{grad } \underline{\sigma} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \\ &+ \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \\ &+ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z\end{aligned}\quad (25.84)$$

La définition intrinsèque (12.127) de la divergence d'un champ de tenseurs fournit :

$$\text{div grad } \underline{\sigma} = \frac{\partial(\text{grad } \underline{\sigma})}{\partial r} \cdot \underline{e}_r + \frac{\partial(\text{grad } \underline{\sigma})}{\partial \theta} \cdot \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial(\text{grad } \underline{\sigma})}{\partial z} \cdot \underline{e}_z \quad (25.85)$$

En substituant l'expression (25.84) du gradient du tenseur des contraintes dans cette définition et en ordonnant les termes, l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques est obtenue :

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\sigma} &= \left( \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \sigma_{rr} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial z^2} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \\ &+ \left( \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \sigma_{rr} - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial z^2} \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta\end{aligned}\quad (25.86)$$

Pour aboutir à l'expression des équations de Beltrami, il reste à calculer le second gradient de la trace des contraintes, puis le gradient des efforts massiques, et enfin la divergence des efforts massiques. Les voici successivement :

$$\begin{aligned}\text{grad}(\text{trace } \underline{\sigma}) &= \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial \theta} \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial z} \underline{e}_z \\ &= \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \right) \underline{e}_r + \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \\ \text{grad}(\text{grad}(\text{trace } \underline{\sigma})) &= \frac{\partial \nabla \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r} \otimes \underline{e}_r + \frac{\partial \nabla \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial \theta} \otimes \frac{\underline{e}_\theta}{r} + \frac{\partial \nabla \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial z} \otimes \underline{e}_z \\ &= \frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r^2} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \\ &+ \frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial r \partial z} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r) + \frac{\partial^2 \text{trace } \underline{\sigma}}{\partial z^2} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ \text{grad } \underline{f} &= f' \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{f}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta \\ \text{div } \underline{f} &= \text{trace grad } \underline{f} = f' + \frac{f}{r}\end{aligned}$$

où  $f'$  désigne la dérivée par rapport à  $r$  de la fonction  $f$ .

Finalement, les équations de Beltrami pour un champ de la forme (25.79) sont les quatre premières équations ci-dessous :

$$(\Delta\tilde{\sigma})_{rr} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \text{trace } \tilde{\sigma}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \rho(f' + \frac{f}{r}) + 2\rho f' = 0 \quad (25.87)$$

$$(\Delta\tilde{\sigma})_{\theta\theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \text{trace } \tilde{\sigma}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \rho(f' + \frac{f}{r}) + 2\rho \frac{f}{r} = 0 \quad (25.88)$$

$$\frac{\partial^2 \text{trace } \tilde{\sigma}}{\partial r \partial z} = 0 \quad (25.89)$$

$$\frac{\partial^2 \text{trace } \tilde{\sigma}}{\partial z^2} + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \rho(f' + \frac{f}{r}) = 0 \quad (25.90)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho f = 0 \quad (25.91)$$

Les équations de Beltrami suffisent à résoudre le problème posé en contraintes à condition de leur adjoindre 3 conditions supplémentaires, à savoir la vérification des équations d'équilibre en surface (voir page 239 et la note de bas de page correspondante). Il est toutefois plus facile dans les développements qui vont suivre de se servir de l'équation d'équilibre (25.91) sur tout le volume. C'est redondant mais plus pratique *in fine*.

La combinaison des équations (25.89) et (25.90) de Beltrami conduit à une restriction de la forme des efforts volumiques compatible avec le type de solution en contraintes recherché :

$$\left( f' + \frac{f}{r} \right)' = 0 \quad (25.92)$$

ce qui conduit à

$$f(r) = \omega^2 r + \frac{\alpha}{r} \quad (25.93)$$

Le terme linéaire en  $r$  est celui que l'on rencontre en présence d'effort centrifuges. C'est pourquoi le coefficient de proportionnalité a été noté  $\omega^2$ , même si en toute généralité ce coefficient n'est pas tenu d'être positif. Les efforts en  $1/r$  sont délicats à interpréter. Ils seront toutefois pris en compte dans la suite par souci de généralité.

L'exploitation directe des équations (25.87) à (25.91) pour déterminer le champ des contraintes est possible mais malaisée. Il est plus rapide de tirer parti directement de l'équation de compatibilité sous la forme (25.7), combinée avec la relation de comportement pour donner l'équation (25.6) déjà mentionnée. Cette relation et l'équation d'équilibre sont réécrites sous la forme

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r \left( \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) \quad (25.94)$$

$$(1+\nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = -(1+\nu)r \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - (1+\nu)r \rho f \quad (25.95)$$

$$(25.96)$$

L'addition et la soustraction des deux équations précédentes fournit un système portant sur la somme et la différence des composantes de contraintes cherchées :

$$\frac{\partial \text{trace } \sigma}{\partial r} + (1+\nu)\rho f = 0 \quad (25.97)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial \text{trace } \sigma}{\partial r} + \rho f = 0 \quad (25.98)$$

Remarquer que l'équation (25.97) implique la troisième relation de Beltrami (25.89). La résolution de ces équations permet de trouver la dépendance en  $r$  de la somme et de la différence des contraintes radiale et orthoradiale :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= -(1+\nu)\rho \int f dr + g_1(z) = -(1+\nu)\rho(\omega^2 \frac{r^2}{2} + \alpha \log r) + g_1(z) \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1-\nu}{r^2}\rho \int fr^2 dr + g_2(z) = -\rho(1-\nu)(\frac{\omega^2}{4}r^2 + \frac{\alpha}{2}) + \frac{g_2(z)}{r^2}\end{aligned}$$

La forme licite (25.93) des efforts massiques a été prise en compte. Les constantes d'intégration  $g_1$  et  $g_2$  sont *a priori* des fonctions de la variable  $z$ . L'équation de Beltrami (25.90) permet de déterminer  $g_1$  :

$$g_1(z) = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 z^2 + 2(Az + B) \quad (25.99)$$

avec deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$ . Une expression de la contrainte radiale peut alors être obtenue :

$$\sigma_{rr} = -\rho\omega^2 r^2 \frac{3+\nu}{8} - \frac{\rho\alpha}{4}(1-\nu+2(1+\nu)\log r) - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 \frac{z^2}{2} + Az + B + \frac{g_2(z)}{2r^2}$$

Il reste à utiliser une des équations de Beltrami non encore exploitée, par exemple (25.87) qui, compte tenu de la forme des efforts volumiques, devient :

$$(\Delta\sigma_r)_{rr} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\omega^2 - \frac{\rho\alpha}{r^2} = 0 \quad (25.100)$$

On élimine  $\sigma_{\theta\theta}$  dans l'équation précédente en utilisant l'équation d'équilibre (25.91). Finalement, la contrainte radiale est solution de

$$\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial z^2} + \frac{3-\nu}{1-\nu}\rho\omega^2 + \frac{\rho\alpha}{r^2} = 0 \quad (25.101)$$

ce qui conduit à la détermination de  $g_2$  :

$$g_2'' = 2\nu\rho\alpha \implies g_2(z) = \nu\rho\alpha z^2 + Cz + D \quad (25.102)$$

Les expressions générales des contraintes sont donc

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 + \frac{Cz + D + \nu\rho\alpha z^2}{2r^2} - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 \frac{z^2}{2} + Az + B \\ &\quad - \frac{\rho\alpha}{4}(1-\nu+2(1+\nu)\log r) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2 - \frac{Cz + D + \nu\rho\alpha z^2}{2r^2} - \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}\rho\omega^2 \frac{z^2}{2} + Az + B \\ &\quad + \frac{\rho\alpha}{4}(1-\nu-2(1+\nu)\log r)\end{aligned}$$

Encore faut-il s'assurer que l'équation de Beltrami (25.88), non encore exploitée, est bien vérifiée par la solution précédente. C'est effectivement le cas.

#### 25.4.2 Interprétation des termes de la solution

Les différentes contributions apparaissant dans les expressions des contraintes radiale et orthoradiale mises en évidence au paragraphe précédent peuvent être classées en fonction des sollicitations mécaniques élémentaires du cylindre étudié correspondantes :

- **cylindre en rotation.** Cette situation correspond à

$$\alpha = 0, \quad A = C = 0$$

Les champs de contraintes ont été entièrement explicitées au paragraphe 25.3.3. Dans ce cas particulier, la condition de symétrie par rapport au plan  $z = 0$  permet d'exclure les termes de flexion en  $z$ . Les constantes  $B$  et  $D$  sont déterminées par la condition de résultante nulle (ou imposée) aux bords  $r = r_e$  et  $r = r_i$ . La contribution  $D/r^2$  est nulle pour un disque sans alésage. Cette solution est acceptable au sens de Saint-Venant et concerne donc les disques minces. Il s'agit d'un cas de contraintes planes approchées puisque, pour un disque mince, les termes en  $z^2$  sont faibles devant les termes en  $r^2$ .

- **tube sous pression.** Cette situation est rencontrée pour

$$\omega = \alpha = 0, \quad A = C = 0$$

Les contraintes ont la forme établie pour les réservoirs cylindriques sous pression interne ou/et externe, avec des extrémités libres :

$$\sigma_{rr} = B + \frac{D}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = B - \frac{D}{r^2}$$

Les conditions de pression imposée en  $r = r_i, r_e$  permettent de déterminer les constantes  $B$  et  $D$ . Il s'agit là de la solution exacte du réservoir sous pression, libre à ses extrémités, traité au chapitre 22. Les expressions complètes des contraintes sont données dans le tableau récapitulatif 22.1. Le réservoir est dans un état de contraintes planes.

- **flexion axisymétrique d'une plaque trouée.** Cette situation est caractérisée par

$$\omega = \alpha = 0, \quad B = D = 0$$

Le profil de contrainte est linéaire en  $z$  :

$$\sigma_{rr} = z(A + \frac{C}{r^2}), \quad \sigma_{\theta\theta} = z(A - \frac{C}{r^2})$$

Ce profil de contraintes est rencontré dans un disque troué sollicité par un moment de flexion selon  $e_\theta$  imposé sur chaque tranche élémentaire  $2Hr_e d\theta$  en  $r = r_e$ , et, par exemple, libre d'effort en  $r = r_i$ . Le disque non alésé correspond à  $C = 0$ . Ce problème est traité dans le recueil de problèmes (Amestoy, 2004). Il sort du cadre des contraintes planes même approchées puisque la dépendance en  $z$  y est essentielle<sup>4</sup>.

Seule la situation du cylindre sous pression interne/externe conduit à une solution exacte en contraintes planes. Dans les autres cas, il ne s'agit que de solutions en contraintes

4. En effet, le contexte des contraintes planes approchées, c'est-à-dire le cas où les contributions en  $z$  peuvent être négligées, ne requiert pas seulement la bonne forme des contraintes mais aussi des condition de parité sur la dépendance réelle des contraintes en fonction de  $z$  (voir la page 534 de l'ouvrage (Mandel, 1994)). Il est pertinent dans le cas d'une plaque mince, non chargée sur ses deux faces, chargée sur sa surface latérale ou dans le volume par des forces parallèles au plan moyen, symétriquement distribuées par rapport à ce plan (de manière que le plan moyen reste plan). Ce n'est clairement pas le cas pour le chargement de flexion.

planes approchées puisque la dépendance en  $z$  ne peut être exclue ou/et que le principe de Saint-Venant doit être invoqué. Mandel indique *qu'un cylindre de longueur finie n'est qu'exceptionnellement en état de contraintes planes* (Mandel, 1994). En particulier, l'équation de Beltrami (25.90) montre qu'en présence d'efforts volumiques à divergence non nulle, l'état de contrainte dépend nécessairement de  $z$ , ce qui exclut l'état de contraintes planes exact.

#### 25.4.3 Complément à l'étude des contraintes planes

Si l'on recherche les situations permettant l'établissement d'un état de contraintes planes exact ou approché, dans un cylindre sollicité de manière axisymétrique, il est nécessaire d'envisager aussi l'existence d'un cisaillement  $\sigma_{r\theta}$ . Par souci d'exhaustivité, ce paragraphe vient compléter l'analyse précédente où seules les composantes radiale et orthoradiale étaient envisagées. Pour englober le cas des contraintes planes approchées, une dépendance  $\sigma_{r\theta}(r, z)$  est recherchée *a priori*. En fait, la dépendance en  $z$  est exclue dans le cadre présent. En effet, une dépendance en  $z$  de la composante de cisaillement entraînerait une dépendance en  $z$  de la déformation

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

et donc une dépendance  $u_\theta(r, z)$ . Ce fait est incompatible avec la nullité de  $\varepsilon_{\theta z}$  et  $\sigma_{\theta z}$  en contraintes planes. Nous étudions donc le champ

$$\underline{\sigma} = \sigma_{r\theta}(r)(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \quad (25.103)$$

qui vient s'ajouter au champ (25.79) déjà étudié de manière exhaustive. De même, l'existence d'une densité d'efforts volumiques selon  $\underline{e}_\theta$  doit aussi être envisagée et additionnée à la contribution (25.81) déjà considérée :

$$\underline{f} = f_\theta(r) \underline{e}_\theta \quad (25.104)$$

champ dont la divergence est nulle. La condition d'équilibre statique conduit à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 \quad (25.105)$$

Les équations de Beltrami se réduisent à

$$\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta} + \rho(f'_\theta - \frac{f_\theta}{r}) = 0 \quad (25.106)$$

qui n'est autre que la dérivée par rapport à  $r$  de l'équation d'équilibre (25.105) divisée par  $r$ . Le problème se réduit donc à la résolution de (25.105) qui fournit

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} (\rho \int f_\theta r^2 dr + C) \quad (25.107)$$

où  $C$  est une constante d'intégration. Chaque tranche  $r_e H d\theta$  est soumise en  $r = r_e$  à un effort tangentiel indépendant de  $\theta$  et de  $z$ . Un effort tangentiel existe aussi en  $r = r_i$  pour assurer l'équilibre. Ce type de sollicitation est l'analogue pour le solide élastique linéaire isotrope de l'écoulement de Couette que subit un fluide placé entre deux tubes en rotation relative.

## 25.5 Arbres en rotation

C'est la méthode des contraintes qui a été utilisée jusqu'ici dans ce chapitre pour établir des solutions dont la pertinence est apparue dans le cas de disques minces. On propose ici de rechercher une solution au problème d'un cylindre en rotation par rapport à son axe par la méthode des déplacements. On va montrer que cette démarche ne vaudra que pour des cylindres élancés  $r_e/H \leq 1$ . La forme proposée pour le champ de déplacements est la suivante :

$$\underline{u} = u_r(r)\underline{e}_r + u_z(z)\underline{e}_z \quad (25.108)$$

Les sections perpendiculaires à l'axe du cylindre sont donc supposées rester planes et orthogonales à l'axe. Le caractère axisymétrique de la géométrie et de la sollicitation radiale implique que  $u_\theta = 0$ .

Cette situation est rencontrée par exemple dans les arbres d'entraînement des disques de turbines dans les moteurs ou les alternateurs. La géométrie de ces arbres peut être massive ou tubulaire. Les résultats sont explicités uniquement dans le cas de l'arbre massif car l'extension au cas du tube ne pose pas de difficulté.

### 25.5.1 Mise en œuvre de la méthode de déplacements

A partir de la forme proposée (25.108) du champ de déplacement, on calcule successivement le tenseur des déformations

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} u_{r,r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & u_{z,z} \end{bmatrix} \quad (25.109)$$

et, dans le cas d'un comportement élastique linéarisé et isotrope, les composantes non nulles du tenseur des contraintes associées :

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda\left(\frac{u_r}{r} + \varepsilon_{zz}\right) \quad (25.110)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda(u_{r,r} + \varepsilon_{zz}) \quad (25.111)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda(u_{r,r} + \frac{u_r}{r}) \quad (25.112)$$

où nous avons fait intervenir les coefficients de Lamé. La virgule qui suit un indice désigne comme dans les chapitres précédents la dérivation par rapport à la variable indiquée.

Les équations d'équilibre, en présence d'efforts volumiques d'inertie, se traduisent par les deux équations suivantes :

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho\omega^2r = 0 \quad (25.113)$$

$$\sigma_{zz,z} = 0 \quad (25.114)$$

En substituant l'expression (25.112) de la contrainte axiale dans la seconde équation d'équilibre, nous obtenons

$$\varepsilon_{zz} = c, \quad u_z = cz \quad (25.115)$$

où  $c$  est une constante d'intégration. La translation selon l'axe  $z$  a été fixée à 0.

L'équation d'équilibre (25.113) conduit à une équation différentielle en  $u_r$  :

$$u_{r,rr} + \left(\frac{u_r}{r}\right)_{,r} + \frac{\rho\omega^2r}{\lambda + 2\mu} = 0 \quad (25.116)$$

dont la solution est de la forme

$$u_r = -\frac{\rho\omega^2}{8(\lambda+2\mu)}r^3 + ar + \frac{b}{r} \quad (25.117)$$

Dans le cas d'un arbre massif, l'absence de singularité attendue en  $r = 0$  implique  $b = 0$ . La résolution complète est menée pour deux types de conditions aux extrémités du cylindre :

- **Déformation axiale de l'arbre imposée.** La constante  $c$  est donc supposée connue. Elle est par exemple nulle si l'arbre est bloqué aux extrémités  $z = \pm H$ . Si l'arbre est libre d'effort sur la surface  $r = r_e$ , la condition

$$\sigma_{rr}(r = r_e) = 2(\lambda + \mu)a - \frac{\rho\omega^2(2\lambda + 6\mu)r_e^2}{4(\lambda + 2\mu)} + \lambda c = 0 \quad (25.118)$$

permet d'obtenir

$$a = \frac{\rho\omega^2(2\lambda + 3\mu)r_e^2}{8(\lambda + 2\mu)} - \nu c \quad (25.119)$$

ce qui achève la résolution du problème.

- **Tube libre à ses extrémités.** La condition  $\sigma_{zz} = 0$  en  $z = \pm H$  ne peut être satisfaite pour tout  $0 \leq r \leq r_e$ . Il est possible toutefois de garantir la condition d'extrémité libre d'effort en résultante :

$$\begin{aligned} F_z &= \int_{z=H} \sigma_{zz} dS = 2\pi \int_0^{r_e} \sigma_{zz} r dr = 0 \\ &= ((\lambda + 2\mu)c + 2\lambda a) \frac{r_e^2}{2} - \frac{\rho\omega^2\lambda}{8(\lambda + 2\mu)} r_e^4 \end{aligned} \quad (25.120)$$

L'équation (25.118) traduisant la nullité des efforts appliqués sur la surface latérale de l'arbre et l'équation précédente constituent un système linéaire d'inconnues  $a$  et  $c$ . La résolution de ce système conduit à

$$c = -\frac{\rho\omega^2 r_e^2}{2E} \frac{\nu}{E}, \quad a = \frac{\rho\omega^2 r_e^2}{8E} \frac{3 - 5\nu}{1 - \nu} \quad (25.121)$$

Conformément à l'intuition, la déformation axiale  $\varepsilon_{zz}$  est négative. Les expressions des contraintes s'en déduisent. Pour obtenir ces expressions concises, il est nécessaire d'utiliser les relations entre les coefficients de Lamé, le coefficient de Poisson et le module de Young rassemblées dans la table 8.1.

La solution établie dans le cas de l'arbre libre d'effort à ses extrémités n'est valide qu'au sens de Saint-Venant. Elle ne permet pas de satisfaire point par point la condition de nullité du vecteur-contrainte en  $z = \pm H$  mais seulement en terme de torseur résultant.

### 25.5.2 Vitesse critique pour un arbre en rotation

Les contraintes qui s'établissent dans un arbre en rotation dont les extrémités sont libres se déduisent des expressions données au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{4} \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} (r_e^2 - r^2) = \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-2\nu}{1-\nu} (r_e^2 - r^2) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\rho\omega^2}{4} \left( \frac{2\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu} r_e^2 - \frac{2\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} r^2 \right) = \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} ((3-2\nu)r_e^2 - (1+2\nu)r^2) \\ \sigma_{zz} &= \frac{\rho\omega^2}{4} \frac{\nu}{1-\nu} (r_e^2 - 2r^2)\end{aligned}$$

Il s'agit d'un état triaxial de contraintes en particulier en  $r = 0$ . Les contraintes radiale et orthoradiale sont toujours positives pour les valeurs licites du coefficient de Poisson. Remarquer aussi que les contraintes ne dépendent pas du module de Young mais seulement du coefficient de Poisson. La contrainte axiale n'est pas nulle mais sa résultante selon  $z$  l'est effectivement.

Les contraintes s'ordonnent de la façon suivante, en tout point  $r \leq r_e$  :

$$\sigma_{zz} \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta} \quad (25.122)$$

L'inégalité  $\sigma_{zz} \leq \sigma_{rr}$  n'est en fait valable que pour  $\nu \geq 0$ . En effet,

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} 2(1-2\nu)r^2 \geq 0 \\ \sigma_{rr} - \sigma_{zz} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} ((3-4\nu)r_e^2 - (3-6\nu)r^2) \geq 0 \quad \text{pour } \nu > 0 \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} &= \frac{\rho\omega^2}{8(1-\nu)} ((3-4\nu)r_e^2 - (1-2\nu)r^2) \geq 0\end{aligned}$$

Les écarts les plus grands entre les contraintes principales sont

$$\begin{aligned}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en } r = 0 \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en } r = 0 \\ (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})_{max} &= -\frac{\rho\omega^2}{8} \frac{2\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en } r = r_e \\ (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})_{max} &= \frac{\rho\omega^2}{8} \frac{3-4\nu}{1-\nu} r_e^2 \quad \text{en } r = 0\end{aligned}$$

sans restriction autre que  $-1 < \nu < 0.5$ . Cette analyse permet de prévoir la limite d'élasticité selon le critère de Tresca (4.62). La plasticité commence en  $r = 0$  lorsque la vitesse de rotation atteint

$$\rho\omega_e^2 = \frac{8(1-\nu)}{3-4\nu} \frac{\sigma_0}{r_e^2} \quad (25.123)$$

où  $\sigma_0$  est la limite d'élasticité du matériau en traction simple. Remarquer que la vitesse limite de l'arbre massif en rotation coïncide avec celle du disque mince sans alésage (25.48) lorsque le coefficient de Poisson est nul. Pour un même rayon extérieur  $r_e$ , la vitesse critique de l'arbre en rotation est plus forte que celle du disque mince à condition que  $\nu > 0$ .

### 25.5.3 *Epilogue*

Le recours au principe de Saint-Venant a été mis à profit lors de la résolution de la déformation de cylindres pour choisir la méthode des contraintes ou des déplacements en fonction de l'élancement du cylindre. A priori, les deux méthodes sont légitimes mais c'est la méthode des contraintes qui s'est avérée efficace dans le traitement des disques minces, tandis que la méthode des déplacements est adaptée aux arbres. La forme simple du champ de déplacement (25.108) est en effet trop restrictive pour résoudre le problème des disques minces.

## 26 Concentrations de contraintes

Ce chapitre a pour objectif de montrer que la présence de trous, entailles et autres congés de raccordement conduit à un affaiblissement de la structure en raison de surcontraintes locales, appelées concentrations de contrainte. Il est donc bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Lorsque la présence de concentrateurs de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le **facteur de concentration de contrainte** associé à chaque géométrie, notion introduite dans ce chapitre, afin de dimensionner les structures. Ce fait a été reconnu tardivement dans la communauté scientifique, près de cent ans après l'établissement de la théorie tridimensionnelle des milieux continus élastiques. Des ruptures précoces sont ainsi restées longtemps inexpliquées. La prise en compte des concentrations de contraintes est aujourd'hui codifiée. Un tel catalogue de concentrateurs de contraintes est disponible par exemple dans (Pilkey, 1997).

Le cas de la traction d'une plaque percée d'un trou circulaire est analysé dans le détail avant d'évoquer d'autres concentrateurs tels que les trous elliptiques, sphériques et les entailles avec un rayon de courbure donné. L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état naturel, au comportement élastique linéarisé.

Le chapitre commence par la description de l'outil de résolution privilégié pour les problèmes traités, à savoir les fonctions de contraintes ou fonctions d'Airy, qui sera appliquée dans les sections suivantes.

### 26.1 Préliminaire : fonction de contraintes et coordonnées cylindriques

La résolution d'un problème bidimensionnel d'élasticité isotrope linéarisée peut se ramener à la recherche d'une fonction, appelée fonction de contraintes introduite au paragraphe 9.3.3. En coordonnées cartésiennes dans une base orthonormée et dans le cas où les contraintes recherchées sont de la forme :

$$\sigma_{11}(x_1, x_2), \sigma_{22}(x_1, x_2), \sigma_{12}(x_1, x_2), \sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (26.1)$$

et, *en l'absence d'efforts volumiques*, il existe une fonction  $\chi(x_1, x_2)$  telle que

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Les équations de compatibilité exigent alors que cette fonction soit biharmonique :

$$\Delta^2 \chi = \chi_{,1111} + \chi_{,2222} + 2\chi_{,1122} = 0$$

Les relations précédentes peuvent être traduites dans un système de coordonnées cylindriques, pour un champ de contraintes recherché de la forme

$$\sigma_{rr}(r, \theta), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta), \sigma_{r\theta}(r, \theta), \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \quad (26.2)$$

Il existe une fonction de contraintes  $\chi(r, \theta)$  telle que

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \quad (26.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \quad (26.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) \quad (26.5)$$

L'opérateur bilaplaciens s'écrit :

$$\Delta^2 \chi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (26.6)$$

Une large classe de fonctions biharmoniques s'obtient sous la forme

$$\chi = \Phi_1(r, \theta) + r^2 \Phi_2(r, \theta)$$

où  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont des fonctions harmoniques, i.e. telles que  $\Delta \Phi = 0$ . On vérifie qu'effectivement les fonctions construites de la sorte sont biharmoniques. La grande variété des fonctions harmoniques permet alors d'engendrer de nombreuses familles de solutions de l'équation biharmonique. Une telle famille de fonctions biharmoniques est

$$\begin{aligned} \chi(r, \theta) &= A_0 \log r + B_0 r^2 \log r + C_0 r^2 + D_0 \\ &+ (A_1 r \log r + B_1 r^3 + C_1 r + \frac{D_1}{r}) \cos \theta \\ &+ (A_1^* r \log r + B_1^* r^3 + C_1^* r + \frac{D_1^*}{r}) \sin \theta \\ &+ F \theta + r \theta (G_1 \cos \theta + G_2 \sin \theta) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k} + C_k r^{k+2} + D_k r^{-k+2}) \cos k\theta \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} (A_k^* r^k + B_k^* r^{-k} + C_k^* r^{k+2} + D_k^* r^{-k+2}) \sin k\theta \end{aligned} \quad (26.7)$$

qui permet de résoudre de nombreux problèmes aux limites d'élasticité linéaire plane avec des conditions de chargement périodiques en  $\theta$  (Rekatch, 1980; Szabó, 1985). Il reste au lecteur à vérifier qu'effectivement cette famille de fonctions satisfait à l'équation (26.6). Les constantes  $A_k, A_k^*, B_k, B_k^*, C_k, C_k^*, D_k, D_k^*, F, G_1, G_2$  doivent être déterminées grâce aux conditions à la frontière, lorsque cela est possible.

## 26.2 Contraintes dans une plaque trouée en traction

Une plaque d'épaisseur  $2h$  percée d'un trou cylindrique à section circulaire de rayon  $a$  est soumise à ses extrémités à un état de traction simple. La géométrie et les données de ce problème<sup>1</sup> sont illustrées par le schéma de la figure 26.1. L'axe du trou est  $\underline{e}_3$  et la direction de traction est  $\underline{e}_1$ . La longueur et la largeur  $L$  sont supposées suffisamment grandes par rapport à  $a$  pour que l'état de contrainte loin du trou ne soit pas affecté par la présence du trou et puisse donc être assimilé à l'état homogène suivant :

$$\underline{\sigma}^\infty = \sigma^\infty \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad (26.8)$$

où  $\sigma^\infty$  est la contrainte imposée, donnée du problème. Dans cette partie, le bord du trou ainsi que les surfaces  $z = \pm h$  sont libres d'effort.

1. aussi appelé problème de Kirsch qui le résolut en 1898.

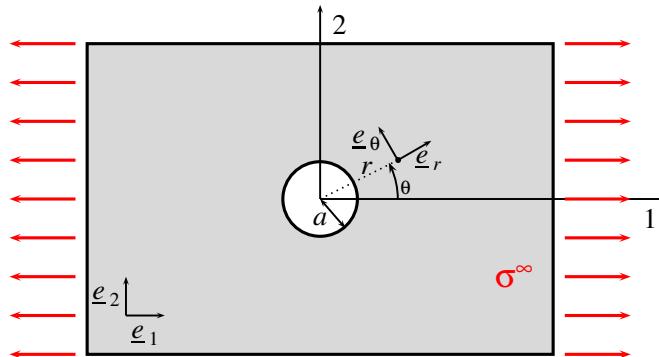


Figure 26.1 : Plaque percée d'un trou circulaire de rayon  $a$  et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité  $\sigma^\infty$ .

Un système de coordonnées cylindriques  $(O, r, \theta)$  est adopté,  $O$  étant le centre du trou, l'angle  $\theta$  étant mesuré par rapport à  $\underline{e}_1$ . Il est représenté sur la figure 26.1.

Compte tenu des caractéristiques du chargement, le traitement du problème est justifiable d'une résolution en contraintes planes, fût-elle approchée. Le champ de contraintes est donc recherché sous la forme (26.2).

### 26.2.1 Champ de contraintes loin du trou

Donner les composantes du tenseur des contraintes loin du trou dans le système de coordonnées cylindriques. Donner une fonction de contraintes  $\chi(r, \theta)$  correspondant à un champ de traction simple en intégrant les relations (26.3) à (26.5).

#### ► On substitue

$$\underline{e}_1 = \cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta$$

dans l'état de contrainte (26.8) pour trouver

$$\sigma^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} ((1 + \cos 2\theta) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + (1 - \cos 2\theta) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \sin 2\theta (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)) \quad (26.9)$$

Autrement dit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta}^\infty = -\frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta \end{array} \right. \quad (26.10)$$

Pour trouver une fonction de contraintes conduisant au champ de traction simple, on intègre l'équation (26.4) en

$$\chi = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} + g(\theta)r + h(\theta)$$

En calculant  $\sigma_{r\theta}$  grâce à (26.5), on trouve que  $h = Cste$ . En calculant  $\sigma_{rr}$  grâce à (26.4), on trouve que  $g = g_1 \cos \theta + g_2 \sin \theta$ . On vérifie que la contribution aux contraintes des termes en  $h, g_1, g_2$  est nulle de sorte qu'on ne perd pas en généralité en prenant  $h = 0$ ,

$g_1 = g_2 = 0$ . Finalement, une fonction de contraintes associée à l'état de traction simple est

$$\chi = \frac{\sigma^\infty}{2}(1 - \cos 2\theta) \frac{r^2}{2} \quad (26.11)$$

### 26.2.2 Forme générale des contraintes

Le résultat précédent nous incite à rechercher, au sein de la collection répertoriée en (26.7), la fonction de contraintes, en tout point de la plaque trouée, sous la forme :

$$\chi(r, \theta) = A \log r + Br^2 \log r + Cr^2 + (A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2) \cos 2\theta \quad (26.12)$$

où  $A, B, C, A_2, B_2, C_2, D_2$  sont des constantes à déterminer. D'après les relations (26.3) à (26.5), donner l'expression du champ de contraintes général associé à la famille de fonctions de contraintes précédente.

Identifier certaines des constantes grâce à l'expression du champ de contraintes à l'infini mise en évidence en 26.2.1.

► La famille de fonctions de contraintes choisie conduit au champ de contraintes suivant :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2B \log r + B + 2C + (-2A_2 - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2}) \cos 2\theta \quad (26.13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B \log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2 r^2 + \frac{6C_2}{r^4}) \cos 2\theta \quad (26.14)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 \sin 2\theta (A_2 + 3B_2 r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2}) \quad (26.15)$$

Loin du trou, i.e. lorsque  $r$  est suffisamment grand, le champ précédent prend la forme asymptotique

$$\sigma_{rr}^\infty = 2B \log r + B + 2C - 2A_2 \cos 2\theta \quad (26.16)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\infty = 2B \log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2 r^2) \cos 2\theta \quad (26.17)$$

$$\sigma_{r\theta}^\infty = 2 \sin 2\theta (A_2 + 3B_2 r^2) \quad (26.18)$$

L'identification entre ce champ et celui de traction simple (26.9) permet de déterminer les constantes :  $B = 0$ ,  $C = \frac{\sigma^\infty}{4}$ ,  $A_2 = -\frac{\sigma^\infty}{4}$ ,  $B_2 = 0$

### 26.2.3 Prise en compte des conditions à la frontière

Utiliser les conditions aux limites non prises en compte à ce stade pour déterminer complètement le champ de contraintes.

► L'analyse du paragraphe précédent a permis d'aboutir à la forme suivante du champ des contraintes dans la plaque :

$$\sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + (\frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2}) \cos 2\theta \quad (26.19)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + (-\frac{\sigma^\infty}{2} + \frac{6C_2}{r^4}) \cos 2\theta \quad (26.20)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2 \sin 2\theta (-\frac{\sigma^\infty}{4} - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2}) \quad (26.21)$$

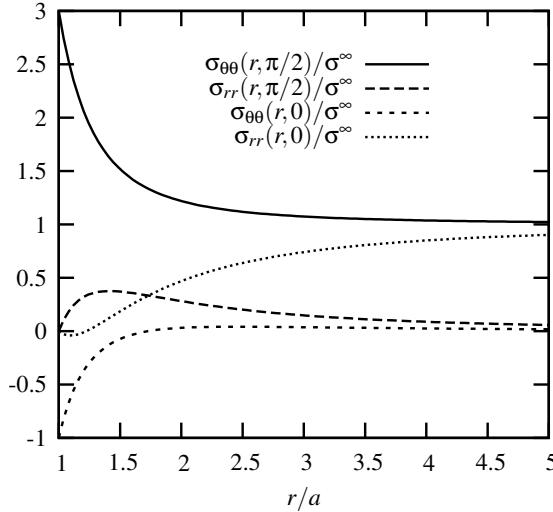


Figure 26.2 : Profils des contraintes radiale et orthoradiale normalisées par la contrainte appliquée en partant du pôle ( $\theta = 0$ ) et de l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) en fonction de la distance relative  $r/a$  par rapport au trou.

Les bords du trou sont libres d'effort de sorte que  $\underline{\sigma}(r = a) \cdot \underline{e}_r = 0$ , ce qui implique la nullité en  $r = a$  des composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{r\theta}$ , pour toutes les valeurs de l'angle  $\theta$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r = a) &= \frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} + \left(\frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2}\right) \cos 2\theta = 0 \\ \sigma_{r\theta}(r = a) &= 2 \sin 2\theta \left(-\frac{\sigma^\infty}{4} - \frac{3C_2}{a^4} - \frac{D_2}{a^2}\right) = 0\end{aligned}$$

Un système linéaire portant sur les inconnues  $A, C_2, D_2$  en découle :

$$\frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^\infty}{2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} = 0, \quad \frac{\sigma^\infty}{4} + \frac{3C_2}{a^4} + \frac{D_2}{a^2} = 0$$

dont la résolution fournit

$$A = -\frac{\sigma^\infty}{2}a^2, \quad C_2 = -\frac{\sigma^\infty}{4}a^4, \quad D_2 = \frac{\sigma^\infty}{2}a^2 \quad (26.22)$$

Finalement, le champ de contraintes et la fonction de contraintes identifiés sont

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (26.23)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (26.24)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \quad (26.25)$$

$$\chi = -\frac{\sigma^\infty}{2}a^2 \log r + \frac{\sigma^\infty}{4}r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4} \left(-r^2 + 2a^2 - \frac{a^4}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (26.26)$$

Il s'agit d'un état de contraintes planes (CP), tel qu'il a été recherché dans cette section. Ces relations sont rassemblées dans le tableau récapitulatif 26.1. La fonction de contrainte loin du trou s'obtient, à  $r$  fixé, en faisant tendre  $a \rightarrow 0$  (situation correspondant au trou dans une plaque infinie). L'expression précédente conduit alors à la fonction de contrainte (26.11) associée à la traction simple.

### 26.3 Concentration de contrainte au bord du trou

Le champ de contraintes trouvé précédemment indique que les contraintes ne sont pas homogènes dans une plaque trouée sollicitée en traction à ses extrémités. La décroissance rapide en  $1/r^2$  du champ de contraintes assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou et que le champ suffisamment loin du trou peut être considéré comme homogène. Cette décroissance en fonction de  $r/a$  est visible sur la figure 26.2 où sont tracées les contraintes à partir du pôle et de l'équateur. Le champ de contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  est représenté sur la figure 26.3(a), ce qui permet de voir que cette composante est plus forte au bord du trou que partout ailleurs dans la plaque. Plus généralement, les cartes des contraintes principales des figures 26.3(c) et (d) montrent que celles-ci sont maximales au bord du trou. Il existe donc des surcontraintes en bord de trou, appelées aussi concentrations de contraintes. Elles jouent un rôle essentiel dans l'amorçage de la rupture et/ou l'apparition de la plasticité, dont l'étude fait l'objet de cette partie.

#### 26.3.1 Facteur de concentration de contrainte

Donner la valeur de la contrainte orthoradiale<sup>2</sup>  $\sigma_{\theta\theta}$  au bord du trou en fonction de l'angle  $\theta$ . Indiquer à quel endroit cette contrainte est maximale et quelle valeur elle y prend. Calculer le facteur de concentration de contrainte défini par

$$K_t := \frac{\sigma_{\theta\theta}^{max}}{|\sigma^\infty|} \quad (26.27)$$

On distingue la situation de traction simple  $\sigma^\infty > 0$  de celle de compression simple  $\sigma^\infty < 0$ .

► La contrainte orthoradiale vaut

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = \sigma^\infty(1 - 2 \cos 2\theta) \quad (26.28)$$

au bord du trou. On distingue deux situations :

- **traction simple : la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale en  $\theta = \pm\pi/2$  et vaut trois fois la contrainte appliquée. Le facteur de concentration de contraintes vaut donc :**

$$K_t^{\text{traction}} = 3$$

**La contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est minimale en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  où elle vaut  $-\sigma^\infty$ .**

- **compression simple : la contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  et vaut  $|\sigma^\infty|$ . Le facteur de concentration de contraintes vaut donc :**

$$K_t^{\text{compression}} = 1$$

**La contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est minimale en  $\theta = \pm\pi/2$  où elle vaut  $-3\sigma^\infty$ .**

Le facteur de concentration de 3 en traction montre l'affaiblissement qu'apporte la présence d'un trou dans une plaque. Il peut conduire à une rupture précoce de la plaque étudiée au paragraphe suivant. Les facteurs de concentration contrainte se lisent aussi sur les courbes de la figure 26.2.

---

2. Hoop stress en anglais.

## Champ de contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \\ \sigma_{zz} = 0 \quad (\text{CP}) \\ \sigma_{zz} = \sigma^\infty \nu \left( 1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (\text{DP}) \end{array} \right.$$

$$\chi = -\frac{\sigma^\infty}{2} a^2 \log r + \frac{\sigma^\infty}{4} r^2 + \frac{\sigma^\infty}{4} \left( -r^2 + 2a^2 - \frac{a^4}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

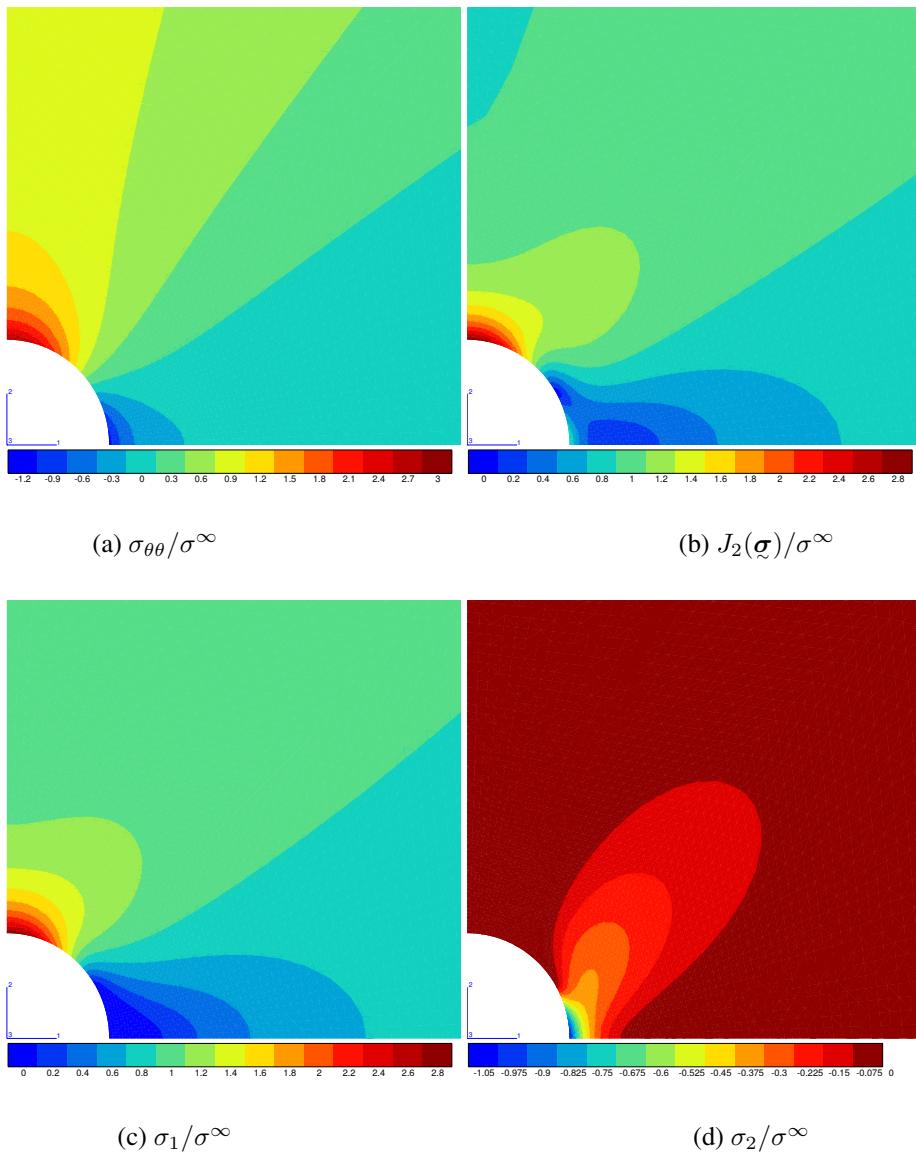
## Champ de déformations (DP)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left( 1 - 2\nu - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} (1-\nu) \right) \cos 2\theta \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left( 1 - 2\nu + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \nu \right) \cos 2\theta \right) \\ \varepsilon_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left( 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \\ \varepsilon_{zz} = 0 \end{array} \right.$$

## Champ de déplacements (DP)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left( (1-2\nu)r + \frac{a^2}{r} + \left( r - \frac{a^4}{r^3} + \frac{4a^2}{r} (1-\nu) \right) \cos 2\theta \right) \\ u_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left( r + \frac{a^4}{r^3} + \frac{2a^2}{r} (1-2\nu) \right) \sin 2\theta \\ u_z = 0 \end{array} \right.$$

Tableau 26.1: Récapitulatif : plaque infinie percée d'un trou circulaire en traction simple (expressions simplifiées en contraintes planes (CP)) et en traction plane (solution exacte en déformations planes (DP)).



*Figure 26.3 : Représentation par lignes de niveaux du champ de contraintes autour d'un trou dans une plaque en traction selon la direction 1. Les grandeurs représentées sont : (a) la composante  $\sigma_{\theta\theta}$ , (b) la contrainte équivalente de von Mises, (c) la plus grande contrainte principale en chaque point, (d) la plus petite contrainte principale en chaque point. Toutes les contraintes sont normalisées par la valeur de la contrainte axiale loin du trou. Pour des raisons de symétrie, un quart seulement de la plaque trouée est représenté.*

### 26.3.2 Plasticité et rupture

Donner les contraintes principales et la contrainte équivalente de von Mises au bord du trou en fonction de l'angle  $\theta$ . En déduire à quel endroit et pour quelle valeur de la contrainte imposée  $\sigma^\infty$  la rupture ou la plasticité peuvent apparaître. Pour prévoir la rupture d'une plaque trouée constituée d'un matériau fragile, le critère de contrainte principale positive maximale est adopté (cf. paragraphe 4.4.3). Pour prévoir l'apparition de la plasticité dans une plaque métallique ductile, le critère de von Mises est utilisé (cf. paragraphe 4.4.5). La contrainte à rupture ou la limite d'élasticité du matériau constitutif de la plaque sont notées  $\sigma_0$ . On demande de donner successivement ces valeurs de contraintes appliquées critiques pour deux situations de chargement distinctes, en fonction de  $\sigma_0$  :

- **traction simple**, pour laquelle  $\sigma^\infty > 0$  ;
- **compression simple**, pour laquelle  $\sigma^\infty < 0$  ;

Dans le cas d'un matériau fragile, faire un dessin représentant schématiquement la forme et l'orientation de la fissure qui peut apparaître. On supposera pour cela que la fissure est orthogonale à la direction principale associée à la contrainte principale positive maximale. La rupture d'une plaque en composite percée d'un trou et sollicitée en traction simple est illustrée sur la figure 26.5(a). Commenter cette figure. Commenter ensuite la figure 26.6 qui montre la rupture d'une plaque de béton multi-perforée sollicitée en compression.

► Les composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{r\theta}$  sont nulles en bord de trou de sorte que l'état de contrainte en tout point du bord de trou est un état de traction ou compression simple d'intensité  $\sigma_{\theta\theta}$ , seule contrainte principale non nulle. La direction principale associée est  $\underline{e}_\theta$ . La contrainte équivalente de von Mises vaut donc :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_{\theta\theta}| \quad (26.29)$$

On envisage d'abord le cas de plaque trouée chargée en traction  $\sigma^\infty > 0$ . Au bord du trou, la contrainte principale est  $\sigma_{\theta\theta}$ . Elle est maximale en  $\theta = \pm\pi/2$  et vaut  $3\sigma^\infty$ . La direction principale correspondante est  $\underline{e}_\theta$  qui coïncide avec  $\mp\underline{e}_1$  à cet endroit-là. Dans une plaque constituée d'un matériau fragile, une fissure perpendiculaire à  $\underline{e}_1$  risque donc d'apparaître à partir de la charge appliquée :

$$\sigma_{rupture}^\infty = \frac{\sigma_0}{3} \quad (26.30)$$

Cette valeur représente aussi la limite du fonctionnement élastique d'une plaque ductile. La plasticité apparaît au même endroit  $\theta = \pm\pi/2$  pour la même valeur critique de chargement.

On envisage ensuite le cas de la plaque trouée chargée en compression  $\sigma^\infty$ . Au bord du trou, la contrainte principale est maximale en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  et vaut  $|\sigma^\infty|$ . La direction principale correspondante est  $\underline{e}_\theta$  qui coïncide avec  $\pm\underline{e}_2$  à cet endroit-là. Dans une plaque constituée d'un matériau fragile, une fissure perpendiculaire à  $\underline{e}_2$  risque donc d'apparaître à partir de la charge appliquée :

$$\sigma_{rupture}^\infty = -\sigma_0 \quad (26.31)$$

Dans le cas d'une plaque ductile, le comportement plastique se manifeste encore en  $\theta = \pm\pi/2$  puisque la contrainte équivalente de von Mises prend les mêmes valeurs indépendamment du signe de  $\sigma^\infty$  d'après (26.29). La plasticité est donc plus précoce dans ce cas que la rupture et intervient pour la charge appliquée (26.30).

Les différentes situations de fissuration sont représentées sur la figure 26.4.

**Les concentrations de contraintes représentent un danger majeur pour le fonctionnement des structures puisqu'elles multiplient les risques d'amorçage local de la rupture ou de la plasticité. Le facteur 3 rencontré dans le cas du trou dans une**

**plaqué est, à ce titre, remarquable.**

**Le facteur de concentration de contrainte est indépendant de la taille  $a$  du trou, c'est un résultat important. Les petits trous sont aussi dangereux que les gros trous !** Ce raisonnement a toutefois des limites qui sont celles de la validité de la mécanique des milieux continus classique. On constate en effet que les plaques munies de trous plus petits sont en général plus résistantes à la rupture (cas de composites stratifiés dans (Lahellec et al., 2005)) ou à la plasticité (cas d'un acier dans (Bascoul and Maso, 1981)). Cet effet d'échelle se manifeste en fait lorsque la taille du trou devient comparable à celle des éléments de la microstructure du matériau (grains d'un polycristal, pli ou fibre d'un composite...). La prise en compte de ces effets d'échelle peut se faire de plusieurs manières :

- *approche statistique* : des défauts présents dans la microstructure des matériaux sont responsables des fluctuations de contraintes à rupture de plaques trouées fragiles (inclusions, porosité, état de surface...). Le nombre de défauts susceptibles de s'activer dépend du volume de la zone où les contraintes sont élevées. Ce volume dépend effectivement de la taille du trou. Si le volume de matière fortement sollicité est faible (petit trou), la probabilité de rencontrer un défaut critique est faible. La contrainte à rupture apparente de la plaque n'en sera que plus grande (Beremin, 1983).
- *calcul du gradient de contrainte* : le gradient de contrainte est sensible à la taille de l'inclusion. Calculons par exemple

$$K_{grad} := -\frac{1}{\sigma_{\theta\theta}} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} (r = a, \theta = \pi/2)$$

ce qui donne

$$aK_{grad} = \frac{7}{3}$$

Des critères portant sur  $K_{grad}$  ont été développés pour modéliser les effets d'échelles observés (Filippini, 2000).

- *milieux continus généralisés* : il est possible de construire des théories de milieux continus enrichis pour incorporer certains aspects de la microstructure des matériaux. La prise en compte de couples de contraintes dans la théorie des milieux de Cosserat conduit à un facteur de concentration de contrainte qui dépend explicitement de la taille du trou (Mindlin, 1962).

Ces approches ont en commun d'introduire une longueur interne ou longueur caractéristique, absente de la modélisation continue classique.

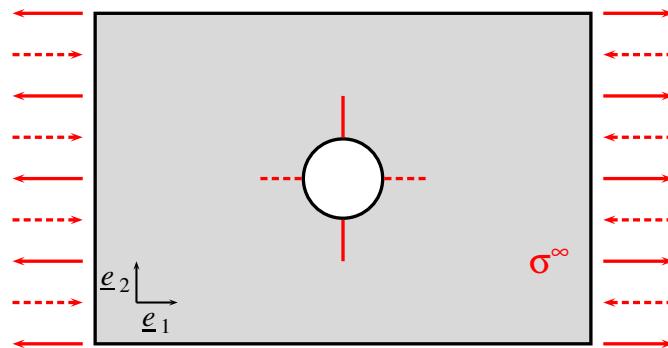
Des effets de taille ont également été constatés lors de la fatigue de plaques trouées ou entaillées (Rau and Burck, 1971).

## 26.4 Déformations et déplacements

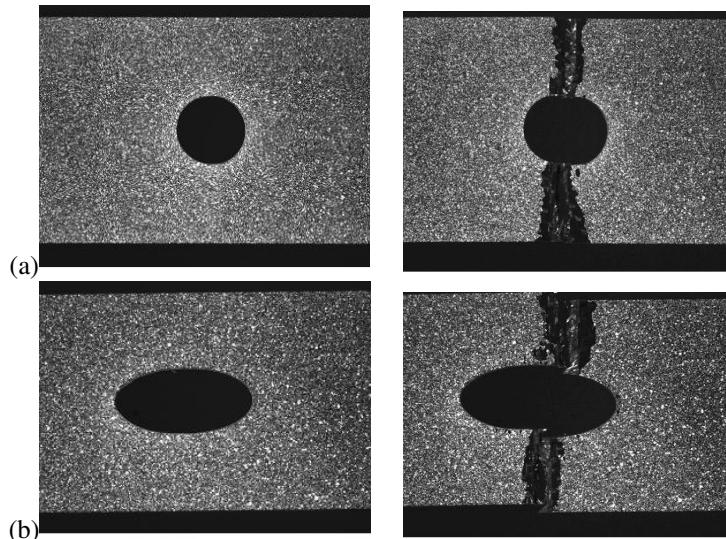
D'après (26.23) et (26.24), on a

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma^\infty \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta\right)$$

Cette expression n'étant pas affine vis-à-vis des coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2)$ , la résolution en contraintes planes n'est donc qu'approchée. Il est impossible d'associer au champ de contraintes calculé précédemment un champ de déplacements défini dans toute l'épaisseur de la plaque. La seule connaissance à laquelle on peut accéder est la *restriction dans le plan  $z = 0$*  du champ de déplacements de la solution exacte du problème, grâce



*Figure 26.4 : Apparition de fissures dans une plaque trouée soumise à une sollicitation uniaxiale à ses extrémités. La direction de sollicitation est  $\underline{e}_1$ . Les fissures en trait plein sont induites par un état de traction simple loin du trou ( $\sigma^\infty > 0$ ). Les fissures en trait pointillé sont induites par un état de compression loin du trou ( $\sigma^\infty < 0$ ).*



*Figure 26.5 : Rupture fragile de plaques en composites à fibres de carbone et matrice de résine percée d'un trou circulaire (a) ou elliptique (b). Les plaques sont sollicitées en traction simple selon la direction horizontale. Les images de gauche montrent l'état initial tandis que les images de droite correspondent à l'état rompu. La surface des plaque est recouverte d'un mouchetis permettant de réaliser des mesures de champs de déplacements par corrélation d'images, non présentées ici (source LMA-CNRS, Marseille, cf. (Lahellec et al., 2005)).*



*Figure 26.6 : Multifissuration en compression d'une plaque de béton perforée d'un réseau périodique de trous cylindriques d'axes parallèles (source, K. Sab, LAMI-ENPC). L'appareillage visible est le capteur de déplacement ainsi que les plateaux de la machine de compression.*

au fait que la satisfaction de la relation de compatibilité strictement “bidimensionnelle”

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0$$

y est rigoureusement assurée.

Le travail d’intégration à venir sera donc mené dans un univers purement bidimensionnel (le plan  $z = 0$ ) à l’aide d’un tenseur des déformations réduit à ses composantes  $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta r}$ , sans utiliser en aucune façon la variable  $z$ .

#### 26.4.1 Détermination partielle des déformations et des déplacements

A partir du champ de contraintes identifié en 26.2.3, donner le champ de déformations bidimensionnel correspondant.

Trouver alors les composantes de déplacements  $u_r$  et  $u_\theta$  qui lui sont associées.

► Les composantes de déformations sont liées aux composantes de contraintes par les lois de l’élasticité isotrope linéarisée :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}(\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) \quad (26.32)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) \quad (26.33)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (26.34)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{r\theta} \quad (26.35)$$

La substitution des relations (26.23) à (26.25) dans les expressions précédentes fournit les

déformations

$$E\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 - \nu + (1 + \nu) \left( \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{4a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (26.36)$$

$$E\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 - \nu + (1 + \nu) \left( \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) + \nu \frac{4a^2}{r^2} \cos 2\theta \right)$$

$$E\varepsilon_{zz} = -\nu \sigma^\infty \left( 1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) \quad (26.37)$$

$$E\varepsilon_{r\theta} = -(1 + \nu) \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \quad (26.38)$$

Ces composantes de déformation sont reliées aux composantes du vecteur déplacement par le biais de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (26.39)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (26.40)$$

$$2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \quad (26.41)$$

La composante radiale de déplacement est évaluée en intégrant l'équation (26.39) :

$$Eu_r = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( (1 - \nu)r + (1 + \nu) \left( \frac{a^2}{r} + \left( r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right) + \frac{4a^2}{r} \cos 2\theta \right) + f(\theta) \quad (26.42)$$

La composante orthoradiale est estimée ensuite en intégrant l'équation (26.40) :

$$Eu_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left( (1 + \nu) \left( 1 + \frac{a^4}{r^4} \right) r + (1 - \nu) \frac{2a^2}{r} \right) \sin 2\theta - \int_0^\theta f(\theta) d\theta + g(r) \quad (26.43)$$

Ces expressions font intervenir des fonctions inconnues  $f(\theta)$  et  $g(r)$  à déterminer. Elles doivent alors être substituées dans la relation (26.41), ce qui fournit une équation différentielle portant sur ces fonctions inconnues :

$$f'(\theta) + rg'(r) + \int_0^\theta f(\theta) d\theta - g(r) = 0 \quad (26.44)$$

A l'évidence, la relation (26.44) est satisfaite par le couple de fonctions

$$f(\theta) = 0, \quad g(r) = 0$$

Le champ de composantes

$$Eu_r = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( (1 - \nu)r + (1 + \nu) \left( \frac{a^2}{r} + \left( r - \frac{a^4}{r^3} \right) \cos 2\theta \right) + \frac{4a^2}{r} \cos 2\theta \right) \quad (26.45)$$

$$Eu_\theta = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left( (1 + \nu) \left( 1 + \frac{a^4}{r^4} \right) r + (1 - \nu) \frac{2a^2}{r} \right) \sin 2\theta \quad (26.46)$$

est donc un champ de déplacement solution pour le problème posé, dans le contexte

indiqué. Dès lors, la résolution exhaustive de (26.44) ne fournira rien d'autre que le déplacement d'ensemble arbitraire qu'il est loisible d'ajouter aux expressions précédentes.

En effet, la dérivation de cette équation par rapport à  $r$  et à  $\theta$  conduit respectivement aux deux équations

$$\frac{d}{dr}(rg'(r) - g(r)) = 0, \quad f''(\theta) + f(\theta) = 0$$

qui suffisent à déterminer

$$f(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta, \quad g(r) = Cr + D \quad (26.47)$$

Muni de ces expressions, on revient à la relation (26.44) qui exige alors que  $B + D = 0$ . Quelle est la signification de la partie du champ de déplacements trouvé (26.42) et (26.43) faisant intervenir les constantes d'intégration  $A, B, C$ ? Un changement de bases permet de le voir précisément :

$$\begin{aligned} \underline{u}^0 &= (A \cos \theta + B \sin \theta)\underline{e}_r + (B \cos \theta - A \sin \theta - Cr)\underline{e}_\theta \\ &= (A \cos \theta + B \sin \theta)(\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2) \\ &\quad + (B \cos \theta - A \sin \theta - Cr)(-\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2) \\ &= (A + Cr \sin \theta)\underline{e}_1 + (B - Cr \cos \theta)\underline{e}_2 \\ &= (A + CX_2)\underline{e}_1 + (B - CX_1)\underline{e}_2 \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un mouvement de corps rigide infinitésimal, composé d'une translation caractérisée par les constantes  $A$  et  $B$ , et d'une rotation infinitésimale d'axe  $\underline{e}_3$  d'angle  $-C$ . C'est bien ce que l'on attend d'une procédure d'intégration du champ de déformation. Dans la suite, ce mouvement d'ensemble est fixé à 0 :  $A = B = C = 0$ .

#### 26.4.2 Précision du contexte infinitésimal

Préciser les conditions de validité du contexte infinitésimal adopté dans ce chapitre, en fonction du chargement appliqué  $\sigma^\infty$  et des caractéristiques du matériau.

► Le gradient de la transformation fait intervenir le gradient du champ de déplacements calculé précédemment. Les termes qui apparaissent peuvent systématiquement être majorés par un multiple de  $\sigma^\infty/E$  puisqu'ils ne font intervenir que des fonctions bornées de  $r$  et de  $\theta$ . Les déformations et rotations restent infinitésimales tant que

$$\frac{\sigma_\infty}{E} \ll 1$$

i.e. la même condition que pour la traction simple infinitésimale.

#### 26.4.3 Déformée du trou

Donner, dans le contexte infinitésimal et en utilisant les expressions des déplacements  $u_r$  et  $u_\theta$  trouvées précédemment, l'équation de la déformée du trou initialement circulaire, en fonction de la charge appliquée. Ce travail gagne à être réalisé en coordonnées cartésiennes dans le repère  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ . Dessiner le trou initial et sa déformée. L'équation trouvée représente effectivement la déformée du trou dans une plaque mince, dans le plan  $z = 0$  uniquement.

Calculer la variation relative de l'aire du trou après déformation.

► Les déplacements au bord du trou sont

$$u_r(r = a) = \frac{\sigma^\infty}{E} a(1 + 2 \cos 2\theta) \quad (26.48)$$

$$u_\theta(r = a) = -\frac{\sigma^\infty}{E} 2a \sin 2\theta \quad (26.49)$$

On va donner l'équation de la déformée du trou dans le système de coordonnées associé à la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ . Ce changement de base pour les composantes de déplacement en  $r = a$  se traduit par :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta \\ &= (u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta) \underline{e}_1 + (u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta) \underline{e}_2 \\ &= \frac{\sigma^\infty}{E} 3a \cos \theta \underline{e}_1 - \frac{\sigma^\infty}{E} a \sin \theta \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (26.50)$$

La position actuelle  $(x_1, x_2)$  des points matériels appartenant au bord du trou s'exprime donc en fonction de leur position initiale  $(X_1, X_2)$  en tenant compte du fait que  $(X_1 = a \cos \theta, X_2 = a \sin \theta)$  :

$$x_1 = X_1(1 + 3\frac{\sigma^\infty}{E}), \quad x_2 = X_2(1 - \frac{\sigma^\infty}{E}) \quad (26.51)$$

Comme ces points sont initialement sur le cercle d'équation  $X_1^2 + X_2^2 = a^2$ , on obtient l'équation de la surface déformée :

$$\frac{x_1^2}{(1 + \frac{3\sigma^\infty}{E})^2} + \frac{x_2^2}{(1 - \frac{\sigma^\infty}{E})^2} = a^2 \quad (26.52)$$

Cette déformée est illustrée par la figure 26.7 et comparée à la forme initiale. Il s'agit d'une ellipse dont le grand axe est dans la direction de traction. Remarquer que la forme du trou après déformation dépend du module de Young du matériau mais pas du coefficient de Poisson.

L'aire du trou déformé est celle de l'ellipse qui vaut

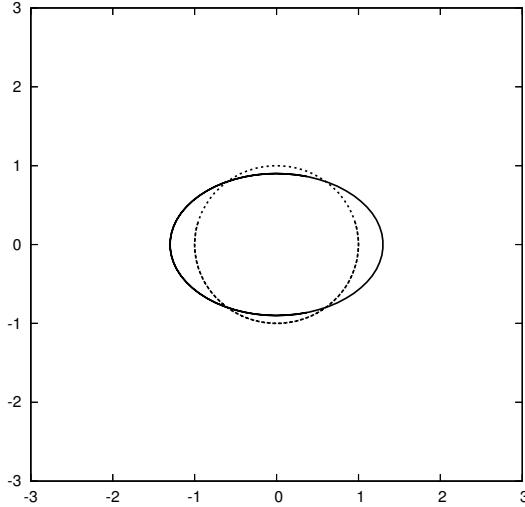
$$\pi ab = \pi(1 + \frac{3\sigma^\infty}{E})(1 - \frac{\sigma^\infty}{E}) \simeq \pi(1 + 2\frac{\sigma^\infty}{E})a^2$$

puisque  $\sigma^\infty/E \ll 1$ . La variation relative d'aire est donc

$$\frac{\Delta S}{S_0} = 2\frac{\sigma^\infty}{E} \quad (26.53)$$

## 26.5 Plaque trouée sollicitée en traction plane

Les contraintes et les déformations d'une plaque trouée sollicitée en conditions de déformations planes (DP) sont analysées dans ce paragraphe. Dans ces conditions, le chargement appliqué loin du trou est un état dit de traction plane présentée dans la première section. Contrairement au cas des contraintes planes, on va déterminer complètement les champs de contraintes, déformations et déplacements du problème.



*Figure 26.7 : Tracé de la déformée du trou initialement circulaire dans le plan  $(X_1/a, X_2/a)$ . Le chargement appliqué est  $\sigma^\infty/E = 0.1$ , valeur touchant les limites du contexte infinitésimal pour l'illustration. Le coefficient de Poisson utilisé est  $\nu = 0.3$ . La forme initiale est en trait pointillé tandis que la déformée est en trait plein.*

### 26.5.1 Etude de la traction plane

Les conditions de déformations planes  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$  rendent impossible, en général, l'établissement d'un état de contraintes de traction simple dans une plaque homogène sollicitée dans le plan (1, 2). C'est pourquoi l'on introduit l'état dit de traction plane correspondant à

$$\underline{\sigma} = \sigma^\infty \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (26.54)$$

qui fait intervenir une composante de contrainte  $\sigma_{zz}$  supplémentaire par rapport à la traction simple (26.8). Calculer cette composante en fonction de  $\sigma^\infty$  et des propriétés du matériau.

► En déformations planes, la composante  $\sigma_{zz}$  se déduit de la relation d'élasticité isotrope linéarisée suivante :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \text{trace } \underline{\sigma}$$

Compte tenu de l'hypothèse  $\varepsilon_{zz} = 0$ , on obtient

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

En traction plane, cela donne

$$\sigma_{zz} = \nu\sigma^\infty \quad (26.55)$$

et finalement

$$\underline{\sigma} = \sigma^\infty (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \nu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (26.56)$$

Les autres relations d'élasticité linéaire isotrope conduisent aux déformations suivantes

$$\underline{\varepsilon} = (1+\nu) \frac{\sigma^\infty}{E} ((1-\nu) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \nu \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) \quad (26.57)$$

qui s'intègrent en

$$\underline{u} = (1 + \nu) \frac{\sigma^\infty}{E} ((1 - \nu) X_1 \underline{e}_1 - \nu X_2 \underline{e}_2) \quad (26.58)$$

à un mouvement bidimensionnel infinitésimal de corps rigide près.

### 26.5.2 Plaque trouée en déformations planes

Montrer qu'il est possible d'utiliser le champ de contraintes construit dans la partie 26.2 (du moins les composantes  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ ) pour trouver la solution exacte et complète du problème de la traction plane d'une plaque trouée. Pour cela, on proposera d'abord un champ de contraintes statiquement admissible permettant de construire un champ de déformations compatible. La compatibilité du champ de déformations sera établie en construisant explicitement les champs de déplacements solutions.

► Le champ de contraintes

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \quad (26.59)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (26.60)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \quad (26.61)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma^\infty \nu \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta\right) \quad (26.62)$$

obtenu à partir des équations (26.23) à (26.25) en rajoutant la composante  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$  nécessaire en conditions de déformations planes, vérifie les conditions d'équilibre statique. En effet, les composantes  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$  et  $\sigma_{r\theta}$  dérivent de la fonction de contraintes (26.26) tandis que la composante  $\sigma_{zz}$  est indépendante de  $z$ . Les relations d'élasticité isotrope linéarisées permettent d'en déduire le champ des déformations associé :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left(1 - 2\nu - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}(1-\nu)\right) \cos 2\theta\right) \quad (26.63)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left(1 - 2\nu + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\nu\right) \cos 2\theta\right) \quad (26.64)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \quad (26.65)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (26.66)$$

La procédure d'intégration mise en œuvre au paragraphe 26.4.1 est utilisée à nouveau pour construire les champs de déplacements dont dérivent les déformations précédentes. En particulier, les relations de compatibilité (26.39) et (26.40) conduisent à

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left((1-2\nu)r + \frac{a^2}{r} + \left(r - \frac{a^4}{r^3} + \frac{4a^2}{r}(1-\nu)\right) \cos 2\theta\right) + f(\theta) \\ u_\theta &= -\frac{\sigma^\infty}{2} \frac{1+\nu}{E} \left(r + \frac{a^4}{r^3} + \frac{2a^2}{r}(1-2\nu)\right) \sin 2\theta - \int f(\theta) d\theta + g(r) \end{aligned}$$

Lorsque ces composantes sont introduites dans (26.41), l'équation aux dérivées partielles (26.44) portant sur les fonctions inconnues  $f(\theta), g(r)$  est obtenue, dont une solution est

$f = g = 0$ , retenue ici.

A ces composantes de déplacement, il faut ajouter :  $u_z = 0$ , compatible avec les conditions de déformations planes  $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = 0$ . Ceci achève la résolution du problème d'une plaque trouée en traction plane. Ces résultats sont consignés dans le tableau 26.1.

La déformée du trou dans le cas des déformations planes s'obtient en suivant la même méthodologie que pour les contraintes planes, à ceci près que, cette fois-ci, la déformée obtenue est valable quelle que soit la cote  $z$  et non plus seulement pour  $z = 0$ . Il s'agit à nouveau d'une ellipse de grand axe  $(1 + 3(1 - \nu^2)\sigma^\infty/E)$ , dans la direction de traction, et de petit axe  $(1 - (1 - \nu^2)\sigma^\infty/E)$ . Contrairement au cas des contraintes planes, la déformée du trou dépend aussi du coefficient de Poisson.

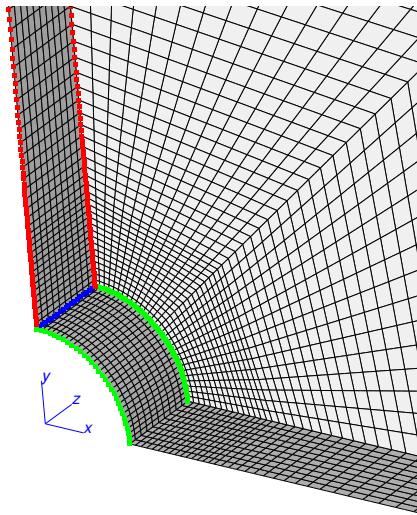


Figure 26.8 : Maillage par éléments finis d'un huitième de plaque trouée avec  $h/a = 1$ . Des lignes ont été soulignées, le long desquelles les profils de contraintes et de déformations peuvent être étudiées.

