回帰分析

モデルの評価

村田 昇

講義の内容

- 第 1 回 : 回帰モデルの考え方と推定
- **第 2 回 : モデルの評価**
- 第 3 回 : モデルによる予測と発展的なモデル

回帰分析の復習

線形回帰モデル

- **目的変数** を **説明変数** で説明する関係式を構成
  - 説明変数 : $x_1, \ldots, x_p$ (p 次元)
  - 目的変数 : y (1 次元)
- **回帰係数** $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ を用いた一次式

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p$$

- **誤差項** を含む確率モデルで観測データを表現

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

簡潔な表現のための行列

- デザイン行列 (説明変数)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

簡潔な表現のためのベクトル

- ベクトル (目的変数・誤差・回帰係数)

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

問題の記述

- 確率モデル

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \text{確率分布}$$

- 回帰式の推定 : **残差平方和** の最小化

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^{\top}(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})$$

解の表現

- 解の条件 : **正規方程式**

$$X^{\top}X\boldsymbol{\beta} = X^{\top}\boldsymbol{y}$$

- 解の一意性 : **Gram 行列** $X^{\top}X$ が正則

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^{\top}X)^{-1}X^{\top}\boldsymbol{y}$$

最小二乗推定量の性質

- **あてはめ値** $\hat{\boldsymbol{y}} = X\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は X の列ベクトルの線形結合
- **残差** $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}$ はあてはめ値 $\hat{\boldsymbol{y}}$ と直交

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{\top}\hat{\boldsymbol{y}} = 0$$

- 回帰式は説明変数と目的変数の **標本平均** を通過

$$\bar{y} = (1, \bar{\boldsymbol{x}}^{\top})\hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad \bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

寄与率

- **決定係数** (R-squared)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\epsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

- **自由度調整済み決定係数** (adjusted R-squared)

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^{n}\hat{\epsilon}_i^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

  - 不偏分散で補正

解析の事例

実データによる例

- 気象庁より取得した東京の気候データ (再掲)
  - 気象庁 https://www.data.jma.go.jp/gmd/risk/obsdl/index.php
  - データ https://noboru-murata.github.io/multivariate-analysis/data/tokyo_weather.csv

東京の 8 月の気候の分析

- データの一部

Table 1: 東京の 8 月の気候

日付	気温	降雨	日射	降雪	風向	風速	気圧	湿度	雲量
2022-08-01	30.6	0	24.53	0	SSE	2.8	1010.1	72	8.8
2022-08-02	31.6	0	24.78	0	SSE	2.5	1008.8	71	9.8
2022-08-03	31.5	0	21.24	0	SSE	2.3	1005.1	75	7.3
2022-08-04	24.6	18	3.46	0	NE	2.7	1006	89	10
2022-08-05	23.8	0	7.65	0	NE	2.9	1006.1	83	9.8
2022-08-06	25.2	0	17.06	0	SSE	2.4	1008.1	73	10
2022-08-07	27.6	0	14.45	0	SSE	2.2	1009.3	80	8.3
2022-08-08	29.8	0	22.52	0	S	4.5	1008.5	75	4.8
2022-08-09	30.9	0	25.5	0	S	5.5	1006.9	69	6.8
2022-08-10	30.5	0	25.99	0	S	5.3	1007.2	70	6
2022-08-11	29.5	0	22.9	0	S	5.4	1007.5	75	6
2022-08-12	28.3	2	15.36	0	S	5.8	1007.5	81	9.8
2022-08-13	25.5	47.5	4.53	0	S	4.8	1005.6	94	10
2022-08-14	28.2	0	16.28	0	SSE	2.6	1003	84	8.8
2022-08-15	29.4	0	18.65	0	S	2.5	1003.4	78	8.8
2022-08-16	31	0	20.5	0	SSW	4.8	1000.6	70	8.3
2022-08-17	27.3	5	8.87	0	NE	2.5	1005.8	77	10
2022-08-18	26.8	13	8.74	0	S	2.8	1001.7	81	6
2022-08-19	27.5	0	23.52	0	SSE	3.4	1001.7	62	3
2022-08-20	26.4	1.5	13.5	0	NW	1.8	1000.6	82	9.8
2022-08-21	26	1	8.96	0	NE	2.1	1002.3	87	10
2022-08-22	26.2	0	9.05	0	NNE	2.5	1005.5	82	10
2022-08-23	28.7	0	17.94	0	S	3.2	1003.2	83	8.3
2022-08-24	27.8	2	12.86	0	NE	2.9	1003.2	79	10
2022-08-25	25.7	0	9.83	0	SE	2	1004.1	77	10
2022-08-26	27	3.5	10.05	0	SSE	2.1	1002.5	89	10
2022-08-27	29	0	19.87	0	SSE	3.3	1002.7	80	5.5
2022-08-28	23.7	5	4.58	0	NE	3	1009.2	87	9.8
2022-08-29	23.3	0.5	15.45	0	NE	2.8	1016.1	69	8
2022-08-30	22.8	5	10.12	0	NNE	1.9	1012.5	88	10
2022-08-31	27.1	1	17.46	0	S	3.2	1007.6	85	8.8

