

# 回帰分析

## 予測と発展的なモデル

村田 昇

## 講義の内容

- 第1回: 回帰モデルの考え方と推定
- 第2回: モデルの評価
- 第3回: モデルによる予測と発展的なモデル

## 回帰分析の復習

### 線形回帰モデル

- 目的変数  $y$  を説明変数  $x_1, \dots, x_p$  で説明する関係式を構成:
  - 説明変数:  $x_1, \dots, x_p$  ( $p$  次元)
  - 目的変数:  $y$  (1 次元)
- 回帰係数  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  を用いた一次式:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$$

- 誤差項を含む確率モデルで観測データを表現:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

### 問題設定

- 確率モデル:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- 式の評価: 残差平方和の最小化による推定

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

### 解

- 解の条件: 正規方程式

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

- 解の一意性: Gram 行列  $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$  が正則

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

## 寄与率

- 決定係数 (R-squared):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

- 自由度調整済み決定係数 (adjusted R-squared):

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

– 不偏分散で補正

## 実データによる例

- 東京の8月の気候 (気温, 降雨, 日射, 降雪, 風速, 気圧, 湿度, 雲量) に関するデータ (の一部)

	month	day	day_of_week	temp	rain	solar	snow	wdir	wind	press	humid	cloud
214	8	1	Sat	26.1	0.5	19.79	0	NE	2.6	1009.3	77	7.8
215	8	2	Sun	26.3	0.0	19.53	0	SSE	2.4	1011.0	75	5.5
216	8	3	Mon	27.2	0.0	24.73	0	SSE	2.4	1011.0	74	3.8
217	8	4	Tue	28.3	0.0	24.49	0	SSE	2.9	1012.2	77	4.3
218	8	5	Wed	29.1	0.0	24.93	0	S	2.9	1013.4	76	3.3
219	8	6	Thu	28.5	0.0	24.02	0	SSE	3.9	1010.5	79	7.8
220	8	7	Fri	29.5	0.0	22.58	0	S	3.4	1005.0	71	7.5
221	8	8	Sat	28.1	0.0	15.49	0	SE	2.7	1006.1	79	8.3
222	8	9	Sun	28.7	0.0	19.96	0	SSE	2.4	1006.9	77	9.5
223	8	10	Mon	30.5	0.0	20.26	0	SE	2.4	1010.3	73	10.0
224	8	11	Tue	31.7	0.0	25.50	0	S	4.0	1009.7	67	2.8
225	8	12	Wed	30.0	0.5	18.24	0	SSE	2.5	1009.0	79	6.8
226	8	13	Thu	29.4	21.5	19.01	0	N	2.2	1006.4	82	5.0
227	8	14	Fri	29.4	0.0	19.85	0	SE	2.8	1005.5	78	2.0

- 作成した線形回帰モデルを検討する
  - モデル 1: 気温 = F(気圧)
  - モデル 2: 気温 = F(気圧, 日射)
  - モデル 3: 気温 = F(気圧, 日射, 湿度)
  - モデル 4: 気温 = F(気圧, 日射, 雲量)
- 説明変数と目的変数の関係
- 観測値とあてはめ値の比較

## モデルの評価

- 決定係数
  - モデル 1: 気温 = F(気圧)  
[1] "R2: 0.0169 ; adj. R2: -0.017"
  - モデル 2: 気温 = F(気圧, 日射)  
[1] "R2: 0.32 ; adj. R2: 0.271"
  - モデル 3: 気温 = F(気圧, 日射, 湿度) (2 より改善している)  
[1] "R2: 0.422 ; adj. R2: 0.358"
  - モデル 4: 気温 = F(気圧, 日射, 雲量) (2 より改善していない)  
[1] "R2: 0.32 ; adj. R2: 0.245"

