赵爹《连续介质力学》笔记

作者：无名氏马

2025 年 2 月 28 日

前言

本笔记根据 赵亚溥老师 2020 年春季《连续介质力学》课程 和教材 (赵亚溥. 理性力学教程. 北京: 科学出版社, 2020.) 整理而成，仅供参考学习。

2025 年 2 月 28 日

目录

第一章 张量分析 1

1.1 class 14 . . . 1

1.2 class 15 . . . 3

1.3 class 16 . . . 6

第二章 流体基本流动 9

2.1 class 17 . . . 9

2.2 class 18 . . . 14

2.3 class 19 . . . 17

2.4 class 20 . . . 17

2.5 class 21 . . . 18

2.6 class 22 . . . 20

第三章 curvilinear coordinates 曲线 (曲纹) 坐标系 23

3.1 class 23 . . . 23

3.2 class 24 . . . 28

3.3 class 25 . . . 34

3.4 class 26 . . . 36

第四章 张量运算 41

4.1 class 27 . . . 41

4.2 class 28 . . . 44

4.3 class 29 . . . 47

4.4 class 30 . . . 50

第五章 构形 configuration 52
5.1 class 31 52
5.2 class 32 57
5.3 class 33 59
5.4 class 34 63

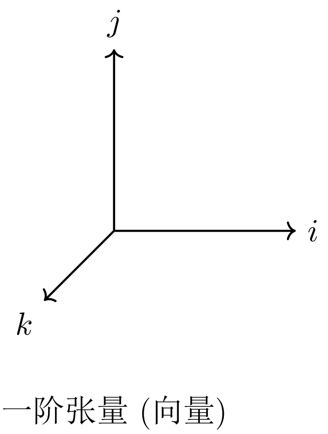
第六章 守恒律与场方程 67
6.1 class 35 67
6.2 class 36 69
6.3 class 37 75

第七章 客观性 79
7.1 class 39 79
7.2 class 39 83
7.3 class 40 87

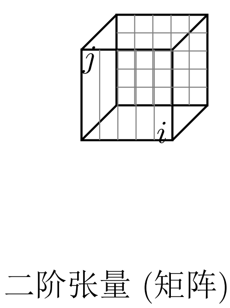
第一章　张量分析

1.1　class 14

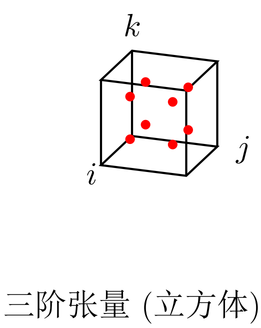
补充 1.1.1. 此部分内容 AIGC



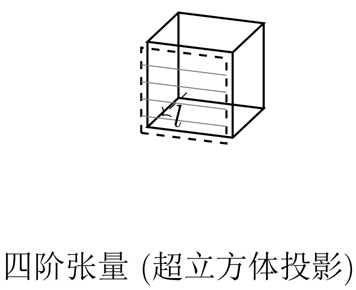
(a) 一阶张量



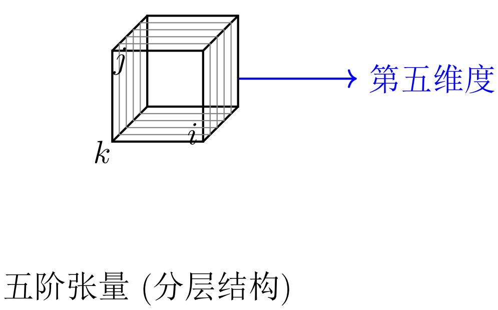
(b) 二阶张量



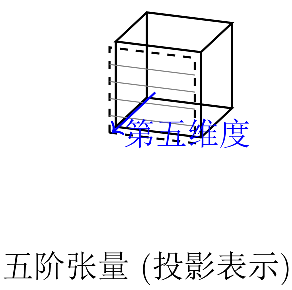
(c) 三阶张量



(d) 四阶张量



(e) 分层结构表示



(f) 投影表示

定义 1.1.1. geometric equation 几何方程

$$
\begin{aligned}
d\vec{u} &= \vec{u}\left(\vec{r}+d\vec{r}\right)-\vec{u}\left(\vec{r}\right)\\
\text{linear elasticity} &\approx \frac{\partial\vec{u}}{\partial\vec{r}}\cdot d\vec{r}\\
&= \underbrace{\left(\vec{u}\otimes\nabla\right)}_{\text{right gradient 右梯度}} d\vec{r}\\
&= \frac{\left(\vec{u}\otimes\nabla\right)+\left(\nabla\otimes\vec{u}\right)}{2}d\vec{r}+\frac{\left(\vec{u}\otimes\nabla\right)-\left(\nabla\otimes\vec{u}\right)}{2}d\vec{r}\\
&= \underbrace{\frac{\left(\vec{u}\otimes\nabla\right)+\left(\vec{u}\otimes\nabla\right)^{T}}{2}}_{\text{cauchy strain}}d\vec{r}+\underbrace{\frac{\left(\vec{u}\otimes\nabla\right)-\left(\vec{u}\otimes\nabla\right)^{T}}{2}}_{=\frac{1}{2}\nabla\times\vec{u}=\vec{\omega}}d\vec{r}\\
&= \vec{\vec{\epsilon}}d\vec{r}+\vec{\omega}\times d\vec{r}
\end{aligned}
$$

定义 1.1.2.

$$
\begin{aligned}
\text{弹性动力学方程}Lamé\text{–}Navier \quad \rho\ddot{\vec{u}} &= \left(\lambda+\mu\right)\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\mu\nabla^{2}\vec{u}\\
\text{其中} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad &, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\\
\text{Poisson's ratio} \quad \nu \quad &, \quad \text{Young's modulus} \quad E
\end{aligned}
$$

注：满足 homogeneous，isotropic，linear

已知:

$$
\begin{aligned}
\text{几何方程 cauchy strain}\vec{\vec{\epsilon}} &= \frac{\left(\vec{u}\otimes\nabla\right)+\left(\nabla\otimes\vec{u}\right)}{2}\\
\text{本构关系}\vec{\vec{\sigma}} &= 2\mu\vec{\vec{\epsilon}}+\lambda\left(tr\vec{\vec{\epsilon}}\right)\vec{\vec{I}}\\
\text{牛顿第二定律}\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}} &= \rho\ddot{\vec{u}}
\end{aligned}
$$

推导:

首先推导 $tr\vec{\vec{\epsilon}}$, $\nabla\cdot\left(\left(tr\vec{\vec{\epsilon}}\right)\vec{\vec{I}}\right)$ 。

$$\text{由于}\quad tr\left(\vec{a}\otimes\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i$$

$$tr\vec{\vec{\epsilon}}=\frac{(\vec{u}\cdot\nabla)+(\nabla\cdot\vec{u})}{2}=\nabla\cdot\vec{u}$$

$$\nabla\cdot\vec{\vec{\epsilon}}=\frac{1}{2}\nabla\cdot((\vec{u}\otimes\nabla)+(\nabla\otimes\vec{u}))=\frac{1}{2}\left(\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\nabla^2\vec{u}\right)$$

$$\nabla\cdot\left(\left(tr\vec{\vec{\epsilon}}\right)\vec{\vec{I}}\right)=\left(tr\vec{\vec{\epsilon}}\right)\nabla\cdot\vec{\vec{I}}=\nabla\left(tr\vec{\vec{\epsilon}}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)$$

$$\text{其中}\quad\nabla\cdot\vec{\vec{I}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\right)\cdot\left(\delta_{jk}\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k\right)=\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial x_i}=\nabla$$

在本构关系两端加上散度 $\nabla\cdot$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\vec{\sigma}}&=\mu\left(\nabla^2+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)\right)+\lambda\nabla\left(\nabla\vec{u}\right)\\&=\left(\lambda+\mu\right)\nabla\left(\nabla\vec{u}\right)+\mu\nabla^2\vec{u}=\rho\ddot{\vec{u}}\end{aligned}$$

□

推论 1.1.1. 通过 Helmholtz decomposition $\vec{u}=\nabla\varphi+\nabla\times\vec{\psi}$ 可以将弹性动力学方程分解为横波和纵波形式的波动方程。

1.2 class 15

定义 1.2.1. Hessian 黑森算子 ($\nabla\otimes\nabla=\nabla\nabla$)。The Hessian is a tensor of rank two

推导:

$$\begin{aligned}\nabla\otimes\nabla\cdot\vec{u}&=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_ix_j}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\right)\cdot u_k\vec{e}_k\\&=\frac{\partial^2u_j}{\partial x_ix_j}\vec{e}_i\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\delta_{jk}\\\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)&=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{e}_j\cdot u_k\vec{e}_k\right)\end{aligned}$$

□

例 1.2.1. 多元矢量函数的泰勒展开

$$f(\vec{x})\approx f(\vec{a})+\nabla f(\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})+\frac{1}{2!}(\vec{x}-\vec{a})^T\vec{\vec{H}}(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})+\cdots$$

$$\vec{\vec{H}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

其中：

- $(\nabla f(\vec{a}))$ 是函数在点 $(\vec{a})$ 处的梯度矩阵；
- $(\vec{\vec{H}}(\vec{a}))$ 是函数在点 $(\vec{a})$ 处的 Hessian 矩阵，表示二阶导数的矩阵；
- $((\vec{x}-\vec{a}))$ 是从点 $(\vec{a})$ 到点 $(\vec{x})$ 的偏移向量。

命题 1.2.1. 弹性动力学方程 $Lam\acute{e}-Navier$ 可简化为

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \vec{0} = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right) + \left(1-2\nu\right)\nabla^2\vec{u}$$

证明： 对于线弹性静力学问题，Lame-Navier 方程为：

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + f = \vec{0}$$

其中 $f = -\rho\ddot{\vec{u}}$ 假设无体积力 $(f=\vec{0})$，方程简化为：

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = \vec{0} \tag{1}$$

将方程两边除以 μ，得：

$$\nabla^2\vec{u} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = \vec{0} \tag{2}$$

泊松比 ν 与 Lame 常数的关系为

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{3}$$

式 (3) 变形为

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \tag{4}$$

将式 (4) 代入式 (2)

$$\frac{\lambda+\mu}{\mu} = \frac{\frac{2\nu\mu}{1-2\nu}+\mu}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu}+1 = \frac{1}{1-2\nu} \tag{5}$$

将式 (5) 代入式 (2)，得：

$$\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = \vec{0} \tag{6}$$

将式 (6) 两边乘以 $(1-2\nu)$，得到目标方程：

$$\boxed{\vec{0}=\nabla(\nabla\cdot\vec{u})+(1-2\nu)\nabla^2\vec{u}}$$

□

定义 1.2.2. projection tensor of rank two

已知： concentrated force$\vec{f}$

$$\begin{aligned}\vec{f}_n &= \left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}=\vec{f}\cdot(\vec{n}\otimes\vec{n})\\ \text{注：}\quad &= \left(f_i\vec{e}_i\cdot n_j\vec{e}_j\right)n_k\vec{e}_k=f_in_j\delta_{ij}n_k\vec{e}_k=\left(f_i\vec{e}_i\cdot\left(n_j\vec{e}_j\otimes n_k\vec{e}_k\right)\right)=\\ \vec{f}_\tau &= \vec{f}-\vec{f}_n=\vec{f}\cdot\left(\vec{\vec{I}}-\vec{n}\otimes\vec{n}\right)=\vec{f}\cdot\vec{\vec{P}}\end{aligned}$$

其中 $\vec{\vec{P}}$ 为 projection tensor of rank two。易知 (幂等性)

$$\vec{\vec{P}}^2=\vec{\vec{I}}-2\vec{n}\otimes\vec{n}+\vec{n}\otimes\vec{n}=\vec{\vec{P}}$$

这意味着将一个向量先投影再投影，结果与第一次投影相同

定义 1.2.3. 对于一个刚体，其转动惯性张量 $\vec{\vec{I}}$ 可以用以下公式表示：

$$\vec{\vec{I}}=\int\left(\|\vec{r}\|^2\vec{\vec{I}}-\vec{r}\times\vec{r}\right)\rho\,dV$$

推导:

$$\begin{aligned}\underbrace{\vec{\vec{L}}}_{\text{角动量}} &= \int\left(\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\right)\rho\,dV\\ &= \int\left(\|\vec{r}\|^2\vec{\vec{I}}\cdot\omega-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\,\vec{r}\right)\rho\,dV\\ &= \int\left(\|\vec{r}\|^2\vec{\vec{I}}\cdot\omega-\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\otimes\vec{r})\right)\rho\,dV\\ &= \underbrace{\int\left(\|\vec{r}\|^2\vec{\vec{I}}-\vec{r}\times\vec{r}\right)\rho\,dV}_{\text{转动惯性张量}}\cdot\vec{\omega}\end{aligned}$$

□

例 1.2.2. 在笛卡尔坐标系中，转动惯量张量的元素可以通过以下形式表示：

$$\vec{\vec{I}}=\begin{pmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix}$$

其中，I_{xx}、I_{yy}、I_{zz} 是关于各自坐标轴的转动惯量，而 I_{xy}、I_{xz}、I_{yz} 是相应的产品惯量。通过这些元素，可以分析刚体在不同方向上的转动特性。在三维空间中，转动惯量张量的分量可以表示为：

$$I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)\, dm$$

具体分量可以写为：

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\, dm \quad I_{yy} = \int (x^2 + z^2)\, dm \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\, dm \quad I_{xz} = I_{zx} = -\int xz\, dm \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int yz\, dm$$

1.3 class 16

定义 1.3.1. 纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程

不可压缩流体 Navier-Stokes 方程

连续性方程 (质量守恒)：

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

动量方程：

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}$$

注. 欧拉方程

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{f}$$

可压缩流体 Navier-Stokes 方程

连续性方程 (质量守恒)：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

动量方程：

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\vec{\tau}} + \rho \vec{f}$$

能量方程：

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \vec{v}) = -\nabla \cdot (p\vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{\vec{\tau}} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

其中：

- ρ 是流体密度，
- $\vec{v}$ 是速度场 (矢量)，
- p 是压力场 (标量)，
- $\vec{\vec{\tau}}$ 是粘性应力张量，μ 是动力粘度，$\vec{\vec{\tau}} = \mu\left(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^\top\right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{v})\vec{\vec{I}}$
- $\vec{f}$ 是外力场 (如重力)，
- E 是单位质量的总能量，
- κ 是热传导系数，
- T 是温度。

引理 1.3.1.

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = (\nabla\times\vec{v})\times\vec{v} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}^2)$$

推导: 矢量分析中的一个重要恒等式为：

$$(\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} = \nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) - \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) - (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$$

注.

$$\begin{aligned}
\because\nabla_{\vec{B}}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) &= \vec{A}\times\left(\nabla_{\vec{B}}\times\vec{B}\right) + \vec{A}\cdot\left(\nabla_{\vec{B}}\vec{B}\right)\\
\nabla_{\vec{A}}\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right) &= \vec{B}\times\left(\nabla_{\vec{A}}\times\vec{A}\right) + \vec{B}\cdot\left(\nabla_{\vec{A}}\vec{A}\right)\\
\therefore\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) &= \nabla_{\vec{B}}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) + \nabla_{\vec{A}}\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)\\
&= \nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) - \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) - (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}
\end{aligned}$$

当 $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$ 时，上式简化为：

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \nabla(\vec{v}\cdot\vec{v}) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

不可压缩流体 $(\nabla\cdot\vec{v} = 0)$，因此：

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = (\nabla\times\vec{v})\times\vec{v} + \frac{1}{2}\nabla(\vec{v}^2)$$

引入旋度和动能项，则：

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{v}\times\vec{\omega} + \nabla(\frac{1}{2}\vec{v}^2)$$

□

例 1.3.1. 分别通过能量守恒法和方向导数法推导伯努利方程

已知:

- 流体为理想流体（无粘性）。
- 流动为定常流动。
- 流体不可压缩。

推导:

能量守恒法推导伯努利方程

省略……

方向导数法推导伯努利方程

根据牛顿第二定律（沿流线方向的力平衡）：

$$\rho\frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{ds} - \rho g\frac{dh}{ds}$$

对于定常流动，加速度 $\frac{dv}{dt}$ 可以表示为随体导数（物质导数）：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}$$

定常流动 $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$，因此：

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{\partial v}{\partial s}$$

代入牛顿第二定律：

$$\rho v\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{\partial h}{\partial s}$$

将方程两边乘以 ds 并积分：

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho gh = \text{常数}$$

$\square$

第二章　流体基本流动

2.1　class 17

补充 2.1.1. 此部分内容 AIGC

普朗特学派是流体力学领域的重要分支，其核心成员包括 August Otto Föppl、Ludwig Prandtl 和 Theodore von Kármán。他们共同建立了这一学派，并对流体力学的发展做出了深远贡献。

August Otto Föppl　August Otto Föppl 是普朗特学派的创始人之一，他的研究主要集中在力学和流体力学领域。Föppl 的主要贡献包括在压力力学和弹性力学方面的研究，他提出了 Föppl 定律，该定律用于描述圆柱壳的形变。Föppl 还积极推动了流体力学的发展，并与 Ludwig Prandtl 有着密切的学术交流。

Ludwig Prandtl　Ludwig Prandtl 被誉为流体动力学的先驱，他的研究深刻影响了整个流体力学领域。Prandtl 提出了流体力学的基本方程，特别是 Prandtl 定律，该定律描述了流体流动的压力梯度与速度梯度之间的关系。此外，他还研究了气体动力学和旋转流体力学，Prandtl 的理论为后来的流体力学研究奠定了基础。Prandtl 的主要师从 August Otto Föppl 学习，他在 Föppl 的指导下完成了博士学位，并在之后的学术生涯中继承并发展了 Föppl 的研究方向。

Theodore von Kármán　Theodore von Kármán 是理论流体力学的奠基人之一，他的研究涵盖了流体力学、气体动力学和高速度流体力学。Kármán 提出了 Kármán-Weisbach 方程，该方程用于描述粘性流体在管道中的流动。他的实验研究和理论分析为航空工程和流体力学的实际应用提供了重要依据。Kármán 曾在 Ludwig Prandtl 的指导下完成博士学位，并在 Prandtl 的学术团队中进行了深入的流体力学研究。

师生关系

Ludwig Prandtl 的师从 Ludwig Prandtl 在学术生涯的早期接受了 August Otto Föppl 的指导。在 Föppl 的课题组中，Prandtl 接触了流体力学的基础理论，并在 Föppl 的支持下完成了博士学位论文。Föppl 的学术风格和对流体力学的深刻理解对 Prandtl 的学术发展起到了关键作用。

Theodore von Kármán 的师从 Theodore von Kármán 则是 Ludwig Prandtl 的重要学生之一。在 Prandtl 的指导下，Kármán 深入研究了流体力学的理论问题，并在 Prandtl 的实验室中进行了大量实验研究。Kármán 的学术成就在很大程度上得益于 Prandtl 的指导和学术环境。

学术传承 August Otto Föppl、Ludwig Prandtl 和 Theodore von Kármán 三人之间不仅存在师生关系，还形成了一个紧密的学术团队。Prandtl 继承了 Föppl 的研究方向，并培养了 Kármán 等一批优秀的流体力学学者。这种跨代的学术传承使得普朗特学派的理论体系得以延续和发展，成为流体力学研究的重要基石。

整体影响与意义 这三位科学家共同奠定了流体力学的基础，他们的研究不仅推动了学术领域的发展，也为工业和工程实践提供了重要理论支持。普朗特学派的建立标志着流体力学进入了一个新的阶段，其影响力至今仍在流体力学研究中发挥重要作用。

例 2.1.1. 固体力学与流体力学的联系与区别

联系

连续介质假设

二者均基于连续介质假设，忽略微观结构细节，用连续场 (如位移场、速度场) 描述宏观行为。

守恒定律

- **质量守恒**：固体力学中隐含于物质坐标；流体力学中显式表达为 $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$
- **动量守恒**：共用 Cauchy 动量方程 $\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\vec{\sigma}} + \vec{f}$
- **能量守恒**：均需考虑机械能与热能的转换

区别

基本观点

特征	固体力学	流体力学
研究对象	固体 (晶体、聚合物等)	流体 (气体、液体)
变形特性	有限变形可恢复 (弹性)	无限变形不可逆
描述方法	拉格朗日描述	欧拉描述
典型现象	应力集中、疲劳断裂	湍流、边界层分离

本构关系

固体力学 (以线弹性体为例) 广义胡克定律：

$$\vec{\vec{\sigma}} = \vec{\vec{C}} : \vec{\vec{\epsilon}}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

其中，$\vec{\vec{C}}$ 为**弹性张量**，描述材料的弹性性质，其分量 C_{ijkl} 表示材料在不同方向上的刚度。对于各向同性材料，弹性张量可简化为：

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

其中 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ 为**应变张量**，描述固体的变形。

流体力学 (以牛顿流体为例) 本构方程：

$$\vec{\vec{\sigma}} = -p\vec{\vec{I}} + 2\mu\vec{\vec{D}} + \lambda(\mathrm{tr}\vec{\vec{D}})\vec{\vec{I}}$$

应变率张量：

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

其中，$\vec{\vec{D}}$ 为**应变率张量**，描述流体的变形速率，其分量为：

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

对不可压缩流体 $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$ 简化为：

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

控制方程对比

固体力学 (Lamé-Navier 方程)

$$\rho\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\vec{v} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + \vec{f}$$

流体力学 (Navier-Stokes 方程)

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v} + \vec{f}$$
$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad (\text{不可压缩条件})$$

数学描述差异

- **固体力学**：位移场 $\vec{v}(\vec{X},t)$，物质导数 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}$
- **流体力学**：速度场 $\vec{v}(\vec{x},t)$，物质导数 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla$

变形特性

- **固体**：存在自然状态，弹性变形储存能量，屈服后出现塑性流动
- **流体**：无固定形状，静水压力各向同性，剪切应力总引起流动

定义 2.1.1. vorticity equation 涡量方程

$$\frac{\partial\vec{\vec{\Omega}}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\vec{\Omega}} = (\vec{\vec{\Omega}}\cdot\nabla)\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{\vec{\Omega}}$$

推导： 对兰姆矢量形式的不可压缩 Navier-Stokes 方程取旋度：
时间导数项的旋度为：$\nabla\times\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{v}) = \frac{\partial\vec{\vec{\Omega}}}{\partial t}$
兰姆矢量项的旋度为：$\nabla\times(\vec{\vec{\Omega}}\times\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\vec{\Omega}} - (\vec{\vec{\Omega}}\cdot\nabla)\vec{v}$
由于梯度的旋度恒为零, 压力项和动能项的旋度为：$\nabla\times\left(-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right)\right) = \vec{0}$
利用旋度和拉普拉斯算子的交换性, 粘性项的旋度为: $\nabla\times(\nu\nabla^2\vec{v}) = \nu\nabla^2(\nabla\times\vec{v}) = \nu\nabla^2\vec{\vec{\Omega}}$
将上述各项综合起来，得到涡量方程：

$$\frac{\partial\vec{\vec{\Omega}}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\vec{\Omega}} = (\vec{\vec{\Omega}}\cdot\nabla)\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{\vec{\Omega}}$$

□

注. 在不可压缩流体中，兰姆矢量的旋度为零。

推导:

$$\nabla \times \vec{L} = \nabla \times (\vec{\vec{\Omega}} \times \vec{v}) = \vec{\vec{\Omega}}(\nabla \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{\vec{\Omega}}) + \nabla(\vec{\vec{\Omega}} \cdot \vec{v}) - \nabla(\vec{v} \cdot \vec{\vec{\Omega}})$$

由于 $\vec{\vec{\Omega}} \cdot \vec{v}$ 是一个标量（ $\nabla(\vec{\vec{\Omega}} \cdot \vec{v}) - \nabla(\vec{v} \cdot \vec{\vec{\Omega}}) = \vec{0}$ ）。在不可压缩流体中（ $\nabla \cdot \vec{v} = 0$)，因此上式进一步简化为：

$$\nabla \times \vec{L} = -\vec{v}(\nabla \cdot \vec{\vec{\Omega}})$$

通常在不可压缩流体中，旋转速度场 $\vec{\vec{\Omega}}$ 的散度 $\nabla \cdot \vec{\vec{\Omega}}$ 也为零，因此最终结果为：

$$\nabla \times \vec{L} = \vec{0}$$

□

引理 2.1.1. 兰姆矢量形式的不可压缩 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{L} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2\right) + \nu\nabla^2\vec{v}$$

推导: 不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程包括连续性方程和动量方程：

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{连续性方程})$$
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} \quad (\text{动量方程})$$

其中：

- $\vec{v}$ 是速度矢量，
- p 是压力，
- ρ 是流体密度 (假设为常数)，
- ν 是运动粘度。

利用矢量恒等式：

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) + \vec{\vec{\Omega}} \times \vec{v}$$

其中：

- $\vec{\vec{\Omega}} = \nabla \times \vec{v}$ 是涡量矢量，
- $\vec{\vec{\Omega}} \times \vec{v}$ 是兰姆矢量 $\vec{L}$。

