

Cahier de kholle de l'année de sup à Pasteur en MPSI 1

Mathématiques

## 1 Kholle 1

### 1.1 kholleur/euse: M.Chen

note: 17/20

chapitre: Logique, ensembles, calcul algébrique

### 1.2 question compliquée: Cauchy-Schwarz (mais vu en DM)

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) \quad (1)$$

**résolution:**

Posons  $P(x) = \sum_{i=1}^n (u_i + x v_i)^2$   
 $\sum_{i=1}^n u_i^2 + 2x \sum_{i=1}^n u_i v_i + x^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 \rightarrow$  On reconnaît un polynôme du second degré en  $x$   
 $\rightarrow$  On calcule son discriminant  $\Delta = 4 \left( \left( \sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right) \right)$   
 $\rightarrow$  or  $P(x) \geq 0$  car c'est la somme de termes au carré, donc  $\Delta \leq 0$   
d'où  $\left( \left( \sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right) \right) \leq 0$  donc  $\left( \sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)$

### 1.3 kholleur/euse: M.De Laboulaye

note: 14/20

chapitre: Logique, calcul algébrique, sommes et produits, systèmes linéaires trigonométrie, complexes

problèmes compliqués, je n'aurais sûrement pas réussi sans les astuces qui m'ont été données

### 1.4 kholleur/euse: M.Thai

note: 11/20

chapitre: Logique, calcul algébrique, sommes et produits, systèmes linéaires trigonométrie, complexes

### 1.5 question raté (mais car j'ai paniqué, j'aurais dû savoir directement)

Démontrer que n'importe quelle fonction peut se décomposer en la somme d'une fonction paire et impaire

**résolution:**

**Analyse:** supposons que  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = P(x) + I(x)$  avec  $P(x)$  une fonction paire et  $I(x)$  une fonction impaire

On a donc  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$f(-x) = P(x) - I(x) \\ \text{et } f(x) = P(x) + I(x)$$

donc en additionnant les lignes:

$$P(x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} \\ I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

**Synthèse:**

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

## 1.6 kholleur/euse: M.Laillet

note: 13/20

chapitre: calcul différentielle et intégral, et fonctions usuelles

## 1.7 question que j'aurais pu mieux faire: faire le graphe de la fonction W de Lambert

Faire le graphe de l'application  $\mathbb{W}$  tq  $\mathbb{W} \in \mathbb{R}^+$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \mathbb{W}(x)e^{\mathbb{W}(x)} = \mathbb{I}_d(\mathbb{R}^+)$

On a  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \mathbb{W}(x)e^{\mathbb{W}(x)} = \mathbb{I}_d(\mathbb{R}^+)$ , or,  $xe^x$  une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  donc,  $\exists \mathbb{W}^{-1}$  la bijection réciproque de  $\mathbb{W}$

$$\text{donc } \mathbb{W}^{-1}(xe^x) = x$$

traçons le symétrique de  $x \mapsto xe^x$  par rapport à  $x \mapsto x$

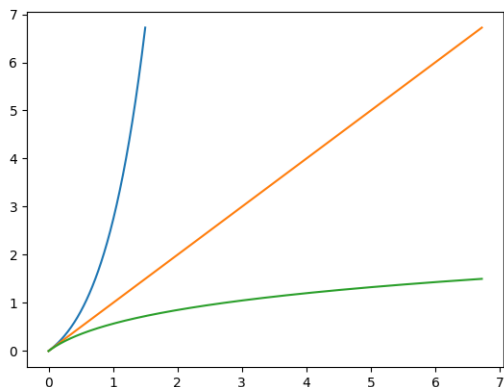
calculons des valeurs qui nous permettent de bien tracer  $x \mapsto xe^x$

Déjà  $0e^0 = 0$ , dérivons maintenant  $xe^x$

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$$

Donc, la tangente en 0 a une pente de  $e^0(0+1) = 1$

On trace donc  $y = xe^x$  et son symétrique par rapport à  $y = x$ , et on obtient



## 1.8 kholleur/euse: M.Thevenet

note: 8/20

chapitre: surjection, injection, bijection

## 1.9 Je captais pas bien le cours encore

Je suis tombé sur des questions de cours où il fallait utiliser l'écriture en compréhension des définitions d'injection et surjection, et j'ai passé l'heure dessus... Pas grand chose à dire de plus mise à part que j'ai fais de la merde...

## 1.10 kholleur/euse: M.Brunet

note: 14/20

chapitre: Calcule intégral

## 1.11 Question jolie mais difficile sans aide un peu...

montrer que  $\forall (f, g) \in (R^R)^2$  de monotonie opposées, on a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt$$

**résolution:**

Soit  $(f, g) \in (R^R)^2$  de monotonie opposées, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt \leq (b-a) \int_a^b f(t) g(t) dt \\ \Leftrightarrow & \frac{d}{db} \left( \int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt \right) \leq \frac{d}{db} \left( (b-a) \int_a^b f(t) g(t) dt \right) \\ \Leftrightarrow & f(b) \int_a^b g(t) dt + g(b) \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) f(b) g(b) \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(b) g(t) + g(b) f(t) \leq (b-a) f(b) g(b) \quad \text{Or } (b-a) f(b) g(b) = \int_a^b f(b) g(b) dt \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(b) g(t) + g(b) f(t) - f(b) g(b) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(b) (g(t) - g(b)) + g(b) (f(t) - f(b)) \leq 0 \end{aligned}$$

Ce qui est vrai car si l'une est croissante et l'autre décroissante, l'intégrande sera négative

**Physique**

## 2 Kholle 1

### 2.1 kholleur/euse: M.chapon ou M.Didelot

**Anglais**

## 3 Kholle 1

### 3.1 kholleur/euse: M

**Francais**

## 4 Kholle 1

### 4.1 kholleur/euse: Mme.