- 気温を説明する 5 種類の線形回帰モデルを検討
  - モデル 1 : 気温 = F(気圧)
  - モデル 2 : 気温 = F(日射)
  - モデル 3 : 気温 = F(気圧, 日射)
  - モデル 4 : 気温 = F(気圧, 日射, 湿度)
  - モデル 5 : 気温 = F(気圧, 日射, 雲量)

分析の視覚化

- 関連するデータの散布図

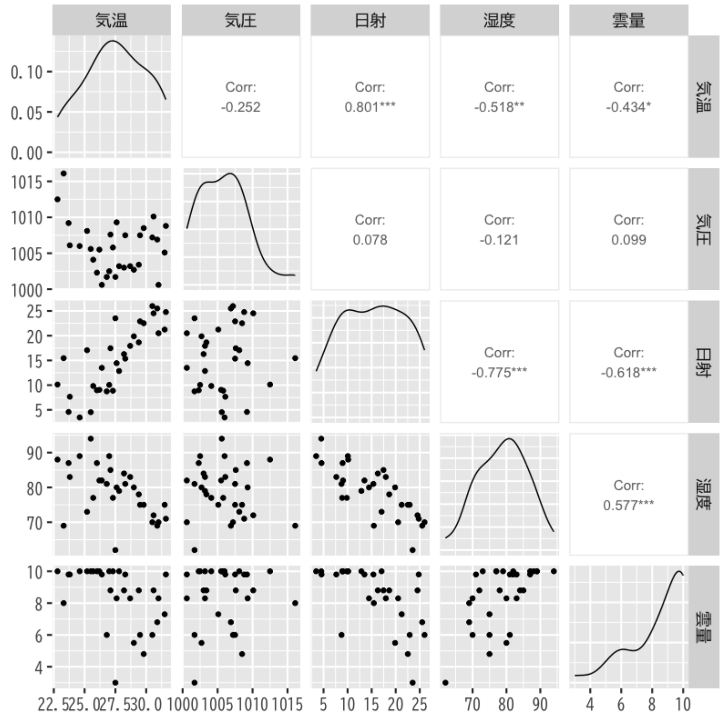

Figure 1: 散布図

- モデル 1 の推定結果

- モデル 2 の推定結果

- モデル 3 の推定結果

- 観測値とあてはめ値の比較

モデルの比較

- 決定係数 (R^2, Adjusted R^2)