因此，对流项可以表示为：$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) + \vec{L}$

将展开后的对流项代入动量方程，得到：$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) + \vec{L} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v}$

将压力项和动能项合并，得到兰姆矢量形式的不可压缩 N-S 方程：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{L} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2\right) + \nu\nabla^2\vec{v}$$

其中：

- $\vec{L} = \vec{\vec{\Omega}} \times \vec{v}$ 是兰姆矢量，
- $p + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}|^2$ 是总压力 (静压与动压之和)。

□

2.2 class 18

例 2.2.1. 给定二维速度场：

$$\vec{u} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right),$$

其中 $u = \frac{y}{x^2+y^2}$，$v = \frac{-x}{x^2+y^2}$。计算涡量

解:

1. 涡量计算

涡量的定义为：

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

步骤 1：计算 $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$v = \frac{-x}{x^2+y^2},$$

对 x 求偏导数：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

使用商的导数法则：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-(1)(x^2+y^2) - (-x)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

步骤 2：计算 $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$u = \frac{y}{x^2+y^2},$$

对 y 求偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

使用商的导数法则：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(1)(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

步骤 3：计算涡量 $\vec{\Omega}$ 将上述结果代入涡量公式：

$$\vec{\Omega} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \vec{0}.$$

因此，该二维速度场的涡量为：

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{0}}.$$

2. 无旋性与势函数

涡量 $\vec{\Omega} = \vec{0}$ 表明速度场在 $x^2 + y^2 \neq 0$ 的区域是无旋的，可以表示为某个标量势函数 $\phi(x, y)$ 的梯度：

$$\vec{u} = \nabla\phi.$$

通过积分可得势函数：

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C.$$

3. 奇点与环量

尽管涡量在原点外为零，但原点 $(0, 0)$ 是奇点。计算绕原点的环量：

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}.$$

选择以原点为中心、半径为 R 的圆周路径 C，参数化为：

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad d\vec{l} = R(-\sin\theta, \cos\theta)d\theta.$$

代入速度场：

$$\vec{u} = \left(\frac{R\sin\theta}{R^2}, \frac{-R\cos\theta}{R^2}\right) = \frac{1}{R}(\sin\theta, -\cos\theta).$$

环量计算为：

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}(\sin\theta, -\cos\theta) \cdot (-R\sin\theta, R\cos\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta - \cos^2\theta) d\theta = -2\pi.$$

这表明绕原点的环量为 -2π，说明原点处存在集中涡量 (Delta 函数)。

4. 不可压缩性与流函数

检查速度场的散度：

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

计算偏导数：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

因此：

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{-2xy+2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

速度场是**不可压缩**的，且存在流函数 $\psi(x, y)$，满足：

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

解得：

$$\psi = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C.$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \text{涡量} & \vec{\Omega} = \vec{0} \quad (x^2+y^2 \neq 0), \\ \text{环量} & \Gamma = -2\pi \quad (\text{绕原点}), \\ \text{不可压缩} & \nabla \cdot \vec{u} = 0. \end{array}}$$

□

例 2.2.2. 用量纲分析推导 Kutta-儒可夫斯基升力公式

推导:

升力 L 与以下物理量相关：

- 流体密度 ρ(量纲：$[\rho] = \mathrm{ML}^{-3}$)
- 流速 V(量纲：$[V] = \mathrm{LT}^{-1}$)
- 特征长度 c(量纲：$[c] = \mathrm{L}$)
- 环量 circulation Γ(量纲：$[\Gamma] = \mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}$)

升力 L 的量纲为 $[L] = \mathrm{MLT}^{-2}$。

假设升力 L 与上述物理量的关系为：

$$L = k \cdot \rho^a V^b c^d \Gamma^e$$

其中 k 为无量纲常数，a, b, d, e 为待定指数。

将各物理量的量纲代入，得到：

$$\mathrm{MLT}^{-2} = (\mathrm{ML}^{-3})^a(\mathrm{LT}^{-1})^b(\mathrm{L})^d(\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1})^e$$

解得：

$$a = 1, \quad b = 1, \quad e = 1, \quad d = 1$$

将指数代入，得到升力公式：

$$L = k \cdot \rho V c \Gamma$$

实验和理论分析表明，常数 $k = 1$，因此：

$$L = \rho V \Gamma$$

这就是 Kutta-儒可夫斯基升力公式。 □

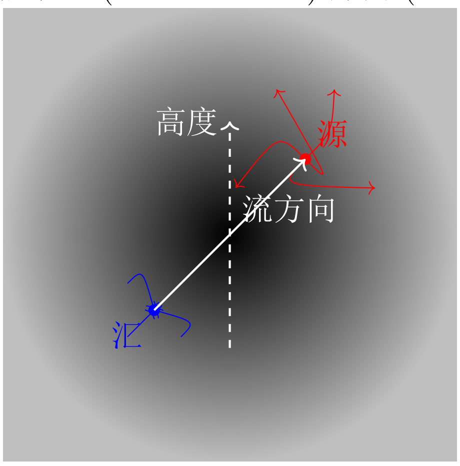
定义 2.2.1. 在不可压缩流体的平面势流中，有四种基本的流动类型 (Elementary Flour)：

均匀流 (Uniform Flour)、源 (汇) 流 (Source/Sink)、偶极子流 (Doublet Flour) 和涡流 (Vortex Flow)。

2.3 class 19

继续讲基本的流动类型，略……

补充 2.3.1. 偶极子流 (Doublet Flour) 方向 (arrow from sink to source) 约定示意图



此图像 AIGC

2.4 class 20

期中考试，略……

2.5 class 21

定义 2.5.1. Wake(涡流或纹路) 是流体在流动过程中由于流动不均匀或外界干扰而形成的旋转流动区域，通常表现为纹路或涡流现象。

- **Lifting Wake(升力纹路)**：由飞机机翼产生的升力引起的纹路现象，通常发生在飞机起飞或降落时。
- **Viscous Wake(粘性涡流)**：由流体的粘性效应引起的涡流现象，常见于流体流过粗糙表面或障碍物时。
- **Hydrodynamic Wake(流动力学涡流)**：由流体流动与外界环境 (如水流、空气流或地形) 相互作用形成的涡流现象。
- **Atmospheric Wake(大气涡流)**：在大气中，由风暴或气流运动形成的涡流现象。

命题 2.5.1. $\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{jkl} = 2\delta_{il}$

推导: 首先，考虑 Levi-Civita 符号的乘积 $\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{jkl}$，其中 j 和 k 是求和指标。

根据 Levi-Civita 符号的性质，我们有：

$$\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{jkl} = \sum_{j,k}\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{jkl}$$

利用 Levi-Civita 符号的乘积公式：

$$\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{jkl} = \delta_{il}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{kl}$$

其中 δ_{kk} 是 Kronecker delta 的迹，对于三维空间，$\delta_{kk} = 3$。

因此，上式可以简化为：

$$\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{jkl} = \delta_{il}\cdot 3 - \delta_{ik}\delta_{kl}$$

注意到 $\delta_{ik}\delta_{kl} = \delta_{il}$, 因此：

$$\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{jkl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il}$$

□

引理 2.5.1. 在三维空间中，Levi-Civita 符号的乘积公式为：

$$\begin{aligned}\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{lmn} &= \begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}\\ &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\end{aligned}$$

推论 2.5.2. if $i=l, j\neq m, k\neq n$,

$$\begin{aligned}\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{lmn} &= \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{ii}\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{ji}\delta_{kn}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki}+\delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{ki}\\ &= 3\left(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\right)-\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{km}\delta_{jn}+\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{kn}\delta_{jm}\\ &= \delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}\end{aligned}$$

if $i=l, j=m, k\neq n$,

$$\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{lmn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}=\delta_{jj}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{kj}=2\delta_{kn}$$

if $i=l, j=m, k=n$,

$$\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{\vec{\epsilon}}_{lmn}=\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\cdot\vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}=2\delta_{kk}=3!=6$$

例 2.5.1. 二倍的关系：$\vec{\Omega}=2\vec{\omega}$

其中：

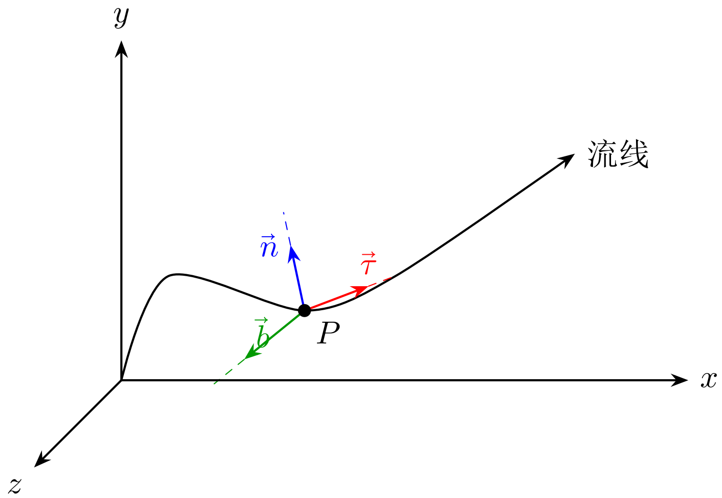
- $\vec{\Omega}$ 是涡量
- $\vec{\omega}$ 是角速度

1.error in beauty——Arnold Sommerfeld

Thus we cannot but offer an apology in reference to this defect

2.unfortunate factor——batchelor

定义 2.5.2. 三维 streamline coordinate 流线坐标系



- tangent $\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}$
- principal normal $\vec{n}=R\frac{d\vec{\tau}}{ds}$,scale factor$R=radius\, of\, curvature$
- binormal $\vec{b}=\vec{\tau}\times\vec{n}$

- osculating plane
- normal plane
- rectifying plane

例 2.5.2. $\vec{v} = v\vec{\tau}$, $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{n} & \vec{b} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} & \frac{\partial}{\partial n} & \frac{\partial}{\partial b} \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial v}{\partial b}\vec{n} - \frac{\partial v}{\partial n}\vec{b}$

定义 2.5.3. 在三维 streamline coordinate 流线坐标系中

$$\Omega_t = (\vec{\tau} \cdot \nabla \times \vec{\tau})\, v$$
$$\Omega_n = \frac{\partial v}{\partial b}$$
$$\Omega_b = \frac{v}{R} - \frac{\partial v}{\partial n}$$

例 2.5.3.

$$2\omega = \Omega_b = \underbrace{\frac{v}{R}}_{\omega} - \underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{-\frac{\partial v}{\partial r} = -\omega}$$

例 2.5.4. 点涡流 $V = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

$$\Omega_b = \frac{\Gamma}{2\pi r^2} - \frac{\Gamma}{2\pi r^2} = 0$$

2.6 class 22

命题 2.6.1.

$$\text{兰姆矢量形式的矢量恒等式} \vec{L} = (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \nabla \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)$$

证明:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{e}_i\right) \times (v_j \vec{e}_j) \times (v_k \vec{e}_k)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_j \vec{\vec{\epsilon}}_{ijl} \vec{e}_l\right) \times (v_k \vec{e}_k) \\
&= \frac{\partial v_j v_k}{\partial x_i} \vec{\vec{\epsilon}}_{ijl} \vec{\vec{\epsilon}}_{lkm} \vec{e_m} \\
&= \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_i \vec{e}_j - \frac{\partial v_j}{\partial x_j} v_j \vec{e}_i \\
&= \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \nabla \left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)
\end{aligned}$$

□

命题 2.6.2.

$$\nabla \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot \left(\nabla \times \vec{b}\right)$$

证明:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e_i}\right) \cdot \left(a_j b_k \vec{\vec{\epsilon}}_{jkl} \vec{e_k}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_j b_k \vec{\vec{\epsilon}}_{jkl} \delta_{il}\right) \\
&= \frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_k \vec{\vec{\epsilon}} jki + a_j \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \vec{\vec{\epsilon}} jki \\
&= b_k (\nabla \times \vec{a})_k + \vec{a} \cdot \left(\nabla \times \vec{b}\right) \\
&= \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot \left(\nabla \times \vec{b}\right)
\end{aligned}$$

□

命题 2.6.3.

$$\nabla \times (\varphi \vec{a}) = \varphi (\nabla \times \vec{a}) + (\nabla \varphi) \times \vec{a}$$

证明:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\varphi \vec{a}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e_i}\right) \times \left(\varphi a_j \vec{e_j}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi a_j \vec{\vec{\epsilon}}_{ijk} \vec{e_k}\right) \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} a_j \vec{\vec{\epsilon}}_{ijk} \vec{e_k} + \varphi \frac{a_j}{x_i} \vec{\vec{\epsilon}}_{ijk} \vec{e_k} \\
&= \varphi (\nabla \times \vec{a}) + (\nabla \varphi) \times \vec{a}
\end{aligned}$$

□

命题 2.6.4.

$$\nabla \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \nabla \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \vec{b} + \vec{a} \left(\nabla \cdot \vec{b}\right) - \vec{b} (\nabla \cdot \vec{a})$$

证明:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e_i}\right) \times \left(a_j b_k \vec{\vec{\epsilon}}_{jkm} \vec{e_m}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_j b_k \vec{\vec{\epsilon}}_{jkm} \vec{\vec{\epsilon}}_{imn} \vec{e_n}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_j b_k\right) \vec{\vec{\epsilon}}_{jkm} \vec{\vec{\epsilon}}_{imn} \vec{e_n} \\
&= \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} b_k + \frac{\partial b_k}{\partial x_i} a_j\right) \left(\delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{kn} \delta_{ji}\right) \vec{e_n} \\
&= \underbrace{\frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_i \vec{e_j}}_{\vec{b} \cdot \nabla \vec{a}} - \underbrace{\frac{\partial b_k}{\partial x_i} a_i \vec{e_k}}_{\vec{a} \cdot \nabla \vec{b}} + \underbrace{\frac{\partial b_i}{\partial x_i} a_j \vec{e_j}}_{\vec{a}\left(\nabla \cdot \vec{b}\right)} - \underbrace{\frac{\partial a_i}{\partial x_i} b_k \vec{e_k}}_{\vec{b}(\nabla \cdot \vec{a})}
\end{aligned}$$

□

命题 2.6.5.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

证明:

$$\begin{aligned}(\nabla \times (\nabla \times \vec{a}))_i &= \vec{\vec{\epsilon}}_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \times \vec{a})_k = \vec{\vec{\epsilon}}_{ijk} \vec{\vec{\epsilon}}_{klm} \frac{\partial^2}{\partial x_j x_l} a_m \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} a_j - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} a_i = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}\end{aligned}$$

□

第三章 curvilinear coordinates 曲线 (曲纹) 坐标系

3.1 class 23

定义 3.1.1. 正交曲线坐标系, 不区分斜边和逆变。

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3) \\ q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3) \\ q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

存在逆映射，需要满足 $\begin{cases} \mathbb{R}^3, continous\, C^1 \\ Jacobian \frac{\partial(q_1,q_2,q_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} \neq 0 \end{cases}$

本节内容默认在正交曲线坐标系讨论

定义 3.1.2. Lam$\acute{e}$ coefficients

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3$$

$$|\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2} = H_1$$

$$|\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_2}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)^2} = H_2$$

$$|\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_3}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_3}\right)^2} = H_3$$

例 3.1.1. 柱坐标系 (Cylindrical Coordinates) 中拉梅系数的推导

柱坐标系的坐标表示为 (ρ, θ, z)，其中：

- ρ 是点到 z-轴的径向距离，
- θ 是点在 xy-平面上的方位角，
- z 是点在 z-轴上的高度。

在柱坐标系中，长度元 $d\vec{r}$ 可以表示为：

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz,$$

其中，$\vec{r} = \rho \cos\theta \vec{i} + \rho \sin\theta \vec{j} + z\vec{k}$。

计算偏导数：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}, \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= -\rho \sin\theta \vec{i} + \rho \cos\theta \vec{j}, \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \vec{k}
\end{aligned}$$

拉梅系数 H_ρ、H_θ、H_z 分别为：

$$\begin{aligned}
H_\rho &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = 1, \\
H_\theta &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = \sqrt{(-\rho \sin\theta)^2 + (\rho \cos\theta)^2} = \rho, \\
H_z &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1
\end{aligned}$$

例 3.1.2. 球坐标系 (Spherical Coordinates) 中拉梅系数的推导

球坐标系的坐标表示为 (r, θ, φ)，其中：

- r 是点到原点的距离，
- θ 是点与 z-轴的极角，
- φ 是点在 xy-平面上的方位角。

在球坐标系中，长度元 $d\vec{r}$ 可以表示为：

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi,$$

其中，$\vec{r} = r \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + r \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + r \cos\theta \vec{k}$。

计算偏导数：

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k},$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\varphi\vec{i}+r\cos\theta\sin\varphi\vec{j}-r\sin\theta\vec{k},$$
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\vec{i}+r\sin\theta\cos\varphi\vec{j}$$

拉梅系数 H_r、H_θ、H_φ 分别为：

$$H_r=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|=\sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2+(\sin\theta\sin\varphi)^2+(\cos\theta)^2}=1,$$
$$H_\theta=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|=\sqrt{(r\cos\theta\cos\varphi)^2+(r\cos\theta\sin\varphi)^2+(-r\sin\theta)^2}=r,$$
$$H_\varphi=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|=\sqrt{(-r\sin\theta\sin\varphi)^2+(r\sin\theta\cos\varphi)^2}=r\sin\theta$$

定义 3.1.3. 梯度 $\nabla\varphi$, 方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\frac{\partial\varphi}{\partial q_2},\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$。

$$grad\varphi=\nabla\varphi=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e_2}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e_3}$$

推论 3.1.1.

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$$

例 3.1.3. 柱坐标系下标量函数 $f(\rho,\theta,z)$ 的梯度为：

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

例 3.1.4. 球坐标系下标量函数 $f(r,\theta,\varphi)$ 的梯度为：

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$

定义 3.1.4. 散度 $\nabla\cdot\vec{F}$

在一般曲线坐标系 (q_1,q_2,q_3) 中，向量场 $\vec{F}=F_1\vec{e}_1+F_2\vec{e}_2+F_3\vec{e}_3$ 的散度为：

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3F_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1H_3F_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2F_3)\right)$$

推导： 由 Gauss–Ostrogradsky formula，知向量场 $\vec{F}$ 的散度为：

$$\nabla\cdot\vec{F}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S},$$

考虑一个微小体积元 $dV=H_1H_2H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$，其边界由六个面组成。计算通过每个面的通量：

1 沿 q_1 方向的通量：

左侧面：$\vec{F}\cdot d\vec{S}_1 = -F_1H_2H_3\,dq_2\,dq_3$,

右侧面：$\vec{F}\cdot d\vec{S}_1 = F_1H_2H_3\,dq_2\,dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_1}(F_1H_2H_3)dq_1\,dq_2\,dq_3$

因此，沿 q_1 方向的净通量为：

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1H_2H_3)dq_1\,dq_2\,dq_3$$

2 沿 q_2 方向的通量：

前侧面：$\vec{F}\cdot d\vec{S}_2 = -F_2H_1H_3\,dq_1\,dq_3$,

后侧面：$\vec{F}\cdot d\vec{S}_2 = F_2H_1H_3\,dq_1\,dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2H_1H_3)dq_1\,dq_2\,dq_3$

因此，沿 q_2 方向的净通量为：

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(F_2H_1H_3)dq_1\,dq_2\,dq_3$$

3 沿 q_3 方向的通量：

底面：$\vec{F}\cdot d\vec{S}_3 = -F_3H_1H_2\,dq_1\,dq_2$,

顶面：$\vec{F}\cdot d\vec{S}_3 = F_3H_1H_2\,dq_1\,dq_2 + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3H_1H_2)dq_1\,dq_2\,dq_3$

因此，沿 q_3 方向的净通量为：

$$\frac{\partial}{\partial q_3}(F_3H_1H_2)dq_1\,dq_2\,dq_3$$

4 将三个方向的净通量相加，得到总通量：

$$\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2H_1H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3H_1H_2)\right)dq_1\,dq_2\,dq_3$$

根据散度的定义：

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{F}\\
=&\lim_{V\to 0}\frac{1}{H_1H_2H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(F_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(F_2H_1H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(F_3H_1H_2)\right)dq_1\,dq_2\,dq_3\\
=&\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1H_3F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2F_3)\right)
\end{aligned}$$

□

引理 3.1.2. divergence theorem(Gauss−Ostrogradsky formula)

$$\int_V(\nabla\cdot\vec{F})\,dV = \oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S},$$

其中：

- $\vec{F}$ 是一个向量场，
- V 是体积区域，
- ∂V 是体积 V 的边界曲面，
- $d\vec{S}$ 是曲面上的面积元向量。

在一般曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 中：

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1 H_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 F_3) \right) dq_1\, dq_2\, dq_3 = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

推论 3.1.3. Continuity equation for curvilinear coordinates

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \\ 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial (H_2 H_3 \rho v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (H_1 H_3 \rho v_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 \rho v_3)}{\partial q_3} \right) \end{aligned}$$

例 3.1.5. 柱坐标下散度

向量场 $\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z$ 的散度为：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

例 3.1.6. 球坐标下散度

向量场 $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$ 的散度为：

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

定义 3.1.5. 旋度 $\nabla \times \vec{F}$

在一般曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 中，向量场 $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3$, 的旋度公式为：

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \vec{e}_1 & H_2 \vec{e}_2 & H_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 F_1 & H_2 F_2 & H_3 F_3 \end{vmatrix}$$

推导: 由 Green's theorem，知向量场 $\vec{F}$ 的旋度为：

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

考虑一个微小面积元 $dA = H_1 H_2\, dq_1\, dq_2$，其边界由四条边组成。计算沿每条边的环量：

1 沿 q_1 方向的环量：

左侧边：$\vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = F_2 H_2\, dq_2$,

右侧边：$\vec{F}\cdot d\vec{r}_2=-F_2H_2\,dq_2-\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2H_2)dq_1\,dq_2$
因此，沿 q_1 方向的净环量为：

$$-\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2H_2)dq_1\,dq_2$$

2 沿 q_2 方向的环量：
底边：$\vec{F}\cdot d\vec{r}_1=F_1H_1\,dq_1$,
顶边：$\vec{F}\cdot d\vec{r}_1=-F_1H_1\,dq_1-\frac{\partial}{\partial q_2}(F_1H_1)dq_2\,dq_1$
因此，沿 q_2 方向的净环量为：

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(F_1H_1)dq_1\,dq_2$$

3 将两个方向的净环量相加，得到总环量：

$$\oint_{\partial A}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\left(\frac{\partial}{\partial q_2}(F_1H_1)-\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2H_2)\right)dq_1\,dq_2$$

4 对于面积元 $dA_3=H_1H_2\,dq_1\,dq_2$，旋度的分量为：

$$(\nabla\times\vec{F})_3=\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(F_2H_2)-\frac{\partial}{\partial q_2}(F_1H_1)\right)$$

5 其余方向同理，组合后，即旋度公式 □

引理 3.1.4. Green's theorem

在二维平面中，格林公式将曲线积分与二重积分联系起来。设 D 是一个有界的闭区域，其边界为 ∂D，向量场 $\vec{F}=P(x,y)\vec{\imath}+Q(x,y)\vec{\jmath}$ 在 D 上连续可微，则格林公式为：

$$\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

在一般曲线坐标系 (q_1,q_2) 中，格林公式的形式为：

$$\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2F_2)-\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1F_1)\right)dq_1\,dq_2$$

定义 3.1.6. 拉普拉斯算子 $\nabla^2\varphi=\nabla\cdot(\nabla\varphi)$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3})\right)$$

3.2 class 24

补充 3.2.1. 非欧几何早期重要发展节点 **(此部分内容 AIGC)**

- **欧几里得《几何原本》(公元前 300 年)**

  欧几里得提出第五公设（平行公设）：

  > 若一条直线与两条直线相交，并且在同一侧的内角之和小于两直角，则这两条直线在该侧延长后必相交。

- **萨凯里 (Girolamo Saccheri, 1733)**

  研究四边形（萨凯里四边形），假设钝角或锐角情况，试图证明第五公设。钝角假设导致矛盾，而锐角假设未导致矛盾，暗示非欧几何的可能性。

- **兰伯特 (Johann Heinrich Lambert, 1766)**

  研究钝角假设，发现几何性质与球面几何的相似性。例如，球面三角形的面积公式：

  $$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

  其中 R 是球面半径，α, β, γ 是三角形的内角。

- **高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1810s)**

  高斯在非欧几何中的贡献包括：

  - **曲率概念的引入**

    高斯提出曲面的高斯曲率 K，并发现非欧几何与负曲率曲面的联系：

    $$K = \frac{1}{R_1 R_2},$$

    其中 R_1 和 R_2 是曲面的主曲率半径。

  - **非欧几何的早期探索**

    高斯通过测量三角形内角和来验证空间的几何性质。例如，他尝试通过测量德国哈尔茨山脉的三角形内角和来检验空间是否可能是非欧几里得的。

  - **双曲几何的发现**

    高斯独立发现了双曲几何的基本性质，并意识到在双曲几何中，三角形的内角和小于 π：

    $$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

  - **未发表的研究**

    高斯担心非欧几何的发表会引起争议，因此未公开发表他的研究成果，但他的思想通过信件和笔记影响了波约伊和罗巴切夫斯基。

- **波约伊 (János Bolyai, 1832)**

  波约伊独立发现非欧几何，提出双曲几何中的平行公设替代：

给定一条直线和直线外一点，存在无数条直线通过该点且不与原直线相交。

- **罗巴切夫斯基 (Nikolai Lobachevsky, 1829)**
  罗巴切夫斯基系统阐述双曲几何，提出双曲几何中的平行角公式：

$$\Pi(p) = 2\arctan\left(e^{-p/k}\right),$$

  其中 p 是点到直线的距离，k 是曲率半径。

- **黎曼 (Bernhard Riemann, 1854)**
  黎曼提出黎曼几何，推广了非欧几何的概念。黎曼度量张量 g_{ij} 定义了曲面的弧长：

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j.$$

  黎曼曲率张量 R_{ijkl} 描述了空间的弯曲性质：

$$R_{ijkl} = \partial_k \Gamma_{ijl} - \partial_l \Gamma_{ijk} + \Gamma_{iks}\Gamma_{jls} - \Gamma_{ils}\Gamma_{jks},$$