## 26.6 Comparaison avec des simulations numériques 3D

Le calcul numérique permet de s'approcher aussi près qu'on le souhaite de la solution exacte des problèmes de plaques trouées de différentes épaisseurs. On propose, dans le cas de la traction simple, de comparer ces résultats numériques avec, d'une part, les estimations analytiques proposées sous l'hypothèse de contraintes planes, et, d'autre part, la solution trouée en déformations planes. L'outil numérique employé est la méthode des éléments finis. Il suffit pour le calcul numérique de considérer un huitième de plaque trouée pour des raisons de symétrie. On rappelle que le trou circulaire est de rayon  $a$ . L'épaisseur de la plaque est de  $2h$ . Le plan  $z = 0$  à l'intérieur de la plaque est un plan de symétrie, la composante de déplacement  $u_z$  des points de ce plan peut être prise nulle. De même, le plan  $X_1 = 0$  (resp.  $X_2 = 0$ ) est un plan de symétrie, la composante de déplacement  $u_1$  (resp.  $u_2$ ) peut être prise nulle. Un déplacement dans la direction 1 est imposé loin du trou. Avec ces conditions aux limites, le mouvement de corps rigide est fixé. Les calculs sont réalisés pour une plaque de dimensions finies mais suffisamment grandes, dans le plan  $(1, 2)$ , par rapport au rayon  $a$  du trou pour que la solution obtenue ne puisse plus être distinguée pratiquement de celles obtenues avec des plaques plus

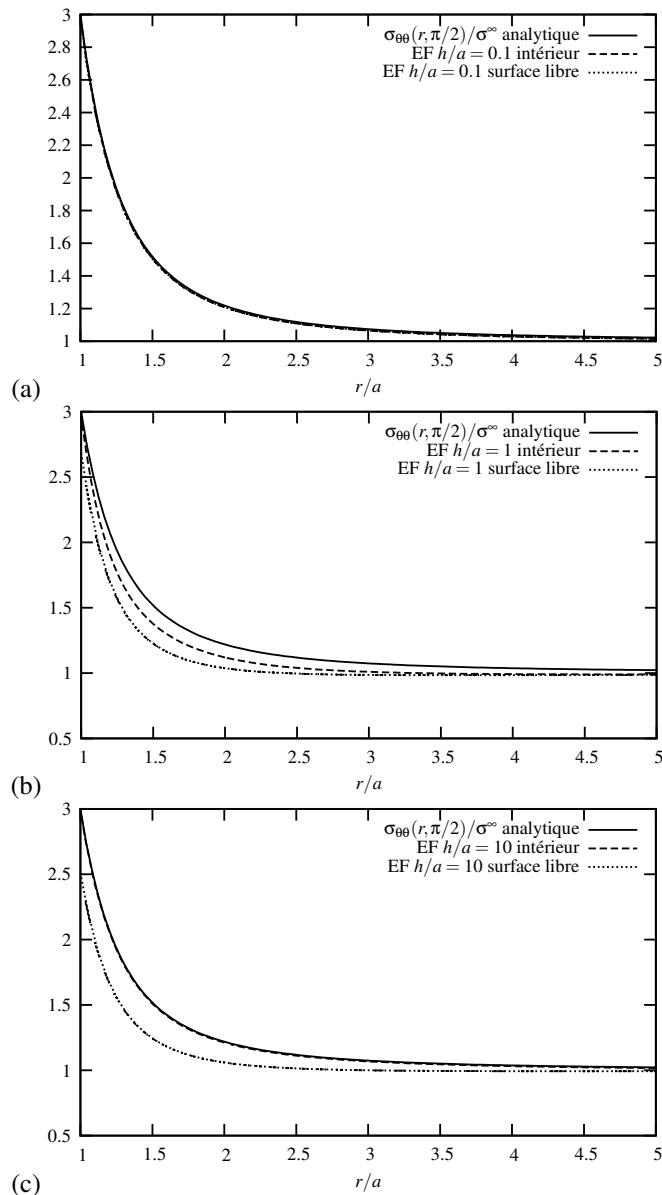
grandes. Un rapport  $L/a = 15$  s'avère suffisant où  $2L$  est la plus grande dimension de la plaque. Les calculs ont été réalisés pour différentes valeurs du rapport  $h/a$ , à savoir 0.1, 1 et 10. Une portion du maillage par éléments finis utilisé pour  $h/a = 1$  est illustrée sur la figure 26.8. Pour compléter la donnée des conditions aux limites, la surface  $z = h$ , ainsi que la surface latérale et le bord du trou sont libres de tout effort.

La figure 26.9 illustre les profils de contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  le long des deux lignes rouges de la figure 26.8 qui sont perpendiculaires à l'axe de traction, situées l'une sur la surface libre, l'autre à l'intérieur de la plaque. Les expressions (26.23), (26.24) et (26.25) des contraintes obtenues dans des conditions de contraintes planes s'avèrent être d'excellentes estimations des contraintes réelles dans un plaque de faible épaisseur ( $h/a = 0.1$ , figure 26.9(a)), aussi bien à l'intérieur que sur la surface libre. Au contraire, lorsque la taille du trou est comparable à l'épaisseur, les valeurs déduites de ces expressions se distinguent notablement de la solution réelle ( $h/a = 1$ , figure 26.9(b)). Pour des plaques épaisses ( $h/a = 10$ , figure 26.9(c)), l'expression (26.24) est en bon accord avec l'état de contrainte réelle à l'intérieur mais s'en distingue à la surface libre. Des conclusions similaires peuvent être tirées de l'observation des profils de contraintes au bord du trou à l'intérieur et sur la surface libre (lignes vertes de la figure 26.8). Ces profils issus de la simulation numérique sont comparés à l'expression (26.24) sur la figure 26.10 pour différentes épaisseurs de plaques.

Les champs de contraintes autour du trou sont illustrés sous forme de lignes de niveaux dans le cas d'une plaque  $h/a = 1$  sur la figure 26.11. La concentration de contrainte équivalente de von Mises à l'équateur est visible sur la figure 26.11(a). La dépendance des contraintes par rapport à la variable  $z$  apparaît aussi grâce à la vue en coupe de cette même figure. La surface visible est la surface libre tandis que l'intérieur de la plaque est à l'arrière-plan. La figure 26.11(b) montre la contrainte  $\sigma_{zz}$  qui, si elle est nulle bien sûr en surface, se développe au bord du trou à l'intérieur de la plaque. Certes, cette composante ne dépasse pas le tiers de la contrainte appliquée. Elle est positive (traction) à l'équateur et négative (compression) au pôle. L'existence d'une dépendance en  $z$  des champs de contraintes et, par conséquent, des déformations implique le développement d'un champ de déplacements  $u_z$  près du trou, ce qui est visible sur la figure 26.12. En surface libre, le bord du trou se creuse légèrement à l'équateur et fait légèrement saillie au pôle. La surface libre ne reste donc pas plane lors d'un tel essai.

Par contre, la dépendance en  $z$  du champ de contraintes devient négligeable dans le cas d'une plaque mince comme l'illustre la figure 26.13.

La dépendance en  $z$  des composantes de déformations en bord de trou fait l'objet de la figure 26.14. Les déformations  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  et  $\varepsilon_{zz}$  obtenues par simulation numérique sont tracées le long de la ligne bleue (équateur) du maillage de la figure 26.8, en fonction de la cote  $z$ . Lorsque la plaque est mince par rapport à la taille du trou ( $h/a = 0.1$ , figure 26.14(a)), ces déformations ne dépendent quasiment pas de  $z$  et les valeurs trouvées sont conformes aux prédictions (26.36) à (26.37) obtenues dans le contexte des contraintes planes (CP). Ce n'est plus le cas lorsque la plaque est épaisse ( $h/a = 10$ , figure 26.14(c)). Dans ce cas, c'est la solution obtenue en déformations planes (DP), à savoir les expressions (26.63) à (26.66), qui s'approchent le plus de l'état des déformations au cœur de la plaque, tandis que les expressions de type (CP) restent pertinentes en surface. Dans la situation intermédiaire ( $h/a = 1$ , figure 26.14(b)), les expressions de type CP fournissent une bonne estimation mais la composante  $\varepsilon_{zz}$  commence à se distinguer de la composante  $\varepsilon_{rr}$  au cœur de la plaque. Ce constat justifie la règle d'ingénieur courante selon laquelle les plaques minces trouées sont plutôt en situations de contraintes planes, tandis que les plaques épaisses sont plus proches d'un état de déformations planes.



*Figure 26.9 : Comparaison entre le champ de contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  donné analytiquement par (26.24) et les résultats de calculs par éléments finis (EF) pour des plaques trouées d'épaisseurs différentes : (a)  $h/a = 0.1$ , (b)  $h/a = 1$ , (c)  $h/a = 10$ . Les profils de contraintes sont donnés le long de deux lignes d'équations  $\theta = \pi/2$  et  $z = 0$  (intérieur; ligne située dans le plan de symétrie normal à l'axe  $z$ ) ou  $z = h$  (surface libre), lignes rouges de la figure 26.8.*

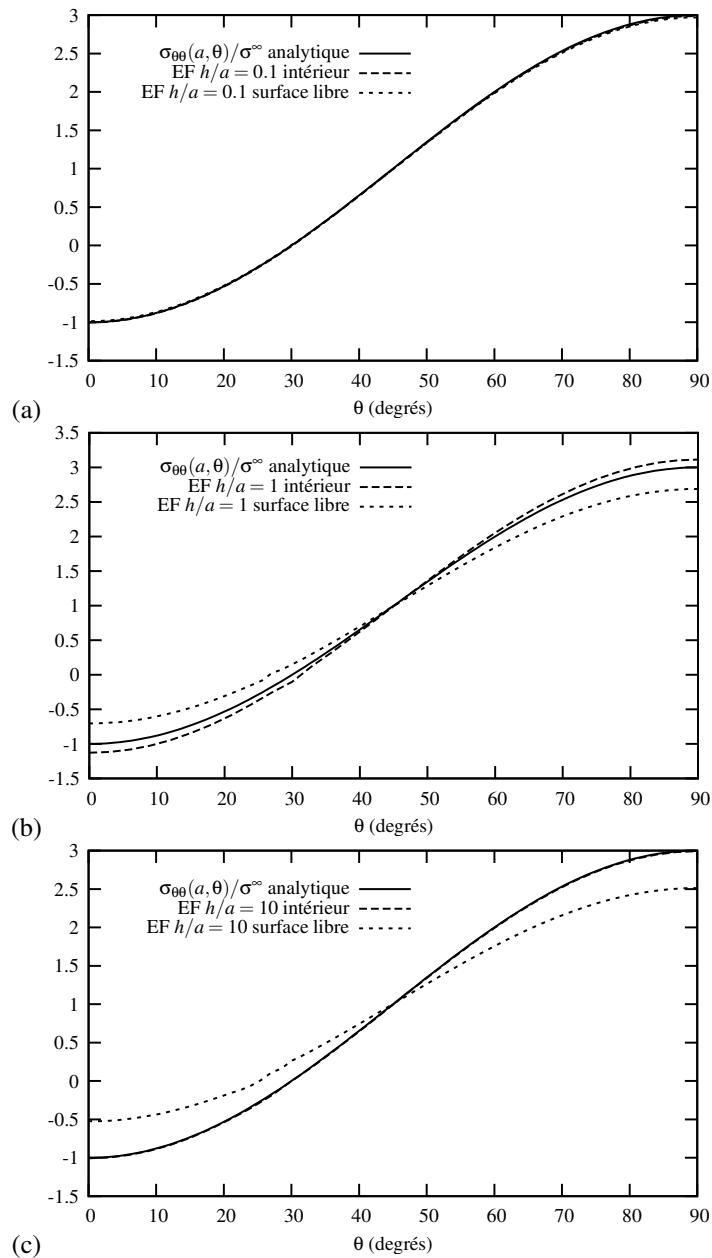


Figure 26.10 : Comparaison entre le champ de contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  donné analytiquement par (26.24) et les résultats de calculs par éléments finis (EF) pour des plaques trouées d'épaisseurs différentes : (a)  $h/a = 0.1$ , (b)  $h/a = 1$ , (c)  $h/a = 10$ . Les profils de contraintes sont donnés au bord du trou, le long de deux lignes d'équations  $r = a$  et  $z = 0$  (intérieur, ligne située dans le plan de symétrie normal à l'axe  $z$ ) ou  $z = h$  (surface libre), lignes vertes de la figure 26.8.

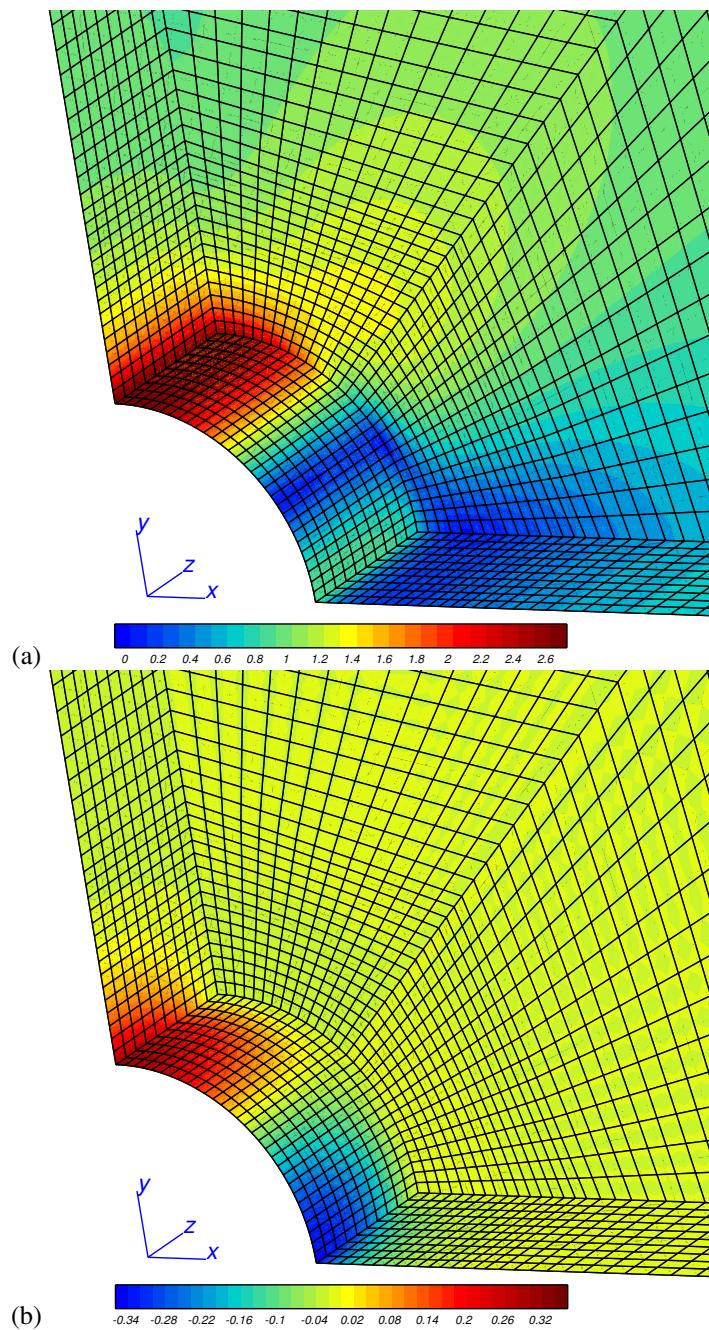


Figure 26.11 : Champs de contraintes autour du trou dans une plaque trouée telle que  $h/a = 1$ , obtenus numériquement par la méthode des éléments finis : (a) contrainte équivalente de von Mises, (b) contrainte  $\sigma_{zz}$ . Les contraintes sont normalisées par la valeur  $\sigma^\infty$ .

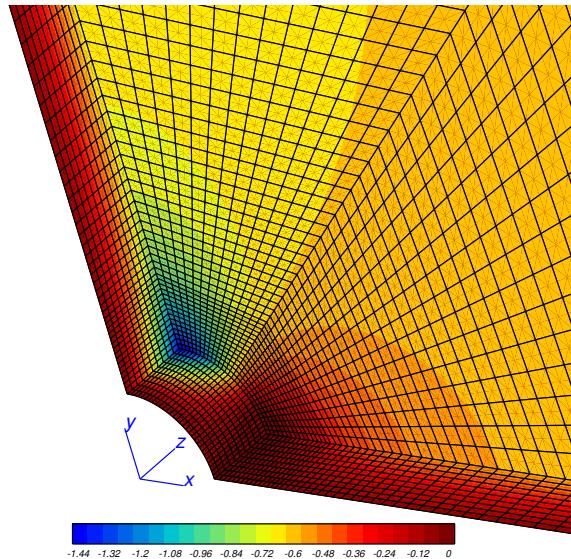


Figure 26.12 : Champ de déplacements  $u_z$  autour du trou dans une plaque trouée telle que  $h/a = 1$ , obtenu numériquement par la méthode des éléments finis. Les valeurs sont normalisées par  $h\sigma^\infty/E$ .

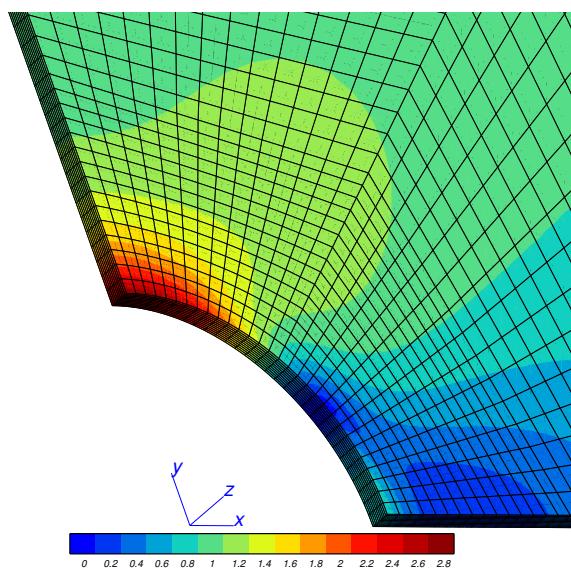
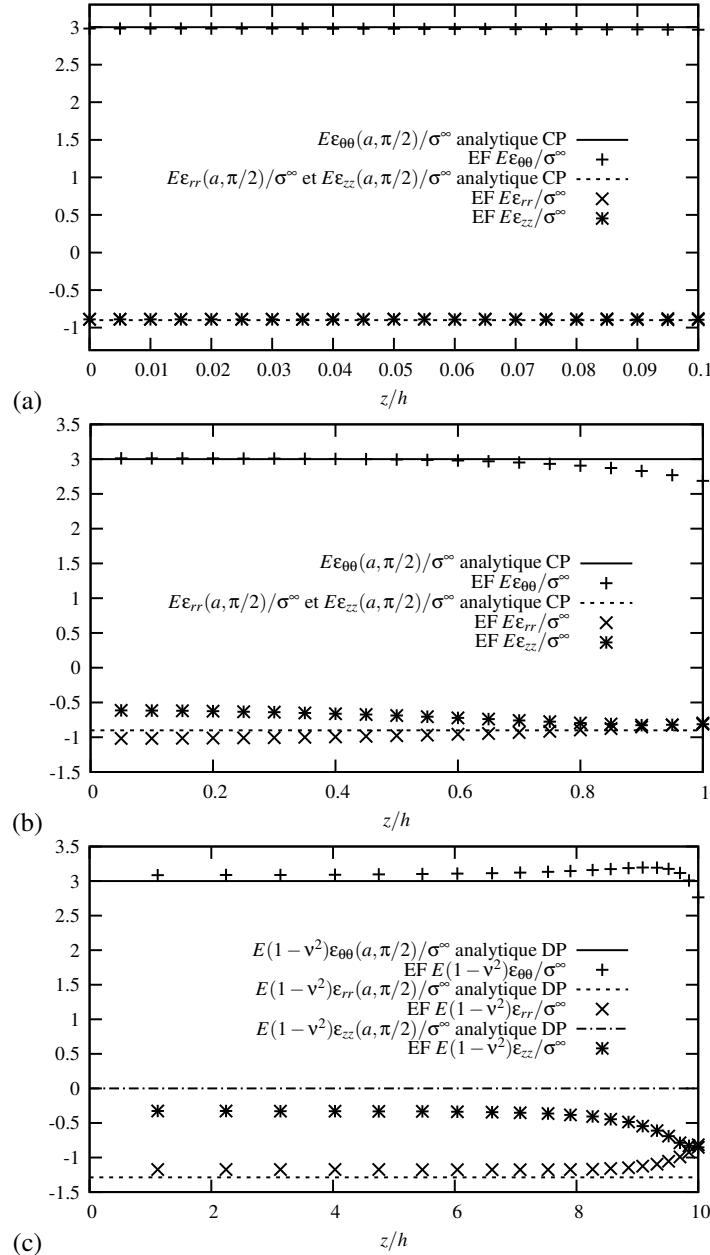


Figure 26.13 : Champ de contrainte équivalente de von Mises autour du trou dans une plaque mince trouée telle que  $h/a = 0.1$ , obtenu numériquement par la méthode des éléments finis. Les valeurs sont normalisées par  $\sigma^\infty$ .



*Figure 26.14: Profils des déformations le long de la ligne d'équation ( $r = a, \theta = \pi/2$ ) pour des plaques trouées telles que (a)  $h/a = 0.1$ , (b)  $h/a = 1$ , (c)  $h/a = 10$ . Les résultats sont obtenus numériquement par la méthode des éléments finis. Ils sont comparés aux expressions simplifiées des déformations en contraintes planes (CP) ou à la solution du problème en déformations planes (DP).*

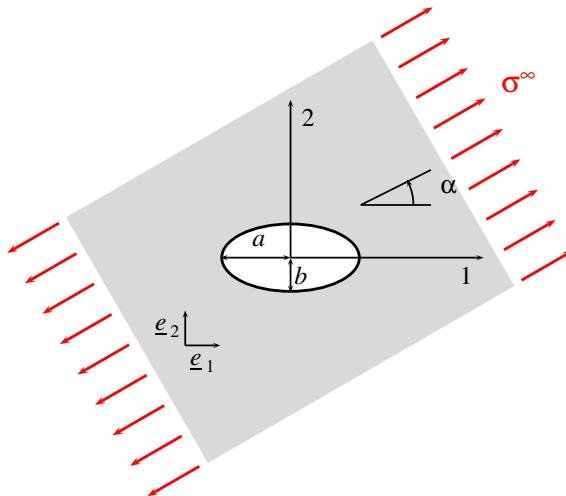


Figure 26.15 : Plaque percée d'un trou elliptique et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité  $\sigma^\infty > 0$  selon une direction faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe 1. On s'interroge sur l'état de contrainte autour du trou et sur le facteur de concentration de contrainte introduit par la présence du trou. La résolution complète de ce problème<sup>3</sup> est plus délicate que dans le cas du trou circulaire. Seuls quelques éléments de la solution sont étudiés ici, tirés des traités (Rekatch, 1980; Kachanov et al., 2003).

## 26.7 Trou elliptique dans une plaque

Une plaque infinie est percée d'un trou cylindrique de forme elliptique caractérisée par les paramètres  $a$  (demi grand axe) et  $b$  (demi petit axe),  $0 < b < a$ , comme sur la figure 26.15. Le grand axe de l'ellipse est parallèle à l'axe 1. La plaque est soumise, loin du trou, à un effort de traction simple  $\sigma^\infty > 0$  selon une direction faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe 1. On s'interroge sur l'état de contrainte autour du trou et sur le facteur de concentration de contrainte introduit par la présence du trou. La résolution complète de ce problème<sup>3</sup> est plus délicate que dans le cas du trou circulaire. Seuls quelques éléments de la solution sont étudiés ici, tirés des traités (Rekatch, 1980; Kachanov et al., 2003).

### 26.7.1 Contrainte au bord du trou elliptique

On adopte la représentation paramétrique suivante des points du bord du trou elliptique représenté sur la figure 26.15 :

$$X_1 = a \cos \theta, \quad X_2 = b \sin \theta \quad (26.67)$$

Dans le contexte des contraintes planes, justifier qu'il n'existe, au bord du trou elliptique, qu'une seule contrainte principale non nulle que l'on exprimera à l'aide de  $\underline{\sigma}$  et d'un vecteur unitaire adapté (sans explicitation détaillée). Dans la suite on note  $\bar{\sigma}$  cette contrainte principale, en vue de l'application d'un critère de rupture fragile.

► Le bord du trou est libre d'effort. Le vecteur-contrainte est donc nul en chaque point du bord. Dans le repère local  $(\underline{m}, \underline{n})$  où  $\underline{m}$  est tangent à l'ellipse et  $\underline{n}$  normal, et sous l'hypothèse de contraintes planes, seule la composante  $\sigma_{mm} = \underline{m} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{m} = \bar{\sigma}$  est non nulle.

<sup>3</sup>. Elle a été obtenue par Kolossov en 1910 et Inglis en 1913 (Inglis, 1913). Pour un exposé plus complet de la solution du problème d'Inglis, le lecteur est renvoyé à la référence (Timoshenko and Goodier, 1970) et (Rekatch, 1980).

Lorsque la plaque trouée est soumise à une traction simple selon une direction faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe 1, on admettra que  $\bar{\sigma}$  vaut, en un point  $(X_1, X_2)$  de l'ellipse, caractérisé par le paramètre  $\theta$  de (26.67) :

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2 \cos 2(\theta - \alpha)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \quad (26.68)$$

L'expression<sup>4</sup> fait intervenir la quantité suivante, fonction des paramètres de l'ellipse :

$$m = \frac{a - b}{a + b}, \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (26.69)$$

Compte tenu de la périodicité de  $\bar{\sigma}$ , l'étude doit être menée *a priori* pour  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  et  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Toutefois, l'invariance du problème vis-à-vis de la transformation  $(\alpha, \theta) \rightarrow (-\alpha, -\theta)$  permet de se limiter à  $\alpha \in [0, \pi/2]$ .

### 26.7.2 Cas d'une sollicitation perpendiculaire au grand axe de l'ellipse

On considère d'abord le cas  $\alpha = \pi/2$ , c'est-à-dire une traction dans la direction 2, perpendiculaire au grand axe de l'ellipse. Préciser alors  $\bar{\sigma}$  et calculer la contrainte maximale  $\bar{\sigma}^{max}$  et la contrainte minimale  $\bar{\sigma}^{min}$ . Remarquer que  $\sigma^{min}$  est indépendante de  $m$  et donc des paramètres de l'ellipse.

A quel endroit ces valeurs extrémiales sont-elles atteintes ?

Le facteur de concentration de contrainte  $K_t$  est toujours défini par (26.27). Le calculer pour le trou elliptique en fonction de  $m$  puis en fonction du rapport  $b/a$ .

On étudie ensuite les cas particuliers suivants :

#### Trou circulaire

Retrouver les résultats établis au paragraphe 26.3.1, à ceci près que la direction de traction est ici l'axe 2 au lieu de l'axe 1.

#### Ellipse infiniment aplatie

Que devient le facteur de concentration de contrainte  $K_t$ , pour une ellipse de plus en plus aplatie, c'est-à-dire lorsque  $b/a \rightarrow 0$ , autrement dit  $m \rightarrow 1$ .

Quelle situation physique ce cas asymptotique évoque-t-il pour vous ?

Que suggère l'analyse précédente à propos du tenseur des contraintes dans cette circons-

tance ?

---

4. Dans son article original, Inglis donne la relation (26.68) sous la forme équivalente suivante :

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{\sinh 2\alpha_0 + \cos 2\alpha - e^{2\alpha_0} \cos 2(\alpha - \theta)}{\cosh 2\alpha_0 - \cos 2\theta}$$

car il utilise un système de coordonnées curvilignes dites elliptiques :

$$x = c \cosh \alpha_0 \cos \theta, \quad y = c \sinh \alpha_0 \sin \theta$$

constitué d'un réseau orthogonal d'ellipses et d'hyperboles d'équations respectives

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \alpha_0} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \alpha_0} = 1, \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \theta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \theta} = 1$$

Lorsque  $(x, y)$  appartient au bord du trou, on a  $c \cosh \alpha_0 = a$  et  $b = c \sinh \alpha_0$ . On vérifie alors que l'expression précédente est effectivement équivalente à (26.68). Le lecteur est renvoyé à la référence (Timoshenko and Goodier, 1970) pour un usage plus systématique des coordonnées elliptiques.

► Pour une traction dans la direction 2, on a  $\alpha = \pi/2$  et la contrainte au bord du trou donnée par (26.68) vaut

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 - 2m + 2\cos 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \quad (26.70)$$

La dérivée de cette fonction de  $\theta$  est

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\theta} = -4\sigma^\infty \sin 2\theta \frac{1 + m - m^2 - m^3}{(1 - 2m \cos 2\theta + m^2)^2} \quad (26.71)$$

Cette fonction est du signe de  $-\sin 2\theta$ , en tenant compte du fait que  $0 \leq m \leq 1$ . La contrainte  $\bar{\sigma}$  est donc croissante pour  $\theta \in [-\pi/2, 0]$  et décroissante pour  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Compte tenu de la périodicité de  $\bar{\sigma}$ , les contraintes maximale et minimale sont

$$\bar{\sigma}^{max} = \bar{\sigma}(\theta = 0) = \frac{3 + m}{1 - m} \sigma^\infty \quad (26.72)$$

$$\bar{\sigma}^{min} = \bar{\sigma}(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\sigma^\infty \quad (26.73)$$

La contrainte est donc maximale au bord du trou en  $r = a$  ( $\theta = 0$ ) et minimale en  $r = b$  ( $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ). C'est une situation comparable au cas du trou circulaire déjà traité. On retrouve d'ailleurs le cas circulaire pour  $m = 0$  pour lequel  $\bar{\sigma}^{max} = 3\sigma^\infty$ .

Dans le cas du trou elliptique en traction simple, le facteur de concentration de contrainte vaut donc :

$$K_t := \frac{\bar{\sigma}_t^{max}}{\sigma^\infty} = \frac{3 + m}{1 - m} = 1 + 2\frac{a}{b} \quad (26.74)$$

On retrouve le facteur de concentration de contrainte  $K_t = 3$  pour le trou circulaire. Pour  $b/a = 1/2$ , il vaut 5, ce qui correspond à une concentration de contrainte très sévère.

On peut utiliser ces valeurs de contraintes pour prévoir la rupture d'une plaque constituée d'un matériau fragile, percée d'un trou elliptique et sollicitée en traction simple, comme sur la figure 26.5(b).

On exprime parfois le facteur  $K_t$  pour le trou elliptique en fonction du rayon de courbure  $R$  de l'ellipse au point ( $X_1 = 0, X_2 = \pm a$ ) qui vaut

$$R = \frac{b^2}{a} \quad (26.75)$$

de sorte que

$$K_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{R}} \quad (26.76)$$

La concentration de contrainte devient d'autant plus sévère que l'ellipse est aplatie, ou, de manière équivalente, que le rayon de courbure est petit. A la limite,

$$\lim_{b/a \rightarrow 0} K_t = \lim_{R \rightarrow 0} K_t = \infty$$

L'ellipse infiniment aplatie fait penser à une fissure. L'analyse précédente suggère l'existence d'une singularité des contraintes en pointe de fissure. Nous reviendrons plus précisément sur ces remarques dans la suite.

### 26.7.3 Cas d'une sollicitation parallèle au grand axe de l'ellipse

On considère cette fois-ci le cas  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire une traction dans la direction parallèle au grand axe. Reprendre les questions de la section précédente dans ce cas. En comparant les cas  $\alpha = \pi/2$  et  $\alpha = 0$ , quelle est la situation la plus pénalisante du point de vue des concentrations de contraintes ?

Quelle différence essentielle observe-t-on pour une ellipse infiniment aplatie ?

► Pour une traction dans la direction 1, on a  $\alpha = 0$  et la contrainte au bord du trou donnée par (26.68) vaut

$$\bar{\sigma} = \sigma^\infty \frac{1 - m^2 + 2m - 2 \cos 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \quad (26.77)$$

La dérivée de cette fonction de  $\theta$  est

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 4\sigma^\infty \sin 2\theta \frac{1 - m - m^2 + m^3}{(1 - 2m \cos 2\theta + m^2)^2} \quad (26.78)$$

Cette fonction est du signe de  $\sin 2\theta$ , en tenant compte du fait que  $0 \leq m \leq 1$ . La contrainte  $\bar{\sigma}$  est donc décroissante pour  $\theta \in [-\pi/2, 0]$  et croissante pour  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Compte tenu de la périodicité de  $\bar{\sigma}$ , les contraintes maximale et minimale sont

$$\bar{\sigma}^{min} = \bar{\sigma}(\theta = 0) = -\sigma^\infty \quad (26.79)$$

$$\bar{\sigma}^{max} = \bar{\sigma}(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{3 - m}{1 + m} \sigma^\infty \quad (26.80)$$

La contrainte est donc maximale au bord du trou en  $r = b$  ( $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ) et minimale en  $r = a$  ( $\theta = 0$ ). Le facteur de concentration de contrainte vaut :

$$K_t = \frac{3 - m}{1 + m} \quad (26.81)$$

Il reste borné pour  $0 \leq m \leq 1$ , contrairement à l'expression (26.74) pour la traction selon 2. La concentration de contrainte en  $\theta = \pi/2$  est moins sévère et reste inférieure à 3. La situation la plus pénalisante est donc celle d'une plaque sollicitée perpendiculairement au grand axe de l'ellipse.

### 26.7.4 Cas d'une ellipse infiniment aplatie sollicitée en traction dans une direction quelconque $0 < \alpha < \pi/2$

On envisage les autres situations pour lesquelles  $0 < \alpha < \pi/2$ , mais seulement dans le cas d'une ellipse infiniment aplatie :

$$m = 1 - \eta, \quad \eta = \frac{2b}{a} \ll 1 \quad (26.82)$$

On montre alors que le maximum de  $\bar{\sigma}$  est atteint en

$$\theta = -\frac{\eta}{2} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + o(\eta) \quad (26.83)$$

Le maximum vaut

$$\sigma^\infty \left( \frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{\eta} + \mathcal{O}(1) \right)$$

et est donc positif.

Identifier alors (pour  $\eta \rightarrow 0$ ) le point du bord de l'ellipse et la facette correspondante où la contrainte est maximale. L'orientation de cette facette par rapport à l'axe 1 est notée  $\beta$ . Déterminer  $\beta$  et tracer la courbe de  $-\beta$  en fonction de  $\alpha$  pour  $0 < \alpha < \pi/2$ . Compléter cette courbe avec le résultat acquis au paragraphe 26.7.2 ( $\alpha = \pi/2$ ). Tracer en outre la courbe de  $-\beta$  en fonction de  $\alpha$  pour  $-\pi/2 \leq \alpha < 0$ .

En supposant un mécanisme de rupture fragile, dessiner schématiquement une fissure amorcée à l'endroit critique trouvé pour un chargement de traction de la plaque dans la direction  $\alpha = \pi/6$ .

► La convergence simple à  $\theta \neq 0$  fixé de la contrainte (26.68) conduit à la limite

$$\lim_{m \rightarrow 1} \bar{\sigma}/\sigma^\infty = \frac{\cos 2\alpha - \cos 2(\theta - \alpha)}{1 - \cos 2\theta} = \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cotan \theta \quad (26.84)$$

La contrainte devient infiniment grande pour  $\theta \rightarrow 0^-$  où la rupture est attendue quel que soit l'angle  $\alpha \neq 0, \pi/2$  de la sollicitation.

Le cas  $\alpha = 0$  présente une indétermination mais ce cas particulier a déjà été étudié au paragraphe 26.7.3. Il est illustré par la figure 26.16(a) pour différentes valeurs de  $m$  proches de 1. Le cas limite ne donne pas lieu à une singularité.

Le cas  $\alpha = \pm\pi/2$  présente un indétermination mais ce cas particulier a déjà été étudié au paragraphe 26.7.2. Il est illustré par la figure 26.16(b) pour différentes valeurs de  $m$  proches de 1. Le cas limite donne lieu à une singularité en  $\theta = 0$ .

Pour les autres cas et pour  $m$  proche de 1, on attend un minimum et un maximum de  $\bar{\sigma}$  d'autant plus proche de  $\theta = 0$  que  $m$  est proche de 1. Cette intuition est confirmée par le tracé de la figure 26.16(c). C'est pourquoi on recherche les angles où  $\bar{\sigma}$  est extrémal sous la forme

$$\theta = k\eta \quad (26.85)$$

Pour étudier les extrema de  $\bar{\sigma}$ , on calcule la dérivée de l'expression générale (26.68). On trouve que la dérivée s'annule lorsque

$$2m \sin 2\alpha + \sin 2\theta(1 - m^2)(\cos 2\alpha - m) - \sin 2\alpha \cos 2\theta(1 + m^2) = 0 \quad (26.86)$$

Les zéros de cette fonction sont de la forme  $k\eta$ ,  $\eta \ll 1$  lorsque  $m$  est proche de 1. Le développement limité de l'expression précédente par rapport à  $\eta$  fournit l'équation suivante :

$$2(1 - \eta) \sin 2\alpha + 4k\eta^2(\cos 2\alpha - 1) - \sin 2\alpha(1 - 2k^2\eta^2)(2 - 2\eta + \eta^2) = 0$$

qui se simplifie en

$$4k^2 - 4k \tan \alpha - 1 = 0$$

Cette équation possède deux racines, l'une positive, l'autre négative :

$$k_+ = \frac{1 + \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (26.87)$$

$$k_- = \frac{\sin \alpha - 1}{2 \cos \alpha} = -\frac{1}{2} \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (26.88)$$

L'évaluation de la contrainte  $\bar{\sigma}$  en  $\theta = k_-\eta$  et  $\theta = k_+\eta$  fournit respectivement le maximum et le minimum cherchés lorsque  $m$  est proche de 1 :

$$\bar{\sigma}_{max}/\sigma^\infty \simeq \frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)}{1 - m}, \quad \bar{\sigma}_{min}/\sigma^\infty \simeq -\frac{2 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{1 - m} \quad (26.89)$$

La direction principale associée à la contrainte principale  $\bar{\sigma}$  est tangente à l'ellipse. Le vecteur tangent de l'ellipse en  $\theta$  est colinéaire à  $[-a \sin \theta, b \cos \theta]^T$ . La facette dont la normale est tangente à l'ellipse est donc parallèle à  $[b \cos \theta, a \sin \theta]^T$ . La facette fait un angle  $\beta$  avec la direction 1, qui vaut donc

$$\tan \beta = \frac{a}{b} \tan \theta \quad (26.90)$$

La contrainte est maximale en  $\theta = k_-(1-m)$ . A cet endroit, la facette est orientée selon :

$$\tan \beta \simeq \frac{a}{b} k_- (1-m) \simeq \frac{a}{b} \frac{2b}{a} k_- = 2k_- \implies -\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \quad (26.91)$$

angle représenté, en fonction de  $\alpha$  sur la figure 26.17. A la limite  $m \rightarrow 1$ , le point où la contrainte est maximale est en  $\theta = 0^-$  et l'orientation de la facette correspondante est donnée par l'expression précédente, indépendante de  $\eta$ . Noter que l'équation (26.91) fournit aussi la solution  $\beta = \alpha/2 + 3\pi/4$  qui n'a de sens qu'en  $\theta = \pi^-$ . Les situations suivantes méritent d'être distinguées :

- Lorsque  $\alpha = \pi/2$ , on a  $\beta = 0$ , ce qui correspond à la situation étudiée au paragraphe 26.7.2. L'amorçage de la fissuration et la propagation suivante se font dans le prolongement du trou elliptique initial.
- Lorsque  $\alpha = \pi/6$ , on a  $\beta = -\pi/6$ . L'orientation de la fissure attendue dans un matériau fragile est illustrée sur la figure 26.18.
- Lorsque  $\alpha = 0$ , la limite du facteur de concentration de contraintes (26.7.3) est finie lorsque  $m \rightarrow 1$ . Aucune singularité n'est attendue dans ce cas. Toutefois, une légère déviation de  $\alpha$  par rapport à cette orientation idéale fait apparaître une singularité en  $\theta = 0$  pour  $m \rightarrow 1$ . Conformément à l'étude précédente, une fissure va s'amorcer en  $\theta = 0^-$ . Elle fait un angle  $\beta = -\pi/4$  avec le grand axe de l'ellipse.

Le diagramme de la figure 26.17 est complété pour des angles  $\alpha$  négatifs en remarquant qu'un chargement dans la direction  $-\alpha$  conduit à un amorçage de fissure d'angle  $-(-\beta(\alpha))$ .

### 26.7.5 Expérience de mécanique de la rupture

Concevoir et réaliser une série d'expériences susceptibles d'illustrer les conclusions précédentes relatives à l'ellipse infiniment aplatie. Critiquer la fidélité du dispositif retenu vis-à-vis de la définition du problème que nous venons d'étudier.

Joindre les échantillons expérimentaux à la copie.

► L'ellipse infiniment aplatie évoque une coupure dans le matériau, ou **fissure**. L'analyse directe de la fissure conduit effectivement à un comportement singulier des contraintes (voir paragraphe 26.8). Le fait que  $K_t \rightarrow \infty$  pour le trou infiniment aplati semble confirmer la similarité avec une fissure. Pour voir si l'analogie fissure/ellipse aplatie peut être poussée plus loin encore, on peut réaliser l'expérience simple qui consiste, à l'aide d'un cutter, à introduire une fissure au centre d'une feuille de papier de format A4 par exemple et à solliciter la feuille incisée en traction selon une direction donnée jusqu'à la déchirer. On mesure alors l'angle que fait la fissure qui s'est amorcée à chaque pointe de la fissure initiale. Les résultats d'une telle série d'expériences sont consignés sur la figure 26.19 et comparés au critère établi pour l'ellipse aplatie. Ces résultats présentent une dispersion importante due au caractère rudimentaire du dispositif expérimental. Des résultats moins dispersés ont été obtenus au début des années 1960 avec du plexiglas (matériau polymère fragile) et confirment le résultat entrevu ici avec le papier : l'angle de bifurcation observé expérimentalement s'écarte notablement de la valeur prévue pour l'ellipse infiniment aplatie dès que l'angle  $\alpha$  s'éloigne de  $\pi/2$ . L'écart le plus important est obtenu

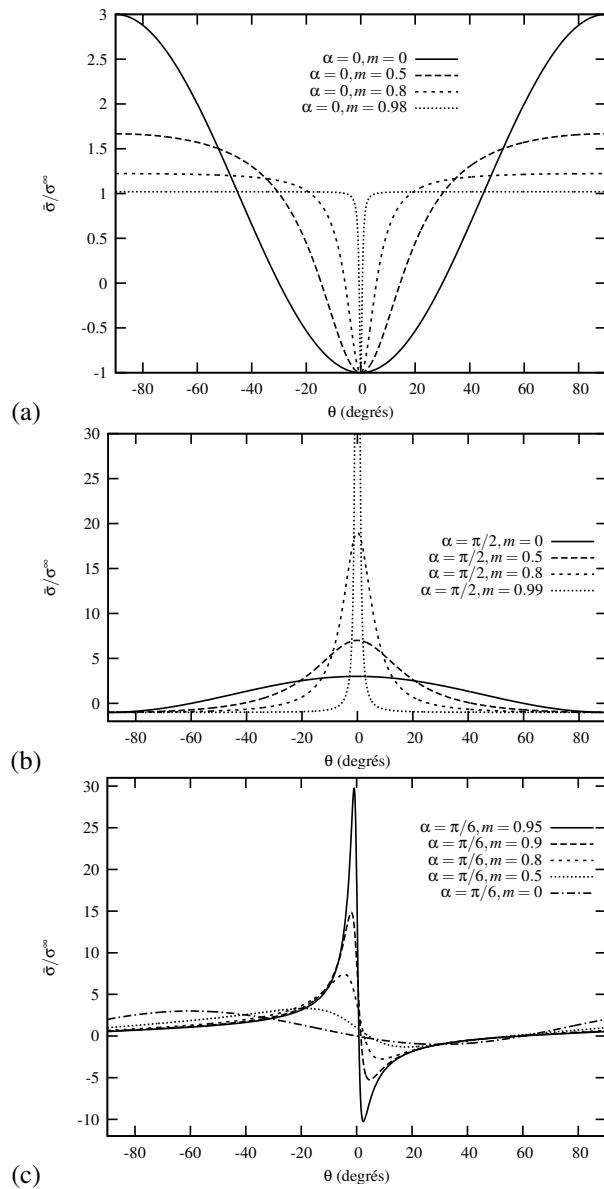


Figure 26.16 : Contrainte principale au bord d'un trou elliptique dans une plaque sollicitée en traction parallèlement (a), perpendiculairement (b), ou dans une direction faisant un angle  $\alpha = \pi/6$  (c) par rapport au grand axe de l'ellipse.

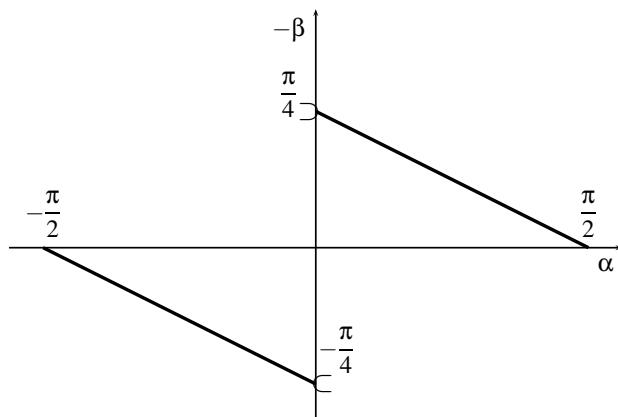


Figure 26.17 : Orientation de la fissure attendue par rapport à l'axe 1 pour un trou elliptique infiniment aplati sollicité en traction dans une direction faisant l'angle  $\alpha$  avec l'axe 1 qui est par ailleurs parallèle au grand axe de l'ellipse. Cette fissure s'amorce en  $\theta = 0^-$ .

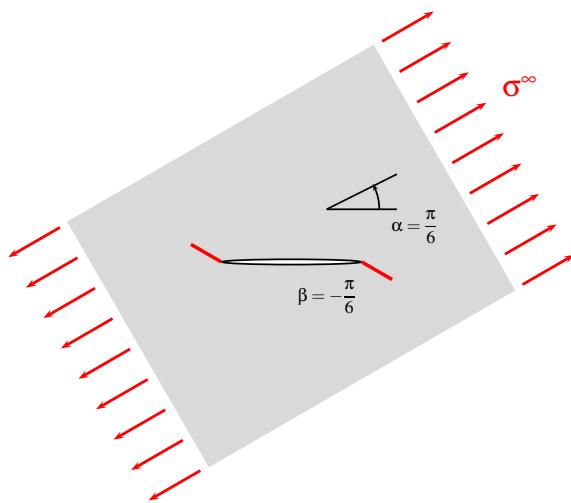


Figure 26.18 : Amorçage de la rupture d'une plaque percée d'un trou elliptique infiniment aplati sollicité en traction dans une direction inclinée à  $30^\circ$  par rapport au grand axe de l'ellipse.

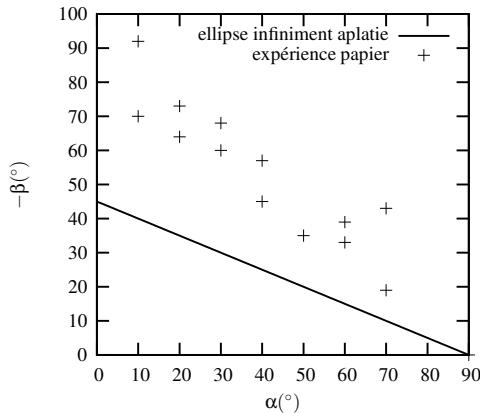


Figure 26.19 : Angle de bifurcation de fissure dans une plaque en traction : résultat théorique pour le trou elliptique infiniment aplati et résultats expérimentaux pour du papier.

pour  $\alpha$  proche de 0. Dans ce cas d'ailleurs l'expérience est difficile à réaliser et demande un surcroît d'effort, en raison du facteur  $\sin \alpha$  dans (26.89) qui s'annule en  $\alpha = 0$ . On se rapproche en effet du cas strict  $\alpha = 0$  pour lequel aucune singularité n'existe à la pointe de la fissure et aucune rupture précoce n'est attendue. Toutefois, l'expérience pour  $\alpha$  s'approchant de 0 indique l'existence d'un angle limite proche de  $-\beta = 70^\circ$ . Pour éviter cette difficulté, sans modifier la structure du chargement, il faut recourir à une sollicitation de cisaillement, dite de mode II. Un tel angle de bifurcation peut en effet être obtenu pour une sollicitation différente de la plaque fissurée, à savoir un cisaillement simple parallèlement à la direction de fissure initiale. Dans ce cas, la singularité des contraintes existe bel et bien et conduit à la rupture de la plaque si un cisaillement suffisant est appliqué. Ce cas est traité en 26.8.4.

**On ne peut donc pas dire qu'un trou elliptique infiniment aplati corresponde exactement à une fissure.** Cela est dû à la courbure imposée par la forme elliptique pour tout  $\eta \neq 0$ , par opposition au caractère aigu de la fissure. En fait, on pourrait étudier des formes différentes de trous (rectangles, losanges aplatis...) et comparer le cas limite infiniment aplati avec la fissure idéale. Pour bien comprendre cette subtile distinction entre fissure et ellipse aplatie, un complément d'information sur les contraintes en pointe de fissure est nécessaire et fait l'objet du paragraphe suivant. En particulier, on va montrer au paragraphe 26.8 que le critère de rupture fragile appliquée en pointe de fissure prévoit, pour le cas limite  $\alpha = 0$  l'amorçage d'une nouvelle fissure à la pointe de la première et faisant un angle proche de  $70.5^\circ$  avec la fissure initiale. Ce résultat diffère du **branchement** à  $45^\circ$  prévu précédemment pour une ellipse infiniment aplatie.

## 26.8 Différence entre le trou elliptique aplati et la fissure

D'après l'analyse précédente, on s'attend à l'existence d'une singularité des contraintes à la pointe d'une ellipse infiniment aplatie dont la forme s'approche de celle d'une fissure. Le champ de contraintes en pointe de fissure, donné dans ce paragraphe, sans l'établir, pour deux modes de sollicitations, comporte effectivement une telle singularité. Toutefois, le comportement d'une fissure diffère fondamentalement de celui de l'ellipse infiniment aplatie quant à l'amorçage d'une nouvelle fissure lorsque le chargement appliqué est trop fort. C'est ce qu'a montré l'expérience de déchirure d'une feuille de papier fissurée au

paragraphe 26.7.5. Ce fait est illustré ici dans le cas d'une sollicitation de la fissure en mode mixte (traction/cisaillement).

### 26.8.1 Champ de contraintes en pointe de fissure

Une fissure est une surface de coupure au sein d'un matériau au travers de laquelle le champ de déplacement peut présenter des discontinuités. On considère le cas d'une fissure plane de longueur  $2a$  présente dans une plaque dont les dimensions sont grandes par rapport à  $a$ . La géométrie et les systèmes de coordonnées adoptés sont donnés sur la figure 26.20. Lorsque la plaque est soumise, loin du trou, à une sollicitation homogène, on dispose d'une solution asymptotique donnant les termes prépondérants du champ de contrainte autour, et suffisamment près, de la pointe de la fissure. La fissure peut être chargée en mode d'ouverture (traction  $\sigma^\infty$  à l'infini), appelé mode I en mécanique de la rupture, ou/et en cisaillement dans le plan de la fissure (cisaillement  $\tau^\infty$  à l'infini), appelé mode II en mécanique de la rupture :

$$\underline{\sigma}^\infty = \sigma^\infty \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \tau^\infty (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)$$

Les lèvres de la fissure sont supposées libres d'effort. Le champ de contrainte proche de la pointe de la fissure prend la forme suivante, d'après les résultats de la mécanique de la rupture dont on trouvera un exposé dans l'ouvrage (Sanford and Thompson, 1997) rassemblant les textes fondateurs sur le sujet, et dans les manuels récents en français (François et al., 1993; Miannay, 1995; Leblond, 2003) :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left( \frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (26.92)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \quad (26.93)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)) \quad (26.94)$$

dans un système de coordonnées cylindriques<sup>5</sup> dont l'origine est à la pointe de la fissure,  $r$  désignant la distance du point courant à cette pointe, comme sur la figure 26.20. Les expressions font intervenir les coefficients  $K_I$  et  $K_{II}$ , appelés **facteurs d'intensité de contrainte**, reliés au chargement appliqué par :

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \tau^\infty \sqrt{\pi a} \quad (26.98)$$

Le champ de contrainte présente une singularité en  $r = 0$ . Le fait que le facteur de concentration de contrainte  $K_t$  puisse devenir infini pour une ellipse infiniment aplatie a permis de soupçonner l'existence d'une telle singularité dans le cas d'une fissure. La

---

5. Quelques transformations des fonctions trigonométriques permettent aussi d'écrire le champ de contraintes sous la forme équivalente :

$$\sigma_{rr} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( -5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (26.95)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( -3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (26.96)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (26.97)$$

La vérification que ces formules sont effectivement identiques aux expressions (26.92), (26.93) et (26.94) est immédiate.

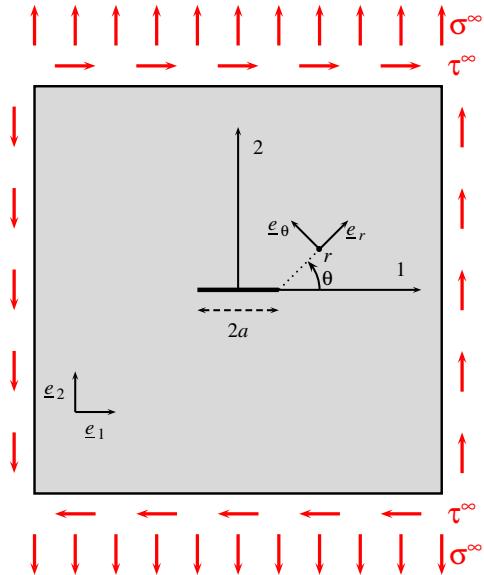


Figure 26.20 : Plaque munie d'une fissure de longueur  $2a$  et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction  $\sigma^\infty$  et de cisaillement  $\tau^\infty$ .

forme de la singularité s'avère être en  $1/\sqrt{r}$ .

Une illustration artistique du mode II est donnée par le dessin de R. Topor de la figure 26.22.

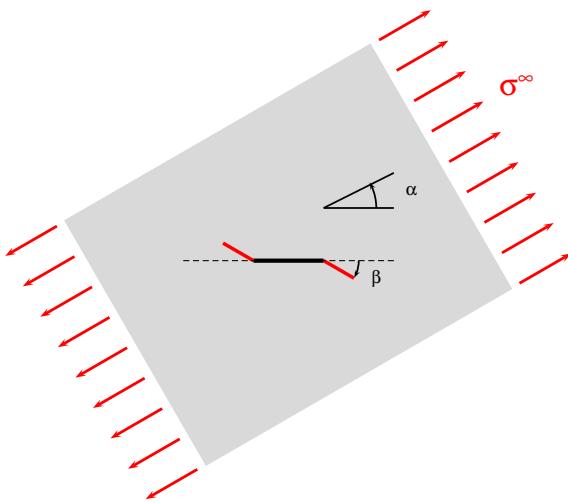
### 26.8.2 Quelques paradoxes liés à la rupture

La mise en évidence d'une singularité des contraintes en pointe de fissure suscite de nombreuses interrogations.

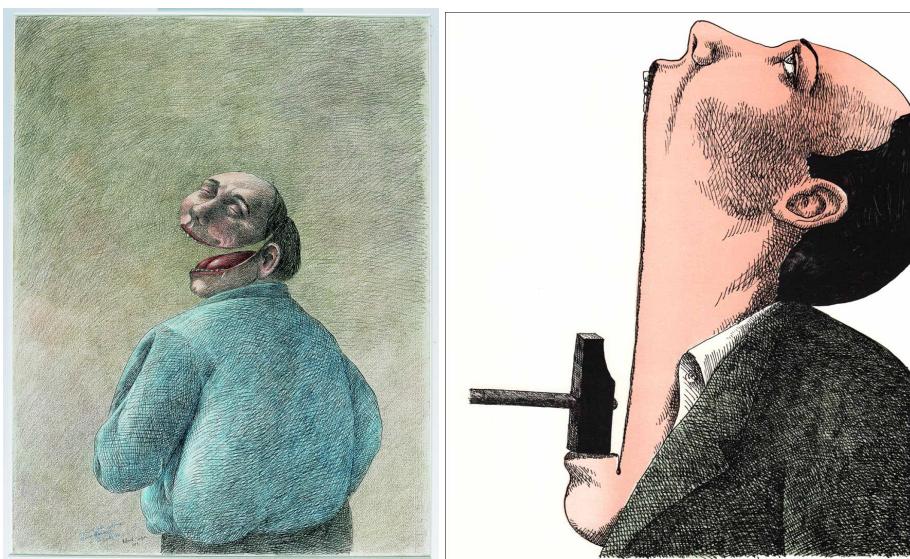
Comment un matériau peut-il résister à une contrainte locale infinie sans rompre à la moindre charge appliquée ? On montre en fait que la singularité du champ de contraintes est telle que l'énergie élastique contenue dans un volume fini entourant la fissure reste finie. Par conséquent, la rupture ne se produit que lorsque cette énergie est suffisante pour créer des surfaces nouvelles correspondant à la propagation de la fissure sur une certaine distance.

Mais alors, pourquoi une plaque fragile percée d'un trou circulaire et chargée en traction casse-t-elle pour une valeur critique finie atteinte à l'équateur tandis qu'une plaque fissurée ne casse pas spontanément sous l'effet de la moindre charge ? C'est la notion de défaut qu'il faut invoquer ici. Le volume de matière fragile fortement sollicité à l'équateur contient des défauts (microfissures, microcavités, microinclusions, défauts de surface...). Dès lors la contrainte à rupture n'est pas une donnée intrinsèque du matériau mais dépend de la statistique de défauts présents, qui est intimement liée à son élaboration et aux traitements de surface.

On est en droit aussi de rétorquer que l'existence d'un champ de contraintes singulier n'est pas compatible avec l'hypothèse des petites perturbations qui a présidé à l'établissement de cette solution. Il est légitime de s'interroger sur la pertinence du champ trouvé près de la pointe de la fissure. On peut, pudiquement, s'interdire d'appliquer alors un critère rupture en-deçà d'une distance critique à la pointe de la fissure. Cette précaution ne lève toutefois pas le doute émis sur la légitimité de la solution exhibée. En effet, on utilise



*Figure 26.21 : Plaque munie d'une fissure de longueur  $2a$  et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction  $\sigma^\infty$  inclinée de l'angle  $\alpha$  par rapport à la direction de la fissure initiale. Sous la charge appliquée, la fissure initiale se propage en bifurquant sur un plan faisant un angle  $\beta$  avec la direction initiale de la fissure.*



*Figure 26.22 : A gorge déployée et Marteau pilon poil au menton, les modes I et II selon Roland Topor, cf. [www.bnf.fr/sites/default/files/2019-02/dp\\_monde\\_topor.pdf](http://www.bnf.fr/sites/default/files/2019-02/dp_monde_topor.pdf).*

une théorie asymptotique en résolvant un problème linéarisé par rapport au problème de perturbation initial qui dépend d'un petit paramètre  $\eta$ . Rien ne garantit, en général, la convergence de la solution du problème linéarisé vers le premier terme de la solution asymptotique du problème réel. Dans certains cas, cette convergence n'est pas assurée uniformément sur tout le domaine étudié<sup>6</sup>. Dans le cas de la fissure, la convergence est acquise pour tout domaine excluant un cylindre  $r < \eta$  pourvu que  $\eta$  soit suffisamment petit pour un chargement donné. Toutefois, rien ne garantit que le type de singularité trouvé en  $r = 0$ , dans le contexte HPP, soit le même que celui du problème asymptotique réel. Le mérite de cette "solution" tient en fait à la pertinence remarquable qu'elle présente vis-à-vis de nombreux résultats expérimentaux de mécanique de la rupture.

Le critère simple de rupture consistant à décréter qu'un matériau fragile rompt lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique contient en germe un autre paradoxe. C'est que la rupture d'une plaque (suffisamment grande par rapport à  $a$ ) ne dépendrait pas de la taille du défaut. En effet la concentration de contrainte au bord d'un trou dans une plaque infinie ne dépend pas de sa taille, on l'a vu. Or les grande fissures sont plus dangereuses que les petites. En rupture il y a un effet de taille de fissure (même dans une plaque infini). A nouveau, c'est l'approche énergétique signalée précédemment qui permet de lever ce paradoxe et de modéliser un effet d'échelle en rupture. Comme de toute façon, un critère de contrainte maximale n'est pas tenable en présence d'un champ singulier, c'est la notion de **ténacité**  $K_{Ic}$  qui prend le pas, c'est-à-dire une valeur critique du facteur d'intensité de contrainte. Cette notion est intimement liée à l'approche énergétique mentionnée.

Considérons enfin un barreau soumis à une sollicitation de traction simple. Quel que soit le niveau de contrainte appliquée, une barre suffisamment longue devrait permettre de mobiliser suffisamment d'énergie élastique dans le volume sollicité pour conduire à l'amorçage d'une fissure si l'on en croit le critère énergétique invoqué déjà à plusieurs reprises. A la limite, une barre très longue devrait rompre à la moindre charge...

En fait, la rupture résulte bel et bien de la combinaison d'une condition de contrainte critique atteinte localement et d'un critère énergétique (McClintock and Argon, 1966; Leguillon, 2002).

### 26.8.3 Un critère simple de bifurcation de fissure

Lorsqu'une plaque fissurée est sollicitée mécaniquement, on peut se demander, d'une part, à partir de quelle charge appliquée la fissure initiale va se propager et, d'autre part, dans quelle direction aura lieu cette propagation. La fissure va-t-elle continuer à se propager dans son plan initial ou bifurquer sur un plan incliné ? On présente un élément de réponse à cette deuxième question<sup>7</sup>, à savoir une estimation de l'angle de bifurcation de la fissure par rapport à son orientation initiale. L'approche proposée est due à (Erdogan and Sih, 1963).

Une plaque fissurée est soumise, loin de la fissure, à une sollicitation de traction  $\sigma^\infty$  selon une direction faisant un angle  $\alpha$  avec la fissure, comme sur la figure 26.21. Le champ de contraintes en pointe de fissure est obtenu à partir des expressions (26.92) à (26.94) en prenant

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \sin^2 \alpha, \quad K_{II} = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \sin \alpha \cos \alpha \quad (26.99)$$

6. Le lecteur est renvoyé à la référence (Germain, 1973a) aux pages 108 et 114.

7. La réponse à première question, à savoir la prévision de la contrainte à rupture, est plus délicate. Les résultats expérimentaux issus de (Erdogan and Sih, 1963) sont assez mal décrits par les critères de rupture proposés. D'autres approches, prenant notamment en compte la statistique des défauts contenus dans le matériaux, permettent d'améliorer ces prévisions de rupture. Au contraire, l'angle de bifurcation observé expérimentalement est remarquablement bien décrit par le critère simple développé dans ce paragraphe. Une analyse plus rigoureuse et plus complète, développée dans (Leblond, 1989; Amestoy and Leblond, 1992; Leblond, 2003) permet de justifier *a posteriori* la remarquable efficacité du critère d'Erdogan et Sih.

En effet, la charge de traction appliquée se décompose en une composante d'ouverture en mode I,  $\sigma^\infty \sin^2 \alpha$ , et en une composante de cisaillement (mode II),  $\sigma^\infty \sin \alpha \cos \alpha$ .

Le critère de bifurcation proposé est basé sur les deux hypothèses suivantes :

- (i) la bifurcation s'effectue sur un plan radial à partir de la pointe initiale de la fissure ;
- (ii) le plan de bifurcation est celui pour lequel la contrainte normale d'ouverture est maximale (à  $r \neq 0$  fixé).

Ces hypothèses, certes confortées par l'intuition, sont pour le moins discutables mais ont le mérite de la simplicité. Elles ont pour conséquence que la fissure va bifurquer sur le plan radial pour lequel la contrainte orthoradiale  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale et la contrainte de cisaillement  $\sigma_{r\theta}$  est nulle. Sur un plan radial, la contrainte normale est effectivement  $\sigma_{\theta\theta}$ . Cette contrainte est maximale pour l'angle  $\theta$  tel que

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0$$

La seconde équation d'équilibre statique indique qu'alors

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

Or, d'après (26.94), la dérivée de la contrainte de cisaillement est égale à  $-\sigma_{r\theta}/r$ , de sorte que l'équation précédente implique que  $\sigma_{r\theta}$  s'annule à l'endroit où la contrainte orthoradiale est maximale.

La mise en œuvre du critère de bifurcation (ii) passe par le calcul de la dérivée par rapport à  $\theta$  de la composante (26.93) :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = -\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \sin \frac{\theta}{2} + K_{II}(3 \cos \theta - 1) \right)$$

En conséquence, la contrainte orthoradiale présente des extrêmes en

$$\theta = \pm\pi, \quad K_I \sin \frac{\theta}{2} + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (26.100)$$

Les angles  $\theta = \pm\pi$  correspondent aux lèvres de la fissures où les efforts sont supposés nuls. Le plan de bifurcation est donc donné par la seconde équation.

En mode I pur ( $K_{II} = 0$ ), ce critère prévoit une propagation coplanaire de la fissure ( $\beta = 0$ ).

En mode II pur ( $K_I = 0$ ), ce critère prévoit une bifurcation sur le plan incliné de l'angle<sup>8</sup>

$$\beta = -\arccos \frac{1}{3} \simeq -70.5^\circ \quad (26.101)$$

Dans le cas d'une plaque fissurée en traction, les facteurs d'intensité de contraintes sont donnés par (26.99) et peuvent être substitués dans l'équation précédente. Lorsque  $\alpha \neq 0$  (le cas  $\alpha = 0$  ne conduit pas à une singularité des contraintes en pointe de fissure), l'angle de bifurcation  $\beta$  de la fissure lors de sa propagation est solution de l'équation suivante :

$$\sin \beta + (3 \cos \beta - 1) \cot \alpha = 0 \quad (26.102)$$

Pour  $0 < \alpha < \pi/2$ , cette équation indique que  $\beta$  est négatif, conformément à l'intuition (cf. figure 26.21). La courbe correspondante donnant l'angle  $\beta$  en fonction de  $\alpha$  est tracée

---

8. Parmi les solutions possibles  $\beta = \pm\arccos(1/3)$ , seul l'angle  $\beta = -\arccos(1/3)$  conduit à une contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  positive, d'après (26.93).

sur la figure 26.23. Cette courbe se prolonge en  $\alpha = \pi/2$  par la valeur  $\beta = 0$ .

F.A. McClintock, dans sa discussion de l'article de (Erdogan and Sih, 1963), remarque que cette courbe est distincte de celle correspondant au trou elliptique infiniment aplati. L'expérience sur le papier, comme sur le plexiglas dans l'article original, corrobore indiscutablement le critère établi dans cette section, comme l'indique la figure 26.23.

Il est important de noter que ce critère de contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  maximale ne coïncide pas avec le critère de contrainte normale maximale. Pour le voir, on donne les composantes cartésiennes des contraintes, d'après (François et al., 1993; Miannay, 1995), selon le repère de la figure 26.20 :

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (26.103)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (26.104)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (26.105)$$

En mode I pur par exemple ( $K_{II} = 0$ ), on peut vérifier que les contraintes principales sont

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (26.106)$$

La contrainte principale  $\sigma_1$ , à  $r$  fixé, est maximale en  $\theta = \pi/3$  où elle vaut

$$\sigma_1^{max} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1.3\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)$$

La contrainte orthoradiale  $\sigma_{\theta\theta}$  est clairement maximale en  $\theta = 0$  où elle prend une valeur plus faible que la contrainte principale maximale. On vérifie en fait que, en  $\theta = \pi/3$ , la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$  est nulle de sorte que les contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  sont principales. La contrainte  $\sigma_{22}(r, \theta = \pi/3)$  n'est autre que la contrainte principale maximale  $\sigma_1^{max}$ .

Pourquoi ne pas utiliser le critère de contrainte normale maximale en présence d'une fissure ? En mode I pur, le critère de contrainte principale maximale, appliqué en  $r \neq 0$  prévoit la propagation de la fissure à partir d'un point situé sur une ligne  $\theta = \pi/3$ . L'observation courante indique que la fissure principale se propage selon sa direction initiale sans bifurquer, c'est-à-dire en suivant le plan où  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximal. Les facettes correspondant à la contrainte principale maximale, à une distance  $r \neq 0$ , est horizontale et ne passe pas, en général, par la pointe de la fissure initiale de sorte que la rupture se produirait par multifissuration non radiale, ce qui n'est, en général, pas observé dans les matériaux fragiles.

#### 26.8.4 Trou elliptique infiniment aplati chargé en mode II

La plaque munie d'un trou elliptique est soumise à un chargement de cisaillement simple loin du trou,  $\sigma_{12}^\infty = \tau^\infty$  dans le repère de la figure 26.15. La contrainte  $\bar{\sigma}$  au bord du trou s'obtient en utilisant l'expression (26.68) successivement pour  $\sigma^\infty = \tau^\infty, \alpha = \pi/4$  et  $\sigma^\infty = -\tau^\infty, \alpha = -\pi/4$ . La superposition de ces chargements de traction simple à  $45^\circ$  et de compression simple à  $-45^\circ$ , de même amplitude, est équivalente au chargement de

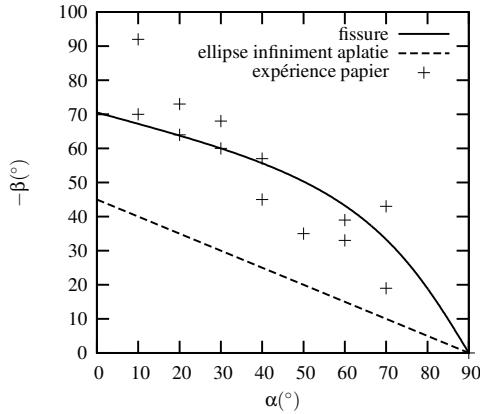


Figure 26.23 : Angle de bifurcation de fissure dans une plaque en traction : résultat théorique pour la fissure, le trou elliptique infiniment aplati et résultats expérimentaux pour du papier.

cisaillement simple envisagé ici. On trouve

$$\bar{\sigma} = -\tau^\infty \frac{4 \sin 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} \quad (26.107)$$

Cette contrainte est extrémale lorsque

$$\cos 2\theta = \frac{2m}{1 + m^2} \quad (26.108)$$

Pour  $m$  proche de 1, les angles solutions sont proches de 0. Seule la solution  $\theta < 0$  de l'équation précédente fournit un maximum positif de  $\bar{\sigma}$  pour  $\tau^\infty > 0$ . La tangente de l'angle correspondant vaut

$$\tan \theta = -\frac{1-m}{1+m}$$

et peut alors être insérée dans l'équation (26.90) donnant l'angle de bifurcation

$$\tan \beta = -\frac{1}{1-b/a} \quad (26.109)$$

dont la limite lorsque  $b/a \rightarrow 0$  fournit  $\beta = -\pi/4$ . On retrouve l'angle de bifurcation limite trouvé lors de la traction de la plaque pour  $\alpha \rightarrow 0^+$  (cf. figure 26.17).

