

Cahier de kholle de l'année de sup à Pasteur en MPSI 1

Mathématiques

## 1 Kholle maths

### 1.1 kholleur/euse: M.Chen

note: 17/20

chapitre: Logique, ensembles, calcul algébrique

### 1.2 question compliquée: Cauchy-Schwarz (mais vu en DM)

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) \quad (1)$$

**résolution:**

Posons  $P(x) = \sum_{i=1}^n (u_i + x v_i)^2$   
 $\sum_{i=1}^n u_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n u_i v_i + x^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \rightarrow$  On reconnaît un polynôme du second degré en  $x$   
 $\rightarrow$  On calcule son discriminant  $\Delta = 4 \left( \left( \sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right) \right)$   
 $\rightarrow$  or  $P(x) \geq 0$  car c'est la somme de termes au carré, donc  $\Delta \leq 0$   
d'où  $\left( \left( \sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right) \right) \leq 0$  donc  $\left( \sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)$

### 1.3 kholleur/euse: M.De Laboulaye

note: 14/20

chapitre: Logique, calcul algébrique, sommes et produits, systèmes linéaires trigonométrie, complexes

problèmes compliqués, je n'aurais sûrement pas réussi sans les astuces qui m'ont été données

### 1.4 kholleur/euse: M.Thai

note: 11/20

chapitre: Logique, calcul algébrique, sommes et produits, systèmes linéaires trigonométrie, complexes

### 1.5 question raté (mais car j'ai paniqué, j'aurais dû savoir directement)

Démontrer que n'importe quelle fonction peut se décomposer en la somme d'une fonction paire et impaire

**résolution:**

**Analyse:** supposons que  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = P(x) + I(x)$  avec  $P(x)$  une fonction paire et  $I(x)$  une fonction impaire

On a donc  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$f(-x) = P(x) - I(x) \\ \text{et } f(x) = P(x) + I(x)$$

donc en additionnant les lignes:

$$P(x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} \\ I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

**Synthèse:**

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

## 1.6 kholleur/euse: M.Laillet

note: 13/20

chapitre: calcul différentielle et intégral, et fonctions usuelles

## 1.7 question que j'aurais pu mieux faire: faire le graphe de la fonction W de Lambert

Faire le graphe de l'application  $\mathbb{W}$  tq  $\mathbb{W} \in \mathbb{R}^+$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \mathbb{W}(x)e^{\mathbb{W}(x)} = \mathbb{I}_d(\mathbb{R}^+)$

On a  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \mathbb{W}(x)e^{\mathbb{W}(x)} = \mathbb{I}_d(\mathbb{R}^+)$ , or,  $xe^x$  une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  donc,  $\exists \mathbb{W}^{-1}$  la bijection réciproque de  $\mathbb{W}$

$$\text{donc } \mathbb{W}^{-1}(xe^x) = x$$

traçons le symétrique de  $x \mapsto xe^x$  par rapport à  $x \mapsto x$

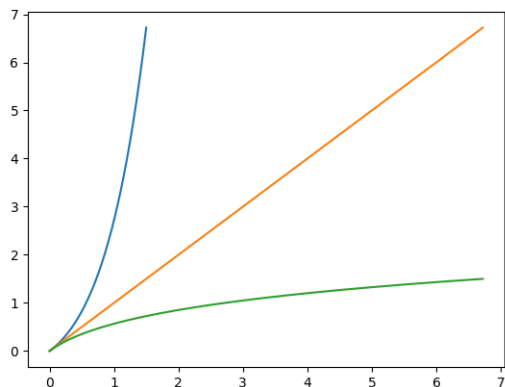
calculons des valeurs qui nous permettent de bien tracer  $x \mapsto xe^x$

Déjà  $0e^0 = 0$ , dérivons maintenant  $xe^x$

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

Donc, la tangente en 0 a une pente de  $e^0(0+1) = 1$

On trace donc  $y = xe^x$  et son symétrique par rapport à  $y = x$ , et on obtient



## 1.8 kholleur/euse: M.Thevenet

note: 8/20

chapitre: surjection, injection, bijection

## 1.9 Je captais pas bien le cours encore

Je suis tombé sur des questions de cours où il fallait utiliser l'écriture en compréhension des définitions d'injection et surjection, et j'ai passé l'heure dessus... Pas grand chose à dire de plus mise à part que j'ai fais de la merde...

### 1.10 kholleur/euse: M.Brunet

note: 14/20

chapitre: Calcul intégral

### 1.11 Question jolie mais difficile sans aide un peu...

montrer que  $\forall (f, g) \in (R^R)^2$  de monotonie opposées, on a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt$$

**résolution:**

Soit  $(f, g) \in (R^R)^2$  de monotonie opposées, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt \leq (b-a) \int_a^b f(t) g(t) dt \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{db} \left( \int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt \right) \leq \frac{d}{db} \left( (b-a) \int_a^b f(t) g(t) dt \right) \\ \Leftrightarrow & f(b) \int_a^b g(t) dt + g(b) \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) f(b) g(b) \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(b) g(t) + g(b) f(t) \leq (b-a) f(b) g(b) \quad \text{Or } (b-a) f(b) g(b) = \int_a^b f(b) g(b) dt \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(b) g(t) + g(b) f(t) - f(b) g(b) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(b) (g(t) - g(b)) + g(b) (f(t) - f(b)) \leq 0 \end{aligned}$$

Ce qui est vrai car si l'une est croissante et l'autre décroissante, l'intégrande sera négative

### 1.12 kholleur/euse: Mme.Colin De Verdière

note: 13/20

chapitre: Calcul intégral

### 1.13 Question de cours

"formule du changement de variable dans une intégrale et démonstration"

Je ne savais pas trop ce qu'elle voulait dire, donc j'ai essayé de généraliser la technique du changement de variable.