  其中 Γ_{ijk} 是克里斯托费尔符号。

补充 3.2.2. 欧氏几何、黎曼几何与双曲几何对比 **(此部分内容 AIGC)**

欧氏几何 (Euclidean Geometry)

- **平行公设**: 给定一条直线和直线外一点，存在唯一一条直线通过该点且与原直线不相交。
- **曲率**: $K = 0$（平坦空间）
- **三角形内角和**:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

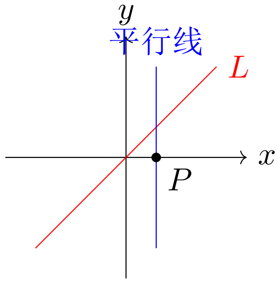
- **度量**: 笛卡尔坐标系中的勾股定理：

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

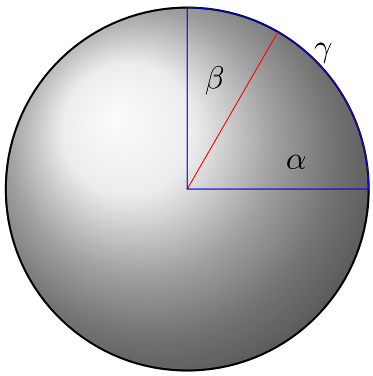
黎曼几何 (Riemannian Geometry)

- **平行公设**: 无平行线（所有直线最终相交）
- **曲率**: $K > 0$（正曲率，如球面）
- **三角形内角和**:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$



欧氏平面：唯一平行线



球面几何：内角和 $> \pi$

- **度量**: 球面坐标系的弧长公式：

$$ds^2 = R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

其中 R 是球面半径。

双曲几何 (Lobachevsky-Bolyai-Gauss Geometry)

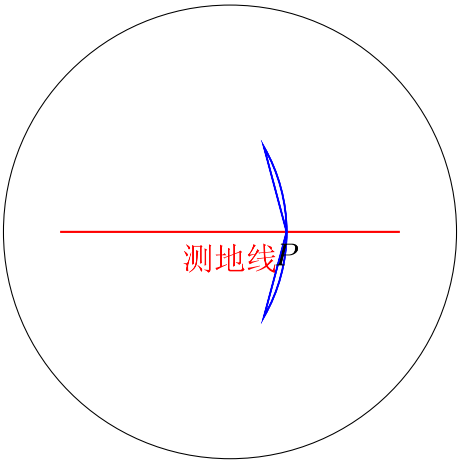
- **平行公设**: 存在无限多条平行线
- **曲率**: $K < 0$（负曲率，如伪球面）
- **三角形内角和**:

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

- **度量**: 庞加莱圆盘模型的度量：

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

数学对比



庞加莱圆盘：无限多平行线

性质	欧氏几何	黎曼几何	双曲几何
曲率 K	0	>0	<0
平行线数量	1	0	∞
三角形内角和	$=\pi$	$>\pi$	$<\pi$
典型模型	平面	球面	伪球面

定义 3.2.1. 混合积 $[\vec{e}_i\ \vec{e}_j\ \vec{e}_k]$

$$\begin{aligned}
[\vec{e}_i\ \vec{e}_j\ \vec{e}_k] &= \vec{e}_i\cdot(\vec{e}_j\times\vec{e}_k) = \vec{e}_j\cdot(\vec{e}_k\times\vec{e}_i) = \vec{e}_k\cdot(\vec{e}_i\times\vec{e}_j) \\
&= \vec{e}_i\cdot\vec{\vec{\epsilon}}_{jkl}\vec{e}_l \\
&= \vec{\vec{\epsilon}}_{jkl}\delta_{il} \\
&= \vec{\vec{\epsilon}}_{jki} = \vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}
\end{aligned}$$

定义 3.2.2. Eddington tensor of rank three

$$\vec{\vec{\varepsilon}} = \vec{\vec{\epsilon}}_{ijk}\vec{e}_i\otimes\vec{e}_j\otimes\vec{e}_k$$

定义 3.2.3.

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1}, \vec{g}_2 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2}, \vec{g}_3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^3}$$

line element $\quad d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k},$

$$(ds)^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(dx^\mu\vec{g}_\mu\right)\cdot\left(dx^\nu\vec{g}_\nu\right)$$

定义 3.2.4. $\nabla = \vec{g^i}\frac{\partial}{\partial x^i} = \vec{g}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vec{u}}\cdot\vec{u} = \nabla\psi\cdot d\vec{u} = \left(g^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\cdot\left(du^j\vec{g}_j\right)\right) = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}du^j\delta^i_j = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}du^i$$

定义 3.2.5. Curved spacetime(弯曲时空)

$$\mathcal{L}=\int_0^\tau\sqrt{g_{ij}\frac{d\lambda^i}{dt}\frac{d\lambda^j}{dt}}\,dt$$

例 3.2.1. Riemann metric tensor 性质

- symmetric $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$
- invertible,Jacobian
- 在欧氏空间中,$g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=\underbrace{g_{xx}(dx)^2+g_{yy}(dy)^2+g_{zz}(dz)^2}_{\begin{cases}g_{xx}=\delta_{xx}=1\\ g_{yy}=\delta_{yy}=1\\ g_{zz}=\delta_{zz}=1\end{cases}\begin{cases}g_{xy}=\delta_{xy}=0\\ g_{xz}=\delta_{xz}=0\\ g_{yz}=\delta_{yz}=0\end{cases}}$$

例 3.2.2. 闵可夫斯基空间

$$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=(dx^t)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$$

例 3.2.3. cylinderical coordinates $\quad g_{\mu\nu}=diag(1\quad r^2\quad 1)$

$$ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta=dr^2+r^2d\theta^2+dz^2$$

例 3.2.4. spherical coordinates $\quad g_{\mu\nu}=diag(1\quad r^2\quad r^2sin^2\theta)$

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

例 3.2.5. Schwarzschild(施瓦西) metric tensor

$$g_{\mu\nu}=diag\left(-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\quad\frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}\quad r^2\quad r^2\sin^2\theta\right)$$

$$ds^2=-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2+\frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2$$

其中：施瓦西半径 $r_s=\frac{2GM}{c^2}$

- 在 $r=r_s$ 处，对应于施瓦茨半径，是事件视界的位置。

3.3 class 25

定义 3.3.1. Christoffel symbol of the 2^{nd} kind $\quad \Gamma^k_{ij}$

- symmetrical

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial \vec{g}_{ij}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\right) = \Gamma^k_{ji}$$

- Christoffel symbol is NOT a tensor

$$\because Euclidean\,space, \Gamma^k_{ij} = 0; Curved\,spacetime, \Gamma^k_{ij} \neq 0$$

推论 3.3.1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{g}_\nu}{\partial x^\mu} &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\vec{g}_\lambda \\
\frac{\partial \vec{g}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial\left(\vec{g}_\mu \cdot \vec{g}_\nu\right)}{\partial x^\alpha} \\
&= \frac{\partial \vec{g}_\mu}{\partial x^\alpha}\cdot \vec{g}_\nu + \vec{g}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{g}_\nu}{\partial x^\alpha} \\
&= \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

$$\text{for the symmetric proporties} \begin{cases}
\frac{\partial \vec{g}_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\lambda\mu}(1) \\
\frac{\partial \vec{g}_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} g_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha}(2) \\
\frac{\partial \vec{g}_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} g_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha}(3)
\end{cases}$$

(2)+(3)-(1),we obtain

$$\begin{aligned}
2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha} &= \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \\
\because 1 &= g_{\lambda\alpha}\cdot g^{\lambda\alpha} \\
\therefore 2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

定义 3.3.2. 矢量场协变导数

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial\left(A^\nu \vec{g}_\nu\right)}{\partial x_\mu} \\
&= \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\vec{g}_\nu + A^\nu \frac{\partial \vec{g}_\nu}{\partial x_\mu} \\
&= \left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu} + A^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\vec{g}_\lambda
\end{aligned}$$

推论 3.3.2. 全导数

$$D_\mu A^\lambda = \frac{DA^\lambda}{Dx_\mu} = \frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu} + A^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

定义 3.3.3. 时间导数

$$\vec{u}(t) = u^i(t)\vec{g}_i(t) = u^i(t)\vec{g}_i(x^k(t))$$

$$\begin{aligned}
\frac{D\vec{u}}{Dt} &= \frac{du^i}{dt}\vec{g}_i + u^i\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} = \frac{du^i}{dt}\vec{g}_i + u^i v^k\frac{\partial \vec{g}_i}{\partial x^k} \\
&= \frac{du^i}{dt}\vec{g}_i + u^i v^k \Gamma^m_{ik}\vec{g_m} \\
&= \left(\frac{du^i}{dt} + u^j v^k \Gamma^i_{jk}\right)\vec{g}_i
\end{aligned}$$

推论 3.3.3.

$$\frac{Du^i}{Dt} = \frac{du^i}{dt} + u^j v^k \Gamma^i_{jk}$$

$$a^i = \frac{Dv^i}{Dt} = \frac{dv^i}{dt} + v^j v^k \Gamma^i_{jk}$$

Newton's 2^{nd} Law in Curved spacetime

$$f^i = ma^i = m\left(\frac{dv^i}{dt} + v^j v^k \Gamma^i_{jk}\right)$$

定义 3.3.4. divergence in Curved spacetime

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{g_\mu}}{\partial x_\mu}\right) \cdot (A^\nu \vec{g_\nu}) &= \vec{g_\mu} \cdot \frac{\partial\left(A^\nu \vec{g_\nu}\right)}{\partial \mu} \\
&= \vec{g_\mu} \cdot \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial \mu}\vec{g_\nu} + A^\nu \frac{\partial \vec{g_\nu}}{\partial \mu}\vec{g_\nu}\right) \\
&= \frac{\partial A^\nu}{\partial \mu}\delta_{\mu\nu} + A^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\vec{g_\lambda} \cdot \vec{g_\mu} \\
&= \frac{\partial A^\mu}{\partial \mu} + A^\nu \Gamma^\mu_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

推论 3.3.4.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial \vec{g^\mu}}{\partial x^\mu}\right) \cdot (v^\nu \vec{g_\nu}) & \\
&= \vec{g^\mu} \cdot \left(\frac{\partial v^\nu}{\partial \mu}\vec{g_\nu} + v^\nu \frac{\partial \vec{g_\nu}}{\partial \mu}\vec{g_\nu}\right) \\
&= \frac{\partial v^\nu}{\partial \mu}\delta^\mu_\nu + v^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\vec{g_\lambda} \cdot \vec{g^\mu} \\
&= \frac{\partial v^\mu}{\partial \mu} + v^\nu \Gamma^\mu_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

定义 3.3.5. gradient of a vector in Curved spacetime

$$\begin{aligned}\nabla\vec{A} &= \left(\vec{g_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)(A^\nu\vec{g_\nu}) \\ &= \vec{g_\mu}\frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}g_\nu + A^\nu\vec{g_\mu}\frac{\partial\vec{g_\nu}}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu}\vec{g_\mu}\otimes\vec{g_\nu} + A^\nu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\vec{g_\mu}\otimes\vec{g_\lambda} \\ &= \frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu}\vec{g_\mu}\otimes\vec{g_\lambda} + A^\nu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\vec{g_\mu}\otimes\vec{g_\lambda} \\ &= \left(\frac{\partial A^\lambda}{\partial x_\mu} + A^\nu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\vec{g_\mu}\otimes\vec{g_\lambda}\end{aligned}$$

定义 3.3.6. curl of a vector in Curved spacetime

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \left(\vec{g_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\times(A^\nu\vec{g_\nu}) \\ &= \vec{g_\mu}\times\frac{\partial\left(A^\nu\vec{g_\nu}\right)}{\partial\mu} \\ &= \frac{\partial A^\nu}{\partial\mu}\left(\vec{g_\mu}\times\vec{g_\lambda}\right) + A^\nu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\left(\vec{g_\lambda}\times\vec{g_\mu}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial\mu} + A^\nu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\vec{g_\lambda}\times\vec{g_\mu} \\ &= \left(\frac{\partial A^\nu}{\partial\mu} + A^\nu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\varepsilon_{\mu\lambda\alpha}\vec{g_\alpha}\end{aligned}$$

3.4 class 26

定义 3.4.1. geodesics 测地线

Newton's 2^{nd} Law $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{t}}{dt^2}$

free particle($\vec{F} = 0$)

在欧氏几何,$\frac{d^2\vec{t}}{dt^2} = 0$,$r = v_0 t + r_0$

for a Curved space,$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = 0$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}\left(v^\mu\vec{g_\mu}\right) = \frac{dv^\mu}{d\tau}\vec{g_\mu} + v^\mu\frac{d\vec{g_\mu}}{d\tau} \\ &= \frac{dv^\mu}{d\tau}\vec{g_\mu} + v^\mu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\vec{g_\lambda} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\vec{g_\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\vec{g_\lambda} \\ &= \left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\vec{g_\lambda}\end{aligned}$$

geodesics equation 测地线方程

$$\underbrace{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}}_{\text{欧氏空间牛顿加速度}}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}=0$$

例 3.4.1. 另一种方法推导测地线方程

推导:

$$ds^2=g_{\mu\nu}dg^\mu dg^\nu$$

$$\begin{aligned}S(l)&=\int_l ds=\int_l\sqrt{g_{\mu\nu}dg^\mu dg^\nu}\\&=\int_l\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dg^\mu}{d\lambda}\frac{dg^\nu}{d\lambda}}\,d\lambda\\ Let.\quad Lagrangian\quad L&=g_{\mu\nu}\frac{dg^\mu}{d\lambda}\frac{dg^\nu}{d\lambda}\end{aligned}$$

Euler−Lagrangian equation

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial\frac{dg^\kappa}{d\lambda}}-\frac{\partial L}{\partial g^\kappa}=0$$

其中：$degree\ of\ freedom\quad \kappa=1,2,\cdots,s,\ \frac{dg^\kappa}{d\lambda}=\dot{g}^\kappa$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial g^\kappa}&=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g^\kappa}\frac{dg^\mu}{d\lambda}\frac{dg^\nu}{d\lambda}\\ \frac{\partial L}{\partial\frac{dg^\kappa}{d\lambda}}&=g_{\mu\nu}\delta_{\nu\kappa}\frac{dg^\mu}{d\lambda}+g_{\mu\nu}\delta_{\mu\kappa}\frac{dg^\nu}{d\lambda}\\&=g_{\mu\kappa}\frac{dg^\mu}{d\lambda}+g_{\kappa\nu}\frac{dg^\nu}{d\lambda}\end{aligned}$$

代入 Euler−Lagrangian equation

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\kappa}\frac{dg^\mu}{d\lambda}+g_{\kappa\nu}\frac{dg^\nu}{d\lambda}\right)}_{g_{\mu\kappa}\frac{d^2g^\mu}{d\lambda^2}+g_{\kappa\nu}\frac{d^2g^\nu}{d\lambda^2}+\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial g^\nu}\frac{dg^\nu}{d\lambda}\frac{dg^\mu}{d\lambda}+\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial g^\mu}\frac{dg^\mu}{d\lambda}\frac{dg^\nu}{d\lambda}}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g^\kappa}\frac{dg^\mu}{d\lambda}\frac{dg^\nu}{d\lambda}&=0\\ 2g_{\mu\kappa}\frac{d^2g^\mu}{d\lambda^2}+\left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial g^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial g^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g^\kappa}\right)\frac{dg^\mu}{d\lambda}\frac{dg^\nu}{d\lambda}&=0\end{aligned}$$

同时点乘 $g^{\kappa\gamma}$

$$\begin{aligned}g_{\mu\kappa}\cdot g^{\kappa\gamma}\frac{d^2g^\mu}{d\lambda^2}&=\frac{d^2g^\gamma}{d\lambda^2}\\ \frac{1}{2}g^{\gamma\kappa}\left(\frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial g^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial g^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial g^\kappa}\right)&=\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\\ \frac{d^2g^\gamma}{d\lambda^2}+\Gamma^\gamma_{\mu\nu}\frac{dg^\mu}{d\lambda}\frac{dg^\nu}{d\lambda}&=0\end{aligned}$$

□

引理 3.4.1. Christoffel 符号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 的表达式

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} g_{\nu\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} g_{\gamma\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\gamma} g_{\mu\nu} \right).$$

推导: 1. 度量张量的导数关系

度量张量 $g_{\mu\nu}$ 的协变导数为零（度量兼容条件）：

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\gamma\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\gamma\nu} g_{\mu\kappa} = 0.$$

这是一个关键条件，用于推导 Christoffel 符号的表达式。

2. 展开度量兼容条件

将度量兼容条件 $\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0$ 展开：

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma} g_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\gamma\mu} g_{\kappa\nu} + \Gamma^\kappa_{\gamma\nu} g_{\mu\kappa}.$$

这是一个关于 Christoffel 符号的方程。

3. 循环排列指标

对指标进行循环排列，得到以下三个方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} g_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\gamma\mu} g_{\kappa\nu} + \Gamma^\kappa_{\gamma\nu} g_{\mu\kappa}, \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} g_{\nu\gamma} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\gamma} + \Gamma^\kappa_{\mu\gamma} g_{\nu\kappa}, \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu} g_{\gamma\mu} = \Gamma^\kappa_{\nu\gamma} g_{\kappa\mu} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} g_{\gamma\kappa}. \end{cases}$$

4. 组合方程

将第二个方程和第三个方程相加，并减去第一个方程：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} g_{\nu\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} g_{\gamma\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\gamma} g_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\gamma} + \Gamma^\kappa_{\mu\gamma} g_{\nu\kappa} + \Gamma^\kappa_{\nu\gamma} g_{\kappa\mu} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} g_{\gamma\kappa} - \Gamma^\kappa_{\gamma\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\gamma\nu} g_{\mu\kappa}.$$

利用 Christoffel 符号的对称性 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu}$，可以简化上式。

5. 解出 Christoffel 符号

将上述方程整理后，可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} g_{\nu\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} g_{\gamma\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\gamma} g_{\mu\nu} = 2\Gamma^\kappa_{\mu\nu} g_{\kappa\gamma}.$$

两边乘以 $g^{\gamma\lambda}$ 并利用 $g^{\gamma\lambda} g_{\kappa\gamma} = \delta^\lambda_\kappa$，得到：

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} g_{\nu\gamma} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} g_{\gamma\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\gamma} g_{\mu\nu} \right).$$

□

补充 3.4.1. 张量场的协变导数推导

1. 协变导数的定义

设 M 是一个光滑流形，∇ 是 M 上的一个线性联络。对于向量场 X 和 Y，协变导数 $\nabla_X Y$ 满足：

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$
$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

2. 协变导数的局部表示

在局部坐标系 $\{x^\mu\}$ 中，向量场 X 和 Y 表示为：

$$X = X^\mu \partial_\mu, \quad Y = Y^\nu \partial_\nu$$

协变导数 $\nabla_X Y$ 的局部表示为：

$$\nabla_X Y = X^\mu \nabla_{\partial_\mu}(Y^\nu \partial_\nu)$$

根据莱布尼茨法则：

$$\nabla_{\partial_\mu}(Y^\nu \partial_\nu) = (\partial_\mu Y^\nu)\partial_\nu + Y^\nu \nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu$$

定义克里斯托费尔符号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$：

$$\nabla_{\partial_\mu}\partial_\nu = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda$$

因此：

$$\nabla_X Y = X^\mu \left(\partial_\mu Y^\lambda + Y^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)\partial_\lambda$$

协变导数的分量为：

$$(\nabla_X Y)^\lambda = X^\mu \left(\partial_\mu Y^\lambda + Y^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right)$$

3. 张量场的协变导数

对于一般的 (p,q) 型张量场 T，其协变导数 $\nabla_\lambda T$ 的分量为：

$$\nabla_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} + \sum_{i=1}^{p}\Gamma^{\mu_i}_{\lambda\sigma}T^{\mu_1\cdots\sigma\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} - \sum_{j=1}^{q}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu_j}T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\sigma\cdots\nu_q}$$

补充 3.4.2. 证明协变导数与度量张量 $g_{\mu\nu}$ 满足度量兼容条件

在黎曼几何中，度量兼容条件要求度量张量 $g_{\mu\nu}$ 的协变导数为零，即：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

对于任意二阶张量 $T_{\mu\nu}$，其协变导数定义为：

$$\nabla_\lambda T_{\mu\nu} = \partial_\lambda T_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} T_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} T_{\mu\rho}$$

其中，$\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ 是 Christoffel 符号，描述了流形的联络。

将度量张量 $g_{\mu\nu}$ 代入协变导数的定义，得到：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}$$

Christoffel 符号 $\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ 由度量张量及其导数决定，其定义为：

$$\Gamma^\rho_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma g_{\lambda\mu}\right)$$

将 $\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ 和 $\Gamma^\rho_{\lambda\nu}$ 代入协变导数的表达式：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\lambda g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma g_{\lambda\mu}\right) g_{\rho\nu} - \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\lambda g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\lambda} - \partial_\sigma g_{\lambda\nu}\right) g_{\mu\rho}$$

利用 $g^{\rho\sigma} g_{\rho\nu} = \delta^\sigma_\nu$ 和 $g^{\rho\sigma} g_{\mu\rho} = \delta^\sigma_\mu$，上式可简化为：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\partial_\lambda g_{\nu\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right) - \frac{1}{2} \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}\right)$$

由于 $g_{\mu\nu}$ 是对称的，即 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$，上式可进一步简化为：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right) - \frac{1}{2} \left(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}\right)$$

将同类项合并后，得到：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

第四章　张量运算

4.1 class 27

命题 4.1.1.

$$\overset{\rightrightarrows}{A} : \left(\overset{\rightrightarrows}{B}\overset{\rightrightarrows}{C}\right) = \left(\overset{\rightrightarrows}{B}^T\overset{\rightrightarrows}{A}\right) : \overset{\rightrightarrows}{C} = \left(\overset{\rightrightarrows}{A}\overset{\rightrightarrows}{C}^T\right) : \overset{\rightrightarrows}{B}$$

命题 4.1.2. Taylor expansion of scalar function of tensor

$$\psi\left(\overset{\rightrightarrows}{A} + d\overset{\rightrightarrows}{A}\right) = \psi\left(\overset{\rightrightarrows}{A}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}} : \overset{\rightrightarrows}{A} + o\left(d\overset{\rightrightarrows}{A}\right)$$

$$\psi\left(\overset{\rightrightarrows}{A} + \alpha\overset{\rightrightarrows}{B}\right) = \psi\left(\overset{\rightrightarrows}{A}\right) + \alpha\frac{\partial\psi}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}} : \overset{\rightrightarrows}{B} + o\left(\alpha\overset{\rightrightarrows}{B}\right)$$

定义 4.1.1. time derivative

$$\frac{d}{dt}\left(\overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\right) = \dot{\overset{\rightrightarrows}{A}}^{-1}$$

$$\overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{A} = \overset{\rightrightarrows}{I}, \dot{\overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{A}} = \overset{\rightrightarrows}{0}$$

$$\dot{\overset{\rightrightarrows}{A}}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{A} + \overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\dot{\overset{\rightrightarrows}{A}} = 0$$

$$\dot{\overset{\rightrightarrows}{A}}^{-1} = -\overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\dot{\overset{\rightrightarrows}{A}}\overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}$$

定义 4.1.2. differentiation of a scalar function

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}} : \overset{\rightrightarrows}{B} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\psi\left(\overset{\rightrightarrows}{A} + \alpha\overset{\rightrightarrows}{B}\right) - \psi\left(\overset{\rightrightarrows}{A}\right)}{\alpha} \\ &= \frac{d\psi\left(\overset{\rightrightarrows}{A} + \alpha\overset{\rightrightarrows}{B}\right)}{d\alpha}|_{\alpha=0}\end{aligned}$$

例 4.1.1.