L'analogie entre le trou elliptique chargé en cisaillement selon son grand axe et le problème initial du trou elliptique en traction parallèlement au grand axe apparaît lorsque l'on compare l'expression<sup>9</sup> de la contrainte maximale atteinte en mode II pour  $m$  proche de 1 :

$$\bar{\sigma}^{max} = \frac{2\tau^\infty}{1-m} \quad (26.110)$$

<sup>9</sup>. Pour trouver l'expression (26.110), on substitue le résultat (26.108) et la relation  $\sin 2\theta = -(1-m^2)/(1+m^2)$  (le signe moins vient de la valeur négative de l'angle  $\theta$  pour laquelle la contrainte maximale est atteinte) dans l'équation (26.107) donnant la contrainte au bord du trou.

avec l'expression (26.89) trouvée en traction et donnée ici lorsque  $\alpha$  est proche de 0 :

$$\bar{\sigma}^{max} = \frac{2\alpha\sigma^\infty}{1-m} \quad (26.111)$$

Ces expressions sont identiques, au terme d'affaiblissement  $\alpha$  prêt. Le chargement en mode II permet de retrouver la structure du chargement de traction en évacuant l'affaiblissement de la singularité  $\alpha$ . Dans le cas d'une fissure chargée en mode II, on a trouvé  $\beta \simeq -70.5^\circ$ , valeur qui distingue clairement le cas de la fissure du cas du trou elliptique infiniment aplati.

#### 26.8.5 Comportement asymptotique de trous de formes plus générales

On peut imaginer d'autres formes géométriques de trous cylindriques dans une plaque susceptibles de ressembler à une fissure lorsqu'on les aplatis indéfiniment. Une famille générique de telles géométries est décrite par l'équation suivante

$$\left(\frac{|X_1|}{a}\right)^n + \left(\frac{|X_2|}{b}\right)^n = 1 \quad (26.112)$$

où l'exposant  $n$  caractérise la géométrie intrinsèque de la zone amenée à jouer le rôle de la pointe de fissure. Le cas  $n = 2$  correspond au trou elliptique étudié dans ce chapitre. D'autres formes sont illustrées sur la figure 26.24. Les puissances élevées sont proches du trou rectangulaire pour lequel la courbure en  $\theta = 0$  est nulle. Les puissances plus petites que 1 conduisent à un point de rebroussement en  $\theta = 0$ , les deux lèvres ayant une tangente commune, situation qui semble plus proche de l'image de la fissure. Le cas intermédiaire  $n = 1$  introduit un angle vif en  $\theta = 0$ , angle qui devient nul pour  $n < 1$  et plat pour  $n > 1$ . En faisant tendre  $b/a$  vers 0, ces figures ressemblent de plus en plus à une fissure. A la lumière de l'étude précédente, on peut suspecter que chacune de ces géométries conduise à un comportement asymptotique spécifique qui diffère, à la limite, de celui de la fissure, en raison de la forme particulière associée à chaque valeur de  $n$ . Il reste toutefois à mener cette étude jusqu'au bout pour s'en assurer.

### 26.9 Cavités sphériques et ellipsoïdales dans un massif

La question de l'existence d'une concentration de contraintes se pose aussi dans le cas d'un trou sphérique ou, plus généralement ellipsoïdal, de petite taille dans une pièce massive.

L'intérêt pratique de cette analyse est lié à l'existence de défauts sphériques (porosités) inévitables dans les pièces de fonderie par exemple (culasses automobiles, aubes de turbine monocrystallines...) même s'ils sont généralement de tailles très limitées (du micromètre au millimètre). La concentration de contrainte mise en évidence limite l'endurance de la pièce, i.e. sa résistance à la fatigue à grands nombres de cycles.

La méthode de résolution du problème du trou ellipsoïdal dans un massif infini diffère fondamentalement de l'approche résolument bidimensionnelle mise en œuvre dans ce chapitre. Elle fait appel à des techniques plus générales qui ne sont pas rapportées dans ce chapitre. C'est dans l'ouvrage de (Mura, 1987) qu'on trouvera l'exposé le plus détaillé des problèmes de défauts (cavités, inclusions...) dans les solides élastiques. On se contente ici, par souci d'exhaustivité vis-à-vis des problèmes de concentrations de contraintes, de donner le facteur de concentration de contrainte  $K_t$  pour un trou sphérique en traction :

$$K_t = \frac{3(9 - 5\nu)}{2(7 - 5\nu)} \quad (26.113)$$

La concentration de contrainte est maximale dans le cas quasi-incompressible ( $\nu$  proche

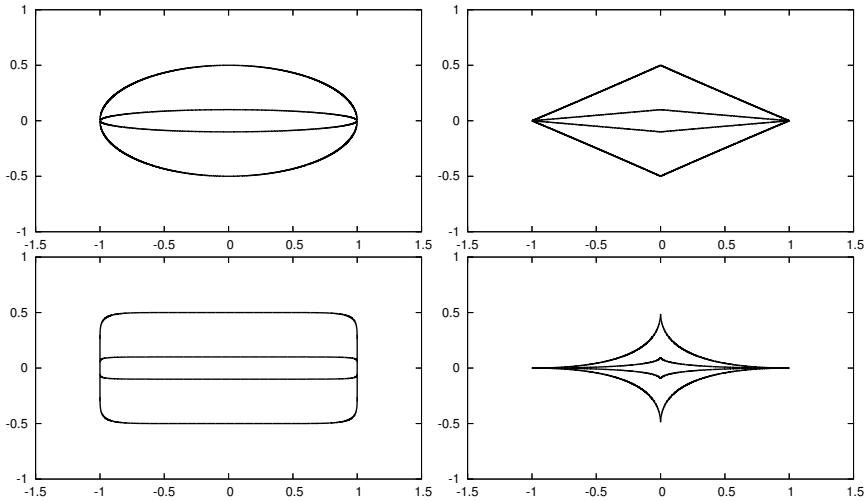


Figure 26.24 : Trous dans une plaque de forme géométrique d'équation (26.112) avec :  $n = 2$  en haut à gauche,  $n = 1$  en haut à droite,  $n = 10$  en bas à gauche,  $n = 0.5$  en bas à droite. Dans chaque cas, deux trous sont représentés pour  $b/a = 0.5$  et  $b/a = 0.1$ .

de 0.5), avec une valeur d'environ 2.17, et minimale pour  $\nu$  proche de  $-1$ , avec un facteur de 1.75. Le facteur est de 2.04 pour  $\nu$  proche de 0.3.

géométrie	$K_t$
trou circulaire (DP et CP)	3
cavité sphérique	$\frac{3(9 - 5\nu)}{2(7 - 5\nu)}$
trou elliptique (CP et DP) (axes $a, b$ , rayon de courbure $R$ )	$1 + 2\frac{a}{b} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{R}}$

Tableau 26.2: Récapitulatif : facteurs de concentration de contrainte pour différents types de défauts dans une plaque sollicitée en traction simple.

### 26.10 Epilogue

L'ensemble des situations évoquées dans ce chapitre et les facteurs de concentration de contraintes associés sont rassemblés dans le tableau 26.2. Des cas beaucoup plus généraux d'entailles, de fissures et de défauts peuvent être consultés dans l'ouvrage (Pilkey, 1997).

## 27 Mécanique des matériaux composites

### 27.1 Inclusion cylindrique hétérogène dans une matrice élastique et application aux composites à fibres longues

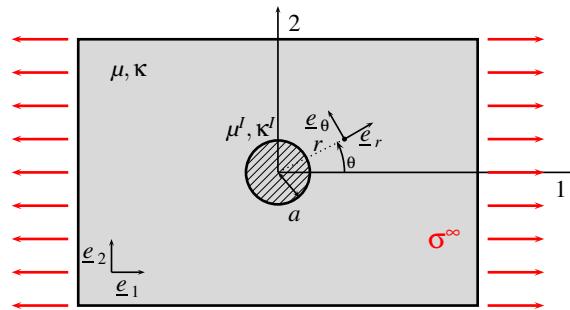


Figure 27.1 : Inclusion circulaire de rayon  $a$  au sein d'une matrice infinie dont les propriétés élastiques diffèrent. La plaque est soumise, très loin de l'inclusion, à l'effort de traction  $\sigma^\infty$ .

L'objectif de cette partie est d'étudier les contraintes qui se développent dans une plaque infinie contenant une inclusion circulaire et soumise à une contrainte de traction,  $\sigma^\infty$ , à l'infini, comme sur la figure 27.1. Le plan représenté est le plan (1,2). La matrice et l'inclusion sont des matériaux homogènes dont le comportement est élastique isotrope linéarisé, respectivement caractérisés par les modules de cisaillement et de compressibilité,  $(\mu, \kappa)$  et  $(\mu^I, \kappa^I)$ . L'exposant  $I$  fait référence à l'inclusion. L'inclusion et la matrice sont supposées être dans leur état naturel avant d'être sollicitées en traction, dans le cas isotherme. L'interface entre l'inclusion et la matrice est supposée parfaite (pas d'ouverture ni de glissement) de sorte que l'inclusion et la matrice sont "soudées" en  $r = a$ .

Si le milieu s'étend également dans la direction 3, il représente une matrice contenant une fibre. Cette situation correspond au cas d'un composite unidirectionnel renforcé par des fibres longues parallèles suffisamment éloignées les unes des autres (fraction volumique faible) pour que l'interaction fibre-matrice soit correctement décrite par le problème idéalisé de la figure 27.1.

#### 27.1.1 Contraintes et déformations dans l'inclusion pour la traction transverse

Le champ des contraintes dans l'inclusion, i.e.  $r \leq a$ , dans le système de coordonnées cylindriques est donné par les expressions

$$\sigma_{rr}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I \cos 2\theta) \quad (27.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I \cos 2\theta) \quad (27.2)$$

$$\sigma_{r\theta}^I = -\frac{\sigma^\infty}{2}\delta^I \sin 2\theta \quad (27.3)$$

pour une traction dans la direction 1. Les constantes en jeu dans ces expressions sont définies par :

$$\beta^I = \frac{\mu^I(\chi + 1)}{2\mu^I + \mu(\chi^I - 1)}, \quad \delta^I = \frac{\mu^I(\chi + 1)}{\mu + \mu^I\chi}, \quad (27.4)$$

et

$$\chi = 3 - 4\nu, \quad \chi^I = 3 - 4\nu^I \quad (27.5)$$

en déformations planes et

$$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad \chi^I = \frac{3 - \nu^I}{1 + \nu^I} \quad (27.6)$$

en contraintes planes.

Ce résultat s'établit en utilisant les fonctions d'Airy comme on l'a fait dans le problème du trou dans une plaque au chapitre 26 26. Cependant, on ne demande pas ici de démontrer ce résultat et on renvoie le lecteur au détail de la solution développée par (Muskhelishvili, 1977) et consignée dans le manuel (Kachanov et al., 2003).

#### *Le champ est homogène dans l'inclusion*

Montrer que le champ des contraintes données par les équations (27.1),(27.2),(27.3) est homogène dans l'inclusion et correspond aux composantes cartésiennes des contraintes suivantes :

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{22}^I = \frac{\sigma^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I), \quad \sigma_{12}^I = 0 \quad (27.7)$$

Commenter ce résultat en se rappelant que la plaque est soumise à une traction simple dans la direction 1 à l'infini.

Obtient-on le résultat attendu dans le cas où la matrice et l'inclusion ont les mêmes propriétés élastiques ?

Remarquer que ces contraintes ne dépendent pas de la taille  $a$  de l'inclusion. Commenter.

► Les vecteurs de la base cylindrique sont liés de la manière suivante à la base cartésienne orthonormée :

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2, \quad \underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2, \quad \underline{e}_z = \underline{e}_3$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \sigma_{rr}\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sigma_{\theta\theta}\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \sigma_{r\theta}(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) + \sigma_{zz}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \\ &= (\sigma_{rr} \cos^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \sin^2 \theta - \sigma_{r\theta} \sin 2\theta)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \\ &\quad + (\sigma_{rr} \sin^2 \theta + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \theta + \sigma_{r\theta} \sin 2\theta)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}((\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \sin 2\theta + 2\sigma_{r\theta} \cos 2\theta)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \sigma_{zz}\underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

En substituant les composantes (27.1) à (27.3), on obtient les expressions (27.7) indiquées. On constate qu'elles sont indépendantes de la position du point matériel, ce qui signifie que les contraintes sont homogènes dans l'inclusion. On remarque que l'état de contraintes dans l'inclusion est biaxial alors que la sollicitation imposée à l'infini est uniaxial. C'est une conséquence du confinement imposé par la matrice.

Les contraintes et déformations dans une inclusion au sein d'une matrice infinie ne dépendent pas de sa taille. La propriété d'homogénéité des contraintes et déformations dans l'inclusion s'étend au cas ellipsoïdal et le résultat ne dépend alors que du rapport

$a/b$ . Ces deux derniers points ne sont plus valides dans le cas d'une matrice de dimensions finies proches de celles de l'inclusion.

Dans le cas du matériau homogène,  $\mu^I = \mu$  etc., on trouve  $\beta^I = \delta^I = 1$  de sorte que l'état de contrainte se réduit à la traction simple  $\sigma^\infty$  comme il se doit.

#### *L'inclusion est sous pression*

Dans le cas des contraintes planes, puis dans le cas des déformations planes, calculer la pression hydrostatique qui règne dans l'inclusion en fonction des paramètres en jeu et de  $\sigma^\infty$ .

► Dans le cas des contraintes planes, la pression hydrostatique dans l'inclusion vaut

$$p^I = -\frac{1}{3}(\sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I) = -\frac{\sigma^\infty}{3}\beta^I$$

Dans le cas des déformations planes s'ajoute la composante  $\sigma_{33}^I = \nu^I(\sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I) = \nu^I\beta^I\sigma^\infty$  de sorte que

$$p^I = -\frac{1}{3}(\sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I + \sigma_{33}^I) = -\frac{\sigma^\infty}{3}\beta^I(1 + \nu^I)$$

#### *Déformée de l'inclusion*

Donner le champ des déplacements dans l'inclusion dans le cas des déformations planes. Quelle forme prend l'inclusion ? La caractériser précisément.

Donner les conditions du respect du contexte infinitésimal de l'étude.

► Les déformations se calculent grâce à la loi de Hooke pour donner :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^I &= \frac{\sigma^\infty}{2E^I} ((1 + \nu^I)(1 - 2\nu^I)\beta^I + (1 + \nu^I)\delta^I) \\ \varepsilon_{22}^I &= \frac{\sigma^\infty}{2E^I} ((1 + \nu^I)(1 - 2\nu^I)\beta^I - (1 + \nu^I)\delta^I)\end{aligned}$$

Toutes les autres composantes du tenseur des déformations infinitésimales sont nulles. Le champ des déplacements s'en déduit aisément

$$\begin{aligned}u_1^I &= \frac{\sigma^\infty}{2E^I} ((1 + \nu^I)(1 - 2\nu^I)\beta^I + (1 + \nu^I)\delta^I) X_1 \\ u_2^I &= \frac{\sigma^\infty}{2E^I} ((1 + \nu^I)(1 - 2\nu^I)\beta^I - (1 + \nu^I)\delta^I) X_2\end{aligned}$$

à un mouvement de corps rigide infinitésimal près.

Que devient alors le cercle d'équation  $X_1^2 + X_2^3 = a^2$  ? Il se transforme en

$$\frac{x_1^2}{(1 + \varepsilon_{11}^I)^2} + \frac{x_2^2}{(1 + \varepsilon_{22}^I)^2} = a^2$$

Il s'agit d'une ellipse dont le rapport grand axe sur petit axe vaut :

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \varepsilon_{11}^I}{1 + \varepsilon_{22}^I} \simeq 1 + \varepsilon_{11}^I - \varepsilon_{22}^I = 1 + \frac{\sigma^\infty}{E^I}(1 + \nu^I)\delta^I$$

Le contexte infinitésimal est garanti tant que  $\sigma^\infty/E^I \ll 1$ .

### 27.1.2 Concentration de contraintes dans la matrice pour la traction transverse

Le champ de contraintes qui règne dans la matrice, i.e. pour  $r \geq a$ , est donné, quant à lui, par les expressions suivantes :

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 - \gamma \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 - 2\beta \frac{a^2}{r^2} - 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) \quad (27.8)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \gamma \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 - 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right) \quad (27.9)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 + \beta \frac{a^2}{r^2} + 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (27.10)$$

où les paramètres  $\beta$  et  $\delta$  sont définis par

$$\beta = -\frac{2(\mu^I - \mu)}{\mu + \mu^I \chi}, \quad \delta = \frac{\mu^I - \mu}{\mu + \mu^I \chi}, \quad \gamma = \frac{\mu(\chi^I - 1) - \mu^I(\chi - 1)}{2\mu^I + \mu(\chi^I - 1)} \quad (27.11)$$

On admet que ce champ de contraintes vérifie les équations d'équilibre statique.

### Contrainte normale et tangentielle le long de l'interface

Vérifier que la solution en contraintes proposée dans la matrice satisfait les conditions aux limites à l'infini et au bord de l'inclusion.

Donner au passage les expressions de la contrainte normale  $\sigma_n$  et de la contrainte tangentielle le long de l'interface  $r = a$ .

► Pour  $r \rightarrow \infty$ , les composantes des contraintes sont celles d'une traction simple dans la direction 1 :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \sigma^\infty \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \\ &= \sigma^\infty (\cos^2 \theta \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \sin^2 \theta \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta - \sin \theta \cos \theta (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)) \end{aligned}$$

Quant à l'interface inclusion/matrice, la contrainte normale et la contrainte tangentielle sont obtenues en calculant le vecteur-contrainte  $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r$  et en le projetant sur  $\underline{e}_r$  et  $\underline{e}_\theta$ , respectivement :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{rr}(r = a) = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \gamma + (1 - 2\beta - 3\delta) \cos 2\theta), \\ \tau &= \sigma_{r\theta}(r = a) = -\frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \beta + 3\delta) \sin 2\theta \end{aligned}$$

La continuité du vecteur-contrainte à l'interface  $r = a$  entre l'inclusion et la matrice exige que

$$\sigma_{rr}^I(r = a) = \sigma_{rr}(r = a) \quad \forall \theta \implies \beta^I + \delta^I \cos 2\theta = 1 - \gamma + (1 - 2\beta - 3\delta) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}^I(r = a) = \sigma_{r\theta}(r = a) \quad \forall \theta \implies \delta^I \sin 2\theta = (1 + \beta + 3\delta) \sin 2\theta$$

Ces relations sont effectivement vérifiées car l'utilisation des expressions des paramètres

permet de montrer que

$$\beta^I = 1 - \gamma, \quad \delta^I = 1 - 2\beta - 3\delta = 1 + \beta + 3\delta$$

*Contraintes le long du ligament et facteur de concentration de contrainte*

Donner l'expression de la contrainte  $\sigma_{11}$  dans la matrice le long de la ligne  $\theta = \pi/2$ , perpendiculaire à la direction de la charge de traction appliquée.  
Exprimer alors le facteur de concentration de contrainte

$$K_t = \frac{\sigma_{11}(r = a, \theta = \pi/2)}{\sigma^\infty} \quad (27.12)$$

► La contrainte axiale  $\sigma_{11}$  le long du ligament perpendiculaire à la charge appliquée n'est autre que

$$\sigma_{11}(r > a, \theta = \pi/2) = \sigma_{\theta\theta}(r > a, \theta = \pi/2) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 2 + \gamma \frac{a^2}{r^2} - 3\delta \frac{a^4}{r^4} \right)$$

On en déduit que

$$K_t = \frac{1}{2} \left( 2 + \gamma - 3\delta \right) \quad (27.13)$$

On donne également le profil de contrainte le long de la ligne  $\theta = 0$  :

$$\sigma_{22}(r > a, \theta = 0) = \sigma_{\theta\theta}(r > a, \theta = 0) = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{a^2}{r^2} \left( \gamma + 3\delta \frac{a^2}{r^2} \right)$$

On obtient également un facteur de concentration de contrainte au pôle :

$$K_t^0 = \frac{1}{2} (\gamma + 3\delta) \quad (27.14)$$

*Cas limites du trou et de l'inclusion rigide*

Calculer le facteur de concentration de contrainte dans les trois cas suivants :

1. L'inclusion a les mêmes propriétés élastiques que la matrice ;
2. L'inclusion est un trou ;
3. L'inclusion est rigide.

Commenter dans chaque cas.

En particulier, discuter la valeur du facteur de concentration de contrainte dans le cas de l'inclusion rigide en fonction du coefficient de Poisson de la matrice.

► Les réponses sont consignées dans la table 27.1. Si l'inclusion a les mêmes propriétés élastiques que la matrice, la plaque peut être considérée comme homogène de sorte qu'il n'y a pas de concentration de contrainte. On a  $\delta = \gamma = 0$  et  $K_t = 1$ . Dans le cas du trou dans une plaque,  $\gamma = -\delta = 1$  et on retrouve le résultat établi au chapitre 26, à savoir  $K_t = 3$ . Dans le cas de l'inclusion rigide, les modules de cisaillement et de compressibilité dans l'inclusion sont considérés comme infinis de sorte que  $\delta = 1/\chi$  et  $\gamma = (1 - \chi)/2$ . On trouve que le facteur de concentration de contrainte ne dépend que de

inclusion	homogène	vide	rigide
$\mu^I$	$\mu$	0	$+\infty$
$\delta$	0	-1	$1/\chi$
$\gamma$	0	1	$-\chi/2$
$K_t$	1	3	$1 - \chi/4 - 3/4\chi$
$K_t^0$	1	-1	$(3/\chi - \chi/2)/2$

Tableau 27.1: Facteurs de concentration de contrainte selon la nature de l'inclusion dans une matrice infinie.

$\chi$  et, par conséquent, du coefficient de Poisson de la matrice seulement, à savoir  $\nu$ . On a également ajouté  $K_t^0$  défini dans la question précédente.

### 27.1.3 Extension au chargement biaxial quelconque

Le composite de la figure 27.1 est désormais chargé dans les deux directions perpendiculaires  $e_1$  et  $e_2$ : contrainte  $\sigma_1^\infty$  à l'infini dans la direction 1 et contrainte  $\sigma_2^\infty$  à l'infini dans la direction 2.

Trouver les contraintes  $\sigma_{11}^I, \sigma_{22}^I, \sigma_{12}^I$  qui règnent dans l'inclusion en fonction des propriétés élastiques de la matrice et de l'inclusion et du chargement  $\sigma_1^\infty$  et  $\sigma_2^\infty$ .

► Nous faisons appel au théorème de superposition du paragraphe 9.1.4. La solution du problème de traction simple  $\sigma_1^\infty$  dans la direction 1 est

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma_1^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{22}^I = \frac{\sigma_1^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I), \quad \sigma_{12}^I = 0$$

La solution du problème de traction simple  $\sigma_2^\infty$  dans la direction 2 est

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma_2^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I), \quad \sigma_{22}^I = \frac{\sigma_2^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{12}^I = 0$$

La superposition des deux chargements conduit à la somme des champs précédents

$$\sigma_{11}^I = \frac{\sigma_1^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I) + \frac{\sigma_2^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I) \quad (27.15)$$

$$\sigma_{22}^I = \frac{\sigma_1^\infty}{2}(\beta^I - \delta^I) + \frac{\sigma_2^\infty}{2}(\beta^I + \delta^I), \quad \sigma_{12}^I = 0 \quad (27.16)$$

En effet, la géométrie, les propriétés du composite étudié sont les mêmes dans les deux cas et les conditions aux limites de type Neumann sont appliquées sur les mêmes frontières (à l'infini) de la matrice.

### 27.1.4 Application aux composites à fibres longues

Les résultats précédents sont appliqués au cas d'un composite à matrice métallique composé de fibres de carbure de silicium dans une matrice d'alliage de titane. Les propriétés élastiques supposées isotropes de ces matériaux sont données dans la table 27.2. Ce type de composite allie la rigidité du renfort fibreux à la ductilité de la matrice métallique.

On utilise le problème de la figure 27.1 pour estimer les contraintes dans la fibre et la matrice, en faisant ainsi l'approximation d'une faible interaction entre les fibres (fraction

matériaux	module de cisaillement $\mu$ (GPa)	module de compressibilité $\kappa$ (GPa)
titane	44	110
SiC	168	215

Tableau 27.2: Modules d'élasticité des constituants du composite à matrice métallique étudié.

volumique faible de fibres). Dans les questions suivantes, la matrice est soumise à l'infini à la contrainte de traction simple  $\sigma^\infty$  donnée, dans la direction 1, comme sur la figure 27.1.

#### Modules de Young des constituants

Donner les valeurs du module de Young du titane et du carbure de silicium (SiC) qui se déduisent des propriétés élastiques de la table 27.2.

Commenter.

► Le module de Young et le coefficient de Poisson se déduisent des valeurs des modules de compressibilité et de cisaillement par les formules de la table 8.1.

Pour le titane, on trouve  $E = 116 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.32$ .

Pour le carbure de silicium, on a  $E = 400 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.19$ .

Le carbure de silicium est presque quatre fois plus rigide que le titane. C'est ce qui explique son usage comme renfort de la matrice.

#### Profils et champs de contraintes

Les champs de contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  normalisées par la traction appliquée  $\sigma^\infty$  sont illustrés sur la figure 27.2 dans l'inclusion et dans la matrice environnante.

Commenter ces champs.

La figure 27.3 à gauche montre les profils des contraintes normalisées  $\sigma_{11}/\sigma^\infty$  et  $\sigma_{22}/\sigma^\infty$  le long de la ligne d'équation  $x_2 = 0$ . La figure 27.3 à droite montre les profils des contraintes normalisées  $\sigma_{11}/\sigma^\infty$  et  $\sigma_{22}/\sigma^\infty$  le long du ligament (axe 2 d'équation  $x_1 = 0$ ).

Commenter ces profils.

► Conformément aux résultats établis précédemment, les contraintes dans l'inclusion sont uniformes. La contrainte  $\sigma_{11}$  dans l'inclusion est plus de 20% supérieure à la contrainte appliquée. Il existe une légère contrainte  $\sigma_{22}$  de compression dans l'inclusion. Alors que, comme prévu, le cisaillement  $\sigma_{12}$  est nul dans l'inclusion, il y a des contraintes de cisaillement dans la matrice et près de l'interface inclusion/matrice.

La contrainte  $\sigma_{22}$  (resp.  $\sigma_{11}$ ) présente une discontinuité à l'interface inclusion/matrice le long de la ligne  $x_2 = 0$  (resp.  $x_1 = 0$ ), au contraire de la composante  $\sigma_{11}$  (resp.  $\sigma_{22}$ ). Ces observations sont en accord avec la transmission du vecteur-contrainte à l'interface.

#### Rupture de fibre en traction transverse

Le carbure de silicium est un matériau fragile qui rompt lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique  $\sigma_c$ . L'ordre de grandeur de cette contrainte critique est de 500 MPa à température ambiante mais ces matériaux sont surtout utilisés pour les applications aéronautiques à haute température. On exprimera donc les résultats de cette question en fonction de  $\sigma_c$  sans passer à l'application numérique.

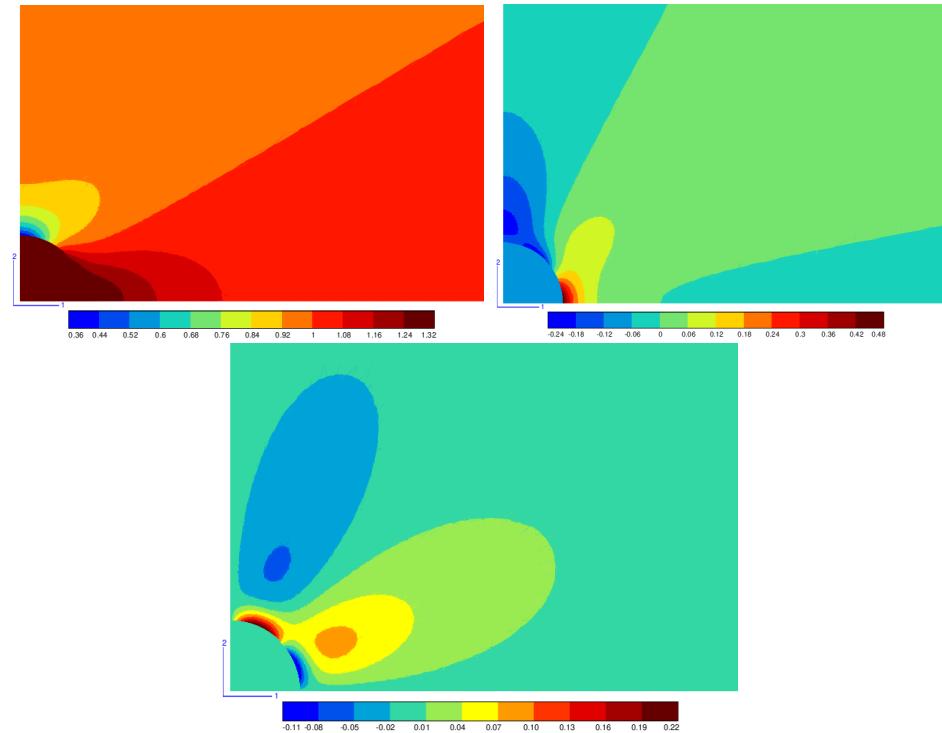


Figure 27.2 : Contraintes dans l'inclusion et la matrice en traction selon l'axe 1 : champs des composantes  $\sigma_{11}/\sigma^\infty$  (en haut à gauche),  $\sigma_{22}/\sigma^\infty$  (en haut à droite) et  $\sigma_{12}/\sigma^\infty$  (en bas).

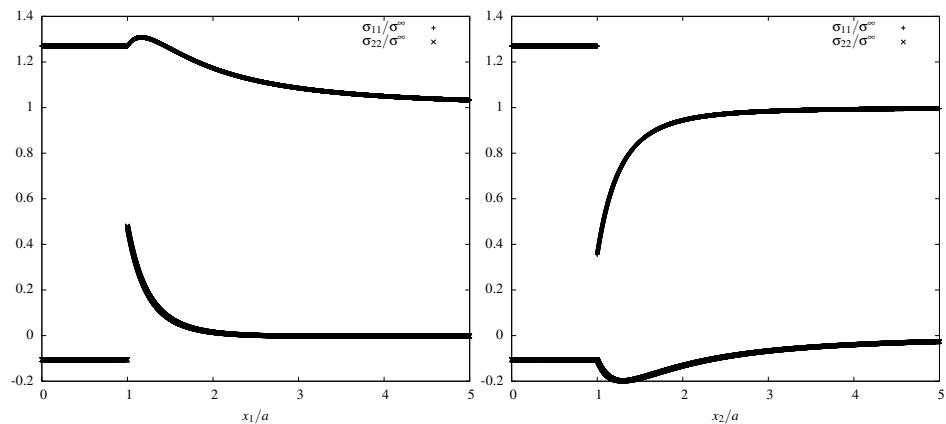


Figure 27.3 : Profils de contraintes le long de la ligne  $x_2 = 0$  (à gauche) et de la ligne  $x_1 = 0$  (à droite).

Trouver pour quelle valeur de contrainte de traction appliquée  $\sigma^\infty$  la condition de rupture est atteinte dans l'inclusion. On exprimera cette valeur en fonction de  $\sigma_c$  et des propriétés élastiques de la fibre et de la matrice.

Qu'en est-il en compression ( $\sigma^\infty < 0$ ) ?

► L'état de contraintes dans l'inclusion est biaxial et les contraintes principales sont  $\sigma_{11}^I, \sigma_{22}^I$  ainsi que  $\sigma_{33}^I$  dans le cas des déformations planes. En cas de traction la contrainte principale maximale est  $\sigma_{11}^I$  qui est positive. Le critère de rupture est atteint lorsque

$$\sigma_{11}^I = \sigma_c \implies \sigma^\infty = \frac{2\sigma_c}{\beta^I + \delta^I}$$

En compression ( $\sigma_\infty < 0$ ), les courbes de la figure 27.3 montrent que la contrainte principale max sera  $\sigma_{22}^I > 0$  (car elle est négative en traction sur la figure) alors que les deux autres contraintes seront négatives. Finalement, la rupture aura lieu lorsque

$$\sigma_{22}^I = \sigma_c \implies \sigma^\infty = \frac{2\sigma_c}{\beta^I - \delta^I}$$

#### *Décohésion à l'interface*

Un autre mécanisme d'endommagement possible est la décohésion entre la fibre et la matrice qui correspond à la rupture de l'interface fibre/matrice. Un critère simple de décohésion est obtenu en considérant que la rupture de l'interface a lieu lorsque la contrainte normale  $\sigma_n$  atteint une valeur critique  $\sigma_n^c$ .

Donner la valeur de  $\sigma^\infty$  pour laquelle  $\sigma_n^c$  est atteinte à un point de l'interface. Indiquer la position de ce point.

Distinguer le cas de la traction ( $\sigma^\infty > 0$ ) du cas de la compression.

► La contrainte normale le long de l'interface est simplement donnée par  $\sigma_{rr}^I(r=a) = \sigma^\infty(\beta^I + \delta^I \cos 2\theta)/2$ . En traction, cette contrainte est maximum en  $\theta = 0$  et la rupture de l'interface se produit donc lorsque  $\sigma^\infty = 2\sigma_n^c/(\beta^I + \delta^I)$ .

En compression, la contrainte normale est maximale et positive en  $\theta = \pi/2$  et la rupture de l'interface se produit donc lorsque  $\sigma^\infty = 2\sigma_n^c/(\beta^I - \delta^I)$ .

#### *Rupture de fibre en cisaillement dans le plan 1-2*

Le composite est maintenant soumis à un chargement de cisaillement simple de valeur  $\tau^\infty$  à l'infini.

Donner les contraintes dans l'inclusion en fonction de  $\tau^\infty$  et des caractéristiques élastiques de l'inclusion et de la matrice. Commenter.

Pour quelle valeur de  $\tau^\infty$  la rupture de l'inclusion a-t-elle lieu et quelle est l'orientation de la fissure correspondante ? Le critère de rupture de l'inclusion est le même qu'à la question 27.1.4.

► On se place dans le repère principal associé au chargement de cisaillement  $\tau^\infty$ . Le composite est alors sollicité en traction  $\sigma_1^\infty = \tau^\infty$  dans la direction 1, et en compression  $\sigma_2^\infty = -\tau^\infty$  dans la direction 2. On peut alors appliquer les formules de superposition (27.15,27.16) :

$$\sigma_{11}^I = \delta^I \tau^\infty, \quad \sigma_{22}^I = -\delta^I \tau^\infty, \quad \sigma_{12}^I = 0$$

On constate que l'inclusion est également dans un état de contrainte de cisaillement (2 valeurs propres opposées). Par suite, la contrainte principale maximale est  $\sigma_{11}^I$  et la rupture se produit lorsque  $\tau^\infty = \sigma_c/\delta^I$ , avec une fissure verticale.



## 28 Dislocations de Volterra

*Le cours polycopié contenait un détail qui m'avait échappé à la première lecture, à savoir que le zinc, si tendre et délicat, si accommodant en présence des acides, qui n'en font qu'une seule bouchée, se comporte en revanche bien différemment lorsqu'il est très pur : alors, il résiste obstinément à l'attaque. De cela on pouvait tirer deux conséquences philosophiques opposées : l'éloge de la pureté, qui protège du mal comme une cuirasse ; l'éloge de l'impureté, qui ouvre la voie aux métamorphoses, c'est-à-dire à la vie. J'écartai la première, d'un moralisme répugnant, et m'attardai à considérer la seconde, qui m'était plus congéniale. Pour que la roue tourne, pour que la vie vive, les impuretés sont nécessaires, et les impuretés des impuretés ; même dans la terre, comme on sait, si on veut qu'elle soit fertile. Il faut le désaccord, le différent, le grain de sel et de séné ; le fascisme n'en veut pas, il les interdit, c'est pour cela que tu n'es pas fasciste : il nous veut tous pareils, et tu n'es pas pareil. La vertu immaculée n'existe pas non plus, ou si elle existe, elle est détestable.*

Primo Levi, *Le système périodique*<sup>a</sup>, 1975.

---

<sup>a</sup>. Édition Le Livre de Poche, traduit de l'italien par André Maugé.

Des contraintes internes peuvent exister dans un corps homogène élastique sans chargement extérieur imposé. Il s'agit d'un champ d'*auto-contraintes*, dont la divergence est nulle en l'absence de forces volumiques, et qui est tel que le vecteur contrainte est nul sur les surfaces du corps. Les champs d'auto-contraintes étudiés dans ce chapitre sont dus à la présence d'une *dislocation*, défaut linéaire dont on va préciser la formation.

Un cylindre creux de rayon intérieur  $r_i$ , de rayon extérieur  $r_e$ , d'axe  $\underline{e}_z$ , et de longueur  $L$ , subit les opérations suivantes de formation d'une dislocation, qui sont des cas particuliers de la procédure générale établie par Volterra<sup>1</sup> :

1. Le cylindre est coupé le long du plan  $\theta = 0$ , comme sur la figure 28.1(a).
2. Une lèvre de la coupure est déplacée d'un mouvement de translation de vecteur  $\underline{b}$ , constant et pris parallèle au plan de la coupure, par rapport à l'autre face de la coupure.
3. Les surfaces de coupure sont ensuite définitivement soudées, point par point, par un moyen ou par un autre.
4. Les efforts qui ont été nécessaires au déplacement relatif des lèvres sont finalement relâchés. Ils sont en fait repris, au moins partiellement, par des contraintes internes. Le corps est alors dans un état d'auto-contraintes et de déformations à déterminer.

L'axe du cylindre défectueux est appelé *ligne de dislocation*.

---

1. L'article original de V. Volterra date de 1907 (Volterra, 1907).

L'étude est menée dans le contexte des petites perturbations pour un milieu isotrope, dans son état initial naturel, au comportement élastique linéarisé. On utilise en général un système de coordonnées cylindriques comme sur la figure 28.1(a). La coordonnée  $X_3$  est aussi notée  $z$  dans la suite. Les fonctions de la variable angulaire  $\theta$  considérées dans ce chapitre, seront définies, sauf mention contraire, sur le domaine suivant :

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

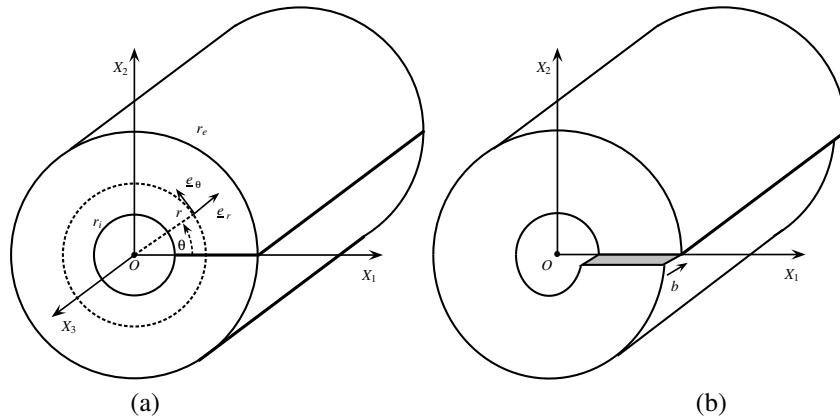


Figure 28.1 : Procédure de fabrication d'une dislocation dans un cylindre creux : (a) coupe dans le cylindre initial, repérages utilisés dans le chapitre, (b) dislocation-vis.

### 28.1 Dislocation-vis

Le défaut introduit est appelé dislocation-vis lorsque le vecteur de translation  $\underline{b}$  est parallèle à l'axe du cylindre :

$$\underline{b} = b \underline{e}_z \quad (28.1)$$

On recherche les composantes de déplacements  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_z$  associés à ce défaut, par rapport à la configuration initiale du cylindre intact, sans coupure. Manifestement, la composante  $u_z$  présente une discontinuité en  $\theta = 0$ . Les composantes  $u_r$  et  $u_\theta$ , par contre, sont continues à la traversée de la coupure.

Dans un premier temps, jusqu'à la question 28.1.8, on ne se préoccupe pas de la dépendance en  $z$  de ces fonctions, ni des conditions aux extrémités du cylindre  $z = 0$ ,  $z = L$ . On recherche alors une solution en déplacements de la forme :

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_z(r, \theta) \quad (28.2)$$

La discontinuité du déplacement axial est due au déplacement relatif égal à  $\underline{b}$  imposé aux lèvres avant de les coller :

$$u_z(r, \theta = 0^+) - u_z(r, \theta = 2\pi^-) = b, \quad r_i \leq r \leq r_e \quad (28.3)$$

où les notations introduites désignent les limites suivantes :

$$u_z(r, 0^+) = \lim_{\theta \rightarrow 0, \theta > 0} u_z(r, \theta), \quad u_z(r, 2\pi^-) = \lim_{\theta \rightarrow 2\pi, \theta < 2\pi} u_z(r, \theta) \quad (28.4)$$

On se propose enfin de rechercher une solution  $u_z(\theta)$  qui ne dépendrait pas de  $r$ .

### 28.1.1 Champ de déplacements

Montrer que, dans ce cas, la dépendance de  $u_z$  par rapport à  $\theta$  est nécessairement affine et que l'expression suivante du déplacement peut être adoptée :

$$u_z(\theta) = -\frac{b\theta}{2\pi} \quad (28.5)$$

Noter que la fonction  $u_z(\theta)$  est à valeurs multiples puisqu'elle prend deux valeurs distinctes sur le plan de coupure. On obtient une fonction à valeurs simples en éliminant le plan de coupure du domaine de définition, désormais restreint à :

$$0 < \theta < 2\pi \quad (28.6)$$

Ce sera le domaine de définition des fonctions de  $\theta$  considérées dans la suite de ce chapitre, sauf mention contraire.

► En coordonnées cylindriques, les seules composantes de déformation et de contraintes non nulles associées au déplacement proposé sont

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \quad (28.7)$$

La troisième équation d'équilibre des contraintes fournit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0 \implies \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0 \quad (28.8)$$

La fonction  $u_z(\theta)$  est donc affine :  $u_z(\theta) = A\theta + B$ . La constante  $A$  est déterminée grâce à la condition de discontinuité (28.3) :

$$u_z(\theta = 0^+) - u_z(\theta = 2\pi^-) = -2\pi A = b, \quad r_i \leq r \leq r_e$$

En prenant la translation  $B = 0$ , on aboutit à la proposition (28.5).

### 28.1.2 Vecteur de Burgers

On considère un cercle  $\Gamma_0$  d'équation  $r = r_0$  tracé sur la configuration initiale du cylindre (voir la partie gauche de la figure 28.2). On appelle *vecteur de Burgers* de la dislocation l'intégrale le long de  $\Gamma_0$  de l'élément de fibre matériel déformé  $\underline{dx}$  :

$$\oint_{\Gamma_0} \underline{dx} (\underline{X}) \quad (28.9)$$

Calculer le vecteur de Burgers pour la dislocation-vis et montrer qu'il est indépendant du contour fermé choisi pour le calculer.

► On rappelle que  $\underline{x} = \underline{X} + \underline{u}$ . Le contour  $\Gamma_0$  est fermé de sorte que

$$\int_{\Gamma_0} \underline{dX} = 0 \quad (28.10)$$

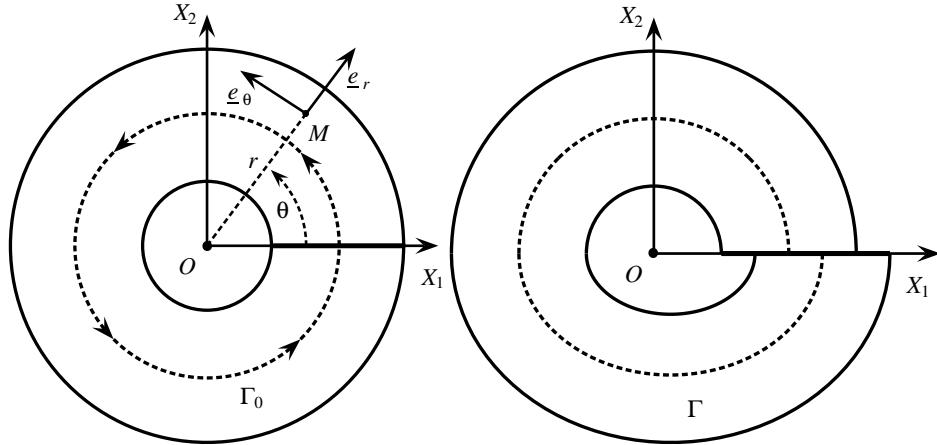


Figure 28.2 : Section initiale et actuelle du cylindre déformé par une dislocation-coin.

Le vecteur de Burgers vaut donc

$$\int_{\Gamma_0} \frac{d\mathbf{x}}{dx} = \int_{\Gamma_0} d\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \underline{u}_z(2\pi^+) - \underline{u}_z(O^-) = -\mathbf{b} \quad (28.11)$$

Il ne dépend que de la discontinuité du champ de déplacements et peut se calculer avec n'importe quel contour fermé ne s'intersectant pas lui-même et irréductible à un point, tracé sur le cylindre initial. On entend par là tout contour ne pouvant être réduit à un point par déformation du circuit tout en restant contenue dans le cylindre creux, autrement dit tout contour entourant, une seule fois, le creux du cylindre étudié.

### 28.1.3 Champs de contraintes et de déformations

Calculer les déformations et les contraintes associées au champ de déplacements précédents. Remarquer qu'elles sont continues pour toutes les valeurs de  $\theta$ . Préciser les conditions imposées par le contexte infinitésimal.

► Les composantes non nulles de déformations et de contraintes pour la dislocation-vis sont :

$$\varepsilon_{\theta z} = -\frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{\mu b}{2\pi r} \quad (28.12)$$

Elles sont indépendantes de  $\theta$  et continues sur tout le cylindre.

Le contexte infinitésimal est respecté tant que

$$\frac{|b|}{r_i} \ll 1 \quad (28.13)$$

### 28.1.4 Equilibre et conditions aux limites en contraintes

Confirmer que les équations d'équilibre local sont vérifiées par les contraintes précédentes. Les conditions aux limites sur les bords intérieur  $r = r_i$  et extérieur  $r = r_e$  du cylindre le sont-elles également ?

### 28.1.5 Energie élastique d'une dislocation-vis

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

► La densité d'énergie libre de déformation vaut :

$$\begin{aligned}\rho\psi(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{\theta z}\varepsilon_{\theta z} + \sigma_{z\theta}\varepsilon_{z\theta}) = \sigma_{\theta z}\varepsilon_{\theta z} \\ &= \frac{\mu b^2}{8\pi^2 r^2}\end{aligned}\quad (28.14)$$

L'énergie par unité de longueur du cylindre s'obtient en intégrant sur une section du cylindre :

$$W = \int_{r=r_i}^{r=r_e} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho\psi r dr d\theta = \frac{\mu b^2}{4\pi} \log \frac{r_e}{r_i} \quad (28.15)$$

### 28.1.6 Cas où $r_i \rightarrow 0$

Que deviennent les contraintes et l'énergie stockée lorsque  $r_i \rightarrow 0$ ? Comment interprétez-vous ce résultat?

Nommer une situation physique pour laquelle un phénomène similaire se produit pour les contraintes, mais où le résultat pour l'énergie est fondamentalement différent?

► Pour  $r_i = 0$ , la contrainte  $\sigma_{\theta z}$  présente un singularité en  $1/r$  en  $r = 0$ . L'énergie stockée quant à elle devient infinie, ce qui n'est pas acceptable du point de vue physique. Cela vient du fait qu'il n'est pas possible d'effectuer le mouvement relatif de  $b$  constant en  $r = 0$ . Pour créer une dislocation dans un cylindre massif, il faut accepter de faire varier rapidement la translation relative de  $b$  à 0 lorsqu'on s'approche du centre, comme sur la figure 28.3.

Une singularité de contrainte se rencontre également à la pointe d'une fissure, comme on la vu au paragraphe 15.8.1, mais elle est en  $1/\sqrt{r}$  de sorte que l'énergie contenue dans un volume incluant la fissure reste finie.

### 28.1.7 Influence du choix du plan de coupure

Montrer que les champs de déformations et de contraintes dues à la dislocation-vis ne dépendent pas du choix du plan de coupure  $\theta = \theta_0$ . Justifier cette remarque.

Il est remarquable de trouver un état d'énergie de déformation non nulle dans un corps homogène en l'absence de tout chargement extérieur. Si la coupure et les opérations 2 à 4 de la procédure de Volterra sont réalisées sur tout le plan  $X_2 = 0$ , i.e.  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , quels champs de déplacements, de déformations et de contraintes obtient-on?

Comment se distinguent fondamentalement ces deux situations?

► Si la coupure est réalisée en  $\theta = \theta_0 \neq 0$ , la solution (28.5) est encore acceptable à condition d'être définie sur le domaine  $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi]$ . Les déformations et contraintes sont alors inchangées. La nouvelle situation s'obtient en fait à partir du cas précédent en tournant le cylindre de  $\theta_0$  par rapport à l'axe  $z$ .

Les champs de déformations et de contraintes nulles sont également solutions du problème d'efforts imposés nuls sur les bords intérieur et extérieur du cylindre. C'est la

solution que l'on obtient lorsque la coupure est réalisée sur les deux faces  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  et que la partie supérieure du cylindre est déplacée d'un mouvement d'ensemble de  $b$  par rapport à la partie inférieure. Les deux situations considérées se distinguent par le fait que la coupure le long de  $\theta = 0$  change la connexité du cylindre. Le cylindre creux n'est pas simplement connexe. Il le devient si la coupure est opérée. Effectuer deux coupures laisse la connexité du cylindre creux inchangée.

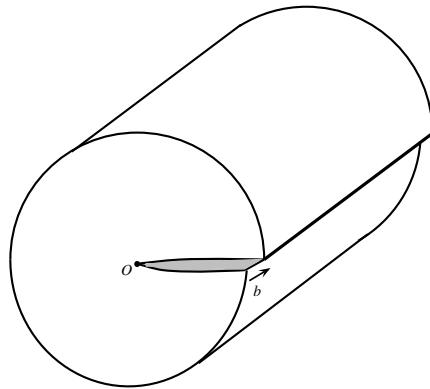


Figure 28.3 : Dislocation-vis créée dans un cylindre massif.

#### 28.1.8 Torseur résultant

En considérant cette fois-ci le torseur des efforts résultant sur l'une des extrémités du cylindre ( $z = 0$  ou  $z = L$ ), montrer que la solution proposée précédemment n'est finalement pas acceptable, même au sens de Saint-Venant.

► Le vecteur contrainte en chaque point de l'extrémité de normale  $\underline{e}_z$  vaut

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_z = -\frac{\mu b}{2\pi r} \underline{e}_\theta \quad (28.16)$$

Il s'agit d'un effort tangentiel qu'il faut appliquer en chaque point de l'extrémité pour la maintenir en équilibre. Toutefois, cette densité surfacique d'efforts ne produit pas de résultante :

$$\underline{R} = - \int_{Z=L} \frac{\mu b}{2\pi r} \underline{e}_\theta dS = 0$$

Le moment résultant, quant à lui, vaut :

$$\begin{aligned} \underline{M} &= \int_{Z=L} \underline{OM} \wedge \underline{t} dS = - \int_{Z=L} r \underline{e}_r \wedge \frac{\mu b}{2\pi r} \underline{e}_\theta r dr d\theta \\ &= -\mu b \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \underline{e}_z \end{aligned} \quad (28.17)$$

L'existence d'un moment résultant non nul sur l'extrémité considérée n'est pas compatible avec la condition de surface libre recherchée pour cette extrémité. Le champ de contraintes trouvé n'est donc pas acceptable, même au sens de Saint-Venant. L'objet du paragraphe suivant est de remédier à cette insuffisance.

## 28.1.9 Solution exacte au sens de Saint-Venant

Remédier à la difficulté rencontrée précédemment et obtenir une solution exacte, au sens de Saint-Venant, du problème de la dislocation-vis dans le cylindre de longueur  $L$ . Donner les champs de contraintes, de déformations et de déplacements correspondants.

Commenter alors l'image de la figure 28.4, tirée de l'ouvrage (Friedel, 1964).

► Il suffit de superposer à la solution partielle trouvée pour le cylindre le champ de contrainte induit par l'application du moment d'axe  $\underline{e}_z$  opposé au moment résultant  $\underline{M}$  calculé précédemment :

$$-\underline{M} = \mu b \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \underline{e}_z \quad (28.18)$$

Un tel moment induit le champ de contraintes suivant dans le cylindre fini :

$$\sigma_{\theta z} = \frac{\mu b}{\pi(r_e^2 + r_i^2)} r \quad (28.19)$$

d'après la théorie de la torsion des barres à section circulaire (cf. paragraphe 23.2.5). Cette contribution vient s'ajouter à la contrainte (28.12) déjà trouvée. On est en droit d'appliquer ici le théorème de superposition, établi au paragraphe 8.1.4, puisque le problème auxiliaire de torsion considéré s'applique sur la même géométrie et avec des conditions en effort sur les bases du cylindre. Les contraintes dues à la torsion s'appliquant aux extrémités ne suffisent pas à annuler point par point le vecteur contrainte (28.16) issu de la contribution initiale, de sorte que la solution complète résultant de la superposition n'est satisfaisante qu'au sens de Saint-Venant.

La figure 28.4 montre le cisaillement du plan de coupure induit par cette torsion supplémentaire.

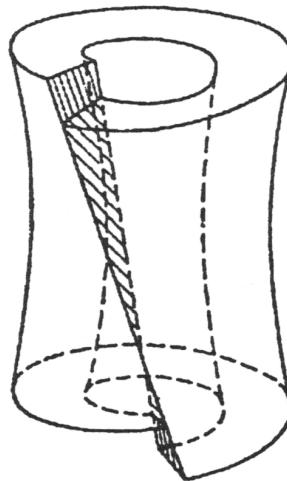


Figure 28.4 : Dislocation-vis dans un cylindre de longueur finie, d'après (Friedel, 1964).

## 28.2 Dislocation-coin

Le défaut introduit dans le cylindre selon la procédure de Volterra est appelé *dislocation-coin* lorsque le vecteur de translation est orthogonal à la ligne de dislocation :

$$\underline{b} = b \underline{e}_1 \quad (28.20)$$

selon le repérage de la figure 28.1(a). La dislocation-coin est représentée sur la figure 28.5. Une section du cylindre défectueux correspondant est également donnée sur la figure 28.2. Le champ de contraintes internes induit par une dislocation-coin est techniquement plus délicat à obtenir que celui de la dislocation-vis. La méthode des fonctions de contraintes permet d'aboutir et le lecteur peut se reporter aux références (Timoshenko and Goodier, 1970; Hirth and Lothe, 1982; Teodosiu, 1982). On se contente ici de donner le résultat sans expliciter les étapes qui président à sa construction :

$$\sigma_{rr} = \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{r_i^2 + r_e^2} - \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (28.21)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{3r}{r_i^2 + r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta \quad (28.22)$$

$$\sigma_{r\theta} = \alpha \left( -\frac{1}{r} + \frac{r}{r_i^2 + r_e^2} + \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i^2 + r_e^2} \frac{1}{r^3} \right) \cos \theta \quad (28.23)$$

où  $\alpha$  est une constante à déterminer dans la suite.

Faire un commentaire sur ce champ de contraintes.

► Le champ de contrainte présente une singularité lorsque  $r_i \rightarrow 0$ . Cette singularité est en  $1/r$  comme dans le cas de la dislocation-vis.

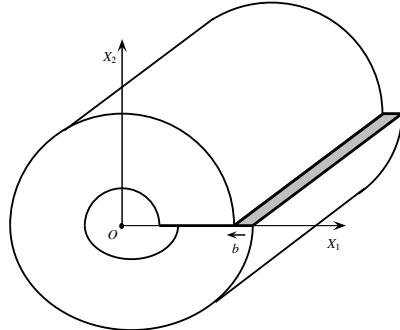


Figure 28.5 : Dislocation-coin.

### 28.2.1 Equilibre local et conditions aux limites

On admet que le champ de contraintes précédent satisfait les équations d'équilibre local. Vérifier, par contre, que les conditions aux limites sont effectivement remplies.

► Les termes en  $\sin \theta/r$ ,  $r \sin \theta$  et  $\sin \theta/r^3$  permettent de vérifier séparément que  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$  en coordonnées cylindriques. On vérifie en outre que  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{e}_r = 0$  en  $r = r_i$  et  $r = r_e$ .

### 28.2.2 Contraintes réduites

Donner une expression réduite des contraintes précédentes lorsque, simultanément,  $r_e \rightarrow +\infty$  et  $r \gg r_i$ .

► Dans ces conditions, les contraintes (28.21) à (28.23) se réduisent à

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha \sin \theta}{r}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\alpha \cos \theta}{r} \quad (28.24)$$

### 28.2.3 Contexte des déformations planes

Calculer la composante de contrainte  $\sigma_{zz}$  associée au champ réduit précédent, dans le contexte des déformations planes selon l'axe  $\underline{e}_z$ . Ce contexte suppose que

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0$$

► Dans ces conditions, la déformation axiale vaut

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = 0 \quad (28.25)$$

d'où le résultat connu en déformations planes :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

i.e.

$$\sigma_{zz} = 2\nu\sigma_{rr}$$

dans le cas présent.

### 28.2.4 Moment résultant

On considère un contour carré, de côté  $2X_0$ , autour de la ligne de dislocation, comme sur la figure 28.6, avec  $X_0 \gg r_i$  et  $r_e \rightarrow +\infty$ . Montrer que les contraintes internes dues à la dislocation engendrent un moment résultant, par unité d'épaisseur de cylindre, sur la face d'équation  $X_1 = X_0$ ,  $|X_2| \leq X_0$ .

► La normale à la face considérée a pour composantes :

$$\underline{n} = \cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta$$

Le vecteur contrainte en chaque point de cette face vaut

$$\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \frac{\alpha \sin 2\theta}{r} \underline{e}_r - \frac{\alpha}{r} \underline{e}_\theta \quad (28.26)$$

Le moment résultant sur la face d'équation  $X_1 = X_0$ ,  $|X_2| \leq X_0$  vaut :

$$\underline{M} = \int_{X_0} \underline{OM} \wedge \underline{t} \, dX_2 = \left( \int_{X_0} rt_\theta \, dX_2 \right) \underline{e}_z = - \left( \int_{X_0} \alpha \, dX_2 \right) \underline{e}_z = -2\alpha X_0 \underline{e}_z \quad (28.27)$$

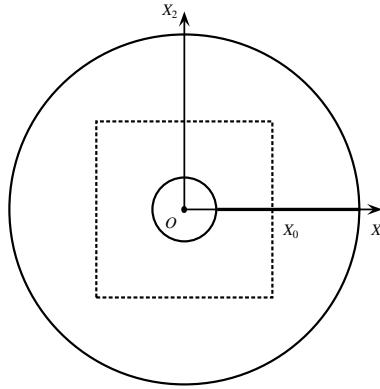


Figure 28.6: Contour carré autour de l'axe du cylindre.

### 28.2.5 Déformations et déplacements

Calculer les déformations associées au champ de contraintes dans sa forme réduite trouvée en 28.2.2.

Intégrer pas à pas ce champ pour en déduire un champ de déplacement correspondant.

Identifier au passage la constante  $\alpha$  en fonction de la donnée du problème, à savoir  $b$ .

Déterminer alors les zones de dilatation et de contraction de la matière autour de la dislocation.

Quelques commentaires sur le champ de déplacements obtenu s'imposent. Indiquer une différence fondamentale entre les déplacements associés à la dislocation-coin et ceux trouvés pour la dislocation-vis.

Remarquer enfin que la soudure ne reste pas plane.

► L'élasticité isotrope linéarisée fournit :

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{\alpha \sin \theta}{r} \quad (28.28)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} \quad (28.29)$$

La composante  $\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$  peut être intégrée pour donner

$$u_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \alpha \sin \theta \log r + f(\theta) \quad (28.30)$$

où  $f(\theta)$  est une fonction d'intégration à déterminer. La relation de compatibilité

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r \varepsilon_{\theta\theta} - u_r = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} (1 - \log r) \alpha \sin \theta - f(\theta) \quad (28.31)$$

permet d'obtenir la composante de déplacement tangentiel :

$$u_\theta = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} (1 - \log r) \alpha \cos \theta - \int f(\theta) d\theta + g(r) \quad (28.32)$$

où apparaît une nouvelle fonction d'intégration  $g(r)$ . Noter que la nullité des composantes de déformations  $\varepsilon_{rz}$  et  $\varepsilon_{\theta z}$  permet d'exclure une dépendance éventuelle de  $u_r$  et  $u_\theta$  par rapport à  $z$ . La composante de cisaillement se calcule alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ &= 2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} + \frac{f_{,\theta}(\theta)}{r} + g_{,r}(r) + \frac{1}{r} \left( \int f(\theta) d\theta - g(r) \right) \end{aligned} \quad (28.33)$$

Les notations  $f_{,\theta}$  et  $g_{,r}$  désignent les dérivées premières des fonctions  $f$  et  $g$ . Cette dernière expression doit être identifiée avec le résultat (28.29) ce qui fournit l'équation

$$-\frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{\alpha \cos \theta}{r} = \frac{f_{,\theta}(\theta) + \int f(\theta) d\theta}{r} + g_{,r}(r) - \frac{g(r)}{r} \quad (28.34)$$

La dérivation de l'équation précédente par rapport à  $r$ , d'une part, et par rapport à  $\theta$  d'autre part conduit aux deux équations différentielles indépendantes :

$$g_{,rr}(r) = 0 \quad (28.35)$$

$$f_{,\theta\theta} + f = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \alpha \sin \theta \quad (28.36)$$

L'équation (28.35) fournit :

$$g(r) = Ar + D_1 \quad (28.37)$$

où  $A$  et  $D_1$  sont des constantes d'intégration.

L'équation (28.36), quant à elle, possède une solution particulière de la forme  $\theta \cos \theta$ . Elle s'intègre finalement en

$$f(\theta) = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} \alpha \theta \cos \theta + B \cos \theta + C \sin \theta \quad (28.38)$$

où  $B$  et  $C$  sont des constantes d'intégration. Il est utile de calculer aussi une primitive de  $f$ , car elle intervient dans l'expression du déplacement tangentiel :

$$\int f(\theta) d\theta = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} \alpha (\theta \sin \theta + \cos \theta) + B \sin \theta - C \cos \theta + D_2 \quad (28.39)$$

L'équation (28.33) est vérifiée à condition que  $D_1 = D_2 = 0$ .

Remarquer que les termes en  $B \cos \theta$  et  $C \sin \theta$  dans l'expression du déplacement radial à travers la fonction  $f$  sont des mouvements de translation exprimés en coordonnées cylindriques, comme on s'en convaincra aisément. La fonction  $g(r) = Ar$ , quant à elle, correspond à une rotation d'ensemble d'axe  $\underline{e}_z$  et d'angle  $A$ .

C'est la condition de discontinuité sur le plan  $\theta = 0$ , visible sur la figure 28.5, qui donne finalement accès à la constante  $\alpha$  recherchée :

$$u_r(0^+) - u(2\pi^-) = b = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \alpha 2\pi \quad (28.40)$$

d'où

$$\alpha = \frac{Eb}{4\pi(1+\nu)(1-\nu)} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \quad (28.41)$$

La dilatation ou la contraction de la matière sont données par le signe de la trace de la déformation qui, en vertu des lois de l'élasticité isotrope linéarisée est proportionnelle à, et du même signe que, la trace du tenseur des contraintes. La trace du tenseur des contraintes est égale à  $2(1+\nu)\sigma_{rr}$ . Lorsque  $b > 0$ , la matière se dilate donc au-dessus du plan de coupure ( $\theta > 0$ ) et se contracte en-dessous ( $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ).

En bref, on obtient les déplacements suivants

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu) \sin \theta \log r - 2(1-\nu)\theta \cos \theta) \quad (28.42)$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (- (1-2\nu)(1-\log r) \cos \theta + 2(1-\nu)(\theta \sin \theta + \cos \theta)) \quad (28.43)$$

auxquels s'ajoute un éventuel mouvement de corps rigide.

Le champ de déplacement présente une divergence en  $\log r$  lorsque  $r_i \rightarrow 0$ , ce qui n'était pas le cas pour la dislocation-vis.

Le plan de coupure  $\theta = 0$  subit un déplacement  $u_\theta$  non constant et non linéaire en  $r$ . Par conséquent, il ne reste pas plan.

Parce que ces expressions sont parfois invoquées dans la pratique, on donne aussi les composantes cartésiennes des déplacements qui se déduisent des résultats obtenus en coordonnées cylindriques :

$$u_1 = -\frac{b}{2\pi} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{4(1-\nu)} \right) = \frac{b}{2\pi} \left( \operatorname{atan} \frac{X_2}{X_1} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{X_1 X_2}{X_1^2 + X_2^2} \right) \quad (28.44)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{b}{8\pi(1-\nu)} (2(1-2\nu) \log r + \cos 2\theta) \\ &= -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} \left( (1-2\nu) \log(X_1^2 + X_2^2) + \frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2 + X_2^2} \right) \end{aligned} \quad (28.45)$$

Pour information, les contraintes cartésiennes associées sont :

$$\sigma_{11} = -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_2(3X_1^2 + X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (28.46)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_2(X_1^2 - X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (28.47)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \frac{X_1(X_1^2 - X_2^2)}{(X_1^2 + X_2^2)^2} \quad (28.48)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{\mu b}{\pi(1-\nu)} \frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2} \quad (28.49)$$

### 28.2.6 Energie d'une dislocation-coin

Calculer l'énergie élastique stockée dans le cylindre, par unité de longueur de ligne de dislocation.

► La densité d'énergie élastique stockée, calculée avec les contraintes et déformations réduites, vaut

$$\rho\psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\alpha^2(1+\nu)}{Er^2}(1-2\nu\sin^2\theta) \quad (28.50)$$

L'énergie élastique totale par unité d'épaisseur du cylindre, calculée sur la portion du cylindre  $r_i \ll r_0 < R \ll r_e$  est donc :

$$W = \int_{r=r_0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho\psi r dr d\theta = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)} \log \frac{R}{r_0} \quad (28.51)$$

L'énergie croît de manière illimitée lorsque  $R$  augmente et lorsque  $r_0$  diminue. Cette expression est la même que pour la dislocation-vis au facteur  $(1-\nu)$  près.

#### 28.2.7 Dislocation-coin équivalente

On soumet le cylindre parfait initial au champ de déplacements suivant :

$$u_r = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu)\sin\theta \log r - 2(1-\nu)\theta \cos\theta) \quad (28.52)$$

$$u_\theta = \frac{b}{4\pi(1-\nu)} (- (1-2\nu)(1-\log r) \cos\theta + 2(1-\nu)(\theta \sin\theta + \cos\theta)) \quad (28.53)$$

définis sur l'intervalle :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad (28.54)$$

Montrer que ce champ est à valeurs multiples si on le prolonge par continuité en  $\theta = -\pi/2$  et  $\theta = 3\pi/2$ .

Montrer que le champ de déformations associé à ces déplacements est strictement le même que celui trouvé pour la dislocation-coin au paragraphe 28.2.5. En déduire que le champ de contraintes correspondant est auto-équilibré.

Proposer une procédure pour que s'établisse précisément le champ de déplacements décrit par les fonctions (28.52) à (28.54), dans le cylindre, au prix d'une coupure bien choisie. Faire le dessin correspondant.

Justifier alors que ce champ mérite tout autant le nom de dislocation-coin que celui étudié au paragraphe 28.2.5.

Calculer le vecteur de Burgers correspondant (voir figure 28.2).

On a donc mis en évidence deux champs de déplacements, à savoir celui trouvé en 28.2.5 et celui donné par les équations (28.52) à (28.54), conduisant aux mêmes champs de déformations. Montrer que la différence entre ces deux champs ne se limite pas à un mouvement de corps rigide. Ce résultat vous étonne-t-il ?

A quelle caractéristique topologique fondamentale du cylindre creux pourrait-on l'attribuer ?

► On calcule les limites suivantes :

$$u_r(-\frac{\pi}{2}^-) - u_r(\frac{3\pi}{2}^+) = 0, \quad u_\theta(-\frac{\pi}{2}^-) - u_\theta(\frac{3\pi}{2}^+) = b \quad (28.55)$$

La fonction  $u_\theta$  est discontinue au travers du plan  $\theta = -\pi/2$ . Elle se prolonge donc en une fonction à valeurs multiples de part et d'autre du domaine de définition (28.54). La seule différence entre le champ proposé et celui trouvé pour la dislocation-coin, à savoir

les équations (28.42) et (28.43), réside dans le domaine de définition des fonctions par rapport à l'angle  $\theta$ . On vérifie que ces déplacements conduisent aux mêmes déformations qui sont, quant à elles, continues, on l'a vu.

Pour obtenir un tel champ de déplacement, il suffit d'effectuer la coupure le long du plan  $\theta = -\pi/2$  et de translater l'une des faces de la coupure du vecteur  $\underline{b} = b\underline{e}_\theta$ , orthogonal au plan de coupure, comme indiqué sur la figure 28.2. Ce déplacement relatif crée un vide que l'on comble en rajoutant la plaque de matière d'épaisseur  $b$ , que l'on colle aux faces de la coupure afin de restaurer la cohésion du cylindre. Si  $b < 0$ , il faut enlever de la matière, puis coller, afin de réaliser la dislocation. La procédure est illustrée sur la figure 28.7.

Remarquer que le vecteur de translation est le même que (28.20), ce qui incite à décrire qu'il s'agit là de la même dislocation-coin. La dislocation-coin est caractérisée par son vecteur de Burgers  $\underline{b}$ , perpendiculaire à la ligne de dislocation, elle est indépendante du plan de coupure.

Notons  $\underline{u}^{(1)}$  et  $\underline{u}^{(2)}$  les deux champs de déplacements fournissant le champ de déformations de la dislocation-coin. Ils coïncident pour  $0 < \theta < 3\pi/2$ . Ils diffèrent pour  $3\pi/2 < \theta < 2\pi$ , domaine sur lequel :

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((1-2\nu)\sin\theta \log r - 2(1-\nu)(\theta - 2\pi)\cos\theta) \\ u_\theta^{(2)} &= \frac{b}{4\pi(1-\nu)} ((-(1-2\nu)(1-\log r)\cos\theta + 2(1-\nu)((\theta - 2\pi)\sin\theta + \cos\theta)) \end{aligned}$$

de sorte que

$$u_r^{(2)} - u_r^{(1)} = b\cos\theta, \quad u_\theta^{(2)} - u_\theta^{(1)} = -b\sin\theta$$

sur ce quartier du cylindre.

