中国计量大学2020~ 2021学年第 一 学期

《概率论与数理统计A》课程

试卷 (A) 参考答案及评分标准

开课二级学院：理学院，学生班级：19试点等   教师： 邹海雷等

一、填空题（40分）

1、$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}},0<y<1\\ 0,other\end{cases}$；**2**、**0.6**；**3.** 12 4. $3/7$ 5. $3/4$ 6. 50 7、$2\overline{X}$

8、（**4.804,5.196**）**9**、$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ **10.** $\dfrac{2}{5n}$

二、计算题（56分）

1、解：设 $A_i=$“取到第i箱产品”，$i=1,2\cdots\cdots$ $B=$“取到一等品”

则：1）$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{50}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{18}{30}=\dfrac{2}{5}$

……………4分

2）$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}}{\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}}=\dfrac{1}{4}$

……………8分

2、

似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta C^{\theta}x_i^{-(\theta+1)}=\theta^n C^{n\theta}\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\theta+1)}$ ……………2分

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta\ln C-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ……………3分

令 $\dfrac{d(\ln L(\theta))}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+n\ln C-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$ ……………5分

解得θ的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - n\ln C}$ ················6 分

3、解：设该次考试考生的成绩为X，则X服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$分布，$\mu,\sigma^2$均为未知参数：

对$\alpha=0.05, n=36,$检验假设 $H_0:\sigma^2=16^2,\qquad \sigma^2\neq 16^2$ ················1 分

选统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^{\ 2}}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域：$\chi^2\geq\chi_{\frac{\alpha}{2}}^{\ 2}(n-1)$ 或$\chi^2\leq\chi^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

经计算得 $\chi^2=\dfrac{35\times 15^2}{16^2}=30.7617$，

因$\chi^2{}_{0.025}(35)=53.15, \chi^2{}_{0.975}(35)=20.06$, 而 $20.06<\chi^2<53.15,$

故接受$H_0:\sigma^2=16^2,$ 即认为这次考试考生成绩的方差为16^2。

················6 分

4、解：

（1）$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{1}{4} & 0\leq x<1 \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4} & 1\leq x<2 \\ \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=1 & x\geq 2 \end{cases}$，

················4 分

（3）$E(X)=0\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{4}=1$分

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2\times^2\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$ ……………6 分

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$$

……………8 分

5、$E(Z)=29$ ……………3 分

$D(Z)=94$ ……………6 分

6、D 的可能取值：1,2,3,4；F 的可能取值 0,1，2 ……………1 分

F \ D	1	2	3	4
0	0.1	0	0	0
1	0	0.4	0.2	0.1
2	0	0	0	0.2

……………6 分

7、$E(X)=0.7$；$E(Y)=0$；$E(XY)=0$

$Cov(X,Y)=0$

$\rho=0$ ……………4 分

$p(0,0)\neq p(0)p(0)$，故不独立。 ……………8 分

8、解：

$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$ ……………1 分

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ z-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ x<z\end{cases}$$

$z<0$，　　$f(z)=0$

$0 \le z < 1$， $f(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = 1 - e^{-z}$

$z \ge 1$， $f(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = (e-1)e^{-z}$

$$f(z) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ 1 - e^{-z}, 0 \le z < 1 \\ (e-1)e^{-z}, z \ge 1 \end{cases}$$

……………6 分

三、（6 分）证明：

$P\{a < \min\{X,Y\} \le b\} = P\{\min\{X,Y\} \le b\} - P\{\min\{X,Y\} \le a\}$ ……………1 分

$= 1 - P\{\min\{X,Y\} > b\} - 1 + P\{\min\{X,Y\} > a\}$ ……………3 分

$= P\{X > a\}P\{Y > a\} - P\{X > b\}\{Y > b\}$ ……………5 分

$= [P\{X > a\}]^2 - [P\{X > b\}]^2$； $(a \le b)$ ……………6 分