$$\frac{\partial tr\overset{\rightrightarrows}{A}}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}}:\overset{\rightrightarrows}{B}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\overset{\rightrightarrows}{I}:\left(\overset{\rightrightarrows}{A}+\alpha\overset{\rightrightarrows}{B}\right)-\overset{\rightrightarrows}{I}:\overset{\rightrightarrows}{A}}{\alpha}=\overset{\rightrightarrows}{I}:\overset{\rightrightarrows}{B}$$

$$\frac{\partial tr\overset{\rightrightarrows}{A}}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}}=\overset{\rightrightarrows}{I}$$

$$\frac{\partial tr\left(\overset{\rightrightarrows}{A}^2\right)}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}}=\frac{\partial tr\left(\overset{\rightrightarrows}{A}\,\overset{\rightrightarrows}{A}\right)}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}}=\frac{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}^T\overset{\rightrightarrows}{A}}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial tr\overset{\rightrightarrows}{A}^2}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}}:\overset{\rightrightarrows}{B}&=\lim_{\alpha\to0}\frac{\left(\overset{\rightrightarrows}{A}+\alpha\overset{\rightrightarrows}{B}\right)^T:\left(\overset{\rightrightarrows}{A}+\alpha\overset{\rightrightarrows}{B}\right)-\overset{\rightrightarrows}{A}^T:\overset{\rightrightarrows}{A}}{\alpha}\\
&=\overset{\rightrightarrows}{B}^T:\overset{\rightrightarrows}{A}+\overset{\rightrightarrows}{A}^T:\overset{\rightrightarrows}{B}+\lim_{\alpha\to0}\alpha\overset{\rightrightarrows}{B}^T\overset{\rightrightarrows}{B}\\
&=\left(\overset{\rightrightarrows}{I}\,\overset{\rightrightarrows}{B}^T\right):\overset{\rightrightarrows}{A}+\overset{\rightrightarrows}{A}^T:\overset{\rightrightarrows}{B}+0\\
&=2\overset{\rightrightarrows}{A}^T:\overset{\rightrightarrows}{B}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial tr\left(\overset{\rightrightarrows}{A}^n\right)}{\partial\overset{\rightrightarrows}{A}}=n\left(\overset{\rightrightarrows}{A}^{n-1}\right)^T$$

例 4.1.2.

$$\overset{\rightrightarrows}{I}:\left(\overset{\rightrightarrows}{A}\,\overset{\rightrightarrows}{B}+\overset{\rightrightarrows}{B}\,\overset{\rightrightarrows}{A}\right)=\overset{\rightrightarrows}{I}:\left(2\overset{\rightrightarrows}{A}\,\overset{\rightrightarrows}{B}\right)=2\overset{\rightrightarrows}{A}^T:\overset{\rightrightarrows}{B}$$

补充 4.1.1. 对于一个二阶张量 $\overset{\rightrightarrows}{T}$，其不变量可以通过以下公式计算：

1. 第一不变量（迹）：

$$I_1=\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T})=T_{ii}$$

2. 第二不变量：

$$I_2=\frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}))^2-\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^2)\right]=\frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj}-T_{ij}T_{ji}\right)$$

3. 第三不变量（行列式）：

$$I_3=\det\left(\overset{\rightrightarrows}{T}\right)=\epsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k}$$

其中，T_{ij} 是张量 $\overset{\rightrightarrows}{T}$ 的分量，ϵ_{ijk} 是 Levi-Civita 符号。

推论 4.1.1.

$$tr\overset{\rightrightarrows}{S}^2 = \overset{\rightrightarrows}{I} : \overset{\rightrightarrows}{S}^2 = \overset{\rightrightarrows}{S}^T : \overset{\rightrightarrows}{S} = \left(S_{ij}\vec{e}_j \otimes \vec{e}_i\right) : (S_{kl}\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = S_{ij}S_{kl}\delta_{jk}\delta_{il} = S_{ij}S_{ji} = I_1^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\overset{\rightrightarrows}{S}^3 = \overset{\rightrightarrows}{I} : \overset{\rightrightarrows}{S}^3 = \overset{\rightrightarrows}{S}^T : \overset{\rightrightarrows}{S}^2 &= S_{ij}S_{jk}S_{kl}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_l = S_{ij}S_{jk}S_{ki} = I_1^3 \\
&= S_{11}^3 + S_{22}^3 + S_{33}^3 + 3S_{11}S_{12}S_{21} + 3S_{11}S_{13}S_{31} \\
&\quad + 3S_{22}S_{21}S_{12} + 3S_{22}S_{23}S_{32} + 3S_{33}S_{31}S_{13} + 3S_{33}S_{32}S_{23} \\
&\quad + 6S_{11}S_{22}S_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(tr\,\overset{\rightrightarrows}{S}\right)^2 &= (S_{11} + S_{22} + S_{33})^2 \\
&= S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2S_{11}S_{22} + 2S_{11}S_{33} + 2S_{22}S_{33} \\
&= S_{ii}S_{jj} = I_1^2 - 2I_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(tr\,\overset{\rightrightarrows}{S}\right)^3 &= S_{11}^3 + S_{22}^3 + S_{33}^3 + 3S_{11}^2S_{22} + 3S_{11}^2S_{33} \\
&\quad + 3S_{22}^2S_{11} + 3S_{22}^2S_{33} + 3S_{33}^2S_{11} + 3S_{33}^2S_{22} \\
&\quad + 6S_{11}S_{22}S_{33} \\
&= S_{ii}S_{jj}S_{kk} = I_1^3 - 3I_1I_2 + 3I_3
\end{aligned}$$

定义 4.1.3. 张量不变量的导数

$$\begin{cases}
\frac{\partial I_1(\overset{\rightrightarrows}{A})}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} = \frac{\partial \mathrm{tr}\overset{\rightrightarrows}{A}}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} = I \\
\frac{\partial I_2(\overset{\rightrightarrows}{A})}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\mathrm{tr}\overset{\rightrightarrows}{A})^2}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} - \frac{\partial \mathrm{tr}\overset{\rightrightarrows}{A}^2}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}}\right) = I_1 I - \overset{\rightrightarrows}{A}^T \\
\frac{\partial I_3(\overset{\rightrightarrows}{A})}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial(\mathrm{tr}\overset{\rightrightarrows}{A})^3}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} - 3\frac{\partial}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}}\left((\mathrm{tr}\overset{\rightrightarrows}{A})(\mathrm{tr}\overset{\rightrightarrows}{A}^2)\right) + 2\frac{\partial \mathrm{tr}\overset{\rightrightarrows}{A}^3}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}}\right) = (\overset{\rightrightarrows}{A}^T)^2 - I_1\overset{\rightrightarrows}{A}^T + I_2\overset{\rightrightarrows}{I}
\end{cases}$$

考虑到 $I_3(\overset{\rightrightarrows}{A}) = \det \overset{\rightrightarrows}{A}$，以及 $(\overset{\rightrightarrows}{A}^T)^2 - I_1\overset{\rightrightarrows}{A}^T + I_2\overset{\rightrightarrows}{I} = I_3\overset{\rightrightarrows}{A}^{-T}$，亦即

$$\frac{\partial \det \overset{\rightrightarrows}{A}}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} = (\det \overset{\rightrightarrows}{A})\overset{\rightrightarrows}{A}^{-T} = \mathrm{Cof}\overset{\rightrightarrows}{A}$$

式中，$\mathrm{Cof}\overset{\rightrightarrows}{A}$ 为 $\overset{\rightrightarrows}{A}$ 的余子式矩阵（cofactor matrix）。

如果令 $\overset{\rightrightarrows}{A}$ 为变形梯度张量 $\overset{\rightrightarrows}{F}$，则有如下常用关系式：

$$\frac{\partial \det \overset{\rightrightarrows}{F}}{\partial \overset{\rightrightarrows}{F}} = \frac{\partial J}{\partial \overset{\rightrightarrows}{F}} = (\det \overset{\rightrightarrows}{F})\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} = J\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} = \mathrm{Cof}\overset{\rightrightarrows}{F}$$

4.2 class 28

补充 4.2.1. 旋转李群——SO(n) 和 SU(n)**(摘自教材)**

物理学与各种旋转结下不解之缘，从力学中研究的刚体转动，到量子理论中的粒子自旋。地球绕太阳转，月亮绕地球转，滚珠在轴承滚道中转，电子绕原子核转，每一层次的实验和理论中似乎都少不了旋转。物理中的旋转除了在真实时空中的旋转之外，还有一大部分是在假想的、抽象的空间中的旋转，比如动量空间，希尔伯特空间，自旋空间，同位旋空间等。

空间中的旋转也构成群，并且，旋转群（rotation group）是物理中非常重要的一类群。旋转群有离散的和连续的之分。连续旋转群具有天然的流形结构，是一种李群，理论物理，特别是统一理论中所感兴趣的旋转李群有 $SO(3)$、$SO(2)$、$U(1)$、$SU(2)$、$SU(3)$ 等。

旋转可以用大家熟知的矩阵来表示。因此，我们首先用矩阵的语言，解释一下上面所列的一串符号是什么意思：括号中的数目字（3, 2, 1）等是表示旋转的矩阵空间的维数；大写字母 O 代表正交矩阵（orthogonal matrix）；U 代表酉矩阵（unitary matrix）；S 是特殊的（special）意思，表示矩阵的行列式为 1。

比如，举三维空间的旋转群 $O(3)$ 为例。此处 3 是指旋转空间的维数，O 对应于保持长度和角度不变的正交变换矩阵。具体一点说，正交矩阵 $O(3)$ 是一个由 $3 \times 3 = 9$ 个实数组成的矩阵，它的三个列向量或者三个行向量，都构成三维空间中三个正交的单位矢量。一般来说，正交矩阵 $O(3)$ 的行列式可为 1 或 -1。当行列式为 -1 时，正交矩阵表示的变换是旋转再加反演，这里的负号便来自反演。上述的 $O(3)$ 旋转群如果加上字母 S，指的便是特殊旋转群 $SO(3)$，那意味着，矩阵行列式被限制为 1。所以，$SO(3)$ 表示的是三维空间中无反演的纯粹旋转。

观察我们周围的世界：人的左脸并不完全等同于右脸；大多数人的心脏长在左边，大多数的 DNA 分子是右旋的；地球并不是一个完全规则的球形……正是因为对称中有了这些不对称的元素，对称与不对称的和谐交汇，创造了我们的世界。

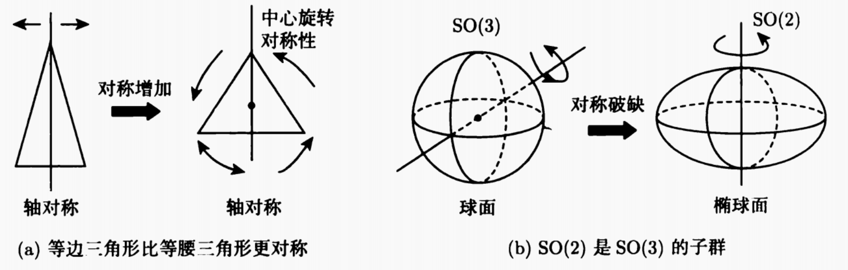


图 20.7　对称性的不同等级

不妨深究一下，何谓对称？何谓不对称？可以说，对称中有不对称，不对称中又有对称。并且，对称有多种多样，就几何图像而言，具有某种变换下的对称，但对另一种变换便可能

不对称。即使是同一类型的对称，也有对称程度的高低。比如说，一个正三角形，和一个等腰三角形比较，正三角形应该更为对称一些，如图 20.7(a)。再举旋转群为例：一个球面是三维旋转对称的，在 $SO(3)$ 群作用下不变，而椭球面只能看作是在二维旋转群 $SO(2)$ 的作用下不变了。用不很严格地说法，$SO(2)$ 是 $SO(3)$ 的子群。因此，球面比椭球面具有更多的对称性。如果从对称性的高低等级来定义的话，系统从对称性高的状态，演化到对称性更低的状态，被称为“对称破缺”，反之，则可称为“对称建立”。例如，当正三角形变形为等腰三角形，或者当球面变成椭球面，我们便说“对称破缺了”。从李群的观点来看，$SO(3)$ 是三阶的，有三个生成元。$SO(2)$ 只有一个生成元，从球面到椭球面，两个对称性被破缺。因此，可以从群论的观点来研究对称破缺。

定义 4.2.1. electromagnetic tensor

国际单位制中的一种矩阵形式

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

另一种矩阵形式，略去系数

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

定义 4.2.2. Cayley−Hamilton theorem

$$\boxed{\overset{\rightrightarrows}{S}^3 - I_1 \overset{\rightrightarrows}{S}^2 + I_2 \overset{\rightrightarrows}{S} - I_3 = \overset{\rightrightarrows}{0}}$$

推导:

$$\overset{\rightrightarrows}{S} \vec{v} = \lambda \vec{v} \Rightarrow \left(\overset{\rightrightarrows}{S} - \lambda \overset{\rightrightarrows}{I} \right) \vec{v} = \vec{0}$$

homogeneous equations

$$\det \left(\overset{\rightrightarrows}{S} - \lambda \overset{\rightrightarrows}{I} \right) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \overset{\rightrightarrows}{S}^3 - I_1 \overset{\rightrightarrows}{S}^2 + I_2 \overset{\rightrightarrows}{S} - I_3 = \overset{\rightrightarrows}{0}$$

□

引理 4.2.1.

$$\det\left(\overleftrightarrow{S} - \lambda\overleftrightarrow{I}\right) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

推导: 给定一个二阶张量 $\overleftrightarrow{S}$，其特征方程为:

$$\det\left(\overleftrightarrow{S} - \lambda\overleftrightarrow{I}\right) = 0$$

其中，λ 是特征值，$\overleftrightarrow{I}$ 是单位张量。

展开行列式:

$$\det\left(\overleftrightarrow{S} - \lambda\overleftrightarrow{I}\right) = \begin{vmatrix} S_{11}-\lambda & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

使用行列式的展开公式，沿第一行展开:

$$\begin{aligned}
&\det\left(\overleftrightarrow{S} - \lambda\overleftrightarrow{I}\right) \\
&= (S_{11}-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} S_{22}-\lambda & S_{23} \\ S_{32} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} - S_{12}\cdot\begin{vmatrix} S_{21} & S_{23} \\ S_{31} & S_{33}-\lambda \end{vmatrix} + S_{13}\cdot\begin{vmatrix} S_{21} & S_{22}-\lambda \\ S_{31} & S_{32} \end{vmatrix} \\
&= (S_{11}-\lambda)\left[(S_{22}-\lambda)(S_{33}-\lambda) - S_{23}S_{32}\right] \\
&\quad - S_{12}\left[S_{21}(S_{33}-\lambda) - S_{23}S_{31}\right] + S_{13}\left[S_{21}S_{32} - (S_{22}-\lambda)S_{31}\right] \\
&= (S_{11}-\lambda)(S_{22}-\lambda)(S_{33}-\lambda) - (S_{11}-\lambda)S_{23}S_{32} \\
&\quad - S_{12}S_{21}(S_{33}-\lambda) + S_{12}S_{23}S_{31} + S_{13}S_{21}S_{32} - S_{13}(S_{22}-\lambda)S_{31} \\
&= (S_{11}S_{22}S_{33}) - \lambda(S_{11}S_{22} + S_{11}S_{33} + S_{22}S_{33}) + \lambda^2(S_{11}+S_{22}+S_{33}) - \lambda^3 \\
&\quad + \text{其他项（涉及非对角元素的乘积）} \\
&= \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3
\end{aligned}$$

□

例 4.2.1. 由 Cayley-Hamilton 定理推导出二阶张量第三主不变量 I_3

已知:

$$I_1 = \mathrm{tr}(\overleftrightarrow{T}) = T_{ii}$$
$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}(\overleftrightarrow{T}))^2 - \mathrm{tr}(\overleftrightarrow{T}^2)\right] = \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right)$$

推导: 根据 Cayley-Hamilton 定理，一个二阶张量 $\overleftrightarrow{T}$ 满足其自身的特征方程:

$$\overset{\rightrightarrows}{T}^3 - I_1\overset{\rightrightarrows}{T}^2 + I_2\overset{\rightrightarrows}{T} - I_3\overset{\rightrightarrows}{I} = \overset{\rightrightarrows}{0}$$

为了推导出第三主不变量 I_3，我们可以对上述方程取迹（trace）。迹运算具有线性性质，且 $\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{I}) = 3$，因此：

$$\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^3) - I_1\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^2) + I_2\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}) - I_3\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{I}) = 0$$

将 $\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{I}) = 3$ 代入上式，并将方程整理为关于 I_3 的形式：

$$I_3 = \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^3) - I_1\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^2) + I_2\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T})\right)$$

进一步代入 I_1 和 I_2 的表达式：

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{3}\left(\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^3) - \mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T})\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^2) + \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}))^2 - \mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^2)\right)\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T})\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(2\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^3) + (\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}))^3 - 3\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T}^2)\mathrm{tr}(\overset{\rightrightarrows}{T})\right)
\end{aligned}$$

□

4.3 class 29

定义 4.3.1.

$$\frac{\partial \det \overset{\rightrightarrows}{A}}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} = \frac{\partial I_3(\overset{\rightrightarrows}{A})}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} = ?$$

$$\det\left(\overset{\rightrightarrows}{A} + \lambda\overset{\rightrightarrows}{I}\right) = \lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \det \overset{\rightrightarrows}{A}}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} : \overset{\rightrightarrows}{B} &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\det\left(\overset{\rightrightarrows}{A} + \alpha\overset{\rightrightarrows}{B}\right) - \det\overset{\rightrightarrows}{A}}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\det\left(\alpha\overset{\rightrightarrows}{A}(\alpha^{-1}\overset{\rightrightarrows}{A} + \overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{B})\right) - \det\overset{\rightrightarrows}{A}}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\because \quad \det\left(\alpha\overset{\rightrightarrows}{A}(\alpha^{-1}\overset{\rightrightarrows}{A} + \overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{B})\right) = \left(\alpha^3\det\overset{\rightrightarrows}{A}\right)\underbrace{\det\left(\alpha^{-1}\overset{\rightrightarrows}{A} + \overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{B}\right)}$$

$$\det\left(\alpha^{-1}\overset{\rightrightarrows}{A} + \overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{B}\right) = \alpha^{-3} + I_1(\overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{B})\alpha^{-2} + I_2(\overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{B})\alpha^{-1} + I_3(\overset{\rightrightarrows}{A}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{B})$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \det \vec{\vec{A}}}{\partial \vec{\vec{A}}} : \vec{\vec{B}} &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\det \vec{\vec{A}} - \det \vec{\vec{A}} + I_1(\vec{\vec{A}}^{-1}\vec{\vec{B}})\alpha \det \vec{\vec{A}} + \alpha^2 \cdots + \alpha^3 \ldots}{\alpha} \\
&= I_1(\vec{\vec{A}}^{-1}\vec{\vec{B}}) \det \vec{\vec{A}} = \left(\vec{\vec{I}} : (\vec{\vec{A}}^{-1}\vec{\vec{B}})\right) \det \vec{\vec{A}} \\
&= \left(\vec{\vec{A}}^{-T} : \vec{\vec{B}}\right) \det \vec{\vec{A}}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{\partial \det \vec{\vec{A}}}{\partial \vec{\vec{A}}} = \det \vec{\vec{A}} \vec{\vec{A}}^{-T}}
$$

推论 4.3.1.

$$
\frac{\partial J^{-1}}{\partial \vec{\vec{A}}} = -J^{-1} \vec{\vec{A}}^{-T}
$$

$$
\boxed{\frac{\partial J^{-n}}{\partial \vec{\vec{A}}} = -nJ^{-n} \vec{\vec{A}}^{-T}}
$$

证明:

$$
\frac{\partial J^{-1}}{\partial \vec{\vec{A}}} = \frac{\partial \det \vec{\vec{A}}}{\partial \vec{\vec{A}}} = J^{-1} \vec{\vec{A}}^{-T}
$$

$$
\frac{\partial J^{-1}}{\partial \vec{\vec{A}}} = \frac{\partial J^{-1}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \vec{\vec{A}}} = -J^{-2} J^{-1} \vec{\vec{A}}^{-T} = -J^{-1} \vec{\vec{A}}^{-T}
$$

□

定义 4.3.2. 四阶单位张量

用空芯正体符号 $\mathbb{I}$ 表示的四阶单位张量 (fourth-order identity tensor) 定义为

$$
\mathbb{I} = \delta_{ik}\delta_{jl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l
$$

与两个二阶单位张量 $\vec{\vec{I}} = \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ 的并矢为

$$
\vec{\vec{I}} \otimes \vec{\vec{I}} = \delta_{ij}\delta_{kl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l
$$

不同

四阶单位张量的性质

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I} : \vec{\vec{A}} &= (\delta_{ik}\delta_{jl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) : (A_{op} e_o \otimes e_p) = \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{ko}\delta_{lp} A_{op} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \\
&= \delta_{ik}\delta_{ko}\delta_{jl}\delta_{lp} A_{op} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \delta_{io}\delta_{jp} A_{op} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = A_{op} e_o \otimes e_p = \vec{\vec{A}}
\end{aligned}
$$

定义 4.3.3. 对称的四阶单位张量

$$\mathbb{I}^T = \delta_{jk}\delta_{il}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \Leftrightarrow \mathbb{I}^T : \overset{\rightrightarrows}{A} = \overset{\rightrightarrows}{A}^T$$

上式，就是四阶单位张量的转置，亦可写为

$$\mathbb{I}^T = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i$$

四阶单位张量和其转置可组成对称的四阶单位张量 (symmetrical fourth-order identity tensor):

$$\mathbb{I}^s = \frac{\mathbb{I} + \mathbb{I}^T}{2} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$$

对称的四阶单位张量的性质

minor Symmetry

$$\mathbb{I}^s_{ijkl} = \mathbb{I}^s_{jikl}, \quad \mathbb{I}^s_{ijkl} = \mathbb{I}^s_{ijlk}$$

major symmetries

$$\mathbb{I}^s_{ijkl} = \mathbb{I}^s_{klij}$$

对于任意一个对称的二阶张量 $\overset{\rightrightarrows}{A}$ 满足：

$$\frac{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}}{\partial \overset{\rightrightarrows}{A}} = \mathbb{I}^s$$

定义 4.3.4. 四阶投影张量

一个任意的二阶张量 $\overset{\rightrightarrows}{A}$ 可分解为球形分量 (spherical part) 和偏量 (deviatoric part):

$$\overset{\rightrightarrows}{A} = \underbrace{\alpha \overset{\rightrightarrows}{I}}_{\text{球量}} + \underbrace{dev \overset{\rightrightarrows}{A}}_{\text{偏量}}$$

由于偏量部分是无迹的（traceless），对上述式求迹，有

$$\alpha = \frac{1}{3} tr \overset{\rightrightarrows}{A} = \frac{1}{3}(\overset{\rightrightarrows}{I} : \overset{\rightrightarrows}{A})$$

则二阶张量 $\overset{\rightrightarrows}{A}$ 的偏量 $dev \overset{\rightrightarrows}{A}$ 可通过四阶单位张量 $\mathbb{I}$ 表示为

$$\begin{aligned} dev \overset{\rightrightarrows}{A} &= \overset{\rightrightarrows}{A} - \frac{1}{3}\overset{\rightrightarrows}{I}(\overset{\rightrightarrows}{I} : \overset{\rightrightarrows}{A}) = \overset{\rightrightarrows}{A} - \frac{1}{3}(\overset{\rightrightarrows}{I} \otimes \overset{\rightrightarrows}{I}) : \overset{\rightrightarrows}{A} \\ &= \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3}(\overset{\rightrightarrows}{I} \otimes \overset{\rightrightarrows}{I})\right] : \overset{\rightrightarrows}{A} = \mathbb{P} : \overset{\rightrightarrows}{A} \end{aligned}$$

式中，四阶投影张量为

$$\mathbb{P} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\overset{\rightrightarrows}{I} \otimes \overset{\rightrightarrows}{I})$$

例 4.3.1. 主应力张量 $\overleftrightarrow{A}$

$$dev\overleftrightarrow{A} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} & & \\ & \sigma_2 - \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} & \\ & & \sigma_3 - \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} \end{vmatrix}$$

静水压强

$$\begin{vmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & & \\ & \sigma_2 - \sigma_m & \\ & & \sigma_3 - \sigma_m \end{vmatrix}, \sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$

偏量的特征方程 $\overleftrightarrow{S}^3 - I_1\overleftrightarrow{S}^2 + I_2\overleftrightarrow{S} - I_3 = \overleftrightarrow{0}$

$$\begin{cases} I_1 = S_1 + S_2 + S_3 = 0 \\ I_2 = -\left(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1\right) \\ \quad = -(\sigma_1-\sigma_m)(\sigma_2-\sigma_m) - (\sigma_2-\sigma_m)(\sigma_3-\sigma_m) - (\sigma_3-\sigma_m)(\sigma_1-\sigma_m) \\ \quad = 2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\sigma_m - 3\sigma_m^2 - (\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1) \\ \quad = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \\ I_3 = S_1S_2S_3 \end{cases}$$

4.4 class 30

定义 4.4.1. 谱定理 (spectral theorem)