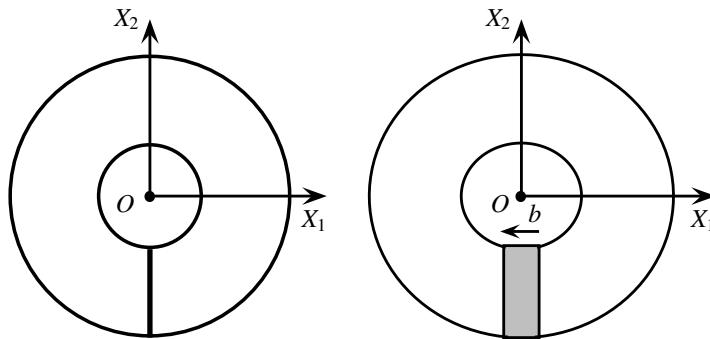
Le même champ de déformation sur le cylindre peut donc s'intégrer en deux champs de déplacements qui diffèrent par plus qu'un simple mouvement de corps rigide infinitésimal. Autrement dit, le champ de déplacement  $\underline{u}^{(2)} - \underline{u}^{(1)}$  engendre un champ de déformation nulle et n'est pas un mouvement de corps rigide infinitésimal.

Ce résultat peut surprendre puisqu'on a établi, lors de l'étude du problème de la compatibilité des déformations (voir le théorème 4 de la page 50), que la déformation s'annule seulement pour les mouvements de corps rigide infinitésimaux. La démonstration de ce résultat fait toutefois appel à plusieurs reprises au théorème 23 de Poincaré, qui n'est valable que sur un corps simplement connexe. Un ensemble de points est dit simplement connexe si toute courbe fermée continue dans l'ensemble peut être déformée en un point tout en restant dans l'ensemble. Ce n'est pas le cas des cercles concentriques d'un cylindre creux entourant le trou central. Le cylindre creux n'est donc pas simplement connexe. Un ensemble non simplement connexe peut être rendu simplement connexe en effectuant autant de coupures que nécessaire. Une seule suffit pour le cylindre creux. Le théorème de Poincaré peut être appliqué dans le cylindre coupé mais les champs ainsi déterminés peuvent présenter des discontinuités au passage de la coupure. C'est pourquoi on a pu trouver un champ de déplacement à valeur simple pour chaque coupure considérée dans ce problème.

### 28.3 Dislocations mixtes

Une dislocation dans un cylindre est de caractère mixte lorsque son vecteur de Burgers possède une composante vis, parallèle à la ligne de dislocation, et une composante coin, perpendiculaire à la ligne :

$$\underline{b} = b_\perp \underline{e}_1 + b_\odot \underline{e}_z \tag{28.56}$$



*Figure 28.7 : Construction alternative d'une dislocation-coin dans un cylindre creux. La partie grisée correspond à de la matière rajoutée (ou enlevée) pour combler l'espace libéré par le déplacement relatif des lèvres de la coupure.*

Donner, en le justifiant, le champ de contraintes et l'énergie d'une telle dislocation.

## 28.4 Compatibilité générale

Le travail précédent incite à reformuler de manière générale le problème de la compatibilité d'un champ de déformation dans les corps multiplement connexes. On distinguera en particulier la recherche de solutions continues ou non en déplacement. La question de la compatibilité d'un champ de déformations dans le contexte infinitésimal a été explorée au paragraphe 2.3.5. Le théorème 5 établit l'existence d'un champ de déplacement de classe  $C^3$  dès lors que  $\underline{\varepsilon}$  est de classe  $C^2$ . Il n'est toutefois valable que dans le cas d'un domaine simplement connexe en raison de l'application du théorème de Poincaré. L'objectif de cette section est d'étendre ce théorème au cas non simplement connexe.

### 28.4.1 Retour sur la compatibilité

On commence d'abord par reprendre la démarche mise en œuvre au paragraphe 2.3.5 dans un esprit un peu différent. Alors que cette première analyse avait simplement prouvé l'existence du champ de déplacement, on se propose ici de construire explicitement un tel champ à partir de la donnée du champ des déformations infinitésimales  $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$  sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \Omega_0$ .

Si le champ  $\underline{\varepsilon}(\underline{X})$  est compatible alors il existe  $\underline{\omega}(\underline{X})$  et  $\underline{u}(\underline{X})$  tels que

$$\text{grad } \underline{u} = \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \quad (28.57)$$

Le rotationnel de l'expression précédente est nécessairement nul ( $\text{rot grad } = 0$ ) de sorte que :

$$\text{rot } \underline{\omega} = -\text{rot } \underline{\varepsilon} \quad (28.58)$$

Il se trouve d'autre part que le rotationnel du tenseur des rotations infinitésimales n'est

autre que le transposé du gradient du vecteur rotation infinitésimale<sup>2</sup> :

$$\text{rot } \underline{\omega} = (\text{grad } \overset{\times}{\underline{\omega}})^T \quad (28.59)$$

Les définitions de ces grandeurs sont données par (2.128) et (2.129) (pour l'algèbre des tenseurs antisymétriques, voir l'annexe 12.1.3).

L'application du rotationnel au gradient de  $\overset{\times}{\underline{\omega}}$  conduit aux identités suivantes :

$$\text{rot}(\text{rot } \underline{\omega})^T = 0 \quad (28.60)$$

$$\text{rot}(\text{rot } \underline{\varepsilon})^T = 0 \quad (28.61)$$

Il reste à vérifier que les 6 équations (28.61) ne sont autres que les relations de compatibilité (2.142). On a donc trouvé une formulation très concise des conditions de compatibilité grâce à l'opérateur rotationnel que l'on va continuer à utiliser pour construire le champ de déplacement issu d'un champ de déformations compatible.

#### *Construction explicite du champ de déplacement*

Soit un champ de déformations  $\underline{\varepsilon}(X)$  donné vérifiant les équations de compatibilité (28.61). Il existe un champ  $\overset{\times}{\underline{\omega}}$  tel que

$$\text{grad } \overset{\times}{\underline{\omega}} = -(\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \quad (28.62)$$

Supposons connue la valeur  $\overset{\times}{\underline{\omega}}(M_0)$  du vecteur rotation infinitésimale au point  $M_0$  et cherchons  $\overset{\times}{\underline{\omega}}(M)$  en un autre point  $M$ . Soit  $L$  une ligne joignant  $M_0$  à  $M$  et intégrons (28.62) le long de  $L$  :

$$\overset{\times}{\underline{\omega}}(M) - \overset{\times}{\underline{\omega}}(M_0) = - \int_{M_0, L}^M (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \cdot d\underline{l} \quad (28.63)$$

ce qui fournit la valeur cherchée à condition que l'intégrale soit indépendante du trajet  $L$ . Considérons alors une autre ligne  $L'$  liant  $M$  à  $M_0$ . Le contour  $L \cup L'$  est donc fermé. Sur tout domaine simplement connexe  $\mathcal{D} \subset \Omega_0$  contenant  $L \cup L'$ , il existe une surface  $S$  contenue dans  $\mathcal{D}$  et s'appuyant sur  $L \cup L'$ . Le théorème de Stokes (12.164) s'applique pour une telle surface :

$$\oint_{L \cup L'} (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \cdot d\underline{l} = \int_S \text{rot}(\text{rot } \underline{\varepsilon})^T \cdot \underline{n} ds = 0 \quad (28.64)$$

---

2. Pour le voir, le calcul fait appel successivement aux relations (12.81) et (12.67) :

$$\begin{aligned} (\text{rot } \underline{\omega})_{im} &= \epsilon_{mjk} \omega_{ij,k} = -\epsilon_{mjk} \epsilon_{ijp} \overset{\times}{\omega}_{p,k} \\ &= \epsilon_{jmk} \epsilon_{jpi} \overset{\times}{\omega}_{p,k} = (\delta_{mp} \delta_{ki} - \delta_{mi} \delta_{kp}) \overset{\times}{\omega}_{p,k} \\ &= \overset{\times}{\omega}_{m,i} - \overset{\times}{\omega}_{k,k} \delta_{im} \end{aligned}$$

Or, on se rappelle aussi que  $\overset{\times}{\underline{\omega}} = -\frac{1}{2} \text{rot } \underline{u}$  de sorte que sa divergence est nulle ( $\text{div rot } = 0$ ). Le dernier terme s'annule et le résultat annoncé (28.59) est obtenu.

d'où

$$\int_L (\text{rot } \xi)^T \cdot \underline{dl} + \int_{L'} (\text{rot } \xi)^T \cdot \underline{dl} = 0$$

ce qui établit l'invariance de l'intégrale par rapport au trajet dans (28.63) et par conséquent assure l'unicité de  $\overset{\times}{\underline{\omega}}(M)$  pour  $\overset{\times}{\underline{\omega}}(M_0)$  donné. On revient alors à (28.57) que l'on intègre sur le trajet  $L$  :

$$\underline{u}(M) - \underline{u}(M_0) = \int_{M_0, L}^M \xi \cdot \underline{dl} + \int_{M_0, L}^M \overset{\times}{\underline{\omega}} \wedge \underline{dl} \quad (28.65)$$

On effectue une intégration par parties du dernier terme sous la forme (avec  $\underline{y} \in L$ ) :

$$\begin{aligned} \int_{M_0, L}^M \overset{\times}{\underline{\omega}} \wedge \underline{dl} &= \int_{M_0, L}^M \overset{\times}{\underline{\omega}} \wedge d(\underline{y} - \underline{x}) \\ &= \int_{M_0, L}^M d(\overset{\times}{\underline{\omega}} \wedge (\underline{y} - \underline{x})) - \int_{M_0, L}^M d\overset{\times}{\underline{\omega}} \wedge (\underline{y} - \underline{x}) \\ &= \overset{\times}{\underline{\omega}}(M_0) \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0) + \int_{M_0, L}^M (\underline{x} - \underline{y}) \wedge (\text{rot } \xi)^T \cdot \underline{dl} \end{aligned}$$

On obtient finalement le déplacement

$$\underline{u}(M) = \underline{u}(M_0) + \overset{\times}{\underline{\omega}}(M_0) \wedge (\underline{x} - \underline{x}_0) + \int_{M_0}^M (\underline{x} - \underline{y}) \wedge (\text{rot } \xi)^T \cdot \underline{dl} \quad (28.66)$$

La dépendance vis-à-vis du trajet  $L$  a été enlevée car, pour un domaine  $L$  simplement connexe, on peut montrer, d'une manière similaire au cas du vecteur rotation, l'invariance de l'intégrale par rapport au trajet  $L$  dans le dernier terme. Il reste à vérifier que le gradient symétrisé du champ (28.66) donne bien le champ  $\xi$  de départ. On retrouve aussi le fait que le champ de déplacement obtenu est unique à un mouvement de corps rigide infinitésimal près caractérisé par la translation  $\underline{u}(M_0)$  et la rotation infinitésimale  $\overset{\times}{\underline{\omega}}(M_0)$ . La formule (28.66) est parfois attribuée à Castigliano.

#### 28.4.2 Domaines non simplement connexes

Pour fixer les idées, on prend le cas du cylindre  $\Omega_0$  des figures 28.1(a) et 28.8(a) qui est doublement connexe. Une coupure quelconque  $S$  ( $\theta = 0$ , sur les figures) permet de restaurer la connexité du domaine  $\Omega_0 \setminus S$ . Soit  $\xi(\underline{X})$  un champ de tenseurs symétriques de classe  $C^2$  (même si cette hypothèse peut sans doute être un peu relâchée) défini sur  $\Omega_0$  et vérifiant les équations de compatibilité (28.61). La construction précédente ayant conduit au champ de déplacement (28.66) est valable sur  $\Omega_0 \setminus S$  mais le champ obtenu peut présenter une discontinuité au passage de  $S$ . En effet d'après (28.63), le saut du vecteur rotation au travers de  $S$  s'obtient par passage à la limite sur une ligne  $M^+ M^-$ , comme sur la figure 28.8(a) :

$$[\overset{\times}{\underline{\omega}}] = \overset{\times}{\underline{\omega}}(M^+) - \overset{\times}{\underline{\omega}}(M^-) = - \oint_{M^- M^+} (\text{rot } \xi)^T \cdot \underline{dl} =: \underline{d} \quad (28.67)$$

Le saut de déplacement s'écrit :

$$[\underline{u}] = \underline{u}(M^+) - \underline{u}(M^-) = \underline{b} + \underline{d} \wedge \underline{x} \quad (28.68)$$

où le vecteur de Burgers vaut

$$\underline{b} = \oint_{M^- M^+} (\underline{\varepsilon} - (\underline{y} \wedge (\text{rot } \underline{\varepsilon})^T)) \cdot \underline{dl} \quad (28.69)$$

L'utilisation du circuit fermé  $M^- M^+ P^+ P^- M^-$  de la figure 28.8(b), réductible à un point dans  $\Omega_0 \setminus S$ , permet par passage à la limite de montrer l'indépendance des intégrales précédentes vis-à-vis du circuit  $\Gamma_0$  traversant  $S$ . Par conséquent, les vecteurs  $\underline{b}$  et  $\underline{d}$  introduits précédemment sont constants le long de  $S$ . La discontinuité du déplacement correspond à un mouvement de corps rigide d'une lèvre de la coupure par rapport à l'autre. Comme le choix de la coupure est arbitraire, il existe une infinité de solutions en déplacement du problème de compatibilité, présentant une discontinuité et conduisant aux mêmes contraintes et déformations (continues !) dans le cylindre. On est en mesure d'énoncer le

**Théorème 40 (dit de Weingarten)** Soit  $\mathcal{D}$  un domaine doublement connexe de  $\Omega_0$  et un champ de tenseurs symétriques  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  à valeurs simples, continu (idéalement de classe  $C^2$ ), vérifiant les conditions de compatibilité (28.61), alors il existe un champ de déplacement (idéalement de classe  $C^3$  sur  $\Omega_0 \setminus S$ ) dont  $\underline{\varepsilon}$  est le champ de gradient symétrisé associé et présentant une discontinuité au travers d'une surface  $S$  telle que  $\Omega_0 \setminus S$  soit simplement connexe. En outre la discontinuité est de la forme (28.68) où le vecteur de Burgers  $\underline{b}$  et de disclinaison  $\underline{d}$  sont donnés par (28.69) et (28.67).

Ce théorème se substitue à la réciproque du théorème 5 valable pour les ensembles simplement connexes. Il se généralise aux domaines multiplement connexes en considérant autant de surfaces de coupure (sans intersection) que nécessaire pour partager le corps en composantes connexes (Teodosiu, 1982).

Les deux situations physiques suivantes peuvent être distinguées :

- Les **dislocations** correspondent au cas  $\underline{b} \neq 0, \underline{d} = 0$ . Les dislocations droites dans un cylindre ont été étudiées en détail dans ce chapitre et correspondent à une translation relative des lèvres de la coupure. Selon que la translation est parallèle ou perpendiculaire à la ligne de dislocation, les dislocations vis et coin ont été distinguées.
- Les **disclinaisons** correspondent au cas  $\underline{b} = 0, \underline{d} \neq 0$ . Il s'agit d'une rotation relative par rapport à un axe passant par l'origine. Dans le cas du cylindre avec une coupure en  $\theta = 0$  et une rotation d'un angle  $\theta_0$  de la lèvre supérieure, on peut imaginer introduire un coin (comme dans une bûche que l'on fend) et calculer les contraintes internes introduites par le coin.

## 28.5 Dislocations dans les cristaux

La découverte des dislocations dans les matériaux cristallins représente un des plus beaux épisodes de l'histoire des sciences pour lequel la théorie a précédé l'observation expérimentale de près de cinquante ans. Elle s'est déroulée en trois étapes principales (Jaoul, 2008) :

- **1907** : Volterra invente les dislocations (*distorsioni* à l'origine, le nom *dislocation* lui est substitué par Love (Love, 1944)). Les 100 ans de cette avancée théorique majeure ont été célébrés par un problème d'examen de mécanique des dislocations à l'Ecole des Mines de Paris...
- **1934** : Orowan, Taylor et Polanyi, simultanément et sans se concerter, imaginent la notion de dislocation-coin dans un réseau cristallin d'atomes (figure 28.9(a)). Ils conjecturent que les dislocations sont des défauts cristallins responsables de la déformation plastique (irréversible) et du durcissement des métaux. L'avancée

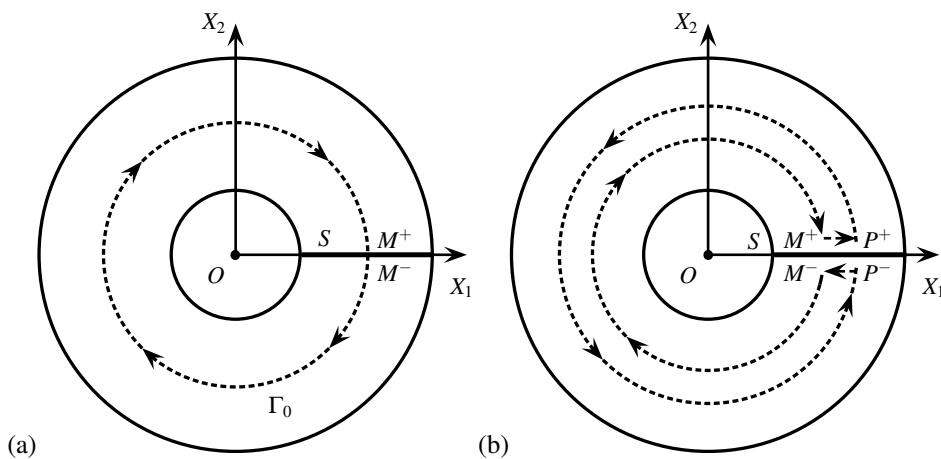
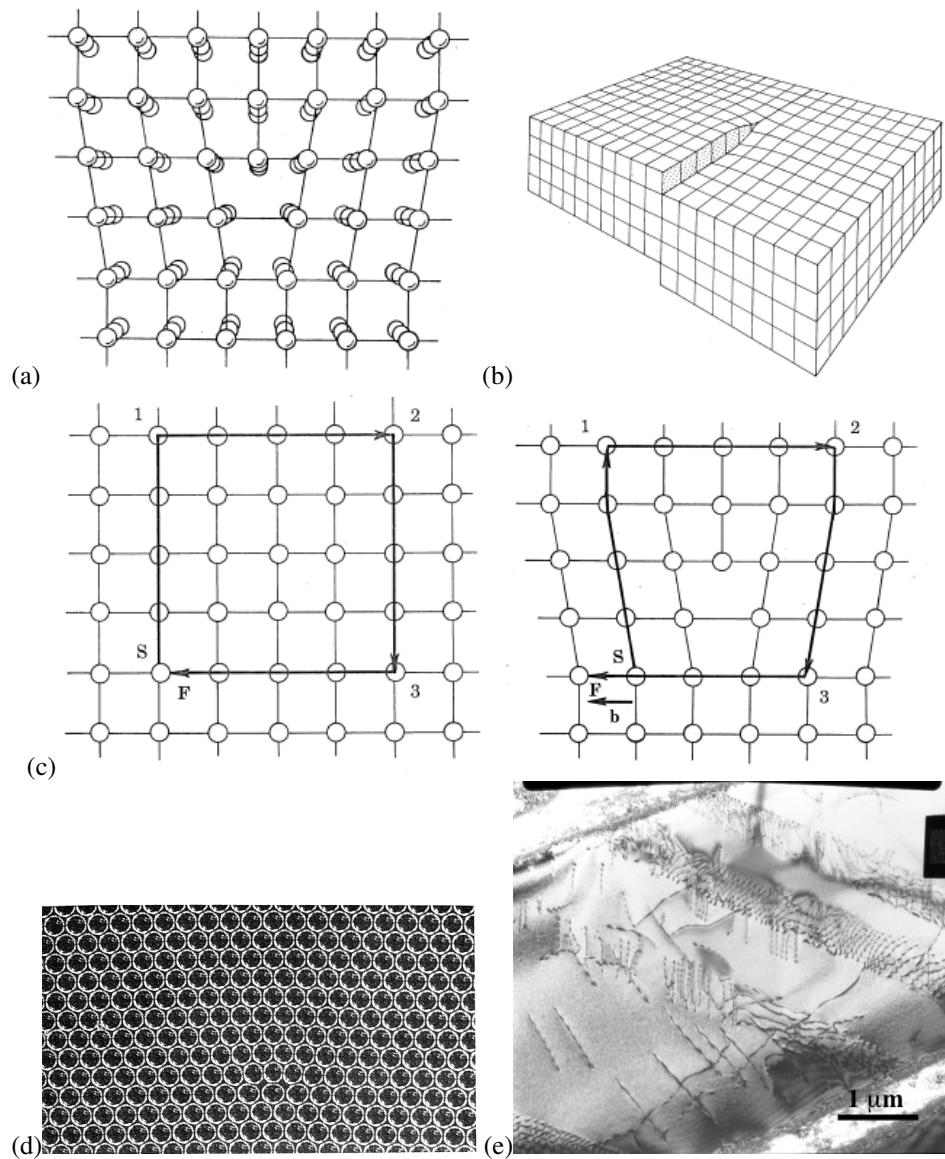


Figure 28.8 : Coupure dans un cylindre creux et contour franchissant la coupure (a), contour  $M^-M^+P^+P^-M^-$  servant à établir l'indépendance du vecteur de Burgers par rapport au choix du contour  $\Gamma_0$  (b).

théorique est majeure car les autres mécanismes proposés conduisaient à une limite d'élasticité nettement trop forte par rapport aux observations expérimentales. Le vecteur de Burgers coorespondant varie entre l'angstrom et le nanomètre (cf. figure 28.9(c) pour le circuit et le vecteur de Burgers d'une dislocation-coin). Taylor a estimé les contraintes internes à l'aide des résultats de Volterra. Le modèle continu de Volterra fournit une excellente représentation des contraintes et déformations autour des défauts mais cesse d'être valide en-dessous d'une distance de un à deux vecteurs de Burgers. En 1939, Burgers imagine la dislocation-vis dans un réseau cristallin (figure 28.9(b)).

- **1956 :** Hirsch observe au microscope électronique à transmission des lignes de dislocation dans l'aluminium. Le désordre atomique près du cœur de la dislocation est responsable du contraste obtenu sur l'image et révèle la présence de la dislocation (figure 28.9(e)). En 1947, Bragg et Nye avaient identifié des dislocations-coins dans un réseau bidimensionnel de bulles de savon à la surface de l'eau (figure 28.9(d), cf. (Nye, 1985)), mais on en trouve aussi dans l'arrangement des grains de maïs...

Le défaut dislocation-coin de la figure 28.9(a) peut se concevoir comme l'ajout ou la suppression d'un plan atomique et s'apparente donc tout à fait à la dislocation de Volterra de la figure 28.7. La dislocation-vis, quant à elle, est conforme à l'image de la figure 28.3. L'étude des dislocations et de la déformation plastique dans les solides représente une combinaison exemplaire et extrêmement féconde de la mécanique et de la physique du solide. Elle reste d'une grande actualité dans la recherche scientifique. Le monument dédié aux dislocations est l'ouvrage (Hirth and Lothe, 1982).



*Figure 28.9 : Dislocations dans les cristaux : dislocation-coin (a), dislocation-vis (b), circuit de Burgers pour une dislocation-coin (c), dislocations dans un film de bulles de savon (d), d'après (Hirth and Lothe, 1982), dislocations dans un alliage de titane par microscopie électronique à transmission ; les lignes de dislocation débouchant sur une portion de lame de quelques fractions de micromètre d'épaisseur apparaissent comme des lignes noires (photo Loïc Nazé).*

## 29 Forces concentrées, forces distribuées

L’application d’efforts distribués ou concentrés à la surface d’un massif, domaine matériel occupant un demi-espace infini, constitué d’un matériau homogène élastique linéaire et isotrope, est une situation fréquente en génie civil et en mécanique des structures. Elle engendre des contraintes dont la connaissance est de première importance pour le dimensionnement de bâtiments sur un sol ou de composants industriels. Le premier type d’efforts considérés dans ce chapitre est d’intérêt essentiellement académique, mais délivre une solution d’une remarquable simplicité. Ce problème débouche dans la deuxième partie sur celui traité par Alfred-Aimé Flamant (1839-1915) en 1892<sup>1</sup>, disciple d’Adhémar Barré de Saint-Venant, ami de Joseph-Valentin Boussinesq et Ferdinand de Lesseps, professeur à l’Institut Industriel du Nord, et dont on célèbre ainsi les cent ans de la disparition. La solution de Flamant pose de sérieuses questions à la mécanique des milieux continus, on le verra. Elle sert enfin de générateur pour résoudre un problème d’une grande portée dans les techniques de l’ingénieur, à savoir celui de la réponse d’un massif à une distribution donnée de pression sur une bande de sa surface.

Dans tout le problème, on se contente de solutions bidimensionnelles en contraintes planes et dans le contexte infinitésimal. Le matériau constitutif du massif est pris dans son état initial naturel. Il se comporte de manière élastique linéaire et isotrope jusqu’à une limite d’élasticité suivant un critère de plasticité de Tresca ou de von Mises. Les efforts de volume et d’inertie ne sont pas considérés. La méthode de résolution adoptée dans tout le problème est la méthode des contraintes.

### 29.1 Distribution de pression appliquée le long d’une gouttière

On considère un demi-espace  $X_1 \geq 0$  percé d’une rigole semi-cylindrique de section semi-circulaire de rayon  $r_0$ , d’axe  $(O, \underline{e}_3)$  contenu dans la surface  $X_1 = 0$  du massif. Le plan de coupe  $(X_1, X_2)$  est représenté sur la figure 29.1, ainsi que le système de coordonnées polaires utilisées dans le plan d’étude  $(X_1, X_2)$ .

#### 29.1.1 Conditions aux limites

La surface du massif  $X_1 = 0$  et la rigole  $r = r_0$  sont soumises à la distribution surfacique de forces suivante<sup>2</sup> :

- $\underline{t}^d = 0$  pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$  et  $r \geq r_0$ ,
- $\underline{t}^d = p_0 \cos \theta \underline{e}_r$  pour  $r = r_0$ .

Calculer la force résultante à la surface du massif, par unité d’épaisseur,  $F/h$ ,  $h$  étant l’épaisseur du massif selon  $X_3$  considérée pour le calcul de la résultante.

► Le vecteur contrainte étant nul pour  $r > r_0$ , la résultante se calcule en intégrant la distribution d’efforts surfaciques le long de la rigole :

$$\begin{aligned}\underline{R} &= \int_{\theta=-\pi/2, r=r_0}^{\theta=\pi/2} \underline{t}^d dS = h r_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 \cos \theta \underline{e}_r d\theta \\ &= p_0 r_0 h \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \right) \underline{e}_1 = \frac{\pi p_0 r_0 h}{2} \underline{e}_1\end{aligned}$$

1. cf. (Flamant, 1892)

2. D’après (Bellet, 1990).

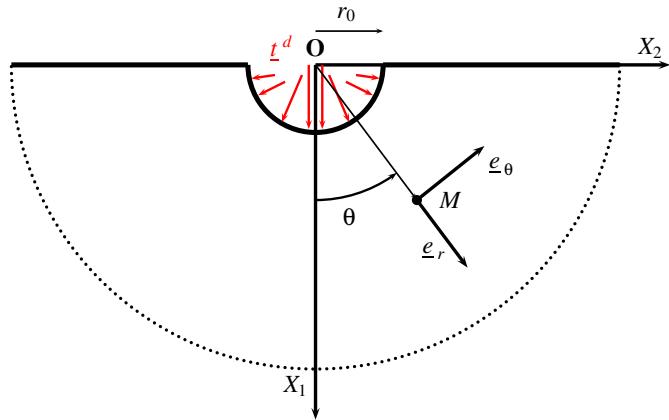


Figure 29.1 : Coupe d'un massif semi-infini par le plan  $(X_1, X_2)$  percé d'une rigole cylindrique de rayon  $r_0$  et soumis à sa surface à une distribution de forces  $\underline{t}^d$ . Le demi-cercle pointillé suggère la nature semi-infinie du massif.

La force linéaire est donc dirigée selon  $\underline{e}_r$  et son intensité est  $\frac{F}{h} = \frac{\pi}{2} p_0 r_0$ .

### 29.1.2 Champ de contraintes

Montrer que le champ de contraintes

$$\sigma = k \frac{\cos \theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r \quad (29.1)$$

est statiquement admissible<sup>3</sup>. Identifier  $k$  en conséquence et l'exprimer également en fonction de la force linéaire appliquée.

► La divergence du champ (29.1) est effectivement nulle. Le long de la rigole, on a

$$\sigma \cdot (-\underline{e}_r)(r = r_0) = \underline{t}^d = -k \frac{\cos \theta}{r_0} \underline{e}_r = p_0 \cos \theta \underline{e}_r$$

de sorte que

$$k = -p_0 r_0 = -\frac{2F}{\pi h} \quad (29.2)$$

### 29.1.3 Champ de déformations

Calculer le champ des déformations associées aux contraintes (29.1). Les caractéristiques élastiques du matériau constitutif du massif sont  $E$  et  $\nu$ .

Commenter l'état de contraintes et de déformations en chaque point du massif.

► La loi de Hooke fournit :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{rr}}{E} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - \nu (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z)) \quad (29.3)$$

3. Un champ de contraintes est statiquement admissible s'il vérifie les équations d'équilibre en volume et les conditions d'efforts imposés au bord.

Il s'agit d'un état de traction/compression simple en chaque point du massif, l'axe de traction étant mobile et dirigé selon  $\underline{e}_r$ . Si  $F > 0$ , chaque point matériel subit une compression simple.

#### 29.1.4 Expression des déplacements dans le plan

Déterminer les expressions des déplacements  $u_r$  et  $u_\theta$  à partir de celles trouvées pour  $\varepsilon_{rr}$  et  $\varepsilon_{\theta\theta}$ . On introduira les fonctions d'intégration  $f(\theta)$  et  $g(r)$ .

En utilisant la valeur de  $\varepsilon_{r\theta}$  déterminer les fonctions  $f$  et  $g$  précédentes en faisant intervenir trois constantes d'intégration.

Donner la signification mécanique des termes associés à ces constantes d'intégration.

On ne cherchera pas à déterminer la composante de déplacement  $u_z$  et on se contente ici de la solution bidimensionnelle établie<sup>4</sup>.

► Les définitions des déformations en coordonnées cylindriques fournissent :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \implies u_r = \frac{k}{E} \cos \theta \ln r + f(\theta)$$

De  $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = -\nu \varepsilon_{rr}$ , on déduit

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{k}{E} (\nu + \ln r) \cos \theta - f(\theta)$$

qui s'intègre en

$$u_\theta = -\frac{k}{E} (\nu + \ln r) \sin \theta - \int_0^\theta f(\theta) d\theta + g(r)$$

D'autre part, la déformation de cisaillement est nulle

$$2r\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0$$

ce qui fournit l'équation différentielle

$$f'(\theta) + \int_0^\theta f(\theta) d\theta - \frac{k}{E} (1 - \nu) \sin \theta = g(r) - rg'(r) \quad (29.4)$$

Le membre de gauche ne dépend que de  $\theta$  tandis que le membre de droite ne dépend que de  $r$ . Par suite,

$$g - rg' = C \implies g(r) = Ar + C$$

où  $A, C$  sont deux constantes d'intégration. D'autre part,

$$f' + \int f d\theta - \frac{k}{E} (1 - \nu) \sin \theta = C \implies f'' + f - \frac{k}{E} (1 - \nu) \cos \theta = 0$$

Une solution particulière de cette équation différentielle est

$$f_0(\theta) = \frac{k}{2E} (1 - \nu) \theta \sin \theta$$

---

4. On sait que la situation des contraintes planes ne permet pas, en général, d'aboutir à une solution tridimensionnelle acceptable, mais qu'elle fournit, dans certaines conditions, une estimation fructueuse, cf. les discussions des paragraphes 9.3.2 et 26.6.

### La solution complète

$$f(\theta) = \frac{k}{2E}(1-\nu)\theta \sin \theta + B \cos \theta + D \sin \theta$$

fait intervenir deux nouvelles constantes d'intégration. Une relation entre les quatre constantes introduites est donnée par l'équation (29.4) et on trouve  $C = D$ . Finalement,

$$g(r) = Ar + C, \quad f(\theta) = \frac{k}{2E}(1-\nu)\theta \sin \theta + B \cos \theta + C \sin \theta \quad (29.5)$$

$$u_r = \frac{k}{E} \cos \theta \ln r + \frac{k}{2E}(1-\nu)\theta \sin \theta + B \cos \theta + C \sin \theta \quad (29.6)$$

$$u_\theta = -\frac{k}{E} \sin \theta (\ln r + \nu) - B \sin \theta + C \cos \theta - \frac{k}{2E}(1-\nu)(\sin \theta - \theta \cos \theta) + Ar \quad (29.7)$$

### Le champ

$$\underline{u}_0 = (B \cos \theta + C \sin \theta) \underline{e}_r + (C \cos \theta - B \sin \theta + Ar) \underline{e}_\theta$$

est un mouvement infinitésimal de corps rigide de translation  $B\underline{e}_1 + C\underline{e}_2$  et de rotation d'angle  $A$  autour de l'axe  $\underline{e}_3$ .

La solution ainsi établie souffre des défauts classiques associés aux solutions en contraintes planes décrites au chapitre 25 en particulier, à savoir qu'il n'est pas possible de trouver un champ  $u_z$  satisfaisant à partir des champs précédents dans le plan. On renvoie le lecteur aux discussions et estimation d'erreur sur ce point dans le chapitre indiqué ainsi que le chapitre 26. Comme dans ces exemples, il est possible cependant d'établir une solution exacte du problème dans le cas des déformations planes.

#### 29.1.5 Conditions aux limites en déplacements et déplacements finaux

On donne les conditions cinématiques suivantes :

$$u_r(r = \ell, \theta = 0) = u_\theta(r = \ell, \theta = 0) = 0, \quad u_\theta(r = r_0, \theta = 0) = 0$$

où  $\ell > r_0$  est une distance fixée quelconque.

Justifier sans recours aux équations, que ces conditions permettent de fixer le mouvement de corps rigide infinitésimal qui restait indéterminé dans la résolution précédente par la méthode des contraintes.

Montrer finalement que le champ de déplacements s'écrit :

$$u_r = \frac{k}{E} \left( \cos \theta \ln \frac{r}{\ell} + \frac{1-\nu}{2} \theta \sin \theta \right) \quad (29.8)$$

$$u_\theta = -\frac{k}{E} \left( (\nu + \ln \frac{r}{\ell}) \sin \theta + \frac{1-\nu}{2} (\sin \theta - \theta \cos \theta) \right) \quad (29.9)$$

► Bloquer le point  $Q(r = \ell, \theta = 0)$  permet de fixer la translation du mouvement de corps rigide. Empêcher le déplacement latéral d'un point de la droite ( $OQ$ ) annule ensuite la rotation d'axe  $\underline{e}_3$ . En substituant ces conditions dans les expressions (29.6) et (29.7) des déplacements, on obtient :

$$\frac{k}{E} \ln \ell + B = 0, \quad C + A\ell = 0, \quad C + Ar_0 = 0$$

qui implique  $A = C = 0$  et  $B = k/E \ln(1/l)$  et les résultats (29.9) en découlent. Les déformées de plusieurs arcs de cercles de rayons sont illustrées sur la figure 29.2. On peut comparer la déformation de ces lignes selon que  $R < \ell$  ou  $R > \ell$ . Le plus petit cercle  $R = 0.3\ell$  correspond en fait à des déformations violant le contexte infinitésimal, pour l'illustration.

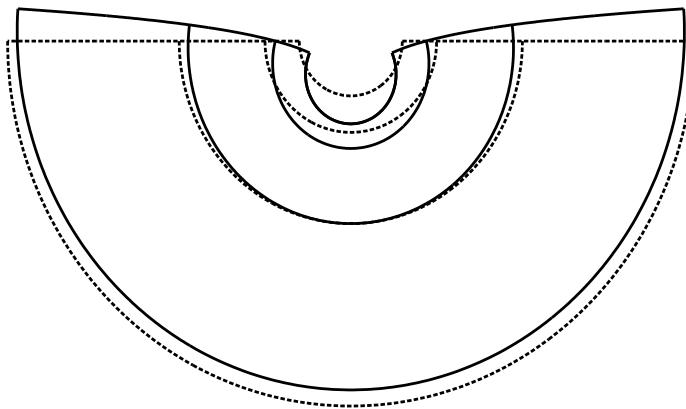


Figure 29.2 : Déformées de 4 demi-cercles avec :  $R = 0.3\ell$ ,  $R = 0.5\ell$ ,  $R = \ell$ ,  $R = 2\ell$ . L'arc initial est en pointillé tandis que les déformées sont en trait continu. Le cas d'un substrat en polyuréthane a été considéré pour le tracé :  $E = 5 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.4$ ,  $F = 1000 \text{ N}$ ,  $h = 1 \text{ mm}$ ,  $\ell = 1 \text{ mm}$ . On vérifie que le contexte infinitésimal est respecté seulement pour  $R = 2\ell$  ( $|2F/Eh\pi R|$  égal à 6.4%).

### 29.1.6 Respect du contexte infinitésimal

Donner les conditions assurant que le contexte infinitésimal est respecté. Elles portent sur la force linéaire  $F/h$  appliquée, la géométrie du problème et les propriétés mécaniques du matériau.

Dans le cas  $r_0 = 1 \text{ mm}$  et d'un massif en acier, chiffrer ces conditions.

► Partant de

$$|\varepsilon_{rr}| \leq \left| \frac{k}{Er_0} \right| = \left| \frac{2F}{Eh\pi r_0} \right| \ll 1$$

Cette relation indique en particulier que, pour une force linéaire et un matériau donnés, le rayon de la rigole ne peut pas être trop petit, sinon les déformations locales seront trop grandes.

Remarquer par ailleurs que

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = -\frac{k}{E} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) = \frac{k}{rE} \sin \theta$$

ce qui n'ajoute pas de condition supplémentaire.

Si le rayon  $r_0$  est fixé, la force linéaire ne peut excéder :

$$\left| \frac{F}{h} \right| \ll E \frac{\pi r_0}{2} = 314 \text{ kN mm}^{-1}$$

### 29.1.7 Energie élastique stockée

Calculer l'énergie élastique stockée par unité d'épaisseur dans une couronne  $[r_0, r_1]$  pour le rayon extérieur  $r_1$  donné.

► L'énergie élastique  $W$  divisée par l'épaisseur  $h$  est calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{W}{h} &= \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dS = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{r_1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{rr} \varepsilon_{rr} r dr d\theta \\ &= \frac{k^2}{2E} \int_{r_0}^{r_1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{r} dr d\theta = \frac{\pi k^2}{4E} \ln \frac{r_1}{r_0}\end{aligned}\quad (29.10)$$

### 29.1.8 Limite d'élasticité

Le matériau possède une limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction. Calculer la force linéaire  $F/h$  maximale autorisée avant que le régime plastique ne soit atteint. On utilisera les critères de von Mises et de Tresca.

A quel endroit du massif la limite d'élasticité est-elle atteinte ?

Faire l'application numérique pour le massif en acier avec  $\sigma_0 = 100$  MPa,  $r_0 = 1$  mm.

► En traction simple, la contrainte équivalente de von Mises est égale à la valeur absolue de la contrainte de traction/compression :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_{rr}| = \left| \frac{k \cos \theta}{r} \right| \leq \sigma_0$$

Cette contrainte est maximale en  $r = r_0$  et  $\theta = 0$ . La condition

$$|k| \leq \sigma_0 r_0 \implies \left| \frac{F}{h} \right| \leq \frac{\pi \sigma_0 r_0}{2}$$

fournit la valeur maximale  $F/h = 157$  N.mm<sup>-1</sup>.

## 29.2 Le problème de Flamant

On considère le problème traité dans la première partie comme un élément d'une suite de problèmes paramétrés par le rayon  $r_0$  de la gouttière. Pour chaque valeur de  $r_0$ , la pression  $p_0$  appliquée sur la rigole est ajustée pour que la force linéaire résultante  $F/h$  appliquée à la surface soit constante.

### 29.2.1 Formulation du problème

Formuler le problème-limite obtenu en faisant tendre le rayon de la rigole  $r_0$  vers 0 dans cette suite de problèmes.

Comment évolue la pression  $p_0$  lors de ce passage à la limite ? Quelle est la différence essentielle entre ce problème, dit de Flamant, et ceux traités dans le cours jusqu'ici ?

► Lorsque le rayon  $r_0$  tend vers 0, le problème obtenu consiste à appliquer la force concentrée  $F/h \mathbf{e}_1$  au point O à la surface d'un demi-espace, le vecteur-contrainte étant nul par ailleurs sur cette surface. Dans ce problème on n'applique donc pas une distribution surfacique de forces mais une force sur une ligne de mesure surfacique nulle, contrairement aux situations admises en mécanique des milieux continus au sens de Cauchy. Cette force concentrée peut s'interpréter comme une distribution de Dirac d'efforts surfaciques, dans un sens qui sera apparent dans la troisième partie du problème. Le problème de Flamant est illustré sur la figure 29.3.

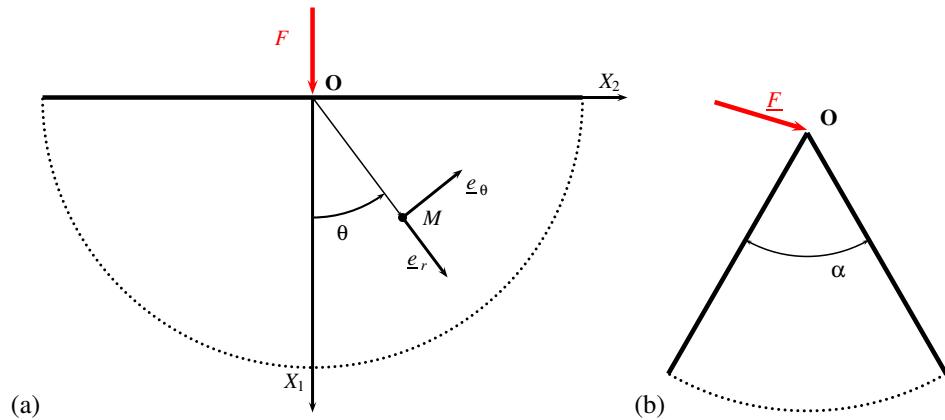


Figure 29.3 : Le problème de Flamant : (a) cas d'une force normale sur un massif, (b) cas général.

### 29.2.2 Contraintes de Flamant

Proposer un champ de contraintes solution du problème de Flamant défini au paragraphe 29.2.1, pour un massif élastique linéaire homogène et isotrope, dans l'hypothèse des petites perturbations.

► Le champ de contraintes (29.1) étendu à toutes les valeurs de  $r > 0$  et toutes les valeurs de  $|\theta| \leq \pi/2$  est statiquement admissible. Il vérifie les équations d'équilibre en volume et conduit à un vecteur-contrainte nul à la surface sauf en O où il n'est pas défini. Il reste à identifier la constante  $k$  à l'aide du calcul de la résultante des efforts sur le demi-disque de rayon  $R$  :

$$\int \underline{t} \, dS = \frac{F}{h} \underline{e}_1 + \int_{r=R} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \, R d\theta$$

qui conduit à la même relation (29.2) entre  $k$  et  $F/h$ .

La contrainte est infinie en  $r = 0$  comme dans le cas de la fissure, caractéristique pathologique ne suffisant pas à exclure la pertinence de cette solution valable presque partout. On y reviendra toutefois à la question (29.2.4).

### 29.2.3 Visualisation par photoélasticité

Lorsque le massif est constitué d'un matériau photoélastique, le champ de contraintes précédent est visible comme le montre la figure 29.4. Sachant que les lignes observées, dites *isochromes*, représentent les lieux des points où  $\sigma_1 - \sigma_2 = Cste$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant les contraintes principales dans le plan  $(X_1, X_2)$ , interpréter les courbes visibles sur la figure 29.4. Indiquer également les raisons pouvant expliquer les différences entre l'expérience et la théorie.

► En traction simple, la seule contrainte principale non nulle est  $\sigma_{rr}$ . Les lignes le long desquelles cette contrainte est constante ont pour équation :

$$r = C \cos \theta$$

où  $C$  est une constante. Il s'agit de cercles passant par l'origine, de rayon  $C/2$ .

Ces cercles sont en accord avec les observations de la figure 29.4. Toutefois, les isochromes de la figure ne sont pas des cercles parfait. Deux raisons peuvent être avancées. D'abord l'expérience n'a pas pu être réalisée sur un massif infini. Le cas fini conduit nécessairement à une solution légèrement différente. D'autre part, la tache grise sous l'indicateur montre qu'un indentation plastique a peut-être eu lieu très localement, ce qui peut conduire à un étalement de la zone de contact, ce qui nous éloigne de la force linéaire idéale.

#### 29.2.4 Caractère pathologique de la solution de Flamant

Indiquer plusieurs raisons suggérant que la solution de Flamant est physiquement inacceptable. On verra toutefois dans la partie 29.3 le profit que l'on peut tirer de cette solution mathématique.

► La contrainte est infinie en  $r = 0$  mais cette condition n'est pas en soi rédhibitoire car on a vu tout le profit qu'on peut tirer d'une solution singulière dans le cas de la fissure, cf. la discussion au paragraphe 26.8.2. C'est la dépendance en  $1/r$  de cette contrainte qui pose réellement problème puisqu'elle conduit à la divergence de l'énergie dans un disque fini, ce que montre l'expression (29.10) lorsque  $r_0$  tend vers zéro. Enfin, le déplacement que l'on peut construire de la même manière qu'au paragraphe 29.1.4, diverge à l'origine, ce qui n'est guère acceptable non plus et se distingue du cas de la fissure. Cette double pathologie, contraintes en  $1/r$  et déplacement logarithmique, se retrouve dans le cas de la dislocation étudiée au chapitre 28.

### 29.3 Distribution de pression sur un massif

La solution de Flamant peut être utilisée comme génératrice de la solution d'un problème d'une importance indiscutable en mécanique des sols et des structures. Il s'agit de l'application d'une distribution de pression sur un segment  $[AB]$  de longueur  $2a$  à la surface d'un massif semi-infini, comme sur la figure 29.5. Le segment  $[AB]$  engendre dans la troisième direction  $X_3$  une bande sur laquelle la distribution de pression est appliquée. La méthode permet d'obtenir la réponse du massif pour toute distribution hétérogène de pression le long de  $[AB]$  mais on considère dans cette partie une pression uniforme  $p$  :

$$\underline{t}^d = p\underline{e}_1, \quad \forall \underline{X} \in [AB]$$

#### 29.3.1 Question préliminaire

Montrer que les composantes cartésiennes des contraintes de Flamant, exprimées en fonction des coordonnées  $r, \theta$ , s'écrivent :

$$\underline{\sigma} = \frac{k \cos \theta}{r} (\cos^2 \theta \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sin^2 \theta \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sin \theta \cos \theta (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)) \quad (29.11)$$

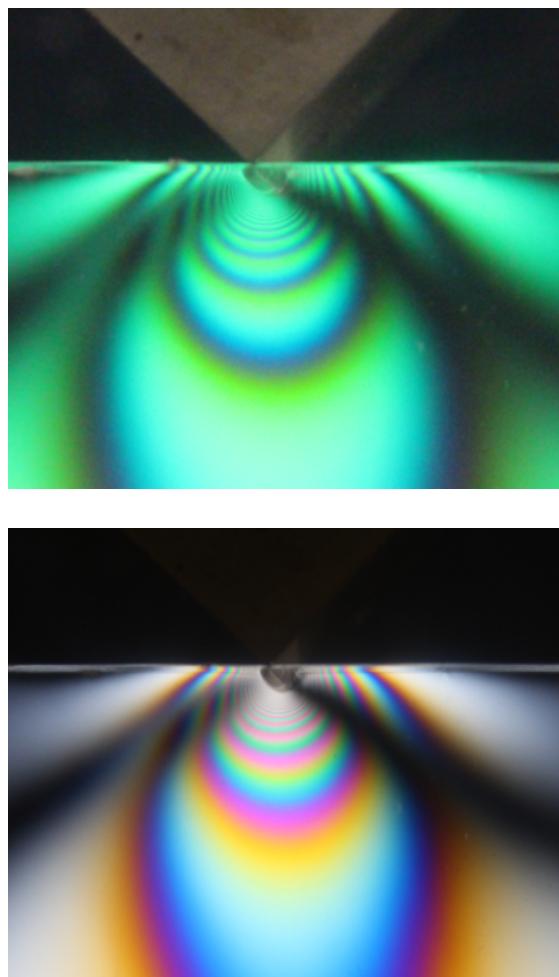
► Partant de la contrainte de Flamant (29.1),

$$\underline{\sigma} = \frac{k \cos \theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r = \frac{k \cos \theta}{r} (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2) \otimes (\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2)$$

on obtient le résultat annoncé.

#### 29.3.2 Champ de contraintes dans le massif

A l'aide de la solution du problème de Flamant et du théorème de superposition en élasticité linéarisée, établir les expressions suivantes des contraintes qui se développent dans le massif en conséquence des pressions appliquées à sa surface :



*Figure 29.4 : Visualisation par photoélasticité des contraintes induites par l'application d'une force sur une ligne à la surface d'un massif élastique : en lumière monochromatique en haut, en lumière blanche en bas (réalisation : M. Mazière). La force linéaire est appliquée par l'arête d'un cube dont une partie est visible sur la figure du haut. Des images en photoélasticité pour ce type de chargements se trouvent également dans le livre de (Johnson, 2004) repris par (Sadd, 2005).*

$$\sigma_{11} = \frac{p}{2\pi} [2\theta + \sin 2\theta]_A^B \quad (29.12)$$

$$\sigma_{22} = \frac{p}{2\pi} [2\theta - \sin 2\theta]_A^B \quad (29.13)$$

$$\sigma_{12} = \frac{p}{2\pi} [-\cos 2\theta]_A^B \quad (29.14)$$

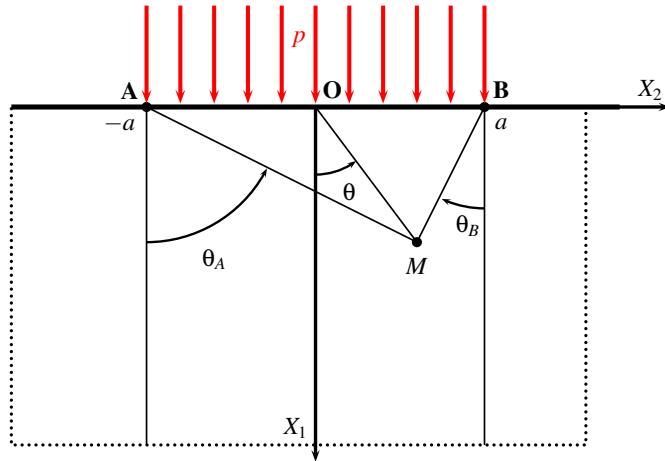


Figure 29.5 : Coupe d'un massif semi-infini par le plan  $(X_1, X_2)$  soumis à une pression uniforme  $p$  le long d'une bande décrite par le segment  $[AB]$  et l'épaisseur  $h$  dans la troisième direction. Définition des angles  $\theta, \theta_A, \theta_B$  associés au point  $M$ . Les lignes pointillées indiquent que le domaine matériel  $X_1 \geq 0$  est infini.

avec la notation  $[f(\theta)]_A^B = f(\theta_B) - f(\theta_A)$ , les angles  $\theta_A$  et  $\theta_B$  étant définis pour chaque point  $M$  du massif par la figure 29.5, en respectant l'orientation directe dans le plan  $(X_1, X_2)$ .

Vérifier que les conditions aux limites sur le plan  $X_1 = 0$  sont satisfaites par le champ proposé.

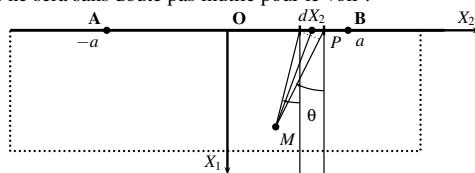
► Le champ de contraintes induit par la distribution de pression est la superposition d'efforts ponctuels élémentaires  $dF/h = pdX_2$  équivalents à l'application de la pression  $p$  sur le segment infinitésimal  $dX_2$  en chaque point  $P \in [AB]$ . A ce titre, le champ de contrainte engendré par chaque force élémentaire est celui de Flamant (29.1) avec  $k = -2pdX_2/\pi$  et  $r = r_P = PM$ ,  $P$  étant l'origine des coordonnées cylindriques. En utilisant les composantes cartésiennes (29.11) du champ de Flamant, la superposition s'écrit :

$$[\sigma] = -\frac{2p}{\pi} \int_A^B \frac{1}{r_P} \begin{bmatrix} \cos^3 \theta & \cos^2 \theta \sin \theta \\ \cos^2 \theta \sin \theta & \cos \theta \sin^2 \theta \end{bmatrix} dX_2$$

En remarquant<sup>5</sup> que  $\cos \theta dX_2 = -r_P d\theta$ , on obtient les composantes individuelles :

$$\sigma_{11} = \frac{2p}{\pi} \int_A^B \cos^2 \theta d\theta, \quad \sigma_{22} = \frac{2p}{\pi} \int_A^B \sin^2 \theta d\theta, \quad \sigma_{12} = \frac{p}{\pi} \int_A^B \sin 2\theta d\theta$$

5. Le dessin ci-dessous ne sera sans doute pas inutile pour le voir :



On vérifie que

$$M \in [AB], \theta_A = \frac{\pi}{2}, \theta_B = -\frac{\pi}{2}, \quad \sigma_{11} = -p, \quad \sigma_{12} = 0$$

$$M \notin [AB], X_1 = 0, \theta_A = \theta_B = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta_A = \theta_B = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$$

de sorte que la distribution demandée pour le vecteur-contrainte est satisfaite.

Les notations utilisées pour ce problème sont dues à (Mandel, 1994). Ces champs de contraintes sont illustrés sur la figure 29.6.

#### 29.3.3 Régularité des contraintes

Montrer que le champ de contraintes (29.12)-(29.14) ne présente pas de singularité.

Etudier la continuité des composantes du tenseur des contraintes le long d'une ligne d'équation  $X_1 = b$ , pour  $b \geq 0$  donné. Justifier que les discontinuités observées ne contreviennent pas aux lois de l'équilibre.

► Les fonctions  $\theta, \sin \theta, \cos \theta$  étant bornées, il en est de même des composantes de contraintes (29.12)-(29.14). Le problème de Flamant est donc en quelque sorte régularisé. Pour s'en convaincre, il est instructif de vérifier que le champ (29.12)-(29.14) tend vers la solution de Flamant quand on fait tendre la largeur  $2a$  du segment vers 0.

Le champ (29.12)-(29.14) présente des problèmes de définition et de continuité en  $A$  et  $B$  à examiner.

A la surface  $X_1 = 0$ , les trois composantes de contraintes sont nulles à l'extérieur du segment  $[AB]$ . Les composantes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  valent  $-p$  sur le segment  $[AB]$  tandis que  $\sigma_{12} = 0$ . Ces deux composantes présentent donc une discontinuité sur les lignes  $(A, e_3)$  et  $(B, e_3)$ .

Les fonctions  $\theta_A$  et  $\theta_B$  sont continues le long de toute ligne  $X_1 = b$ ,  $b > 0$ , il en va donc de même des composantes des contraintes (29.12)-(29.14). Les valeurs des contraintes aux points d'intersection entre la ligne  $X_1 = b$ ,  $b > 0$  et les verticales passant par  $A$  et  $B$  sont

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^b(\theta_A = 0, \theta_B) &= \frac{p}{2\pi}(2\theta_B + \sin 2\theta_B), & \sigma_{22}^b(\theta_A = 0, \theta_B) &= \frac{p}{2\pi}(2\theta_B - \sin 2\theta_B) \\ \sigma_{12}^b(\theta_A = 0, \theta_B) &= \frac{p}{2\pi}(1 - \cos 2\theta_B) \end{aligned}$$

On calcule alors les limites de ces valeurs lorsqu'on s'approche de la surface :

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sigma_{11}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = \lim_{\theta_B \rightarrow -\pi/2} \sigma_{11}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = -p/2$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \sigma_{22}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = \lim_{\theta_B \rightarrow -\pi/2} \sigma_{22}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = -p/2$$

$$\lim_{\theta_B \rightarrow -\pi/2} \sigma_{12}^b(\theta_A = 0, \theta_B) = p/\pi$$

La condition de transmission du vecteur-contrainte le long des plans  $\theta_A = 0$  et  $\theta_B = 0$  est donc remplie presque partout sauf en  $A$  et  $B$ . Comme les lignes  $(A, e_3)$  et  $(B, e_3)$  sont de mesure surfacique nulle, l'équilibre est réalisé au sens des distributions.

La répartition de la contrainte équivalente de von Mises est illustrée sur la figure 29.6.

#### 29.3.4 Respect du contexte infinitésimal

Fournir une condition de respect du contexte infinitésimal par la solution (29.12)-(29.14).

► Les contraintes sont majorées par  $p$  et les déformations sont du même ordre que  $\sigma_{ij}/E$ . On en déduit la condition  $p/E \ll 1$ . Il est à noter que la seule dimension caractéristique du problème, à savoir la largeur  $2a$  du segment, n'intervient pas dans cette condition. Cela est dû au fait que le massif est infini et qu'aucun rapport de longueur ne se manifeste dans le problème.

### 29.3.5 Limite d'élasticité

Donner les contraintes principales du tenseur (29.12)-(29.14).

Lorsque le massif est constitué d'un matériau élastoplastique de limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction simple, indiquer pour quelle valeur de la pression imposée  $p$  la limite d'élasticité est atteinte et à quel endroit. On utilisera le critère de Tresca.

Montrer enfin que les directions principales des contraintes (29.12)-(29.14) sont les bissectrices des droites ( $AM$ ) et ( $BM$ ).

► La trace et le sous-déterminant  $2 \times 2$  du tenseur des contraintes fournissent la somme et le produit de ses deux contraintes principales non nulles :

$$\text{trace } \underline{\sigma} = \frac{2p}{\pi}(\theta_B - \theta_A), \quad \det_2 \underline{\sigma} = \left(\frac{p}{\pi}\right)^2 ((\theta_B - \theta_A)^2 - \sin^2(\theta_B - \theta_A))$$

Les contraintes principales, dans l'ordre décroissant<sup>6</sup>, sont donc

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{p}{\pi} (\theta_B - \theta_A + \sin(\theta_A - \theta_B)), \quad \sigma_3 = \frac{p}{\pi} (\theta_B - \theta_A + \sin(\theta_B - \theta_A)) \quad (29.15)$$

Le critère de Tresca est atteint lorsque

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p}{\pi} (\theta_A - \theta_B + \sin(\theta_A - \theta_B)) = \sigma_0$$

Cette fonction de  $\theta_A - \theta_B \geq 0$  est maximale en  $\pi$ , c'est-à-dire à la surface sur le segment  $[AB]$ . La limite d'élasticité est donc atteinte simultanément pour tous les points de  $[AB]$  lorsque  $p = \sigma_0$ .

Les directions principales sont les vecteurs de composantes  $(\alpha, \beta)$  solution du système :

$$\sigma_{11}\alpha + \sigma_{12}\beta = \lambda\alpha, \quad \sigma_{12}\alpha + \sigma_{22}\beta = \lambda\beta$$

où  $\lambda \in \sigma_1, \sigma_2$ . L'orientation des directions principales,  $\beta/\alpha$ , est solution de

$$x^2 + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma_{12}}x - 1 = 0$$

avec  $\sigma_{11} - \sigma_{22} = p/\pi [\sin 2\theta]_A^B$ . On trouve

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma_{12}} \pm \sqrt{4 + \left( \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\sigma_{12}} \right)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{[\sin 2\theta]_A^B \pm 2 \sin(\theta_A - \theta_B)}{[\cos 2\theta]_A^B}$$

Mandel<sup>7</sup> en donne une expression alternative :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pm 1 - \cos(\theta_A + \theta_B)}{\sin(\theta_A + \theta_B)} = \tan \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \quad \text{ou} \quad -\cotan \frac{\theta_A + \theta_B}{2} \quad (29.16)$$

6. Remarquer que  $\theta_A - \theta_B \geq 0$ .

7. (Mandel, 1994), p. 545.

qui montre que les directions principales sont les bissectrices de l'angle  $BMA$ .

### 29.3.6 Déformée de la surface

En utilisant à nouveau le théorème de superposition, donner les déplacements à la surface du massif.

► Les déplacements des points de la surface du massif s'obtiennent en superposant les déplacements induits par une force concentrée  $-2pdX_2/\pi$  en chaque point  $P(0, X_2) \in [AB]$  comme on l'a fait pour les contraintes. On cherche à déterminer les composantes cartésiennes  $u_1(0, X_2), u_2(0, X_2)$ .

Pour  $X_2 \leq -a, \theta = -\pi/2$

$$u_2 = -u_r = \frac{2p}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{1-\nu}{2} \frac{\pi}{2} du = \frac{(1-\nu)pa}{E}$$

Pour  $X_2 \geq -a, \theta = \pi/2$

$$u_2 = u_r = -\frac{2p}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{1-\nu}{2} \frac{\pi}{2} du = -\frac{(1-\nu)pa}{E}$$

Pour  $|X_2| \leq a$ , on trouve une évolution linéaire du déplacement interpolant les deux déplacements d'ensemble de part et d'autre de  $[AB]$ .

Quant au déplacement vertical  $u_1$  égal à  $u_\theta$  ou  $-u_\theta$  selon la position relative par rapport au point d'application de la force élémentaire, une expression unifiée peut être établie à partir de la considération des trois situations précédentes :

$$u_1(X_2) = -\frac{2p}{\pi E} \int_{-a}^a \left( \frac{1+\nu}{2} + \ln \frac{|u-X_2|}{\ell} \right) du \quad (29.17)$$

Cette intégrale est convergente. Le déplacement n'est donc pas singulier. Il est logarithmique loin du segment  $[AB]$ .

Cette solution est présentée, au moins partiellement, dans l'ouvrage de (Barber, 2004).

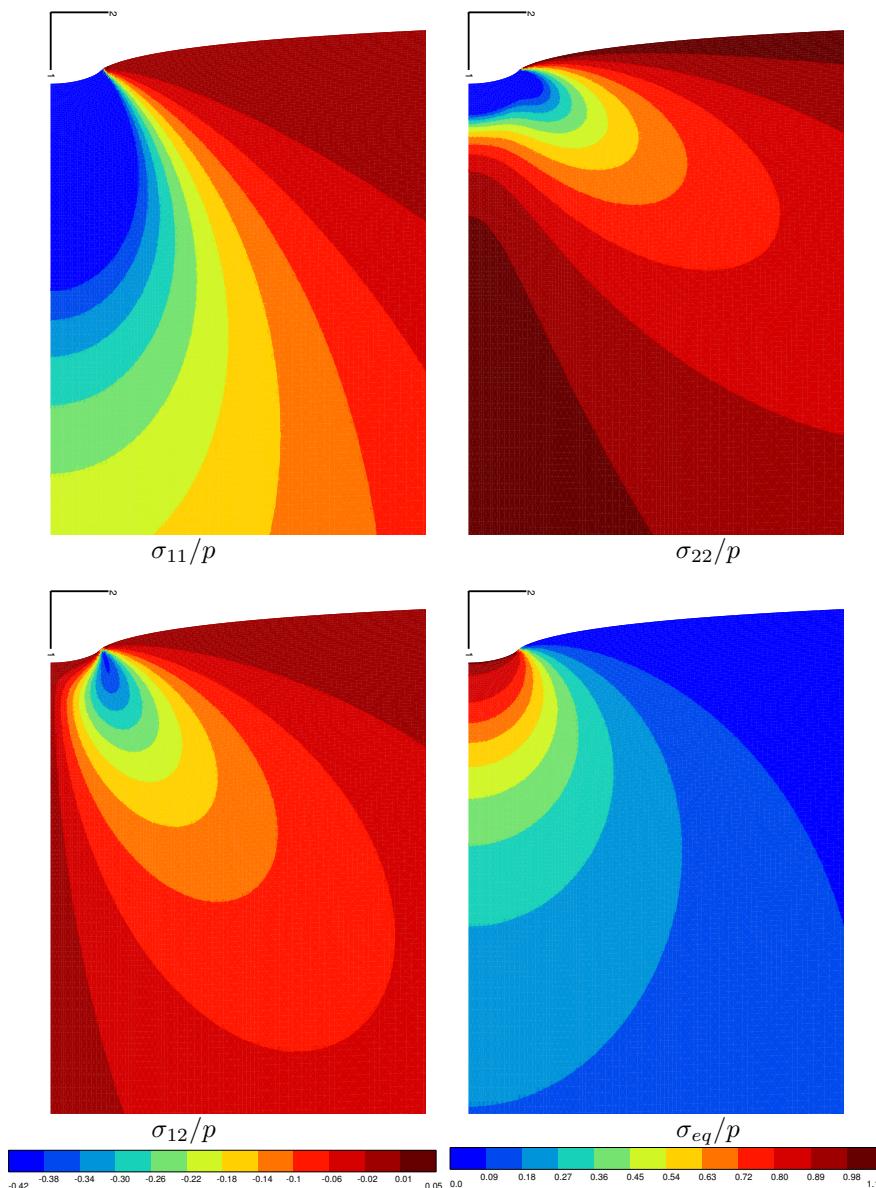
## 29.4 Le problème de Flamant général

L'étude précédente ne constitue en fait qu'un cas particulier du problème général de Flamant qui considère l'application d'une force sur l'arête d'un dièdre d'angle  $\alpha$  comme sur la figure 29.3(b). Elle correspond au cas  $\alpha = \pi$  et à une force purement normale au massif. La solution générale en contrainte du problème de Flamant mérite d'être donnée ici :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( \frac{C_1 \cos \theta}{r} + \frac{C_2 \sin \theta}{r} \right) \underline{\underline{e}}_r \otimes \underline{\underline{e}}_r \quad (29.18)$$

Il est remarquable que ce chargement complexe conduise à un état de traction simple selon  $\underline{\underline{e}}_r$ . Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  peuvent être directement reliées aux composantes de la force  $\underline{F}$  appliquée selon une direction donnée indépendante de la géométrie du dièdre. La dépendance des contraintes en  $1/r$  est attendue dans la mesure où la force imposée est équilibrée par les efforts de contact sur tout arc de cercle distant de  $r$  du point d'application et dont la surface est en  $rh$ . A noter que le problème de Flamant ne comporte aucune longueur caractéristique.

La question de l'existence et de l'unicité des solutions de problèmes impliquant des forces concentrées sortant du cadre classique de Cauchy, est extrêmement délicate. Quelques éléments peuvent être trouvés dans le travail de (Sternberg and Eubanks, 1955).



*Figure 29.6 : Champs de contraintes normalisées par la pression appliquée sur un segment de la surface d'un massif semi-infini. La légende de gauche s'applique aux trois composantes des contraintes tandis que celle de droite concerne le champ de contrainte équivalente de von Mises,  $\sigma_{eq}$ . Seule la moitié du massif est représentée. La déformation a été amplifiée d'un facteur 500 pour l'illustration.*

La question de la pertinence physique de cette solution se pose à nouveau, la dépendance en  $1/r$  conduisant à la divergence de l'énergie dans un demi-disque de centre O. On peut se demander si une régularisation peut être obtenue en dépassant la théorie de Cauchy des milieux continus, par exemple en utilisant la théorie du second gradient ou en introduisant des couples de contraintes surfaciques, extensions de la théorie de Cauchy introduisant des longueurs caractéristiques dans la loi de comportement élastique et permettant de lever certaines singularités de la mécanique des milieux continus classique, cf. (Bogy and Sternberg, 1968; Forest, 2006).

## 29.5 L'essai brésilien de compression diamétrale

*Je suis brésilien, j'ai de l'or,  
Et j'arrive de Rio-Janeire  
Plus riche aujourd'hui que naguère,  
Paris, je te reviens encor- !  
Rondeau du Brésilien, La Vie Parisienne,  
Jacques Offenbach.*

L'essai brésilien a été inventé en 1943 et est aujourd'hui largement utilisé en mécanique des roches et des sols, ainsi que pour bien d'autres matériaux, cf. (Carneiro, 1943; Fair-bairn and Ulm, 2002).

La détermination expérimentale de la limite d'élasticité en traction simple des matériaux fragiles ou quasi-fragiles<sup>8</sup> est particulièrement délicate. En effet, les essais de traction sur des éprouvettes en forme *d'os de chien*<sup>9</sup> conduisent à une rupture précoce dans les congés, en raison des concentrations de contraintes qui s'y développent. Ils ne donnent donc pas accès à la limite d'élasticité de traction simple qui correspondrait à une rupture dans le fût de l'éprouvette. L'essai brésilien, appelé aussi essai de traction indirect<sup>10</sup> est un essai de compression diamétrale sur un cylindre ou un disque d'épaisseur  $h$ . C'est un essai complexe dans le sens où les champs de contraintes et de déformations ne sont pas homogènes dans l'échantillon. Cependant, on va voir dans ce problème comment cet essai simple et astucieux, dont l'interprétation n'est pas sans difficulté, permet d'estimer la limite d'élasticité en traction d'un matériau quasi-fragile.

L'objectif du problème est d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, les contraintes qui règnent dans un cylindre ou un disque placé entre deux plateaux rigides parallèles soumis à deux forces résultantes opposées de norme  $F$ , comme sur la figure 29.7a. Le cylindre a une épaisseur  $h$  et un rayon  $R$ . Il est constitué d'un matériau homogène, élastique, linéaire et isotrope. L'idéalisation de cet essai conduit au problème aux limites de la figure 29.7b où le cylindre est soumis à deux forces opposées. Ces forces correspondent en fait à deux distributions linéaires de forces  $F/h$  appliquées sur deux génératrices diamétralement opposées du cylindre. La solution de ce problème idéalisé est proposée d'abord en utilisant de manière astucieuse la solution du problème de Flamant. Les contraintes obtenues permettent ensuite de prévoir la limite d'élasticité de la structure pour les matériaux fragiles. La dernière partie aborde les inconvénients de l'idéalisation de l'essai brésilien en considérant différents types de conditions aux limites plus réalistes. On utilisera pour cela des résultats que l'on peut trouver dans les références (Markides et al., 2010; Li and Wong, 2013; Markides and Kourkoulis, 2013).

Les efforts dus à la pesanteur et à toute autre force volumique sont négligés. L'analyse est limitée au cas statique et isotherme. Le matériau est supposé homogène, élastique et

8. Les matériaux quasi-fragiles s'endommagent un peu avant de rompre brutalement. Les céramiques et les verres sont des matériaux fragiles. Le béton quant à lui présente un endommagement avant la rupture.

