cahier de kholle

Nom: Arnaud Lelièvre **classe: MPSI 1**

Cahier de kholle de l'année de sup à Pasteur en MPSI 1

Mathématiques

1 Kholle 1

1.1 kholleur/euse: M.Chen

note: 17/20
chapitre: Logique, ensembles, calcul algébrique

1.2 question compliquée: Cauchy-Schwarz (mais vu en DM)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2 \tag{1}$$

résolution:

Posons $P(x) = \sum_{i=1}^{n}(u_i + xv_i)^2$
$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2xu_iv_i + x^2v_i^2$ $\rightarrow$ On reconnait un polynome du second degré en x
$\rightarrow$ On calcule son discriminant $\Delta = 4\left(\left(\sum_{i=1}^{n} u_iv_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)\right)$
$\rightarrow$ or $P(x) \geqslant 0$ car c'est la somme de termes au carré, donc $\Delta \leqslant 0$
d'où $\left(\left(\sum_{i=1}^{n} u_iv_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)\right) \leqslant 0$ donc $\left(\sum_{i=1}^{n} u_iv_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2$

1.3 kholleur/euse: M.De Laboulaye

note: 14/20
chapitre: Logique, calcul algébrique, sommes et produits, systèmes linéaires trigonométrie, complexes

problèmes compliqués, je n'aurais surement pas réussi sans les astuces qui m'ont été données

1.4 kholleur/euse: M.Thai

note: 11/20
chapitre: Logique, calcul algébrique, sommes et produits, systèmes linéaires trigonométrie, complexes

1.5 question raté (mais car j'ai paniqué, j'aurais due savoir directement)

Démontrer que n'importe quelle fonction peut se décomposer en la somme d'une fonction paire et impaire

résolution:

Analyse: supposons que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = P(x) + I(x)$ avec $P(x)$ une fonction paire et $I(x)$ une fonction impaire

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$:

$f(-x) = P(x) - I(x)$
et $f(x) = P(x) + I(x)$

donc en additionnant les lignes:

$P(x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2}$
$I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

Synthèse:

$\frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$

1.6 kholleur/euse: M.Laillet

note: 13/20
chapitre: calcul différentielle et intégral, et fonctions usuelles

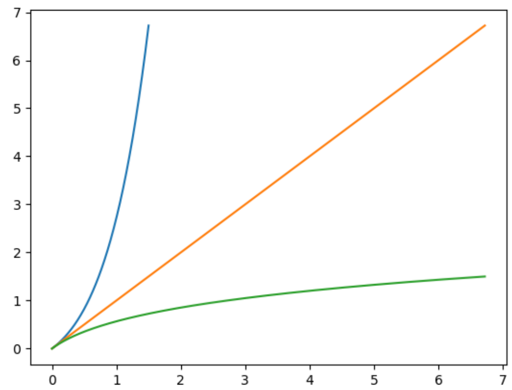
1.7 question que j'aurais pu mieux faire: faire le graphe de la fonction W de Lambert

Faire le graphe de l'application $\mathbb{W}$ tq $\mathbb{W} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+ \mathbb{W}(x)e^{\mathbb{W}(x)} = \mathbb{I}_d(\mathbb{R}^+)$

On a $\forall x \in \mathbb{R}^+\mathbb{R}^+\mathbb{W}(x)e^{\mathbb{W}(x)} = \mathbb{I}_d(\mathbb{R}^+)$, or, xe^x une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc, $\exists \mathbb{W}^{-1}$ la bijection reciproque de $\mathbb{W}$

donc $\mathbb{W}^{-1}(xe^x) = x$
tracons le symétrique de $x \mapsto xe^x$ par rapport à $x \mapsto x$
calculons des valeurs qui nous permetent de bien tracer $x \mapsto xe^x$
Déjà $0e^0 = 0$, dérivons maintenant xe^x
$\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$
Donc, la tangeante en 0 a une pente de $e^0(0+1) = 1$

On trace donc $y = xe^x$ et son symétrique par rapport à $y = x$, et on obtient



1.8 kholleur/euse: M.Thevenet

note: 8/20
chapitre: surjection, injection, bijection

1.9 Je captais pas bien le cours encore

Je suis tombé sur des questions de cours où il fallait utiliser l'écriture en compréhention des définitions d'injéction et surjection, et j'ai passé l'heure dessus... Pas grand chose à dire de plus mise à part que j'ai fais de la merde...

1.10 kholleur/euse: M.Brunet

note: 14/20
chapitre: Calcule intégral

1.11 Question jolie mais difficile sans aide un peu...

montrer que $\forall (f,g) \in (R^R)^2$ de monotonie opposées, on a

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$

résolution:

Soit $(f,g) \in (R^R)^2$ de monotonie opposées, on a

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)dt$
$\Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)dt$
$\Leftrightarrow \frac{d}{db}\left(\int_a^b f(t)dt \int_a^b g(t)dt\right) \leqslant \frac{d}{db}\left((b-a)\int_a^b f(t)g(t)dt\right)$
$\Leftrightarrow f(b)\int_a^b g(t)dt + g(b)\int_a^b f(t)dt \leqslant (b-a)f(b)g(b)$
$\Leftrightarrow \int_a^b f(b)g(t) + g(b)f(t) \leqslant (b-a)f(b)g(b)$ Or $(b-a)f(b)g(b) = \int_a^b f(b)g(b)dt$
$\Leftrightarrow \int_a^b f(b)g(t) + g(b)f(t) - f(b)g(b) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \int_a^b f(b)(g(t)-g(b)) + g(b)(f(t)-f(b)) \leqslant 0$

Ce qui est vrai car si l'une est croissante et l'autre décroissante, l'intégrande sera négative

1.12 kholleur/euse: Mme.Colin De Verdière

note: 13/20
chapitre: Calcule intégral

1.13 Question de cours

"formule du changement de variable dans une integale et démonstration"
Je ne savais pas trop ce qu'elle voulait dire, donc j'ai essayé de généraliser la technique du changement de variable.

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f \in C^0(\mathbb{R})$ On a donc
$\int_a^b f(x)dx \quad \rightarrow$ effections le changement de variable ϕ, une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\phi \in C^1(\mathbb{R})$, tq $x = \phi(u)$ et $dx = \phi'(u)du$, ainsi que le changement de borne $u = \phi^-1(x)$, d'où $a \rightarrow \phi^-1(a)$, et $b \rightarrow \phi^-1(b)$,
$= \int_{\phi^-1(a)}^{\phi^-1(b)} f(\phi(u))\phi'(u)du$

Physique

2 Kholle 1

2.1 kholleur/euse: M.chapon ou M.Didelot

Anglais

3 Kholle 1

3.1 kholleur/euse: M

Francais

4 Kholle 1

4.1 kholleur/euse: Mme.