若 $\overleftrightarrow{S}$ 是对称张量，则存在线性空间 $\mathcal{V}$ 中的一个标准正交基，它完全由 $\overleftrightarrow{S}$ 的本征向量组成。此外，对于一个这样的基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 按次序排列的相应的本征值 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 构成 $\overleftrightarrow{S}$ 的整个谱，且

$$\overleftrightarrow{S} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i \tag{30-1}$$

反之，如果 $\overleftrightarrow{S}$ 具有形式 (30-1)，其中 $\{\vec{e}_i\}$ 是标准正交的，则 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 是相对应于本征向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 的本征值。此外：

(a) 当且仅当 $\overleftrightarrow{S}$ 的本征空间是通过 0 的三个互相垂直的直线时，$\overleftrightarrow{S}$ 恰好有三个不同的本征值，且 $\overleftrightarrow{S}$ 表示为 $\overleftrightarrow{S} = \omega_1\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3$；

(b) 当且仅当 $\overset{\rightrightarrows}{S}$ 有两个不同的本征值 ω_1 和 ω_2，其对应的本征空间分别是一条通过 0 的线 l 以及通过 0 并垂直于 l 的平面 (如图 13.1 所示)，则 $\overset{\rightrightarrows}{S}$ 表示为

$$\overset{\rightrightarrows}{S} = \omega_1 \vec{e} \otimes \vec{e} + \omega_2 (\overset{\rightrightarrows}{I} - \vec{e} \otimes \vec{e}) \tag{30-2}$$

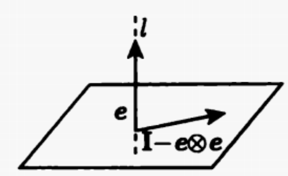


图 13.1 直线 l 和垂直于 l 的平面

反之, 当且仅当 $\overset{\rightrightarrows}{S}$ 有 (30-2) 式的形式，$\overset{\rightrightarrows}{S}$ 确切地有两个不同的本征值；

(c) 当且仅当 $\overset{\rightrightarrows}{S}$ 有一个本征值 ω，其对应的本征空间为 $\mathcal{V}$，则 $\overset{\rightrightarrows}{S}$ 表示为

$$\overset{\rightrightarrows}{S} = \omega \overset{\rightrightarrows}{I} \tag{30-3}$$

反之，当且仅当 $\overset{\rightrightarrows}{S}$ 有 (30-3) 式的形式，$\overset{\rightrightarrows}{S}$ 确切地有一个本征值。

例 4.4.1. application of spectral theorem in stress wave propagation

Lamé−Navier $\quad \rho\ddot{\vec{u}} = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \mu\nabla^2\vec{u}$

assume $\vec{u} = \vec{a} sin\,(k(\vec{r}\cdot\vec{m} - ct))$

$$\nabla\vec{u} = k\,(\vec{m}\otimes\vec{a})\,cos\,(k(\vec{r}\cdot\vec{m}) - ct)$$

$$\nabla\cdot\vec{u} = k\,(\vec{m}\cdot\vec{a})\,cos\,(k(\vec{r}\cdot\vec{m}) - ct)$$

$$\nabla\times\vec{u} = k\,(\vec{m}\times\vec{a})\,cos\,(k(\vec{r}\cdot\vec{m}) - ct)$$

$$\nabla^2\vec{u} = -k^2\vec{m}\cdot(\vec{m}\otimes\vec{a})\,sin\,(k(\vec{r}\cdot\vec{m}) - ct)$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) = -k^2\,(\vec{m}\otimes\vec{m})\cdot\vec{a} sin\,(k(\vec{r}\cdot\vec{m}) - ct)$$

$$\ddot{\vec{u}} = -k^2c^2\vec{a} sin\,(k(\vec{r}\cdot\vec{m}) - ct)$$

$$\text{transverse wave}\vec{a}\perp\vec{m} \quad (div\vec{u} = 0)$$

$$\text{longitudinal wave}\vec{a}\,/\!/\,\vec{m} \quad (curl\vec{u} = 0)$$

$$\rho\ddot{\vec{u}} = (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\vec{u}) + \mu\nabla^2\vec{u}$$

$$\rho c^2\vec{a} = (\lambda+\mu)\,\vec{a}\,(\vec{m}\otimes\vec{m}) + \mu\vec{a}$$

$$\rho c^2\vec{a} = (\lambda+2\mu)\,\vec{a}\,(\vec{m}\otimes\vec{m}) + \mu\vec{a}\left(\overset{\rightrightarrows}{I} - \vec{m}\otimes\vec{m}\right)$$

$$c^2\vec{a} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\vec{a}\,(\vec{m}\otimes\vec{m}) + \frac{\mu}{\rho}\vec{a}\left(\overset{\rightrightarrows}{I} - \vec{m}\otimes\vec{m}\right)$$

$$c^2\vec{a} = c_l^2\rho\vec{a}\,(\vec{m}\otimes\vec{m}) + c_t^2\vec{a}\left(\overset{\rightrightarrows}{I} - \vec{m}\otimes\vec{m}\right)$$

声学张量 $\overset{\rightrightarrows}{A}(\vec{m}) = c_l^2\rho\,(\vec{m}\otimes\vec{m}) + c_t^2\left(\overset{\rightrightarrows}{I} - \vec{m}\otimes\vec{m}\right)$

第五章　构形 configuration

5.1　class 31

补充 5.1.1. 数学上的流形 manifold 和物质流形 material manifold 的联系 (**此部分内容 AIGC**)

数学上的流形（Manifold）

数学中的流形是一个**局部欧几里得空间化**的拓扑空间，其定义为：

- **局部坐标映射**：对任意点 $p \in M$，存在邻域 $U \subseteq M$ 和同胚映射 $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$。
- **光滑结构**：若坐标卡 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 与 (U_β, φ_β) 的交集非空，则转移映射 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 需为 C^∞ 光滑。
- **全局性质**：流形可具有复杂拓扑（如紧致性、亏格），但不依赖嵌入更高维空间。

典型例子包括球面 S^n、环面 T^n，以及在物理中描述时空（广义相对论）或相空间（经典力学）。

物质流形（Material Manifold）

物质流形是连续介质力学中描述材料**未变形状态**的几何对象，其特性为：

- **参考构形**：记为 $\mathcal{B}_0$，代表材料初始状态的 3 维流形，每个点 $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ 对应材料粒子。
- **物质坐标**：通过坐标映射 $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)$ 唯一标记粒子。
- **变形映射**：随时间 t，材料变形由光滑映射 $\phi_t : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_t \subseteq \mathbb{R}^3$ 描述，将物质坐标 $\mathbf{X}$ 映射到空间坐标 $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$。

数学流形与物质流形的联系

几何结构物质流形 $\mathcal{B}_0$ 是 3 维微分流形，其坐标卡对应材料标签系统。数学流形的光滑结构允许定义：

- **变形梯度张量**：$F = \nabla_X \phi$，描述局部变形，满足 $F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$。
- **质量守恒**：通过雅可比行列式 $J = \det F$ 表达为 $\rho_t J = \rho_0$，其中 ρ_0 为参考构形密度。

映射的微分几何变形映射 ϕ 需满足微分同胚（弹性力学）或允许不可逆性（塑性力学）：

$$\phi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_t) \quad \text{（弹性变形）}. \tag{5.1}$$

塑性变形中，ϕ 可能破坏微分同胚性，导致物质流形上出现**非完整结构**（如位错对应的非可积 Burgers 回路）。

张量场与物理量

- **物质描述**：在 $\mathcal{B}_0$ 上定义 Piola 应力 $P(\mathbf{X}, t)$，满足 $P = J\sigma F^{-\top}$，其中 σ 为柯西应力。
- **空间描述**：在 $\mathcal{B}_t$ 上定义速度场 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$，通过李导数 $\mathcal{L}_v \sigma$ 描述应力演化。

拓扑与缺陷物质流形的拓扑不变量对应材料缺陷：

- **位错**：Burgers 矢量 $\mathbf{b}$ 通过闭合回路 $\gamma \subseteq \mathcal{B}_t$ 的不可闭合性定义：

$$\mathbf{b} = \oint_\gamma d\mathbf{x} = \oint_{\phi^{-1}(\gamma)} F\, d\mathbf{X}.$$

- **裂纹**：物质流形的边界或非光滑结构对应宏观断裂。

例 5.1.1. 圆柱体的均匀膨胀与拉伸

考虑一个圆柱体材料（如橡胶圆柱），在受力后发生均匀的径向膨胀和轴向拉伸，使用 Material Manifold 描述其变形过程。

1. 参考构形（未变形状态）

- 几何描述：
  - 径向坐标：$R \in [0, R_0]$，R_0 为初始半径
  - 轴向坐标：$Z \in [0, L_0]$，L_0 为初始长度
  - 角度坐标：$\Theta \in [0, 2\pi)$
- 坐标系：(R, Θ, Z)

2. 当前构形（变形状态）

- 变形后几何描述：
  - 径向膨胀：$r = \lambda_r R$（λ_r 为径向拉伸比）
  - 轴向拉伸：$z = \lambda_z Z$（λ_z 为轴向拉伸比）

– 角度不变：$\theta = \Theta$

- 坐标系：(r, θ, z)

3. 变形梯度张量 $\overrightarrow{F}$ 在柱坐标系中，变形梯度张量 $\overrightarrow{F}$ 的表达式为：

$$\overrightarrow{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r\frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R}\frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r\frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

对于均匀变形（无剪切和旋转）：

$$\overrightarrow{F} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}$$

其中：

- $\lambda_r = \frac{r}{R}$ 为径向拉伸比
- $\lambda_z = \frac{z}{Z}$ 为轴向拉伸比

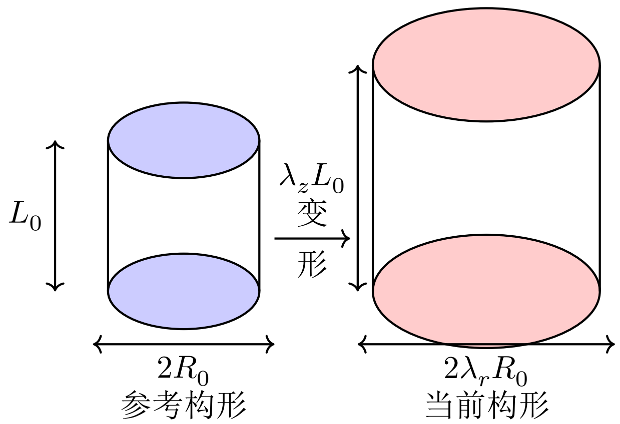
4. Material Manifold 的作用

- 参考构形 (R, Θ, Z) 描述未变形几何。
- 当前构形 (r, θ, z) 描述变形后几何。
- 通过 $\overrightarrow{F}$ 建立两构形间的映射，量化局部变形。

5. 物理意义

- 若 $\lambda_r = \lambda_z = 1$：无变形。
- 若 $\lambda_r > 1, \lambda_z > 1$：径向膨胀与轴向拉伸并存。
- 若 $\lambda_r \neq \lambda_z$：非均匀变形（如各向异性膨胀）。

6. 变形前后圆柱体对比图



定义 5.1.1. 变形函数 $\vec{x}$

$$\vec{x} = \vec{\mathcal{X}}(\vec{\mathtt{X}}, t)$$

$$inverse\ mapping \quad \vec{\mathtt{X}} = \vec{\mathcal{X}}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \vec{\mathcal{X}}(\vec{\mathtt{X}} + d\vec{\mathtt{X}}, t) - \vec{\mathcal{X}}(\vec{\mathtt{X}}, t) \\ &= \frac{\partial \vec{\mathcal{X}}}{\partial \vec{\mathtt{X}}} \cdot d\vec{\mathtt{X}} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} d\vec{\mathtt{X}} = d\vec{\mathtt{X}} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \end{aligned}$$

$$\vec{x} = x_i \vec{e_i}, \vec{\mathtt{X}} = \mathtt{X}_K \vec{e_K}$$

$$\begin{aligned} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\mathtt{X}}} = \vec{x} \otimes \vec{\nabla}_{\vec{\mathtt{X}}} \quad \text{对参考构形的右梯度} \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial \mathtt{X}_K} \vec{e_i} \otimes \vec{e_K} \quad \text{两点张量场 two−point tensor} \\ \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T &= \frac{\partial x_i}{\partial \mathtt{X}_K} \vec{e_K} \otimes \vec{e_i} \end{aligned}$$

$$inverse\ mapping \quad \vec{\mathtt{X}} = \vec{\mathcal{X}}^{-1}(\vec{x}, t)$$

$$\begin{aligned} d\vec{\mathtt{X}} &= \vec{\mathcal{X}}^{-1}(\vec{x} + d\vec{x}, t) - \vec{\mathcal{X}}^{-1}(\vec{x}, t) \\ &= \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-1} d\vec{x} = d\vec{x} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-T} \\ \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-1} &= \frac{\partial \mathtt{X}_L}{\partial x_m} \vec{e_L} \otimes \vec{e_m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-1} &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial \mathtt{X}_K} \vec{e_i} \otimes \vec{e_K} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathtt{X}_L}{\partial x_m} \vec{e_L} \otimes \vec{e_m} \right) \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial \mathtt{X}_K} \frac{\partial \mathtt{X}_L}{\partial x_m} \delta_{KL} \vec{e_i} \otimes \vec{e_m} \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial x_m} \vec{e_i} \otimes \vec{e_m} \end{aligned}$$

定义 5.1.2. 二阶张量的分类

1. 两个基矢量均在参考构形 Lagrangian type
2. 两个基矢量均在当前构形 Eulerian type
3. 两个基矢量在不同构形中 $\begin{cases} mixed\ Lagrangian\text{–}Eulerian\ type \\ mixed\ Eulerian\text{–}Lagrangian\ type \end{cases}$

例 5.1.2. right Cauchy−Green deformation tensor (拉格朗日型)

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{C} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \mathtt{X}_K} \vec{e_K} \otimes \vec{e_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}_j}{\partial \vec{\mathtt{X}}_L} \vec{e_j} \otimes \vec{e_L} \right) = \frac{\partial x_i}{\partial \mathtt{X}_K} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \vec{\mathtt{X}}_L} \vec{e_K} \vec{e_L}$$

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{C}^T = (\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F})^T = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{C}$$

例 **5.1.3.** left Cauchy−Green deformation tensor (欧拉型)

$$\vec{\vec{B}} = \vec{\vec{F}}\,\vec{\vec{F}}^T = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \mathtt{X}_K}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_K\right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}_j}{\partial \vec{\mathtt{X}}_L}\vec{e}_L \otimes \vec{e}_j\right) = \frac{\partial x_i}{\partial \mathtt{X}_K}\frac{\partial \vec{x}_j}{\partial \vec{\mathtt{X}}_K}\vec{e}_i\vec{e}_j$$

$$\vec{\vec{B}}^T = (\vec{\vec{F}}\,\vec{\vec{F}}^T)^T = \vec{\vec{F}}\,\vec{\vec{F}}^T = \vec{\vec{B}}$$

补充 5.1.2. 如何区分“左”和“右”？

例 **5.1.4.** Cauchy deformation tensor (欧拉型)

$$\vec{\vec{c}} = \vec{\vec{F}}^{-T}\vec{\vec{F}}^{-1} = \left(\frac{\partial \mathtt{X}_K}{\partial x_i}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_K\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathtt{X}_L}{\partial x_j}\vec{e}_L \otimes \vec{e}_j\right) = \frac{\partial \mathtt{X}_K}{\partial x_i}\frac{\partial \mathtt{X}_K}{\partial x_j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\vec{\vec{B}}^{-1} = (\vec{\vec{F}}\,\vec{\vec{F}}^T)^{-1} = \vec{\vec{F}}^{-T}\vec{\vec{F}}^{-1} = \vec{\vec{c}}$$

例 **5.1.5.** Finger tensor

定义 5.1.3. polar decomposition of deformation gradient

$$\vec{\vec{F}} = \vec{\vec{R}}\,\vec{\vec{U}} = \vec{\vec{V}}\,\vec{\vec{R}}$$

$$\vec{\vec{R}} \to orthogonal \quad \vec{\vec{R}}^T = \vec{\vec{R}}^{-1}$$

$$\vec{\vec{U}} = \vec{\vec{U}}^T, \vec{\vec{v}} = \vec{\vec{v}}^T \to symmetrical$$

right decomposition

$$\vec{\vec{F}}^T = (\vec{\vec{R}}\,\vec{\vec{U}})^T = \vec{\vec{U}}\,\vec{\vec{R}}^{-1}$$

$$\sum_\tau \lambda_\tau^2 \vec{e}_\tau \otimes \vec{e}_\tau = \vec{\vec{C}} = \vec{\vec{F}}^T\vec{\vec{F}} = \vec{\vec{U}}\,\vec{\vec{R}}^{-1} \cdot \vec{\vec{R}}\,\vec{\vec{U}} = \vec{\vec{U}}^2$$

$$\vec{\vec{U}} = \sqrt{\vec{\vec{C}}} = \sum_\tau \lambda_\tau^2 \vec{e}_\tau \otimes \vec{e}_\tau$$

left decomposition

$$\vec{\vec{F}} = \vec{\vec{V}}\,\vec{\vec{R}}, \vec{\vec{F}}^{-T} = \vec{\vec{R}}^{-1}\vec{\vec{V}}$$

$$\vec{\vec{B}} = \vec{\vec{F}}\,\vec{\vec{F}}^T = \vec{\vec{V}}\,\vec{\vec{R}} \cdot \vec{\vec{R}}^{-1}\vec{\vec{V}} = \vec{\vec{V}}^2$$

$$\vec{\vec{v}} = \sqrt{\vec{\vec{B}}} = \sum_\gamma \lambda_\gamma \vec{e}_\gamma \otimes \vec{e}_\gamma$$

5.2 class 32

四种常用应变的定义

定义 5.2.1. engineering strain (small deformation)

例 5.2.1. one−dimensional

一维工程应变 ϵ 定义为：

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0}$$

其中：

- L_0 是物体的原始长度，
- L 是物体变形后的长度，
- $\Delta L = L - L_0$ 是长度的变化量。

例 5.2.2. two−dimensional(欧拉方法)

在小变形假设下，二维工程应变的定义可以通过位移场的偏导数推导得出。假设物体在二维平面内发生变形，其位移场为 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$，分别表示在 x 和 y 方向上的位移。首先，定义位移梯度张量 $\overrightarrow{\overrightarrow{F}}$ 为：

$$\overrightarrow{\overrightarrow{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

在小变形假设下，应变张量 $\mathbf{E}$ 可表示为位移梯度张量的对称部分：

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}$$

其中应变分量分别为：

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

其中：

- ε_{xx} 和 ε_{yy} 分别是 x 和 y 方向的正应变，
- γ_{xy} 是工程剪应变，

  注意：工程剪应变 γ_{xy} 是总角度变化，而应变张量中的剪应变项为 $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$，以符合张量的对称性要求。
- $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$ 是位移场的偏导数。

定义 5.2.2. 对数应变 logrithmic strain（真应变 true strain 或亨奇应变 Hencky strain）描述大变形的应变度量。

假设材料的初始长度为 L_0，变形后的长度为 L。在变形过程中，考虑每一微小增量的应变，应变增量可表示为：

$$d\epsilon = \frac{dL}{L}$$

对上述微分方程从初始长度 L_0 到最终长度 L 进行积分，得到对数应变：

$$\epsilon_{\text{true}} = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln(1+\varepsilon)$$

因此，对数应变（亨奇应变）的定义为：

$$\epsilon_{\text{true}} = \epsilon_{\text{Hencky}} = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$$

定义 5.2.3. 格林应变 (Green-Lagrange) 是用于描述大变形的应变度量，基于参考构形中的长度变化定义。

设参考构形中的位置向量为 $\vec{\mathtt{X}}$，变形后的位置向量为 $\vec{x}$，变形梯度张量 $\overset{\rightrightarrows}{F}$ 定义为：

$$\overset{\rightrightarrows}{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}$$

考虑参考构形中的线元 $d\vec{\mathtt{X}}$ 和变形后的线元 $d\vec{x}$，其关系为：

$$d\vec{x} = \overset{\rightrightarrows}{F} \cdot d\vec{\mathtt{X}}$$

线元长度的平方变化为：

$$|d\vec{x}|^2 - |d\vec{\mathtt{X}}|^2 = d\vec{\mathtt{X}} \cdot (\overset{\rightrightarrows}{F}^T \overset{\rightrightarrows}{F} - \overset{\rightrightarrows}{I}) \cdot d\vec{\mathtt{X}}$$

其中 $\overset{\rightrightarrows}{F}^T$ 是变形梯度张量的转置，$\overset{\rightrightarrows}{I}$ 是单位张量。定义格林应变张量 $\overset{\rightrightarrows}{E}$ 为：

$$\overset{\rightrightarrows}{E} = \frac{1}{2}(\overset{\rightrightarrows}{F}^T \overset{\rightrightarrows}{F} - \overset{\rightrightarrows}{I}) = \frac{1}{2}(\overset{\rightrightarrows}{C} - \overset{\rightrightarrows}{I}) = \frac{1}{2}\sum(\lambda_\Gamma^2 - 1)\vec{m}_\Gamma \otimes \vec{m}_\Gamma$$

其中 λ_Γ 是主伸长比。因此，线元长度的平方变化可表示为：

$$|d\vec{x}|^2 - |d\vec{\mathtt{X}}|^2 = 2\, d\vec{\mathtt{X}} \cdot \overset{\rightrightarrows}{E} \cdot d\vec{\mathtt{X}}$$

定义 5.2.4. Almansi strain 是一种基于变形后构形（当前构形）的应变度量，适用于有限变形分析。

设参考构形中的位置向量为 $\vec{\mathtt{X}}$，变形后的位置向量为 $\vec{x}$，变形梯度张量 $\overset{\rightrightarrows}{F}$ 定义为：

$$\overset{\rightrightarrows}{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}$$

考虑参考构形中的线元 $d\vec{X}$ 和变形后的线元 $d\vec{x}$，其关系为：

$$d\vec{x} = \overrightarrow{\overrightarrow{F}} \cdot d\vec{X}$$

线元长度的平方变化为：

$$|d\vec{x}|^2 - |d\vec{X}|^2 = d\vec{x}^2 - (\overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-1} d\vec{x}) \cdot (\overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-1} d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot (\overrightarrow{\overrightarrow{I}} - \overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-T} \overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-1}) \cdot d\vec{x}$$

其中 $\overrightarrow{\overrightarrow{I}}$ 是单位张量。定义 Almansi strain 张量 $\overrightarrow{\overrightarrow{e}}$ 为：

$$\overrightarrow{\overrightarrow{e}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\overrightarrow{I}} - \overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-T} \overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\overrightarrow{I}} - \overrightarrow{\overrightarrow{B}}^{-1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\overrightarrow{I}} - \overrightarrow{\overrightarrow{c}}) = \frac{1}{2} \sum (\lambda_\gamma^2 - 1) \vec{n_\gamma} \otimes \vec{n_\gamma}$$

因此，线元长度的平方变化可表示为：

$$|d\vec{x}|^2 - |d\vec{X}|^2 = 2\, d\vec{x} \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{e}} \cdot d\vec{x}$$

5.3 class 33

定义 5.3.1. Hill strain measures (希尔应变度量)

Rodney Hill,1968—a general class 通类

strain measure function(Lagrangian type)

$$\overrightarrow{\overrightarrow{E}}_{Hill} = \overrightarrow{\overrightarrow{f}}(\overrightarrow{\overrightarrow{U}}) = \overrightarrow{\overrightarrow{f}}(\sqrt{\overrightarrow{\overrightarrow{C}}}) = \sum f(\lambda_\Gamma) \vec{m_\Gamma} \otimes \vec{m_\Gamma}$$

$f(\lambda_\Gamma)$ satisfies：

- $\lambda_\Gamma = 1$,no deformation, $f(1) = 0$
- $\frac{df}{d\lambda_\Gamma} > 0$,strain is a increasing function
- $\frac{df}{d\lambda_\Gamma}|_{\lambda_\Gamma=1} = f'(1) = 1 \Rightarrow df = d\lambda_\Gamma$

证明:

$$\lambda_\Gamma \approx 1 + \mathit{\Delta}\lambda, \mathit{\Delta}\lambda \ll 1$$

$$small\ strain \quad \epsilon = \frac{1 + \mathit{\Delta}\lambda - 1}{1} = \mathit{\Delta}\lambda$$

$$f(\lambda_\Gamma) \approx f(1 + \mathit{\Delta}\lambda) = f(1) + f'(1)\mathit{\Delta}\lambda + o((\mathit{\Delta}\lambda)^2) = f'(1)\mathit{\Delta}\lambda$$

$$only\ if\ f'(1) = 1, \quad f(\lambda_\Gamma) = \mathit{\Delta}\lambda$$

$$df \approx f(1 + d\lambda) - f(1) = d\lambda$$

□

strain measure function(Lagrangian type)

$$\overrightarrow{\overrightarrow{e}}_{Hill} = \overrightarrow{\overrightarrow{f}}(\overrightarrow{\overrightarrow{V}}) = \overrightarrow{\overrightarrow{f}}(\sqrt{\overrightarrow{\overrightarrow{B}}}) = \sum f(\lambda_\gamma)\vec{n_\gamma} \otimes \vec{n_\gamma}$$

