悬臂梁受集中载荷的弹性曲线

无名氏马

2025 年 3 月 26 日

1. 描述

   考虑一端固定（$x=0$）的悬臂梁，自由端（$x=L$）受集中力 F，边界条件为 $y(0)=0$ 和 $y'(0)=0$。在不简化曲率半径的情况下，推导其挠度 $y(x)$ 的解析解，并验证在该问题下几种数值计算方法的精度。

2. 建立微分方程

   悬臂梁的弯矩分布为 $M(x)=-F(L-x)$，代入精确曲率公式：

   $$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{F(L-x)}{EI}$$

   令 $p=y'$，则方程变为：

   $$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}=\frac{F}{EI}(L-x)dx$$

3. 第一次积分

   对两边积分，应用边界条件 $p(0)=0$：

   $$\int_0^{p(x)}\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}}=\frac{F}{EI}\int_0^x(L-s)ds$$

   左侧积分结果为：

   $$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{F}{EI}\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right)\triangleq u(x)$$

   解得：

   $$p=\frac{u(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}},\quad u(x)=k\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right),\quad k=\frac{F}{EI}$$

4. 第二次积分与椭圆积分引入

   挠度表达式为：

   $$y(x)=\int_0^x\frac{u(s)}{\sqrt{1-u(s)^2}}ds$$

   作变量替换：

   $$u(s)=\sin\theta\implies\theta(s)=\arcsin(u(s)),\quad d\theta=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

代入后积分变为：

$$y(x)=\int_{\theta(0)}^{\theta(x)}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\frac{ds}{d\theta}d\theta$$

由 $u(s)=\sin\theta$ 和 $du=k(L-s)ds$，得：

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{1}{k(L-s)\cos\theta}$$

整理后积分表达式为：

$$y(x)=\frac{1}{k}\int_0^{\theta(x)}\frac{\sin\theta}{L-s(\theta)}d\theta$$

5. 转换为标准椭圆积分
   定义无量纲参数：$m=\dfrac{2FL}{EI}$，积分最终化为：

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^{\theta(x)}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-m\sin\theta}}d\theta$$

   此积分可分解为第一类和第二类椭圆积分：

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{m}}\left[F(\theta(x),m)-E(\theta(x),m)\right],$$

   其中：

$$\theta(x)=\arcsin\left(\frac{mL}{2}\left(2\frac{x}{L}-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)\right)$$

6. 应用边界条件
   - 固定端条件 $y(0)=0$：积分下限 $\theta(0)=0$，自然满足。
   - 自由端条件 $y'(L)=0$：需验证 $p(L)=0$，但由于自由端 $M(L)=0$，方程自动满足。
7. 椭圆积分的参数与物理意义
   - 模数 m：反映载荷大小与梁刚度的比值，$m=\dfrac{F}{2EI/L^2}$。当 $m<1$ 时解为实数，对应小变形；$m\to 1$ 时趋于奇异，预示失稳。
   - 幅角 $\theta(x)$：由 $u(x)=\sin\theta(x)$ 定义，几何上表示曲率引起的转角。
8. 解析解的最终形式

$$y(x)=\frac{L}{\sqrt{2k}}\left[F\left(\theta(x),m\right)-E\left(\theta(x),m\right)\right],$$

   其中：

$$\theta(x)=\arcsin\left(k\left(2\frac{x}{L}-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)\right),\quad k=\frac{FL^2}{2EI}$$

注. 小变形极限：当 $k\to 0$（即 $F\to 0$），椭圆积分退化为多项式，恢复经典解 $y(x)\approx\dfrac{Fx^2(3L-x)}{6EI}$。