あてはめ値の性質

あてはめ値

- さまざまな表現

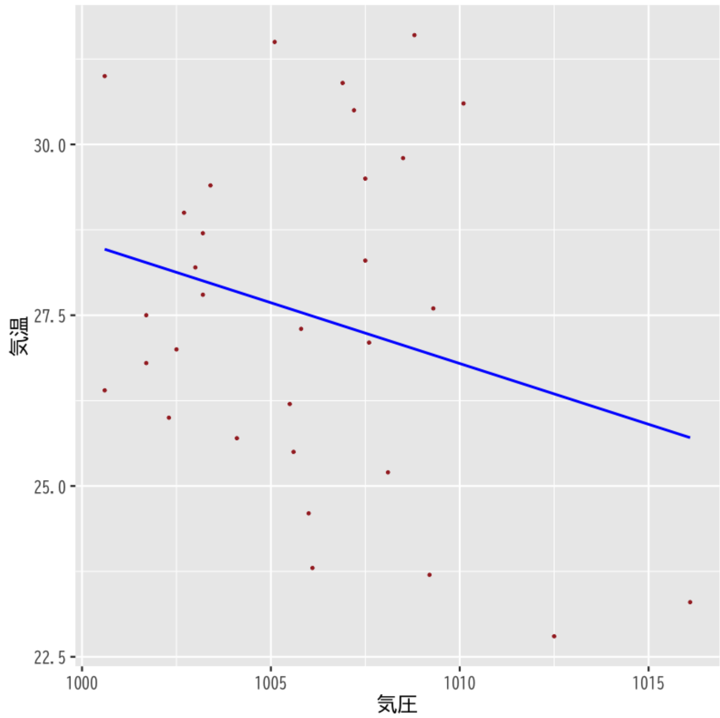

Figure 2: モデル 1

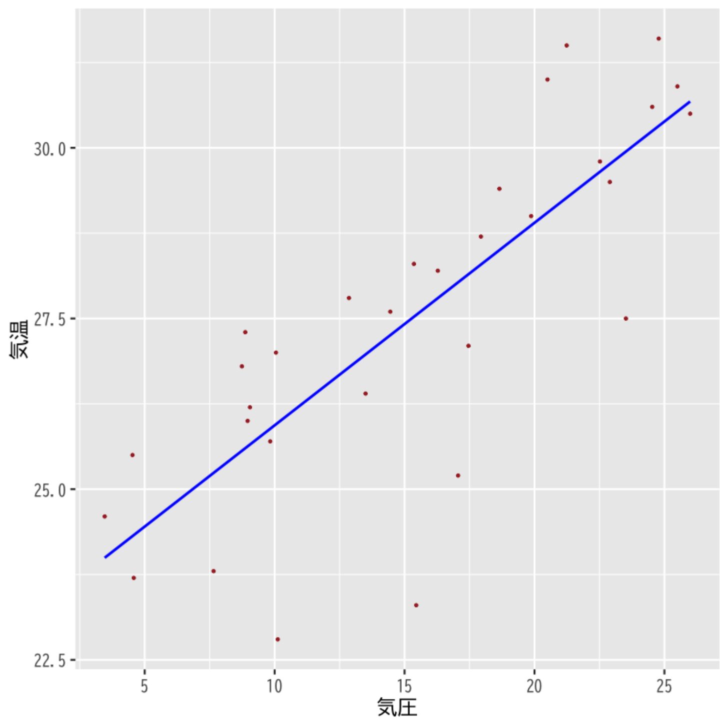

Figure 3: モデル 2

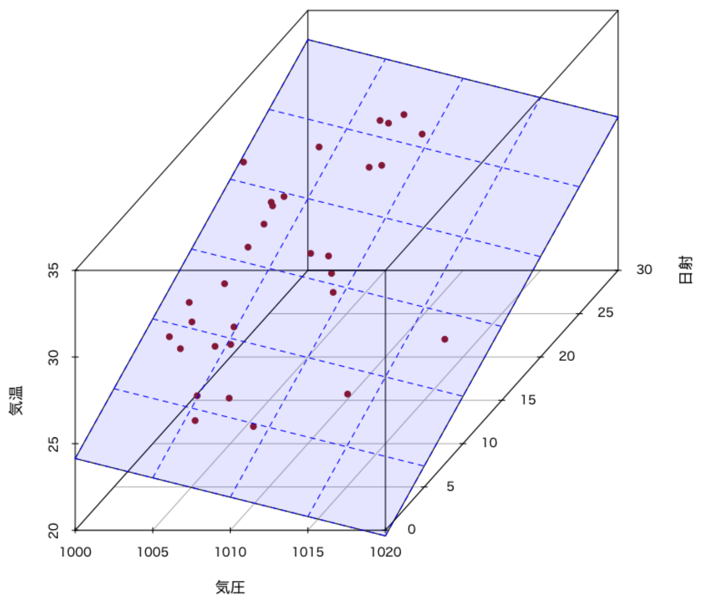

Figure 4: モデル 3

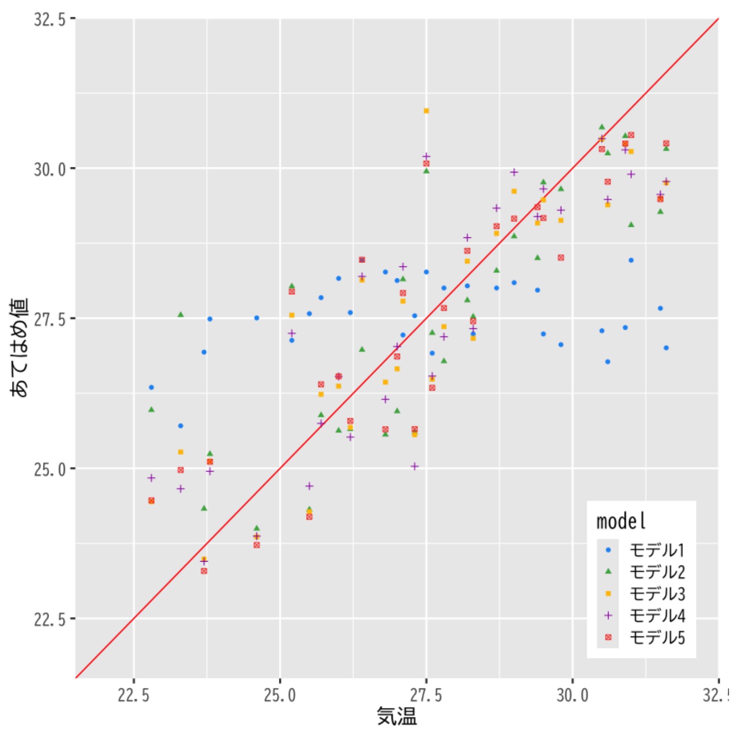

Figure 5: モデルの比較

Table 2: 寄与率によるモデルの比較

	目的変数				
	気温				
	モデル 1	モデル 2	モデル 3	モデル 4	モデル 5
気圧	−0.178 (0.127)		−0.223 (0.068)	−0.214 (0.067)	−0.242 (0.068)
日射		0.297 (0.041)	0.306 (0.036)	0.366 (0.056)	0.348 (0.045)
湿度				0.071 (0.051)	
雲量					0.238 (0.161)
Constant	206.535 (127.430)	22.969 (0.690)	247.477 (68.433)	231.843 (68.254)	263.717 (67.941)
R^2	0.064	0.641	0.741	0.758	0.760
Adjusted R^2	0.031	0.628	0.722	0.731	0.733

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{y}} &= X\hat{\boldsymbol{\beta}} \\
&\qquad (\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^\top X)^{-1}X^\top \boldsymbol{y}\text{を代入}) \\
&= X(X^\top X)^{-1}X^\top \boldsymbol{y} && (A) \\
&\qquad (\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}\text{を代入}) \\
&= X(X^\top X)^{-1}X^\top X\boldsymbol{\beta} + X(X^\top X)^{-1}X^\top \boldsymbol{\epsilon} \\
&= X\boldsymbol{\beta} + X(X^\top X)^{-1}X^\top \boldsymbol{\epsilon} && (B)
\end{aligned}
$$

- (A) あてはめ値は **観測値の重み付けの和** で表される
- (B) あてはめ値と観測値は **誤差項** の寄与のみ異なる