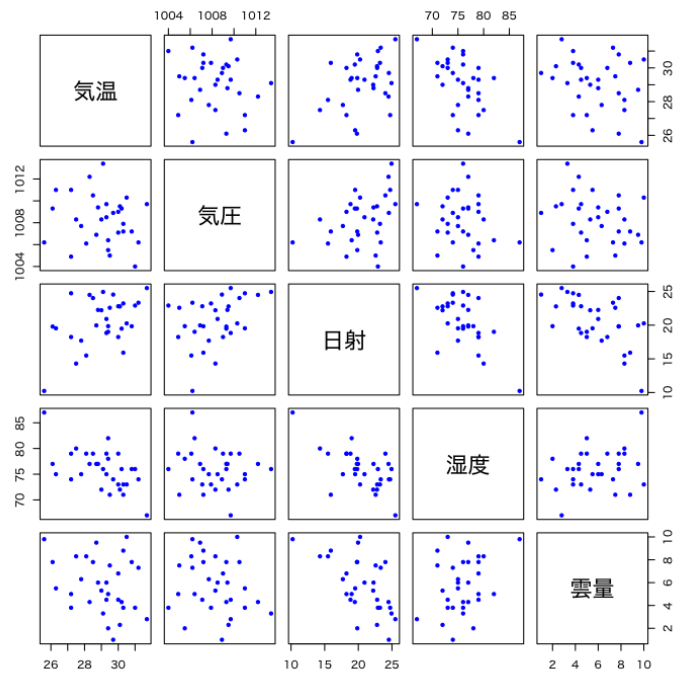


図 1: 説明変数と目的変数の散布図

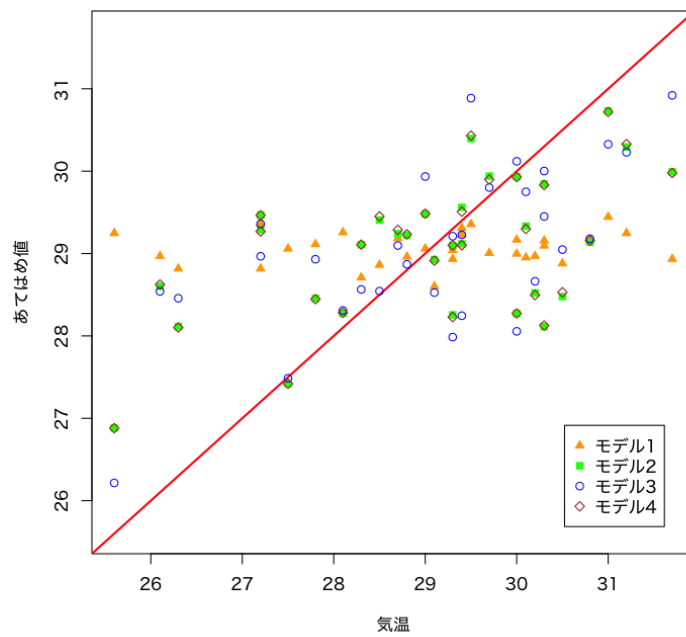


図 2: モデルの比較

## F-統計量による検定

- 説明変数のうち1つでも役に立つか否かを検定する
  - 帰無仮説  $H_0: \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$
  - 対立仮説  $H_1: \exists j \beta_j \neq 0$  (少なくとも1つは役に立つ)
- F-統計量: 決定係数 (または残差) を用いて計算

$$F = \frac{n-p-1}{p} \frac{R^2}{1-R^2}$$

- p-値: 自由度  $p, n-p-1$  の F-分布で計算

## モデルの評価

- 決定係数と F-統計量
  - モデル 1: 気温 = F(気圧)  
[1] "R2: 0.0169 ; adj. R2: -0.017 ; F-stat: 0.498 ; p-val: 0.486"
  - モデル 2: 気温 = F(気圧, 日射)  
[1] "R2: 0.32 ; adj. R2: 0.271 ; F-stat: 6.58 ; p-val: 0.00454"
  - モデル 3: 気温 = F(気圧, 日射, 湿度)  
[1] "R2: 0.422 ; adj. R2: 0.358 ; F-stat: 6.57 ; p-val: 0.00177"
  - モデル 4: 気温 = F(気圧, 日射, 雲量)  
[1] "R2: 0.32 ; adj. R2: 0.245 ; F-stat: 4.24 ; p-val: 0.0141"