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f \in C^0(\mathbb{R})$  On a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx & \rightarrow \text{effectuons le changement de variable } \phi, \text{ une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ et } \phi \in C^1(\mathbb{R}), \text{ tq } x = \phi(u) \\ \text{et } dx & = \phi'(u) du, \text{ ainsi que le changement de borne } u = \phi^{-1}(x), \text{ d'où } a \rightarrow \phi^{-1}(a), \text{ et } b \rightarrow \phi^{-1}(b), \\ & = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(u)) \phi'(u) du \end{aligned}$$

Démonstration quasi triviale (dérivé)

### 1.14 Question difficile

$$\text{calculer } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

On montre facilement que c'est bien primitivable (continuité de l'intégrande)

→ On remarque que l'on peut intégrer dans l'autre sens avec la proposition du roi, soit en changeant, le cos en sin

$$\text{D'où } 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$$

### 1.15 kholleur/euse:

note: /20

chapitre:

### 1.16 Question de cours

### 1.17 kholleur/euse: Mme.Aymard

note: 10/20

chapitre: réels et suites

### 1.18 Question de cours : Caractérisation séquentielle de la densité dans $\mathbb{R}$

la caractérisation séquentielle de la densité dans  $\mathbb{R}$ , est

Soit  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists a \in A$  tq  $|x - a| \leq \epsilon$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  tq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$

$\Leftrightarrow A$  est dense dans  $\mathbb{R}$

# Démonstration:

$\Rightarrow$ ) Soit  $x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists a \in A$  tq  $|x - a| \leq \epsilon$

$\rightarrow$  posons  $\epsilon = \frac{1}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ , On dispose donc de  $a \in A$ , posons  $u_n = a$

Donc  $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} x$

$\Leftarrow$ ) Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ , tq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x$ , donc  $\forall \epsilon > 0$ , on dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tq  $\forall n \geq N |x - u_n| \leq \epsilon$ , en posant  $a = u_N$ , on obtient le résultat voulu

### 1.19 Exercice: étudier $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$

On a une suite défini par récurrence par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec, ici  $f : x \mapsto \frac{1}{6}(x^2 + 8)$

$\rightarrow$  étudions  $f(x) - x$ : déjà,  $f(x) - x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$  sur  $\mathbb{R}^+$

### 1.20 kholleur/euse: M.Taieb

note: 8/20

chapitre: arithmétique

### 1.21 Question de cours: Théorème de Gauss

1) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ , tq  $a \wedge b = 1$  alors,  $a|bc \Rightarrow a|c$

2) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ , tq  $a|c$  et  $b|c$ , alors  $a \wedge b = 1 \Rightarrow ab|c$

# Démonstration:

1) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ , tq  $a \wedge b = 1$  mq  $a|bc \Rightarrow a|c$

Déjà, par le théorème de Bezout, on a

$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tq  $au + bv = 1$

donc,  $acu + bcv = c$  or  $a|ab$  car  $a|a$ , et  $a|bc$  par hypothèse

donc  $a|abu + bcv = c$ , d'où  $a|c$ , d'où le résultat

## 1.22 exercice

montrer que

$$\left( \prod_{p \in \mathbb{P} \text{ et } p \geq 2 \geq n}^n p \right) \mid ({}_nC_{2n})$$

Résolution:

$$\text{Déjà } {}_nC_{2n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{2n}{n^2!}$$

$$\text{et } n! = \prod_{k=1}^n k, \text{ donc } {}_nC_{2n} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k^2} = \frac{\prod_{k=n+1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k}$$

donc, comme  $\prod_{p \in \mathbb{P} \text{ et } 2 \leq p \leq n} p \mid \prod_{k=n+1}^{2n} k$ , car  $\forall p \in \mathbb{P}$  et  $n/2 < p \leq 2n$ ,  $n+1 \leq 2p \leq 2n$ , donc  $v_p \left( \prod_{p \in \mathbb{P} \text{ et } 2 \leq p \leq n} p \right) = 1$

et  $v_p \left( \prod_{k=n+1}^{2n} k \right) \geq 1$

alors  $\prod_{p \in \mathbb{P} \text{ et } 2 \leq p \leq n} p \mid {}_nC_{2n} n!$

or  $\prod_{p \in \mathbb{P} \text{ et } 2 \leq p \leq n} p \nmid n!$ , alors, par le théorème de Gauss,  $\prod_{p \in \mathbb{P} \text{ et } 2 \leq p \leq n} p \mid {}_2C_{2n}$

D'où le résultat

## Physique

## 2 Kholle 1

### 2.1 kholleur/euse: M.chapon ou M.Didelot

## Anglais

## 3 Kholle 1

### 3.1 kholleur/euse: M

## Francais

## 4 Kholle 1

### 4.1 kholleur/euse: Mme.

note: 12/20

Assez bien, mais attention à :

- faire plus de citations et référence
- venir à la bonne salle ! (c'était la salle 15 du mail, pas celle annoncé au tableau d'info pour les kholles)

Remarques perso

- il faut mieux savoir ce que l'on veut dire, et dire vraiment tout de ce que l'on a pensé du sujet, et essayer d'amener la conversation après où l'on veut