

第一章 数值计算

1.1 绪论

定义 1.1.1. 若 A 非奇异, 称 $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ 为 A 的条件数。 $\text{cond}(A) \geq 1$, 当 A 为正交矩阵时 $\text{cond}(A) = 1$ 。

定理 1.1.1. 对于线性方程组 $Ax = b$

1. 设 $A(x + \delta x) = b + \delta b$, δx 收到 δb 的影响表示为

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

2. 设 $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$, δx 收到 $\delta A, \delta b$ 的影响表示为

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

证明:

$$\begin{aligned} (A + \delta A)(x + \delta x) &= b + \delta b \\ (A + \delta A)\delta x &= b + \delta b - \cancel{A + \delta A} = b + \delta A \cdot x \\ \delta x &= \underbrace{(A + \delta A)^{-1}}_{(I + \delta A A^{-1})^{-1}} (\delta b - \delta A \cdot x) \\ \|\delta x\| &= \|A^{-1}(I + \delta A A^{-1})^{-1}(\delta b - \delta A \cdot x)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|(I + \delta A A^{-1})^{-1}\| \|(\delta b - \delta A \cdot x)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - \|\delta A\| \|A^{-1}\|} \|(\underbrace{\delta b}_{\text{part } A} - \underbrace{\delta A \cdot x}_{\text{part } B})\| \\ \text{part } B &= \|A^{-1}\| \|A\| \frac{1}{1 - \|\delta A\| \|A^{-1}\|} \frac{\|x\| \|\delta A\|}{\|A\|} \\ \text{part } A &= \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - \|\delta A\| \|A^{-1}\|} \frac{\|\delta b\| \|A x\|}{\|B\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - \|\delta A\| \|A^{-1}\|} \frac{\|\delta b\| \|A\| \|x\|}{\|B\|} \\ \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) \end{aligned}$$

□

引理 1.1.2. 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 且 $\|A\| < 1$, 则

1. $I - A$ 非奇异
2. $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$
3. $\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$

证明:

1. 若 $I - A$ 奇异, 则 $\exists x \neq 0$, s.t. $(I - A)x = 0$, 即 1 为 A 的特征值, 矛盾
2. $\sum_{k=0}^{\infty} A^k \cdot (I - A) = A^0 = I$
3. $\|(I - A)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}$

□

注. 在数值分析中, 判断矩阵 A 是否病态 (即对微小扰动敏感) 通常不直接计算 A^{-1} (条件数), 而是依据以下经验准则:

1. 行列式很大或很小 (如某些行、列近似相关)

行列式 $\det(A)$ 的绝对值若远小于或远大于矩阵元素数量级的 n 次方, 可能预示病态。

解释: 行列式绝对值过小通常意味着矩阵的行或列向量近似线性相关, 导致其张成的“体积”很小, 矩阵接近奇异。

2. 元素间相差大数量级, 且无规则

若矩阵元素在数值上跨越多个数量级 (如 10^{-6} 与 10^3 共存), 且没有特定的分布模式 (如对角占优)。

解释: 这种巨大的尺度差异会在数值计算 (如消元法) 中放大舍入误差, 除非该矩阵具有特殊的、可补偿的结构。

3. 主元消去过程中出现小主元

在进行高斯消元时, 如果出现绝对值非常小的主元。

解释: 小主元意味着矩阵接近奇异, 在消元过程中需要用其去除其他大元素, 这会极大地放大原始数据中存在的微小误差。

4. 特征值相差大数量级

矩阵的特征值 λ_i 的绝对值分布范围极广, 即 $\max |\lambda_i| / \min |\lambda_i| \gg 1$ 。

解释: 对于对称矩阵, 这直接导致其条件数 $\kappa(A)$ 极大, 意味着矩阵在不同特征向量方向上的伸缩程度差异巨大, 从而对扰动非常敏感。

1.2 非线性方程求根

1.2.1 二分法 (对分法)

二分法两种终止条件:

1. 给定精度条件 $|f(x)| < \varepsilon$ 不适用情况: 当函数在远离根的区域存在平坦区间 (即导数近似为零) 时, 即使当前点 x 离真实根 r 还很远, 也可能满足 $|f(x)| < \varepsilon$, 导致算法提前

终止，返回一个错误解。

2. 区间长度条件 $b - a < \varepsilon$ 不适用情况：当函数在根 r 附近数值上呈现陡峭跳变（由于浮点舍入误差导致类似符号函数的行为）时，可能在迭代过程中因符号判断错误而将真根排除在区间之外。此时区间继续缩小至 $b - a < \varepsilon$ ，但区间内不含根，导致返回错误解。

二分法缺点：

1. 只能求单个根，只能计算实根。
2. 即使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有根，也未必有 $f(a)f(b) < 0$ 。