あてはめ値と誤差

- 残差と誤差の関係

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\epsilon}} &= \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}} \\
&= \boldsymbol{\epsilon} - X(X^\top X)^{-1}X^\top \boldsymbol{\epsilon} \\
&= \left(I - X(X^\top X)^{-1}X^\top\right)\boldsymbol{\epsilon} && (C)
\end{aligned}
$$

  - (C) 残差は **誤差の重み付けの和** で表される

ハット行列

- 定義

$$H = X(X^\top X)^{-1}X^\top$$

- ハット行列 H による表現

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{y}} &= H\boldsymbol{y} \\
\hat{\boldsymbol{\epsilon}} &= (I - H)\boldsymbol{\epsilon}
\end{aligned}
$$

  - あてはめ値や残差は H を用いて簡潔に表現される

ハット行列の性質

- 観測データ (デザイン行列) のみで計算される
- 観測データと説明変数の関係を表す
- 対角成分 (**テコ比**; leverage) は観測データが自身の予測に及ぼす影響の度合を表す

$$\hat{y}_j = (H)_{jj} y_j + (\text{それ以外のデータの寄与})$$

  - $(A)_{ij}$ は行列 A の (i,j) 成分
  - テコ比が小さい : 他のデータでも予測が可能
  - テコ比が大きい : 他のデータでは予測が困難

演習

問題

- ハット行列 H について以下を示しなさい
  - H は対称行列であること
  - H は冪等であること

$$H^2 = H, \quad (I-H)^2 = I - H$$

  - 以下の等式が成り立つこと

$$HX = X, \quad X^\top H = X^\top$$

ヒント

- いずれも H の定義にもとづいて計算すればよい

$$\begin{aligned}
H^\top &= (X(X^\top X)^{-1}X^\top)^\top \\
H^2 &= (X(X^\top X)^{-1}X^\top)(X(X^\top X)^{-1}X^\top) \\
(I-H)^2 &= I - 2H + H^2 \\
HX &= (X(X^\top X)^{-1}X^\top)X \\
X^\top H &= (HX)^\top
\end{aligned}$$

