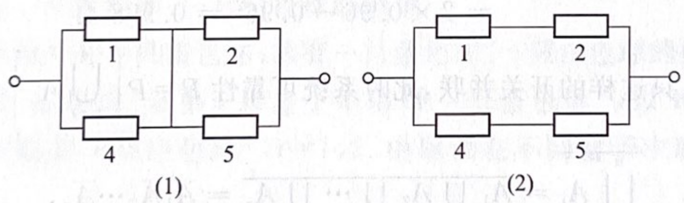
$$
\begin{aligned}
P(A)&=P(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4)\\
&=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}P(B_iB_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}P(B_iB_jB_k)-P(B_1B_2B_3B_4)\\
&=P(A_1A_2)+P(A_4A_5)+P(A_1A_3A_5)+P(A_4A_3A_2)-P(A_1A_2A_4A_5)\\
&\quad -P(A_1A_2A_3A_5)-P(A_1A_2A_3A_4)-P(A_1A_3A_4A_5)\\
&\quad -P(A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\
&\quad +P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\
&\quad -P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\
&=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5.
\end{aligned}
$$

解法(ii)(全概率公式法) 按元件 3 处于正常工作与失效两种状态,将原系统简化为典型的并串联和串并联系统,再用全概率公式:

$$P(A)=P(A\mid A_3)P(A_3)+P(A\mid\overline{A}_3)P(\overline{A}_3)$$

来计算原系统的可靠性.



题 1.34 图 2

当元件 3 正常工作时,系统简化成如题 1.34 图 2(1)所示,当元件 3 失效时,系统简化成如题 1.34 图 2 (2)所示. 因此

$$P(A\mid A_3)=P[(A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5)],$$

$$P(A\mid\overline{A}_3)=P(A_1A_2\cup A_4A_5).$$

故 $P(A)=P[(A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5)]P(A_3)+P(A_1A_2\cup A_4A_5)P(\overline{A}_3)$.

注意到

$$P(A_1\cup A_4)=P(A_1)+P(A_4)-P(A_1A_4)=2p-p^2.$$

同样 $\qquad P(A_2\cup A_5)=2p-p^2.$

$$
\begin{aligned}
P(A_1A_2\cup A_4A_5)&=P(A_1)P(A_2)+P(A_4)P(A_5)-P(A_1)P(A_2)P(A_4)P(A_5)\\
&=2p^2-p^4.
\end{aligned}
$$

即得原系统的可靠性为

$$
\begin{aligned}
P(A)&=(2p-p^2)^2p+(2p^2-p^4)(1-p)\\
&=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5.
\end{aligned}
$$

注:本题易犯的错误是在使用概率的加法公式时,没有注意两事件不是不相

容的，例如在(1)中应有 $P(A_1A_2A_3 \cup A_1A_4) = P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$，而错误地将最后一项 $P(A_1A_2A_3A_4)$ 漏了.

35. 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性. 在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出. 如果两个这样的开关并联连接，它们每个具有 0.96 的可靠性(即在情况 C 发生时闭合的概率)，问这时系统的可靠性(即电路闭合的概率)是多少? 如果需要有一个可靠性至少为 0.999 9 的系统，则至少需要用多少只开关并联? 设各开关闭合与否是相互独立的.

解 以 A_i 表示事件"第 i 只开关闭合"，$i=1,2,\cdots,n$. 已知 $P(A_i)=0.96$，由此可得两只这样的开关并联而电路闭合的概率为(注意各开关闭合与否是相互独立的)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= 2 \times 0.96 - 0.96^2 = 0.998\ 4. \end{aligned}$$

设需要 n 只这样的开关并联，此时系统可靠性 $R = P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$，注意到

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n,$$

且由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的独立性推得 $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n$ 也相互独立. 故

$$\begin{aligned} R = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n) \\ &= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n) = 1 - (1-0.96)^n. \end{aligned}$$

要使 $R \geqslant 0.999\ 9$，即要使 $1 - 0.04^n \geqslant 0.999\ 9$，亦即要使 $0.000\ 1 \geqslant 0.04^n$. 故应有

$$n \geqslant \frac{\lg 0.000\ 1}{\lg 0.04} = \frac{4}{\lg 25} = \frac{4}{1.397\ 9} = 2.86.$$

因 n 为整数，故应有 $n \geqslant 3$，即至少要用 3 只开关并联.

36. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. 问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少?

解 以 A_i 表示事件"第 i 人能译出密码"，$i=1,2,3$. 已知 $P(A_1)=\frac{1}{5}$，$P(A_2)=\frac{1}{3}$，$P(A_3)=\frac{1}{4}$，则至少有一人能译出密码的概率为

$$p=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

由独立性即得

$$p=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{5}.$$

也可以这样做，因 A_1,A_2,A_3 相互独立，知 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 也相互独立，即有

$$p=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$
$$=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{5}.$$

37. 设第一只盒子中装有 3 只蓝色球、2 只绿色球、2 只白色球，第二只盒子中装有 2 只蓝色球、3 只绿色球、4 只白色球. 独立地分别在两只盒子中各取一只球.

(1) 求至少有一只蓝色球的概率.

(2) 求有一只蓝色球、一只白色球的概率.

(3) 已知至少有一只蓝色球，求有一只蓝色球、一只白色球的概率.

解　以 B_i 记事件"从第 i 只盒子中取得一只蓝色球"，以 W_i 记事件"从第 i 只盒子中取得一只白色球"，$i=1,2$. 由题设在不同盒子中取球是相互独立的.