注. 常用 $\operatorname{sgn}(f(a)) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) > 0$ 代替 $f(a) \cdot f(x) > 0$ 的判断，避免 $f(a) \cdot f(x) > 0$ 数值溢出。

1.2.2 不动点迭代法

定理 1.2.1. 若 $\varphi(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上，如果 $\varphi(x)$ 满足

1. 当 $x \in [a, b]$ 时有 $a \leq \varphi(x) \leq b$ ；
2. $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，并且存在正数 $L < 1$ ，使对任意的 $x \in [a, b]$ ， $|\varphi'(x)| \leq L$ 。
1. 则在 $[a, b]$ 上存在唯一的不动点 x^* ，即满足 $x^* = \varphi(x^*)$ 的点。
2. 迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 对任意的初值 $x_0 \in [a, b]$ 均收敛于 $\varphi(x)$ 的不动点 x^* 。
3. 并有误差估计式 $|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$ 。

证明: (1) 存在性：令 $\psi(x) = x - \varphi(x)$ ，则有

$$\psi(a) = a - \varphi(a) \leq 0, \quad \psi(b) = b - \varphi(b) \geq 0.$$

由介值定理，存在 x^* , $a \leq x^* \leq b$ ，使得

$$\psi(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0 \quad \text{或} \quad x^* = \varphi(x^*).$$

唯一性 (反证法)：另一方面，若另有 x^+ 满足 $x^+ = \varphi(x^+)$ ，则由

$$|x^* - x^+| = |\varphi(x^*) - \varphi(x^+)| = |\varphi'(\xi)(x^* - x^+)| \leq L|x^* - x^+|, \quad \xi \in [a, b]$$

以及 $L < 1$ ，得到 $x^* = x^+$ 。

(2) 当 $x_0 \in [a, b]$ 时可用归纳法证明，迭代序列 $\{x_k\} \subset [a, b]$ ，由微分中值定理

$$x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)(x_k - x^*) \leq L(x_k - x^*)$$

$$|x_{k+1} - x^*| \leq L|x_k - x^*| = L|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| \leq L^2|x_{k-1} - x^*| \leq \dots \leq L^{k+1}|x_0 - x^*|$$

因为 $L < 1$ ，所以当 $k \rightarrow \infty$ 时， $L^{k+1} \rightarrow 0$ ， $x_{k+1} \rightarrow x^*$ ，迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 收敛。

(3) 误差估计：

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}| \leq \dots \leq L^k|x_1 - x_0|.$$

设 k 固定, 对于任意的正整数 p 有

$$\begin{aligned}|x_{k+p} - x_k| &\leq |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\&\leq (L^{k+p-1} + L^{k+p-2} + \cdots + L^k)|x_1 - x_0| = \frac{L^k(1-L^p)}{1-L}|x_1 - x_0|.\end{aligned}$$

由于 p 的任意性及

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_{k+p} = x^*,$$

故有 $x^* = \varphi(x^*)$,

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

□

构造收敛迭代格式的两个要素

1. 选取合适的等价形式 $x = \varphi(x)$, 使得 $\varphi(x)$ 满足上述定理的条件。
2. 选取合适的初始值 x_0 。必需取自 x^* 的充分小邻域, 这个邻域大小决定于函数 $f(x)$, 以及做出的等价形式 $x = \varphi(x)$ 。

1.2.3 Newton 迭代法

Newton 迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Newton 迭代对应 $f(x) = 0$ 的迭代方程是 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ 。

1. 若 α 是 $f(x)$ 的单根时, $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, 则有 $|\varphi'(\alpha)| = 0$, 只要初值 x_0 足够接近 α , 则迭代收敛且收敛阶为 2。
2. 若 α 是 $f(x)$ 的 p 重根时设 α 为 $f(x)$ 的 p 重根时, 记

$$\begin{aligned}f(x) &= (x - \alpha)^p h(x) \\ \varphi(x) &= x - \frac{(x - \alpha)^p h(x)}{p(x - \alpha)^{p-1} h(x) + (x - \alpha)^p h'(x)} = x - \frac{(x - \alpha)h(x)}{ph(x) + (x - \alpha)h'(x)} \\ \varphi'(x) &= \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right) + (x - \alpha)\frac{2h'(x)}{ph(x)} + (x - \alpha)^2\frac{h''(x)}{p^2h(x)}}{\left[1 + (x - \alpha)\frac{h'(x)}{ph(x)}\right]^2} \\ \varphi'(\alpha) &= 1 - \frac{1}{p}\end{aligned}$$

仍然有 $|\varphi'(\alpha)| < 1$, 当初始值在根 α 附近, 迭代也收敛, 这是一阶迭代方法。

若 α 为 $f(x)$ 的 p 重根时, 这时取下面迭代格式, 仍是二阶方法

(a)

$$x_{k+1} = x_k - p \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(b) 取 $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, 则迭代格式为