9. *Dogbone samples*, en anglais, expression imagée décrivant la forme d'une éprouvette élancée avec des têtes massives permettant le serrage sur une machine d'essai mécanique.

10. *Splitting tension test* ou *indirect tension test* en anglais.

isotrope et dans son état naturel. Toutes les surfaces du disque sont libres. Les efforts ne sont appliqués qu'aux points  $O_1$  et  $O_2$ . Il est donc légitime de se placer dans le contexte des contraintes planes, i.e.  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ .

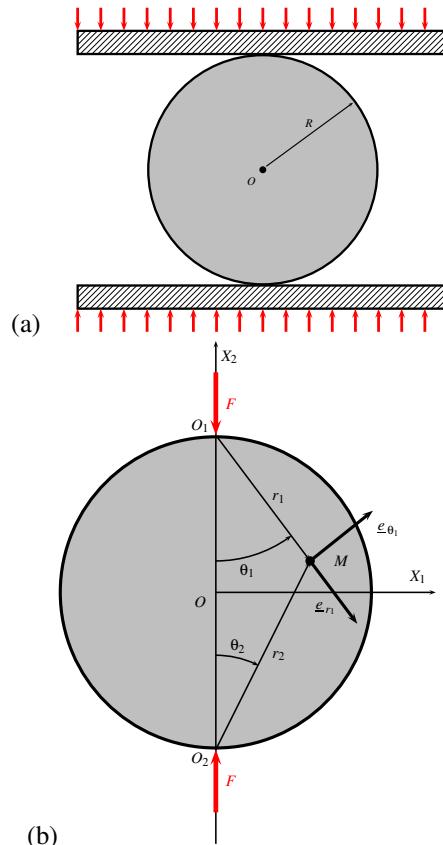


Figure 29.7 : Compression diamétrale d'un disque de centre  $O$  et de rayon  $R$  : (a) schéma de la réalisation pratique de l'essai ; (b) idéalisation de l'essai brésilien, ainsi que le repérage d'un point du disque par les coordonnées polaires  $(r_1, \theta_1)$  ou  $(r_2, \theta_2)$ .

Les questions du problème peuvent être résolues indépendamment les unes des autres même s'il faut les aborder dans l'ordre proposé.

### 29.5.1 Champ de contrainte dans un disque en compression diamétrale

On considère le problème de la compression diamétrale de la figure 29.7b où les génératrices représentées par les points diamétralement opposés  $O_1$  et  $O_2$  sont soumises respectivement aux forces  $-F\underline{e}_2$  et  $F\underline{e}_2$ , supposées uniformément réparties sur l'épaisseur  $h$ .

Une manière élégante et efficace de résoudre le problème de compression diamétrale consiste à le décomposer en trois problèmes élémentaires présentés sur la figure 29.8, à savoir deux problèmes de Flamant et un problème de traction radiale qui reste à définir. Cette résolution à l'aide du principe de superposition est dû à (Timoshenko and Goodier, 1970). C'est la démarche présentée plus récemment dans (Sadd, 2005) qui est suivie ici.

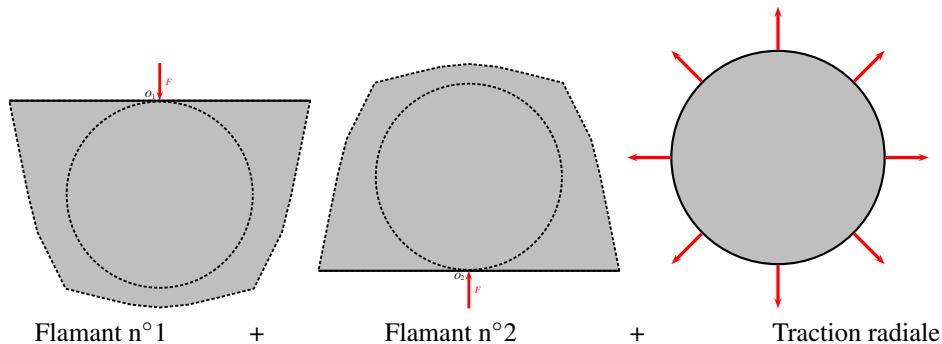


Figure 29.8 : Décomposition du problème de compression diamétrale en la superposition de trois problèmes distincts.

#### Problème de Flamant n°1

On considère le problème de Flamant n°1 de la figure 29.8 où une force  $-F\mathbf{e}_2$  est appliquée uniformément sur la ligne parallèle à la direction 3 (perpendiculaire à la figure) passant par le point  $O_1$  à la surface d'un massif occupant un demi-espace infini.

En utilisant le repérage polaire  $(r_1, \theta_1)$  de la figure 29.7b, donner le champ de contrainte solution de ce problème tel qu'il a été obtenu en exercice au chapitre 29. Constater qu'il est purement radial. On ne demande pas d'établir ces formules mais simplement de les adapter aux notations utilisées ici.

Montrer ensuite que cette composante radiale de contrainte est constante le long du cercle de rayon  $R$  et tangent en  $O_1$  à la surface du massif de rayon  $R$ . Ce cercle est représenté en pointillé sur le dessin de gauche de la figure 29.8. Exprimer cette valeur en fonction de  $F, h$  et  $R$ .

Calculer le vecteur-contrainte  $\underline{\tau}_1$  agissant sur les facettes tangentes au cylindre engendré par le cercle précédent. L'exprimer en fonction de  $F, h, R$  et du vecteur  $\underline{e}_{r_1}$ .

► D'après les résultats (29.1) et (29.2), le champ de contraintes est purement radial et de la forme :

$$\underline{\sigma}^{(1)} = -\frac{2F \cos \theta_1}{\pi h R} \underline{e}_{r_1} \otimes \underline{e}_{r_1} \quad (29.19)$$

En considérant l'angle au centre du cercle en pointillé dont la valeur est  $2\theta_1$ , on établit que

$$r_1 = 2R \cos \theta_1$$

Par suite,

$$\underline{\sigma}^{(1)}(r_1 = 2R \cos \theta_1) = -\frac{F}{\pi h R} \underline{e}_{r_1} \otimes \underline{e}_{r_1}, \quad \sigma_{r_1 r_1}^{(1)} = -\frac{F}{\pi h R}$$

Il est remarquable que cette valeur soit identique tout le long du cercle de rayon  $R$  ! Le vecteur normal au cercle tangent en  $O_1$  et de rayon  $R$  est

$$\underline{e}_r = \cos \theta_1 \underline{e}_{r_1} + \sin \theta_1 \underline{e}_{\theta_1} \quad (29.20)$$

Le vecteur-contrainte agissant sur la facette de normale  $\underline{e}_r$  vaut donc

$$\underline{t}^{(1)} = \underline{\sigma}^{(1)}(r_1 = 2R \cos \theta_1) \cdot \underline{e}_r = -\frac{F}{\pi h R} \cos \theta_1 \underline{e}_{r_1} \quad (29.21)$$

### Problème de Flamant n°2

Reprendre les trois questions du paragraphe 29.5.1 dans le cas du problème de Flamant n°2 de la figure 29.8. Ce problème consiste en une force linéaire  $F/h\underline{e}_2$  agissant sur la génératrice du cylindre passant par  $O_2$  sur le demi-espace  $X_2 \geq -R$  d'après le repère de la figure 29.7. On utilisera le jeu de coordonnées polaires  $(r_2, \theta_2)$ . On notera  $\underline{t}_2$  le vecteur-contrainte agissant sur les facettes tangentes au cylindre engendré par le cercle tangent au plan  $X_2 = -R$  passant par  $O_2$ .

► On calcule successivement :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}^{(2)} &= -\frac{2F \cos \theta_2}{\pi h r_2} \underline{e}_{r_2} \otimes \underline{e}_{r_2} \\ \underline{\sigma}^{(2)}(r_2 = 2R \cos \theta_2) &= -\frac{F}{\pi h R} \underline{e}_{r_2} \otimes \underline{e}_{r_2}, \quad \sigma_{r_2 r_2}^{(2)} = -\frac{F}{\pi h R} \\ \underline{t}^{(2)} &= \underline{\sigma}^{(2)}(r_2 = 2R \cos \theta_2) \cdot \underline{e}_r = -\frac{F}{\pi h R} \cos \theta_2 \underline{e}_{r_2} \end{aligned}$$

### Traction radiale sur le cercle tangent

Montrer que la superposition des efforts surfaciques précédents  $\underline{t}_1$  et  $\underline{t}_2$  sur un point quelconque du cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  de la figure 29.7 vaut :

$$\underline{t}^{(1)} + \underline{t}^{(2)} = -\frac{F}{\pi h R} \underline{e}_r \quad (29.22)$$

où  $\underline{e}_r$  est le vecteur normal sortant au cercle étudié.

On considère alors le troisième problème de la figure 29.8 (à droite), à savoir la traction radiale d'un disque de rayon  $R$  et de centre  $O$  soumis à la densité surfacique d'efforts donnée suivante :

$$\underline{t}^d = \frac{F}{\pi h R} \underline{e}_r \quad (29.23)$$

Trouver un champ de contraintes statiquement admissible dans le disque pour la sollicitation (29.23). Montrer qu'il conduit à un champ de déformation compatible.

► On a les relations suivantes entre les systèmes de coordonnées  $(r_1, \theta_1)$  et  $(r_2, \theta_2)$  pour un point appartenant à la frontière du cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$  (voir figure 29.7b) :

$$\underline{e}_{r_2} = \underline{e}_{\theta_1}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{t}}^{(1)} + \underline{\mathbf{t}}^{(2)} &= -\frac{F}{\pi h R} (\cos \theta_1 \underline{\mathbf{e}}_{r_1} + \cos \theta_2 \underline{\mathbf{e}}_{r_2}) \\ &= -\frac{F}{\pi h R} (\cos \theta_1 \underline{\mathbf{e}}_{r_1} + \sin \theta_1 \underline{\mathbf{e}}_{\theta_1}) = -\frac{F}{\pi h R} \underline{\mathbf{e}}_r\end{aligned}$$

en utilisant (29.20).

Le troisième problème aux limites de la figure 29.8 consiste à appliquer le vecteur-constrainte donné opposé au vecteur qui vient d'être calculé. La sollicitation au bord étant homogène, la solution homogène

$$\underline{\sigma}^{(3)} = \frac{F}{\pi h R} (\underline{\mathbf{e}}_r \otimes \underline{\mathbf{e}}_r + \underline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \underline{\mathbf{e}}_\theta) = \frac{F}{\pi h R} (\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2) \quad (29.24)$$

remplit les conditions d'équilibre en volume (la divergence d'un champ homogène est nulle) et les conditions au bord (29.23). Il s'agit d'un état de traction équi-biaxiale. Le champ de déformation calculé à partir de la loi de Hooke est nécessairement compatible puisqu'il est homogène. Le champ de contraintes (29.24) est donc la solution du problème n°3.

#### *Résolution à l'aide du principe de superposition*

Justifier que le champ de contraintes solution du problème de l'essai brésilien idéalisé de la figure 29.7b est la somme, sur le domaine occupé par le disque, des champs solutions des trois problèmes individuels de la figure 29.8.

► Les 3 champs solutions des problèmes de la figure 29.8 sont à divergence nulle. Leur somme vérifie donc les équations de champs d'équilibre statique en l'absence d'efforts volumiques. En tout point du bord du disque ( $r = R$ ) autre que les points  $O_1$  et  $O_2$ , le vecteur-constrainte est la somme des vecteurs-constraintes appliqués dans les trois problèmes :

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}^{(1)} + \underline{\mathbf{t}}^{(2)} + \underline{\mathbf{t}}^d = 0$$

de sorte que les bords du disque sont libres d'effort, condition requise par l'essai brésilien. Le vecteur-constrainte présente une singularité en  $O_1$  et  $O_2$  où sa valeur est indéterminée. La connaissance du problème de Flamant nous informe que les champs de contraintes de Flamant conduisent aux résultantes  $-F\underline{\mathbf{e}}_1$  et  $F\underline{\mathbf{e}}_1$ . La mécanique des milieux continus à la Cauchy ne permet pas de relier le vecteur-constrainte à un effort ponctuel. On a vu que cette force ponctuelle doit s'interpréter comme la limite d'une distribution surfacique de la forme donnée au paragraphe 29.1.1.

#### *Champ de contraintes pour l'essai brésilien*

Montrer que les composantes non nulles des contraintes dans le repère cartésien ortho-normé ( $O, \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$ ) associé aux coordonnées  $X_1$  et  $X_2$  indiquées sur la figure 29.7b, sont

$$\sigma_{11} = -\frac{2F}{\pi h} \left( \frac{(R-X_2)X_1^2}{r_1^4} + \frac{(R+X_2)X_1^2}{r_2^4} - \frac{1}{2R} \right) \quad (29.25)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2F}{\pi h} \left( \frac{(R-X_2)^3}{r_1^4} + \frac{(R+X_2)^3}{r_2^4} - \frac{1}{2R} \right) \quad (29.26)$$

$$\sigma_{12} = \frac{2F}{\pi h} \left( \frac{(R-X_2)^2 X_1}{r_1^4} - \frac{(R+X_2)^2 X_1}{r_2^4} \right) \quad (29.27)$$

avec  $r_1^2 = X_1^2 + (R - X_2)^2$  et  $r_2^2 = X_1^2 + (R + X_2)^2$ .

► Le champ des contraintes est la somme des contributions trouvées pour les trois problèmes de la figure 29.8 :

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \underline{\sigma}^{(1)} + \underline{\sigma}^{(2)} + \underline{\sigma}^{(3)} \\ &= -\frac{2F}{\pi h} \left( \frac{\cos \theta_1}{r_1} \underline{e}_{r_1} \otimes \underline{e}_{r_1} + \frac{\cos \theta_2}{r_2} \underline{e}_{r_2} \otimes \underline{e}_{r_2} \right) + \frac{F}{\pi Rh} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \underline{\epsilon}_\theta \otimes \underline{\epsilon}_\theta)\end{aligned}$$

Pour le passage aux coordonnées cartésiennes, on utilise les relations

$$\begin{aligned}X_1 &= r_1 \sin \theta_1 = -r_2 \sin \theta_2, \quad X_2 = R - r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2 - R \\ \underline{e}_{r_1} &= \sin \theta_1 \underline{e}_1 - \cos \theta_1 \underline{e}_2, \quad \underline{e}_{r_2} = -\sin \theta_2 \underline{e}_1 + \cos \theta_2 \underline{e}_2\end{aligned}$$

*Contraintes le long du diamètre comprimé*  $X_1 = 0$

Donner l'expression des contraintes le long du diamètre  $X_1 = 0$ .

Souligner deux caractéristiques remarquables de ces profils de contraintes.

Donner les expressions des contraintes au centre  $O$ . Commenter.

Justifier la dénomination d'“essai de traction indirect” parfois utilisée pour désigner l’essai brésilien.

► Les contraintes le long de l'axe diamétral comprimé valent

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi Rh}, \quad \sigma_{22} = -\frac{2F}{\pi h} \left( \frac{1}{R - X_2} + \frac{1}{R + X_2} - \frac{1}{2R} \right), \quad \sigma_{12} = 0 \quad (29.28)$$

Le diamètre est donc soumis à une contrainte de traction selon 1 de valeur constante. La contrainte selon 2 est quant à elle de compression et variable le long du diamètre. Elle présente une singularité en  $O_1$  et  $O_2$ . Au centre du disque, l'état de contrainte est biaxial :

$$\boxed{\sigma_{11}^O = \frac{F}{\pi Rh}, \quad \sigma_{22}^O = -\frac{3F}{\pi Rh} = -3\sigma_{11}^O} \quad (29.29)$$

Les contraintes principales par ordre décroissant sont donc, au centre du disque :

$$\sigma_1 = \frac{F}{\pi Rh}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\frac{3F}{\pi Rh}$$

La plus grande contrainte principale est de traction tandis que la plus petite est de compression mais trois fois plus grande en amplitude.

*Contraintes le long du diamètre  $X_2 = 0$*

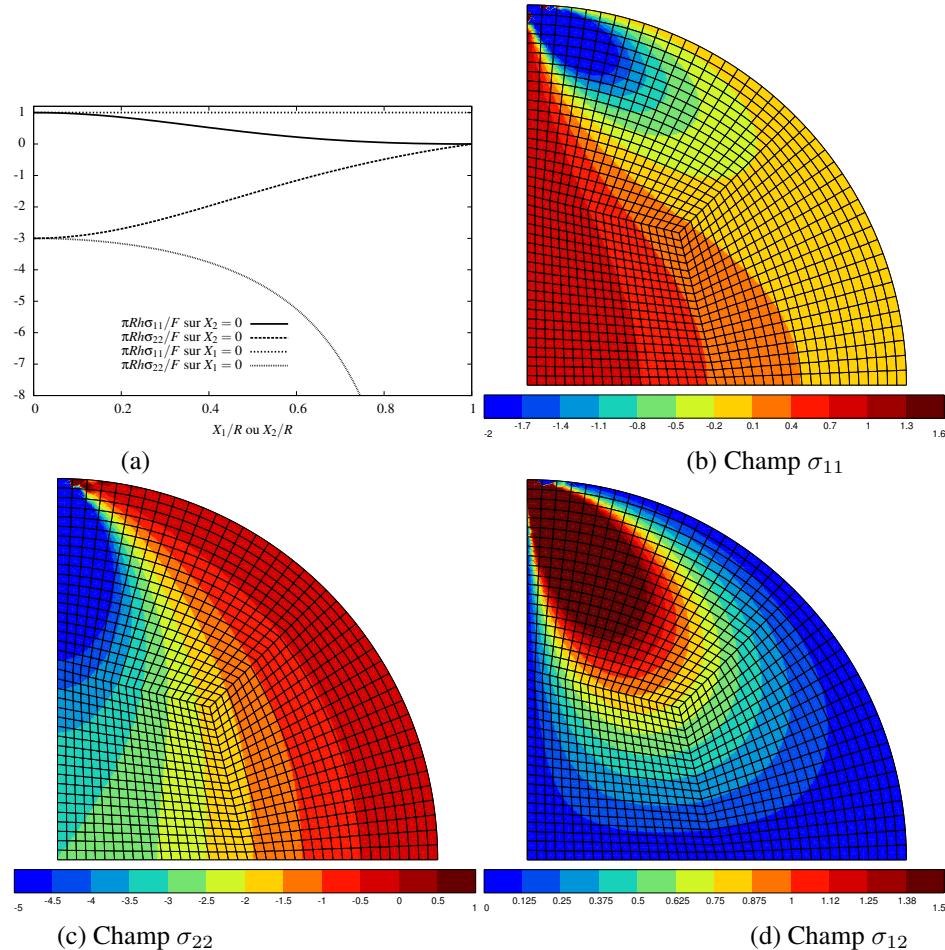
Donner les contraintes le long de la ligne  $X_2 = 0$ .

Commenter ces profils en vous aidant de la figure 29.9 sur laquelle sont tracées ces contraintes ainsi que celles trouvées précédemment.

► On trouve sur cette ligne :

$$\sigma_{11}(X_1, 0) = \frac{F}{\pi Rh} \left( \frac{R^2 - X_1^2}{R^2 + X_1^2} \right)^2, \quad \sigma_{22}(X_1, 0) = -\frac{F}{\pi Rh} \left( \frac{4R^4}{r_1^4} - 1 \right) \quad (29.30)$$

La contrainte  $\sigma_{22}$  reste de compression jusqu'au bord  $X_1 = R, X_2 = 0$ . La contrainte  $\sigma_{11}$  est toujours de traction mais décroissante du centre vers le bord le long de cette ligne.



*Figure 29.9 : (a) Profils des contraintes normalisées le long des diamètres  $X_1 = 0$  et  $X_2 = 0$ , cf. figure 29.7 pour le système de coordonnées. Les abscisses sont limitées à  $X_1 \geq 0$  et  $X_2 \geq 0$  pour des raisons de symétrie. Champs des contraintes (b)  $\sigma_{11}$ , (c)  $\sigma_{22}$  et (d)  $\sigma_{12}$ . Ces contraintes, calculées grâce à la méthode des éléments finis, sont normalisées par  $F/\pi Rh$ . Un quart du disque seulement est représenté pour des raisons de symétrie. Le coin correspond au centre O du disque. Les quelques artefacts visibles près du point  $O_1$  sont dus aux effets de maillage à l'endroit de l'application de la force. Ils dépendent de la finesse du maillage dans cette zone.*

#### *Observation des champs*

On a représenté les champs de contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  et  $\sigma_{12}$  sur les figures 29.9b, c et d, respectivement. A partir de ces champs, on a pu calculer la contrainte principale maximale

et le cisaillement maximal en tout point, sur la figure 29.10. Montrer qu'avec la forme du tenseur des contraintes dont les seules composantes non nulles sont  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ , le cisaillement maximal vaut :

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \quad (29.31)$$

Les observations de photoélasticité de l'essai brésilien conduisent aux lignes isochromes de la figure 29.11. A la lumière des champs de contraintes calculés et représentés sur les figures 29.9 et 29.10, commenter ces résultats expérimentaux.

► Les contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  sont les contraintes principales non nulles le long des diamètres  $X_1 = 0$  et  $X_2 = 0$ . Il y en a une positive et une négative. La troisième est nulle. Les champs tracés révèlent que cette répartition des valeurs propres s'étend à l'ensemble du disque. La trace et le déterminant de la sous-matrice fournissent :

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad \sigma_1 \sigma_3 = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2$$

Avec ces relations, on établit alors que

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2$$

Le cisaillement maximal n'est autre que  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$  ce qui conduit à la relation recherchée (29.31).

Les interférences de photoélasticité sont directement liées à la différence des valeurs propres dans le plan et donc au champ de cisaillement maximal. C'est pourquoi les courbes obtenues ont des formes similaires aux lignes de niveau du cisaillement maximal de la figure 29.10.

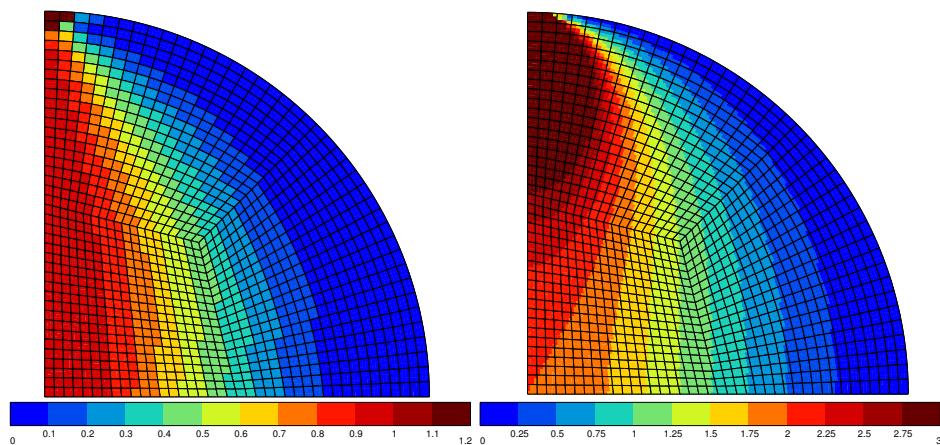


Figure 29.10 : Champs de la contrainte principale maximale (à gauche) et du cisaillement maximal (à droite). Elles sont normalisées par la contrainte de référence  $F/\pi Rh$ .

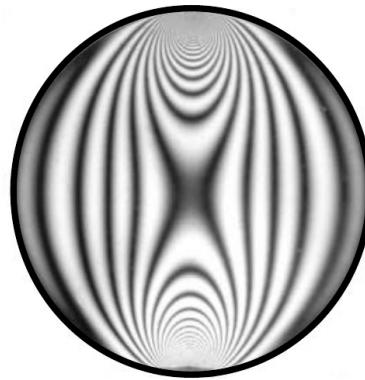


Figure 29.11 : Lignes isochromes obtenues par photoélasticité de l'essai brésilien sur un polymère biréfringent soumis à l'essai de compression diamétrale (d'après (Sadd, 2005)).

#### *Application d'un critère de rupture*

Proposer un critère de rupture fragile, par exemple adapté à la prévision de la rupture du béton pour lequel l'essai brésilien a d'ailleurs été développé à l'origine.

En supposant que la rupture ait lieu dans la zone centrale, hypothèse que l'on tentera de justifier, exprimer la force  $F_c$  à rupture en fonction des caractéristiques de l'essai et du matériau. Vous serez amené à introduire une nouvelle caractéristique importante du matériau, contenue dans le critère proposé.

Quelle est l'orientation de la fissure ? Dessiner l'échantillon rompu.

► Les matériaux fragiles se rompent typiquement lorsque la contrainte principale maximale atteint une valeur critique positive,  $\sigma_c$ . Cette caractéristique importante du matériau est la contrainte à rupture en traction simple. Le champ de contrainte principale  $\sigma_1$  est donné sur la figure 29.10. Si l'on excepte les zones des pôles  $O_1$  et  $O_2$ , sièges d'une singularité des contraintes en  $1/r$  et donc où ces valeurs n'ont pas de réel sens physique, la contrainte principale est maximale et positive tout le long du diamètre  $X_1 = 0$ . Cette contrainte de traction, si elle atteint la valeur critique  $\sigma_c$ , va provoquer la rupture. Dans cette zone diamétrale, la contrainte principale est proche de la contrainte  $\sigma_{11}$  de la figure 29.9b. Nous avons observé que  $\sigma_{11}$  est constante tout au long de ce diamètre. C'est cette contrainte qui va engendrer une fissure perpendiculaire à la direction principale  $X_1$ . L'échantillon est rompu en deux morceaux selon ce diamètre comme sur la figure 29.12. La valeur critique de la force est obtenue lorsque

$$\sigma_{11} = \frac{F_c}{\pi Rh} = \sigma_c \implies F_c = \pi \sigma_c R h$$

#### *Application numérique*

Calculer la force  $F$  à appliquer pour rompre un disque d'épaisseur 1 cm et de rayon 5 cm constitué d'un béton dont la contrainte à rupture en traction est de 3 MPa.

► On trouve  $F_c = 4712$  N

### 29.5.2 Etude du champ des déformations

#### Méthode de calcul du champ des déformations et des déplacements

Indiquer comment calculer les déformations à partir des résultats précédents. On ne demande pas de le faire explicitement car c'est un peu long à écrire. On va se contenter de calculer les déformations diamétrales dans la question suivante.

Indiquer la méthode de construction du champ de déplacement à partir du champ des déformations ainsi obtenues. Il n'est pas demandé de le faire car ce n'est guère possible dans le temps imparti. Pensez-vous que cette démarche pourra aboutir ?

► La loi de Hooke nous permet de passer des contraintes calculées précédemment et données par les expressions (29.25) à (29.27), aux déformations. L'existence du champ des déplacements dépend de la compatibilité des déformations ainsi obtenues. Il faut vérifier si les équations de compatibilité, données en coordonnées cartésiennes, sont satisfaites. Dans le cas favorable, la méthode de construction du champ de déplacement en passant par le calcul des rotations infinitésimales est possible dans le cas des coordonnées cartésiennes. Cela dit, les déformations sont également la superposition des déformations associées aux trois problèmes de la figure 29.8. Il est clair que le problème numéro 3 d'expansion biaxiale conduit indubitablement à un champ de déformation compatible. Le cas du problème de Flamant a été traité au paragraphe 29.1.4. Il y est montré que les déplacements dans le plan peuvent être calculés mais qu'aucun champ  $u_3$  satisfaisant ne peut être déduit. Cela remet en question l'absence de dépendance des champs de contraintes envisagés par rapport à  $X_3$ . On sait que la situation des contraintes planes ne permet pas, en général, d'aboutir à une solution tridimensionnelle acceptable, mais qu'elle fournit, dans certaines conditions, une estimation fructueuse, cf. les discussions des paragraphes 9.3.2 et 26.6, voir également le chapitre 25. C'est le cas ici et on va continuer à étudier la solution, approchée, déterminée précédemment.

#### Déformations diamétrales

Montrer que la déformation  $\varepsilon_{22}$  le long du diamètre  $X_1 = 0$  vaut

$$\varepsilon_{22} = \frac{F}{\pi E R h} \left( 1 - \nu - \frac{4R^2}{R^2 - X_2^2} \right) \quad (29.32)$$

Montrer que la déformation  $\varepsilon_{11}$  le long du diamètre  $X_2 = 0$  vaut

$$\varepsilon_{11} = \frac{F}{\pi E R h} \left( 1 - \nu - \frac{4R^2(X_1^2 - \nu R^2)}{(R^2 + X_1^2)^2} \right) \quad (29.33)$$

Calculer la variation de longueur de ces deux diamètres. Vous allez rencontrer une difficulté dans un des cas. Commenter.

► La déformation le long du diamètre vertical  $X_1 = 0$  se calcule à partir des contraintes (29.30) :

$$\varepsilon_{22}(X_1) = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11})$$

La déformation le long du diamètre horizontal  $X_2 = 0$  se calcule à partir des contraintes (29.30) :

$$\varepsilon_{11}(X_1) = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22})$$

Pour trouver l'expression (29.33), on utilise le fait que

$$(R^2 - X_1^2)^2 = (R^2 + X_1^2)^2 - 4R^2X_1^2$$

La variation de longueur entre deux points du diamètre vertical avec  $X_2 = \pm a/R$  est fournie par la différence :

$$\begin{aligned} u_2(0, a) - u_2(0, -a) &= \int_{-a}^a u_{2,2} dX_2 = \int_{-a}^a \varepsilon_{22} dX_2 \\ &= \frac{F}{\pi E Rh} \left( (1-\nu)2a - 2R \int_{-a/R}^{a/R} \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \right) \\ &= \frac{F}{\pi E Rh} \left( (1-\nu)2a + 4R \log \frac{1-a/R}{1+a/R} \right) \end{aligned} \quad (29.34)$$

Cette expression n'a pas de limite quand  $a \rightarrow R$ . Cela est dû à la singularité des champs aux points  $O_1$  et  $O_2$ . Le modèle ne permet pas de prévoir la réduction diamétrale correspondante.

La variation de longueur entre deux points du diamètre horizontal avec  $X_1 = \pm a/R$  est fournie par la différence :

$$\begin{aligned} u_1(a, 0) - u_1(-a, 0) &= \int_{-a}^a u_{1,1} dX_2 = \int_{-a}^a \varepsilon_{11} dX_1 \\ &= \frac{F}{\pi E Rh} \left( (1-\nu)2a - 4R \int_{-a/R}^{a/R} \frac{u^2 - \nu}{(1+u)^2} du \right) \\ &= \frac{F}{\pi E Rh} \left( 2(1-\nu)(a - 2R \arctan \frac{a}{R}) + 4R^2(1+\nu) \frac{a}{R^2 + a^2} \right) \end{aligned}$$

En prenant  $a = R$ , on obtient la variation relative du diamètre horizontal :

$$\frac{u_1(R, 0) - u_1(-R, 0)}{2R} = \frac{\nu F}{\pi E Rh}$$

On voit qu'il s'agit d'une augmentation du diamètre dès que  $\nu > 0$ .

#### *Identification des modules d'élasticité*

Calculer les déformations  $\varepsilon_{11}^O$  et  $\varepsilon_{22}^O$  au centre  $O$ .

A partir des expressions des déformations au centre du disque, établir une condition nécessaire permettant de respecter le contexte infinitésimal.

Montrer que la mesure de ces déformations, avant rupture, permet de déterminer expérimentalement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. Exprimer ces modules en fonction de la charge  $F$  appliquée, des caractéristiques du disque et des déformations mesurées dans la zone centrale.

Comment mesurer ces déformations expérimentalement ?

► Les déformations au centre se déduisent des contraintes (29.29)

$$\boxed{\varepsilon_{11}^O = \frac{(1+3\nu)F}{\pi E Rh}, \quad \varepsilon_{22}^O = -\frac{(3+\nu)F}{\pi E Rh} = -\frac{3+\nu}{1+3\nu} \varepsilon_{11}^O} \quad (29.35)$$

Elles peuvent être mesurées de manière classique grâce à des jauge de déformations collées à cet endroit. Aujourd’hui on a également recours à la méthode appelée DIC (*Digital Image Correlation*) en filmant, au cours de l’essai, la surface de l’échantillon marquée par une réseau de lignes, de points, une peinture de motifs aléatoires noirs et blancs ou le contraste naturel, comme dans (Han et al., 2018)<sup>11</sup>. Cette méthode a l’avantage de fournir non seulement une valeur locale mais également le champ bidimensionnel complet des déplacements.

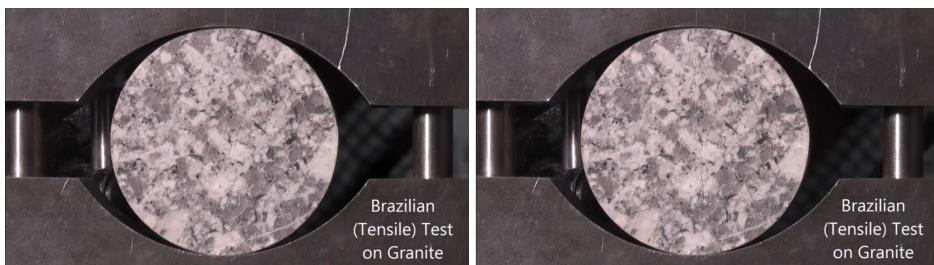
Ces déformations doivent rester suffisamment petites ce qui exige que la force appliquée soit telle que

$$\frac{F}{ERh} \ll 1$$

On peut inverser les relations précédentes pour exprimer les modules d’élasticité en fonction des caractéristiques de l’expérience et des déformations mesurées :

$$E = -\frac{8F}{\pi Rh(\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{22})}, \quad \nu = -\frac{3\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11} + 3\varepsilon_{22}}$$

ce qui autorise une identification de ces paramètres intrinsèques du matériau à partir des mesures.



*Figure 29.12 : Réalisation de l’essai brésilien sur une carotte de granite : état initial (à gauche) et rompu (à droite). La fissure à droite est très fine et visible en zoomant. Le film de l’essai est consultable sur YouTube : <https://www.youtube.com/watch?v=Is0N2dzJn6w>.*

### 29.5.3 Considération de conditions aux limites plus réalistes

L’application d’une force concentrée en  $O_1$  et en  $O_2$  est une idéalisation de l’essai brésilien qui entraîne certaines difficultés de comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. Pour s’approcher de conditions plus réalistes, on propose de passer de l’application de forces concentrées à des forces distribuées sur une surface.

#### Charge distribuée sur un arc d’angle $\alpha$

On remplace la force ponctuelle considérée précédemment par une distribution de pression  $p$  constante imposée sur les arcs de cercle d’angle  $2\alpha$  représentés sur la figure 29.13. Quelle est la force  $F$  résultante associée à la pression  $p$  appliquée sur l’arc centré en  $O_1$  ?

11. Noter que les expressions données par (Han et al., 2018) sont fausses pour le cisaillement. Voir également le document en ligne :

<http://eduscol.education.fr/sti/sites/eduscol.education.fr.sti/files/ressources/pedagogiques/5746/5746-application-de-la-correlation-dimages-identification-de-parametres-elastiques-ens-v2.pdf>

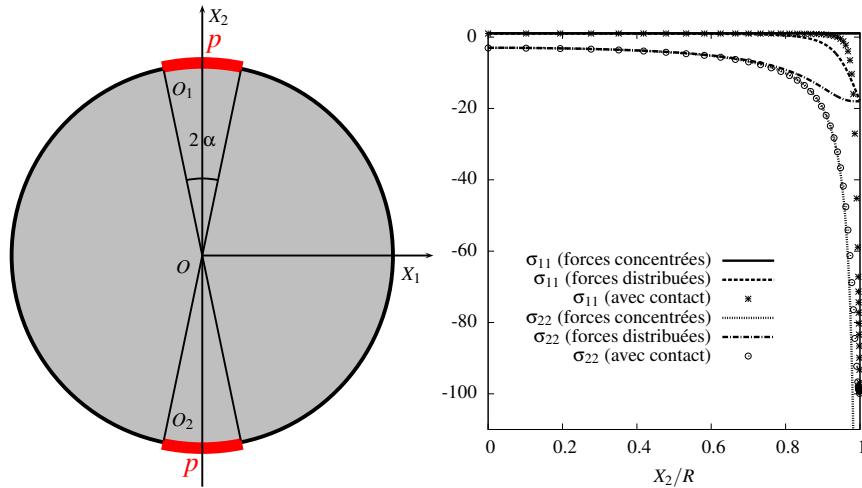


Figure 29.13 : A gauche : disque soumis à une pression constante  $p$  sur les arcs de cercle d'angle  $2\alpha$  représentés par un trait épais rouge. A droite : Comparaison des profils de contraintes normalisées le long du diamètre  $X_1 = 0$  pour trois types de conditions aux limites permettant de s'approcher des conditions de plus en plus réalistes de l'essai brésilien : forces concentrées ou pression distribuée (solutions analytiques trouvées dans le problème) et prise en compte du contact disque/plateau (calcul par éléments finis).

La résolution de ce problème peut se faire grâce à la superposition des solutions associées à des forces élémentaires connues d'après le travail précédent. On ne demande pas de le faire. On se contente de donner ici les expressions des contraintes<sup>12</sup> le long du diamètre  $X_1 = 0$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{F}{\pi Rh\alpha} \left( \frac{R^2(R^2 - X_2^2) \sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2 \cos 2\alpha + X_2^4} - \arctan \left( \frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2} \tan \alpha \right) \right) \\ \sigma_{22} &= -\frac{F}{\pi Rh\alpha} \left( \frac{R^2(R^2 - X_2^2) \sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2 \cos 2\alpha + X_2^4} + \arctan \left( \frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2} \tan \alpha \right) \right)\end{aligned}$$

Comparer ce champ à celui trouvé au paragraphe 29.5.1 en extrayant deux faits remarquables. On pourra s'aider de la figure 29.14.

Exprimer ces contraintes au centre  $O$ .

Vérifier la cohérence avec les expressions trouvées au paragraphe 29.5.1.

Calculer la déformation  $\varepsilon_{22}$  le long du diamètre  $X_1 = 0$ .

Etes-vous en mesure de calculer la réduction diamétrale ?

► La pression appliquée  $p$  correspond à la force  $F = 2phR \sin \alpha$ .

Par rapport au champ de contrainte trouvé précédemment, on remarque que la contrainte  $\sigma_{11}$  n'est plus constante. C'est une contrainte de traction sauf près des zones où la pression est appliquée. Il est remarquable que la contrainte  $\sigma_{22}$  n'est pas singulière en  $X_2 = \pm R$ . En effet, les expressions précédentes possèdent une limite finie lorsque  $X_2 \rightarrow R$  :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = -\frac{F}{2Rh\alpha}$$

12. Elles sont issues de la référence (Li and Wong, 2013).

Elles tendent vers l'infini lorsque  $\alpha \rightarrow 0$  et qu'on se rapproche de l'application d'une force concentrée. Les contraintes au centre valent :

$$\sigma_{11} = \frac{F}{\pi Rh} \left( \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - 1 \right), \quad \sigma_{22} = -\frac{F}{\pi Rh} \left( \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} + 1 \right)$$

Elles tendent vers les valeurs (29.29) lorsque  $\alpha \rightarrow 0$ , comme il se doit.

La déformation  $\varepsilon_{22} = (1 - \nu)\sigma_{22}/E - \nu\sigma_{11}/E$  se calcule à partir des contraintes précédentes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= -\frac{F}{\pi ERh\alpha} \left( (1 + \nu) \frac{R^2(R^2 - X_2^2) \sin 2\alpha}{R^4 - 2R^2X_2^2 \cos 2\alpha + X_2^4} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \arctan \left( \frac{R^2 + X_2^2}{R^2 - X_2^2} \tan \alpha \right) \right) \end{aligned}$$

La contraction diamétrale se calcule en intégrant la déformation  $\varepsilon_{22}$  le long du diamètre  $X_1 = 0$  :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi Rh\alpha}{F} (u_2(O_2) - u_2(O_1)) &= \int_{-1}^1 (1 + \nu) \frac{(1 - u^2) \sin 2\alpha}{1 - 2u^2 \cos 2\alpha + u^4} \\ &\quad + (1 - \nu) \arctan \left( \frac{1 + u^2}{1 - u^2} \tan \alpha \right) du \end{aligned}$$

Ces deux intégrales ont le mérite d'être convergentes de sorte qu'il est loisible de calculer une contraction diamétrale finie en fonction de la force appliquée. C'est un progrès par rapport à la solution du problème avec des forces concentrées qui conduit à une divergence du déplacement relatif, cf. paragraphe 29.5.2.

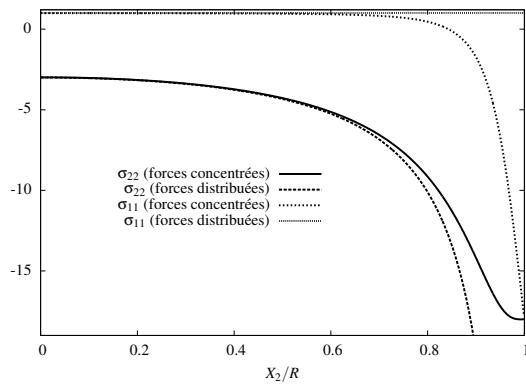
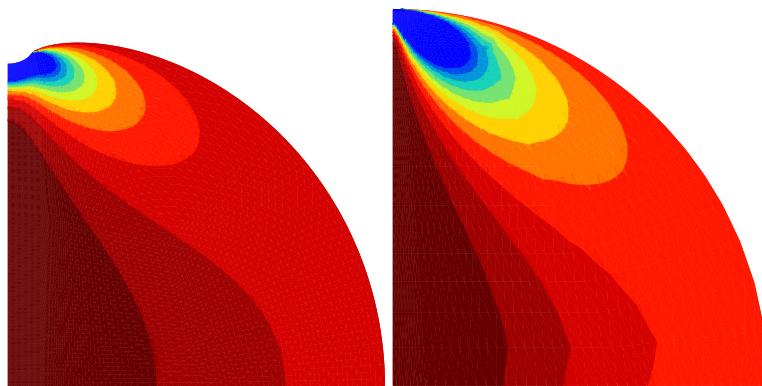


Figure 29.14 : Profils des contraintes le long du diamètre  $X_1 = 0$  obtenus en appliquant au disque des efforts concentrés  $F$  ou en distribuant ces efforts grâce à une pression  $p$  appliquée sur deux arcs d'angle au centre  $2\alpha = 10^\circ$ . Les contraintes sont normalisées par  $F/\pi Rh$ .



*Figure 29.15 : Comparaison qualitative des distributions de la contrainte  $\sigma_{11}$  obtenue par éléments finis pour deux types de conditions aux limites : pression imposée sur un secteur de  $10^\circ$  (à gauche) et contact avec une plaque rigide (à droite). A gauche, la déformée du disque a été amplifiée d'un facteur 2000 pour montrer que la surface d'application de la pression n'est pas plane, contrairement au cas avec contact.*

#### *Prise en compte du contact*

L'application de la charge lors de l'essai brésilien résulte bien plutôt du contact entre une plaque rigide, plane (comme sur la figure 29.7a) ou courbe comme sur l'expérience de la figure 29.12. La surface de contact entre le corps rigide et l'échantillon est une inconnue du problème. Autrement dit, l'angle  $\alpha$  de la question précédente n'est pas une donnée du problème réel. En outre, les efforts de contact diffèrent d'une pression uniforme. Pour déterminer toutes ces inconnues il faut recourir à la théorie de Hertz du contact, non présentée ici. Il est possible également de réaliser un calcul par éléments finis prenant en compte le contact entre la plaque et l'échantillon. La surface de contact est initialement nulle et augmente progressivement avec la charge appliquée. C'est un problème non linéaire en raison des conditions de contact. Le contact peut être supposé glissant ou non glissant en première approximation. Le frottement est une question importante supplémentaire qui doit également être prise en compte pour une analyse plus fine (Markides and Kourkoulis, 2013). Le frottement introduit des contraintes de cisaillement s'ajoutant aux contraintes normales sur la surface de l'échantillon en contact avec la plaque. Les contraintes  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  le long du diamètre  $X_1 = 0$  sont données sur la figure 29.13b et comparées aux estimations précédentes. Elles ont été obtenues grâce à un calcul par éléments finis prenant en compte le contact d'une plaque (plane) sans frottement avec l'échantillon. Commenter les différences entre les prévisions des différents modèles.

► Les solutions analytiques des deux problèmes traités représentent une bonne description du champ solution correspondant à l'application d'une pression constante appliquée (cf. (Markides and Kourkoulis, 2013)), à condition que la rupture ne s'amorce pas dans la zone de contact. Une rupture à partir de la zone de contact peut se produire lorsque le frottement est non négligeable. La prise en compte du contact conduit à des contraintes de compression plus fortes dans la zone de contact ( $X_2 = R$ ) par rapport à la solution en pression appliquée. Les champs de contrainte  $\sigma_{11}$  dans le disque dans le cas d'une pression appliquée et dans le cas du contact sont représentées sur la figure 29.15. Ils sont qualitativement assez proches, les différences quantitatives étant marquées dans la zone d'application des efforts.



## 30 Efforts volumiques : gravitation et électromagnétisme

### 30.1 Dimensionnement d'un barrage-poids

On se propose d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations, l'équilibre d'un barrage constitué d'un matériau élastique, homogène et isotrope<sup>1</sup>. Plusieurs critères de dimensionnement seront envisagés pour aboutir finalement à une optimisation des caractéristiques du barrage.

La géométrie de cette structure est décrite sur la figure 30.1. Il s'agit d'un barrage poids<sup>2</sup> de forme prismatique de génératrice parallèle à la direction 3. Le repérage est cartésien orthonormé. La direction  $X_1$  est la verticale orientée vers le bas dans le sens de la gravité. Les subsections, perpendiculaires à l'axe  $X_3$ , sont toutes équivalentes et la figure 30.1 montre la subsection centrale à la cote  $X_3 = 0$ , avec le repère de la figure 30.1 (à droite). Le barrage est de hauteur  $H$  et de longueur  $L$ . La forme triangulaire de la subsection est caractérisée par les angles  $\alpha$  et  $\beta$ , choisis positifs. A toutes fins utiles, on notera :

$$u = \tan \alpha, \quad v = \tan \beta$$

Le chargement est associé aux deux facteurs suivants : d'une part, la pesanteur propre s'exerçant sur le matériau constitutif de masse volumique  $\rho$ ; d'autre part, l'effet de pression dû à la mise en eau (masse volumique  $\rho_{\text{eau}}$ ) jusqu'à affleurement. La pression atmosphérique agissant sur le parement aval est, quant à elle, négligée. L'état initial (hors pesanteur !) est naturel et l'évolution isotherme.

On ne prendra pas en compte les effets des écoulements internes de l'eau par infiltration dans les interstices du barrage, sauf mention du contraire<sup>3</sup>.

On considère un encastrement à la base du barrage (fondation), correspondant à des déplacements donnés nuls en  $X_1 = H$ . On suppose également qu'en raison de la rigidité importante des blocs rocheux latéraux sur lesquels s'appuie le barrage, et de la longueur  $L$  suffisamment grande par rapport à  $H$ , les faces  $X_3 = \pm L/2$  ne subissent aucun déplacement latéral  $u_3 = 0$ . Cette condition nous place dans le contexte des déformations planes, c'est-à-dire que la condition  $u_3 = 0$  s'étend à tous les points du barrage et que les champs de contraintes et de déformations ne dépendent pas de  $X_3$ .

Pour les applications numériques demandées dans le problème, on considérera que le barrage est en béton renforcé de comportement élastique linéarisé, avec un module de Young,  $E = 50 \text{ GPa}$ , un coefficient de Poisson,  $\nu = 0.2$  et une masse volumique  $\rho = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$ . De plus  $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Enfin, l'accélération de la pesanteur est supposée constante égale à  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$ .

On prendra la hauteur  $H = 100 \text{ m}$ .

#### 30.1.1 Critère de non glissement du barrage

Le barrage poids transmet la poussée de l'eau à la fondation par cisaillement de celle-ci, principalement par frottement. Le poids de l'ouvrage doit être suffisant pour assurer le non glissement du barrage sur sa fondation. Cette condition représente une vérification

1. Ce problème est largement inspiré de l'examen posé par M. Amestoy en 1991, cf. (Amestoy, 2004) qui met en valeur la condition de (Lévy, 1895). On trouvera également une discussion de ce calcul de barrage chez (Bellet, 1990).

2. par opposition aux barrages voûtes dont la forme n'est pas prismatique.

3. Leur modélisation représente une difficulté majeure dans le calcul des barrages poids. Cette mécanique des milieux poreux n'est pas abordée dans ce problème.

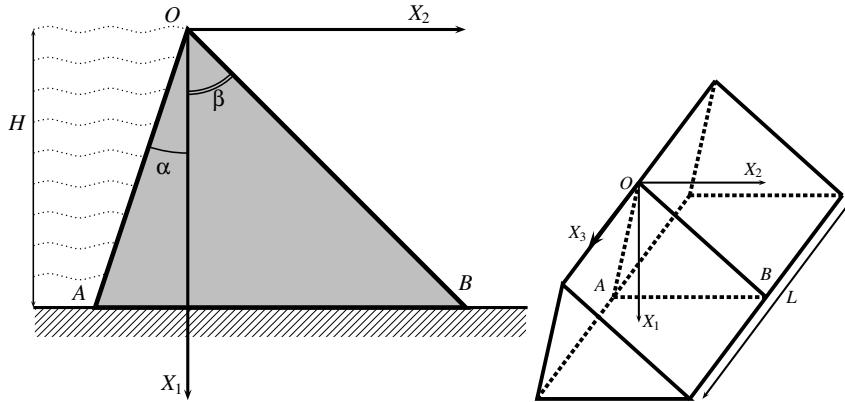


Figure 30.1 : Coupe bidimensionnelle du barrage poids étudié. Le parement amont (resp. aval) désigne la partie  $OA$  (resp.  $OB$ ) du barrage. Les lignes pointillées ondulées représentent l'eau du barrage. La hauteur du barrage est  $H$ . A droite : Le barrage en perspective cavalière : repère  $(X_1, X_2, X_3)$ , subsection  $OAB$  en  $X_3 = 0$ . La longueur du barrage est  $L$ .

fondamentale à effectuer : le glissement sur la fondation est la première cause de rupture des barrages poids.

Calculer la résultante des forces agissant sur le parement amont.

Calculer le poids du barrage.

Calculer la force tangentielle résultante s'exerçant sur la fondation.

Exprimer la condition de non glissement en faisant intervenir le coefficient de frottement de Coulomb. Il est question ici de la condition globale portant sur les résultantes des efforts. Une étude du glissement local n'est pas envisagée dans ce problème.

Les résultats seront donnés en fonction des paramètres géométriques du barrage et de l'accélération de la pesanteur.

Lorsque  $\alpha = 0$ , en déduire une condition sur  $v$ . Evaluer cette condition pour un coefficient de frottement égal à 0.8.

► La résultante des efforts sur le parement amont est le vecteur :

$$\underline{R}_{OA} = \int -p\underline{n} dS = \int p(u\underline{e}_1 + \underline{e}_2) dX_1 dX_3$$

avec  $p = \rho_{\text{eau}} g X_1$ . Finalement,  $\underline{R}_{OA} = \rho_{\text{eau}} g L \frac{H^2}{2} (u\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$ .  
Le poids du barrage est

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \rho g H^2 (u + v) L \underline{e}_1$$

La force tangentielle exercée par le barrage sur la fondation est donc donnée par la composante selon la direction 2 de  $\underline{R}_{OA}$  :

$$T = \rho_{\text{eau}} g L \frac{H^2}{2}$$

La condition de non glissement est

$$T < \mathcal{C}P \implies \frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho(u+v) + \rho_{\text{eau}}u} < \mathcal{C}$$

où  $\mathcal{C}$  est le coefficient de frottement de Coulomb.  
Si  $u = 0$ , l'angle  $\beta$  doit être suffisamment grand :

$$v > \frac{\rho_{\text{eau}}}{\mathcal{C}\rho}$$

L'angle minimal obtenu pour  $\mathcal{C} = 0.8$  est  $\beta = 27^\circ$ .

### 30.1.2 Etude du barrage dans le cas $\alpha = 0$

Cette partie du problème est consacrée au cas d'un parement amont vertical :  $\alpha = u = 0$ .

#### Conditions aux limites exhaustives

Donner explicitement l'ensemble des conditions aux limites du problème posé sur la subsection plane OAB.

Par ailleurs, on commenterà également les conditions sur les faces  $X_3 = \pm L/2$ .

► Le problème est posé en conditions mixtes d'efforts et déplacements donnés :

- Sur OA,  $\underline{t} = \underline{t}^d = -p\underline{n} = \rho_{\text{eau}}gX_1\underline{e}_2$ .
- Sur OB,  $\underline{t} = \underline{t}^d = 0$ .
- Sur AB,  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ .

Les conditions en  $X_3 = \pm L/2$  ne sont pas toutes explicitées. On a  $u_3 = 0$  mais rien n'est dit pour les deux autres directions. Comme la longueur du barrage est prise suffisamment grande par rapport à sa hauteur, on peut appliquer le principe de Saint-Venant et se contenter d'indiquer le torseur des efforts selon ces deux directions. On peut en particulier négliger les résultantes des forces selon 1 et 2 engendrées par l'interaction avec les blocs rocheux latéraux. Ces forces induiront un effet de bord aux extrémités du barrage.

#### Conditions d'équilibre local

Exprimer les conditions d'équilibre en tout point intérieur de la subsection OAB en fonction des composantes du tenseur des contraintes.

► Il s'agit de la première loi de Cauchy exprimée en coordonnées cartésiennes dans le cas statique et en présence d'efforts de pesanteur :

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + \rho g = 0 \quad (30.1)$$

$$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = 0 \quad (30.2)$$

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} = 0 \quad (30.3)$$

#### Forme proposée pour les contraintes

Dans le contexte des déformations planes, les composantes de contraintes recherchées, dans la base cartésienne orthonormée utilisée, sont indiquées ci-dessous :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_{12} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1) + \sigma_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (30.4)$$

Ces composantes de contraintes sont recherchées de la forme suivante :

$$\sigma_{11} = aX_1 + bX_2 \quad (30.5)$$

$$\sigma_{12} = cX_1 + dX_2 \quad (30.6)$$

$$\sigma_{22} = eX_1 + fX_2 \quad (30.7)$$

$$\sigma_{33} = h(X_1, X_2) \quad (30.8)$$

où les 6 constantes  $a, b, c, d, e, f$  caractérisant les profils linéaires recherchés ont été introduites, ainsi que la fonction  $h$  de deux variables.

Ecrire les conditions d'équilibre local en fonction de ces constantes.

Ecrire les conditions supplémentaires portant sur ces constantes et résultant de l'application des conditions aux limites sur OA et OB.

Résoudre enfin le système linéaire par rapport à  $a, b, c, d, e, f$ .

Constater que les contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  trouvées ne dépendent pas des propriétés élastiques du matériau constitutif du barrage.

► Les deux premières conditions d'équilibre local fournissent :

$$a + d = -\rho g, \quad c + f = 0$$

Les conditions aux limites sur OA, i.e. pour  $X_2 = 0$ , fournissent, quant à elles :

$$c = 0, \quad e = -\rho_{eau}g$$

Les conditions sur OB, i.e. pour  $X_2 = vX_1$ , donnent

$$-\sigma_{11} \sin \beta + \sigma_{12} \cos \beta = 0, \quad -\sigma_{12} \sin \beta + \sigma_{22} \cos \beta = 0 \quad (30.9)$$

Elles deviennent :

$$a + bv - d = 0, \quad -dv^2 + e = 0$$

Finalement, on obtient :

$$a = -\rho g + \rho_{eau}gv^{-2}, \quad b = \rho gv^{-1} - 2\rho_{eau}gv^{-3}, \quad c = 0$$

$$d = -\rho_{eau}gv^{-2}, \quad e = -\rho_{eau}g, \quad f = 0$$

Ces calculs montrent que l'analyse statique du problème du barrage suffit à déterminer entièrement les contraintes qui s'y établissent. Il faut toutefois terminer la résolution du problème avant de statuer sur la pertinence de la forme proposée.

*Calculer finalement  $\sigma_{33}$*

► Il faut pour cela utiliser la loi de Hooke et la condition de déformation plane :

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} \text{trace } \boldsymbol{\sigma} = 0$$

On en déduit

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu((a+e)X_1 + (b+f)X_2) \quad (30.10)$$

### *Calcul des déformations*

Calculer les composantes des déformations au sein du barrage engendrées par le champ de contraintes précédemment déterminées.

S'agit-il d'un champ de déformations compatible ?

► Les composantes de déformation sont également linéaires par rapport aux coordonnées  $X_1$  et  $X_2$ , en vertu de la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{11} = AX_1 + BX_2, \quad \varepsilon_{12} = DX_2, \quad \varepsilon_{22} = FX_1 + GX_2 \quad (30.11)$$

avec

$$A = \frac{(1 - \nu^2)a - \nu(1 + \nu)e}{E}, \quad B = \frac{(1 - \nu^2)b}{E}, \quad D = \frac{1 + \nu}{E}d$$

$$F = \frac{(1 - \nu^2)e - \nu(1 + \nu)a}{E}, \quad G = -\frac{\nu(1 + \nu)b}{E}$$

La linéarité du champ assure que les conditions de compatibilité sont toutes satisfaites.

### *Champ de déplacements*

Déterminer les composantes du champ de déplacements.

On ne cherchera pas à ce stade à identifier les constantes d'intégration.

► On construit le champ de déplacement par la méthode systématique disponible dans le contexte cartésien orthonormé. On commence par déterminer les rotations infinitésimales en intégrant la relation  $\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}$ . On trouve :

$$\omega_{12} = BX_1 + (D + F)X_2, \quad \omega_{23} = \omega_{31} = 0$$

auxquelles il faut ajouter des rotations infinitésimales de corps rigide.

Le déplacement s'obtient alors en intégrant  $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$  :

$$u_1 = \frac{A}{2}X_1^2 + BX_1X_2 + \frac{1}{2}(2D - F)X_2^2, \quad u_2 = -\frac{B}{2}X_1^2 + FX_1X_2 + \frac{G}{2}X_2^2 \quad (30.12)$$

auxquels s'ajoutent les translations et rotations infinitésimales de corps rigide.

### *Respect du contexte infinitésimal*

En examinant successivement les composantes  $\varepsilon_{12}$  et  $\varepsilon_{11}$ , établir deux conditions nécessaires au respect du contexte infinitésimal en fonction des caractéristiques du barrage.

On vérifiera que ces conditions sont remplies avec les valeurs considérées dans le problème.

► On doit garantir que

$$|\varepsilon_{12}| = |DX_2| \leq |DHv| = \frac{1 + \nu}{E}|d|Hv = \left| \frac{1 + \nu}{E} \rho_{\text{eau}} g \frac{H}{v} \right| \ll 1$$

qui fournit la condition nécessaire :

$$\rho_{\text{eau}} g \frac{H}{v} \ll \frac{2E}{3}$$

Cette relation indique que le barrage ne doit pas être trop haut à cause de la pression exercée par l'eau, et pas trop mince bien entendu. La condition  $v \gg 3\rho_{\text{eau}}gH/2E \simeq 3 \times 10^{-5}$  est largement garantie même avec des valeurs très petites de  $\beta$ .

On considère ensuite  $|\varepsilon_{11}| = |AX_1 + BX_2| \leq (|A| + |Bv|)H$ . En majorant généralement chacun des termes, on obtient la condition :

$$\frac{(\rho g - 2\rho_{\text{eau}}g/v^2)H}{E} \ll 1$$

qui exige que le poids du barrage soit suffisant. Ce terme est de l'ordre de  $10^{-5}$  pour un angle  $\beta$  de  $40^\circ$ .

### *Qualité de la solution approchée*

Montrer finalement que le champ de déplacement trouvé n'est pas acceptable.

Les contraintes et déformations trouvées représentent toutefois une bonne approximation de la solution du problème. Pour le voir, des calculs par éléments finis ont été réalisés pour obtenir une solution numérique du problème aussi précise qu'on le souhaite, pour des caractéristiques particulières du barrage.

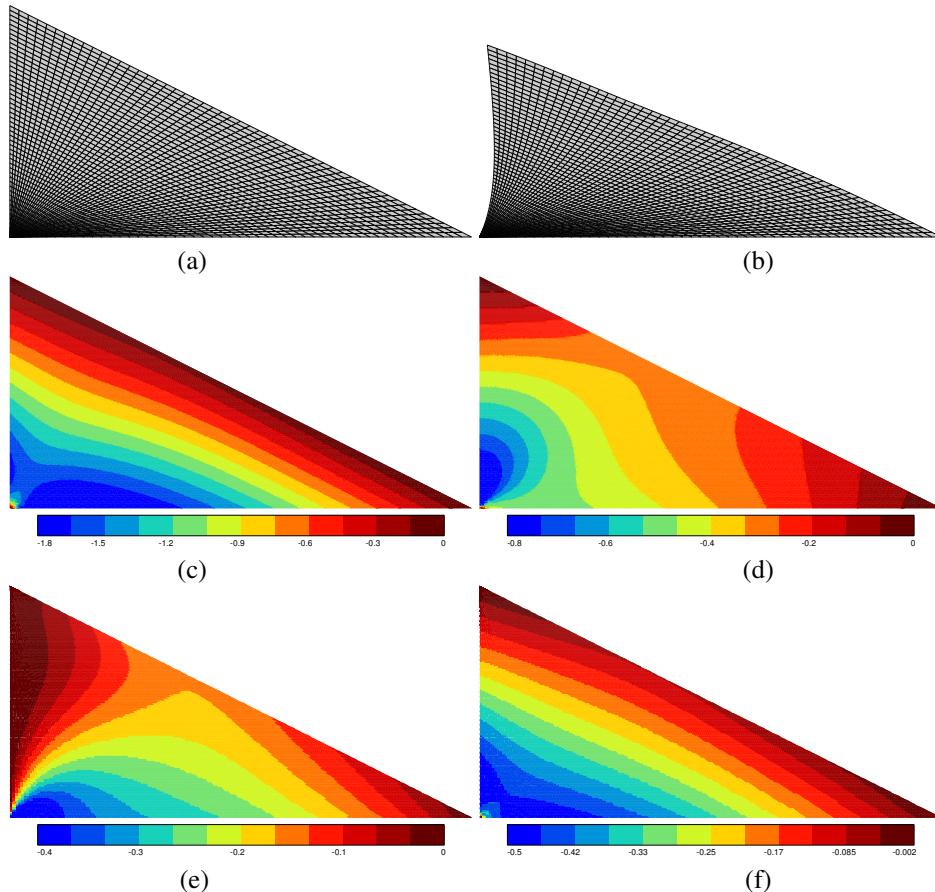
Commenter les cartes de contraintes de la figure 30.2.

Les contraintes, déformations et déplacements sont tracés le long des lignes des parements amont et aval sur la figure 30.3. Discuter la qualité de la solution approchée du problème du barrage construite précédemment.

► Pour identifier complètement le champ des déplacements, il reste à vérifier les conditions d'encastrement en  $X_1 = H$ . C'est là que le bâ blesse. En effet, s'il est possible de fixer la translation de corps rigide de telle sorte que le déplacement du point A soit nul, les rotations infinitésimales de corps rigide ne permettent pas d'annuler les termes quadratiques des expressions (30.12) tout le long de la ligne  $X_1 = H$ . C'est une profonde déception. Toutefois, il s'avère que la solution trouvée est de bonne qualité. Le principe de Saint-Venant ne peut pas être invoqué ici pour justifier ce fait car la zone d'encastrement ne possède pas de dimension négligeable devant les autres. Seule une analyse numérique permet dès lors de trancher, au moins pour quelques configurations particulières du barrage (c'est l'inconvénient de l'approche numérique, même si une étude numérique paramétrique est bien sûr possible).

La déformée de la figure 30.2(b) illustre bien les effets conjoints du poids du barrage lui-même et de l'action de l'eau par rapport à la configuration de référence dans un état naturel 30.2(a). Les cartes de contraintes de la figure 30.2 montrent que les composantes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  sont quasi-linéaires dans un voisinage relativement grand des points O et B. En particulier, au voisinage de O, la composante  $\sigma_{22}$  (resp.  $\sigma_{12}$ ) est proportionnelle à la coordonnée  $X_1$  (resp.  $X_2$ ), comme attendu d'après la solution trouvée dans les paragraphes précédents :  $\sigma_{12} = dX_2$ ,  $\sigma_{22} = eX_1$ .

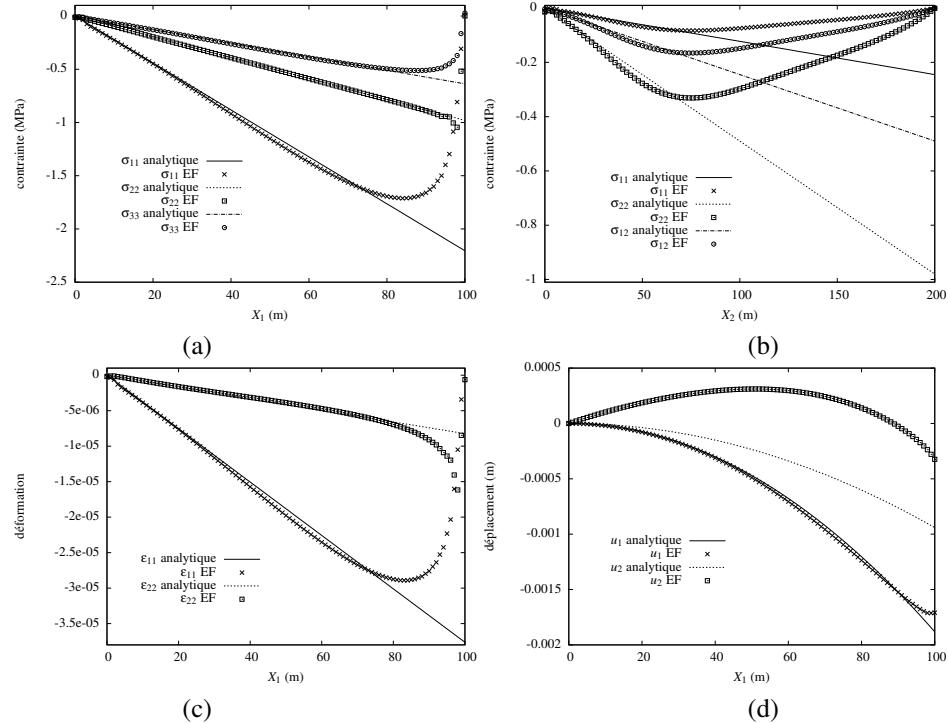
La différence principale entre les solutions analytique et numérique réside dans la forte concentration de contrainte située au point A, qui perturbe le champ linéaire dans un large voisinage du point A. Une singularité des contraintes est présente en A, en conséquence de la condition d'encastrement de A alors même qu'une pression s'applique sur le parement aval dans son voisinage. L'existence de cette singularité peut être mise en évidence grâce au calcul par éléments finis en utilisant des maillages de plus en plus raffinés autour du point A. La figure 30.4 donne le profil de  $\sigma_{11}$  le long du parement amont pour deux discrétisations différentes. On voit que la contrainte  $\sigma_{22}$  augmente et devient positive lorsqu'on s'approche suffisamment près de A. La contrainte de traction n'a pas de limite en A. Cela signifie d'une fissure apparaît nécessairement à cet endroit. La singularité mérite une étude théorique spécifique. Elle peut être relâchée dans la pratique en évitant la présence



*Figure 30.2 : Résultats de calculs par éléments finis du barrage : (a) maillage par éléments finis (état naturel sans pesanteur), (b) déformée du barrage (déplacements  $\times 10000$ ), (c) champ de contrainte  $\sigma_{11}$ , (d) champ de contrainte  $\sigma_{22}$ , (e) champ de contrainte  $\sigma_{12}$ , (f) champ de contrainte  $\sigma_{33}$ . Les valeurs sont données en MPa. Les caractéristiques du barrage sont ici  $H = 100$  m et  $u = 0$ ,  $v = 2$ , correspondant à un angle  $\beta = 63^\circ$ .*

d'un angle droit en A. Au contraire, on n'observe pas de singularité en B. Les courbes de la figure 30.3 confirment la bonne performance de la solution analytique proposée. Celle-ci constitue une bonne approximation de la solution réelle excepté au voisinage du point A et du point B. Les contraintes le long du parement aval sont surestimées, en valeur absolue, dès qu'on s'éloigne du point O.

La figure 30.3(d) montre que le déplacement  $u_1$  coïncide avec le champ trouvé pour lequel le mouvement de corps rigide a été fixé à zéro. Par contre la composante  $u_2$  trouvée numériquement n'est pas une parabole centrée en O. Elle présente un terme linéaire en  $X_1$  supplémentaire qui correspond à la rotation infinitésimale  $rX_1$  qui n'a pas pu être fixée par les conditions aux limites dans la solution analytique.



*Figure 30.3 : Résultats de calculs par éléments finis du barrage : (a) tracé des contraintes le long du parement amont (droite d'équation  $X_2 = 0$ ) ; (b) tracé des contraintes le long du parement aval (droite d'équation  $X_2 = 2X_1$ ) ; (c) tracé des déformations le long du parement amont ; (d) profils des déplacements le long du parement amont (la translation de corps rigide a été fixée de telle sorte que le déplacement du point O soit nul). Les caractéristiques du barrage sont les mêmes que pour la figure 30.2.*

#### Critère de Mohr-Coulomb

Le béton est un matériau fragile dont le domaine d'élasticité peut être décrit par le critère de Mohr-Coulomb :

$$f(\sigma_n, \tau) = |\tau| + \sigma_n \tan \phi - C < 0 \quad (30.13)$$

où  $\sigma_n$  et  $\tau$  sont respectivement la contrainte normale et la contrainte tangentielle sur une facette de normale donnée au point considéré. Ce critère d'endommagement ou de rupture fait intervenir deux paramètres : la cohésion  $C$  et l'angle de frottement interne  $\phi$ . Ces paramètres sont déterminés expérimentalement. Tant que  $f(\sigma_n, \tau) < 0$  pour toutes les facettes possibles, la réponse du matériau reste élastique linéaire. La limite d'élasticité est atteinte lorsque, dans le plan  $(\sigma_n, \tau)$ , dit plan de Mohr, le grand cercle de Mohr vient tangenter la droite d'équation  $\tau + \sigma_n \tan \phi - C = 0$  (avec  $\tau > 0$ ).

Comparer ce critère aux critères de plasticité et/ou de rupture que vous connaissez.