## t-統計量による検定

- 回帰係数  $\beta_j$  が回帰式に寄与するか否かを検定する
  - 帰無仮説  $H_0: \beta_j = 0$
  - 対立仮説  $H_1: \beta_j \neq 0$  ( $\beta_j$  は役に立つ)
- t-統計量: 各係数ごと,  $\zeta$  は  $(X^T X)^{-1}$  の対角成分

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma} \zeta_j}$$

- p-値: 自由度  $n-p-1$  の t-分布を用いて計算

## モデルの評価

- 回帰係数の推定量と t-統計量
  - モデル 1: 気温 = F(気圧)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	120.0000	128.000	0.932	0.359
press	-0.0898	0.127	-0.706	0.486

\* 気圧単体では回帰係数は有意ではない
  - モデル 2: 気温 = F(気圧, 日射)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	274.000	117.0000	2.34	0.02670
press	-0.248	0.1170	-2.13	0.04240
solar	0.261	0.0738	3.53	0.00145

\* 日射と組み合わせることで有意となる

- 回帰係数の推定量と  $t$ -統計量 (つづき)

– モデル 3: 気温 = F(気圧, 日射, 湿度)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	263.000	110.0000	2.39	0.0242
press	-0.222	0.1100	-2.02	0.0537
solar	0.142	0.0880	1.61	0.1180
humid	-0.166	0.0759	-2.18	0.0379

– モデル 4: 気温 = F(気圧, 日射, 雲量)

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	274.000	119.0000	2.300	0.02950
press	-0.248	0.1190	-2.090	0.04610
solar	0.266	0.0915	2.910	0.00723
cloud	0.013	0.1250	0.104	0.91800

\* このモデルでは雲量は有用でないことが示唆される

## 回帰モデルによる予測

### 予測

- 新しいデータ (説明変数)  $x$  に対する **予測値**

$$\hat{y} = (1, x^T) \hat{\beta}, \quad \hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

- 予測値は元データの目的変数の重み付け線形和

$$\hat{y} = w(x)^T y$$

$$w(x)^T = (1, x^T) (X^T X)^{-1} X^T$$

– 重みは元データと新規データの説明変数で決定

### 予測値の性質

- 推定量は以下の性質をもつ多変量正規分布

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

- この性質を利用して以下の 3 つの値の違いを評価

$$\begin{aligned} \hat{y} &= (1, x^T) \hat{\beta} && \text{(回帰式による予測値)} \\ \tilde{y} &= (1, x^T) \beta && \text{(最適な予測値)} \\ y &= (1, x^T) \beta + \epsilon && \text{(観測値)} \end{aligned}$$

–  $\hat{y}$  と  $y$  は独立な正規分布に従うことに注意

## 演習

### 問題

- 誤差が平均 0 分散  $\sigma^2$  の正規分布に従うとき、以下の問に答えなさい
  - 予測値  $\hat{y}$  の平均を求めよ
  - 予測値  $\hat{y}$  の分散を求めよ

### 解答例

- 定義にもとづいて計算する

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{y}] &= \mathbb{E}[(1, \mathbf{x}^\top) \hat{\boldsymbol{\beta}}] \\ &= (1, \mathbf{x}^\top) \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] \\ &= (1, \mathbf{x}^\top) \boldsymbol{\beta} \\ &= \tilde{y}\end{aligned}$$

- 真の回帰式による最適な予測値

- 定義にもとづいて計算する

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{y}) &= \text{Var}((1, \mathbf{x}^\top)(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})) \\ &= (1, \mathbf{x}^\top) \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(1, \mathbf{x}^\top)^\top \\ &= (1, \mathbf{x}^\top) \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}})(1, \mathbf{x}^\top)^\top \\ &= (1, \mathbf{x}^\top) \sigma^2 (X^\top X)^{-1} (1, \mathbf{x}^\top)^\top \\ &= \sigma^2 (1, \mathbf{x}^\top) (X^\top X)^{-1} (1, \mathbf{x}^\top)^\top\end{aligned}$$