两种描述的关联

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\overrightarrow{E}}_{Hill} &= \overrightarrow{\overrightarrow{R}}^T \overrightarrow{\overrightarrow{e}}_{Hill} \overrightarrow{\overrightarrow{R}} \qquad \overrightarrow{\overrightarrow{R}} = \sum \vec{n_\gamma} \otimes \vec{m_\Gamma} \\ &= \sum (\vec{m_\Gamma} \otimes \vec{n_\gamma}) \cdot f(\lambda_\gamma)(\vec{n_\gamma} \otimes \vec{n_\gamma}) \cdot (\vec{n_\gamma} \otimes \vec{m_\Gamma}) \\ &= \sum f(\lambda_\gamma)\vec{m_\Gamma} \otimes \vec{m_\Gamma}\end{aligned}$$

定义 5.3.2. Seth 应变度量是一种广义的应变度量，适用于有限变形分析。

1. 拉格朗日法（基于参考构形） Seth 应变度量定义为右 Cauchy-Green 变形张量 $\overrightarrow{\overrightarrow{C}}$ 的函数：

$$\overrightarrow{\overrightarrow{E}}^{(m)} = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{\overrightarrow{C}}^m - \overrightarrow{\overrightarrow{I}}),$$

其中：

- $\overrightarrow{\overrightarrow{C}} = \overrightarrow{\overrightarrow{F}}^T \overrightarrow{\overrightarrow{F}}$ 是右 Cauchy-Green 变形张量；
- $\overrightarrow{\overrightarrow{F}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{\mathtt{X}}}$ 是变形梯度张量；
- $\vec{\mathtt{X}}$ 为参考构形位置向量，$\vec{x}$ 为当前构形位置向量；
- $m \in \mathbb{R}$ 为控制应变形式的参数；
- $\overrightarrow{\overrightarrow{I}}$ 是单位张量。

2. 欧拉法（基于当前构形） Seth 应变度量定义为左 Cauchy-Green 变形张量 $\overrightarrow{\overrightarrow{B}}$ 的逆的函数：

$$\overrightarrow{\overrightarrow{e}}^{(m)} = \frac{1}{2m}(\overrightarrow{\overrightarrow{I}} - \overrightarrow{\overrightarrow{B}}^{-m}),$$

其中：

- $\overrightarrow{\overrightarrow{B}} = \overrightarrow{\overrightarrow{F}}\overrightarrow{\overrightarrow{F}}^T$ 是左 Cauchy-Green 变形张量；
- $\overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-1} = \frac{\partial \vec{\mathtt{X}}}{\partial \vec{x}}$ 是变形梯度张量的逆；
- $\overrightarrow{\overrightarrow{B}}^{-m}$ 表示 $\overrightarrow{\overrightarrow{B}}$ 的逆的 m 次幂；
- 其他符号含义与拉格朗日法定义一致。

Seth 应变度量在不同 m 值下退化为常见的应变度量：

- **当 $m = 1$ 时：**

- 拉格朗日法退化为 Green-Lagrange 应变：$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E}^{(1)} = \frac{1}{2}(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{C} - \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{I})$；
- 欧拉法退化为 Almansi 应变：$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{e}^{(1)} = \frac{1}{2}(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{I} - \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{B}^{-1})$。

- **当 $m = 1/2$ 时：**
  - 拉格朗日法退化为 Biot 应变：$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E}^{(1/2)} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{U} - \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{I}$（$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{C} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{U}^2$）；
  - 欧拉法退化为 Eulerian Biot 应变：$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{e}^{(1/2)} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{I} - \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{V}^{-1}$（$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{B} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{V}^2$）。

- **当 $m \to 0$ 时：**
  - 拉格朗日法退化为 Hencky（对数）应变：$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E}^{(0)} = \frac{1}{2}\ln \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{C}$；
  - 欧拉法退化为 Eulerian Hencky 应变：$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{e}^{(0)} = \frac{1}{2}\ln \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{B}$。

两种描述通过变形梯度张量 $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}$ 关联：

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{e}^{(m)} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-T}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E}^{(m)}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-1}, \quad \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E}^{(m)} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{T}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{e}^{(m)}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}.$$

补充 5.3.1. line element, $d\vec{x} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} \cdot d\vec{\mathtt{X}} = d\vec{\mathtt{X}} \cdot \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T$

volume element, $J = \frac{dv}{d\mathtt{V}} = \det \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}$

定义 5.3.3. area element

$$\begin{aligned}
dv &= d\vec{x} \cdot d\vec{a} = J d\mathtt{V} = J d\vec{\mathtt{X}} \cdot d\vec{\mathtt{A}} \\
&= d\vec{\mathtt{X}}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \cdot d\vec{a} \\
\Rightarrow & d\vec{\mathtt{X}}\left(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \cdot d\vec{a} - J d\vec{\mathtt{A}}\right) = 0 \\
\Rightarrow & d\vec{a} = J\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-T} d\vec{\mathtt{A}} = \left(\mathrm{Cof}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}\right) d\vec{A} \qquad \text{Nanson's formula}
\end{aligned}$$

补充 5.3.2. Nanson's Formula **(此部分内容 AIGC)**

Nanson's formula 是连续介质力学中描述变形过程中面积元矢量变换的重要公式。其数学表达式为：

$$d\vec{a} = J\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-T} d\vec{A} = (\mathrm{Cof}\,\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}) d\vec{A}$$

其中：

- $d\vec{a}$ 是变形后的面积元矢量。
- $d\vec{A}$ 是变形前的面积元矢量。
- $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}$ 是变形梯度张量（$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}$，其中 $\vec{x}$ 是变形后的坐标，$\vec{X}$ 是变形前的坐标）。

- $J = \det\left(\overrightarrow{\overrightarrow{F}}\right)$ 是变形梯度张量的行列式，表示体积变化率。
- $\operatorname{Cof}\overrightarrow{\overrightarrow{F}}$ 是 $\overrightarrow{\overrightarrow{F}}$ 的余因子矩阵（cofactor matrix），满足 $\operatorname{Cof}\overrightarrow{\overrightarrow{F}} = J\overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-T}$。

物理意义

Nanson's formula 描述了变形过程中面积元矢量的变换关系，其物理意义可以从以下几个方面理解：

1. 面积元的缩放

- 公式中的 $J = \det\left(\overrightarrow{\overrightarrow{F}}\right)$ 表示体积变化率。如果 $J > 1$，表示材料在变形过程中体积膨胀；如果 $J < 1$，表示体积收缩。
- 面积元的大小也会随 J 变化，具体表现为 $|d\vec{a}| = J|\overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-T} d\vec{A}|$。

2. 法向量的旋转

- 变形梯度张量的逆的转置 $\overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-T}$ 描述了法向量的旋转。变形后的法向量 $d\vec{a}$ 与变形前的法向量 $d\vec{A}$ 通过 $\overrightarrow{\overrightarrow{F}}^{-T}$ 相关联。
- 这种旋转反映了材料在变形过程中方向的变化。

3. 面积元矢量的变换

- 公式整体描述了变形前后面积元矢量的变换关系，结合了缩放和旋转效应。
- 特别地，$\operatorname{Cof}\overrightarrow{\overrightarrow{F}}$ 是变形梯度张量的余因子矩阵，它直接与面积元的变换相关。

应用

Nanson's formula 在连续介质力学中有重要应用，特别是在有限变形理论中。以下是其主要应用场景：

1. 应力变换在连续介质力学中，应力的描述可以分为两种形式：

- **Cauchy 应力（真实应力）** $\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}}$：
  - Cauchy 应力定义在变形后的构形上，表示单位变形后面积上的力。
  - 其数学表达式为：

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}} = \frac{d\vec{f}}{d\vec{a}}$$

    其中 $d\vec{f}$ 是作用在变形后面积元 $d\vec{a}$ 上的力。

- **第一类 Piola-Kirchhoff 应力（名义应力）** $\overrightarrow{\overrightarrow{P}}$：

- 第一类 Piola-Kirchhoff 应力定义在变形前的构形上，表示单位变形前面积上的力。
- 其数学表达式为：

$$\overset{\rightrightarrows}{P} = \frac{d\vec{f}}{d\vec{A}}$$

其中 $d\vec{f}$ 是作用在变形前面积元 $d\vec{A}$ 上的力。

- 两者之间的关系可以通过 Nanson's formula 推导得到：

$$\begin{aligned}
\overset{\rightrightarrows}{P} &= J\overset{\rightrightarrows}{\sigma}\,\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} = \overset{\rightrightarrows}{\sigma}\,J\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} = \overset{\rightrightarrows}{\sigma}\,\mathrm{Cof}\overset{\rightrightarrows}{F} \\
&= J\left(\sigma_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathtt{X}_K}{\partial x_l}\vec{e}_l \otimes \vec{e}_K\right) \\
&= J\sigma_{ij}\frac{\partial \mathtt{X}_K}{\partial x_j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_K \qquad \textit{two–point tensor}
\end{aligned}$$

2. 有限元分析

- 在有限元方法中，Nanson's formula 用于计算变形后的面积元，从而准确描述边界条件和载荷的变换。

5.4 class 34

定义 5.4.1. 第二类 Piola-Kirchhoff 应力 (拉格朗日型)

$$\begin{aligned}
\overset{\rightrightarrows}{T} &= \overset{\rightrightarrows}{F}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{P} = \overset{\rightrightarrows}{F}^{-1}J\overset{\rightrightarrows}{\sigma}\,\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} \\
&= J\left(\frac{\partial \mathtt{X}_A}{\partial x_b}\vec{e}_A \otimes \vec{e}_b\right) \cdot \left(\sigma_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathtt{X}_K}{\partial x_l}\vec{e}_l \otimes \vec{e}_K\right) \\
&= J\frac{\partial \mathtt{X}_A}{\partial x_b}\sigma_{ij}\frac{\partial \mathtt{X}_K}{\partial x_l}\vec{e}_A \otimes \vec{e}_K
\end{aligned}$$

$$\overset{\rightrightarrows}{T}^{T} = (\overset{\rightrightarrows}{F}^{-1}J\overset{\rightrightarrows}{\sigma}\,\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T})^T = \overset{\rightrightarrows}{F}^{-1}J\overset{\rightrightarrows}{\sigma}\,\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} = \overset{\rightrightarrows}{T}$$

定义 5.4.2. Kirchhoff 应力 (欧拉型)

$$\overset{\rightrightarrows}{\tau} = J\overset{\rightrightarrows}{\sigma}$$

定义 5.4.3. 功共轭 (Work Conjugate)

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \int \dot{w}\,dv = \int \overset{\rightrightarrows}{\sigma} : \overset{\rightrightarrows}{d}\,dv = \int J\overset{\rightrightarrows}{\sigma} : \overset{\rightrightarrows}{d}\,d\mathtt{V} \\
&= \int \overset{\rightrightarrows}{\tau} : \overset{\rightrightarrows}{d}\,d\mathtt{V} \qquad \overset{\rightrightarrows}{d} \quad \text{strain rate}
\end{aligned}$$

表 5.1: 功共轭关系对照表

力学变量	**共轭变量**	**领域**
柯西应力张量 $\overset{\rightrightarrows}{\sigma}$	应变率张量 $\overset{\rightrightarrows}{d}$	连续介质力学
Kirchhoff 应力 $\overset{\rightrightarrows}{\tau}$	应变率张量 $\overset{\rightrightarrows}{d}$	连续介质力学
名义应力 $\overset{\rightrightarrows}{P}$	变形梯度率 $\dot{\overset{\rightrightarrows}{F}}$	非线性力学
第二类 Piola-Kirchhoff 应力 $\overset{\rightrightarrows}{T}$	Green-Lagrange 应变率 $\dot{\overset{\rightrightarrows}{E}}$	有限变形理论
力矢量 $\vec{F}$	位移矢量 $\vec{u}$	质点力学
热流矢量 $\vec{q}$	温度梯度 $-\nabla T$	热力学
偶应力张量 $\overset{\rightrightarrows}{m}$	曲率张量 $\overset{\rightrightarrows}{\kappa}$	微极连续介质力学

功共轭关系式

$$\boxed{\dot{w} = J\overset{\rightrightarrows}{\sigma} : \overset{\rightrightarrows}{d} = \overset{\rightrightarrows}{\tau} : \overset{\rightrightarrows}{d} = \overset{\rightrightarrows}{P} : \dot{\overset{\rightrightarrows}{F}} = \overset{\rightrightarrows}{T} : \dot{\overset{\rightrightarrows}{E}}}$$

$$\dot{\omega} = \overset{\rightrightarrows}{\tau} : \overset{\rightrightarrows}{d} = \overset{\rightrightarrows}{\tau} : (\overset{\rightrightarrows}{l} - \overset{\rightrightarrows}{\omega})$$

$$\because \overset{\rightrightarrows}{\tau} = \overset{\rightrightarrows}{\tau}^T, \overset{\rightrightarrows}{\omega}^T = -\overset{\rightrightarrows}{\omega} \quad \therefore \overset{\rightrightarrows}{\tau} : \overset{\rightrightarrows}{\omega} = 0$$

$$\dot{\omega} = \overset{\rightrightarrows}{\tau} : \overset{\rightrightarrows}{l} = \overset{\rightrightarrows}{\tau} : \dot{\overset{\rightrightarrows}{F}}\overset{\rightrightarrows}{F}^{-1}$$

$$\because \overset{\rightrightarrows}{A} : (\overset{\rightrightarrows}{B}\overset{\rightrightarrows}{C}) = (\overset{\rightrightarrows}{B}^T\overset{\rightrightarrows}{A}) : \overset{\rightrightarrows}{C} = (\overset{\rightrightarrows}{A}\overset{\rightrightarrows}{C}^T) : \overset{\rightrightarrows}{B}$$

$$\dot{\omega} = \overset{\rightrightarrows}{\tau}\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} : \dot{\overset{\rightrightarrows}{F}} = J\overset{\rightrightarrows}{\sigma}\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} : \dot{\overset{\rightrightarrows}{F}} = \overset{\rightrightarrows}{P} : \dot{\overset{\rightrightarrows}{F}}$$

$$\dot{\omega} = J\overset{\rightrightarrows}{F}^{-1}\overset{\rightrightarrows}{F}\overset{\rightrightarrows}{\sigma}\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} : \dot{\overset{\rightrightarrows}{F}} = \overset{\rightrightarrows}{F}^{-1}J\overset{\rightrightarrows}{\sigma}\overset{\rightrightarrows}{F}^{-T} : (\overset{\rightrightarrows}{F}^T\dot{\overset{\rightrightarrows}{F}}) = \overset{\rightrightarrows}{T} : (\overset{\rightrightarrows}{F}^T\dot{\overset{\rightrightarrows}{F}})$$

$$\because \overset{\rightrightarrows}{T} = \overset{\rightrightarrows}{T}^T \quad \therefore \dot{\omega} = \overset{\rightrightarrows}{T} : \frac{\overset{\rightrightarrows}{F}^T\dot{\overset{\rightrightarrows}{F}} + (\overset{\rightrightarrows}{F}^T\dot{\overset{\rightrightarrows}{F}})^T}{2} = \overset{\rightrightarrows}{T} : \frac{\overset{\rightrightarrows}{F}^T\dot{\overset{\rightrightarrows}{F}} + \dot{\overset{\rightrightarrows}{F}}^T\overset{\rightrightarrows}{F}}{2} = \overset{\rightrightarrows}{T} : \dot{\overset{\rightrightarrows}{E}}$$

$$\overset{\rightrightarrows}{E} = \frac{\overset{\rightrightarrows}{C} - \overset{\rightrightarrows}{I}}{2} = \frac{1}{2}(\overset{\rightrightarrows}{F}^T\overset{\rightrightarrows}{F} - \overset{\rightrightarrows}{I})$$

$$\dot{\overset{\rightrightarrows}{E}} = \frac{1}{2}(\overset{\rightrightarrows}{F}^T\dot{\overset{\rightrightarrows}{F}} + \dot{\overset{\rightrightarrows}{F}}^T\overset{\rightrightarrows}{F})$$

注. 计算双点积 $\overset{\rightrightarrows}{\tau} : \overset{\rightrightarrows}{\omega}$：

$$\overset{\rightrightarrows}{\tau} : \overset{\rightrightarrows}{\omega} = \sum_{i,j} \tau_{ij}\omega_{ij}$$

由于 $\overrightarrow{\tau}$ 是对称的，$\tau_{ij}=\tau_{ji}$；而 $\overrightarrow{\omega}$ 是反对称的，$\omega_{ij}=-\omega_{ji}$。因此，可以将双点积改写为：

$$\overrightarrow{\tau}:\overrightarrow{\omega}=\sum_{i,j}\tau_{ij}\omega_{ij}=\sum_{i,j}\tau_{ji}(-\omega_{ji})$$

将下标 i 和 j 互换（因为求和是对所有 i,j 进行的）：

$$\overrightarrow{\tau}:\overrightarrow{\omega}=-\sum_{i,j}\tau_{ij}\omega_{ij}=-\overrightarrow{\tau}:\overrightarrow{\omega}\quad\Rightarrow\quad(\overrightarrow{\tau}:\overrightarrow{\omega})=0$$

定义 5.4.4. 速度梯度 (velocity gradient)

$$\overrightarrow{l}=\vec{v}\nabla_{\vec{x}}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}=\frac{\partial}{\partial\vec{\mathrm{X}}}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)\overrightarrow{F}^{-1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\mathrm{X}}}\right)\overrightarrow{F}^{-1}=\dot{\overrightarrow{F}}\overrightarrow{F}^{-1}$$

应变率 (strain rate) $\overrightarrow{d}=\frac{\overrightarrow{l}+\overrightarrow{l}^T}{2}$, $\overrightarrow{d}^T=\overrightarrow{d}$, 旋率 (spin) $\overrightarrow{\omega}=\frac{\overrightarrow{l}-\overrightarrow{l}^T}{2}$, $\overrightarrow{\omega}^T=-\overrightarrow{\omega}$

例 5.4.1.

$$\overrightarrow{F}^{-1}\overrightarrow{F}=\overrightarrow{I}\quad\Rightarrow\quad\dot{\overrightarrow{F}^{-1}}\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F}^{-1}\dot{\overrightarrow{F}}=\overrightarrow{0}$$

$$\because\overrightarrow{l}=\dot{\overrightarrow{F}}\overrightarrow{F}^{-1}\quad\therefore\dot{\overrightarrow{F}^{-1}}=-\overrightarrow{F}^{-1}\overrightarrow{l}$$

例 5.4.2.

$$\dot{\overrightarrow{F}^{-T}}=\left(\dot{\overrightarrow{F}^{-1}}\right)^T=(-\overrightarrow{F}^{-1}\overrightarrow{l})^T=-\overrightarrow{l}^T\overrightarrow{F}^{-T}$$

例 5.4.3.

$$\frac{\partial J}{\partial\overrightarrow{F}}=\frac{\partial\det\overrightarrow{F}}{\partial\overrightarrow{F}}=(\det\overrightarrow{F})\overrightarrow{F}^{-T}=J\overrightarrow{F}^{-T}$$

$$\dot{J}=\frac{\partial J}{\partial\overrightarrow{F}}:\dot{\overrightarrow{F}}=Jtr(\overrightarrow{F}^{-1}\dot{\overrightarrow{F}})=Jtr(\dot{\overrightarrow{F}}\overrightarrow{F}^{-1})=Jtr\,\overrightarrow{l}$$

$$\because\overrightarrow{l}=\overrightarrow{d}+\overrightarrow{\omega}\quad,\quad tr\overrightarrow{\omega}=0$$

$$\dot{J}=Jtr\,\overrightarrow{d}$$

例 5.4.4.

$$d\vec{a}=J\overrightarrow{F}^{-T}d\vec{A}$$

$$\because d\dot{\vec{A}}=\vec{0}$$

$$d\dot{\vec{a}}=J\dot{\overrightarrow{F}^{-T}}d\vec{A}=(\dot{J}\overrightarrow{F}^{-T}+J\dot{\overrightarrow{F}^{-T}})d\vec{A}=J\overrightarrow{F}^{-T}\left(\mathrm{div}\vec{v}\,\overrightarrow{I}-\overrightarrow{l}^T\right)d\vec{A}$$

$$\because J\overrightarrow{F}^{-T}d\vec{A}=d\vec{a}$$

$$d\dot{\vec{a}}=\left((\mathrm{div}\vec{v})\overrightarrow{I}-\overrightarrow{l}^T\right)d\vec{A}$$

例 5.4.5.

$$\dot{dv} = J\dot{d\mathtt{V}} = \dot{J}d\mathtt{V} = J(div\vec{v})d\mathtt{V}$$

$$\because J d\mathtt{V} = dv \quad \therefore \dot{dv} = (div\vec{v})dv$$

例 5.4.6.

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E} = \frac{1}{2}(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} - \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{I})$$

$$\dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E}} = \frac{\dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} + \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}}}{2} = \frac{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{l}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} + \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}}{2} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \frac{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{l}^T + \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T}{2} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{d} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}$$

operation

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \cdot (\text{当前构形}) \cdot \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} \quad \text{pull—back 拉回} \quad \dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E}} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{d} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}$$

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T \cdot (\text{参考构形}) \cdot \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} \quad \text{push—forward 推前} \quad \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{d} = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-T} \dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{E}} \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-1}$$

例 5.4.7. 介质不可压缩的 seven equivalent conditions

$$J = \det \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F} = \tfrac{dv}{d\mathtt{V}} = 1 \qquad \dot{J} = 0 \qquad div\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$tr\, \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{d} = 0 \qquad tr\, \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{l} = 0 \qquad dv = constant$$

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-T} : \dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}} = 0$$

第六章　守恒律与场方程

6.1　class 35

补充 6.1.1. 牛顿主义与达尔文主义：两种科学思维的对比 **(此部分内容 AIGC)**

牛顿主义

牛顿主义源于艾萨克・牛顿爵士的经典力学，强调自然界的确定性和可预测性。根据牛顿的运动定律，宇宙被视为一个巨大的机械装置，所有物体的运动都可以通过数学公式精确描述。

核心思想牛顿主义的核心思想可以归纳为以下几点：

- 确定性：给定初始条件，系统的未来状态可以被精确预测。
- 线性：系统的行为可以通过分解为线性组成部分来分析。
- 可控性：通过精确控制初始条件，可以实现对系统的完全控制。

数学表达牛顿确定性原理的数学表达可以通过初始条件和运动方程来体现。例如，对于一个经典系统，其运动可以通过以下方程组完全确定：

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

其中，是 $\vec{p}_i$ 第 i 个粒子的动量，$\vec{F}_i$ 是 i 作用于第个粒子的力。

如果知道系统在某一时刻的初始状态（位置和动量），以及所有的作用力，那么系统的未来状态可以被唯一地确定。

达尔文主义

达尔文主义源于查尔斯・达尔文的生物进化论，强调自然选择和适应性。根据达尔文的理论，生物通过适应环境实现生存和繁殖。

核心思想达尔文主义的核心思想可以归纳为以下几点：

- 适应性：生物通过适应环境实现生存和繁殖。

- 自然选择：环境对生物的变异进行选择，保留有利变异。
- 复杂性：生物系统具有高度的复杂性和非线性。

数学表达达尔文的自然选择可以通过以下公式表示：

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

其中，N 是种群数量，r 是增长率，K 是环境容纳量。

群体免疫：两种思维的对比

群体免疫是指通过足够比例的人口接种疫苗或患病康复，减少疾病在人群中的传播。牛顿主义和达尔文主义在群体免疫中的应用体现了两种不同的思维方式。

牛顿主义视角从牛顿主义的角度来看，群体免疫可以被视为一个机械系统。通过精确控制接种比例，可以预测和控制疾病的传播。这种思维方式强调确定性和可控性。

达尔文主义视角从达尔文主义的角度来看，群体免疫是一个复杂的适应系统。疾病和宿主之间存在着不断的适应和进化，系统具有高度的非线性和不确定性。这种思维方式强调适应性和复杂性。

定义 6.1.1. Reynolds' transport theorem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int \Phi\, dv &= \int \frac{d}{dt}(\Phi dv) = \int \frac{d\Phi}{dt}\, dv + \int \Phi \frac{d}{dt}(dv) \\
&= \int \left(\frac{d\Phi}{dt} + (\nabla \cdot \vec{v}\Phi)\right) dv \\
&= \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{x}}\frac{d\vec{x}}{dt} + (\nabla \cdot \vec{v}\Phi)\right) dv \\
&= \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi\vec{v})\right) dv
\end{aligned}$$

定义 6.1.2. Continuity equation (Eulerian viewpoint), $\Phi = \rho$

$$\frac{dm}{dt} = \int \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v})\right) dv = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \qquad \vec{j} = \rho\vec{v} \quad \text{mass flux density}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{j}) = 0$$

$$\underbrace{div\vec{v}}_{\text{胀量}} = 0 \Leftarrow \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} \\ \text{incompressible} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \end{cases}$$

例 6.1.1. charge continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{j}) = 0$$