推定量の統計的性質

最小二乗推定量の性質

- 推定量と誤差の関係

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (X^\top X)^{-1}X^\top \boldsymbol{y} \\
&= (X^\top X)^{-1}X^\top (X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}) \\
&= (X^\top X)^{-1}X^\top X\boldsymbol{\beta} + (X^\top X)^{-1}X^\top \boldsymbol{\epsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta} + (X^\top X)^{-1}X^\top \boldsymbol{\epsilon}
\end{aligned}$$

- 正規分布の重要な性質 (**再生性**)

  正規分布に従う独立な確率変数の和は正規分布に従う

推定量の分布

- **誤差の仮定** : 独立，平均 0 分散 σ^2 の **正規分布**
- 推定量は以下の多変量正規分布に従う

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] &= \boldsymbol{\beta} \\ \mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \sigma^2 (X^\top X)^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} &\sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (X^\top X)^{-1})\end{aligned}$$

演習

問題

- 誤差が独立で，平均 0 分散 σ^2 の正規分布に従うとき，最小二乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ について以下を示しなさい
  - 平均は $\boldsymbol{\beta}$ (真の母数) となること
  - 共分散行列は $\sigma^2 (X^\top X)^{-1}$ となること

解答例

- 定義にもとづいて計算する

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] &= \mathbb{E}[\boldsymbol{\beta} + (X^\top X)^{-1} X^\top \boldsymbol{\epsilon}] \\ &= \boldsymbol{\beta} + (X^\top X)^{-1} X^\top \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}] \\ &= \boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

  - 定義にもとづいて計算する

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbb{E}[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})^\top] \\ &= \mathbb{E}[(X^\top X)^{-1} X^\top \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^\top X (X^\top X)^{-1}] \\ &= (X^\top X)^{-1} X^\top \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^\top] X (X^\top X)^{-1} \\ &= (X^\top X)^{-1} X^\top (\sigma^2 I) X (X^\top X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^\top X)^{-1}\end{aligned}$$

誤差の評価

寄与率 (再掲)

- **決定係数 (R-squared)**
  - 回帰式で説明できるばらつきの比率

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

- **自由度調整済み決定係数 (adjusted R-squared)**
  - 決定係数を不偏分散で補正

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

各係数の推定量の分布

- 推定された回帰係数の精度を評価
  - 誤差 ϵ の分布は平均 0 分散 σ^2 の正規分布
  - $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の分布 : p+1 変量正規分布

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (X^\top X)^{-1})$$

  - $\hat{\beta}_j$ の分布 : 1 変量正規分布

$$\hat{\beta}_j \sim \mathcal{N}(\beta_j, \sigma^2 ((X^\top X)^{-1})_{jj}) = \mathcal{N}(\beta_j, \sigma^2 \zeta_j^2)$$

    - $(A)_{jj}$ は行列 A の (j, j) (対角) 成分

標準誤差

- **標準誤差** (standard error)
  - $\hat{\beta}_j$ の標準偏差の推定量

$$\text{s.e.}(\hat{\beta}_j) = \hat{\sigma}\zeta_j = \sqrt{\frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^2} \cdot \sqrt{((X^\top X)^{-1})_{jj}}$$

  - 未知母数 σ^2 は不偏分散 $\hat{\sigma}^2$ で推定
  - $\hat{\beta}_j$ の精度の評価指標

演習

問題

- 以下を示しなさい
  - 不偏分散 $\hat{\sigma}^2$ が母数 σ^2 の不偏な推定量となる

    以下が成り立つことを示せばよい

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^2\right] = (n-p-1)\sigma^2$$

解答例

- ハット行列 H を用いた表現を利用する

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\epsilon}} &= (I_n - H)\boldsymbol{\epsilon} \\
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^2\right] &= \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^\top \hat{\boldsymbol{\epsilon}}] \\
&= \mathbb{E}[\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^\top)] \\
&= \mathbb{E}[\mathrm{tr}(I_n - H)\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^\top (I_n - H)] \\
&= \mathrm{tr}(I_n - H)\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}^\top](I_n - H) \\
&= \mathrm{tr}(I_n - H)(\sigma^2 I_n)(I_n - H) \\
&= \sigma^2 \mathrm{tr}(I_n - H)
\end{aligned}$$