Calculer la limite d'élasticité en traction selon ce critère en fonction des paramètres du modèle.

Interpréter ce critère à la lumière de ce qu'évoque pour vous le nom de Coulomb.

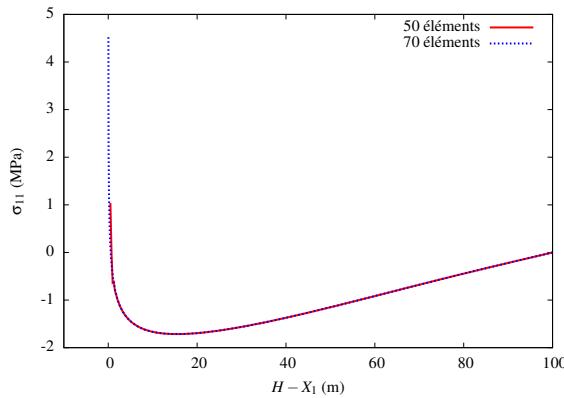


Figure 30.4 : Profil de la contrainte  $\sigma_{11}$  le long du parement amont pour deux discrétilisations par éléments finis différentes. Le maillage raffiné à 70 éléments possède plus d'éléments proches de A et des valeurs plus grandes en traction sont atteintes.

Exprimer le critère de Mohr-Coulomb uniquement en fonction des contraintes principales  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Tracer les cercles de Mohr associés au tenseur des contraintes au point  $X_1 = H, X_2 = 0$  à la base du parement amont en utilisant la solution analytique trouvée précédemment. Pour cela, on calculera les valeurs numériques des composantes de contraintes à l'aide des formules établies au paragraphe 30.1.2, et des données suivantes :  $u = 0, v = 2, H = 100$  m.

Dans ce même diagramme, tracer la frontière du domaine d'élasticité décrit par la fonction (30.13). On prendra les caractéristiques :  $C = 0.1$  MPa et  $\phi = 46^\circ$ , typiques du béton.

Conclure sur l'admissibilité des contraintes locales en ce point vis-à-vis du critère de Mohr-Coulomb.

► Le critère proposé fait intervenir l'effet conjoint de la contrainte tangentielle et de la contrainte normale pour une facette donnée. Lorsque  $\tan \phi = 0$ , il s'identifie avec le critère de plasticité de Tresca. A l'inverse, si  $\tan \phi$  devient très grand, le critère s'approche d'un critère de contrainte normale critique, typique de la rupture des matériaux fragiles. Il est représenté par une droite dans le plan de Mohr, dont l'inclinaison est donnée par  $\phi$ . L'intersubsection avec l'axe des abscisses fournit la limite de rupture en traction :  $\sigma_n = C / \tan \phi$ . La combinaison des contraintes normale et tangentielle dans le critère (30.13) fait irrésistiblement penser au critère de frottement de Coulomb entre corps matériels. Du point de vue physique, il s'agit du frottement intérieur entre les grains d'un matériau granulaire tels qu'on les rencontre dans le domaine du génie civil. La résistance au cisaillement est d'autant plus grande que la compression est forte. Le béton est un matériau granulaire dont la limite d'élasticité est atteinte par des effets combinés de contraintes normale et de cisaillement.

Le grand cercle de Mohr a pour centre  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$  et pour rayon  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ . Il est tangent à la droite de Mohr-Coulomb lorsque

$$\tan \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2C / \tan \phi - (\sigma_1 + \sigma_3)}$$

ce qui fournit l'expression alternative du critère de Mohr-Coulomb :

$$g(\sigma_1, \sigma_3) = \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \tan \phi - 2C \quad (30.14)$$

Les contraintes le long du parement amont dans le cas  $u = 0, v = 2$  valent :

$$\sigma_{11} = aX_1, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = eX_1, \quad \sigma_{33} = \nu(a + e)X_1$$

avec  $a = (\rho_{\text{eau}}/4 - \rho)g$  et  $e = -\rho_{\text{eau}}g$ . Le tenseur des contraintes y est donc diagonal et les contraintes principales valent, dans l'ordre décroissant, en  $X_1 = H = 100$  m :

$\sigma_1 = \sigma_{33} = -0.64$  MPa,  $\sigma_2 = \sigma_{22} = -0.98$  MPa,  $\sigma_3 = \sigma_{11} = -2.21$  MPa. On constate qu'elles sont toujours négatives. C'est d'ailleurs un résultat qui s'étend aux contraintes principales dans tout le barrage si l'on en croit les résultats du calcul par éléments finis illustrés par la figure 30.5, à l'exception toutefois du voisinage du point singulier A où une étude spécifique est indispensable. Étant donné la faible cohésion du béton (limite d'élasticité en traction  $C/\tan \phi$  de l'ordre de 0.1 MPa), les contraintes de traction doivent être évitées absolument, c'est une consigne de dimensionnement en génie civil.

Les cercles de Mohr correspondant aux valeurs précédentes des contraintes principales sont représentées sur la figure 30.6. La frontière du domaine d'élasticité est la droite d'équation  $f(\sigma_n, \tau) = 0$ . Elle coupe l'axe des abscisses en  $\sigma_n = C/\tan \phi$ , i.e. la limite d'élasticité en traction simple. On observe que les cercles de Mohr sont situés sous cette droite, dans le domaine  $f(\sigma_n, \tau) < 0$  assurant un fonctionnement élastique du point matériel considéré.

Plus généralement, Albert Caquot (1881-1976), professeur de Matériaux à l'Ecole des Mines de Paris à partir de 1922, a proposé de considérer une courbe intrinsèque plus générale que la droite de Mohr-Coulomb, issue des observations expérimentales, pour caractériser le domaine d'élasticité du béton. La frontière du domaine d'élasticité est atteinte lorsque le grand cercle de Mohr vient tangenter la courbe intrinsèque de Caquot. C'est le critère de Mohr-Caquot.

Pour finir, il faut indiquer qu'un critère d'endommagement supplémentaire pour les fortes valeurs négatives de  $\sigma_n$  est nécessaire. La rupture alors a lieu sous forme de bandes de localisation de l'endommagement conduisant à de multiples fissures.

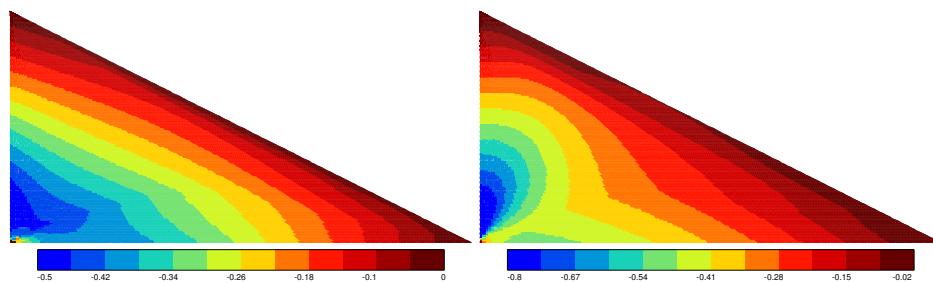


Figure 30.5 : Champs de deux contraintes principales :  $\sigma_1$  à gauche et  $\sigma_2$  à droite. Ils montrent que les contraintes principales sont partout négatives, sauf pour  $\sigma_1$  au voisinage du point A, d'après la figure 30.4. Les valeurs sont données en MPa. Les caractéristiques du barrage sont  $H = 100$  m et  $u = 0, v = 2$ , correspondant à un angle  $\beta = 63^\circ$ .

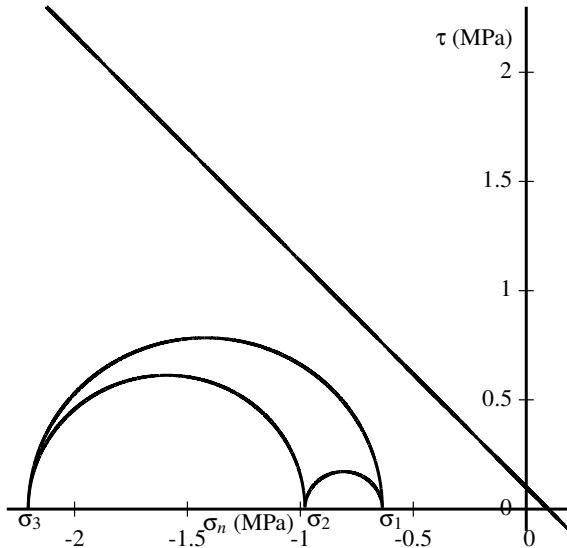


Figure 30.6 : Cercles de Mohr des contraintes en  $X_1 = H, X_2 = 0$  ; comparaison avec le critère de Mohr-Coulomb.

### 30.1.3 Etude du barrage dans le cas général

On revient au cas général de la figure 30.1 où, *a priori*,  $u \neq 0$ . L'objectif de cette partie est d'optimiser les valeurs de  $u$  et  $v$  au regard du critère de Maurice Lévy associé à la présence d'une fissure dans le parement amont.

#### Détermination des contraintes

Rappeler les conditions aux limites sur les parements amont et aval en tenant compte du fait que  $\alpha \neq 0$ .

On recherche à nouveau un champ de contraintes de la forme donnée par les équations (30.5) à (30.8).

Etablir le système d'équations permettant de déterminer de manière unique les constantes  $a, b, c, d, e, f$ . Pour gagner du temps, on ne demande pas de résoudre ce système. Les solutions en sont données ci-dessous :

$$a = -\rho g \frac{u^2 + v^2}{(u+v)^2} - \rho_{eau} g \frac{u + 2uv^2 - v}{(u+v)^3} \quad (30.15)$$

$$b = -\rho g \frac{u - v}{(u+v)^2} + \rho_{eau} g \frac{u^2 + 3uv - 2}{(u+v)^3} \quad (30.16)$$

$$c = -\rho g \frac{uv(u-v)}{(u+v)^2} + \rho_{eau} g \frac{uv(uv - v^2 - 2)}{(u+v)^3} \quad (30.16)$$

$$d = -\rho g \frac{2uv}{(u+v)^2} + \rho_{eau} g \frac{u + 2uv^2 - v}{(u+v)^3} \quad (30.17)$$

$$e = -\rho g \frac{2u^2v^2}{(u+v)^2} + \rho_{eau} g \frac{v^2(2u^2v - 3u - v)}{(u+v)^3}, \quad f = -c \quad (30.17)$$

► Les conditions sur OB (surface libre où  $X_2 = vX_1$ ) sont toujours données par les équations (30.9). Sur la surface OA d'équation  $X_2 = -uX_1$ , le vecteur contrainte est imposé :

$$-\sigma_{11} \sin \alpha - \sigma_{12} \cos \alpha = p \sin \alpha, \quad -\sigma_{12} \sin \alpha - \sigma_{22} \cos \alpha = p \cos \alpha$$

où  $p = \rho_{\text{eau}}gX_1$ . Ces conditions fournissent les 4 équations suivantes :

$$(a + bv)v - (c + dv) = 0, \quad (c + dv)v - (e + fv) = 0 \quad (30.18)$$

$$(a - bu)u + (c - du) + \rho_{\text{eau}}gu = 0, \quad (c - du)u + (e - fu) + \rho_{\text{eau}}g = 0 \quad (30.19)$$

Les deux dernières équations résultent des conditions d'équilibre local (30.3) :

$$a + d + \rho g = 0, \quad c + f = 0 \quad (30.20)$$

On peut vérifier que la résolution du système précédent conduit aux valeurs (30.15) à (30.17).

#### *Contraintes et directions principales sur le parement amont*

Déterminer les directions principales (vecteurs propres du tenseur des contraintes) puis les contraintes principales (valeurs propres) des points matériels du parement amont OA. Cette détermination ne nécessite pas de calcul fastidieux.

► La forme (30.4) montre que le vecteur  $\underline{e}_3$  est une direction principale des contraintes. La contrainte principale correspondante est

$$\sigma_{III} = \sigma_{33}$$

Sur le parement amont, les contraintes sont de la forme :

$$\sigma_{11} = (a - bu)X_1, \quad \sigma_{12} = (c - du)X_1, \quad \sigma_{22} = (e - fu)X_1$$

La condition aux limites sur le parement amont indique que le vecteur normal  $\underline{n} = -\sin \alpha \underline{e}_1 - \cos \alpha \underline{e}_2$  est un vecteur propre de  $\sigma$  pour la valeur

$$\sigma_I = -p = -\rho_{\text{eau}}gX_1$$

La troisième direction principale est donc  $\underline{m} = \underline{n} \wedge \underline{e}_3 = -\cos \alpha \underline{e}_1 + \sin \alpha \underline{e}_2$ . La valeur principale associée s'obtient à partir des deux autres et de la trace du tenseur des contraintes :

$$\sigma_{II} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - \sigma_I - \sigma_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \rho_{\text{eau}}gX_1 \quad (30.21)$$

Par suite,

$$\sigma_{II} = (a - bu + e - fu + \rho_{\text{eau}}g)X_1 \quad (30.22)$$

#### *Présence d'une fissure perpendiculaire au parement amont*

On considère que, en raison d'un défaut ou de l'endommagement du béton, une petite fissure plane apparaît perpendiculairement au parement amont, à une certaine cote  $X_1 = X_0$  donnée, comme sur la figure 30.7. Il s'agit d'une amorce de fissure dont la profondeur est négligeable devant les caractéristiques du barrage. La fissure est perpendiculaire au

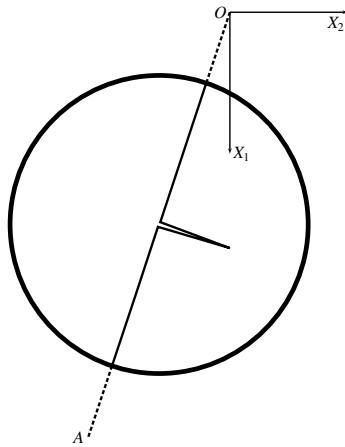


Figure 30.7 : Zoom sur une fissure perpendiculaire au parement amont OA à une certaine cote  $X_1 = X_0$ . La fissure est représentée légèrement ouverte pour l'illustration.

parement aval et parallèle à la direction 3. On se doit d'étudier la nocivité d'un tel défaut. La sécurité du barrage sera assurée si le chargement mécanique a pour effet de refermer cette amorce de fissure. Formuler cette condition en utilisant les contraintes trouvées le long du parement amont. On supposera d'abord que l'eau ne s'infiltra pas dans la fissure.

Formuler ensuite cette condition en considérant que l'eau a pénétré par la fissure et que le fluide interstitiel exerce une pression sur les lèvres de la fissure.

Les critères seront exprimés en fonction des constantes  $a$  à  $f$  déterminées précédemment et des données du problème.

Montrer que les critères obtenus ne font pas intervenir la position  $X_0$  de l'amorce de fissure.

► Le champ de contrainte le long du parement n'est pas modifié tant que la fissure reste fermée puisque les lèvres en contact transmettent l'intégralité des charges. La contrainte agissant sur le plan de la fissure est la contrainte principale  $\sigma_{II}$  déterminée au paragraphe 30.1.3. La fissure reste fermée tant que cette contrainte principale est négative :

$$\sigma_{II} \leq 0$$

Si l'eau s'infiltra à travers la fissure et exerce une pression  $p = \rho_{\text{eau}}gX_0$  tendant à ouvrir la fissure, il faut que la contrainte principale  $\sigma_{II}$  puisse contrecarrer cet effet d'ouverture :

$$\sigma_{II} + p \leq 0 \quad (30.23)$$

C'est une condition plus sévère que la précédente. En utilisant le résultat (30.22), le critère de non traction sur la fissure s'écrit

$$a - bu + e - fu + 2\rho_{\text{eau}}g \leq 0 \quad (30.24)$$

On remarque que la condition est indépendante de la cote  $X_0$ . Alors que les contraintes augmentent, en valeur absolue, avec  $X_1$ , la condition précédente reste la même.

*Condition de Maurice Lévy*

Explicitons alors la dernière condition précédente à l'aide des quantités  $u, v, \rho$  et  $\rho_{\text{eau}}$ . Avec l'hypothèse (bien sûr réalisée en pratique),  $\rho > \rho_{\text{eau}}$ , établir finalement son écriture sous la forme :

$$v \geq \frac{-u\rho + \sqrt{u^2\rho^2 + 4\rho_{\text{eau}}(\rho - \rho_{\text{eau}})}}{2(\rho - \rho_{\text{eau}})} \quad (30.25)$$

dite condition de Maurice Lévy.

► En tenant compte des équations (30.18) et (30.19), on note que

$$a - bu + \rho_{\text{eau}} = -\frac{1}{u}(c - du), \quad e - fu + \rho_{\text{eau}} = u(c - du)$$

En substituant ces relations dans la condition (30.24), on obtient

$$-(c - du)\left(u + \frac{1}{u}\right) \leq 0$$

qui devient  $c - du \geq 0$  puisque  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . On utilise alors les expressions de  $c$  et  $d$  données par (30.16) pour obtenir la condition

$$\rho(u + v)v - \rho_{\text{eau}}(1 + v^2) \geq 0$$

qui se met aussi sous la forme

$$v^2(\rho - \rho_{\text{eau}}) + \rho uv - \rho_{\text{eau}} \geq 0$$

Le discriminant  $\Delta = \rho^2u^2 + 4(\rho - \rho_{\text{eau}})\rho_{\text{eau}}$  est toujours positif dès que  $\rho \geq \rho_{\text{eau}}$ . Le binôme précédent est alors positif seulement si la condition cherchée (30.25) est également remplie (avec  $v \geq 0$ ). Cette condition fournit un angle minimum  $\beta$  pour  $u$  fixé.

*Optimisation du barrage par rapport à la condition de Lévy*

On cherche alors à dimensionner au mieux le barrage, c'est-à-dire à respecter la condition de sécurité précédente à l'aide d'une masse minimale, la hauteur  $H$  et la longueur  $L$  étant fixées.

En utilisant la condition,  $\rho > 2\rho_{\text{eau}}$ , remplie en pratique, trouver la valeur optimale du paramètre  $u$ , puis celle du paramètre  $v$ .

Faire l'application numérique pour un barrage en béton renforcé, avec les propriétés correspondantes indiquées au début du problème.

► La masse du barrage vaut :

$$m = \rho \frac{LH^2}{2} (u + v)$$

La condition de Lévy permet de trouver la masse minimale :

$$m \geq \rho \frac{LH^2}{2} \left( u + \frac{-u\rho + \sqrt{u^2\rho^2 + 4\rho_{\text{eau}}(\rho - \rho_{\text{eau}})}}{2(\rho - \rho_{\text{eau}})} \right)$$

ou bien sous la forme alternative

$$m \geq \rho \frac{LH^2}{2} \frac{u(\rho - 2\rho_{\text{eau}}) + \sqrt{u^2\rho^2 + 4\rho_{\text{eau}}(\rho - \rho_{\text{eau}})}}{2(\rho - \rho_{\text{eau}})}$$

Lorsque  $\rho \geq 2\rho_{\text{eau}}$ , le dernier terme est minimal pour

$$u = 0$$

On obtient alors la masse minimale et l'angle minimal :

$$m_{\min} = \rho \frac{LH^2}{2} \sqrt{\frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho - \rho_{\text{eau}}}}, \quad v_{\min} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho - \rho_{\text{eau}}}} \quad (30.26)$$

qui fournissent les caractéristiques optimales du barrage.

Dans le cas du béton renforcé, on trouve  $v = 0.82$  et  $\beta \simeq 40^\circ$ .

## 30.2 Contraintes dans les bobines de champs magnétiques

La génération de champs magnétiques pulsés très intenses par des bobines conductrices est limitée par les forces de Lorentz qui s'exercent sur les matériaux transportant le courant et engendrent des contraintes mécaniques pouvant conduire à la déformation plastique voire à la rupture des bobines.

Le champ pulsé produit au Laboratoire National des Champs Magnétiques Intenses de Toulouse<sup>4</sup> a la particularité de présenter une longue durée (de quelques  $\mu\text{s}$  à 100 ms avec une durée minimale de 20 minutes à 2 heures entre deux impulsions) et des vibrations négligeables permettant des mesures de grande précision. Dans ce but, le laboratoire a fait le choix original de bobines compactes en fil de cuivre renforcées par une frette métallique externe.

Des champs magnétiques au-delà de 100 Tesla ne peuvent être créés<sup>5</sup> que par une réduction drastique de la durée d'impulsion. Inévitablement, ils entraînent aussi la destruction de la bobine.

Ces champs magnétiques sont utilisés pour la réalisation d'expériences de physique, chimie, biologie et médecine. La bobine doit donc réserver un volume expérimental suffisant permettant d'accueillir les échantillons, des cryostats et autres équipements qui doivent rester intacts après l'expérience afin de permettre leur réutilisation. Les expériences réalisées sous champ magnétique concernent les mesures de magnétisation des matériaux, conductivité thermique, thermo-électricité (effets Seebeck et Nernst), spectroscopie ultrasoore, spectroscopie Raman, supraconductivité et résonance magnétique nucléaire, par exemple.

Le générateur Megagauss du LNCMI est constitué d'un banc de condensateurs modulaire de 200 kJ qui peut être chargé jusqu'à 60 kV. Son champ record est de 331 T, obtenu dans une bobine mono-spire de 3 mm de diamètre. L'accès aux basses températures dépend du diamètre de la bobine : des expériences à température de l'hélium liquide demandent des bobines d'au moins 12 mm, capables de produire des champs de près de 190 T.

L'objectif du problème est d'étudier, dans l'hypothèse des petites perturbations,

---

4. LNCMI, voir le site [lncmi.cnrs.fr](http://lncmi.cnrs.fr), et plus particulièrement la page [www.toulouse.lncmi.cnrs.fr/spip.php?rubrique10&lang=fr](http://www.toulouse.lncmi.cnrs.fr/spip.php?rubrique10&lang=fr) consacrée au type de bobines étudiées dans ce problème.

5. On parle de champ Megagauss : 1 Megagauss = 100 T.

l'équilibre d'un élément de bobine de cuivre utilisé pour la production de champs magnétiques intenses. La bobine de cuivre dont la portion étudiée est représentée sur la figure 30.8 est considérée comme un anneau parcouru par un courant électrique de densité  $j$  de la forme :

$$\underline{j} = j \underline{e}_\theta, \quad j = 1 \times 10^9 \text{ A m}^{-2} \quad (30.27)$$

dans la base de coordonnées cylindriques indiquée sur la figure 30.8 (problème axi-symétrique). Remarquer la densité de courant colossale égale à  $1000 \text{ A mm}^{-2}$ . Ce courant dans la bobine induit un champ magnétique

$$\underline{B} = B \underline{e}_z, \quad B = 100 \text{ T} \quad (30.28)$$

Le champ  $B$  est supposé uniforme et constant dans le domaine  $r \leq r_e$ . En réalité, il varie linéairement dans la largeur et cette caractéristique pourrait aisément être prise en compte dans une seconde analyse, comme dans les travaux de (Witters and Herlach, 1983). Seul le couplage électro-magnéto-mécanique direct sera étudié. Les modifications en retour du courant électrique et du champ magnétique en raison du changement de forme de la bobine seront ignorées.

La première partie du problème est consacrée au comportement de la bobine de cuivre seule. Une frette en acier est ajoutée dans la deuxième partie pour renforcer la structure. Le problème est traité dans le contexte des contraintes planes excluant les contraintes selon  $z$  et toute dépendance des contraintes et déformations vis-à-vis de la variable  $z$ . La résolution se fait dans le contexte des petites perturbations. Les corps matériels sont initialement dans leur état naturel et présentent un comportement élastique linéarisé. Les efforts de gravité et la pression atmosphérique sont négligés. L'élévation de température due à l'effet Joule dans la bobine n'est pas prise en compte. Les contraintes d'origine thermique ne seront donc pas considérées.

Le cuivre est traité comme un matériau homogène et isotrope présentant un comportement élastique linéarisé. Les caractéristiques élastiques du cuivre sont :  $E^{\text{Cu}} = 120 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ .

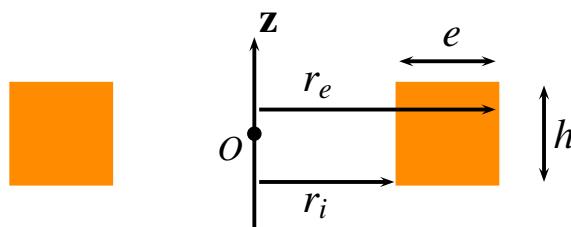


Figure 30.8 : Section d'un élément de bobine pour l'induction d'un champ magnétique.

Les lecteurs avides de connaître plus amplement les couplages entre mécanique des milieux continus et électromagnétisme sont invités à consulter les ouvrages (Maugin, 1988; Eringen and Maugin, 1990) et plus récemment (Dorfmann and Ogden, 2014).

### 30.2.1 Forces de volume d'origine électromagnétique

En régime stationnaire, à l'équilibre, la bobine est le siège de contraintes engendrées par la force volumique de Lorentz,  $\rho \underline{f}$ , selon l'équation :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = 0 \quad (30.29)$$

En physique des milieux continus, la force volumique de Lorentz prend la forme suivante :

$$\rho \underline{f} = \underline{j} \wedge \underline{B} \quad (30.30)$$

Dans cette première partie du problème, on étudie la réponse mécanique de l'élément de bobine de cuivre seul soumis aux forces de Lorentz. Les surfaces externes de la bobine de cuivre sont libres de tout effort mécanique.

#### *Expression de la densité volumique de force de Lorentz*

Vérifier que le produit  $\underline{j} \wedge \underline{B}$  a bien la dimension physique d'une force par unité de volume, à savoir  $\text{Nm}^{-3}$ .

Substituer les expressions (30.27) et (30.28) dans la définition (30.30) de la force de Lorentz. Indiquer l'orientation et l'intensité de la force de Lorentz obtenues. Commenter. Donner la valeur numérique de l'intensité de la force de Lorentz avec les valeurs données précédemment pour  $j$  et  $B$ .

► La force de Lorentz qui s'applique à une charge  $q$  mesurée en Coulomb (C) a pour expression et unité physique :

$$q\underline{v} \wedge \underline{B} \equiv \text{N} \equiv \text{Cs}^{-1}\text{mT} \equiv \text{ATm}$$

où l'unité A (Ampère) n'est autre que  $\text{Cs}^{-1}$ . Il s'ensuit que

$$jB \equiv \text{Am}^{-2}\text{T} \equiv \text{Nm}^{-3}$$

On calcule enfin

$$\rho \underline{f} = \underline{j} \wedge \underline{B} = jB \underline{e}_\theta \wedge \underline{e}_z = jB \underline{e}_r$$

Le champ de force de Lorentz est donc radial et tend à élargir l'anneau (car  $jB > 0$ ), voire à le faire éclater. On voit l'effet d'un tel champ sur le gonflement de la bobine sur la figure 30.9. L'intensité de la force de Lorentz est de  $1 \times 10^{11} \text{ Nm}^{-3}$ .

#### *Forme et équilibre des contraintes*

Le tenseur des contraintes est supposé revêtir la forme suivante :

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30.31)$$

Les composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  sont recherchées comme des fonctions de la seule variable  $r$ . Exprimer alors les équations d'équilibre en fonction des composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  et des grandeurs imposées  $j$  et  $B$  ?

► L'expression de la divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 en coordonnées cylindriques conduit à l'équation suivante portant sur les composantes de contraintes :

$$\sigma'_{rr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + jB = 0 \quad (30.32)$$

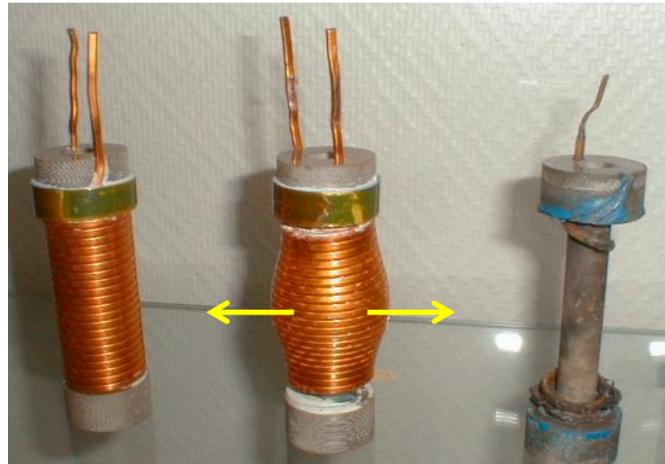


Figure 30.9 : Eclatement d'une bobine pour la production de champs magnétiques intenses : état initial (à gauche), déformation de la bobine (au milieu), reliquat du montage après éclatement (à droite), (source LCNMI).

#### *Une relation supplémentaire liant les contraintes*

Dans le cadre de l'élasticité isotrope linéarisée pour un problème axisymétrique, établir la relation suivante :

$$(1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = r(\sigma'_{\theta\theta} - \nu\sigma'_{rr}) \quad (30.33)$$

où  $\sigma'_{rr}$  (resp.  $\sigma'_{\theta\theta}$ ) désigne la dérivée par rapport à  $r$  de  $\sigma_{rr}$  (resp.  $\sigma_{\theta\theta}$ ).

► En coordonnées cylindriques, une équation de compatibilité est

$$\varepsilon_{rr} = u'_r = (r\varepsilon_{\theta\theta})' = \varepsilon_{\theta\theta} + r\varepsilon'_{\theta\theta} \quad (30.34)$$

où  $u_r$  est la composante radiale de déplacement. Les déformations sont liées aux contraintes par la loi d'élasticité isotrope :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \frac{\nu\sigma_{\theta\theta}}{E}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \frac{\nu\sigma_{rr}}{E}$$

Ces relations peuvent alors être substituées dans (30.34) ce qui conduit à (30.33). En combinant les relations (30.32) et (30.33), on obtient l'équation

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} + r\sigma'_{\theta\theta} + \nu j Br$$

mentionnée dans l'article de (Witters and Herlach, 1983), établie dans le cas plus général de l'élasticité anisotrope.

#### *Détermination des contraintes radiales*

Déduire des deux équations précédentes une équation différentielle portant sur la contrainte radiale,  $\sigma_{rr}$ .

Résoudre cette équation et montrer que

$$\sigma_{rr}(r) = -\alpha r + C - \frac{A}{r^2} \quad (30.35)$$

On exprimera  $\alpha$  en fonction de  $j, B$  et des caractéristiques élastiques du matériau.  $A$  et  $C$ , quant à eux, sont des constantes d'intégration déterminées dans la suite.

► L'équation d'équilibre (30.32) est utilisée pour exprimer la contrainte orthoradiale et sa dérivée :

$$\sigma_{\theta\theta} = r\sigma'_{rr} + \sigma_{rr} + rjB, \quad \sigma'_{\theta\theta} = 2\sigma'_{rr} + r\sigma''_{rr} + jB \quad (30.36)$$

afin de les substituer dans la relation (30.33) et obtenir l'équation différentielle recherchée pour la contrainte radiale :

$$r\sigma''_{rr} + 3\sigma'_{rr} + (2 + \nu)jB = 0 \quad (30.37)$$

Cette équation admet la solution particulière  $-(2 + \nu)jBr/3$  tandis que la solution homogène est de la forme  $-A/r^2 + C$ . On obtient ainsi la solution complète (30.35) qui inclut deux constantes d'intégration  $A$  et  $C$ , et la constante

$$\alpha = \frac{2 + \nu}{3}jB \quad (30.38)$$

#### *Détermination des contraintes orthoradielles*

Montrer que les contraintes orthoradielles sont de la forme

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = -\beta r + C + \frac{A}{r^2} \quad (30.39)$$

On exprimera  $\beta$  en fonction de  $j, B$  et des caractéristiques élastiques du matériau.

► La composante orthoradiale des contraintes s'obtient à partir de la solution précédente et de l'équation (30.36). On trouve

$$\beta = \frac{1 + 2\nu}{3}jB \quad (30.40)$$

#### *Détermination complète des contraintes*

Obtenir finalement les constantes d'intégration  $A$  et  $C$ .

Donner aussi le signe de la contrainte  $\sigma_{rr}$  lorsque  $jB > 0$ .

► Pour cela, il faut faire appel aux conditions aux limites du problème, à savoir le fait que le vecteur-contrainte s'annule sur les faces  $r = r_i$  et  $r = r_e$ , ce qui implique que

$$-\alpha r_i - A/r_i^2 + C = 0, \quad -\alpha r_e - A/r_e^2 + C = 0 \quad (30.41)$$

d'où les relations :

$$A = \alpha \frac{r_i^2 r_e^2}{r_i + r_e}, \quad C = \alpha \frac{r_i^2 + r_e^2 + r_i r_e}{r_i + r_e} \quad (30.42)$$

Il faut remarquer que le polynôme  $r^2\sigma_{rr}$  s'annule en  $r_i$  et en  $r_e$ . Ce polynôme de degré 3 se met donc sous la forme

$$r^2\sigma_{rr} = -\alpha(r - r_i)(r - r_e)\left(r - \frac{A}{\alpha r_i r_e}\right) = -\alpha(r - r_i)(r - r_e)\left(r - \frac{r_i r_e}{r_i + r_e}\right)$$

Comme  $r_i \geq r_i r_e / (r_i + r_e)$ , il s'ensuit que  $\sigma_{rr} \geq 0$  pour  $r_i \leq r \leq r_e$ .

#### Tracé des contraintes

Tracer les profils des contraintes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  en utilisant les valeurs numériques données précédemment pour  $j$  et  $B$ . Les dimensions du solénoïde sont :

$$r_i = 4 \text{ mm}, \quad r_e = 6 \text{ mm}$$

On prendra soin en particulier de déterminer les valeurs numériques de  $\sigma_{\theta\theta}(r = r_i)$  et  $\sigma_{\theta\theta}(r = r_e)$ .

► Le tracé des contraintes est effectué sur la figure 30.10. La contrainte orthoradiale issue de l'approximation de l'anneau mince, étudiée au paragraphe 30.2.1, est également tracée. On trouve :

$$\sigma_{\theta\theta}(r = r_i) \simeq 645 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\theta\theta}(r = r_e) \simeq 385 \text{ MPa}$$

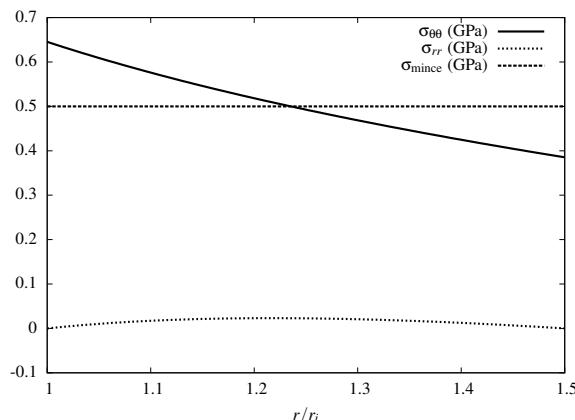


Figure 30.10 : Profils des contraintes radiale et orthoradiale dans la subsection de la bobine de cuivre. La contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$  est comparée à la valeur approchée  $jB R$ , formule valable pour la paroi mince, prise ici avec  $R = (r_i + r_e)/2$ .

#### Calcul des déformations ; contexte infinitésimal

Calculer les déformations en fonction des constantes  $A, C$  et des caractéristiques élastiques du matériau.

En déduire une condition sur  $jB$  garantissant que les déformations restent infinitésimales. Cette condition est-elle satisfaite pour le champ magnétique et le courant visés dans le cas du solénoïde en cuivre considéré dans cette partie ?

► Grâce à la loi de Hooke, on calcule les composantes non nulles du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{rr} &= (1+\nu)\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{2jB}{3}(1-\nu^2)r - (1+\nu)\frac{A}{r^2} + (1-\nu)C \end{aligned} \quad (30.43)$$

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{\theta\theta} &= (1+\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{jB}{3}(1-\nu^2)r + (1+\nu)\frac{A}{r^2} + (1-\nu)C \end{aligned} \quad (30.44)$$

$$E\varepsilon_{zz} = -\nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \nu((1+\nu)jBr - 2C) \quad (30.45)$$

Les composantes précédentes sont de l'ordre de  $jBR/E$  où  $R$  est typiquement mis pour  $r_e$ . Le contexte infinitésimal est donc garanti si

$$\frac{jBR}{E} \ll 1 \quad (30.46)$$

Avec les grandeurs considérées, cet indicateur a pour valeur  $5.0 \times 10^{-3}$ , ce qui valide le contexte infinitésimal.

#### *Intégration des déplacements ; limites de l'approche proposée*

Construire les déplacements  $u_r$  et  $u_\theta$  associés aux déformations précédentes.

Montrer finalement qu'il n'est pas possible de déterminer un champ  $u_z$  satisfaisant. Ce constat signe l'échec de la démarche proposée. Quelle simplification doit être remise en question ?

Cette difficulté est rencontrée assez fréquemment dans le contexte des contraintes planes. Il s'avère toutefois que les expressions trouvées précédemment pour les contraintes, déformations et déplacements, représentent une approximation satisfaisante à bien des égards<sup>6</sup> de la solution recherchée lorsque l'épaisseur  $h$  de la spire est suffisamment petite devant son rayon.

*On continue donc à utiliser ces expressions dans la suite du problème.*

Calculer la valeur numérique du rayon de la spire sous chargement magnétique.

► Le déplacement  $u_r$  s'obtient aisément à partir de la déformation orthoradiale sachant que les fonctions sont indépendantes de  $\theta$  :

$$Eu_r = r\varepsilon_{rr} = -\frac{jB}{3}(1-\nu^2)r^2 + (1+\nu)\frac{A}{r} + (1-\nu)Cr$$

On vérifie que  $du_r/dr = \varepsilon_{rr}$  trouvé précédemment. Pour trouver le déplacement  $u_\theta$ , on remarque que

$$2\varepsilon_{r\theta} = -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 0, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0$$

de sorte que  $u_\theta = ar$  qui représente une rotation d'angle  $a$  par rapport à l'axe  $z$ . Fixons ce mouvement infinitésimal de corps rigide à  $a = 0$  dans la suite.

L'intégration par rapport à  $z$  de  $\varepsilon_{zz}$  trouvé précédemment conduit à l'expression de  $u_z$

---

6. Par comparaison avec une solution numérique, comme cela est illustré au paragraphe 25.3.5 du chapitre 25.

suivante :

$$Eu_z = \nu((1 + \nu)r - 2C)z + f(r)$$

où une fonction  $f$  de la coordonnée  $r$  doit être introduite. Pour la déterminer, il faut calculer la déformation de cisaillement

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \nu(1 + \nu)jBz + f'(r)$$

Dans la démarche développée précédemment, un tel cisaillement est nul. Or, il est impossible de déterminer une fonction  $f$  dépendant de  $r$  seulement et annulant le cisaillement précédent. Ce résultat remet en cause la démarche de résolution proposée, l'hypothèse majeure à la base de notre procédure, étant l'absence de dépendance des contraintes et déformations par rapport à  $z$ . Lorsque la dépendance en  $z$  est acceptée, il faut en outre considérer la composante  $\sigma_{zz}(r, z)$ .

Sous chargement magnétique on trouve que le nouveau rayon intérieur de la spire est  $r_i + u_r(r_i) = 4.022$  mm et le rayon extérieur est de  $r_e + u_r(r_e) = 6.019$  mm. L'épaisseur de la spire a donc diminué de 0.11%.

#### *Limite d'élasticité de la bobine*

En utilisant le critère de plasticité de Tresca pour un corps isotrope de limite d'élasticité  $\sigma_0$  en traction, indiquer à quel endroit de l'anneau la plasticité va commencer. Donner la valeur critique correspondante de  $jB$  en fonction des caractéristiques géométriques de l'anneau et des propriétés mécaniques du matériau.

Qu'en est-il avec la valeur visée de  $jB$  lorsque  $\sigma_0 = 500$  MPa correspondant à du cuivre fortement écroui<sup>7</sup> ?

► Il est apparu précédemment que  $0 \leq \sigma_{rr} \leq \sigma_{\theta\theta}$ , de sorte que la limite d'élasticité est obtenue pour  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_0$ . Cela se produit d'abord en  $r = r_i$  où  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale. La limite d'élasticité de la structure est donc donnée par

$$\sigma_{\theta\theta}(r_i) = (\alpha - \beta)r_i + 2\frac{A}{r_i^2}$$

où le fait que  $C = \alpha r_i + A/r_i^2$ , cf. Eq. (30.41) a été utilisé. Finalement,

$$\sigma_{\theta\theta}(r_i) = \frac{jB}{3}((1 - \nu)r_i + 2(2 + \nu)\frac{r_e^2}{r_i + r_e}) \quad (30.47)$$

de sorte que la limite d'élasticité est atteinte pour

$$jB = 3\sigma_0 \left( (1 - \nu)r_i + 2(2 + \nu)\frac{r_e^2}{r_i + r_e} \right)^{-1} \quad (30.48)$$

Avec  $jB = 1 \times 10^{11}$  Nm<sup>-3</sup>, on trouve  $\sigma_{\theta\theta}(r_i) = 645$  MPa qui est bien supérieure à la limite d'élasticité  $\sigma_0 = 500$  MPa. Cela signifie que, si de tels champs et courants sont appliqués, le solénoïde va se déformer de façon irréversible.

---

7. C'est-à-dire durci.

*Cas d'une spire de faible largeur relative*

Dans le cas où la largeur de l'anneau est très faible devant son rayon  $R$  :

$$\frac{e}{R} \ll 1$$

Le rayon  $R$  est pris comme  $(r_i + r_e)/2$ , par exemple. Montrer que, dans ce cas, l'état de contraintes au sein de l'anneau s'identifie à un état de traction simple orthoradiale dont on donnera l'expression en fonction de  $jB$  et  $R$ . Donner alors l'expression simplifiée de la valeur critique de  $jB$  pour laquelle la limite d'élasticité est atteinte. Vérifier que cette expression est conforme au développement au premier ordre de la formule trouvée au paragraphe 30.2.1.

En supposant que le seuil de plasticité n'est pas franchi, calculer la valeur numérique de la déformation orthoradiale dans le cas du tube mince avec  $R = 5$  mm.

► Au premier ordre,  $r_i \simeq r_e \simeq R$ , de sorte que

$$\sigma_{rr} \simeq 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = jBR \quad (30.49)$$

qui conduit à la limite d'élasticité pour

$$jB = \frac{\sigma_0}{R} \quad (30.50)$$

La spire est approximativement en traction simple selon  $\sigma_\theta$ . La contrainte de traction vaut  $jBR = 500$  MPa. La déformation élastique correspondante vaut  $jBR/E^{\text{Cu}} = 0.42\%$ . En guise de prolongement, on trouvera le calcul des profils de contraintes dans le domaine plastique dans la référence (Herlach, F. et al., 1984).

*30.2.2 Solénoïde renforcé par une frette en acier*

Afin de limiter l'élargissement des spires du solénoïde et les contraintes engendrées par le champ magnétique, un anneau d'acier est introduit autour des spires comme sur la figure 30.11. Ce cerclage constitue un frettage de la bobine bridant l'augmentation du rayon de la spire sous charge. Il possède un rayon extérieur  $r_f$  et on suppose qu'il n'y a pas de jeu entre l'anneau de cuivre et l'anneau d'acier de sorte que la largeur de l'anneau d'acier vaut  $r_f - r_e$ . L'objectif de cette partie est de calculer la réduction de contrainte dans la bobine de cuivre en fonction du rayon  $r_f$ , du chargement  $jB$  appliqué et des caractéristiques géométriques et matérielles des constituants de la structure.

Comme aucun courant électrique ne circule dans le cerclage d'acier, on suppose que le champ magnétique appliqué n'a aucun effet mécanique sur celui-ci. Les anneaux de cuivre et d'acier en contact sont supposés joints garantissant la continuité du déplacement  $u_r$  et la transmission du vecteur-contrainte lorsque la contrainte radiale est de compression<sup>8</sup>. Par contre, ils peuvent glisser l'un par rapport à l'autre, autorisant ainsi une discontinuité du déplacement  $u_z$ .

La gaine est constituée d'un acier inoxydable avec une limite d'élasticité de 1 GPa. L'acier est traité comme un matériau homogène et isotrope présentant un comportement élastique linéarisé. Les caractéristiques élastiques de l'acier sont :

$$E^{\text{acier}} = 210 \text{ GPa}, \quad \nu^{\text{acier}} = \nu^{\text{Cu}} = \nu = 0.3$$

Le cuivre et l'acier sont supposés avoir le même coefficient de Poisson pour simplifier.

8. Sinon les deux anneaux se séparent car ils ne sont pas collés. En réalité, ils sont nécessairement séparés par un mince revêtement isolant, non considéré ici, cf. (Witters and Herlach, 1983).

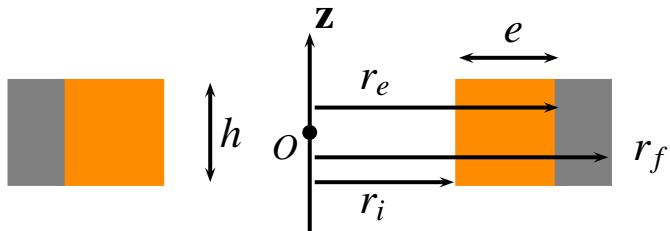


Figure 30.11 : Section d'un élément de bobine de cuivre renforcé par une frette en acier.

#### Contraintes radiales dans l'assemblage fretté

Justifier brièvement que les contraintes radiales dans le cuivre et l'acier prennent la forme suivante :

$$\sigma_{rr}^{\text{Cu}}(r) = -\alpha r + C - \frac{A}{r^2}, \quad \sigma_{rr}^{\text{acier}}(r) = C_f - \frac{A_f}{r^2} \quad (30.51)$$

où  $A, C, A_f$  et  $C_f$  sont des constantes à déterminer dans la suite.

Etablir trois relations liant ces quatre constantes.

► La forme des contraintes radiales dans le cuivre est la même que dans la première partie du problème, avec en particulier la même valeur de  $\alpha$  donnée par (30.38). En effet, cette forme résulte de l'intégration des équations d'équilibre dans le volume qui sont inchangées ici puisque le chargement électromagnétique reste identique. Par contre, les valeurs des constantes  $A$  et  $C$  diffèrent de la partie précédente car elles résultent des conditions aux limites qui sont, quant à elles, modifiées par la présence de la frette.

Les contraintes dans l'acier résultent de la pression appliquée à l'anneau d'acier par l'élargissement de la spire de cuivre lorsque celle-ci est parcourue par le courant  $j$ . Il s'agit donc d'un problème de réservoir sous pression interne pour lequel la forme des contraintes est connue comme étant conforme à (30.51), voir la table 22.1 du chapitre 22. D'un autre point de vue, c'est le même problème que celui traité précédemment pour le cuivre mais avec  $j = 0 \implies \alpha = 0$  et des conditions aux limites différentes.

Trois conditions aux limites peuvent d'ores et déjà être considérées. Il s'agit de la nullité du vecteur-contrainte en  $r_i$  et  $r_f$ , et donc des composantes radiales correspondantes :

$$\sigma_{rr}^{\text{Cu}}(r = r_i) = 0 \implies -\alpha r_i - A/r_i^2 + C = 0 \quad (30.52)$$

$$\sigma_{rr}^{\text{acier}}(r = r_f) = 0 \implies C_f - \frac{A_f}{r_f^2} = 0 \quad (30.53)$$

Enfin, la continuité du vecteur-contrainte exige la continuité des contraintes radiales du cuivre et de l'acier en  $r = r_e$  :

$$\sigma_{rr}^{\text{Cu}}(r = r_e) = \sigma_{rr}^{\text{acier}}(r = r_e) \implies -\alpha r_e - A/r_e^2 + C = C_f - \frac{A_f}{r_e^2} \quad (30.54)$$

#### Contraintes orthoradielles dans l'assemblage fretté

Donner la forme des contraintes orthoradielles dans le cuivre et l'acier en fonction des constantes  $A, C, A_f, C_f$  introduites précédemment.

► On trouve

$$\sigma_{\theta\theta}^{\text{Cu}}(r) = -\beta r + C + \frac{A}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta}^{\text{acier}}(r) = C_f + \frac{A_f}{r^2} \quad (30.55)$$

Les composantes de contrainte axiale et de cisaillement sont par ailleurs nulles, en raison du glissement possible selon  $z$  entre les spires et la frette.

#### Détermination de la quatrième relation cherchée

Calculer la déformation  $\varepsilon_{\theta\theta}$  dans le cuivre et dans l'acier en fonction des constantes  $A, C, A_f, C_f$ , puis le champ de déplacement radial  $u_r$ .

En déduire la relation manquante pour déterminer les quatre constantes recherchées.

On ne demande pas de résoudre ce système même si cela ne pose aucune difficulté.

► La loi de Hooke est utilisée pour calculer successivement :

$$\begin{aligned} E^{\text{Cu}} \varepsilon_{\theta\theta}^{\text{Cu}}(r) &= (1+\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ &= -\frac{jB}{3}(1-\nu^2)r + (1+\nu)\frac{A}{r^2} + (1-\nu)C \end{aligned} \quad (30.56)$$

$$E^{\text{acier}} \varepsilon_{\theta\theta}^{\text{acier}}(r) = (1-\nu)C_f + (1+\nu)\frac{A_f}{r^2} \quad (30.57)$$

Le déplacement radial se déduit de  $u_r/r = \varepsilon_{\theta\theta}$  car le déplacement tangentiel est nul :

$$E^{\text{Cu}} u_r^{\text{Cu}}(r) = -\frac{jB}{3}(1-\nu^2)r^2 + (1+\nu)\frac{A}{r} + (1-\nu)Cr \quad (30.58)$$

$$E^{\text{acier}} u_r^{\text{acier}}(r) = (1-\nu)C_f r + (1+\nu)\frac{A_f}{r} \quad (30.59)$$

Le contact entre les anneaux de cuivre et d'acier exigent la continuité du déplacement radial en  $r = r_e$ , ce qui fournit la quatrième relation recherchée :

$$E^{\text{Cu}}((1-\nu)C_f r_e + (1+\nu)\frac{A_f}{r_e}) = E^{\text{acier}}((1-\nu)Cr_e + (1+\nu)\frac{A}{r_e} - \frac{jB}{3}(1-\nu^2)r_e^2) \quad (30.60)$$

#### Limite d'élasticité de l'assemblage fretté

Après résolution du système précédent (non demandée ici), les courbes donnant les contraintes et le déplacement radial sont données sur la figure 30.12 pour deux valeurs du rayon extérieur de frette,  $r_f$ .

Commenter les résultats. La frette remplit-elle son rôle ?

Commenter également le déplacement radial donné sur la figure 30.13 avec et sans frette.

► Les 4 équations (30.52) à (30.54) sont utilisées pour obtenir les constantes en fonction de  $C_f$  :

$$F = r_f^2 C_f \quad (30.61)$$

$$(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2})A + \alpha(r_e - r_i) = (\frac{r_f^2}{r_i^2} - 1)C_f \quad (30.62)$$

$$(r_e^2 - r_i^2)C + \alpha(r_i^3 - r_e^3) = C_f(r_e^2 - r_f^2)C_f \quad (30.63)$$

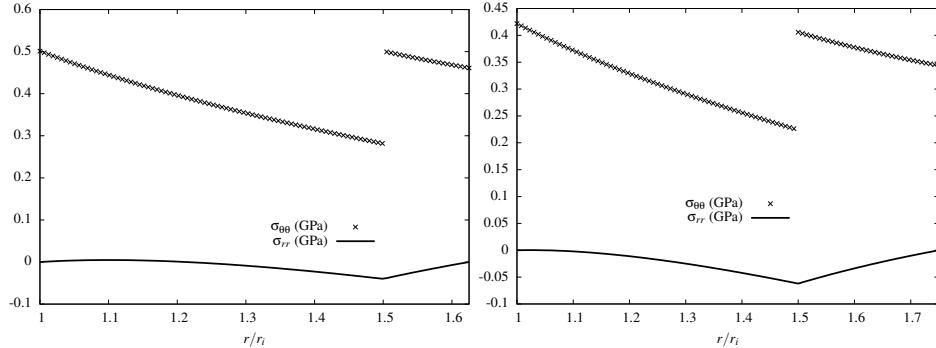


Figure 30.12 : Profils des contraintes radiale et orthoradiale dans la subsection de la bobine de cuivre et la frette d'acier pour deux largeurs différentes de frette :  $r_f = 0.5 \text{ mm}$  (à gauche),  $r_f = 1 \text{ mm}$  (à droite).

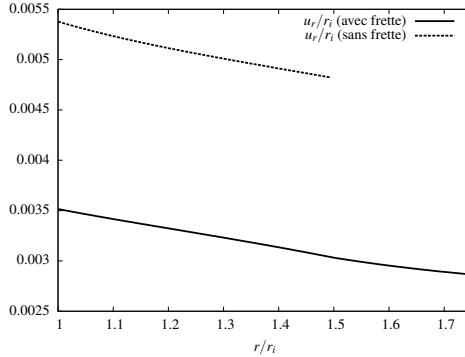


Figure 30.13 : Déplacement radial normé dans la subsection de la bobine de cuivre et la frette d'acier. Ce profil est comparé au déplacement en absence de frette pour le même champ  $jB$  appliqué ( $r_f = 1 \text{ mm}$ ).

Ces relations peuvent alors être substituées dans (30.60) pour déterminer  $C_f$  :

$$C_f \left( \frac{E^{\text{Cu}}}{E^{\text{acier}}} ((1-\nu)r_e^2 + (1+\nu)r_f^2) + (1-\nu)(r_f^2 - r_e^2) + 2\Delta \left( \frac{r_f^2}{r_i^2} - 1 \right) \right) = \\ = 2\Delta\alpha(r_e - r_i) + \frac{jB}{3}(1-\nu)r_e^3$$

avec  $\Delta^{-1} = 1/r_i^2 - 1/r_e^2$ .

Les courbes de la figure 30.12 montrent que les contraintes radiales sont continues en  $r = r_e$  alors que les contraintes orthoradielles présentent une discontinuité. Les contraintes radiales sont de compression en  $r = r_e$  et maintiennent donc l'assemblage fretté. Les contraintes orthoradielles dans le cuivre sont plus faibles qu'en l'absence de frette, cf. figure 30.10. On peut lire également que la contrainte  $\sigma_{θθ} - \sigma_{rr}$  est proche de 500 MPa en  $r_i$  pour  $r_f = 0.5 \text{ mm}$  de sorte que le critère de Tresca risque d'être violé, le cuivre entrant alors dans le domaine plastique. Au contraire, 1 mm de frette garantit un fonctionnement élastique de la structure avec des contraintes ne dépassant pas 450 MPa dans le cuivre.

La figure 30.13 indique que le déplacement radial est continu en  $r = r_e$  de sorte que la bobine et la frette restent en contact. Le déplacement radial est plus petit en présence d'une frette. Voilà bien l'objectif : limiter l'expansion de la bobine sous champ.

#### *Autre méthode de renforcement de la bobine conductrice*

Proposer d'autres méthodes que le frettage pour renforcer la bobine conductrice et éviter que le cuivre ne plastifie.

► L'utilisation d'un frettage permet de limiter l'expansion du solénoïde et de réduire les contraintes dans les spires. De surcroît, il est possible de renforcer le conducteur de cuivre lui-même afin d'augmenter sa limite d'élasticité. Par co-tréfilages successifs de fils de cuivre et de niobium, il est possible de fabriquer les composites architecturés de la figure 30.14. Leur limite d'élasticité est accrue par deux effets conjoints : la réduction de la taille des grains du cuivre (jusqu'à des dimensions nanométriques) et l'emploi du niobium dont la limite d'élasticité est plus grande que celle du cuivre pour une taille de grain et un écrouissage donnés. L'architecture en nids d'abeille quasi-périodique et multiéchelle permet de garantir la continuité du cuivre pour la conduction d'électricité et de créer des couloirs étroits de cuivre qui renforcent le composite. Les fils nanorenforcés obtenus ont des limites d'élasticité dépassant 2 GPa. Les composites conçus par le LNCMI sont à base de cuivre/niobium, ou de cuivre/tantale, voire cuivre/nanotubes de carbone.

### 30.3 Contraintes dans les corps célestes

L'objectif du problème est de déterminer les contraintes engendrées en chaque point matériel d'un corps par les interactions gravitationnelles avec les autres points de ce corps. Ce type d'efforts a été écarté dans les exercices traités dans le cours mais ils deviennent prépondérants dans les planètes, leurs satellites et les étoiles. Dans ce problème sont envisagés successivement les cas d'une planète fluide, d'une planète solide et d'une planète solide à noyau fluide.

Dans tout le problème, la pression atmosphérique des corps étudiés et les interactions avec d'autres corps extérieurs sont négligées. Dans un souci de simplicité, les conséquences des variations de température au sein des corps ne sont pas prises en compte dans l'analyse. Le problème commence par des préliminaires dont les résultats peuvent être admis dans la suite même si leur établissement ne demande pas de calculs mais seulement quelques remarques judicieuses.

#### 30.3.1 Préliminaires

Un corps céleste dans sa configuration actuelle  $\Omega_t$  est le siège d'efforts dus à l'interaction gravitationnelle à distance entre les points matériels qui le constituent. La densité volumique de tels efforts s'exerçant sur le point matériel  $\underline{x} \in \Omega_t$  de masse volumique  $\rho(\underline{x})$  est de la forme :

$$\underline{\rho g}(\underline{x}) = \rho(\underline{x}) \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}') \mathcal{G} \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{\|\underline{x} - \underline{x}'\|^3} dv' \quad (30.64)$$

Il faut remarquer que l'effort exercé en  $\underline{x}$  résulte de l'interaction avec tous les autres points  $\underline{x}'$  du corps, situation inédite dans ce cours. Il fait intervenir la constante de gravitation de Newton, notée  $\mathcal{G}$  et dont la valeur est :  $\mathcal{G} = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

#### *Loi de Cauchy en présence d'efforts de gravitation*

Écrire les lois d'Euler pour un sous-domaine  $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$  en présence du champ de gravitation  $\underline{g}(\underline{x})$  donné par (30.64).

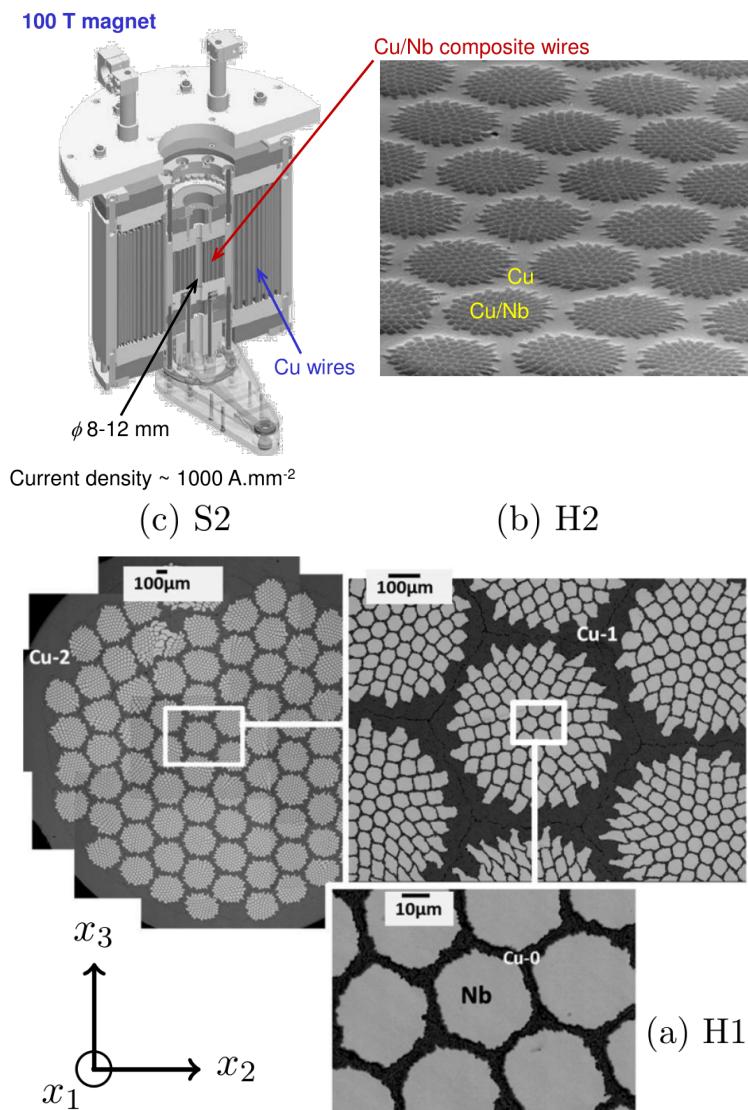


Figure 30.14 : Coupe d'un générateur de champs magnétiques intenses avec une partie centrale incorporant un solinoïde renforcé au centre (en haut). Composite cuivre-niobium présentant une architecture multi-échelles en nid d'abeilles (en haut à droite et en bas) : la subsection S2 du fil composite est constitué de 85 quasi-hexagones (H2) eux-mêmes constitués de quasi-hexagone (H1), d'après (Gu et al., 2017).

Justifier ensuite brièvement le fait que la construction du tenseur des contraintes par la méthode du tétraèdre de Cauchy ne soit pas modifiée par la présence du champ de gravitation.

Déduire enfin des deux remarques précédentes que la loi locale de conservation de la

quantité de mouvement en tout point régulier du corps  $\Omega_t$  s'écrit :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t) \underline{g}(\underline{x}, t) = \rho(\underline{x}, t) \underline{a}(\underline{x}, t) \quad (30.65)$$

où  $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$  est un champ de tenseurs d'ordre 2 symétriques. En général, la détermination de la forme  $\Omega_t$  du corps est d'autant plus délicate que les efforts de gravitation en dépendent explicitement.

► La première loi d'Euler représente le bilan de quantité de mouvement pour le domaine  $\mathcal{D}_t \subset \Omega_t$  et fait intervenir les densités volumique et surfacique d'efforts appliqués :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{v} \, dv = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{g}(\underline{x}, \Omega_t) \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) \, ds$$

Le fait que le champ de gravitation  $\underline{g}$  donné par (30.64) dépende de la forme et de la répartition de masse au sein de  $\Omega_t$  ne modifie en rien la représentation ni le traitement du bilan de quantité de mouvement. Il en va de même du bilan du moment cinétique.

La construction du tenseur des contraintes de Cauchy est basée sur l'exploitation du bilan de quantité de mouvement sur un tétraèdre  $\Delta_h$

$$\int_{\Delta_h} \rho(\underline{a}(\underline{x}) - \underline{g}(\underline{x})) \, dv = \int_{\partial \Delta_h} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) \, ds$$

La linéarité de  $\underline{t}$  s'établit comme dans le cours. Le point central dans l'argumentation est lié au fait que  $\underline{g}(\underline{x})$  dépend certes de  $\Omega_t$  mais garde la même valeur lorsque l'on change  $\mathcal{D}_t$  ou  $\Delta_h$ . En d'autres termes, le calcul de  $\underline{g}$  est indépendant du sous-domaine considéré. La première loi de Cauchy sous la forme (30.65) s'en déduit.

#### Cas d'un corps de forme sphérique

Lorsque  $\Omega_t$  est une boule de centre O et de rayon  $R$ , et que la répartition de masse est également à symétrie sphérique, montrer que le champ de gravitation induit par le corps  $\Omega_t$  lui-même, à l'exclusion de tout corps extérieur, se met sous la forme suivante :

$$\underline{g}(\underline{x}) = -\frac{\mathcal{G}M(r)}{r^2} \underline{e}_r \quad (30.66)$$

où  $M(r) = \int_{\mathcal{B}_r} \rho \, dv$  est la masse contenue dans la boule  $\mathcal{B}_r$  de centre O et de rayon  $r$ . On utilise le système de coordonnées sphériques d'origine O.

► L'équation de champ régissant la gravitation newtonienne est

$$\operatorname{div} \underline{g} = -4\pi \mathcal{G} \rho \quad (30.67)$$

Calculons le flux de  $\underline{g}$  à travers la sphère  $\partial \mathcal{B}_r$  :

$$\int_{\partial \mathcal{B}_r} \underline{g} \cdot \underline{e}_r \, ds = \int_{\mathcal{B}_r} \operatorname{div} \underline{g} \, dv = -4\pi \mathcal{G} \int_{\mathcal{B}_r} \rho \, dv$$

en utilisant le théorème de la divergence. Ce résultat est en général enseigné directement au travers de la formule dite de Gauss.

Lorsque le corps étudié et sa répartition de masse sont à symétrie sphérique, le champ de gravitation est à symétrie sphérique de la forme  $\underline{g} = g(r) \underline{e}_r$ . Le résultat annoncé s'en

déduit :

$$\int_{\partial B_r} \underline{g} \cdot \underline{\epsilon}_r \, ds = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM(r)$$

### 30.3.2 Planète fluide

Lorsque le milieu constituant la planète est un fluide élastique, qu'il s'agisse d'une phase gazeuse ou liquide, les équations de l'hydrostatique suffisent à déterminer le champ de pression  $p(\underline{x})$  au sein de la planète.

Montrer que, pour un fluide élastique, l'équation de Cauchy (30.65) conduit à l'équation usuelle de l'hydrostatique :

$$\text{grad } p = \rho \underline{g} \quad (30.68)$$

En supposant le fluide de densité homogène  $\rho = \rho_0$  et la planète parfaitement sphérique, i.e.  $\Omega_t$  est une boule de rayon  $R$ , établir le profil de pression au sein de la planète en fonction de  $\rho_0$ ,  $R$  et de la masse totale  $M_J$  de la planète.

Remarquer que le calcul précédent est fait sur la configuration actuelle observable et que l'opérateur gradient porte sur les coordonnées courantes. C'est un cas simple pour lequel la résolution est possible sur la configuration déformée.

**Application numérique :** estimer la pression au centre de la planète Jupiter constituée d'un noyau liquide et d'un manteau gazeux.

On prendra :  $M_J = 1.9 \cdot 10^{27}$  kg,  $R = 70000$  km,  $\rho_0 = 1326$  kg.m<sup>-3</sup>.

Comparer le résultat aux valeurs disponibles sur le net qui vont de  $3 \cdot 10^{12}$  Pa = 3000 GPa à  $10^{13}$  Pa = 10000 GPa selon les sources.

De meilleures estimations peuvent être obtenues en prenant en compte le fait que le noyau de Jupiter, de la taille de la Terre, est constitué de roches silicatées et de fer, et que le manteau est constitué d'hydrogène métallique ou liquide.

► Le tenseur des contraintes d'un fluide élastique admet la représentation pression de la forme :

$$\underline{\sigma} = -p \underline{1}$$

où la pression est une fonction de la masse volumique<sup>9</sup>. On vérifie alors que l'équation (30.65) conduit effectivement à l'équation usuelle de l'hydrostatique.

Dans le cas d'une planète sphérique de masse volumique homogène, cette équation fournit :

$$p' = -\rho_0 \frac{M_J G}{R^3} r$$

car  $M(r) = M_J r^3 / R^3$ , et  $p'$  est la dérivée de la pression par rapport à  $r$ . L'équation s'intègre en

$$p(r) = \rho_0 \frac{M_J G}{2R} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

La constante d'intégration a été déterminée en considérant une pression nulle en  $r = R$ . La pression au centre de la planète est donc

$$p_\odot = \rho_0 \frac{M_J G}{2R} \quad (30.69)$$

Pour Jupiter, on trouve  $p_\odot = 1200$  GPa, c'est-à-dire près de 2 à 5 fois moins que la valeur

9. Une telle représentation n'est pas suffisante pour les fluides visqueux ou viscoélastiques.

annoncée.

Une meilleure estimation peut être obtenue en renonçant à l'hypothèse d'une masse volumique homogène au sein de Jupiter. A partir des informations disponibles sur le net, le noyau de Jupiter est constitué de roches silicatées et de fer, sans doute à l'état liquide, pour  $r \leq R_1 = 6500$  km. Vient ensuite une couche d'hydrogène métallique liquide pour  $R_1 \leq r \leq R_2$  où  $R_2$  est estimé à 30000 km. L'hydrogène liquide ou gazeux constitue les couches supérieures du manteau. Les densités correspondantes de ces trois couches sont respectivement estimées à  $\rho_1 = 25000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\rho_2 = 2100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $\rho_3 = 1240 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Dans chaque domaine, on intègre l'équation

$$p'(r) = -\rho \frac{\mathcal{G}}{r^2} M(r)$$

Cela donne

$$\begin{aligned} p_1(r) &= -\frac{2\pi\mathcal{G}}{3} \rho_1^2 r^2 + C_1, \quad 0 \leq r \leq R_1 \\ p_2(r) &= \frac{4\pi R_1^3 \mathcal{G}}{3r} \rho_2 (\rho_1 - \rho_2) - \frac{2\pi\mathcal{G}}{3} \rho_2^2 r^2 + C_2, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \\ p_3(r) &= \frac{4\pi\mathcal{G}}{3} \rho_3 ((\rho_1 - \rho_2) R_1^3 + (\rho_2 - \rho_3) R_2^3) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \frac{2\pi\mathcal{G}}{3} \rho_3^2 (R^2 - r^2), \\ \text{pour } R_2 &\leq r \leq R \end{aligned}$$

L'expression de  $p_3$  tient compte du fait que  $p_3(r = R) = 0$  tandis que les constantes  $C_1$  et  $C_2$  s'obtiennent en écrivant la continuité de  $p$  en  $R_1$  et  $R_2$ . Le profil de pression ainsi calculé est représenté sur la figure 30.15. On voit clairement la forte augmentation de pression près du centre. La valeur au centre s'approche des valeurs annoncées. Elle est toutefois très sensible au choix de la masse volumique du cœur, valeur qui semble insuffisamment connue.

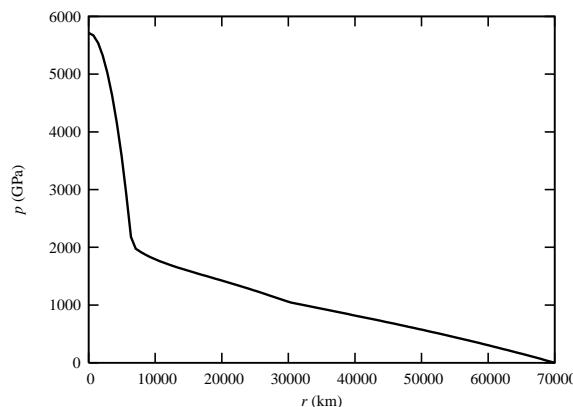


Figure 30.15 : Profil de pression estimé pour la planète Jupiter.