## 信頼区間

### 最適な予測値との差

- 差の分布は以下の平均・分散をもつ正規分布に従う

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{y} - \hat{y}] &= (1, \mathbf{x}^\top) \boldsymbol{\beta} - (1, \mathbf{x}^\top) \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = 0 \\ \text{Var}(\tilde{y} - \hat{y}) &= \underbrace{\sigma^2 (1, \mathbf{x}^\top) (X^\top X)^{-1} (1, \mathbf{x}^\top)^\top}_{\hat{\boldsymbol{\beta}} \text{ の推定誤差による分散}} = \sigma^2 \gamma_c(\mathbf{x})^2\end{aligned}$$

- 正規化による表現

$$\frac{\tilde{y} - \hat{y}}{\sigma \gamma_c(\mathbf{x})} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

### 信頼区間

- 未知の分散を不偏分散で推定

$$Z = \frac{\tilde{y} - \hat{y}}{\hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x})} \sim \mathcal{T}(n-p-1) \quad (t\text{-分布})$$

- 確率  $\alpha$  の信頼区間

$$I_\alpha^c = (\hat{y} - C_\alpha \hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x}), \hat{y} + C_\alpha \hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x}))$$

$$P(|Z| < C_\alpha | Z \sim \mathcal{T}(n-p-1)) = \alpha$$

- 最適な予測値  $\tilde{y}$  が入ることが期待される区間

## 演習

### 問題

- 以下の問に答えなさい
  - 信頼区間について以下の式が成り立つことを示せ

$$P(\tilde{y} \in I_\alpha^c) = \alpha$$

- 観測値と予測値の差  $y - \hat{y}$  の平均と分散を求めよ

### 解答例

- $C_\alpha$  の定義にもとづいて計算すればよい

$$\begin{aligned} \alpha &= P(|Z| < C_\alpha) \\ &= P\left(\left|\frac{\tilde{y} - \hat{y}}{\hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x})}\right| < C_\alpha\right) \\ &= P(|\tilde{y} - \hat{y}| < C_\alpha \hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x})) \\ &= P(-C_\alpha \hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x}) < \tilde{y} - \hat{y} < C_\alpha \hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x})) \\ &= P(\hat{y} - C_\alpha \hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x}) < \tilde{y} < \hat{y} + C_\alpha \hat{\sigma} \gamma_c(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

- 独立性を利用して計算する

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y - \hat{y}] &= \mathbb{E}[y] - \mathbb{E}[\hat{y}] \\ &= \tilde{y} - \tilde{y} \\ &= 0 \\ \text{Var}(y - \hat{y}) &= \text{Var}(y) + \text{Var}(\hat{y}) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2(1, \mathbf{x}^\top)(X^\top X)^{-1}(1, \mathbf{x}^\top)^\top \end{aligned}$$

## 予測区間

### 観測値との差

- 差の分布は以下の平均・分散をもつ正規分布に従う

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y - \hat{y}] &= (1, \mathbf{x}^\top) \boldsymbol{\beta} + \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}] - (1, \mathbf{x}^\top) \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = 0 \\ \text{Var}(y - \hat{y}) &= \underbrace{\sigma^2(1, \mathbf{x}^\top)(X^\top X)^{-1}(1, \mathbf{x}^\top)^\top}_{\hat{\boldsymbol{\beta}} \text{ の推定誤差による分散}} + \underbrace{\sigma^2}_{\text{誤差の分散}} = \sigma^2 \gamma_p(\mathbf{x})^2 \end{aligned}$$

- 正規化による表現

$$\frac{y - \hat{y}}{\sigma\gamma_p(\mathbf{x})} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

## 予測区間

- 未知の分散を不偏分散で推定

$$Z = \frac{y - \hat{y}}{\hat{\sigma}\gamma_p(\mathbf{x})} \sim \mathcal{T}(n-p-1) \quad (t\text{-分布})$$