- I_n は $n \times n$ 単位行列

- さらに以下が成立する

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}H &= \mathrm{tr}X(X^\top X)^{-1}X^\top \\
&= \mathrm{tr}(X^\top X)^{-1}X^\top X \\
&= \mathrm{tr}I_{p+1} \\
&= p+1
\end{aligned}$$

  - 行列のサイズに注意

係数の評価

t 統計量

- **回帰係数の分布** に関する定理

  t **統計量** (t-statistic)

  $$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\mathrm{s.e.}(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}\zeta_j}$$

  は自由度 $n-p-1$ の t 分布に従う

  - 証明には以下の性質を用いる
    * $\hat{\sigma}^2$ と $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は独立となる
    * $(\hat{\beta}_j - \beta_j)/(\sigma\zeta_j)$ は標準正規分布に従う
    * $(n-p-1)\hat{\sigma}^2/\sigma^2 = S(\hat{\boldsymbol{\beta}})/\sigma^2$ は自由度 $n-p-1$ の χ^2 分布に従う

t 統計量による検定

- 回帰係数 β_j が回帰式に寄与するか否かを検定
  - 帰無仮説 $H_0 : \beta_j = 0$ (t 統計量が計算できる)
  - 対立仮説 $H_1 : \beta_j \neq 0$

- p 値 : 確率変数の絶対値が $|t|$ を超える確率
  - $f(x)$ は自由度 $n-p-1$ の t 分布の確率密度関数

$$(p \text{ 値}) = 2\int_{|t|}^{\infty} f(x)dx \quad (\text{両側検定})$$

  帰無仮説 H_0 **が正しければ** p **値は小さくならない**

モデルの評価

F 統計量

- **ばらつきの比** に関する定理

  $\beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$ ならば F **統計量** (F-statistic)

  $$F = \frac{\frac{1}{p}S_r}{\frac{1}{n-p-1}S} = \frac{n-p-1}{p}\frac{R^2}{1-R^2}$$

  は自由度 $p, n-p-1$ の F 分布に従う

- 証明には以下の性質を用いる
  * S_r と S は独立となる
  * S_r/σ^2 は自由度 p の χ^2 分布に従う
  * S/σ^2 は自由度 $n-p-1$ の χ^2 分布に従う

F 統計量を用いた検定

- 説明変数のうち 1 つでも役に立つか否かを検定
  - 帰無仮説 $H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$ (S_r が χ^2 分布になる)
  - 対立仮説 $H_1 : \exists j \; \beta_j \neq 0$
- p 値 : 確率変数の値が F を超える確率
  - $f(x)$ は自由度 $p, n-p-1$ の F 分布の確率密度関数

$$(p\ 値) = \int_F^\infty f(x)dx \quad (片側検定)$$

帰無仮説 H_0 が正しければ p 値は小さくならない

解析の事例

東京の 8 月の気候の分析 (再掲)

- データの一部
- 気温を説明する 5 種類の線形回帰モデルを検討
  - モデル 1 : 気温 = F(気圧)
  - モデル 2 : 気温 = F(日射)
  - モデル 3 : 気温 = F(気圧, 日射)
  - モデル 4 : 気温 = F(気圧, 日射, 湿度)
  - モデル 5 : 気温 = F(気圧, 日射, 雲量)

分析の視覚化 (再掲)

- 観測値とあてはめ値の比較

モデルの比較

- t 統計量・F 統計量
- 診断プロット (モデル 4)
- 診断プロット (モデル 5)