### 30.3.3 Planète solide

Certaines planètes et satellites naturels se présentent sous forme solide. Le but de cette partie est d'examiner la pertinence du traitement de tels corps comme des milieux

élastiques dans l'hypothèse des petites perturbations. Le corps est considéré comme isotrope et homogène de masse volumique  $\rho_0$  et de coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

L'analyse proposée consiste à considérer un corps comme une boule de rayon  $R$  dans sa configuration de référence naturelle et à déterminer les contraintes engendrées par la mise en place des efforts dus à la gravitation. Elle ne prend pas en compte le processus réel de formation de la planète mais elle a le mérite de fournir, dans certaines conditions qui seront discutées, un ordre de grandeur des contraintes régnant dans une planète ou un satellite.

Donner l'équation d'équilibre statique local tenant compte des efforts de gravitation dans le cas d'une planète sphérique homogène, dans l'hypothèse des petites perturbations.

► La première loi de Cauchy s'écrit dans ce cas :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} = \rho_0^2 \frac{4\pi G}{3} r \underline{e}_r \quad (30.70)$$

#### *Équation différentielle régissant le déplacement*

L'inconnue principale du problème est, pour des raisons que l'on indiquera, le déplacement radial  $u(r)$ , fonction de  $r$  seulement. En suivant la méthode des déplacements dans le cas statique, montrer que le déplacement est solution de l'équation différentielle suivante :

$$u'' + \frac{2}{r} u' - \frac{2}{r^2} u - \rho_0^2 \frac{4\pi G}{3(\lambda + 2\mu)} r = 0 \quad (30.71)$$

où  $u'$  est la dérivée de la fonction  $u(r)$  par rapport à  $r$ .

► Le problème est à symétrie sphérique de sorte que le déplacement est de la forme  $\underline{u} = u(r) \underline{e}_r$ . Le gradient de la transformation est calculé dans le système de coordonnées sphériques :

$$\operatorname{grad} \underline{u} = u' \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u}{r} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi) = \underline{\varepsilon}$$

Les contraintes sont calculées grâce à la loi de Hooke :

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)u' + 2\lambda \frac{u}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = 2(\lambda + \mu)\frac{u}{r} + \lambda u'$$

L'équation de bilan (30.70) en coordonnées sphériques fournit la seule équation non triviale suivante :

$$\sigma'_{rr} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) - \rho_0^2 \frac{4\pi G}{3} r = 0 \quad (30.72)$$

En substituant les expressions des contraintes en fonction du champ de déplacement, on trouve l'équation différentielle (30.71).

#### 30.3.4 Détermination complète du déplacement

Montrer que la résolution de l'équation différentielle précédente conduit à un déplacement de la forme

$$u(r) = Ar + Kr^3 \quad (30.73)$$

Déterminer complètement les constantes  $A$  et  $K$  en fonction des propriétés du milieu et de la constante de gravitation.

► L'équation différentielle homogène associée à (30.71) conduit à

$$(u' + \frac{2u}{r})' = 0$$

dont les solutions sont de la forme  $u = Ar + B/r^2$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration. Une solution particulière de (30.71) est  $u = Kr^3$  avec

$$K = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{15(\lambda + 2\mu)} \quad (30.74)$$

L'absence de singularité attendue en  $r = 0$  exige que  $B = 0$ . Le déplacement est donc de la forme (30.73).

La détermination de la constante  $A$  est possible en prenant en compte la condition de surface libre en  $r = R$  puisque la pression atmosphérique est négligée :  $\sigma_{rr}(r = R) = 0$ . Cela fournit

$$A = -\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} KR^2$$

#### Vérification du contexte infinitésimal

Indiquer les conditions garantissant que le contexte infinitésimal est respecté dans l'analyse précédente.

On prêtera une attention toute particulière aux conditions relatives à la linéarisation des efforts volumiques.

**Application numérique :** indiquer dans quelle mesure les conditions précédentes sont satisfaites dans le cas de la Terre :

$$R_{Terre} = 6370 \text{ km}, \quad \rho_{Terre} = 5500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad M_{Terre} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

puis de la Lune :

$$R_{Lune} = 1737 \text{ km}, \quad \rho_{Lune} = 3350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad M_{Lune} = 7.3477 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Dans les deux cas, on prendra les modules de rigidité typiques d'une roche<sup>10</sup> :  $\lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$ .

► Revenons aux expressions des déformations

$$\varepsilon_{rr} = A + 3Kr^2 = K(3r^2 - \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} R^2)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = A + Kr^2 = K(r^2 - \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} R^2)$$

Ces déformations présentent des extrema en  $r = 0$  et  $r = R$ . Le contexte infinitésimal

---

10. Le cas  $\lambda = \mu$  correspond à un coefficient de Poisson égal à 0.25, valeur souvent prise par défaut en l'absence de mesures précises (délicates pour  $\nu$ ).

exige que :

$$|\varepsilon_{rr}(r = 0)| = \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} KR^2 = \left| \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{2\pi\rho_0^2 G}{15(\lambda + 2\mu)} R^2 \right| \ll 1$$

Pour  $\lambda = \mu$ , cette exigence se résume à

$$\frac{22\pi}{225} \frac{\rho_0^2 GR^2}{\mu} \simeq \frac{\rho_0^2 GR^2}{3\mu} \ll 1 \quad (30.75)$$

Quant à

$$\varepsilon_{rr}(r = R) = \frac{4\lambda}{3\lambda + 2\mu} KR^2, \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r = R) = -\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} 2KR^2$$

l'exigence correspondante,

$$\frac{8\pi}{225} \frac{\rho_0^2 GR^2}{\mu} \simeq \frac{\rho_0^2 GR^2}{10\mu} \ll 1$$

est moins sévère que (30.75).

La linéarisation de l'équation d'équilibre statique requiert une linéarisation des efforts volumiques liés à  $\mathbf{g} = g(r)\mathbf{e}_r$  :

$$g(r + u) = g(r) + \frac{\partial g}{\partial r} u + o(u)$$

Le contexte infinitésimal, avec  $g(r) = -\rho_0^2 4\pi Gr/3(\lambda + 2\mu)$ , exige que

$$\left| \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial r} u(r) \right| = \left| \frac{u}{r} \right| \leq 1$$

ce qui est garanti par le fait que  $|\varepsilon_{\theta\theta}| \ll 1$ . La condition de linéarisation des efforts volumiques n'ajoute donc pas de limitation supplémentaire par rapport à (30.75).

Si l'on considère que la constante de gravitation n'est pas un paramètre contrôlable, il résulte de (30.75) que le produit rayon×densité de la planète considérée ne doit pas excéder

$$\rho_0 R = \sqrt{\frac{3\mu}{G}}$$

Dans le cas de la Terre, le terme  $\rho_0^2 GR^2/3\mu$  est de l'ordre de 1, de sorte que le contexte infinitésimal n'est pas respecté. Pour que l'analyse soit pertinente, il faudrait que le rayon de la Terre ne dépasse pas typiquement 1000 km.

Dans le cas de la Lune, le terme  $\rho_0^2 GR^2/3\mu$  est de l'ordre de 0.02, ce qui est acceptable dans le contexte infinitésimal.

Il s'ensuit que l'analyse proposée est pertinente pour la Lune mais pas dans le cas de la Terre.

### 30.3.5 Étude des déformations de la planète

Montrer que tous les points matériels du corps subissent une contraction de leur volume mais qu'il existe un rayon critique, à déterminer, au-delà duquel la déformation radiale,  $\varepsilon_{rr}$ , devient positive.

Calculer la réduction de volume de la planète due aux forces de gravitation.

► La variation relative de volume en un point matériel est donnée, dans le contexte infinitésimal, par la trace du tenseur des déformation :

$$\begin{aligned}\text{trace } \boldsymbol{\xi} &= 3A + 5Kr^2 = K \left( 5r^2 - 3 \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} R^2 \right) \\ &\leq KR^2 \left( 5 - 3 \frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} \right) = -KR^2 \frac{8\mu}{3\lambda + 2\mu} \leq 0\end{aligned}$$

La variation relative de volume est donc négative en tout point.

Cependant une expansion radiale  $\varepsilon_{rr} > 0$  existe toujours pour  $r \geq r_c$  donné par

$$r_c = \sqrt{-\frac{A}{3K}} = R \sqrt{\frac{5\lambda + 6\mu}{3(3\lambda + 2\mu)}}$$

Ce rayon  $r_c$  est toujours inférieur à  $R$  si  $\frac{5\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} < 3$ , ce qui équivaut à  $\lambda > 0$ , condition elle-même équivalente à  $\nu > 0$ . Cette dernière relation, non universelle on le sait, est cependant remplie pour les matériaux typiques constituant les corps célestes. En conséquence, il existe toujours une couche d'expansion radiale près de la surface.

La planète sphérique de rayon  $R$  se transforme en boule de rayon  $R + u(R)$ .

La variation de volume de la planète se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{v}{V} &= \left( 1 + \frac{u(R)}{R} \right)^3 \simeq 1 + 3 \frac{u(R)}{R} \\ \frac{v - V}{V} &= 3A + 3KR^2 = -6KR^2 \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{16\pi\rho_0^2\mathcal{G}R^2}{5(3\lambda + 2\mu)}\end{aligned}$$

*Pression au centre de la planète*

Montrer que la pression  $p_\odot$  au centre de la boule étudiée se met sous la forme

$$p_\odot = \frac{\rho_0 g_R R}{10} \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \quad (30.76)$$

où  $g_R$  est la valeur absolue de l'accélération de la pesanteur à la surface de la planète, et  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau constitutif de la planète.

Comparer cette expression à la relation obtenue pour la planète fluide. Commenter.

**Application numérique :** comparer les pressions obtenues aux valeurs annoncées pour la Lune et pour la Terre, à savoir  $p_\odot = 5$  GPa et  $p_\odot = 350$  GPa, respectivement.

► Les contraintes sont données par les fonctions :

$$\sigma_{rr} = (3\lambda + 2\mu)A + (5\lambda + 6\mu)Kr^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = (3\lambda + 2\mu)A + (5\lambda + 2\mu)Kr^2$$

La pression au centre de la planète est donc

$$\begin{aligned}p_\odot &= -\sigma_{rr}(r = 0) = -\sigma_{\varphi\varphi}(r = 0) = (5\lambda + 6\mu)KR^2 \\ &= 2\pi\rho_0^2\mathcal{G}R^2 \frac{5\lambda + 6\mu}{15(\lambda + 2\mu)} = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}R^2}{15} \frac{3 - \nu}{1 - \nu}\end{aligned} \quad (30.77)$$

L'accélération de la pesanteur à la surface  $r = R$  de la planète est

$$g_R = g(r = R) = \rho_0 R \frac{4\pi G}{3}$$

Le résultat (30.76) en découle.

La relation (30.69) obtenue dans le cas de la planète fluide se met sous la forme

$$p_\odot = \frac{\rho_0 g_R R}{2}$$

Le fluide élastique est obtenu à partir du solide élastique isotrope dans le cas limite où le module de cisaillement s'annule. Dans ce cas la compressibilité est égale au module  $\lambda = \kappa$ . En reprenant l'expression de  $p_\odot$  La relation (30.69) correspond donc au cas limite de l'expression (30.77) utilisant les coefficients de Lamé. Il est possible d'utiliser l'expression comportant  $\nu$ , à conditions de prendre la valeur limite  $\nu = 0.5$  exigée par le fait que la compressibilité du fluide  $3\kappa = E/(1 - 2\nu)$  ne peut prendre une valeur finie que dans ce cas (puisque  $\mu = 0$  implique  $E = 0$ ). Mais ce cas singulier ne doit pas être confondu avec la propriété d'incompressibilité du fluide évidemment non satisfaite ici puisque  $\chi = \lambda = \kappa$  admet une valeur finie caractérisant le fluide élastique. Noter enfin que la relation (30.76) a été obtenue, pour le fluide, dans un contexte plus général, sans faire appel à l'hypothèse des petites perturbations.

L'expression (30.76) fournit les pressions au centre de la Terre et de la Lune :

$$p_\odot^{Terre} = 130 \text{ GPa}, \quad \text{et} \quad p_\odot^{Lune} = 3.5 \text{ GPa}$$

La valeur trouvée pour la Terre a le bon ordre de grandeur mais est néanmoins deux fois plus faible que la valeur attendue. Cela dit, on a vu que l'analyse sort du contexte infinitésimal dans le cas de la Terre. L'ordre de grandeur obtenu pour la Lune est meilleur. A noter que la valeur précédente est obtenue pour  $\nu = 0.25$  correspondant à la roche choisie. Si une valeur  $\nu = 0.5$  est utilisée (cas du fluide élastique), on obtient  $p_\odot = 4.7 \text{ GPa}$ , ce qui est très proche de la valeur annoncée. La Lune possède un noyau liquide et un manteau solide, configuration qui sera prise en compte dans la prochaine partie.

### *Limites de l'approche*

Exprimer les contraintes  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$ . Étudier notamment les valeurs obtenues en surface. En quoi ne sont-elles pas très réalistes ? Quelle(s) hypothèse(s) de l'approche proposée pourrait être remise en question à ce propos ?

Une autre limitation de l'approche est liée au fait que le comportement de la roche est supposé élastique alors que les valeurs numériques obtenues pour la Lune par exemple suggèrent que la limite d'élasticité soit systématiquement dépassée.

Pour le voir, on considère le critère de plasticité de Tresca qui stipule que la limite d'élasticité est atteinte en un point donné lorsque

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_0$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont respectivement la plus grande et la plus petite des contraintes principales en ce point. Le cisaillement maximal est  $\tau_0$ . En imaginant que l'on puisse accroître la constante de gravitation de 0 jusqu'à la valeur connue, indiquer pour quelle valeur de  $G$  et à quel endroit de la planète la plasticité va commencer.

En considérant ensuite la valeur connue de  $G$ , déterminer le rayon maximal du corps céleste solide pour que la limite d'élasticité ne soit jamais atteinte.

**Application numérique :** calculer ce rayon critique pour un corps ayant la même masse volumique que la Lune et une limite d'élasticité typique  $\tau_0 = 100 \text{ MPa}$ . Commenter.

La prise en compte de la plasticité sera considérée à la fin de la partie suivante qui aborde une configuration plus réaliste des corps tels que la Lune et la Terre.

► La valeur des contraintes orthoradielles à la surface de la planète est :

$$\sigma_{\theta\theta}(r = R) = -4\mu K R^2$$

Elle est négative et de l'ordre de -1 GPa dans le cas de la Lune. Pour la Terre, la valeur est de -45 GPa... Cela indique que creuser un tunnel dans le sol serait une tâche particulièrement ardue ! On s'attendrait plutôt à ce que les contraintes orthoradielles soient plutôt quasi-nulles en surface mais l'analyse proposée conduit immanquablement à des contraintes négatives très fortes en surface. Le critère de Tresca n'est pas bien adapté aux roches dont la limite d'élasticité diffèrent en général en traction et en compression mais il sera suffisant, on le verra dans la dernière partie du problème, pour fournir des contraintes orthoradielles plausibles.

Le cisaillement maximal en tout point du corps vaut :

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 4\mu K r^2$$

Il est en outre maximal à la surface  $r = R$ . La plasticité apparaît donc dès que

$$K = \frac{\tau_0}{2\mu R^2} \implies \mathcal{G}_{critique} = \frac{15(\lambda + 2\mu)}{4\pi R^2 \rho_0^2 \mu} \tau_0$$

D'autre part, la plasticité n'apparaîtra pas si le rayon du corps est suffisamment petit

$$4\mu K R^2 < 2\tau_0 \iff R < R_c = \sqrt{\frac{15(\lambda + 2\mu)\tau_0}{4\pi\mu\rho_0^2\mathcal{G}}}$$

Cette valeur critique vaut  $R_c = 420 \text{ km}$  pour la Terre et  $R_c = 690 \text{ km}$  pour la Lune.

### 30.3.6 Planète possédant un noyau fluide et un manteau solide

La structure interne des planètes et satellites comporte souvent un noyau liquide de rayon  $a$  entouré d'un manteau solide d'épaisseur  $R - a$ . L'objectif de cette partie du problème est de la prendre en compte dans l'analyse des contraintes induites par les forces de masse. La Terre comporte en outre une graine solide au sein du noyau. L'existence d'une graine solide n'est pas intégrée dans la présente analyse pour des raisons de brièveté mais conduit à des développements très similaires.

Le noyau et la planète elle-même sont des boules concentriques de rayons  $a$  et  $R$ , respectivement. Pour simplifier le problème, on considérera la même masse volumique de référence  $\rho_0$  pour le manteau et le noyau. Le manteau est constitué d'une roche dont le comportement est décrit par une loi d'élasticité linéarisée (coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ ). L'analyse est réalisée sous l'hypothèse des petites perturbations par rapport à un état naturel de référence pour les deux matériaux.

### *Loi de comportement du noyau fluide*

Le noyau liquide est représenté par un milieu fluide élastique dont la loi de comportement relie la pression à la masse volumique du milieu de la manière suivante :

$$p(\rho) = \chi \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (30.78)$$

où  $\chi$  est la caractéristique élastique du milieu.

Il est possible d'identifier formellement la loi de comportement précédente avec la loi de Hooke d'un solide élastique isotrope. A quelles valeurs des coefficients de Lamé, exprimés en fonction de  $\chi$ , correspond-elle ?

► La représentation des efforts intérieurs du fluide élastique est  $\sigma = -p\mathbf{I}$ . La partie déviatorique des contraintes est nulle ce qui exige  $\mu = 0$  dans la loi de Hooke. La loi de Hooke fournit alors

$$p = -\frac{1}{3} \text{trace } \sigma = -\lambda \text{trace } \varepsilon$$

La trace du tenseur des déformations est reliée à la variation de masse volumique du point matériel par :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \text{trace } \varepsilon \implies \frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \text{trace } \varepsilon$$

dans le contexte infinitésimal. L'identification de la loi de Hooke avec la relation (30.78) conduit donc à  $\chi = \lambda = \kappa$ . Le paramètre  $\chi$  est donc le module de compressibilité du fluide.

### *Détermination du champ de déplacement*

L'inconnue principale du problème est à nouveau la composante radiale du déplacement, notée  $u(r)$  pour  $0 \leq r \leq a$  et  $u_1(r)$  pour  $a \leq r \leq R$ .

Donner les équations différentielles régissant  $u$  et  $u_1$ .

Donner la forme des solutions. Montrer qu'elles font intervenir 4 constantes d'intégration,  $A, A_1, B, B_1$  et les deux constantes :

$$K = \frac{2\pi\rho_0^2 G}{15\chi}, \quad K_1 = \frac{2\pi\rho_0^2 G}{15(\lambda+2\mu)}$$

► Dans le fluide, l'équation d'équilibre est donnée par

$$\text{grad } p = \rho_0 \mathbf{g} = -\frac{4\pi\rho_0^2 G}{3} r \mathbf{e}_r$$

Or  $p = -\chi \text{trace } \varepsilon = -\chi(u' + 2u/r)$ , de sorte que l'équation différentielle dans le fluide est

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u - 10Kr = 0, \quad r \leq a$$

Le déplacement dans le matériau solide est donné par l'équation (30.71) :

$$u_1'' + \frac{2}{r}u_1' - \frac{2}{r^2}u_1 - 10K_1r = 0, \quad a \leq r \leq R$$

Les champs solutions sont de la forme :

$$u(r) = Ar + \frac{B}{r^2} + Kr^3, \quad u_1(r) = A_1r + \frac{B_1}{r^2} + K_1r^3 \quad (30.79)$$

#### *Conditions aux limites et d'interface*

Donner les quatre conditions permettant de déterminer les constantes d'intégration précédentes.

Poser le système d'équations linéaires dont ces constantes sont les solutions. On ne demande pas de résoudre ce système.

► L'absence de singularité dans le noyau exige que  $B = 0$ .

La condition cinématique à l'interface  $r = a$  est que le déplacement y soit continu :

$$Aa + Ka^3 = A_1a + \frac{B_1}{a^2} + K_1a^3 \quad (30.80)$$

Pour passer aux conditions statiques, il faut calculer les contraintes :

$$\sigma_{rr} = \chi(3A + 5Kr^2) = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}, \quad r \leq a$$

$$\sigma_{rr}^1 = (3\lambda + 2\mu)A_1 - 4\mu\frac{B_1}{r^3} + (5\lambda + 6\mu)K_1r^2, \quad a \leq r \leq R$$

$$\sigma_{\theta\theta}^1 = (3\lambda + 2\mu)A_1 + 2\mu\frac{B_1}{r^3} + (5\lambda + 2\mu)K_1r^2a, \quad a \leq r \leq R$$

La condition de surface libre en  $r = R$  se traduit par

$$\sigma_{rr}^1(R) = 0 = (3\lambda + 2\mu)A_1 - 4\mu\frac{B_1}{R^3} + (5\lambda + 6\mu)K_1R^2 \quad (30.81)$$

La continuité du vecteur-contrainte à l'interface  $r = a$  se traduit par la continuité de la composante  $\sigma_{rr}$  :

$$\sigma_{rr}(a) = \sigma_{rr}^1(a) = \chi(3A + 5Ka^2) = (3\lambda + 2\mu)A_1 - 4\mu\frac{B_1}{a^3} + (5\lambda + 6\mu)K_1a^2 \quad (30.82)$$

On est donc amené à résoudre le système portant sur les inconnues  $A, A_1, B_1$  :

$$\begin{bmatrix} 3\lambda + 2\mu & -\frac{4\mu}{R^3} & 0 \\ 3\lambda + 2\mu & -\frac{4\mu}{a^3} & -3\chi \\ a & \frac{1}{a^2} & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(5\lambda + 6\mu)K_1R^2 \\ (5\chi - (5\lambda + 6\mu)K_1)a^2 \\ (K - K_1)a^3 \end{bmatrix}$$

#### *30.3.7 Discussion des résultats*

La résolution du système précédent conduit à la détermination des déplacements, des déformations et des contraintes au sein de la planète. Les profils correspondants sont donnés sur la figure 30.16 pour la Terre et la Lune avec les caractéristiques suivantes : Lune :  $\chi = \lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$ ,  $\rho_0 = 3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $a = 500 \text{ km}$ .

Terre :  $\chi = \lambda = \mu = 30 \text{ GPa}$ ,  $\rho_0 = 5500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $a = 3500 \text{ km}$ .

Commenter l'ensemble de ces résultats. De nombreuses remarques s'imposent.

Finalement, constatez-vous une amélioration du réalisme des résultats par rapport à ceux obtenus en considérant la planète comme un solide homogène ?

► Toutes les courbes présentent soit une discontinuité, soit un changement de pente à l'interface entre le noyau et le manteau. Commençons par les contraintes. Les contraintes radiales s'annulent en surface et sont continues en  $r = a$ , comme il se doit. Les contraintes orthoradielles ne sont pas continues à l'interface, ce qui est licite. Les contraintes radiales et orthoradielles sont égales dans le noyau (tenseur des contraintes sphérique) mais il n'en va pas de même des déformations. Les déformations orthoradielles sont continues à l'interface, au contraire des déformations radiales qui subissent un saut. La continuité des déformations orthoradielles s'explique par le fait que le déplacement est continu tout au long de l'interface  $r = a$ . Les dérivées tangentielles du déplacement de part et d'autre de l'interface doivent donc coïncider. Les déformations sont négatives sauf en ce qui concerne la déformation radiale au-delà d'un rayon critique proche de la surface, comme prévu dans une analyse précédente.

Les ordres de grandeur des déformations de la Lune (2% typiquement) sont acceptables dans le contexte infinitésimal. Ce n'est pas le cas pour la Terre où les déformations dépassent 100%, ce qui ôte toute confiance dans les résultats obtenus même si les ordres de grandeur sont indicatifs.

Les pressions au centre de la planète ne sont pas vraiment modifiées par la prise en compte de la structure interne de la planète, par rapport au cas homogène. Il n'y a donc pas d'amélioration de l'estimation de ces pressions par rapport aux valeurs disponibles.

L'hypothèse d'une masse volumique homogène est acceptable pour la Lune mais pas dans le cas de la Terre ( $\rho_0 = 11000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  dans le noyau et  $\rho_0 = 4500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  dans le manteau), une telle hétérogénéité pourrait être prise en compte aisément.

Cette discussion confirme que l'hypothèse d'élasticité du manteau est discutable. La question de la plasticité est examinée dans la dernière question.

### *Plasticité du manteau*

Pour des planètes suffisamment massives, il est légitime de considérer que l'ensemble des points matériels du manteau ont atteint la limite d'élasticité. En l'absence d'écrouissage ou d'endommagement, ce contexte de plasticité généralisée se traduit par le fait que

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2\tau_0, \quad \text{pour tout } a \leq r \leq R \quad (30.83)$$

En prenant en compte ce fait, reprendre l'équation d'équilibre en contraintes et la résoudre pour les points du manteau.

En supposant que le noyau reste un fluide élastique, obtenir le champ de contraintes sur toute la planète. On ne demande pas de déterminer les déformations, ni le déplacement. Montrer enfin que cette solution fournit une excellente estimation de la pression au centre de la Lune mais aussi des contraintes plausibles en surface, contrairement aux estimations précédentes.

► Dans le noyau fluide, la pression est déduite de l'équation de l'hydrostatique :

$$p' = -\frac{4\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3}r \implies \sigma_{rr} = \frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3}r^2 + C$$

où  $C$  est une constante d'intégration.

Dans le manteau solide, l'équation locale de l'équilibre est donnée par (30.72). Lorsque

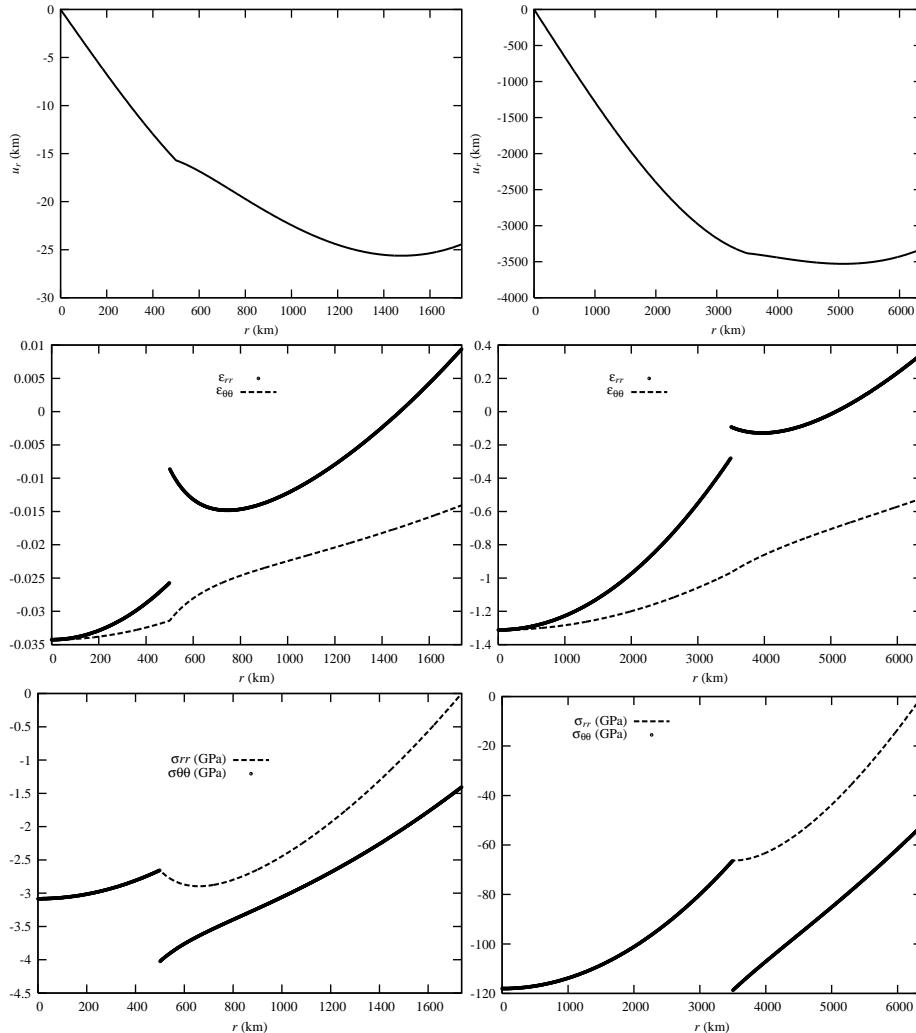


Figure 30.16 : Profils de déplacement (haut), déformations (milieu) et contraintes (bas). Les courbes de la colonne de gauche (resp. droite) concernent la Lune (resp. la Terre).

la condition de plasticité généralisée (30.83) est prise en compte, elle devient :

$$\sigma'_{rr} + \frac{4\tau_0}{r} = \frac{4\pi\rho_0^2 G}{3} r$$

qui s'intègre en

$$\sigma_{rr}^1(r) = \frac{2\pi\rho_0^2 G}{3} (r^2 - R^2) - 4\tau_0 \ln \frac{r}{R} \quad (30.84)$$

La condition  $\sigma_{rr}^1(r = R) = 0$  a été prise en compte.

La constante d'intégration  $C$  s'obtient en écrivant la continuité de  $\sigma_{rr}$  à l'interface. Fina-

lement

$$C = -\frac{2\pi\rho_0^2\mathcal{G}}{3}R^2 - 4\tau_0 \ln \frac{a}{R}$$

La pression au centre de la planète est  $p_\odot = -C$ .

Pour la Lune, on trouve  $p_\odot = 5.2$  GPa, ce qui est en accord avec les valeurs en cours. La solution en plasticité généralisée permet de lever l'objection concernant les contraintes orthoradielles en surface. En effet,  $\sigma_{\theta\theta}(R) = -2\tau_0$ , c'est-à-dire de l'ordre de la limite d'élasticité de la roche ce qui est plausible. Ces résultats sont illustrés sur la figure 30.17.

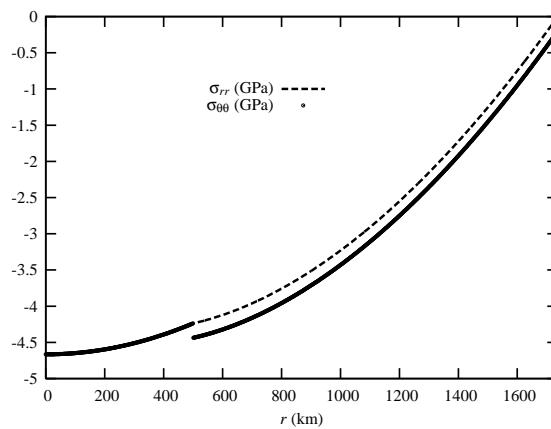


Figure 30.17: Profils des contraintes radiale et orthoradiale dans la Lune en considérant un noyau liquide et un manteau élastoplastique.

### 30.3.8 Complément : aplatissement aux pôles

Il est légitime de se demander si les efforts d'inertie dus à la rotation d'un corps céleste sur lui-même induisent des contraintes suffisantes pour concurrencer celles engendrées par la gravitation. La réponse est négative pour les corps examinés dans le problème précédent, tels que la Lune la Terre ou Jupiter. Pour l'établir, les cas d'une planète fluide et d'une planète solide sont examinés successivement.

#### Planète fluide en rotation

L'hydrostatique des fluides incompressibles permet classiquement de déterminer la forme d'une planète fluide soumise aux efforts de gravitation et à la rotation propre de vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $z$  des pôles. Le champ de pression  $p(r, z)$  est solution de

$$-\text{grad } p + \rho_0 \underline{\mathbf{g}} + \rho_0 \omega^2 r \underline{\mathbf{e}}_r = 0$$

sur la configuration déformée du corps, en coordonnées cylindriques. En adoptant l'expression du champ de gravitation (30.66) pour un corps quasi-sphérique et en supposant une masse volumique homogène  $\rho_0$  (hypothèse équivalente à l'incompressibilité), on obtient :

$$p(r, z) = \rho_0 \omega^2 r - \frac{2\pi}{3} \rho_0^2 \mathcal{G} (r^2 + z^2) + Cste$$

L'équation du bord libre du corps s'obtient en écrivant le lieu des points où la pression s'annule :

$$z^2 + \left(1 - \frac{3}{4\pi} \frac{\omega^2}{\rho_0 G}\right) r^2 = R_{eq}^2$$

où la constante  $R_{eq}$  désigne le rayon de l'équateur la planète déformée. On voit que l'analyse fait intervenir le rapport des effets d'inertie et de gravitation. Le calcul de ce terme pour les planètes envisagées montre que cette perturbation par rapport à 1 est de l'ordre du centième ou du millième. Le rayon aux pôles vaut donc :

$$R_{pole} \simeq R_{eq} \left(1 - \frac{3}{8\pi} \frac{\omega^2}{\rho_0 G}\right)$$

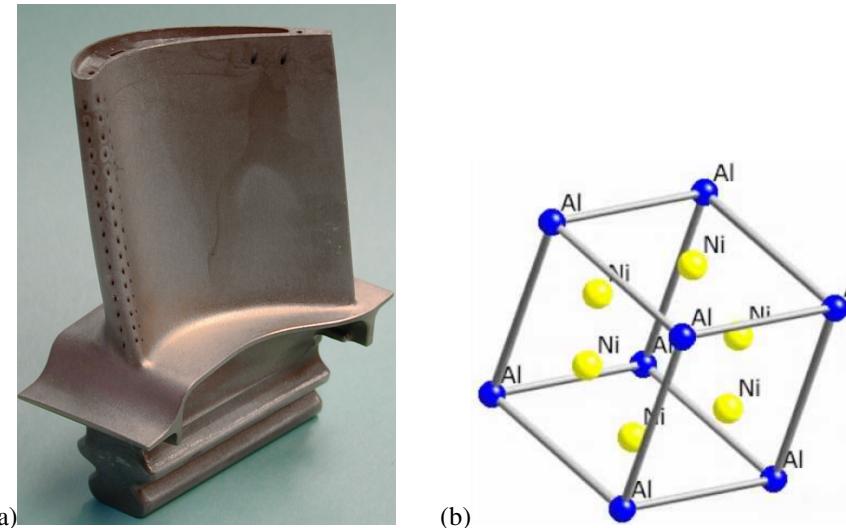
Le calcul dans le cas de la Terre fournit un aplatissement aux pôles de 1/580. C'est la valeur trouvée par Huyghens en 1690. Newton améliore l'estimation en considérant une densité non homogène et se rapproche de la valeur mesurée 1/298.

#### *Planète solide élastique isotrope homogène*

A ce stade il est utile d'aborder le problème des contraintes induites dans une planète solide par les efforts d'inertie de rotation propre. Dans le cadre HPP, la solution de ce problème pourra être superposée à celle trouvée au paragraphe 30.3.3 pour la planète solide soumise aux efforts de gravitation. Les deux contributions pourront être comparées. On voit que l'analyse est très différente dans l'esprit que l'approche hydrostatique précédente.



## 31 Comportement élastique anisotrope des aubes de turbine monocristallines



*Figure 31.1 : Monocristal de superalliage à base de nickel : (a) aube de turbine de moteur d'avion en monocristal (hauteur  $\simeq 10$  cm) ; (b) maille cristalline  $\text{Ni}_3\text{Al}$  cubique à faces centrées.*

Les aubes de turbine des parties chaudes des turboréacteurs de moteurs d'avion, situées à l'aval de la chambre de combustion sont souvent des pièces monocristallines constituées d'un superalliage à base de nickel. L'aube représentée sur la figure 31.1 à gauche est un monocristal métallique d'une dizaine de centimètres de hauteur. Les ingénieurs tirent profit du comportement anisotrope de ce cristal à symétrie cubique en optimisant son orientation par rapport à la direction principale du chargement. L'aube de turbine, accrochée au disque, est en rotation rapide autour de l'axe du disque et subit de ce fait une force d'inertie dans la direction verticale sur la figure 31.1a. On représentera cette sollicitation de manière approchée par un effort de traction dans le problème proposé. De plus, l'aube subit le flux des gaz de combustion qui induit, en particulier, un effort de torsion sur la pale. Ce chargement sera également étudié dans ce chapitre.

Les superalliages à base de nickel comportent aussi une part significative d'aluminium. Ils ont la propriété remarquable d'avoir une limite d'élasticité qui reste très élevée et constante jusqu'à  $800^\circ\text{C}$  avant de décroître progressivement lorsque la température augmente, comme c'est le cas de la plupart des alliages métalliques.

Les monocristaux métalliques présentent un comportement mécanique très anisotrope. L'objectif du problème est d'aborder l'élasticité et la plasticité anisotropes dans le cas de la classe de symétrie cubique qui est celle du matériau monocristallin étudié ici.

On se place dans le contexte infinitésimal et on considère l'état de référence comme naturel. Le comportement du matériau est élastique linéarisé, du moins jusqu'à ce que sa limite d'élasticité soit atteinte. On se place dans des conditions isothermes pour simplifier et on ne considère pas les efforts volumiques.

### 31.1 Préliminaire : le tenseur d'élasticité cubique

Le monocrystal de symétrie cubique est entièrement caractérisé par la maille cristalline élémentaire de forme cubique de la figure 31.1 (à droite) dont les arêtes parallèles aux vecteurs unitaires  $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$  constituent une base orthonormée. On introduit le vecteur directeur d'une des quatre grandes diagonales du cube :

$$\underline{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) \quad (31.1)$$

Il y a trois structures cristallines cubiques : cubique primitive (CP), cubique centrée (CC) et cubique à faces centrées (CFC). La maille du superalliage à base de nickel Ni<sub>3</sub>Al est CFC comme le montre la figure 31.1b, avec les atomes d'aluminium aux sommets et les atomes de nickel au centre des faces du cube. La réplication de la maille élémentaire par les translations  $a(u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k}), \forall u, v, w \in \mathbb{Z}$ , où  $a$  est le paramètre de maille, i.e. la longueur de l'arête du cube élémentaire, permet de pavier l'espace et de décrire le matériau cristallin périodique complet.

#### 31.1.1 Le groupe d'invariance de configuration pour la classe de symétrie cubique

La classe de symétrie cubique contient 5 sous-groupes ponctuels. La maille cristalline de la figure 31.1 respecte les symétries appartenant au groupe  $\mathcal{O}_h$  caractérisé par les générateurs suivants :

$$\underline{R}(2\pi/3\underline{c}), \underline{R}(\pi/2\underline{i}), \underline{R}_j, -\underline{1}$$

d'après (Zheng, 1994). La notation  $\underline{R}(\theta \underline{a})$  désigne la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\underline{a}$ , tandis que  $\underline{R}_j$  désigne la réflexion par rapport au plan de normale  $\underline{j}$ , appelé plan-miroir. La symétrie centrale, ou inversion, est  $-\underline{1}$ . Le groupe complet est obtenu en combinant autant de fois qu'on veut les éléments générateurs. Il contient 48 éléments. Parmi eux, il y a 24 rotations : l'identité, 3 rotations d'angle  $\pi$  par rapport à  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ , 8 rotations d'angle  $\pm 2\pi/3$  par rapport aux 4 grandes diagonales du cube, 6 rotations d'angle  $\pi$  par rapport aux 6 diagonales des faces du cube et les 6 rotations d'angle  $\pm\pi/2$  par rapport aux arêtes du cube. La cellule élémentaire de la figure 31.1 est invariante par application de toutes ces transformations.

Le groupe d'invariance de la configuration de référence dénuée de contrainte (état naturel) considérée dans la suite est exactement le groupe  $\mathcal{O}_h$  ainsi caractérisé.

On admettra l'ensemble de ces résultats.

#### 31.1.2 Tenseur de structure de l'élasticité cubique

Le triplet  $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$  de la maille élémentaire dans la configuration dénuée de contrainte constitue le trièdre directeur caractérisant la matière de symétrie cubique. Dans le contexte infinitésimal, nous ne distinguerons pas les versions lagrangiennes et eulériennes de ces vecteurs. Les tenseurs de structure pour la symétrie cubique sont les tenseurs invariants par les éléments du groupe  $\mathcal{O}_h$ . On montre<sup>1</sup> qu'il y a un seul tenseur de structure pour ce groupe et qu'il est d'ordre 4. Il s'agit de :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \quad (31.2)$$

construit à partir des produits tensoriels des vecteurs du trièdre directeur.  
On admettra ce résultat.

1. cf. (Zheng, 1994).

► Dans la suite, on fera appel à la notation abrégée

$$\underline{u}^4 := \underline{u} \otimes \underline{u} \otimes \underline{u} \otimes \underline{u} \quad (31.3)$$

La notation  $\underline{u}^4$  désigne le tenseur d'ordre 4 obtenu par quatre produits tensoriels.

### 31.1.3 Potentiel d'élasticité cubique linéarisée

Le potentiel d'élasticité linéarisée est une fonction  $\rho\psi(\underline{\xi}, \underline{\mathfrak{T}})$  de la déformation infinitésimale et du tenseur de structure. L'invariance tensorielle de cette fonction exige qu'elle soit isotope par rapport à ses arguments. En se limitant aux termes quadratiques par rapport à  $\underline{\xi}$  (état naturel), montrer que cette fonction dépend de trois invariants mettant en jeu les tenseurs  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\mathfrak{T}}$ .

En déduire qu'il existe trois modules d'élasticité cubique,  $\kappa$ ,  $\mu$  et  $\gamma$  tels que la loi de Hooke s'écrive :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\xi}} = \kappa(\text{trace } \underline{\xi}) \underline{1} + 2\mu \underline{\xi}^{\text{dev}} + 2\gamma \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\xi} \quad (31.4)$$

où  $\underline{\xi}^{\text{dev}}$  désigne la partie déviatrice ou déviateur de  $\underline{\xi}$ . On rappelle la décomposition de tout tenseur d'ordre 2 :

$$\underline{\xi} = \frac{1}{3}(\text{trace } \underline{\xi}) \underline{1} + \underline{\xi}^{\text{dev}}$$

Donner l'expression du potentiel d'élasticité en fonction des 3 modules  $\kappa$ ,  $\mu$  et  $\gamma$ .

Justifier que  $\kappa > 0$ ,  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ .

► Les invariants à recenser comprennent les invariants de  $\underline{\xi}$ , à savoir  $\text{trace } \underline{\xi}$ ,  $\text{trace } \underline{\xi}^2$ ,  $\text{trace } \underline{\xi}^3$  et les invariants combinés de  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\mathfrak{T}}$ . L'invariant joint d'ordre le plus bas est  $\underline{\xi} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\xi}$ . Finalement on a

$$\rho\psi(\underline{\xi}, \underline{\mathfrak{T}}) = \rho\psi(\text{trace } \underline{\xi}, \text{trace } \underline{\xi}^{\text{dev}2}, \underline{\xi} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\xi}) \quad (31.5)$$

où l'on a remplacé  $\text{trace } \underline{\xi}^2$  par  $\text{trace } \underline{\xi}^{\text{dev}2}$ , sans perte de généralité puisque la trace de la déformation est présente par ailleurs. En ne conservant que les termes quadratiques, on obtient :

$$\rho\psi(\underline{\xi}, \underline{\mathfrak{T}}) = \frac{3\kappa}{2}(\text{trace } \underline{\xi})^2 + \mu(\underline{\xi}^{\text{dev}} : \underline{\xi}^{\text{dev}}) + \gamma(\underline{\xi} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\xi}) \quad (31.6)$$

La loi d'élasticité cubique (31.4) s'en déduit. La définition positivité du potentiel garantit la stabilité du matériaux. Elle exige que les trois modules impliqués dans l'expression précédente soit strictement positifs.

L'expression du potentiel précédent est la partie quadratique du potentiel général en hyperélasticité cubique. D'après les résultats théoriques de (Zheng and Spencer, 1993a; Zheng and Spencer, 1993b), utilisés ensuite par (Kambouchev et al., 2007; Schröder et al., 2010; Kim, 2014), le groupe de symétrie  $\mathcal{O}_h$  est caractérisé par un seul tenseur de structure, à savoir  $\underline{\mathfrak{T}}$  défini par (31.2). Le potentiel lagrangien d'un matériau hyperélastique cubique est une fonction de six invariants<sup>2</sup>

$$\rho_0\psi(\underline{C}, \underline{\mathfrak{T}}) = \rho_0\psi(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \quad (31.7)$$

2. (Zheng, 1994) en mentionne 8 mais les auteurs cités par la suite ne font appeler qu'à six invariants.

Il y a 3 invariants individuels et 3 invariants joints/croisés :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{trace } \tilde{\mathbf{C}}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{trace } \tilde{\mathbf{C}}^2, \quad I_3 = \frac{1}{3} \text{trace } \tilde{\mathbf{C}}^3 \\ I_4 &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}}, \quad I_5 = \tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}}^2, \quad I_6 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}}^2 : \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}}^2 \end{aligned}$$

Si l'on ne garde que les contributions quadratiques, il reste  $I_1, I_2$  et  $I_4$  qui ont été utilisés plus haut. La dérivation de ce potentiel par rapport à  $\tilde{\mathbf{C}}$  fournit la loi lagrangienne :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\Pi}} &= \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \mathbf{1} + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \tilde{\mathbf{C}} + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \tilde{\mathbf{C}}^2 + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_4} \tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}} \\ &+ \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_5} (\tilde{\mathbf{T}} : \tilde{\mathbf{C}}^2 + \tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} + (\tilde{\mathbf{C}} : \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{C}})^T) \\ &+ \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_6} (\tilde{\mathbf{C}}^2 : \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{C}} + (\tilde{\mathbf{C}}^2 : \tilde{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{C}})^T) \end{aligned} \quad (31.8)$$

### 31.1.4 Le tenseur d'élasticité linéaire cubique

Vérifier que la loi d'élasticité linéaire (31.4) permet de définir le tenseur d'élasticité d'ordre 4 :

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = 3\kappa \tilde{\mathbf{K}} + 2\mu \tilde{\mathbf{J}} + 2\gamma \tilde{\mathbf{T}} \quad (31.9)$$

tel que  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Les opérateurs d'ordre 4,  $\tilde{\mathbf{I}}$ ,  $\tilde{\mathbf{J}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  sont définis par leur action sur les tenseurs symétriques d'ordre 2 :

$$\tilde{\mathbf{I}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \tilde{\mathbf{J}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{dev}}, \quad \tilde{\mathbf{K}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{3} (\text{trace } \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{1} \quad (31.10)$$

avec la relation  $\tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{J}} + \tilde{\mathbf{K}}$ .

Des notations plus commodes pour manipuler les tenseurs d'élasticité d'ordre 4 dans le cas cubique ont été introduites par (Walpole, 1984) par l'intermédiaire des tenseurs d'ordre 4 suivants :

$$\tilde{\mathbf{L}} := \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{T}}, \quad \tilde{\mathbf{M}} := \tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\mathbf{K}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{K}} + \tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{I}} \quad (31.11)$$

où  $\tilde{\mathbf{T}}$  est le tenseur de structure cubique (31.2). Montrer qu'une écriture alternative de (31.9) est alors :

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} = 3k \tilde{\mathbf{K}} + 2\mu_1 \tilde{\mathbf{L}} + 2\mu_2 \tilde{\mathbf{M}} \quad (31.12)$$

et exprimer les nouveaux modules  $k, \mu_1$  et  $\mu_2$  en fonction des modules précédents  $\kappa, \mu$  et  $\gamma$ .

Quelle relation particulière doivent satisfaire  $k, \mu_1, \mu_2$  pour que l'élasticité cubique devienne isotrope ?

Vérifier, sans longs calculs, ou admettrez, que le tenseur des souplesses, défini comme l'inverse du tenseur des modules d'élasticité, se met sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1} = \frac{1}{3k} \tilde{\mathbf{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \tilde{\mathbf{L}} + \frac{1}{2\mu_2} \tilde{\mathbf{M}} \quad (31.13)$$

tel que  $\underline{\varepsilon} = \underline{\Lambda}^{-1} : \underline{\sigma}$ .

► Les notations introduites permettent de calculer

$$\underline{\Lambda} = 3\kappa\underline{K} + 2\mu(\underline{L} + \underline{M}) + 2\gamma(\underline{K} + \underline{M})$$

de sorte que

$$3k = 3\kappa + 2\gamma, \mu_1 = \mu, \mu_2 = \mu + \gamma \text{ ou } 3\kappa = 3k + 2(\mu_1 - \mu_2), \mu = \mu_1, \gamma = \mu_2 - \mu_1$$

Le cas isotrope est obtenu lorsque le tenseur de structure ne joue pas de rôle, c'est-à-dire lorsque  $\gamma = 0 \implies \mu_1 = \mu_2$ .

Pour établir l'expression (31.13), il suffit de remarquer que, en vertu des définitions (31.10) et (31.11), les opérateurs  $\underline{K}, \underline{L}, \underline{M}$  sont idempotents et deux à deux orthogonaux :

$$\underline{K}^2 = \underline{K}, \quad \underline{L}^2 = \underline{L}, \quad \underline{M}^2 = \underline{M}$$

$$\underline{K} : \underline{L} = \underline{L} : \underline{K} = \underline{L} : \underline{M} = \underline{M} : \underline{L} = \underline{M} : \underline{K} = \underline{K} : \underline{M} = 0$$

On vérifie alors (c'est le mérite de la notation de Walpole) que

$$\underline{\Lambda} : \underline{\Lambda}^{-1} = \underline{\Lambda}^{-1} : \underline{\Lambda} = \underline{I}$$

### 31.1.5 Equivalence avec la notation matricielle usuelle

On considère la déformation d'extension simple dans la direction  $\underline{i}$  du cristal

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon \underline{i} \otimes \underline{i} \quad (31.14)$$

Calculer la contrainte associée  $\underline{\sigma} = \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}$  en fonction de  $\varepsilon, k, \mu_1, \mu_2$ , en utilisant le tenseur d'élasticité cubique (31.12).

On utilisera avec profit les règles de calcul tensoriel suivantes :

$$(\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) \cdot \underline{u} = (\underline{d} \cdot \underline{u}) \underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c}, \quad (\underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d}) : (\underline{u} \otimes \underline{v}) = (\underline{c} \cdot \underline{u})(\underline{d} \cdot \underline{v}) \underline{a} \otimes \underline{b}$$

où  $\underline{d} \cdot \underline{u}$  est le produit scalaire des deux vecteurs  $\underline{d}$  et  $\underline{u}$ .

Pour vous entraîner à manipuler ces opérations, montrer que :

$$\underline{\mathfrak{T}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) = \underline{i} \otimes \underline{i}, \quad \underline{\mathfrak{T}} : (\underline{j} \otimes \underline{k}) = 0$$

Les ingénieurs travaillant sur les milieux anisotropes, tels que les composites, utilisent également la notation matricielle suivante en considérant les composantes des différents tenseurs dans la base orthonormée privilégiée liée au cristal  $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ . Il est en effet possible de ranger les composantes indépendantes de  $\Lambda_{pqrs}$  dans une matrice  $6 \times 6 C_{ij}$  de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (31.15)$$

où  $C_{11}, C_{12}, C_{44}$  sont les trois modules indépendants intervenant dans cette représentation. Ecrite par rapport à une autre base que la base privilégiée  $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ , la matrice  $6 \times 6$  comporterait moins de composantes nulles et le fait qu'elle ne dépende que de trois constantes indépendantes ne serait pas apparent.

Grâce au calcul des contraintes pour l'extension simple considérée ici, identifier  $C_{11}$  et  $C_{12}$  en fonction de  $k$  et  $\mu_2$ .

Comment identifier  $C_{44}$  ?

Quelle est la condition portant sur les modules  $C_{ij}$  pour que l'élasticité soit isotrope ?

On définit le coefficient ou facteur d'anisotropie  $A$  :

$$A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (31.16)$$

Que vaut  $A$  dans le cas particulier isotrope ?

► Pour faire le calcul des contraintes associées à l'extension simple selon  $\underline{i}$ , on commence par évaluer successivement

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= \frac{1}{3}(\underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) \\ \underline{\underline{L}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= 0 \\ \underline{\underline{M}} : (\underline{i} \otimes \underline{i}) &= \frac{2}{3}\underline{i} \otimes \underline{i} - \frac{1}{3}(\underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\underline{\sigma} = k\varepsilon(\underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}) + \frac{2\mu_2\varepsilon}{3}(2\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{j} \otimes \underline{j} - \underline{k} \otimes \underline{k})$$

et les composantes correspondantes dans la base  $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$  fournissent les relations cherchées en substituant  $\varepsilon_{11} = \varepsilon$ , dans la relation matricielle (31.15) :

$$\sigma_{11} = (k + \frac{4}{3}\mu_2)\varepsilon = C_{11}\varepsilon, \quad \sigma_{22} = (k - \frac{2}{3}\mu_2)\varepsilon = C_{12}\varepsilon$$

et finalement :

$$C_{11} = k + \frac{4}{3}\mu_2, \quad C_{12} = k - \frac{2}{3}\mu_2$$

On trouve  $C_{44} = \mu_1$  en considérant une déformation de cisaillement  $\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{12}(\underline{i} \otimes \underline{j} + \underline{j} \otimes \underline{i})$ . Inversement,

$$2\mu_2 = C_{11} - C_{12}, \quad \mu_1 = C_{44}, \quad 3k = C_{11} + 2C_{12}.$$

Le cas particulier isotrope est obtenu lorsque  $\mu_1 = \mu_2$  et donc

$$A = \frac{C_{11} - C_{12}}{2C_{44}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 1$$

### 31.2 Traction simple d'une barre monocristalline en élasticité cubique

On considère le champ de contrainte de traction simple dans la direction du vecteur  $\underline{d}$  (unitaire) :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (31.17)$$

où  $\sigma$  est la contrainte de traction imposée.

### 31.2.1 Calcul de la déformation de traction

Le tenseur des déformations associé aux contraintes (31.17) se calcule par l'inverse de la loi de Hooke cubique (31.13) :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\Lambda}^{-1} : \underline{\sigma} \quad (31.18)$$

Exprimer  $\underline{\varepsilon}$  en fonction des produits tensoriels  $\underline{d} \otimes \underline{d}, \underline{i} \otimes \underline{i}, \underline{j} \otimes \underline{j}, \underline{k} \otimes \underline{k}$ , de  $\sigma$  et des modules  $k, \mu_1, \mu_2$ .

► La forme (31.13) du tenseur des souplesses est utilisée pour calculer la déformation :

$$\underline{\Lambda}^{-1} = \frac{1}{3k} \underline{K} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\underline{L}} + \frac{1}{2\mu_2} \underline{\underline{M}} = \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2\mu_2}\right) \underline{\underline{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\underline{I}} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right) \underline{\underline{\mathfrak{T}}}$$

de sorte que

$$\underline{\varepsilon} = \left(\frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2}\right) \sigma \underline{\underline{1}} + \frac{\sigma}{2\mu_1} \underline{d} \otimes \underline{d} + \sigma \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right) \underline{\underline{\mathfrak{T}}} : (\underline{d} \otimes \underline{d})$$

Le dernier terme se calcule de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\mathfrak{T}}} : (\underline{d} \otimes \underline{d}) = (\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : (\underline{d} \otimes \underline{d}) = (\underline{d} \cdot \underline{i})^2 \underline{i} \otimes \underline{i} + (\underline{d} \cdot \underline{j})^2 \underline{j} \otimes \underline{j} + (\underline{d} \cdot \underline{k})^2 \underline{k} \otimes \underline{k}$$

### 31.2.2 Module de Young dans la direction $\underline{d}$

Contrairement au cas de l'élasticité isotrope, il n'y a pas de module de Young unique en élasticité cubique. On appelle module de Young  $E_d$  dans la direction  $\underline{d}$  le rapport entre la contrainte axiale et la déformation dans la direction de traction :

$$E_d = \frac{\sigma}{\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}} \quad (31.19)$$

En utilisant les résultats de la question précédente, évaluer d'abord la déformation dans la direction de traction, c'est-à-dire  $\underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d}$ , puis montrer que l'inverse du module de Young dans la direction  $\underline{d}$  s'écrit :

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right) (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) \quad (31.20)$$

où les composantes  $d_l$  du vecteur  $\underline{d}$  sont dans la base  $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ .

► En effet, l'utilisation de l'expression de  $\underline{\varepsilon}$  trouvée dans la question précédente, permet de calculer

$$\frac{1}{\sigma} \underline{d} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right) ((\underline{d} \cdot \underline{i})^4 + (\underline{d} \cdot \underline{j})^4 + (\underline{d} \cdot \underline{k})^4)$$

A noter deux expressions alternatives en fonction des souplesses élastiques données par exemple par (Cazzani and Rovati, 2003; Cazzani and Rovati, 2005) :

$$\frac{1}{E_d} = S_{12} + \frac{S_{44}}{2} + \frac{1}{2}(2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) \quad (31.21)$$

$$= S_{11} - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2) \quad (31.22)$$

### 31.2.3 Module de Young selon trois directions du cristal

Donner successivement les modules de Young lorsque  $\underline{d} = \underline{i}$ , puis  $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$  et enfin  $\underline{d} = \underline{c} = (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})/\sqrt{3}$ .

Commenter les résultats.

Faire l'application numérique dans le cas du monocristal de nickel en utilisant les valeurs des modules d'élasticité de la table 31.1.

Commenter également les propriétés élastiques rassemblées dans ce tableau pour plusieurs métaux purs.

► Si  $\underline{d} = \underline{i}$ ,  $\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11}$  en introduisant les souplesses  $S_{ij}$ . D'après la relation (31.20), on trouve

$$\frac{1}{E_{100}} = S_{11} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{3\mu_2}$$

En utilisant les relations entre les modules  $k, \mu_1, \mu_2$  et les modules  $C_{ij}$ , on obtient une expression alternative :

$$S_{11} = \frac{1}{3(C_{11} + 2C_{12})} + \frac{2}{3(C_{11} - C_{12})} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}$$

De plus, on s'intéresse à la déformation latérale :

$$\frac{\varepsilon_{22}}{\sigma} = \frac{\underline{j} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{j}}{\sigma} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})} = S_{12}$$

De plus,  $S_{44} = 1/C_{44}$ .

Si  $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j})/\sqrt{2}$ ,

$$\frac{1}{E_{110}} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{4\mu_2} - \frac{1}{4\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{4\mu_1} + \frac{1}{12\mu_2}$$

Si  $\underline{d} = (\underline{i} + \underline{j} + \underline{k})/\sqrt{3}$ ,

$$\frac{1}{E_{111}} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{6\mu_2} - \frac{1}{6\mu_1} = \frac{1}{9k} + \frac{1}{3\mu_1}$$

Remarquer que

$$\frac{1}{E_{111}} - \frac{1}{E_{100}} = \frac{1}{3}(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}), \quad \frac{1}{E_{110}} - \frac{1}{E_{100}} = \frac{1}{4}(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2})$$

Les positions relatives de ces modules dépendent du signe de la différence  $\mu_1 - \mu_2$ . Si cette différence est positive, i.e.  $\mu_1 \geq \mu_2$  et  $A \geq 1$ , on a l'encadrement :

$$E_{100} \leq E_{110} \leq E_{111} \tag{31.23}$$

Noter que le module dans les directions  $\underline{j}$  et  $\underline{k}$  sont bien entendu identiques au module selon  $\underline{i}$  puisque ces trois directions sont équivalentes du point de vue du groupe de symétrie. Des remarques similaires s'appliquent aux modules selon  $\underline{i} + \underline{j}, \underline{i} - \underline{j}, \underline{j} + \underline{k}$ , etc. L'égalité est obtenue pour  $\mu_1 = \mu_2$ , comme attendu. Le sens des inégalités doit être

Elément	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$	$k$	$\mu_1$	$\mu_2$	$A$
aluminium (CFC)	108.2	61.3	28.5	76.9	28.5	23.5	1.22
cuivre (CFC)	168.4	121.4	75.4	137.1	75.4	23.5	3.21
nickel (CFC)	246.5	147.3	124.7	180.4	124.7	49.6	2.51
fer (CC)	228	132	116.5	164	116.5	48	2.43
niobium (CC)	245.5	139	29.3	174.5	29.3	53.4	0.55

Tableau 31.1: Modules d'élasticité ( $C_{IJ}$  en GPa) de plusieurs monocristaux à structure cubique (d'après (Shuvalov, 1988) p. 86). CFC et CC désignent respectivement les structures cubique à faces centrées et cubique centrée. Le coefficient d'anisotropie  $A$  est sans dimension.

inversé si  $A \leq 1$ . Dans le cas du nickel, on trouve

$$E_{001} = 136.3 \text{ GPa}, \quad E_{011} = 232.5 \text{ GPa}, \quad E_{111} = 304 \text{ GPa}$$

Ces valeurs sont bien rangées dans l'ordre prévu et il est à noter que le module selon la direction  $\underline{c}$ , notée [111] en cristallographie, est plus de deux fois supérieur au module de Young le long de l'arête du cube.

Le tableau 31.1 montre que 4 des 5 métaux présentés possèdent un coefficient d'anisotropie supérieur à 1. Seul le niobium, cubique centré, possède un facteur d'anisotropie plus petit que 1. Pour ce métal, le module de Young selon la direction [111] est donc plus petit que celui dans la direction  $\underline{i}$ , notée [100], au contraire des autres métaux considérés.

Une représentation 3D du module de Young donné par la formule (31.20) en fonction des directions de sollicitation fait l'objet de la figure 31.2 pour les 5 métaux du tableau 31.1. On y voit les mimima et maxima qui sont étudiés dans la suite.

#### 31.2.4 Modules de Young extrémaux

Déterminer les extrema du module de Young (31.20) en fonction de la direction de traction  $\underline{d}$ . Donner les valeurs de ces extrema et les directions pour lesquelles ces extrema sont atteints.

Commenter.

► On considère le lagrangien

$$\mathcal{L}(d_1, d_2, d_3) = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left(\frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1}\right)(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4) - \lambda(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - 1)$$

où la contrainte  $\|\underline{d}\|^2 = 1$  a été introduite avec le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . La dérivée du lagrangien par rapport à chaque composante  $d_l$  ( $l$  fixé) doit s'annuler :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_l} = 2\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)d_l^3 - 2\lambda d_l = 0$$

On obtient les trois équations suivantes

$$d_l\left(\lambda - \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)d_l^2\right) = 0, \quad l = 1, 2, 3$$

Il faut distinguer les cas suivants :

(i)  $d_1 = d_2 = 0$  : on a alors  $d_3 = 1$  et  $E_d = E_{100} = S_{44}^{-1}$ .

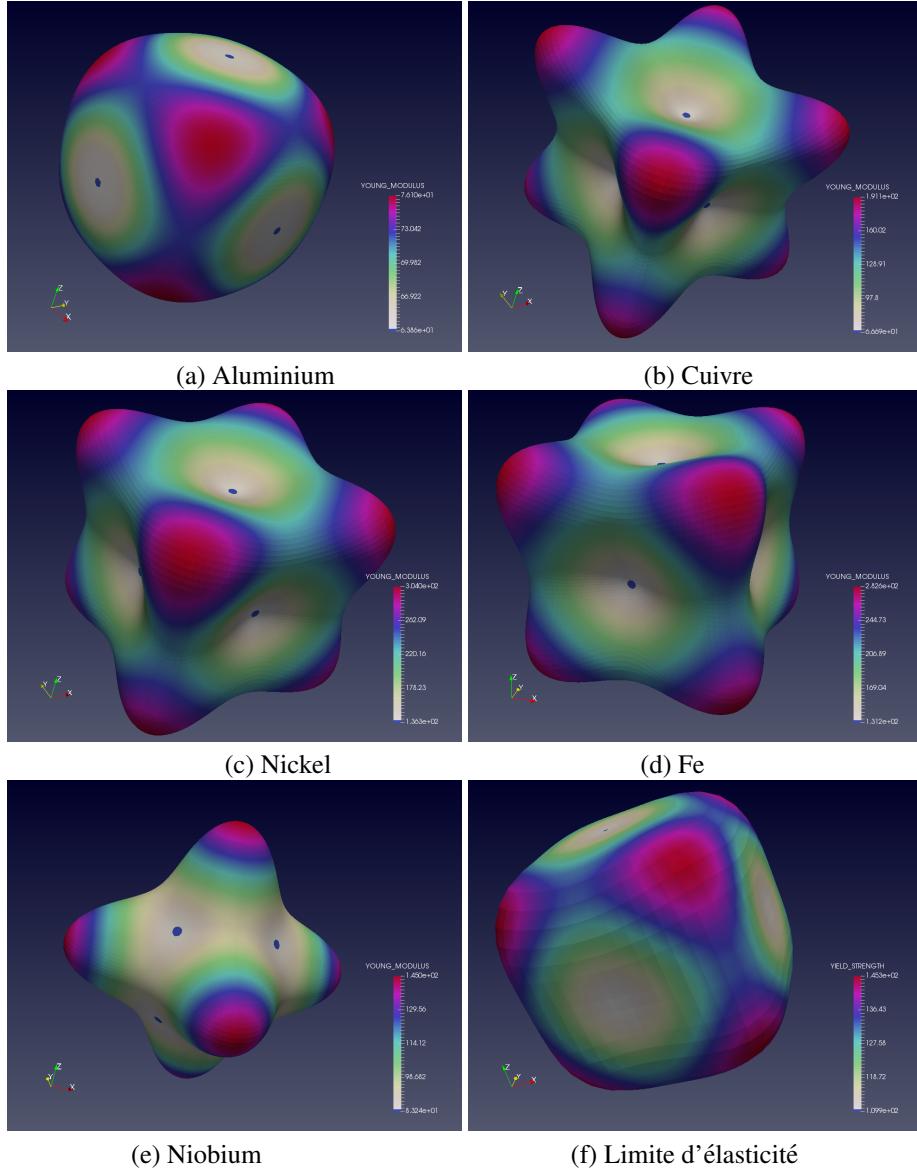


Figure 31.2 : Représentation tridimensionnelle du module de Young selon les directions de sollicitation dans le repère du cristal pour différents monocristaux métalliques : aluminium, cuivre, nickel, fer et niobium. La figure (f) présente la limite d'élasticité pour le critère cubique (31.34) avec les valeurs :  $\sigma_0 = 130 \text{ MPa}$ ,  $F = 0.6$ ,  $L = 0.8$ . Ces images ont été réalisées par Housse Eddine-Chaieb et Kais Ammar.

(ii)  $d_1 = 0$  et  $d_2 \neq 0$  : alors on exprime  $\lambda$  en fonction de  $d_2^2$  et la dernière équation donne  $d_2^2 = d_3^2 = 1/2$ . Finalement  $d_2 = \pm 1/\sqrt{2}$  et  $E_d = E_{110}$ , déterminé précédemment.  
 (iii) Si aucune composante de  $\underline{d}$  n'est nulle, alors on doit avoir  $d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = 1/3$ . Il

s'agit du module  $E_{111}$  déterminé précédemment.

On a vu que si  $\mu_1 \geq \mu_2$ , i.e.  $A \geq 1$ , alors les trois modules trouvés sont rangés dans l'ordre (31.23). Le module  $E_{111}$  correspond au maximum global tandis que le minimum global est atteint pour la direction [100]. L'orientation [110] correspond à un extremum local. C'est l'inverse dans le cas du niobium.

### 31.3 Torsion d'une barre monocristalline en élasticité cubique

On considère maintenant le problème de la torsion d'une barre de section circulaire constituée d'un superalliage à base de nickel monocristallin. La section du cylindre est un disque de rayon  $R$ , la longueur de la barre est  $\ell$  et l'axe du cylindre est parallèle à la direction  $e_3$  de la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  représentée sur la figure 23.1 du chapitre 23.

On applique le couple  $\underline{M} = C\underline{e}_3$  à l'extrémité  $x_3 = \ell$  et le couple opposé à sa base. Les surfaces latérales de la barre sont libres de tout effort. Le comportement du matériau constitutif de la barre obéit à la loi d'élasticité cubique linéaire décrite par les équations (31.12).

L'objectif de cette section est de montrer que la réponse du cylindre dépend de l'orientation du cristal, c'est-à-dire du trièdre directeur matériel  $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$  par rapport au repère  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  attaché à la barre.

On propose de mettre en œuvre la méthode des déplacements déjà utilisée dans le cas isotrope en partant d'un champ de la forme :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha X_2 X_3 \\ u_2 = \alpha X_1 X_3 \\ u_3 = \alpha \varphi(X_1, X_2) \end{cases} \quad (31.24)$$

où le déplacement  $u_3$ , faisant intervenir la fonction inconnue  $\varphi$ , correspond à un gauchissement de la surface  $X_3 = Cste$  après déformation. Les coordonnées du point matériel dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  sont  $X_1, X_2, X_3$ . Le coefficient  $\alpha$  désigne un angle par unité de longueur.

#### 31.3.1 Torsion d'une barre parallèle à $\underline{k}$

On commence par le cas où le trièdre directeur est parallèle aux vecteurs de la base considérée :

$$\underline{e}_1 = \underline{i}, \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \underline{k}$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à l'une des arêtes du cube de la maille cristalline de la figure 31.1.

Le champ des déformations qui se déduit de (31.24) se met sous la forme

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13}(\underline{i} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{i}) + \varepsilon_{23}(\underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j}) \quad (31.25)$$

1. Exprimer  $\varepsilon_{13}$  et  $\varepsilon_{23}$  en fonction de  $\alpha, X_1, X_2$  et de  $\varphi$ .
2. Calculer les contraintes en utilisant la loi d'élasticité cubique (31.12).
3. Donner alors les conditions que doit vérifier la fonction de gauchissement.
4. Conclure et donner l'expression finale des contraintes.
5. Etablir enfin la relation liant le couple et l'angle par unité de longueur pour la torsion par rapport à l'axe  $e_3 = \underline{k}$  :

$$\mathcal{C} = \mu_1 \frac{\pi R^4}{2} \alpha \quad (31.26)$$

Commenter le résultat.

**Tenseur de structure cubique**

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k} \otimes \underline{k}$$

**Tenseur des modules d'élasticité cubique**

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = 3\kappa(\text{trace } \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{1} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{dev}} + 2\gamma \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}} = 3\kappa \underline{\underline{K}} + 2\mu \underline{\underline{J}} + 2\gamma \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} = 3k \underline{\underline{K}} + 2\mu_1 \underline{\underline{L}} + 2\mu_2 \underline{\underline{M}}$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{K}}, \quad \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Sigma}}, \quad \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{\Sigma}} - \underline{\underline{K}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{L}} + \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}}$$

**Tenseur des souplesses**

$$\underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \frac{1}{3k} \underline{\underline{K}} + \frac{1}{2\mu_1} \underline{\underline{L}} + \frac{1}{2\mu_2} \underline{\underline{M}}$$

**Relations entre les modules**

$$C_{11} = k + \frac{4}{3}\mu_2, \quad C_{12} = k - \frac{2}{3}\mu_2, \quad C_{44} = \mu_1$$

$$2\mu_2 = C_{11} - C_{12}, \quad \mu_1 = C_{44}, \quad 3k = C_{11} + 2C_{12}$$

$$S_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{12} = \frac{-C_{12}}{(C_{11} + 2C_{12})(C_{11} - C_{12})}, \quad S_{44} = 1/C_{44}$$

**Coefficient d'anisotropie**

$$A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

**Module de Young dans une direction  $\underline{d}$** 

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{9k} - \frac{1}{6\mu_2} + \frac{1}{2\mu_1} + \left( \frac{1}{2\mu_2} - \frac{1}{2\mu_1} \right) (d_1^4 + d_2^4 + d_3^4)$$

$$\frac{1}{E_d} = S_{12} + \frac{S_{44}}{2} + \frac{1}{2}(2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4)$$

$$\frac{1}{E_d} = S_{11} - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{44})(d_1^2 d_2^2 + d_2^2 d_3^2 + d_3^2 d_1^2)$$

**Critère de plasticité et limite d'élasticité en traction**

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\underline{\Sigma}}) = \left( F \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} + L \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$$

$$Y(\underline{d}) = \sigma_0 \left( F + \frac{3}{2} L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2}$$

Tableau 31.2: Récapitulatif : Elasticité linéaire cubique.