(1) 即需求 $P(B_1\cup B_2)$. 利用对立事件来求较方便，即有

$$P(B_1\cup B_2)=1-P(\overline{B_1\cup B_2})=1-P(\overline{B}_1\overline{B}_2)$$
$$=1-P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)=1-\frac{4}{7}\times\frac{7}{9}=\frac{5}{9}.$$

(2) 即需求事件 $B_1W_2\cup B_2W_1$ 的概率，注意到 B_1,W_1 是互不相容的，即 $B_1W_1=\varnothing$，因而 $(B_1W_2)(B_2W_1)=\varnothing$，故有

$$P(B_1W_2\cup B_2W_1)=P(B_1W_2)+P(B_2W_1)$$
$$=P(B_1)P(W_2)+P(B_2)P(W_1)$$
$$=\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{7}=\frac{16}{63}.$$

(3) 即需求条件概率 $p=P(B_1W_2\cup B_2W_1\mid B_1\cup B_2)$. 因 $(B_1W_2\cup B_2W_1)\subset B_1\cup B_2$，故有

$$p=P[(B_1W_2\cup B_2W_1)(B_1\cup B_2)]/P(B_1\cup B_2)$$
$$=P(B_1W_2\cup B_2W_1)/P(B_1\cup B_2)=\frac{16}{35}.$$

38. 袋中装有 m 枚正品硬币、n 枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽)，

在袋中任取一枚，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽. 问这枚硬币是正品的概率为多少？

解　以 T 记事件"将硬币投掷 r 次每次都出现国徽"，以 A 记事件"所取到的是正品"，由题设 $P(A)=\frac{m}{m+n}$，$P(\overline{A})=\frac{n}{m+n}$，$P(T|A)=\frac{1}{2^r}$，$P(T|\overline{A})=1$，需要求的是概率 $P(A|T)$. 由贝叶斯公式，所求概率为

$$P(A|T)=\frac{P(AT)}{P(T)}=\frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A)+P(T|\overline{A})P(\overline{A})}$$

$$=\left(\frac{1}{2^r}\times\frac{m}{m+n}\right)\Big/\left(\frac{1}{2^r}\times\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}\right)=\frac{m}{m+2^r n}.$$

39. 设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%（这一事件记为 A_1），损坏 10%（事件 A_2），损坏 90%（事件 A_3），且知 $P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$. 现在从已被运输的物品中随机地取 3 件，发现这 3 件都是好的（这一事件记为 B）. 试求 $P(A_1|B)$，$P(A_2|B)$，$P(A_3|B)$（这里设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率）.

解　在被运输的物品中，随机取 3 件，相当于在物品中抽取 3 次，每次取一件，作不放回抽样. 又根据题中说明抽取一件后，不影响取后一件是否为好品的概率，已知当 A_1 发生时，一件产品是好品的概率为 $1-2\%=0.98$，从而随机取 3 件，它们都是好品的概率为 0.98^3，即

$$P(B|A_1)=0.98^3,$$

同样

$$P(B|A_2)=0.9^3,\quad P(B|A_3)=0.1^3.$$

又知

$$P(A_1)=0.8,\quad P(A_2)=0.15,\quad P(A_3)=0.05.$$

现在 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$，$i,j=1,2,3$，且 $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$，由教材第一章 §5 的页下注知道此时全概率公式、贝叶斯公式都能够应用，由贝叶斯公式得到

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)}$$

$$=\frac{0.98^3\times 0.8}{0.862\,4}=0.873\,1,$$

$$P(A_2|B)=\frac{0.9^3\times 0.15}{0.862\,4}=0.126\,8,$$

$$P(A_3 \mid B)=\frac{0.1^3\times 0.05}{0.862\ 4}=0.000\ 1.$$

40. 将 A,B,C 三个字母之一输入信道,输出为原字母的概率是 α,而输出为其他某一字母的概率都是 $\frac{1-\alpha}{2}$. 今将字母串 AAAA,BBBB,CCCC 之一输入信道,输入 AAAA,BBBB,CCCC 的概率分别为 $p_1,p_2,p_3(p_1+p_2+p_3=1)$,已知输出为 ABCA,问输入的是 AAAA 的概率是多少?(设信道传输各个字母的工作是相互独立的.)

解　以 A_1,B_1,C_1 分别表示事件"输入 AAAA""输入 BBBB""输入 CCCC",以 D 表示事件"输出 ABCA". 因事件 A_1,B_1,C_1 两两互不相容,且有 $P(A_1\cup B_1\cup C_1)=P(A_1)+P(B_1)+P(C_1)=p_1+p_2+p_3=1$,因此全概率公式和贝叶斯公式可以使用(参见教材第一章§5 的页下注). 由贝叶斯公式有

$$P(A_1\mid D)=\frac{P(A_1D)}{P(D)}$$

$$=\frac{P(D\mid A_1)p_1}{P(D\mid A_1)p_1+P(D\mid B_1)p_2+P(D\mid C_1)p_3}.$$

在输入为 AAAA(即事件 A_1)输出为 ABCA(即事件 D)时,有两个字母为原字母,另两字母为其他字母,所以

$$P(D\mid A_1)=\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2.$$

同理 $P(D\mid B_1)=P(D\mid C_1)=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3$. 代入上式并注意到 $p_1+p_2+p_3=1$,得到

$$P(A_1\mid D)=\frac{2\alpha p_1}{(3\alpha-1)p_1+1-\alpha}.$$