其中：

- ρ 为电荷密度
- $\vec{j}$ 为电流密度

定义 6.1.3. Continuity equation (Lagrangian viewpoint)

$$m = \int \rho_0 \, dV = \int \rho \, dv$$

$$\rho_0 = J\rho = \rho \det \overset{\rightrightarrows}{F}$$

6.2 class 36

补充 6.2.1. 量子力学中的常见算子

1. 动量算子（Momentum Operator）在量子力学中，动量算子 $\hat{\vec{p}}$ 是位置算子 $\hat{\vec{r}}$ 的共轭量，其形式为：

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$$

其中 $\hbar$ 是约化普朗克常数，∇ 是梯度算子。动量算子在坐标空间中的表示为：

$$\langle \vec{r} | \hat{\vec{p}} | \psi \rangle = -i\hbar\nabla\psi(\vec{r})$$

动量算子是量子力学中描述粒子运动的基本算子之一。

2. 角动量算子（Angular Momentum Operator）角动量算子 $\hat{\vec{L}}$ 描述系统的旋转对称性，其定义为：

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$$

在笛卡尔坐标系中，角动量算子的分量为：

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

角动量算子的分量满足以下对易关系：

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

其中 ϵ_{ijk} 是 Levi-Civita 符号。

表 6.1: 连续性方程综合表

类型	方程形式	描述
质量守恒（欧拉描述）	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$	流体力学中的质量守恒方程，描述质量在流动中的守恒规律
电荷守恒	$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$	电荷守恒定律的微分形式，保证电荷总量不变
量子概率密度	$\frac{\partial \vert\psi\vert^2}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$ 其中 $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$	量子力学概率流连续性方程，保证概率守恒
扩散过程	$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$ (通量 $\vec{J} = -D\nabla c$)	扩散方程的守恒形式，D 为扩散系数
热传导	$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = 0$ (通量 $\vec{q} = -\kappa \nabla \theta$)	能量守恒的热传导形式，$\alpha = \kappa/(\rho c_p)$ 为温导率
动量扩散	$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau} = 0$ (应力 $\overleftrightarrow{\tau} = -\mu(\nabla \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \nabla)$)	黏性流体的动量守恒方程，μ 为动力黏度
正交曲线坐标系	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i \sqrt{g}) = 0$	广义坐标系下的质量守恒，g_{ij} 为度量张量，$\sqrt{g}$ 为雅可比行列式
笛卡儿坐标系	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$	三维直角坐标系展开式，x_i 为坐标分量
柱坐标系	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0$	柱坐标下的展开形式，包含径向、角向和轴向分量
球坐标系	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 \rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta \rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0$	球坐标系展开式，包含径向、极角和方位角分量

3. 能量算子（Energy Operator）能量算子 $\hat{E}$ 描述系统的总能量。在量子力学中，能量算子通常与哈密顿算子 $\hat{H}$ 相关联，但对于某些特定情况（如自由粒子），能量算子可以单独定义。例如，自由粒子的能量算子为：

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

4. 哈密顿算子（Hamiltonian Operator）哈密顿算子 $\hat{H}$ 是量子力学中描述系统总能量的核心算子。对于一个质量为 m 的粒子在外势场 $V(\vec{r})$ 中运动，哈密顿算子为：

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{r}})$$

在坐标空间中，哈密顿算子的表示为：

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

哈密顿算子的本征值对应于系统的能量本征值。

定理 6.2.1. 空间平移不变性 $\rightarrow$ 空间的均匀性

封闭的力学系统经过平移 ϵ

$$\delta L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta \vec{q} = \vec{\epsilon} \cdot \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \vec{q}}$$

$$\text{Euler–Lagrange equation} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$$

$$\delta L = \vec{\epsilon} \cdot \sum_\alpha \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \vec{\epsilon} \cdot \frac{d}{dt}\sum_\alpha \vec{p_\alpha}$$

$$\because \delta L = 0\ ,\ \epsilon = constant \qquad \therefore \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{p} = \sum_\alpha p_\alpha = constant \quad \Leftrightarrow \quad \text{空间平移不变性}$$

定义 6.2.1. moment equation (Eulerian viewpoint)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int \rho\vec{v}\, dv &= \int \left(\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})\right) dv \\ &= \int_V \rho\vec{f}\, dv + \oiint_\alpha (-\rho \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\tau})\vec{n}\, da \\ &= \int_V \rho\vec{f}\, dv + \int_V \nabla\cdot(-\rho\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\tau})\vec{n}\, dv \end{aligned}$$

流体力学的动量方程

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v} + \rho\overleftrightarrow{I}) = \nabla\cdot\overleftrightarrow{\tau} + \rho\vec{f}$$

$$\frac{d}{dt}\int \rho\vec{v}\, dv = \int \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\, dt = \int_V \rho\vec{f}\, dv + \int \nabla\cdot\overleftrightarrow{\sigma}\vec{n}\, dv$$

固体力学的动量方程

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\sigma} + \rho\vec{f} = \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{a}$$

$$\text{neglect } \rho\vec{f} = \vec{0}\ \rho\vec{a} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \text{equilibrium equation} \quad \nabla\cdot\overleftrightarrow{\sigma} = \vec{0}$$

$$\text{fuild mechanics}\begin{cases} body\ force \quad \vec{f} \\ stress\begin{cases} normal\ stress \quad -\rho\,\overrightarrow{\overrightarrow{I}} \\ shear\ stress \quad \overrightarrow{\overrightarrow{\tau}} \end{cases} \end{cases}$$

定理 6.2.2. 空间旋转不变性 $\to$ 动量矩守恒 $\to$ 应力的对称性

各向同性 (isotrophy)，封闭的力学系统经过转角 $\delta\vec{\varphi}\begin{cases} displacement \quad \delta\vec{q} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{r} \\ velocitis \quad \delta\dot{\vec{q}} = \delta\vec{\varphi}\times\vec{v} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\delta L &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q_\alpha}}\cdot\delta\vec{q_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q_\alpha}}}\cdot\delta\dot{\vec{q_\alpha}}\right) \\
&= \sum_\alpha \left(\dot{\vec{p_\alpha}}\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{r}) + \vec{p_\alpha}\cdot(\delta\vec{\varphi}\times\vec{v})\right) \\
&= \sum_\alpha \left(\delta\vec{\varphi}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{p_\alpha}}) + \delta\vec{\varphi}\cdot(\vec{v}\times\vec{p_\alpha})\right) \\
&= \delta\vec{\varphi}\cdot\sum_\alpha\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p_\alpha}) = \delta\vec{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\sum_\alpha\vec{M}_\alpha = 0
\end{aligned}$$

$$\delta\vec{\varphi} = constant \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\sum_\alpha\vec{M}_\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_\alpha\vec{M}_\alpha = constant$$

$$\begin{aligned}
\int F_i\,dv &= \int\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\,dv = \oiint\sigma_{ik}\,da_k \\
moment \quad M_{ik} &= \int(x_iF_k - x_kF_i)\,dv = \int\left(x_i\frac{\partial\sigma_{kl}}{x_l} - x_k\frac{\partial\sigma_{il}}{x_l}\right)\,dv \\
&= \int\frac{\partial(x_i\sigma_{kl} - x_k\sigma_{il})}{\partial x_l}\,dv - \int\left(\sigma_{kl}\frac{\partial x_i}{x_l} - \sigma_{il}\frac{\partial x_k}{x_l}\right)\,dv \\
&= \oiint(x_i\sigma_{kl} - x_k\sigma_{il})\,da_l - \int(\sigma_{kl}\delta_{il} - \sigma_{il}\delta_{kl})\,dv \\
&= \oiint(x_i\sigma_{kl} - x_k\sigma_{il})\,da_l - \int(\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\,dv = 0
\end{aligned}$$

命题 6.2.1. 应力张量的散度在正交曲线坐标系中的表达式：

$$\begin{aligned}
(\nabla\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{\sigma}})_1 = \frac{1}{H_1H_2H_3}&\left[\frac{\partial(H_2H_3\sigma_{11})}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1H_3\sigma_{12})}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2\sigma_{13})}{\partial q_3}\right] \\
&+ \frac{\sigma_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{\sigma_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} \\
&- \frac{\sigma_{22}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{\sigma_{33}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}
\end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot \overrightarrow{\sigma})_2 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3\sigma_{21})}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1H_3\sigma_{22})}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2\sigma_{23})}{\partial q_3}\right]$$
$$+ \frac{\sigma_{21}}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{\sigma_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}$$
$$- \frac{\sigma_{11}}{H_2H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{\sigma_{33}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}$$

$$(\nabla \cdot \overrightarrow{\sigma})_3 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3\sigma_{31})}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1H_3\sigma_{32})}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2\sigma_{33})}{\partial q_3}\right]$$
$$+ \frac{\sigma_{31}}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{\sigma_{32}}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}$$
$$- \frac{\sigma_{11}}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{\sigma_{22}}{H_3H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}$$

推导: 正交曲线坐标系下应力张量的散度 e_1 方向表达式推导

在直线坐标系中，应力张量的散度 $\nabla \cdot \overrightarrow{\sigma}$ 在 e_1 方向的分量可以表示为：

$$(\nabla \cdot \overrightarrow{\sigma})_1 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_2H_3\sigma_{11})}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1H_3\sigma_{12})}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2\sigma_{13})}{\partial q_3}\right]$$

由于曲线坐标系的曲率效应，需要添加修正项。这些修正项来源于基矢量的导数。

因此，曲率修正项为：

$$\frac{\sigma_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{\sigma_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{\sigma_{22}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{\sigma_{33}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}$$

将上述结果合并，得到 e_1 方向的散度表达式。 □

命题 6.2.2. 正交曲线坐标系中基矢量对坐标的偏导

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i} = -\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_i}{\partial q_j}\vec{e}_j - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\vec{e}_k \\ \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\vec{e}_j \end{cases}$$

证明: 在正交曲线坐标系中，坐标 (q_1, q_2, q_3) 对应的基矢量为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$，拉梅系数为 H_1, H_2, H_3。基矢量的导数可以通过以下步骤推导。

基矢量的导数 $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j}$ 可以通过对基矢量的定义求导得到：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right).$$

利用乘积法则展开：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{H_i}\right)\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial q_i}.$$

利用链式法则：

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{H_i}\right)\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}=-\frac{1}{H_i^2}\frac{\partial H_i}{\partial q_j}\cdot H_i\vec{e}_i=-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial q_j}\vec{e}_i.$$

由于 $\vec{r}$ 是光滑函数，混合偏导数可以交换顺序：

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(H_j\vec{e}_j\right)=\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\vec{e}_j+H_j\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i}.$$

将上述结果代入基矢量的导数表达式：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\vec{e}_j+\frac{H_j}{H_i}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i}-\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial q_j}\vec{e}_i.$$

当 $i\neq j$ **时**，基矢量的导数为：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\vec{e}_j.$$

这是因为 $\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i}$ 在正交坐标系中与 $\vec{e}_i$ 无关。

当 $i=j$ **时**，$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i}$ 与 $\vec{e}_i$ 正交, 基矢量的导数可表示为：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i}=\sum_{k\neq i}c_k\vec{e}_k.$$

通过几何关系确定系数 c_k 的步骤如下：

基矢量满足正交性 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=0\,(i\neq j)$，对 $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k=0$ 关于 q_i 求导（$k\neq i$）：

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k)=\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i}\cdot\vec{e}_k+\vec{e}_i\cdot\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q_i}=0$$

整理得：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i}\cdot\vec{e}_k=-\vec{e}_i\cdot\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q_i}$$

已知当 $i\neq k$ 时，基矢量的导数为：

$$\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q_i}=\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\vec{e}_i\quad(i\neq k)$$

将其代入正交性条件：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i}\cdot\vec{e}_k=-\vec{e}_i\cdot\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\vec{e}_i\right)=-\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}(1)$$

由于 $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i}=\sum_{m\neq i}c_m\vec{e}_m$，将其与 $\vec{e}_k$ 点乘：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i}\cdot\vec{e}_k=\sum_{m\neq i}c_m\vec{e}_m\cdot\vec{e}_k=c_k$$

结合 (1) 式：

$$c_k = -\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}$$

基矢量的导数为：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_i} = -\sum_{k\neq i}\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\vec{e}_k$$

综上所述，正交曲线坐标系下基矢量的导数为：

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\vec{e}_j, & i \neq j, \\ -\sum_{k\neq i}\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\vec{e}_k, & i = j. \end{cases}$$

□

6.3 class 37

定义 6.3.1. 正交曲线坐标系中的加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_1\vec{e_1}) + \frac{d}{dt}(v_2\vec{e_2}) + \frac{d}{dt}(v_3\vec{e_3})$$

$$\text{正交曲线坐标系}\quad \frac{d\vec{e}_i}{dt} \neq \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{a_1} &= \frac{d}{dt}(v_1\vec{e_1}) = \frac{dv_1}{dt}\vec{e_1} + v_1\frac{d\vec{e_1}}{dt} \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \\ \frac{d\vec{e_1}}{dt} &= \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial \vec{e_1}}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2}\frac{\partial \vec{e_1}}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3}\frac{\partial \vec{e_1}}{\partial q_3} \end{aligned}$$

单位矢量的导数公式：

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{v_j}{H_j}\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j}$$

对于正交曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3)，加速度的各方向分量表达式为：

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_1 = &\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)v_1 \\ &+ \frac{v_2}{H_1H_2}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) \\ &+ \frac{v_3}{H_1H_3}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - v_3\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right) v_2 + \frac{v_3}{H_2 H_3}\left(v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - v_3\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right) + \frac{v_1}{H_2 H_1}\left(v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_3 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right) v_3 + \frac{v_1}{H_3 H_1}\left(v_3\frac{\partial H_3}{\partial q_1} - v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right) + \frac{v_2}{H_3 H_2}\left(v_3\frac{\partial H_3}{\partial q_2} - v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)$$

对于正交曲线坐标系中的加速度分量，第 i 个方向的表达式为：

$$a_i = h_i\ddot{q}_i + \frac{\partial h_i}{\partial q_i}\dot{q}_i^2 + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\frac{\partial h_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\dot{q}_i - \frac{1}{h_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} h_j\frac{\partial h_j}{\partial q_i}\dot{q}_j^2$$

推导： $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_1$ 的表达式

在正交曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 中，速度矢量 $\vec{v}$ 可以表示为：

$$\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$$

其中 $v_i = H_i\dot{q}_i$ 是速度在 q_i 方向的分量，H_i 是拉梅系数。

加速度矢量 $\frac{d\vec{v}}{dt}$ 的表达式为：

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3)$$

展开后得到：

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_1}{dt}\hat{e}_1 + v_1\frac{d\hat{e}_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt}\hat{e}_2 + v_2\frac{d\hat{e}_2}{dt} + \frac{dv_3}{dt}\hat{e}_3 + v_3\frac{d\hat{e}_3}{dt}$$

考虑 $\hat{e}_1$ 方向的分量 $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_1$，我们有：

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_1 = \frac{dv_1}{dt} + v_2\left(\frac{d\hat{e}_2}{dt}\cdot\hat{e}_1\right) + v_3\left(\frac{d\hat{e}_3}{dt}\cdot\hat{e}_1\right)$$

利用单位矢量的导数公式：

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{v_j}{H_j}\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}$$

以及正交曲线坐标系下基矢量的导数为：

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q_j} = \begin{cases} \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q_i}\vec{e}_j, & i\neq j, \\ -\sum_{k\neq i}\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k}\vec{e}_k, & i = j. \end{cases}$$

可以得到：

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt}\cdot\hat{e}_1=\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_1}\cdot\hat{e}_1+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_2}\cdot\hat{e}_1+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_3}\cdot\hat{e}_1$$

由于 $\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_2}\cdot\hat{e}_1=-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}$，且 $\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_1}\cdot\hat{e}_1=\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}$，$\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial q_3}\cdot\hat{e}_1=0$，因此：

$$\frac{d\hat{e}_2}{dt}\cdot\hat{e}_1=\frac{v_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{v_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}$$

同理：

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt}\cdot\hat{e}_1=\frac{v_1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{v_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}$$

利用 $v_i=H_i\dot{q}_i$，可以将 $\frac{dv_1}{dt}$ 展开为：

$$\frac{dv_1}{dt}=\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_1}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_1}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial v_1}{\partial q_3}$$

最终，$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_1$ 的表达式为：

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_1=&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)v_1\\&+\frac{v_2}{H_1H_2}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-v_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)\\&+\frac{v_3}{H_1H_3}\left(v_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-v_3\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)\end{aligned}$$

□

推论 6.3.1. 正交曲线坐标系中流体力学的动量方程

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{f}+\nabla\cdot\overrightarrow{\overrightarrow{P}}$$

定理 6.3.2. 时间的均匀性 → 能量守恒

封闭的力学系统和时间无关

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=\sum\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\ddot{q}\right)\\&=\sum\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\delta\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\ddot{q}\right)\\&=\frac{d}{dt}\left(\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}-L\right)=0\quad\Rightarrow\quad 2T-(T-V)=T+V=constant$$

例 6.3.1. 欧拉描述下流体的能量守恒

$$\text{热力学第一定律}\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}$$

$$\varepsilon = \rho V(u+k) = \rho V(u + \frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{x} = \vec{F}\cdot\vec{v}dt$$

$$\frac{d}{dt}\int \rho(u+\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})\,dv = \int(-q_i)n_i\,da - \int(-n_i\sigma_{ij}v_j)\,da - \int(-\rho f_i v)\,dv$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(u+\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})\right) + \nabla\cdot\left(\rho\vec{v}(u+\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})\right) = -\nabla\cdot\vec{q} + \nabla\cdot(\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{v}) + \rho\vec{v}\cdot\vec{f}$$

$$\overleftrightarrow{\sigma} = -P\overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(u+\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})\right) + \nabla\cdot\left(\rho\vec{v}(u+\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}+\frac{P}{\rho})\right) = -\nabla\cdot\vec{q} + \nabla\cdot(\overleftrightarrow{\tau}\cdot\vec{v}) + \rho\vec{v}\cdot\vec{f}$$

第七章　客观性

7.1　class 39

补充 7.1.1. 二十世纪三大数学流派 **(此部分内容 AIGC)**

二十世纪初，数学基础的研究引发了关于数学本质的深刻讨论，并形成了三大主要流派：形式主义、逻辑主义和直觉主义。这些流派试图为数学提供坚实的基础，并解决由集合论悖论引发的危机。本文将简要介绍这三大流派的核心理念、代表人物及其对数学发展的影响。

逻辑主义 (Logicism)

逻辑主义的主要观点是：数学可以归结为逻辑。换言之，数学是逻辑的一个分支，所有数学概念和定理都可以通过逻辑规则从基本逻辑公理中推导出来。

逻辑主义的代表人物包括：

- **戈特洛布 · 弗雷格 (Gottlob Frege)**：弗雷格是逻辑主义的奠基人之一，他试图在逻辑基础上构建算术体系。他的著作《算术基础》(Grundlagen der Arithmetik) 是逻辑主义的重要文献。
- **伯特兰 · 罗素 (Bertrand Russell)**：罗素与怀特海 (Alfred North Whitehead) 合著的《数学原理》(Principia Mathematica) 是逻辑主义的经典著作。他们试图通过类型论解决罗素悖论，并将数学建立在逻辑基础之上。

逻辑主义的贡献在于它揭示了数学与逻辑之间的深刻联系，并为数学基础的研究提供了新的视角。然而，罗素悖论的出现表明，逻辑主义需要额外的公理（如选择公理和无穷公理）来推导数学，这削弱了“数学完全可归结为逻辑”的主张。

形式主义 (Formalism)

形式主义认为，数学是一个形式系统，由符号和规则组成，数学对象本身没有内在意义。数学的真理性在于形式系统内部的一致性和可证明性，而不是与外界的任何联系。

形式主义的代表人物是：

- **大卫 · 希尔伯特 (David Hilbert)**：希尔伯特是形式主义的代表人物。他提出了“希尔

伯特计划”，旨在通过有限的方法证明数学系统的无矛盾性、完备性和可判定性。

形式主义为数学基础的研究提供了严格的形式化框架，并推动了元数学（metamathematics）的发展。然而，哥德尔的不完备性定理表明，任何足够强大的形式系统都无法同时满足无矛盾性和完备性，这对希尔伯特计划构成了重大打击。

直觉主义 (Intuitionism)

直觉主义强调数学构造的过程，认为数学对象必须通过明确的构造过程才能被接受。直觉主义拒绝接受非构造性的证明（如排中律的使用），并认为数学是人类直觉的产物。

直觉主义的代表人物包括：

- **卢伊兹·布劳威尔 (L.E.J. Brouwer)**：布劳威尔是直觉主义的创始人。他认为数学是一种基于直觉的精神活动，而不是纯粹的逻辑推理。
- **阿伦特·海廷 (Arend Heyting)**：海廷进一步发展了直觉主义逻辑，为直觉主义提供了形式化的基础。

直觉主义推动了构造性数学的发展，并启发了计算机科学中的算法思想。然而，直觉主义对经典数学的严格限制（如拒绝排中律和实无穷）使其在主流数学中的应用受到限制。

补充 7.1.2. 展示张量分析的重要性

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(H_2H_3A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3H_1A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2A_3)}{\partial q_3}\right)$$

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = & \frac{\hat{e_1}}{H_1}\frac{\partial\left(\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(H_2H_3A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3H_1A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2A_3)}{\partial q_3}\right)\right)}{\partial q_1} \\ & + \frac{\hat{e_2}}{H_2}\frac{\partial\left(\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(H_2H_3A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3H_1A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2A_3)}{\partial q_3}\right)\right)}{\partial q_2} \\ & + \frac{\hat{e_3}}{H_3}\frac{\partial\left(\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(H_2H_3A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3H_1A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2A_3)}{\partial q_3}\right)\right)}{\partial q_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} = & \frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{\partial(H_3A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(H_2A_2)}{\partial q_3}\right)\hat{e_1} \\ & + \frac{1}{H_3H_1}\left(\frac{\partial(H_1A_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(H_3A_3)}{\partial q_1}\right)\hat{e_2} \\ & + \frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial(H_2A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(H_1A_1)}{\partial q_2}\right)\hat{e_3}\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \hat{e_1} & H_2 \hat{e_2} & H_3 \hat{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 B_1 & H_2 B_2 & H_3 B_3 \end{vmatrix}$$

$$B_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial (H_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (H_2 A_2)}{\partial q_3} \right)$$

$$B_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (H_3 A_3)}{\partial q_1} \right)$$

$$B_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial (H_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_2} \right)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$

定义 7.1.1. Walter Noll 纳尔—principle of material fram−indifference—MFI

the response of a material is the same for all observers

$$\text{固体力学最重要的两条公理} \begin{cases} Cauchy\ stress\ principle \\ \\ MFI \end{cases}$$

定义 7.1.2. Euclidean transformation

设 $n \in \mathbb{N}^*$，考虑 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$。一个映射 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 称为欧几里得变换，如果其可表示为：

$$T(\mathbf{x}) = \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{其中} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

并满足以下条件：

1. **正交线性变换**：矩阵 $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正交矩阵，即满足

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^\top \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A} = I_n,$$

其中 I_n 为 $n \times n$ 单位矩阵。

$$\det\left(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\right) = \det\left(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T\right) \cdot \det \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A} = (\det \overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A})^2 = 1$$

此时 $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}$ 的行列式满足 $\det\left(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\right) \in \{1, -1\}$，分别对应保持或反转空间方向。

2. **平移向量**：向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ 为平移分量。

3. **等距性**：对任意两点 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，变换保持欧几里得距离不变：

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

其中 $\| \cdot \|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的标准欧几里得范数。

特别地：

- 当 $\det\left(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\right)=1$ 时，称 $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}$ 为正常正交张量 (proper orthogonal tensor)，称 T 为正向欧几里得变换（即刚体运动，包含旋转和平移）。
- 当 $\det\left(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\right)=-1$ 时，称 $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}$ 为 (inproper orthogonal tensor)，称 T 为反向欧几里得变换（包含反射、瑕旋转等操作）。

补充 7.1.3. 等距映射 (isometry)

设 $n\in\mathbb{N}^*$，考虑 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$。一个映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 称为等距映射，如果对任意两点 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，满足：

$$\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})\|=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的标准欧几里得范数。

等距映射的性质：

1. **线性性**：若 f 是线性映射，则 f 可表示为 $f(\mathbf{x})=\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\mathbf{x}$，其中 $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}$ 是正交矩阵。
2. **结构分解**：任意等距映射 f 可分解为一个正交线性变换 $\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}$ 和一个平移向量 $\mathbf{b}$ 的组合，即
$$f(\mathbf{x})=\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}.$$
这表明欧几里得变换是等距映射的特例。
3. **保持内积**：等距映射保持内积。即对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，有
$$\langle f(\mathbf{x}),f(\mathbf{y})\rangle=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle,$$
其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积。

命题 7.1.1. 张量欧氏空间客观性

$$(\vec{u}_1\otimes\vec{u}_2)^\star=(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\vec{u}_1)\otimes(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\vec{u}_2)=\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\vec{u}_1\otimes\vec{u}_2\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T=\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}(\vec{u}_1\otimes\vec{u}_2)\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T$$