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots \\ &= x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{(f'(x_k))^2 - f(x_k)f''(x_k)} \end{aligned}$$

注. 如果 α 是 $f(x)$ 的 p 重根, 那么 α 是 $g(x)$ 的单根。因此, 对函数 $g(x)$ 进行 Newton 迭代, 能够恢复二阶收敛性。

1.2.4 弦截法

在 Newton 迭代格式中, 用差商代替导数, 并给定两个初值 x_0 和 x_1 , 得到弦截法迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

弦截法的收敛阶为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$, 介于线性收敛和二次收敛之间。

1.2.5 对于非线性方程组的 Newton 方法

对于非线性方程组:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Newton 迭代法的基本格式为: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [J_F(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$, 其中 $J_F(\mathbf{x})$ 是 Jacobi 矩阵:

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

为避免直接求逆矩阵, 实际计算采用解线性方程组的形式:

$$\begin{aligned} J_F(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

newton_system_solver.m 是我编写的 MATLAB 代码, 实现了用于求解非线性方程组的 Newton 迭代法:

代码 1.1: newton_system_solver.m

```

1     function [solution, iterations, errors] = newton_system(f, vars, x0,
2                 max_iter, tol)
3     % 使用 Newton 迭代法求解非线性方程组
4     %
5     % 输入:
6     %   f - 符号函数向量
7     %   vars - 符号变量向量

```

```
7      % x0 - 初始猜测
8      % max_iter - 最大迭代次数 (默认: 50)
9      % tol - 容差 (默认: 1e-12)
10     %
11     % 输出:
12     % solution - 数值解
13     % iterations - 实际迭代次数
14     % errors - 每次迭代的误差历史
15
16    if nargin < 4
17        max_iter = 50;
18    end
19    if nargin < 5
20        tol = 1e-12;
21    end
22
23    % 计算 Jacobian 矩阵
24    J = jacobian(f, vars);
25
26    % 转换为数值函数句柄
27    f_func = matlabFunction(f, 'Vars', {vars});
28    J_func = matlabFunction(J, 'Vars', {vars});
29
30    x = x0;
31    errors = zeros(max_iter, 1);
32
33    for iterations = 1:max_iter
34        % 计算当前函数值和 Jacobian
35        f_val = f_func(x);
36        J_val = J_func(x);
37
38        % 计算误差
39        current_error = norm(f_val);
40        errors(iterations) = current_error;
41
42        % 检查收敛
43        if current_error < tol
44            break;
45        end
46
47        % Newton 迭代
48        delta_x = -J_val \ f_val;
49        x = x + delta_x;
50
51        % 检查步长是否太小
52        if norm(delta_x) < 1e-14
53            disp('delta_x 小于 1e-14')
54            break;
```

```

55      end
56    end
57
58    solution = x;
59 end

```

我让 DeepSeek 帮我优化了代码，提高了运行效率，见 newton_system_solver.m。

1.3 求解线性方程组的迭代方法

考虑线性方程组 $Ax = b$ ，将矩阵 A 分解为 $A = N - P$ ，其中 N 可逆，得到等价形式：
 $x = N^{-1}Px + N^{-1}b$ 。令 $M = N^{-1}P$, $g = N^{-1}b$ ，则原方程等价于： $x = Mx + g$

构造迭代格式：

$$x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g, \quad k = 1, 2, \dots$$

设迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^* ，则对迭代式两边取极限得：

$$x^* = Mx^* + g,$$

即 x^* 是 $Ax = b$ 的解。

误差向量 $e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$ 满足：

$$\begin{aligned} e^{(k)} &= Me^{(k-1)} = M^2e^{(k-2)} = \dots = M^k e^{(0)}, \\ \|e^{(k)}\| &= \|M^k e^{(0)}\| \leq \|M^k\| \cdot \|e^{(0)}\|. \end{aligned}$$

若 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k\| = 0$ ，则 $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0$ ，迭代收敛。

由线性代数定理知：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = O \Leftrightarrow \rho(M) < 1,$$

其中 $\rho(M)$ 为 M 的谱半径。又因为 $\|M\| \geq \rho(M)$ ，所以若 $\|M\| < 1$ ，则 $\rho(M) < 1$ ，迭代收敛。

1.3.1 简单 Jacobi 迭代

设线性方程组 $Ax = b$ ，其中 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，且 $a_{ii} \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

