中国计量大学 2021~2022 学年第 一 学期

《概率论与数理统计 A》课程

试卷 (A) 参考答案及评分标准

开课二级学院：理学院，学生班级：20 工试 1-4 等 教师： 邹海雷等

一、填空题（36 分）

1、$\frac{1}{5}$；2、0.75； 3. 一定 4. $\frac{7}{11}$ 5. 样本容量 6、25.6 7、$\frac{2n}{15}$ 8、$\theta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-c}$

9、$(0.038,0.507)$ 10、$\frac{1}{3}$ 11、$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{3},0<y<3\\ 0,y<0\end{cases}$ 12. $-\frac{1}{2}$

二、计算题（47 分）

1、

X	3	2	1
P	0.1	0.3	0.6

………4 分

$$F(x)=\begin{cases}0,x<1\\ 0.6,1\le x<2\\ 0.9,2\le x<3\\ 1,x\ge 3\end{cases}$$ ………8 分

2、

$$f(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},-1<x<1$$ ………4 分

$$EX=\iint_{x^2+y^2\le 1}x\frac{1}{\pi}dxdy=0$$

$$EY = \iint_{x^2+y^2\le 1} y\frac{1}{\pi}dxdy = 0$$

$$EXY = \iint_{x^2+y^2\le 1} xy\frac{1}{\pi}dxdy = 0$$

$\operatorname{cov}(X,Y)=0$ ………8 分

3、$E(X)=0$；$E(Y)=0$；$E(XY)=0$

$Cov(X,Y)=0$

$\rho=0$ ……………4 分

$p(0,0)\neq p(0)p(0)$，故不独立。 ……………8 分

4、解：由于若不接受这批玻璃纸需作退货处理，这必须慎重。故取 $\mu<65$ 作为备择假设，从而所建立的假设为：

$$H_0:\mu\ge 65,\qquad H_1:\mu<65$$ ………1 分

在 $\alpha=0.05$ 时，$z_\alpha=z_{0.05}=1.645$，拒绝域应取作 $\{z\le -z_\alpha\}$。 ………3 分

现由样本求得

$$z=\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}=\frac{55.06-65}{5.5/\sqrt{100}}=-18.07<-z_{0.05}=-1.645$$ ………5 分

故应拒绝 H_0，不能接受这批玻璃纸。 ………6 分

5、解：

解：(1) $\int_0^2 kxdx==1,\quad k=\frac{1}{2}$ ……………………2 分

(2) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$ ……………………5分

(3) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$ ……………………8 分

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ ……………………10 分

$D(X)=E(X)^2-(E(X))^2=\frac{2}{9}$ ……………………11 分

6、$f_Z(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$ ……………………1 分

$$=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx, z>0\\ 0,\ \mathrm{z}\le 0\end{cases}$$ ……………3 分

$$=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}dx, z>0\\ 0,\ \mathrm{z}\le 0\end{cases}$$ ……………4 分

$$=\begin{cases}\frac{z^3e^{-z}}{3!}, z>0\\ 0,\ \mathrm{z}\le 0\end{cases}$$ ……………6 分

三、应用题(6 分)

由贝叶斯公式：

$$p=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$$ ……………5 分

$$=\frac{4}{5}$$ ……………6 分

四、证明题（11 分）

(1)

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}x_i^{\frac{1-\theta}{\theta}}=\theta^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$ ……………1 分

$$\ln L(\theta) = -n\ln\theta + \frac{1-\theta}{\theta}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$ ……………3 分

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{-1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$$ …………4 分

$$\hat{\theta} = \frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$ …………5 分

故估计量：$\hat{\theta} = \frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$

(2)

$$E(\ln X) = \int_0^1 \ln x \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} dx$$ …………6 分

$$= x^{\frac{1}{\theta}} \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} x^{\frac{1}{\theta}} dx$$ …………7 分

$$= -\theta$$ …………9 分

$$E(\hat{\theta}) = \frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\ln X_i) = \frac{-1}{n} n(-\theta) = \theta$$ …………11 分

故 $\hat{\theta} = \frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ 是 θ 的无偏估计量。