率密度.

(2) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解 (1) $Y=X^3$,即有 $y=g(x)=x^3$,它严格单调增加,解得 $x=h(y)=y^{1/3}$,且有 $h'(y)=\dfrac{1}{3}y^{-2/3}$,由教材第二章(5.2)式得 $Y=X^3$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}y^{-2/3}f(y^{1/3}),\quad y\neq 0.$$

(2) $Y=X^2$,即有 $y=g(x)=x^2$,在 $x>0$ 时,$g(x)$ 严格单调增加,具有反函数 $x=h(y)=\sqrt{y}$,又有 $h'(y)=\dfrac{1}{2}y^{-1/2}$,由教材第二章(5.2)式得 $Y=X^2$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

37. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

解 X 在 $(0,\pi)$ 内取值时 $Y=\sin X$ 在 $(0,1)$ 内取值,故若 $y<0$ 或 $y>1$ 时 $f_Y(y)=0$. 若 $0\leqslant y\leqslant 1$,则 Y 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{0\leqslant Y\leqslant y\}=P\{0\leqslant \sin X\leqslant y\}\\&=P\{(0\leqslant X\leqslant \arcsin y)\cup(\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant \pi)\}\\&=P\{0\leqslant X\leqslant \arcsin y\}+P\{\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant \pi\}\\&=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx\\&=\frac{1}{\pi^2}(\arcsin y)^2+1-\frac{1}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)^2=\frac{2}{\pi}\arcsin y.\end{aligned}$$

所以当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

因此，所求的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

38. 设电流 I 是一个随机变量，它均匀分布在 9～11 A 之间. 若此电流通过 2 Ω 的电阻，在其上消耗的功率 $W=2I^2$. 求 W 的概率密度.

解　电流 I 的概率密度为

$$f_I(i)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 9<i<11,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$W=2I^2$，即有 $w=g(i)=2i^2$，在 $i>0$ 时，$g(i)$ 严格单调增加，且有反函数 $i=h(w)=\left(\dfrac{w}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，而 $h'(w)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}w^{-\frac{1}{2}}$，$g(9)=162$，$g(11)=242$. 由教材第二章(5.2)式得 $W=2I^2$ 的概率密度为

$$f_W(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}w^{-\frac{1}{2}}\right), & 162<w<242,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即

$$f_W(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{2w}}, & 162<w<242,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

39. 某物体的温度 T(以°F 计)是随机变量，且有 $T\sim N(98.6,2)$，已知 $\Theta=\dfrac{5}{9}(T-32)$，试求 Θ(以℃计) 的概率密度.

解　T 的概率密度为

$$f_T(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-98.6)^2}{4}},\quad -\infty<t<\infty.$$

将 Θ 的分布函数记为 $F_\Theta(y)$，则有

$$\begin{aligned}F_\Theta(y)&=P\{\Theta\leqslant y\}=P\left\{\frac{5}{9}(T-32)\leqslant y\right\}\\&=P\left\{T\leqslant\frac{9}{5}y+32\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{9}{5}y+32}f_T(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

将上式关于 y 求导得到 Θ 的概率密度为

$$f_{\Theta}(y)=f_T\left(\frac{9}{5}y+32\right)\times\frac{9}{5}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\times\frac{9}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\left(\frac{9}{5}y+32-98.6\right)^2},$$

即有

$$f_{\Theta}(y)=\frac{9}{10\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{81(y-37)^2}{100}}.$$