次回の予定

- 第 1 回 : 回帰モデルの考え方と推定
- 第 2 回 : モデルの評価
- **第 3 回 : モデルによる予測と発展的なモデル**

Table 3: 東京の 8 月の気候

日付	気温	降雨	日射	降雪	風向	風速	気圧	湿度	雲量
2022-08-01	30.6	0	24.53	0	SSE	2.8	1010.1	72	8.8
2022-08-02	31.6	0	24.78	0	SSE	2.5	1008.8	71	9.8
2022-08-03	31.5	0	21.24	0	SSE	2.3	1005.1	75	7.3
2022-08-04	24.6	18	3.46	0	NE	2.7	1006	89	10
2022-08-05	23.8	0	7.65	0	NE	2.9	1006.1	83	9.8
2022-08-06	25.2	0	17.06	0	SSE	2.4	1008.1	73	10
2022-08-07	27.6	0	14.45	0	SSE	2.2	1009.3	80	8.3
2022-08-08	29.8	0	22.52	0	S	4.5	1008.5	75	4.8
2022-08-09	30.9	0	25.5	0	S	5.5	1006.9	69	6.8
2022-08-10	30.5	0	25.99	0	S	5.3	1007.2	70	6
2022-08-11	29.5	0	22.9	0	S	5.4	1007.5	75	6
2022-08-12	28.3	2	15.36	0	S	5.8	1007.5	81	9.8
2022-08-13	25.5	47.5	4.53	0	S	4.8	1005.6	94	10
2022-08-14	28.2	0	16.28	0	SSE	2.6	1003	84	8.8
2022-08-15	29.4	0	18.65	0	S	2.5	1003.4	78	8.8
2022-08-16	31	0	20.5	0	SSW	4.8	1000.6	70	8.3
2022-08-17	27.3	5	8.87	0	NE	2.5	1005.8	77	10
2022-08-18	26.8	13	8.74	0	S	2.8	1001.7	81	6
2022-08-19	27.5	0	23.52	0	SSE	3.4	1001.7	62	3
2022-08-20	26.4	1.5	13.5	0	NW	1.8	1000.6	82	9.8
2022-08-21	26	1	8.96	0	NE	2.1	1002.3	87	10
2022-08-22	26.2	0	9.05	0	NNE	2.5	1005.5	82	10
2022-08-23	28.7	0	17.94	0	S	3.2	1003.2	83	8.3
2022-08-24	27.8	2	12.86	0	NE	2.9	1003.2	79	10
2022-08-25	25.7	0	9.83	0	SE	2	1004.1	77	10
2022-08-26	27	3.5	10.05	0	SSE	2.1	1002.5	89	10
2022-08-27	29	0	19.87	0	SSE	3.3	1002.7	80	5.5
2022-08-28	23.7	5	4.58	0	NE	3	1009.2	87	9.8
2022-08-29	23.3	0.5	15.45	0	NE	2.8	1016.1	69	8
2022-08-30	22.8	5	10.12	0	NNE	1.9	1012.5	88	10
2022-08-31	27.1	1	17.46	0	S	3.2	1007.6	85	8.8

Table 4: t 統計量・F 統計量によるモデルの比較

	目的変数				
			気温		
	モデル 1	モデル 2	モデル 3	モデル 4	モデル 5
気圧	−0.178 (0.127)		−0.223*** (0.068)	−0.214*** (0.067)	−0.242*** (0.068)
	t = −1.405		t = −3.281	t = −3.185	t = −3.566
日射		0.297*** (0.041)	0.306*** (0.036)	0.366*** (0.056)	0.348*** (0.045)
		t = 7.193	t = 8.547	t = 6.582	t = 7.699
湿度				0.071 (0.051)	
				t = 1.390	
雲量					0.238 (0.161)
					t = 1.474
Constant	206.535 (127.430)	22.969*** (0.690)	247.477*** (68.433)	231.843*** (68.254)	263.717*** (67.941
	t = 1.621	t = 33.277	t = 3.616	t = 3.397	t = 3.882
Observations	31	31	31	31	31
R^2	0.064	0.641	0.741	0.758	0.760
Adjusted R^2	0.031	0.628	0.722	0.731	0.733
Residual Std. Error	2.463 (df = 29)	1.526 (df = 29)	1.320 (df = 28)	1.298 (df = 27)	1.293 (df = 27)
F Statistic	1.973 (df = 1; 29)	51.743*** (df = 1; 29)	39.964*** (df = 2; 28)	28.174*** (df = 3; 27)	28.484*** (df = 3; 2
Note:					*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.0