将 A 分解为：

$$A = D + A - D$$

其中：

- $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 为对角矩阵，设 D 可逆。

则

$$Ax = (D + A - D)x = b \Leftrightarrow Dx = (D - A)x + b$$

Jacobi 迭代法的迭代格式为：

1. 矩阵形式为:

$$x^{(k)} = D^{-1}(D - A)x^{(k-1)} + D^{-1}b, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{记 } R = I - D^{-1}A, \quad g = D^{-1}b$$

$$x^{(k)} = Rx^{(k-1)} + g$$

$$\begin{aligned} \text{即 } & \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 0 & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \\ & r_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad r_{ii} = 0 \end{aligned}$$

2. 分量形式为:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

迭代收敛的充分必要条件是:

$$\rho(R) < 1$$

其中 $\rho(R)$ 是 Jacobi 迭代矩阵的谱半径。

定理 1.3.1. 若 M 严格对角占优，则 M 可逆。

证明: 设 M 严格行对角占优。若 M 不可逆，则存在非零向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 使 $Mx = 0$ 。取 $|x_i| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ ，则：

$$|m_{ii}x_i| = \left| \sum_{j \neq i} m_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \cdot |x_i| < |m_{ii}| \cdot |x_i|$$

矛盾。若 M 严格列对角占优，则 M^T 严格行对角占优。综上， M 可逆。 \square

定理 1.3.2. 若 A 严格对角占优，则 Jacobi 迭代收敛。

证明:

若 A 严格行对角占优：

$$\rho(I - D^{-1}A) \leq \|I - D^{-1}A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

若 A 严格列对角占优：

$$\rho(I - D^{-1}A) = \rho(I - AD^{-1}) \leq \|I - AD^{-1}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i \neq j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|} < 1$$

注.

$$\det(D) \det(\lambda I - I + D^{-1}A) \det(D^{-1}) = \det(\lambda I - I + AD^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \text{特征值一致} \Rightarrow \rho(I - D^{-1}A) = \rho(I - AD^{-1})$$

\square

1.3.2 Gauss-Seidel 迭代

设线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 且 $a_{ii} \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

将 A 分解为:

$$A = D + L + U$$

其中:

- $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 为对角矩阵
- L 为严格下三角部分 ($l_{ij} = a_{ij}$ for $i > j$, $l_{ij} = 0$ for $i \leq j$)
- U 为严格上三角部分 ($u_{ij} = a_{ij}$ for $i < j$, $u_{ij} = 0$ for $i \geq j$)

则

$$Ax = (D + L + U)x = b \Leftrightarrow (D + L)x = -Ux + b$$

Gauss-Seidel 迭代法的迭代格式为:

1. 矩阵形式为:

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= -(D + L)^{-1}Ux^{(k-1)} + (D + L)^{-1}b, \quad k = 1, 2, \dots \\ \text{记 } G &= -(D + L)^{-1}U, \quad g = (D + L)^{-1}b \\ x^{(k)} &= Gx^{(k-1)} + g \end{aligned}$$

2. 分量形式为:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

迭代收敛的充分必要条件是:

$$\rho(G) < 1$$

其中 $\rho(G)$ 是 Gauss-Seidel 迭代矩阵的谱半径。

定理 1.3.3. 若 A 严格对角占优, 则 Gauss-Seidel 迭代收敛。

证明: 设 A 严格行对角占优。记误差向量 $e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$, 其中 x^* 为精确解。

由 Gauss-Seidel 迭代格式:

$$e^{(k)} = -(D + L)^{-1}Ue^{(k-1)}$$

设 $\|e^{(k)}\|_\infty = |e_i^{(k)}|$, 则:

$$\begin{aligned} |e_i^{(k)}| &= \left| -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}e_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}e_j^{(k-1)} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot |e_j^{(k)}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \cdot |e_j^{(k-1)}| \right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \|e^{(k)}\|_\infty + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \cdot \|e^{(k-1)}\|_\infty \right)$$

整理得：

$$\|e^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|} \|e^{(k-1)}\|_\infty$$

由于 A 严格对角占优，有：

$$\frac{\sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|} < 1$$

故 $\|e^{(k)}\|_\infty \rightarrow 0$, Gauss-Seidel 迭代收敛。 \square

定理 1.3.4. 若 A 对称正定，则 Gauss-Seidel 迭代收敛。

证明：由于 A 对称正定， D 正定， L 和 U 满足 $U = L^T$ 。

设 λ 为 G 的特征值， x 为对应特征向量，则：

$$Gx = \lambda x \Rightarrow -(D + L)^{-1}Ux = \lambda x \Rightarrow -Ux = \lambda(D + L)x$$

考虑二次型：

$$\begin{aligned} x^H Ax &= x^H(D + L + U)x = x^H(D + L - \lambda(D + L))x \\ &= (1 - \lambda)x^H(D + L)x \end{aligned}$$

由于 A 正定， $x^H Ax > 0$ ，且 $D + L$ 正定，故 $|\lambda| < 1$ ，即 $\rho(G) < 1$ 。 \square