► Comme dans le chapitre 23 traitant du cas d'un matériau isotrope, les seules composantes non nulles de déformations sont

$$\varepsilon_{13} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} - X_2 \right), \quad \varepsilon_{23} = \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} + X_1 \right)$$

Pour calculer les contraintes, on évalue

$$\underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon} = 2\mu_1 \underline{L} : \underline{\varepsilon} + 2\mu_2 \underline{M} : \underline{\varepsilon} = 2\mu_1 \underline{\varepsilon} + 2(\mu_1 - \mu_2) \underline{\Sigma} : \underline{\varepsilon} \quad (31.27)$$

car  $\underline{K} : \underline{\varepsilon} = 0$  en raison de la nullité de la trace des déformations (31.25). Il s'avère que la forme (31.25) implique

$$(\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{\varepsilon} = 0$$

Par conséquent, la forme des contraintes obtenue est la même que dans le cas isotrope en remplaçant  $\mu$  par  $\mu_1$ .

On montre alors que la fonction de gauchissement est harmonique et vérifie les mêmes conditions (23.31) que dans le cas isotrope. Cette condition devient (23.48) dans le cas de la section circulaire ce qui implique que  $\varphi = 0$  comme dans le cas du matériau isotrope. Le calcul du moment de torsion résultant est alors identique au cas isotrope, au prix de remplacer  $\mu$  par  $\mu_1$ . La relation (31.26) en découle.

Nous venons de montrer que l'analyse de la torsion d'une barre monocristalline cubique dont l'axe est parallèle à un des vecteurs du trièdre directeur conduit à des résultats formellement identiques au cas isotrope. Les contraintes ne font intervenir que le module  $\mu_1$

$$\sigma_{13} = -\mu_1 \alpha X_2, \quad \sigma_{23} = \mu_1 \alpha X_1 \quad (31.28)$$

et il n'y a pas de gauchissement lorsque la section est un disque.  
Il en va tout autrement dans le cas de la

### 31.3.2 Torsion d'une barre d'axe parallèle à $\underline{i} + \underline{k}$

On considère cette fois-ci une barre de section circulaire dont les axes sont orientés de la façon suivante par rapport au trièdre directeur cristallographique :

$$\underline{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{i} - \underline{k}), \quad \underline{e}_2 = \underline{j}, \quad \underline{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{i} + \underline{k}) \quad (31.29)$$

Cela signifie que l'axe de la barre est parallèle à la diagonale d'une des faces du cube de la maille cristalline de la figure 31.1.

On adopte ici aussi la proposition (31.24) pour le champ de déplacements. Le tenseur des déformations reste de la forme :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_{13} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) + \varepsilon_{23} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2) \quad (31.30)$$

1. Exprimer ce tenseur en fonction de produits tensoriels impliquant uniquement  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ .
2. Calculer ensuite le tenseur des contraintes en utilisant la loi (31.12).
3. Exprimer enfin ce tenseur des contraintes en fonction de produits tensoriels de  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ .
4. Donner l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire la fonction de gauchissement. Cette fonction est-elle harmonique ?
5. Donner les conditions de bord correspondantes.

6. Trouver la fonction de gauchissement associée. Vérifiez qualitativement que cette fonction conduit au gauchissement illustré sur la figure 31.3. Commenter.
7. Finalement, montrer que les seules composantes de contraintes non nulles s'expriment de la manière suivante :

$$\sigma_{13} = -2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_2, \quad \sigma_{23} = 2\alpha \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} X_1 \quad (31.31)$$

8. Calculer alors la force et le moment de torsion résultant sur la surface supérieure  $S_\ell$ .
9. Donner la relation entre le couple  $\mathcal{C}$  et l'angle par unité de longueur  $\alpha$ .

► D'après l'orientation (31.29), on trouve

$$\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 = \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{j}} + \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{j}} \otimes \underline{\mathbf{k}} + \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{j}})$$

Les contraintes de calculent en utilisant à nouveau (31.27). En particulier, on utilise

$$\underline{\mathfrak{T}} : (\underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}) = \underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mu_1 \underline{\varepsilon} + 2\varepsilon_{13}(\mu_2 - \mu_1)(\underline{\mathbf{i}} \otimes \underline{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}) = 2\mu_1 \underline{\varepsilon} + 2\varepsilon_{13}(\mu_2 - \mu_1)(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1)$$

et finalement

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = 2\varepsilon_{13}\mu_2(\underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1) + 2\varepsilon_{23}\mu_1(\underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2)$$

$$\sigma_{13} = \alpha\mu_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_1} - X_2\right), \quad \sigma_{23} = \alpha\mu_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2} + X_1\right)$$

Les équations d'équilibre exigent que

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = \alpha\mu_2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial X_1^2} + \alpha\mu_1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial X_2^2} = 0 \quad (31.32)$$

La fonction de gauchissement n'est harmonique que dans le cas très particulier  $\mu_1 = \mu_2$ , c'est-à-dire le cas isotrope, bien connu. La conditions de bord libre sur les surfaces latérales exigent que  $\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = 0$  avec  $\underline{\mathbf{n}} = n_1\underline{\mathbf{e}}_1 + n_2\underline{\mathbf{e}}_2$ . La troisième composante du vecteur-contrainte fournit

$$\mu_2 \frac{\partial\varphi}{\partial X_1} n_1 + \mu_1 \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} n_2 = \mu_2 X_2 n_1 - \mu_1 X_1 n_2 \quad (31.33)$$

Dans le cas de la section circulaire, la dernière condition devient

$$\mu_2 \frac{\partial\varphi}{\partial X_1} X_1 + \mu_1 \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} X_2 = (\mu_2 - \mu_1)X_1 X_2$$

La fonction nulle n'est pas solution de cette équation de sorte qu'un gauchissement existe bel et bien pour la torsion d'une barre monocristalline possédant cette orientation particulière. En recherchant une fonction quadratique par rapport à  $X_1$  et  $X_2$ , on trouve

$$\varphi(X_1, X_2) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} X_1 X_2$$

Elle est nulle, comme il se doit, dans le cas isotrope  $\mu_1 = \mu_2$ .

Cette fonction de gauchissement conduit effectivement aux contraintes (31.31).

Calculons alors la résultante des efforts sur la section circulaire :

$$\underline{R} = \int_{S_\ell} \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_3 dS = \int_{S_\ell} \sigma_{13} dS \underline{e}_1 + \int_{S_\ell} \sigma_{23} dS \underline{e}_2 = 0$$

car l'origine du repère est le centre de gravité de la section. Le moment résultant se réduit à la composante de torsion autour de  $\underline{e}_3$  :

$$C = \int_{S_\ell} (X_1 \sigma_{23} - X_2 \sigma_{13}) dS = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\pi R^4}{2} \alpha$$

On retrouve le résultat du cas isotrope lorsque  $\mu_1 = \mu_2$ .

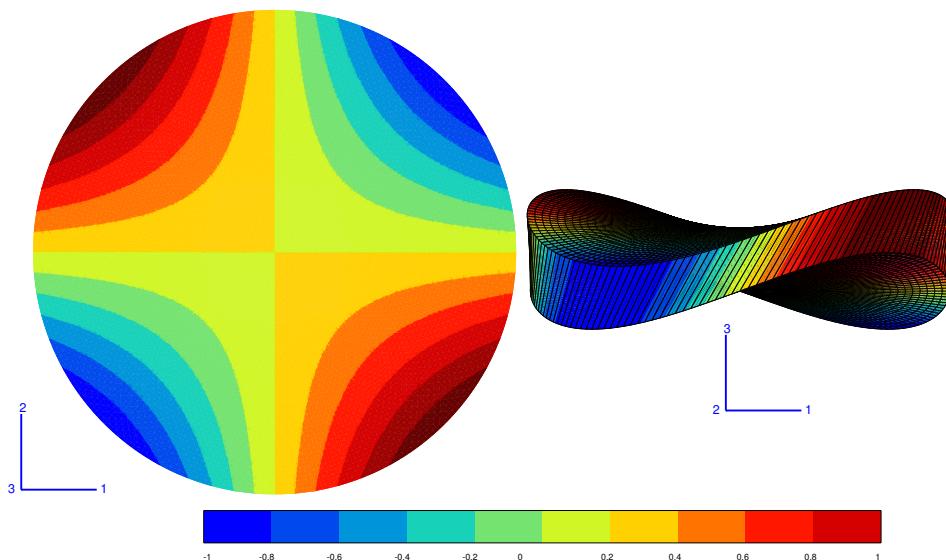


Figure 31.3 : Champ de déplacement  $u_3$  sur un tronçon de la barre en torsion dont l'axe est orienté parallèlement à  $\underline{i} + \underline{k}$  : lignes de niveau dans la section (valeurs normalisées par la valeur maximale, à gauche), vue latérale du tronçon déformé (déplacement exagérés d'un facteur 10), à droite.

### 31.4 Critère de plasticité cubique

Le dimensionnement des aubes de turbine monocristallines nécessite de prendre en compte la limite d'élasticité du monocristal de superalliage à base de nickel pour tout type de chargement. Pour cela, il faut élaborer un critère de plasticité, à savoir une fonction des contraintes généralisant les critères de Tresca ou von Mises, valides pour les matériaux isotropes, au cas de la symétrie cubique. Tout comme le potentiel d'élasticité, le critère de plasticité doit être une fonction tensorielle des contraintes et du tenseur de structure, i.e. une fonction isotrope par rapport aux deux arguments. La dépendance est toutefois restreinte au déviateur des contraintes car on sait que le comportement plastique des métaux est généralement insensible à la pression hydrostatique. En se limitant

à une forme quadratique<sup>3</sup> comme pour le potentiel d'élasticité, on est alors en mesure de proposer le critère de plasticité suivant :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\mathfrak{T}}) = \left( F \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} + L \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \quad (31.34)$$

où  $F, L$  et  $\sigma_0$  sont les trois paramètres du modèle de plasticité. Tant que  $f(\underline{\sigma}, \underline{\mathfrak{T}})$  est négative, le comportement du matériau reste élastique. Lorsque  $f(\underline{\sigma}, \underline{\mathfrak{T}}) = 0$ , la limite d'élasticité est atteinte. La présence commode du facteur  $\sqrt{2/3}$  est purement conventionnelle. Dans le critère apparaît la contrainte équivalente définie par

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( F \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} + L \underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} \right)^{1/2} \quad (31.35)$$

que l'on peut interpréter comme une norme anisotrope du tenseur des contraintes. Pour des raisons de stabilité de l'écoulement plastique, la convexité de la fonction  $f$  par rapport aux composantes des contraintes est exigée. Elle est garantie lorsque  $F > 0, L \geq 0$ .

### 31.4.1 Limite d'élasticité en traction simple

On considère l'état de traction simple dans la direction  $\underline{d}$  du cristal :

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d}, \quad \text{avec} \quad \|\underline{d}\| = 1 \quad (31.36)$$

Calculer le déviateur  $\underline{\sigma}^{\text{dev}}$  de ce tenseur de contraintes.

Evaluer  $\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}}$ .

Evaluer  $\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}}$ .

Donner la valeur critique de  $\sigma$  pour laquelle le critère (31.34) s'annule. C'est la limite d'élasticité du monocristal en traction dans la direction  $\underline{i}$ . Elle s'exprime en fonction de  $F, L, \sigma_0$  et des composantes de  $\underline{d}$  dans la base du cristal ( $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ).

Donner les trois limites d'élasticité pour la traction selon les directions  $\underline{i}, \underline{i+j}, \underline{i+j+k}$ .

Chercher les extrema de la limite d'élasticité par rapport à l'orientation de  $\underline{d}$ .

Pour quelles directions du cristal la limite d'élasticité est-elle la plus élevée ?

► On calcule successivement :

$$\underline{\sigma}^{\text{dev}} = \sigma \underline{d} \otimes \underline{d} - \frac{\sigma}{3} \underline{1}$$

$$\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{3} - \frac{2}{3} \sigma^2 = \frac{2}{3} \sigma^2$$

$$(\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : (\underline{d} \otimes \underline{d}) = d_1^2 \underline{i} \otimes \underline{i} + d_2^2 \underline{j} \otimes \underline{j} + d_3^2 \underline{k} \otimes \underline{k}$$

$$(\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{1} = \underline{i} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{j} + \underline{k} \otimes \underline{k}$$

$$(\underline{i}^4 + \underline{j}^4 + \underline{k}^4) : \underline{\sigma}^{\text{dev}} = \sigma(d_1^2 - \frac{1}{3}) \underline{i} \otimes \underline{i} + \sigma(d_2^2 - \frac{1}{3}) \underline{j} \otimes \underline{j} + \sigma(d_3^2 - \frac{1}{3}) \underline{k} \otimes \underline{k}$$

$$\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} = \sigma^2(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3})$$

3. On renvoie à (Boehler, 1978; Boehler, 1987) pour la formulation des critères de plasticité anisotrope. Les noms des paramètres  $F, L$  sont empruntés à R. Hill, auteur d'un critère de plasticité anisotrope (Hill, 1950; Hill, 1978).

Le critère de plasticité (31.34) s'annule lorsque

$$\sigma^2(F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3})) = \sigma_0^2$$

La limite d'élasticité en traction ( $\sigma > 0$ ) est donc

$$Y(\underline{d}) = \sigma_0 \left( F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2} \quad (31.37)$$

Une application directe de cette formule consiste à calculer les limites d'élasticité pour les trois directions de haute symétrie du cristal :

$$\begin{aligned} Y_{100} &= Y(\underline{i}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+L}}, \\ Y_{110} &= Y(\underline{i} + \underline{k}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F+L/4}}, \\ Y_{111} &= Y(\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{F}} \end{aligned}$$

Comme  $F$  et  $L$  sont positifs, on a l'encadrement suivant :

$$Y_{100} \leq Y_{110} \leq Y_{111} \quad (31.38)$$

l'égalité ayant lieu dans le cas  $L = 0$  pour lequel le critère (31.34) dégénère et devient identique au critère isotrope de von Mises.

Pour trouver les extrema de  $Y(\underline{d})$ , on introduit le lagrangien :

$$\mathcal{L}(\underline{d}) = \sigma_0 \left( F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-1/2} - \lambda(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 - 1)$$

où  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange. La dérivée du lagrangien par rapport à  $d_l$  ( $l$  fixé) vaut :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_l} = -3\sigma_0 L d_l^3 \left( F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} - 2\lambda d_l = 0$$

On obtient les 3 équations suivantes (si  $d_l \neq 0$ , les cas de nullité étant discutés ci-dessous) :

$$3\sigma_0 L d_l^2 \left( F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} = -2\lambda$$

La somme des 3 équations permet d'extraire la relation :

$$\left( F + \frac{3}{2}L(d_1^4 + d_2^4 + d_3^4 - \frac{1}{3}) \right)^{-3/2} = -\frac{2\lambda}{\sigma_0 L}$$

On distingue alors les 3 cas suivants :

(i)  $d_1 = d_2 = 0 \implies d_3 = \pm 1$ . Dans ce cas la limite d'élasticité est donnée par  $Y_{100}$  calculé précédemment.

(ii)  $d_1 = 0, d_2^2 = d_3^2 = 1/2$ . Dans ce cas la limite d'élasticité est donnée par  $Y_{110}$  calculé précédemment.

(iii) Si les trois composantes sont non nulles, alors  $d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = 1/3$  et la limite

d'élasticité est donnée par  $Y_{111}$  calculé précédemment.

A la lumière de l'encadrement (31.38), la limite d'élasticité maximale est atteinte dans la direction  $\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}$ , tandis que la valeur minimale est obtenue pour  $\underline{d} = \underline{i}$ . Un extremum local est atteint pour  $\underline{d}$  parallèle à  $\underline{i} + \underline{j}$  (et toutes les orientations équivalentes qui s'en déduisent par les 48 symétries du cube). Le rapport entre le maximum et le minimum, à savoir  $1/\sqrt{1+L/F}$  permet d'identifier le rapport  $L/F$ . La connaissance de la limite d'élasticité intermédiaire permet alors d'identifier  $F$  et  $L$ .

Une représentation de la limite d'élasticité en fonction de la direction de sollicitation est donnée sur la figure 31.2(f) pour un jeu de valeurs particulières pour  $\sigma_0, F, L$ .

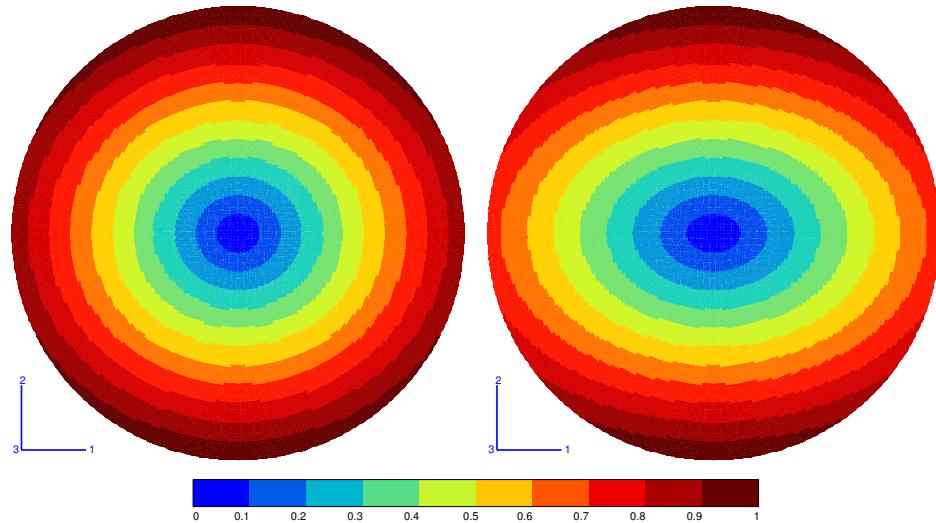


Figure 31.4 : Champ de contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$  (normée par la valeur maximale) pour deux valeurs des paramètres  $F$  et  $L$  :  $F = 1 = 4L$  à gauche,  $F = L = 1$  à droite, cf. équation (31.35) pour la définition de la contrainte équivalente. La section représentée est issue d'une barre monocristalline en torsion autour de l'axe  $\underline{e}_3 = (\underline{i} + \underline{k})/\sqrt{2}$ , avec  $\underline{e}_2 = \underline{j}$ .

### 31.4.2 Limite d'élasticité en torsion

On applique maintenant le critère de plasticité au cas de la torsion d'une barre monocristalline pour les deux orientations traitées au paragraphe 31.3.

Utiliser les champs de contraintes trouvés aux paragraphes 31.3.1 et 31.3.2 pour déterminer l'angle de torsion par unité de longueur critique  $\alpha_0$  pour lequel la plasticité commence. On traitera d'abord la torsion autour de  $\underline{k}$  puis on passera à la torsion autour de  $\underline{i} + \underline{k}$ .

On indiquera également à quel endroit la limite d'élasticité est atteinte pour la première fois.

Le champ de contrainte équivalente,  $\sigma_{eq}$  donnée par (31.35), est illustré sur la figure 31.4 pour deux valeurs du couple de paramètres  $F, L$ , dans le cas de la torsion autour de l'axe  $\underline{i} + \underline{k}$ . Commenter ces figures à la lumière des résultats tout juste acquis concernant la limite d'élasticité pour la barre en torsion selon l'axe  $\underline{i} + \underline{k}$ .

► Dans le cas de la torsion selon l'axe  $\underline{k}$ , le champ de contraintes trouvé au paragraphe

31.3.1 est de la forme

$$\underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{i}) + \sigma_{23}(\underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j}) = \underline{\sigma}^{\text{dev}} \quad (31.39)$$

Remarquer que  $\underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma} = 0$  de sorte que la contrainte équivalente, calculée à partir des expressions (31.28) se réduit à

$$\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} = 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 = 2\alpha^2\mu_1^2 r^2$$

Le critère de plasticité s'écrit donc

$$f(\underline{\sigma}) = \sqrt{2F}\alpha\mu_1 r - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$$

Il est maximal en  $r = R$  et s'annule pour la première fois lorsque

$$\alpha_0^{100} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3F}\mu_1 R}$$

La plasticité commence alors simultanément tout autour de la circonference, comme dans le cas isotrope.

Dans le cas de la torsion selon l'axe  $\underline{i} + \underline{k}$ , le champ de contraintes trouvé au paragraphe 31.3.2 est de la forme

$$\underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}) + \sigma_{23}(\underline{i} \otimes \underline{j} + \underline{j} \otimes \underline{i} + \underline{j} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{j})/\sqrt{2} = \underline{\sigma}^{\text{dev}} \quad (31.40)$$

On calcule les deux contributions au critère :

$$\underline{\sigma}^{\text{dev}} : \underline{\sigma}^{\text{dev}} = 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 = 8\alpha^2 b^2 r^2$$

$$\underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma} = \sigma_{13}(\underline{i} \otimes \underline{i} - \underline{k} \otimes \underline{k}), \quad \underline{\sigma} : \underline{\mathfrak{T}} : \underline{\sigma} = 2\sigma_{13}^2 = 8\alpha^2 b^2 X_2^2$$

avec la notation  $b = \mu_1\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)$ . Le critère de plasticité s'écrit donc

$$f(\underline{\sigma}) = 2\alpha b \sqrt{2(Fr^2 + LX_2^2)} - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$$

Il est maximal aux deux points  $X_2 = \pm R$  c'est-à-dire au bord du disque dans la direction  $\underline{j}$ . Il s'annule pour la première fois lorsque

$$\alpha_0^{110} = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3bR}\sqrt{F+L}} \quad (31.41)$$

Les champs de la figure 31.4 confirment que la limite d'élasticité est atteinte en deux points opposés de la section. Lorsque  $L$  est petit on se rapproche d'une distribution axi-symétrique de la contrainte équivalente conduisant à une limite d'élasticité atteinte simultanément tout le long de la circonference extérieure. Au contraire, cette distribution est très anisotrope sur la figure 31.4 pour  $L = 1$ .



## Références bibliographiques

- Agassant J. F., Avenas P., Sergent J. P., Vergnes B., et Vincent M. (2014). *Mise en forme des polymères*. Lavoisier, France.
- Allais M. (1997). *L'anisotropie de l'espace*. Clement-Juglar, France.
- Allais M. (2000). *L'origine des régularités constatées dans les observations interférométriques de Dayton C. Miller 1925-1926 : variations de température ou anisotropie de l'espace*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IV - Physics, vol. 1, pp 1205 – 1210.
- Amestoy M. (2004). *Mécanique des milieux continus déformables : recueil de problèmes*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- Amestoy M. et Damamme G. (2003). *Mécanique des Milieux Continus II*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- Amestoy M. et Leblond J.-B. (1992). *Crack paths in plane situations-II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors*. International Journal of Solids and Structures, vol. 29, pp 465–501.
- Arroyo M. et Belytschko T. (2002). *An atomistic-based finite deformation membrane for single layer crystalline films*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 50, pp 1941–1977.
- Ashby M.F. (2000). *Choix des matériaux en conception mécanique*. Dunod, Paris.
- Ashby M.F. et Jones D.R.H. (1980). “*Engineering materials*”, vol.1 : *An Introduction to their Properties and Applications*. Pergamon Press.
- Ashby M.F. et Jones D.R.H. (1991). *Matériaux*, vol. 1 et 2. Dunod.
- Audin M. (2016). *La formule de Stokes, roman*. Cassini, France.
- Ballard P. (1995–2015). *Le Livre des PC*. Notes personnelles.
- Ballard P. et Millard A. (2011). *Modélisation et calcul des structures élancées*. Editions de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- Barber J. R. (2004). *Elasticity*. Kluwer Academic Publishers.
- Barenblatt G. I. (2003). *Scaling*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press.
- Bascul A. et Maso J.C. (1981). *Influence des gradients de contraintes ou déformations sur le seuil d'écoulement plastique d'un acier*. Journal de Mécanique Appliquée, vol. 5, pp 375–403.
- Batchelor G. K. (2000). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press.
- Bellet D. (1990). *Problèmes d'élasticité*. Cepadues Editions, Toulouse, France.
- Béranger G., Duffaut F., Morlet J., et Thiers J.F. (1996). *The iron-nickel alloys : A hundred years after the discovery of invar*. SOS Free Stock.

- Beremin F. M. (1983). *A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel*. Metallurgical and Materials Transactions A, vol. 14, pp 2277–2287.
- Berthelot J.-M. (1999). *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. Technique et Documentation, Paris.
- Bertram A. (2005). *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*. Springer.
- Bertram A. (2012). *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*. Springer.
- Bertram A. et Svendsen B. (2001). *On material objectivity and reduced constitutive equations*. Archives of Mechanics, vol. 53, pp 653–675.
- Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., et Forest S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*. ISBN 2-7462-0268-9, EAN13 9782746202689, 445 p., Hermès, France.
- Boehler J. P. (1978). *Lois de comportement anisotrope des milieux continus*. Journal de Mécanique, vol. 17, pp 153–190.
- Boehler J. P. (1987). *Applications of tensor functions in solid mechanics*. CISM Courses and Lectures No. 292, Udine, Springer Verlag, Wien.
- Bogy D. B. et Sternberg E. (1968). *The effect of couple-stresses on the corner singularity due to an asymmetric shear loading*. Int. J. Solids Structures, vol. 4, pp 169–174.
- Brun L. (1991). *Introduction à la thermodynamique des Matériaux*. Cours de l'Ecole Polytechnique.
- Bunge H.J. (1982). *Texture Analysis in Materials Science*. Butterworths.
- Cahn R.W. (2001). *The coming of materials science*. Pergamon.
- Cailletaud G. (2003). *Mécanique des Matériaux Solides, 3122*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- Cardona Jean-Marc (2000). *Comportement et durée de vie des pièces multiporées : application aux aubes de turbine*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- Carneiro F. L. L. B. (1943). *A new method to determine the tensile strength of concrete*. In : Proceedings of the 5th Meeting of the Brazilian Association for Technical Rules, 3d. Section, 16 Sept 1943, (in Portuguese).
- Cazzani A. et Rovati M. (2003). *Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids*. International Journal of Solids and Structures, vol. 40, pp 1713–1744.
- Cazzani A. et Rovati M. (2005). *Extrema of Young's modulus for elastic solids with tetragonal symmetry*. International Journal of Solids and Structures, vol. 42, pp 5057–5096.
- Chan N. et Evans K.E. (1997). *Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams*. Journal of Materials Science, vol. 32, pp 5725–5736.
- Chapman S. et Cowling T.G. (1970). *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge University Press.
- Ciarlet P. G. (1986). *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris.
- Ciarlet P. G. (1988). *Mathematical elasticity. Volume I : Three-dimensional elasticity*. Elsevier, New York.
- Coleman B.D. et Noll W. (1963). *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*. Arch. Rational Mech. and Anal., vol. 13, pp 167–178.
- Coleman B. D. (1965). *Simple liquid crystals*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 20, pp 41–58.

- de Groot S.R. et Mazur P. (1962–1984). *Non-equilibrium thermodynamics*. North Holland–Dover.
- dell’Isola F. et Seppecher P. (1995). *The relationship between edge contact forces, double forces and interstitial working allowed by the principle of virtual power*. C.R. Acad. Sci. Paris IIb, vol. 321, pp 303–308.
- Dorfmann L. et Ogden R. W. (2014). *Nonlinear Theory of Electroelastic and Magnetoelectric Interactions*. Springer.
- Doyle T.C. et Ericksen J.L. (1956). *Nonlinear Elasticity*. Advances in Applied Mechanics, vol. 4, pp 53 – 115.
- Dreyer W. et Kunik M. (2000). *Cold, thermal and oscillator closure of the atomic chain*. J. Phys. A, vol. 33, pp 2097–2129.
- Dugas R. (1959–1996). *Histoire de la mécanique*. Editions Jacques Gabay, Paris.
- Duvaut G. (1990). *Mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.
- Erdogan F. et Sih G.C. (1963). *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*. Journal of Basic Engineering, vol. 85, pp 519–527.
- Eringen A. C. et Maugin G. A. (1990). *Electrodynamics of Continua I, Foundations and Solid Media*. Springer–Verlag, New York.
- Fairbairn E. M. R. et Ulm F. J. (2002). *A tribute to Fernando L. L. B. Carneiro (1913–2001) engineer and scientist who invented the Brazilian test*. Materials and Structures, vol. 35, pp 195–196.
- Fargue D. (2004a). *Abbrégé de thermodynamique*. Ecole des Mines de Paris–Les Presses.
- Fargue D. (2004b). *Thermodynamique, 2411*. Cours de l’Ecole des Mines de Paris.
- Fer F. (1970). *Thermodynamique macroscopique, tomes 1 et 2*. Gordon & Breach.
- Filippini M. (2000). *Stress gradient calculations at notches*. International Journal of Fatigue, vol. 22, pp 397–409.
- Fivel M. et Forest S. (2004a). *Plasticité cristalline et transition d’échelle : cas du monocristal*. Techniques de l’Ingénieur, M4016, 23 pages.
- Fivel M. et Forest S. (2004b). *Plasticité cristalline et transition d’échelle : cas du polycristal*. Techniques de l’Ingénieur, M4017, 11 pages.
- Flamant A. (1892). *Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement*. Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences, vol. 114, pp 1465–1468.
- Forest S. (2006). *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Les Presses de l’Ecole des Mines de Paris, ISBN : 2-911762-67-3, 200 pages.
- François D., Pineau A., et Zaoui A. (1993). *Comportement mécanique des matériaux. Volume 2 : viscoplasticité, endommagement, rupture*. Hermès.
- Fratzl P., Penrose O., et Lebowitz J.L. (1999). *Modeling of phase separation in alloys with coherent elastic misfit*. Journal of Statistical Physics, vol. 95, pp 1429–1503.
- Freund L.B. et Suresh S. (2003). *Thin Film Materials*. Cambridge University Press.
- Friedel J. (1964). *Dislocations*. Pergamon.
- Germain P. (1973a). *Cours de mécanique des milieux continus T.I./Théorie générale*. Masson, Paris.
- Germain P. (1973b). *La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : théorie du second gradient*. J. de Mécanique, vol. 12, pp 235–274.

- Germain P. (1986). *Mécanique, tomes I et II*. Ellipses, Paris.
- Germain P. et Muller P. (1995). *Introduction à la mécanique des milieux continus*. Masson, Paris.
- Gu T., Castelnau O., Forest S., Hervé-Luanco E., Lecouturier F., Proudhon H., et Thilly L. (2017). *Multiscale modeling of the elastic behavior of architectured and nano-structured Cu–Nb composite wires*. International Journal of Solids and Structures, vol. 121, pp 148–162.
- Guazzelli E., Morris J.F., et Pic S. (2011). *A Physical Introduction to Suspension Dynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press.
- Han Y., Lai B., Liu H.-H., et Li H. (2018). *Measurement of elastic properties in Brazilian disc test : solution derivation and numerical verification*. Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resources, vol. 4, pp 63–77.
- Hashin Z. (1962). *The elastic moduli of heterogeneous materials*. Journal of Applied Mechanics, vol. 29, pp 143–150.
- Haupt P. (2000). *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer Verlag.
- Herlach, F., de Vos, G., et Witters, J. (1984). *Stresses in coils for strong pulsed magnetic fields*. J. Phys. Colloques, vol. 45, pp C1–915–C1–921.
- Hill R. (1950). *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press.
- Hill R. (1968). *On constitutive inequalities for simple materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 16, pp 229–242.
- Hill R. (1978). *Aspects of invariance in solid mechanics*. Advances in Applied Mechanics, vol. 18, pp 1–75.
- Hirth J.P. et Lothe J. (1982). *Theory of Dislocations*. Wiley Intersciences.
- Hoffman J. et Johnson C. (2010). *Resolution of d'Alembert's Paradox*. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, vol. 12, pp 321–334.
- Inglis C.E. (1913). *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*. Transactions of the Institution of Naval Architects, vol. 55, pp 219–230.
- Jaoul B. (2008). *Etude de la plasticité et application aux métaux*. réédité par Les Presses des Mines, Paris.
- Johnson K.L. (1987–2004). *Contact mechanics*. Cambridge University Press.
- Kachanov M., Shafiro B., et Tsukrov I. (2003). *Handbook of Elasticity Solutions*. Kluwer Academic Publishers.
- Kambouchev N., Fernandez J., et Radovitzky R. (2007). *A polyconvex model for materials with cubic symmetry*. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, vol. 15, pp 451–467.
- Kern M. (2004). *Introduction à la méthode des éléments finis, S2733*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- Kim H.-G. (2014). *The effect of different forms of strain energy functions in hyperelasticity-based crystal plasticity models on texture evolution and mechanical response of face-centered cubic crystals*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 100, pp 300–320.
- Klein W. et Mittelstaedt P. (1997). *A simple experimental demonstration of the principle of equivalence*. American Journal of Physics, vol. 65, pp 316–320.
- Ladevèze P. (1983). *Sur le principe de Saint-Venant en élasticité*. Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, vol. 1, pp 161–184.

- Lahellec N., Bordreuil C., et Hochard C. (2005). *Etude de la rupture fragile d'un stratifié quasi-isotrope à plis tissés : mise en évidence d'une longueur interne.* Comptes Rendus Mécanique, vol. 333, pp 293–298.
- Lakes R.S. (1987). *Foam structures with a negative Poisson's ratio.* Science, vol. 235, pp 1038–1040.
- Landau L. et Lifchitz D. (1989). *Mécanique des fluides.* Mir.
- Landau L.D. et Lifschitz E.M. (1980). *Statistical Mechanics.* Pergamon, Oxford.
- Leblond J.-B. (1989). *Crack paths in plane situations—I. General form of the expansion of the stress intensity factors.* International Journal of Solids and Structures, vol. 25, pp 1311–1325.
- Leblond J.-B. (2003). *Mécanique de la rupture fragile et ductile.* Hermès.
- Legrand G. (1971). *Algèbre linéaire et multilinéaire et géométrie différentielle.* Masson et Cie, Paris.
- Legrand G. (1979). *Algèbre et analyse tensorielles.* Cours de l'Ecole Polytechnique.
- Legrand G. (2003). *Algèbre tensorielle, 3101.* Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- Leguillon D. (2002). *Strength or toughness ? A criterion for crack onset at a notch.* European Journal of Mechanics A/solids, vol. 21, pp 61–72.
- Lévy M. (1895). *Quelques considérations sur la construction des grands barrages.* Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, vol. 121, pp 288–300.
- Li D. et Wong L. N. Y. (2013). *The Brazilian Disc Test for Rock Mechanics Applications : Review and New Insights.* Rock Mechanics and Rock Engineering, vol. 46, pp 269–287.
- Love A.E.H. (1927–1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity.* Dover, New York.
- Lu J. et Papadopoulos P. (2000). *A covariant constitutive description of anisotropic non-linear elasticity.* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, vol. 51, pp 204–217.
- Maisonneuve F. (2003). *Mathématique 1, Calcul Différentiel, 1121.* Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- Maisonneuve F. (2013a). *Mathématique 1, Calcul Différentiel, équations différentielles ordinaires et applications.* Presses des Mines.
- Maisonneuve F. (2013b). *Mathématique 3, Fonction d'une variable complexe.* Presse des Mines.
- Mandel J. (1966). *Cours de mécanique des milieux continus – Tomes I et II.* Gauthier-Villars / réédition 1994, J. Gabay.
- Mandel J. (1966–1994). *Cours de mécanique des milieux continus.* Editions Jacques Gabay, Paris.
- Mandel J. (1973). *Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques.* Int. J. Solids Structures, vol. 9, pp 725–740.
- Mandel J. (1974). *Introduction à la mécanique des milieux continus déformables.* Académie Polonaise des Sciences, Varszawa.
- Markides Ch. F. et Kourkoulis S. K. (2013). *Naturally Accepted Boundary Conditions for the Brazilian Disc Test and the Corresponding Stress Field.* Rock Mechanics and Rock Engineering, vol. 46, pp 959–980.

- Markides Ch. F., Pazis D. N., et Kourkoulis S. K. (2010). *Closed full-field solutions for stresses and displacements in the Brazilian disk under distributed radial load.* International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, vol. 47, pp 227 – 237.
- Marsden J. E. et Hughes T. J. R. (1994). *Mathematical Foundations of Elasticity.* Dover Publications, Inc., New York.
- Martienssen W. et Warlimont H. (2005). *Springer Handbook of condensed matter and materials data.* Springer.
- Maugin G. A. (1988). *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids.* Elsevier Science Publishers, North Holland.
- Mazière Matthieu (2007). *Burst of turboengine disks.* PhD, Ecole des Mines de Paris.
- McClintock F.A. et Argon A.S. (1966). *Mechanical behavior of materials.* Addison-Wesley.
- Miannay D.P. (1995). *Mécanique de la rupture.* Editions de Physique.
- Mindlin R.D. (1962). *Influence of couple-stresses on stress concentrations.* Experimental Mechanics, vol. 3, pp 1–7.
- Misner C. W., Thorne K. S., et Wheeler J. A. (1973). *Gravitation.* W. H. Freeman.
- Müller I. (1985). *Thermodynamics.* Pitman Publishing Limited, London.
- Mura T. (1987). *Micromechanics of defects in solids.* Martinus Nijhoff.
- Murdoch A.I. (1983). *On material frame-indifference, intrinsic spin and certain constitutive relations motivated by the kinetic theory of gases.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 83, pp 185–194.
- Murdoch A.I. et Bedaux D. (1994). *Continuum equations of balance via weighted averages of microscopic quantities.* Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 445, pp 157–179.
- Muskhelishvili N.I. (1952, 1977). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Fourth Edition, Noordhoff International Publishing, Leyden.
- Nguyen Q.-S. (2002). *Stability and Nonlinear Solid Mechanics.* Wiley.
- Noll W. (1955). *Die Herleitung der Grundgleichungen der Thermomechanik der Kontinua aus der statistischen Mechanik.* Arch. Rational Mech. and Anal., vol. 4, pp 627–646.
- Noll W. (1958). *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media.* Arch. Rational Mech. and Anal., vol. 2, pp 197–226.
- Noll W. (1959). *The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics.* In : Proceedings of the Berkeley Symposium on the axiomatic method, pp 226–281. Amsterdam.
- Noll W. (2004). *Five contributions to natural philosophy.* <http://www.math.cmu.edu/~wn0g/>.
- Noll W. et Virga E.G. (1990). *On edge interactions and surface tension.* Arch. Rational Mech. and Anal., vol. 111, pp 1–31.
- Nye J.F. (1957–1985). *Physical properties of crystals.* Oxford Science Publications.
- Obala J. (1997). *Exercices et problèmes de mécanique des milieux continus.* Masson, Paris.
- Ogden R.W. (1984–1997). *Non-linear elastic deformations.* Dover, New York.
- Pedley T. J. (1997). *Introduction to fluid dynamics.* Scientia Marina, vol. 61 (Suppl. 1), pp 7–24.

- Phan K.D. et Podvin P. (2003). *Cristallographie géométrique, S2333*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- Pilkey W.D. (1997). *Peterson's Stress Concentration Factors*. Wiley.
- Pineau A. (1976). *Influence of uniaxial stress on morphology of coherent precipitates during coarsening - Elastic energy considerations*. Acta metallurgica, vol. 24, pp 559–564.
- Prigogine I. (1968–1996). *Introduction à la thermodynamique des processus irréversibles*. Dunod–Gabay.
- Ramis E., Deschamps C., et Odoux J. (1985). *Cours de mathématiques spéciales, I. Algèbre*. Masson, Paris.
- Rau C.A. et Burck L.H. (1971). *Fatigue of nickel-base superalloy sheets containing various diameter small holes*. Engineering Fracture Mechanics, vol. 2, pp 211–220.
- Rekatch V. (1980). *Problèmes de la théorie de l'élasticité*. Editions de Moscou.
- Rivlin R. S. et Ericksen J. L. (1955). *Stress-deformation relations for isotropic materials*. Arch. Rational Mech. and Anal., vol. 4, pp 323–425.
- Romig A.D., Dugger M.T., et McWhorter P.J. (2003). *Materials issues in microelectromechanical devices : science, engineering, manufacturability and reliability*. Acta Materialia, vol. 51, pp 5837–5866.
- Rougée P. (1997). *Mécanique des Grandes Transformations*. Springer Verlag.
- Sadd M. H. (2005). *Elasticity*. Elsevier Academic Press.
- Saint-Venant A. (1853). *De la torsion des prismes*. Comptes–Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, vol. 14, pp 253–560.
- Sanford R.J. et Thompson B.J. (1997). *Selected papers on foundations of linear elastic fracture mechanics*. The Society for Experimental Mechanics, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, Washington, USA.
- Schröder J., Neff P., et Ebbing V. (2010). *Polyconvex Energies for Trigonal, Tetragonal and Cubic Symmetry Groups*. In : IUTAM Symposium on Variational Concepts with Applications to the Mechanics of Materials, ed. Hackl Klaus, pp 221–232, Dordrecht. Springer Netherlands.
- Shuvalov L. A. (1988). *Modern Crystallography IV Physical properties of crystals*. Springer Series in Solid-State Sciences, vol. 37, Springer.
- Simmons G. et Wang Herbert (1971). *Single crystal elastic constants and calculated aggregate properties : a Handbook*. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts and London, England.
- Sokolnikoff I. S. (1946). *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill.
- Speziale C.G. (1988). *The Einstein equivalence principle, intrinsic spin and the invariance of constitutive equations in continuum mechanics*. International Journal of Engineering Science, vol. 26, pp 211–220.
- Speziale C.G. (1998). *A review of material frame-indifference in mechanics*. Applied Mechanics Review, vol. 51, pp 489–504.
- Sternberg E. et Eubanks R. A. (1955). *On the concept of concentrated loads and an extension of the uniqueness theorem in the linear theory of elasticity*. Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 4, pp 135–168.
- Stoney G.G. (1909). *The tension of metallic films deposited by electrolysis*. Proceedings of the Royal Society London, vol. A82, pp 172–175.

- Stumpf H. et Hoppe U. (1997). *The Application of Tensor Algebra on Manifolds to Nonlinear Continuum Mechanics*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 77, pp 327–339.
- Szabó I. (1985). *Höhere technische Mechanik*. Springer-Verlag.
- Taylor G.I. (1966). *Low Reynolds number flows*, [www.youtube.com/watch?v=51-6QCJTAjU](http://www.youtube.com/watch?v=51-6QCJTAjU).
- Tazzioli R. (2017). *D'Alembert's paradox, 1900-1914 : Levi-Civita and his Italian and French followers*. Comptes Rendus Mécanique, vol. 345, pp 488–497.
- Teodosiu C. (1982). *Elastic models of crystal defects*. Springer Verlag, Berlin.
- Tijani M. (2004). *Calcul des Structures, semaine européenne*. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- Timoshenko S.P. (1953-1983). *History of strength of materials*. Dover.
- Timoshenko S. et Goodier J.N. (1970). *Theory of elasticity*. McGraw-Hill International Editions.
- Toupin R. (1965). *Saint-Venant's principle*. Archives of Rational Mechanics and Analysis, vol. 18, pp 83–96.
- Trotignon J.P. (1997). *Précis de construction mécanique, tomes 1 à 3*. AFNOR, Nathan, Paris.
- Truesdell C. (1977). *A first course in rational continuum mechanics*. Academic Press.
- Truesdell C. et Euvrard D. (1974). *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*. Masson, Paris.
- Truesdell C. et Noll W. (1965a). *The non-linear field theories of mechanics*. Handbuch der Physik, edited by S. Flügge, reedition Springer Verlag 2004.
- Truesdell C. et Noll W. (1965b). *The non-linear field theories of mechanics*. Handbuch der Physik, edited by S. Flügge, réédition Springer Verlag 1994.
- Van Dyke M. (1982). *An album of fluid motion*. The Parabolic Press, Stanford, California.
- Voigt W. (1898). *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung*. Verlag von Veit & Comp., Leipzig.
- Voigt W. (1910–1966). *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristalloptik)*. Verlag und Druck von B.G. Teubner in Leipzig und Berlin.
- Volterra V. (1907). *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Annal. Sci. de l'Ecole Norm. Supér., vol. 24, pp 401–517.
- Walpole L. J. (1984). *Fourth-Rank Tensors of the Thirty-Two Crystal Classes : Multiplication Tables*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 391, pp 149–179.
- Wang C. C. (1965). *A general theory of subfluids*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol. 20, pp 1–40.
- Weinberg S. (1972). *Gravitation and cosmology : Principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley.
- Witters J et Herlach F (1983). *Analytical stress calculations for magnetic field coils with anisotropic modulus of elasticity*. J. Phys. D : Appl. Phys., vol. 16, pp 255–260.
- Xiao H. et Bruhns, O.T. Meyers A. (1997). *Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate*. Acta Mechanica, vol. 124, pp 89–105.
- Yang W., Cheng L., et Hwang K.C. (1992). *Objective corotational rates and shear oscillation*. Int. J. Plasticity, vol. 8, pp 643–656.

- Yang W., Li Z.M., Shi W., Xie B.H., et Yang M.B. (2004). *On auxetic materials*. Journal of Materials Science, vol. 39, pp 3269–3279.
- Zheng Q.S. (1994). *Theory of representations for tensor functions—A unified invariant approach to constitutive equations*. Applied Mechanics Review, vol. 47, pp 545–587.
- Zheng Q.-S. et Spencer A.J.M. (1993a). *On the canonical representations for kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems*. International Journal of Engineering Science, vol. 31, pp 617 – 635.
- Zheng Q.-S. et Spencer A.J.M. (1993b). *Tensors which characterize anisotropies*. International Journal of Engineering Science, vol. 31, pp 679 – 693.



## Index

- Accélération, 67, 78
  - de Coriolis, 77, 152
- Acier, 223, 437
- Action locale, 157
- Adiabatique, 228
- Agitation thermique, 363
- Airy, 257
- Alésage, 527
- Allongement, 45
- Almansi, 46
- Alumine, 223
- Aluminium, 223, 427
- Amortisseur, 148
- Angle de glissement, 45
- Angles
  - d'Euler, 317
- Anisotropie, 166, 181
  - cubique, 709
  - facteur, 714
  - facteur d', 714
- Antisymétrique, 70
- Arbre en rotation, 527, 559
- Ascenseur
  - d'Einstein, 160
  - d'indice, 310, 325
- Aube de turbine, 527, 709
- Austénite, 429
- Auxétique, 221
- Axe
  - principal, 47
- Axial
  - tenseur, 315
- Béton, 223
- Barrage, 665
- Base, 107, 307
  - convective, 36
- Beltrami, 238, 551
  - équations de, 238, 551
- Bernoulli, 125
- Betti, 446
- Bicouche, 412
- Bifurcation
  - de fissure, 592
- Bilame, 412
- Bilan
  - équation de, 81, 345, 348
- Biomécanique, 16
- Biomatériaux, 16
- Biot, 46
  - déformation de, 46
- Bitter-Crum, 448
- Blasius, 142
- Bois, 223
- Boussinesq, H., 106
- Brésilien, 649
- Branchement
  - de fissure, 592
- Burgers, 615, 632
- Céramique, 213, 223
- Caoutchouc, 223
- Capillarité, 84
- Caquot, 674
- Casimir, 178
- Castiglano, 631
- Cauchy, 40, 86, 90
  - contraintes de, 90
  - lemme de, 86
  - postulat de, 86
  - première loi de, 92
  - seconde loi de, 93
  - tétraèdre de, 90
  - théorème de, 88, 89
- Cauchy-Green, 40
- Cauchy-Riemann, 126
- Cavité, 463, 603
  - sphérique, 563
- Cayley-Hamilton, 109, 335
- Centre
  - de cisaillement, 511
  - de torsion, 511
- Cercles de Mohr, 111
- Cermet, 159
- Chaleur, 226
  - massique, 206, 229
  - spécifique, 206
- Champ

- électromagnétique, 679
- d'accélération, 66, 67, 78
- d'autocontraintes, 266
- de gravitation, 691
- de vitesses, 66
- magnétique, 679
- Changement**
  - de base, 107, 306, 307
  - de configuration de référence, 37
  - de phase, 429
  - de référentiel, 36
- Charge d'Euler**, 246
- Choc**
  - onde de, 101, 102, 104
- Cinématique**, 31
- Cisaillement**, 109, 217
  - maximal, 113
- Cission**, 110
- Clapeyron, 268
- Classe**
  - cristallographique, 337
- Clivage, 119
- Closure problem**, 147
- Cohésion**, 674
- Coin, 615
- Coleman-Noll, 186
- Compatibilité**, 59, 405, 615, 629
- Compatible**
  - champ de déformation, 59
- Comportement**
  - élastique, 148
  - élastoplastique, 117, 148
  - cyclique, 150
  - plastique, 117, 148
  - viscoplastique, 148
  - visqueux, 148
- Composite**, 605
- Compressibilité**, 217
- Compression**
  - diamétrale, 649
- Concentration**
  - de contrainte, 563, 608
- Conditions**
  - de Cauchy-Riemann, 126
  - de compatibilité, 59
  - de saut, 100, 347
- Conduction thermique**, 228
- Conductivité thermique**, 221
- Configuration**, 31
  - actuelle, 31
  - de référence, 31, 37
  - initiale, 32
- intermédiaire, 31
- naturelle, 181
- sans distorsion, 168, 181
- connexe**, 628
- Connexité**, 629
- Conservation**
  - de l'énergie, 96
  - de la masse, 81
  - loi de, 81, 345, 348
- Constitutive equations**, 147
- Contact**, 235
- Continuité**, 31, 81
- Contraction**
  - double, 306
  - simple, 306
- Contrainte**, 84
  - équivalente, 121
  - de cisaillement, 109
  - normale, 109
  - normale maximale, 119
  - plane, 568
  - tangentielle, 109
  - vecteur, 86
- Contraintes**
  - auto-équilibrées, 467
  - d'épitaxie, 428
  - de Boussinesq, 106
  - de Kirchhoff, 107
  - de Mandel, 107, 198, 353
  - de Piola, 107, 183
  - de Piola-Kirchhoff, 106
  - initiales, 467
  - nominales, 106
  - planes, 256
  - résiduelles, 266, 431, 467
- Convectif**, 37, 66, 104, 350, 355
- Convention**
  - d'Einstein, 302
- Convexité**, 194
- Coordonnées**
  - elliptiques, 587, 588
  - matérielles entraînées, 36
- Coque**, 55
- Coriolis**, 152
  - accélération de, 77
- Corotationnel**, 77
- Corps**
  - matériel, 31
  - rigide, 41, 78, 147
- Corrélation d'images**, 660
- Cosserat**, 93
  - milieu de, 572

- Couette, 285, 558  
Coulomb, 674  
Couplage  
    thermoélastique, 223  
    thermomécanique, 172  
Couplage flexion-torsion, 520  
Couple  
    de volume, 679  
Couple de torsion, 477  
Couples  
    de contraintes, 572  
Courbure, 425  
Covariance  
    de la loi de comportement, 163  
    générale, 164  
Covecteur, 38  
Cristal, 632  
    liquide, 169  
Critère, 117  
    de rupture, 592  
    de Tresca, 120  
    de von Mises, 121  
Cubique, 182  
Cuivre, 223  
Curie  
    principe de, 213  
Curl, 329  
Cycle, 188
- D'Alembert, 95  
D'alembert, 134  
Décohésion, 613  
Décomposition  
    polaire, 39, 401  
    spectrale, 47  
Défaut cristallin, 632  
Déformation  
    d'Almansi, 46  
    de Green-Lagrange, 46  
    grande, 51  
    homogène, 57  
    infinitésimale, 205, 391  
    irréversible, 207  
    libre, 405  
    nulle, 58, 78  
    permanente, 207  
    petite, 51, 391  
    plane, 255, 577  
    principale, 47  
    pure, 40  
Déplacement, 32  
Dérivée
- convective, 355  
eulérienne, 66, 81, 104, 345  
lagrangienne, 66, 81  
matérielle, 66, 104, 345  
objective, 355  
particulaire, 66, 81, 104, 345  
temporelle, 66, 81
- Désaccord paramétrique, 428  
Déterminant, 109, 316, 321, 334, 337  
Déterminisme, 156  
Déviateur, 119  
Degré, 158  
Densité  
    de masse, 81  
Diamant, 223  
DIC, 660  
Dilatation  
    thermique, 207, 221  
Dimensionnement, 51  
Direction  
    principale, 47  
Dirichlet, 234, 475  
Disclinaison, 632  
Discontinuité, 100, 347  
Dislocation, 615, 632  
Disque  
    de turbine, 527  
Dissipation, 175  
Distorsion, 168, 375  
Divergence, 333  
    d'un champ de tenseurs, 329  
    théorème de, 333  
Doyle-Ericksen, 187, 195  
Ductile, 490  
Ductilité, 120  
Dynamique, 90  
    moléculaire, 359
- Ecoulement, 123  
    de Couette, 558  
    irrotationnel, 125  
    plastique, 117
- Effet  
    bilame, 412  
    d'échelle, 572  
    de taille, 572  
    diabolo, 271  
    Magnus, 140  
    tonneau, 271
- Effort  
    à distance, 83  
    de champ, 83

- de contact, 83
- extérieur, 83
- tranchant, 506, 512
- EFI, 364
- Einstein, A., 160
- Elément
  - de fibre matérielle, 34
  - de surface, 38
  - de volume, 38, 54, 72
- Elasticité, 148
  - anisotrope, 181
  - cubique, 182
  - hétérogène, 448
  - isotrope linéaire, 207
- Elastoplasticité, 117, 148
- Electromagnétisme, 679
- Ellipsoïde :des dilatations, 379
- Elliptique
  - trou, 587
- Elliptiques
  - coordonnées, 587, 588
- Encastrement, 271
- Endurance, 150, 603
- Energie, 96
  - élastique, 433
  - cinétique, 96
  - complémentaire, 193, 261, 267
  - d'interface, 443
  - de surface, 444
  - interne, 96, 229
  - libre, 175
  - potentielle, 261, 265
- Entropie, 184
- Epitaxie, 428
- Equation
  - aux discontinuités, 100, 347
  - de fermeture, 147
  - de la chaleur, 226
- Equations
  - de Navier, 237
- Ericksen, 279
- Ericksen, J.L., 341
- Espace
  - de Sobolev, 264
  - tangent, 34
- Essai
  - brésilien, 649
  - viscométrique, 286
- Etat
  - naturel, 208
  - quasi-naturel, 209
- Euclidean Frame Indifference, 364
- Eulérien, 48, 64
- Euler, 33, 246
  - angles d', 317
- Existence, 264
- Extension, 42, 58
- Facteur
  - d'intensité de contrainte, 595, 596, 600
  - de concentration de contrainte, 563, 568, 609
- Fatigue, 150, 603
- Fermeture, 147
- Ferrite, 429
- Fiabilité, 51
- Fibre, 605
  - matérielle, 34
  - neutre, 390
- Fil, 55
- Film, 428
- Fission, 32, 392
- Fissure, 592, 595, 596
- Flamant, 635
- Flambage, 234, 246
- Flambement, 246
- Flexion
  - circulaire, 246, 388, 506
  - complexe, 506
  - normale, 506
  - pure, 55, 246, 506, 512
  - simple, 506, 512
- Fluide, 166, 168
  - élastique, 183
  - anisotrope, 169
  - de Reiner-Rivlin, 282
  - newtonien, 282
  - parfait, 123, 183
  - visqueux, 282
- Flux
  - convectif, 104, 350
  - d'entropie, 172
  - de chaleur, 97, 364
- Fonction
  - d'Airy, 257, 563
  - de contrainte, 563
  - de contraintes, 257
  - de courant, 126
  - de gauchissement, 709
  - erreur, 291
  - isotrope, 340
- Fonctionnelle mémoire, 156
- Force

- concentrée, 635  
de contact, 83  
de volume, 679  
extérieure, 83  
volumique, 691
- Forme  
volume, 315
- Formulation  
Forte, 262  
variationnelle, 95
- Formule  
de Castigliano, 631  
de Clapeyron, 268  
de Nanson, 38  
de Stoney, 425  
du viriel, 363
- Fourier, 97, 228
- Fragile, 119, 649
- Frame Indifference, 364
- Frettage, 467
- Froude, 284
- Fusion, 32, 392
- Galiléen, 29
- Gauchissement, 478, 518, 709
- Gauss, 691  
fonction erreur de, 291  
formules de, 333
- Glissement, 42, 45, 58, 376, 400
- Grad, 35
- grad, 35
- Gradient  
d'un champ de tenseurs, 328  
de la transformation, 33  
de la transformation relative, 352  
de propriété, 234  
des vitesses, 67
- Gravité, 691
- Green, 40, 476  
formules de, 333
- Green-Lagrange, 46
- Groupe, 337  
cristallographique, 337  
de symétrie, 337  
des symétries matérielles, 165  
linéaire, 337  
orthogonal, 337  
spécial linéaire, 337  
spécial orthogonal, 337  
unimodulaire, 337
- Guillaume, 421
- Hémitropie, 154, 157
- Hétérogène, 159, 327
- Hamel, 46
- Harmonique  
fonction, 476
- Hashin, 435
- Hencky, 46  
déformation de, 46
- Histoire, 156  
des déformations, 352
- Homogène, 40, 159, 327
- Hoop stress, 568
- Hugoniot, 104, 350
- Hypothèse  
des petites perturbations, 234
- Image  
directe, 324  
par un cercle, 141  
réiproque, 324
- Imparité, 86
- Inégalité de Korn, 264
- Inclusion, 435, 443, 605
- Incompressibilité, 202, 220
- Incompressible, 38, 72, 123
- Indifférence matérielle, 153, 165, 180
- Inertie  
de flexion, 247  
de torsion, 482
- Inextensibilité, 204
- Ingénieur  
cisaillement de l', 42  
contrainte de l', 106
- Inglis, C.E., 587
- Interaction  
électromagnétique, 83  
gravitationnelle, 83
- Interface, 443, 613
- Invar, 421
- Invariance  
galiléenne, 158  
galiléenne étendue, 160  
par changement de référentiel, 64
- Invariant, 64, 65, 109, 335  
principal d'un tenseur, 109, 335
- Inversion, 338
- Irrotationnel, 67, 125
- Isentropique, 228, 229
- Isochore, 38, 54, 72
- Isomorphisme  
musical, 310, 325, 353
- Isotherme, 229
- Isotropie, 117, 340

- de l'espace, 154, 165, 356
- Jacobien, 38, 54, 72, 104, 345
- Kirchhoff, 106, 107, 183
- Korn, 264
- Lévy, 665
- Lagrange, 32
- Lagrangien, 48, 64
- Laiton, 421
- Lamé
- coefficients de, 207
- Laplacien, 330, 551
- Lax-Milgram, 242, 265
- Lemme
- d'imparité, 86
  - de Cauchy, 86
- Levi-Civita
- tenseur de, 314
- Liaison
- unilatérale, 235
- Liaison interne, 202
- Ligne
- d'émission, 32
  - de courant, 66, 125, 398
- Linéaire géométrique (théorie), 51
- Linéarisation, 599
- Local, 157
- Logarithmique
- déformation, 46
- Loi
- d'état, 184
  - de comportement, 147
  - de comportement mécanique, 147
  - de comportement thermique, 172
  - de la dynamique, 90
  - de la statique, 93
- Longueur
- caractéristique, 572
  - interne, 572
- Lubrification, 287
- Mécanique
- de la rupture, 596
  - du vivant, 16
- Mémoire, 156
- Ménisque, 84
- Métal, 213, 223
- Méthode
- des images, 141
  - des puissances virtuelles, 93
- Machine
- tournante, 527
- Magnésium, 223
- Magnétostriction, 405
- Magnus, 140
- Mandel, 377
- Mandel, J., 107, 198, 222, 353
- Masse, 81
- volumique, 81
- Matériau
- auxétique, 221
  - ductile, 120, 490
  - fragile, 119
  - incompressible, 38, 72
  - quasi-fragile, 649
- Matériaux
- composites, 605
- Matrice
- de passage, 307
- Maxwell, 149
- Maxwell-Betti, 446
- MEMS, 425
- Mesure, théorie de la, 81
- MFI, 153, 180
- Micropolaire, 93
- Microsystèmes, 425
- Milieu
- de degré  $n$ , 158
  - hétérogène, 159
  - homogène, 159
  - matériellement simple, 157
  - micropolaire, 93
- Milne-Thomson, 141
- Mises
- critère de von, 121
- Mises, R. von, 121
- Misfit, 428
- Mixte, 36, 64
- Mode I,II, 596
- Module
- d'élasticité, 188
  - de cisaillement, 217
  - de compressibilité, 217
  - isentropique, 229
  - isotherme, 229
- Mohr, 111
- Mohr-Caquot, 674
- Mohr-Coulomb, 674
- Moment
- cinétique, 82
- Monocristal, 213
- Mousse, 221
- Mouvement

- de corps rigide, 41, 78, 147
- permanent, 67
- stationnaire, 67
- Multicouches, 430
- Nabla, 35
- Nanson, 38
- Naturel
  - état, 208
- Navier, 237
- Navier, C.L.M.H., 282
- Navier-Stokes, 282
- Neumann, 234, 475, 518
- Newton, 356
- Nickel, 223, 538, 709
- Noll, W., 166, 338
- Nombre
  - de Froude, 284
  - de Reynolds, 284
- Nominal, 106
- Non local, 157
- $O(h^2)$ , 52, 252, 409
- $o(h)$ , 52, 252, 409
- Objectif, 65
- Objectivité, 64, 77, 355
  - des contraintes, 364
- Oldroyd, 355
- Onde
  - de choc, 101, 102, 104
- Onsager, 178
- Opérateur
  - gradient, 35
  - laplacien, 330
  - nabla, 35
- Orientation
  - pseudo-tenseur, 314
- Orthogonal, 70, 324
- Os trabéculaire, 16
- Oseen, C.W., 297
- Paraboloïde, 252, 409
- Paradoxe
  - de D'Alembert, 134
- Paradoxes, 597, 642
- Partie
  - déviatorique, 119
  - sphérique, 119
- Patin, 148
- Permanent, 67
- Permutation, 93
- Permutations, 313
- Phénoménologique, 147
- Phase
  - changement de, 429
- Piézoélectricité, 405
- Piola, 106, 107, 183
- Piola-Kirchhoff
  - premier tenseur de, 106
  - second tenseur de, 107, 183
- Piston, 148
- Plaque, 55
  - mince, 391
  - trouée, 563
- Plasticité, 117, 148, 442, 571
- Poincaré, 335
- Point
  - matériel, 31
  - réglieux, 104, 350
  - singulier, 104, 350
- Poiseuille, 148, 285
- Polaire, 93
- Polaire, décomposition, 39
- Polymère, 223
- Polynôme
  - caractéristique, 109, 335
- Polyuréthane, 223
- Porosité, 603
- Postulat
  - de Cauchy, 86
- Potentiel
  - convexe, 194
  - de dissipation, 178
  - des vitesses, 125
- Poutre, 55, 512
- Précipitation, 444
- Pression, 119
  - d'arrêt, 126
  - dynamique, 126
  - externe, 449
  - interne, 449
  - magnétique, 679
- Principe
  - d'équivalence, 160
  - d'entropie, 172
  - d'indifférence matérielle, 153, 165, 366
  - d'isotropie de l'espace, 154, 356
  - de Curie, 213
  - de l'action locale, 157
  - de Saint-Venant, 252, 512
  - des puissances virtuelles, 93
  - du déterminisme, 156
  - premier, 96
  - second, 184

- Problème  
     de Dirichlet, 234, 475  
     de Neumann, 234, 475, 518
- Problème de Saint-Venant, 526
- Processus  
     thermodynamique, 176
- Production  
     d'entropie, 172
- Produit  
     contracté, 306  
     doublement contracté, 306  
     mixte, 37, 316  
     tensoriel, 304  
     vectoriel, 37, 316
- Pseudo-tenseur, 313  
     d'orientation, 314
- Puissance  
     des efforts de contact, 94  
     des efforts intérieurs, 94  
     virtuelle, 93
- Pull-back, 324
- Push-forward, 324
- Quantité de mouvement, 82
- Quasi-fragile, 649
- Quasi-naturel  
     état, 209
- Réaction, 203
- Réciprocité, 178  
     théorème de , 446
- Référentiel, 29  
     corotationnel, 77  
     en rotation propre, 77  
     local objectif, 77
- Régime  
     adiabatique, 228  
     permanent, 228
- Régularité, 264
- Réservoir, 449
- Résidus, 142
- Règle  
     de Noll, 166
- Raideur, 148
- Rankine, 104, 350
- Rankine-Hugoniot, 104, 350
- Reiner-Rivlin, 282
- Représentation  
     de Mohr, 111  
     théorème de, 337
- Ressort, 148
- Reynolds, 284, 345  
     équation de, 287
- nombre de, 284
- Rhéologie, 147
- Rigide, 41, 78, 147
- Rigidité  
     de flexion, 252  
     de torsion, 481
- Rivlin, 279, 355
- Rivlin, R., 341
- Rotation, 317  
     petite, 51, 391  
     propre, 40, 49, 77, 382
- Rotationnel, 67, 329, 629
- Rupture, 117, 119, 489, 596, 611  
     fragile, 571
- Saint-Venant, 252, 475, 512, 526, 543, 620
- Saut, 100, 347
- Second gradient, 158
- Second principe, 172, 184
- Semi-fluide, 169
- Shear, 45
- Silicium, 427
- Similitude, 284
- Simple, 157
- simplement  
     connexe, 628
- Simplement connexe, 629
- Singularité, 635  
     des contraintes, 595, 599  
     du gradient, 392  
     du gradient de la transformation, 393
- SMC, 169
- Sobolev, 264
- Solide, 166, 168  
     élastique isotrope, 182  
     anisotrope, 181
- Sollicitation  
     uniaxiale, 113
- Souplesse, 148
- Sphère  
     creuse, 392  
     osculatrice, 252, 409, 550
- Stabilité, 194, 441
- Stationnaire, 67
- Statique, 93
- Stokes, 97  
     formules de, 333
- Stokes, G.G., 282
- Stoney, 425
- Stratifié, 430
- Stretch, 45
- Stretch tensor, 40

- Substrat, 428  
Superalliage, 430, 709  
Surface, 38  
Suspensions, 297  
Symétrie, 337  
    brisure de, 166  
    majeure, 179, 189  
    matérielle, 165  
    mineure, 188  
Symétrique, 324  
  
Ténacité, 599  
Tétraèdre  
    de Cauchy, 90  
Tangent, 34  
Taux  
    d'allongement relatif, 71  
    de déformation, 67  
    de glissement angulaire, 71  
    de rotation, 67  
Tenseur  
    de Mandel, 198  
    antisymétrique, 70, 315  
    axial, 315  
    d'élasticité, 188  
    de Cauchy-Green, 40  
    de Levi-Civita, 314  
    de Rivlin-Ericksen, 279  
    de structure, 709  
    des dilatations, 40  
    des permutations, 93  
    eulérien, 48, 64  
    invariant, 64, 65  
    lagrangien, 48, 64  
    métrique, 351  
    mixte, 36, 64  
    objectif, 64, 65  
    orthogonal, 70, 324  
    pseudo, 313  
    symétrique, 315, 324  
Tenseurs, 301  
Théorème  
    d'Euler, 124  
    de Bernoulli, 125  
    de Blasius, 142  
    de Gauss, 691  
    de Green, 476  
    de l'énergie complémentaire, 261  
    de l'énergie potentielle, 261, 265  
    de la divergence, 333  
    de Lax-Milgram, 242, 265  
    de Maxwell-Betti, 446  
    de Poincaré, 335  
    de réciprocité, 446  
    des puissances virtuelles, 93  
    des résidus, 142  
Théorie  
    asymptotique, 599  
    cinétique des gaz, 151  
    du second gradient, 158  
Thermocouple, 226  
Thermodynamique, 96, 172  
Thermographie infra-rouge, 226  
Titane, 223  
Torseur, 85  
    des efforts appliqués, 451, 453  
    dynamique, 82  
Torsion, 475, 709  
Tourbillon, 67, 395  
Trace, 109, 334  
Traction, 113  
    indirecte, 649  
    plane, 578  
    simple, 113, 242  
Trajectoire, 32, 125, 399  
Trajet de déformation, 188  
Tranchant, 506  
Transformation, 31  
    euclidienne, 29  
    finie, 31, 51, 375  
    galiléenne, 29  
    homogène, 40  
    infinitésimale, 51  
    isochore, 38, 54, 72  
Transformation de phase, 405  
Transmué, 166  
Transport  
    équation de, 104, 345  
    convectif, 37, 355  
    d'une surface, 38  
Transposition, 306  
Travail  
    virtuel, 93  
Travaux  
    virtuels, 240  
Tresca  
    critère de, 120  
Tresca, H., 120  
Trièdre directeur, 154  
Triclinique, 213  
Trou  
    circulaire, 563  
    elliptique, 563, 587  
Tube

mince, 456, 489  
sous pression, 449

Turbine, 527

Uniaxial, 113

Unicité, 264

Unilatéral, 235

Uranium, 223

Variable

commandable, 156  
dépendante, 156  
interne, 157

Variables

d'Euler, 33  
de Lagrange, 32

Variance, 107, 307, 351

Vecteur

axial, 316  
contrainte, 84  
de Burgers, 615, 632  
objectif, 77  
surface, 38  
tourbillon, 67

Verre, 223

Viriel, 363

Virtuel

puissance, 93  
travail, 93

Vis, 615

Viscoélasticité, 148, 279

Viscoplasticité, 148

Viscosité, 148, 279

cinématique, 284, 290

Vitesse, 66

complexe, 127  
de déformation, 67

Voigt, W., 210, 222, 301

Volterra, 615

Volume, 38, 54, 72, 315

élémentaire représentatif, 21, 148

Vorticimètre, 395

Wafer, 427

Zinc, 223