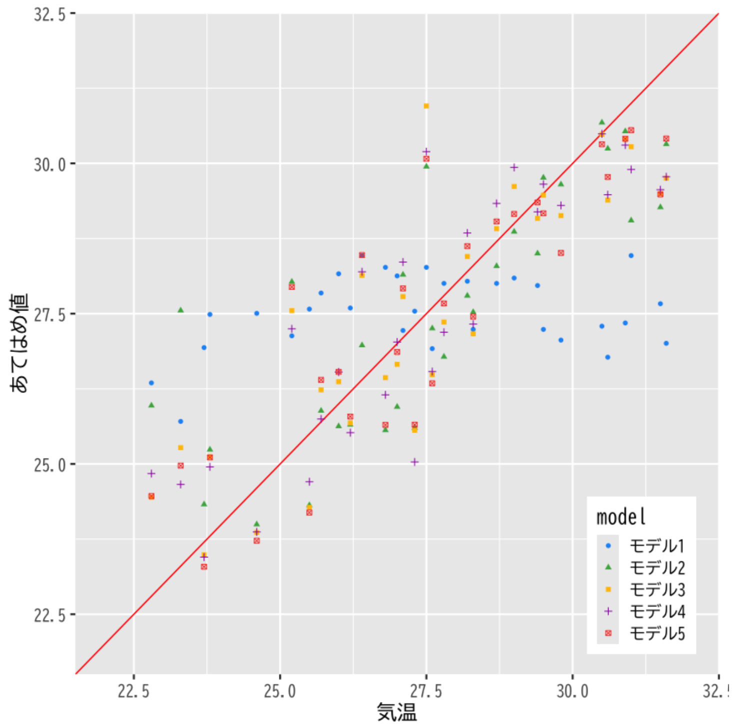

Figure 6: モデルの比較

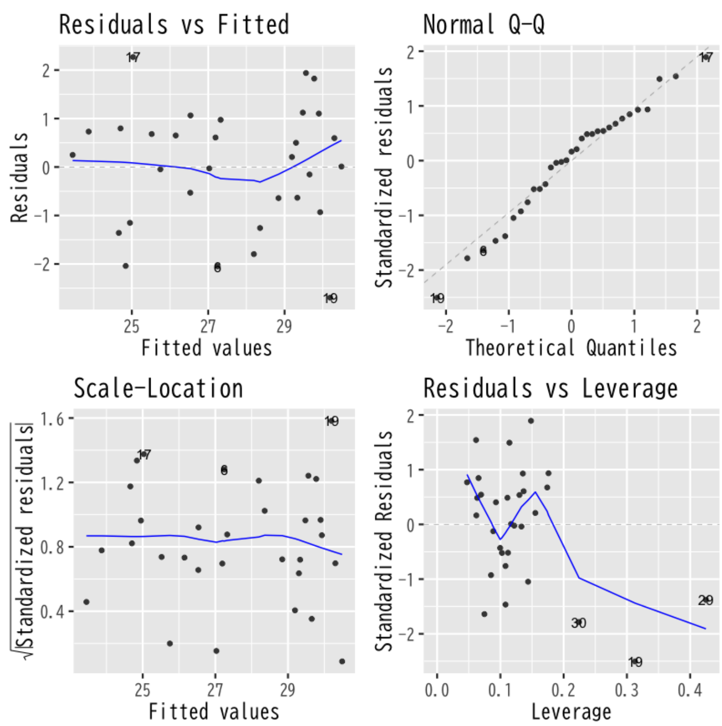

Figure 7: モデルの比較

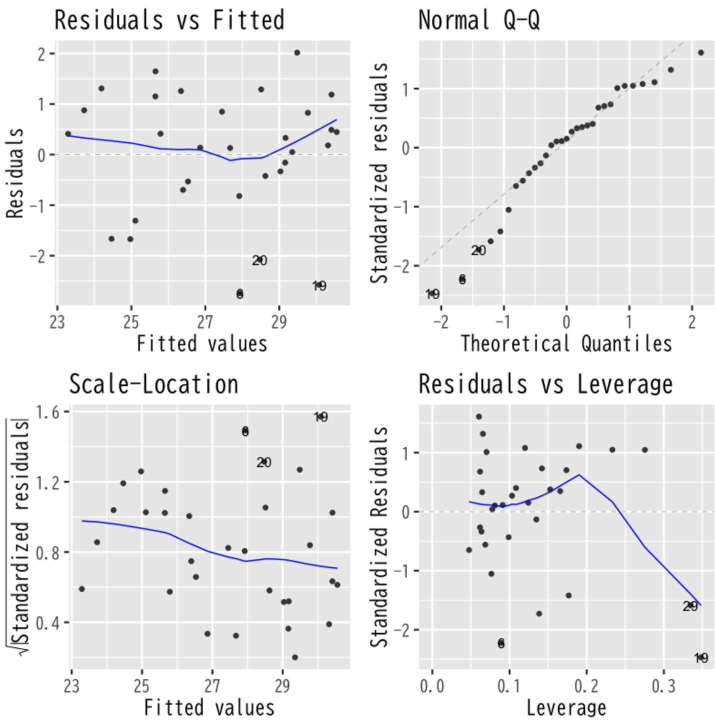

Figure 8: モデルの比較