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^\star=\frac{\partial\vec{x}^\star}{\partial\vec{\mathbb{X}}}=\frac{\partial(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\vec{x})}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\mathbb{X}}}=\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\cdot\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}$$
$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{C}^\star=(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F})^\star=(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F})^T(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F})=\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{C}$$
$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{B}^\star=(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^T)^\star=(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F})(\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F})^T=\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{B}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T$$

$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{l}^\star=(\dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-1})^\star=(\dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}+\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}})\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{F}^{-1}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T=\dot{\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}}\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T+\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\,\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{l}\,\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T=\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\Omega}+\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}\,\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{l}\,\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{A}^T$$
$$\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\Omega}^T=-\overset{\rightharpoonup\rightharpoonup}{\Omega}\qquad \textit{spin tensor}$$

$$
\overrightarrow{d} = \frac{\overrightarrow{l} + \overrightarrow{l}^{-T}}{2}
$$

$$
\overrightarrow{d}^{\star} = \frac{\overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{l}\,\overrightarrow{A}^{T} - \overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{l}^{T}\overrightarrow{A}^{T}}{2} = \overrightarrow{A}\frac{\overrightarrow{l} + \overrightarrow{l}^{T}}{2}\overrightarrow{A}^{T} = \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{d}\,\overrightarrow{A}^{T}
$$

$$
\overrightarrow{\omega}^{\star} = \frac{\overrightarrow{l}^{\star} + \overrightarrow{l}^{T\star}}{2} = \overrightarrow{\Omega} + \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{\omega}\,\overrightarrow{A}^{T}
$$

7.2 class 39

定义 7.2.1. 客观矢量率 Objective Vector time rate

$$
\vec{u}^{\star} = \overrightarrow{A}\vec{u}
$$

$$
\dot{\vec{u}}^{\star} = \dot{\overrightarrow{A}}\vec{u} + \overrightarrow{A}\dot{\vec{u}}
$$

$$
(\underbrace{\dot{\vec{u}} - \overrightarrow{\omega}\cdot\vec{u}}_{\text{共旋率}\hat{\vec{u}}})^{\star} = \overrightarrow{A}(\dot{\vec{u}} - \overrightarrow{\omega}\cdot\vec{u})
$$

定义 7.2.2. 客观张量率 (尧曼客观率)

任意满足客观性要求的二阶张量 $\overrightarrow{S}$

$$
\overrightarrow{S}^{\star} = \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{S}\,\overrightarrow{A}^{T}
$$

$$
\dot{\overrightarrow{S}}^{\star} = \dot{\overrightarrow{A}}\,\overrightarrow{S}\,\overrightarrow{A}^{T} + \overrightarrow{A}\,\dot{\overrightarrow{S}}\,\overrightarrow{A}^{T} + \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{S}\,\dot{\overrightarrow{A}}^{T}
$$

$$
(\dot{\overrightarrow{S}} - \overrightarrow{\omega}\,\overrightarrow{S} + \overrightarrow{S}\,\overrightarrow{\omega})^{\star} = \overrightarrow{A}(\dot{\overrightarrow{S}} - \overrightarrow{\omega}\,\overrightarrow{S} + \overrightarrow{S}\,\overrightarrow{\omega})\overrightarrow{A}^{T}
$$

定义 7.2.3. 流体动力学客观性 (Objectivity of fluid dynamics)

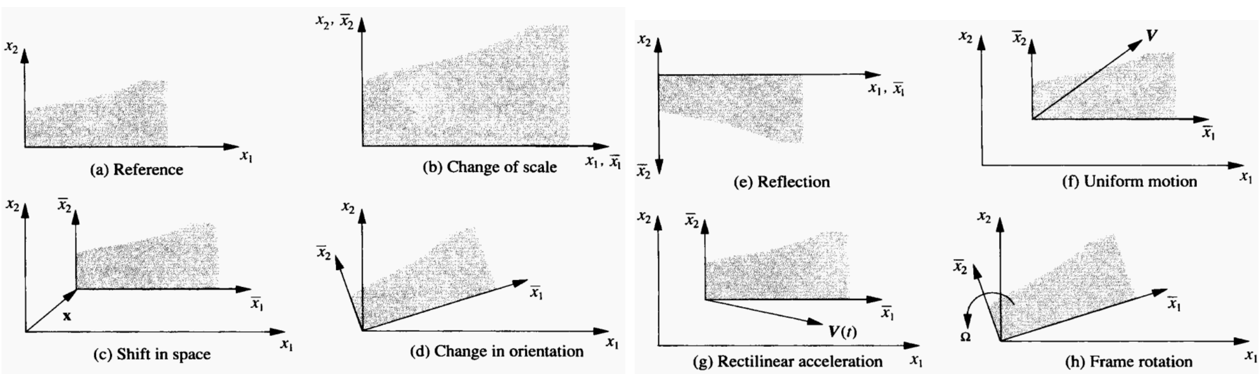


Fig. 2.2. Sketches of experiments used to study the transformation properties of the Navier–Stokes equations: (a) reference experiment (referred to the E coordinate system); (b)–(h) other experiments (referred to the $\bar{E}$ coordinate system).

摘自 Pope S B.Turbulent Flows

本节的以下内容摘自教材

定义 7.2.4. 不可压缩介质的泊松方程

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial \hat{x}_j} \tag{39-7}$$

泊松方程（39-7）的满足是一个无源速度场保持其无源性的充分必要条件。

命题 7.2.1. 基本方程组的无量纲化

特征长度 $\mathcal{L}$ 和特征速度 $\mathcal{U}$ 的引入可用于定义无量纲自变量：

$$\hat{x} = \frac{x}{\mathcal{L}}, \quad \hat{t} = \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{L}} \tag{39-8}$$

和无量纲因变量：

$$\hat{U}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{U(x,t)}{\mathcal{U}}, \quad \hat{p}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{p(x,t)}{\rho \mathcal{U}^2} \tag{39-9}$$

首先讨论不可压缩条件 $\nabla \cdot U = 0$ 的无量纲化：

$$(\nabla^* \mathcal{L}^{-1}) \cdot (\hat{U}\mathcal{U}) = 0 \tag{39-10}$$

上式可进一步简化为如下无量纲形式：

$$\nabla^* \cdot \hat{U} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial \hat{U}_k}{\partial \hat{x}_k} = 0 \tag{39-11}$$

然后给出 N-S 方程的无量纲过程：

$$\frac{\partial(\hat{U}\mathcal{U})}{\partial(\hat{t}\mathcal{L}/\mathcal{U})} + \left[(\hat{U}\mathcal{U}) \cdot \frac{\nabla^*}{\mathcal{L}}\right](\hat{U}\mathcal{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\nabla^*}{\mathcal{L}}(\hat{p}\rho\mathcal{U}^2) + \nu \left(\frac{\nabla^*}{\mathcal{L}}\right)^2 (\hat{U}\mathcal{U}) \tag{39-12}$$

整理上式，得到无量纲形式的 N-S 方程：

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \left(\hat{U} \cdot \nabla^*\right) \hat{U} = -\nabla^* \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \hat{U} \tag{39-13}$$

或表示为如下分量形式：

$$\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial t} + \hat{U}_j \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{x}_j} = -\frac{\partial p}{\partial \hat{x}_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{U}_i}{\partial \hat{x}_j \hat{x}_j} \tag{39-14}$$

最后给出压强所需要满足的泊松方程 (39-7) 的无量纲形式：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \hat{x}_i \partial \hat{x}_i} = -\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{x}_j} \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial \hat{x}_i} \tag{39-15}$$

进行总结，无量纲方程组（连续性方程 + N-S 方程 + 泊松方程）为

$$\begin{cases}\frac{\partial \hat{U}_k}{\partial x_k}=0\\ \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial t}+\hat{U}_j\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{x_j}}=-\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x_i}}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \hat{U}_i}{\partial \hat{x_j}\hat{x_j}}\\ \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{x_i}\partial \hat{x_i}}=-\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{x_j}}\frac{\partial \hat{U}_j}{\partial \hat{x_i}}\end{cases} \tag{39-16}$$

在上述无量纲方程组中，雷诺数

$$Re=\frac{\mathcal{U}\mathcal{L}}{\nu} \tag{39-17}$$

是唯一的无量纲数。

命题 7.2.2. 连续性方程、N-S 方程、泊松方程满足时间和空间平移的不变性。

$$\begin{cases}\hat{x}=\frac{x-X}{\mathcal{L}}\\ \hat{t}=\frac{(t-T)\mathcal{U}}{\mathcal{L}}\end{cases} \tag{39-19}$$

由于上式中 X 和 T 均为定值，求导后变为零，所以连续性方程（39-16）式中第一式、N-S 方程（39-16）式中第二式、泊松方程（39-16）式中第三式在经过（39-19）式的空间和时间变换后，均保持形式的不变性，因此满足时空不变性。

命题 7.2.3. 连续性方程、泊松方程满足时间反演不变性，N-S 方程不满足时间反演不变性

时间反演意味着时间和速度变号：

$$\begin{cases}\hat{t}=-\frac{t\mathcal{U}}{\mathcal{L}}\\ \hat{U}(\hat{x},\hat{t})=-\frac{U(x,t)}{\mathcal{U}}\end{cases} \tag{39-20}$$

方程 (39-16) 式中第一式 $\frac{\partial \hat{U}_k}{\partial \hat{x}_k}=0$，由于右端为零，则满足时间反演不变性；

方程 (39-16) 式中第三式 $\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{x}_i\partial \hat{x}_i}=-\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{x}_j}\frac{\partial \hat{U}_j}{\partial \hat{x}_i}$，由于右端有两个 $\hat{U}$，满足时间反演不变性。

再让我们来看 N-S 方程 (39-16) 式中第二式，

$$\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{t}}+\hat{U}_j\frac{\partial \hat{U}_i}{\partial \hat{x}_j}=-\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_i}+\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \hat{U}_i}{\partial \hat{x}_j\partial \hat{x}_i},$$

左端第一项分子和分母均变号，满足不变性；左端第二项，由于有两个 $\hat{U}$ 亦满足时间反演不变性；右端第一项满足反演不变性；关键是黏性项，也就是动量扩散项，由于只有一个 $\hat{U}$，该项不满足时间反演不变性。因此，方程 N-S 不满足时间反演不变性。

命题 7.2.4. 坐标轴的旋转和反射不变性

设参考坐标系的单位基矢量为 e_i，而旋转或反射坐标系的单位基矢量为 $\bar{e}_j$，两者之间的点积为方向余弦：$a_{ij}=e_i\cdot\bar{e}_j$，从而无量纲化的坐标和速度为

$$\begin{cases}\hat{x}_i=\frac{\bar{x}_i}{\mathcal{L}}=\frac{\bar{e}_i\cdot(x_je_j)}{\mathcal{L}}=\frac{a_{ji}x_j}{\mathcal{L}}\\ \hat{U}_i=\frac{\bar{U}_i}{\mathcal{U}}=\frac{\bar{e}_i\cdot(U_je_j)}{\mathcal{U}}=\frac{a_{ji}U_j}{\mathcal{U}}\end{cases}\tag{39-21}$$

从 N-S 方程可以用笛卡儿张量符号表示的事实可以直接得出，变换后的方程与参照系中的方程（39-16）是相同的。因此，N-S 方程对于坐标轴的旋转和反射是不变的。

命题 7.2.5. 伽利略不变性

在四维仿射空间 $\mathbb{A}^4$ 中，进行如下伽利略变换：

$$\begin{cases}\bar{x}=x-Vt\\ \bar{t}=t\\ \bar{U}(\bar{x},\bar{t})=U(x,t)-V\end{cases}\tag{39-22}$$

则有如下关系式：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{U}_i}{\partial\bar{x}_j}=\dfrac{\partial(U_i-V_i)}{\partial(x_j-V_jt)}=\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}\\ \dfrac{\partial\bar{U}_i}{\partial\bar{t}}=\dfrac{\partial U_i}{\partial t}+\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial x_j}{\partial t}=\dfrac{\partial U_i}{\partial t}+\dfrac{\partial(\bar{x}_j+V_jt)}{\partial t}\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial U_i}{\partial t}+V_j\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}\\ \dfrac{D\bar{U}_i}{D\bar{t}}=\dfrac{\partial\bar{U}_i}{\partial\bar{t}}+\bar{U}_j\dfrac{\partial\bar{U}_i}{\partial\bar{x}_j}=\dfrac{DU_i}{Dt}\end{cases}\tag{39-23}$$

(39-23) 式中第一式和 (39-23) 式中第三式表明速度梯度和流体加速度是伽利略不变量；而 (39-22) 式中第三式和 (39-23) 式中第二式两式则表明速度和它的时间偏导数则不具有伽利略不变性。

结果表明，转换后的 N-S 方程与 (39-16) 式是一致的。因而具有伽利略不变性。本小节的重要结论是：就像经典力学中描述的所有现象一样，流体流动在所有惯性系中的行为是相同的。

命题 7.2.6. 扩展伽利略不变性

N-S 方程的一个特殊性质是，它们在标架的直线加速度下是不变的。让我们来考虑如图 39.1(g) 所示的在变速 $V(t)$ 平台上所进行的第二次实验，但是没有坐标系的旋转，因此坐标方向（单位基矢量 e_i 和 $\overline{e_j}$）仍然是平行的。

由 (39-22) 式所定义的变换后的变量 $\bar{x}$,$\bar{t}$ 和 $\bar{U}$, 转换后的 N-S 方程为

$$\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial\bar{t}}+\bar{U}_j\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial\bar{x}_j}=\nu\frac{\partial^2\bar{U}_i}{\partial\bar{x}_j\partial\bar{x}_j}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\bar{x}_i}-A_i\tag{39-24}$$

式中，方程右端的附加项为标架的加速度 $A = \frac{dV}{dt}$，方程右端的最后两项可以改写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \bar{x}_i} + A_i = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}(p + \rho \bar{x}_j A_j) \tag{39-25}$$

上述表明标架加速度可以被修正后的压力吸收。在无量纲化的 N-S 方程 (39-16) 式中第二式中只需引入如下无量纲量：

$$\hat{U} = \frac{\bar{U}}{\mathcal{U}}, \quad \hat{p} = \frac{p + \rho \bar{x} \cdot A}{\rho \mathcal{U}^2} \tag{39-26}$$

此时无量纲的 N-S 方程在形式上不变，则 $\bar{U}$ 和 $\hat{p}$ 在具有任意直线加速度的坐标系中与惯性坐标系中相应量相同，该性质被称为扩展的伽利略不变性。

命题 7.2.7. 物质标架无差异性

最后，让我们考虑如图 39.1(h) 所示的在非惯性旋转坐标系上所进行的第二次实验。在 E 坐标系，依赖于时间的基矢量 $\vec{e}_i(t)$ 满足下列关系：

$$\frac{d\bar{e}_i}{dt} = \tilde{\Omega}_{ij}\bar{e}_j \tag{39-27}$$

式中，$\tilde{\Omega}_{ij}(t) = -\tilde{\Omega}_{ji}(t)$ 为反对称的旋转率张量，此时，方向余弦 $a_{ij} = e_i \cdot \vec{e}_j$ 具有时间相关性。转换后的 N-S 方程 (39-24) 中的加速度将由离心加速度、科里奥利加速度、角加速度三部分组成：

$$A_i = \underbrace{\bar{x}_j \tilde{\Omega}_{jk}\tilde{\Omega}_{ki}}_{\text{离心加速度}} + \underbrace{2\bar{U}_j \tilde{\Omega}_{ij}}_{\text{科氏加速度}} + \underbrace{\bar{x}_j \frac{d\tilde{\Omega}_{ji}}{dt}}_{\text{旋转加速度}} \tag{39-28}$$

式中的三个加速度分别代表的虚拟力为：离心力、科里奥利力和角加速度力。离心力可以被吸收成一个修正的压力，但剩下的两个力却不能。在气象学和叶轮机械，科里奥利力可以对旋转标架下的流动的有着重要的影响。

在旋转坐标系和非旋转坐标系中相同的量被称为具有物质标架无差异性 (material-frame indifference)。显然，N-S 方程不具备这种性质。

7.3 class 40

表 7.1: 理性力学中的奥尔德罗伊德公理和诺尔三公理一览表

公理名称	公理内容	提出人和年代
奥尔德罗伊德本构公理	流变状态方程必须具有正确的不变性性质。 The right invariance properties which must be satisfied by a rheological equation of state.	奥尔德罗伊德, 1950
应力的决定性原理	粒子 X 在时刻 t 的应力 S(t) 是由过去任意小的 X 邻域运动的历史决定。 The stress S(t) at a particle X and at time t is determined by the past history of the motion of an arbitrarily small neighborhood of X.	诺尔, 1958
局部作用原理	在确定给定粒子 X 处的应力时，可以忽略 X 任意邻域外的运动。 In determining the stress at a given particle X, the motion outside an arbitrary neighborhood of X may be disregarded.	诺尔, 1958
客观性公理	如果一个过程 (运动—θ, 应力—S) 和一个本构方程相容，同样，与它等价的所有过程 (θ', S') 都必须与相同的本构方程相容。 If a process (θ, S) is compatible with a constitutive equation, then also all processes (θ', S') equivalent to it must be compatible with the same constitutive equation.	诺尔, 1958

沃尔特·诺尔（Walter Noll, 1925—2017）继而于 1958 年提出的“确定性公理、局部作用公理和客观性公理”是构造本构理论的基础，诺尔而三公理迄今仍被理性力学或连续介质力学教材所广泛引用。其内容亦详见表 39.1。

美国工程科学学会的创始人（founder of the Society of Engineering Science）埃林根（Ahmed Cemal Eringen, 1921—2009）进一步扩充了诺尔的公理结构，使之成为工程科学学派的理论基石。作为现代理性力学核心内容的力学公理化体系的建立，奠定了现代连续介质力学体系的基础。埃林根的公理体系见表 39.2。

表 7.2: 埃林根的理性力学公理一览表

公理名称	公理内容
因果性公理	在物体的每一个热力学状态中，将物体的物质点的运动、温度、电荷看成是自明的可测效应。而将进入到克劳修斯-迪昂不等式中的其余的量看成是运动、温度、电荷等这个“原因”所产生的结果，这些量称为“响应函数”或者“本构依赖变量”。 The motions, temperatures and charges of the material points of a body are the cause of all physical phenomena. The remaining variables (other than those derivable from motion, temperature and charges) that enter the expressions of the Clausius-Duhem (C-D) inequality are the response functions (or constitutive-dependent variables).
确定性公理	物体中的物质点在时刻 t 的热力学本构泛函以及应力状态由物体中所有物质点的运动和温度历史所决定。 The constitutive-dependent variables at a material point X, at time t, are functionals of the independent variables over the entire material points X' of the body, at all past times t' up to and including the present time t.
等存在公理	一开始，所有的本构泛函都应该用同样的独立本构变量来表示。直到推出相反的结果为止。 At the outset, all constitutive-dependent variables must be expressed as functionals of the same list of independent constitutive variables until the contrary is deduced.
客观性公理	本构方程对于空间参照系的刚体运动必须是形式不变的。 Constitutive equations must be form-invariant with respect to rigid motions of the spatial frame of reference.
物质不变性公理	本构方程必须具有关于物质点对称群的形式不变量。 Constitutive equations must be form-invariant with respect to the symmetry group of the material points.

续埃林根的理性力学公理一览表

公理名称	公理内容
邻域公理	物体中物质点的应力状态与离开该物质点有限距离的其他物质点的运动无关。 The values of the independent constitutive variables at distant material points X' from the reference point X do not appreciably affect the value of the constitutive-dependent variables at X.
记忆公理	本构变量在远离现在的过去时刻的值，不明显地影响本构函数的值。 The values of the constitutive-independent variables at distants past the present do not appreciably affect the values of the constitutive functionals at the present time.
相容性公理	所有本构方程必须与守恒定律和熵不等式相一致。 All constitutive equations must be consistent with the balance laws and the entropy inequality.

定义 7.3.1. 广义胡克定律

由于线弹性这个前提，我们可用叠加原理得到如下三个正应变-正应力关系式：

$$\begin{cases}\varepsilon_{xx}=\dfrac{\sigma_{xx}}{E}-\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})=\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{xx}-\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\\ \varepsilon_{yy}=\dfrac{\sigma_{yy}}{E}-\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{zz}+\sigma_{xx})=\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{yy}-\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\\ \varepsilon_{zz}=\dfrac{\sigma_{zz}}{E}-\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{zz}-\dfrac{\nu}{E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\end{cases}\tag{40-1}$$

三个切应力和切应变的关系式为

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2G}\sigma_{xy},\quad \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2G}\sigma_{yz},\quad \varepsilon_{zx}=\frac{1}{2G}\sigma_{zx}\tag{40-2}$$

注意到材料力学材料常数的常用关系式：

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}\tag{40-3}$$

故 (40-1) 式和 (40-2) 式可统一地表示为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\quad 或\quad \overleftrightarrow{\varepsilon}=\frac{1+\nu}{E}\overleftrightarrow{\sigma}-\frac{\nu}{E}(\operatorname{tr}\sigma)\overleftrightarrow{I}\tag{40-5}$$

上述就是用张量表示的应变和应力的线弹性本构关系。

对（40-5）式求迹，有

$$\varepsilon_{kk}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{kk}-3\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}=\frac{1-2\nu}{E}\sigma_{kk}\quad \text{或}\quad \operatorname{tr}\overleftrightarrow{\varepsilon}=\frac{1+\nu}{E}\operatorname{tr}\overleftrightarrow{\sigma}-3\frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\overleftrightarrow{\sigma}=\frac{1-2\nu}{E}\operatorname{tr}\overleftrightarrow{\sigma} \tag{40-6}$$

静水压强 σ_m 定义为 $\sigma_m=\sigma_{kk}/3$，由静水压强 σ_m 和体积应变 ε_{kk} 可定义体模量 (bulk modulus) K，利用 (40-6) 式，有

$$K=\frac{\sigma_m}{\varepsilon_{kk}}=\frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{40-7}$$

由 (40-3) 和 (40-7) 两式，有

$$\frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}=\frac{3(1-2\nu)}{9E}-\frac{2(1+\nu)}{6E}=-\frac{\nu}{E} \tag{40-8}$$

对比 (40-5) 式、(40-8) 式和 (40-3) 式，线弹性用应力表示的广义胡克定律还十分普遍地表示为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2G}\sigma_{ij}+\left(\frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}\right)\sigma_{kk}\delta_{ij}\quad \text{或}\quad \overleftrightarrow{\varepsilon}=\frac{1}{2G}\overleftrightarrow{\sigma}+\left(\frac{1}{9K}-\frac{1}{6G}\right)(\operatorname{tr}\overleftrightarrow{\sigma})\overleftrightarrow{I} \tag{40-9}$$

引理 7.3.1. 材料力学材料常数的常用关系式的简单证明

让我们首先讨论应变能密度的表达式，所谓“应变能密度”是指单位体积的应变能。由于应力和应变之间的线弹性关系，通过应力-应变关系中的三角形，所以应变能密度为

$$w=\frac{1}{2}(\sigma_{xx}\epsilon_{xx}+\sigma_{yy}\epsilon_{yy}+\sigma_{zz}\epsilon_{zz}+2\sigma_{xy}\epsilon_{xy}+2\sigma_{yz}\epsilon_{yz}+2\sigma_{zx}\epsilon_{zx}) \tag{40-28}$$

式中，右端后三个式子中的 2 是由于剪应力互等的原因，即，$2\sigma_{xy}\epsilon_{xy}$ 是 $\sigma_{xy}\epsilon_{xy}$ 和 $\sigma_{yz}\epsilon_{yz}$ 两项之和。如果用工程应变，则无此 2 的倍数。将广义胡克定律 (40-1) 和 (40-2) 两式代入 (40-28) 式，得到

$$w=\frac{1}{2E}[(\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2+\sigma_{zz}^2)-2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy}+\sigma_{yy}\sigma_{zz}+\sigma_{zz}\sigma_{xx})]+\frac{1}{2G}(\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{zx}^2) \tag{40-29}$$

当应用三个主应力 (principal stress) 时，(40-29) 式简化为

$$w=\frac{1}{2E}[(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)] \tag{40-30}$$

式中，σ_1,σ_2 和 σ_3 分别为第一、第二和第三主应力，满足 $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3$。

纯剪切 (pure shear) 时，剪切应变能密度可简单地表示为

$$w=\frac{\tau\gamma}{2} \tag{40-31}$$

由剪切胡克定律 $\tau = G\gamma$，上式可写为

$$w = \frac{\tau^2}{2G} \tag{40-32}$$

由应力的莫尔圆（Mohr's circle）知，纯剪切的两个主应力（principal stresses）分别为

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau \tag{40-33}$$

平面应力状态下的应变能密度为

$$w = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2\right) \tag{40-34}$$

将纯剪切时的主应力（40-33）式代入式（40-34），得应变能密度为

$$w = \frac{\tau^2(1+\nu)}{E} \tag{40-35}$$

由（40-32）和（40-35）两式相等，则证得常用关系式（40-3）式：$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$。