- 確率  $\alpha$  の予測区間

$$I_\alpha^P = (\hat{y} - C_\alpha \hat{\sigma}\gamma_p(\mathbf{x}), \hat{y} + C_\alpha \hat{\sigma}\gamma_p(\mathbf{x}))$$

$$P(|Z| < C_\alpha | Z \sim \mathcal{T}(n-p-1)) = \alpha$$

- 観測値  $y$  が入ることが期待される区間
- $\gamma_p > \gamma_c$  なので信頼区間より広くなる

## 解析の事例

### 信頼区間と予測区間

- 東京の気候データを用いて以下を試みる
  - 8月のデータで回帰式を推定する  
気温 = F(気圧, 日射, 湿度)
  - 上記のモデルで9月のデータを予測する

## 発展的なモデル

### 非線形性を含むモデル

- 目的変数  $Y$
- 説明変数  $X_1, \dots, X_p$
- 説明変数の追加で対応可能
  - 交互作用 (交差項):  $X_i X_j$  のような説明変数の積
  - 非線形変換:  $\log(X_k)$  のような関数による変換

### カテゴリカル変数を含むモデル

- 数値ではないデータ
  - 悪性良性
  - 血液型
- 適切な方法で数値に変換して対応:



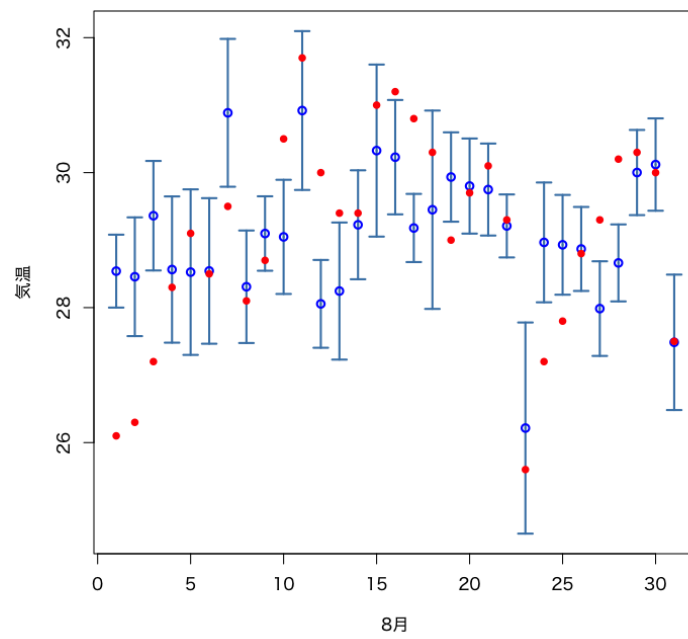


図 3: 8 月のあてはめ値の信頼区間

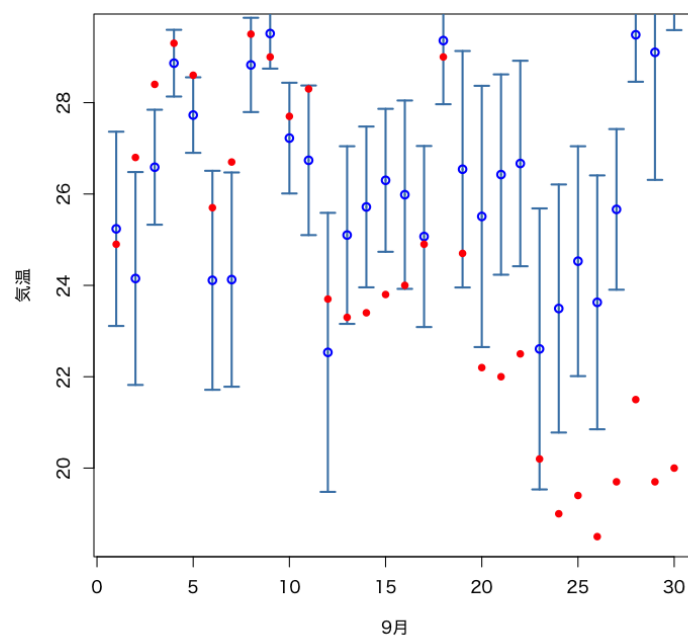


図 4: 8 月モデルによる 9 月の予測値の信頼区間

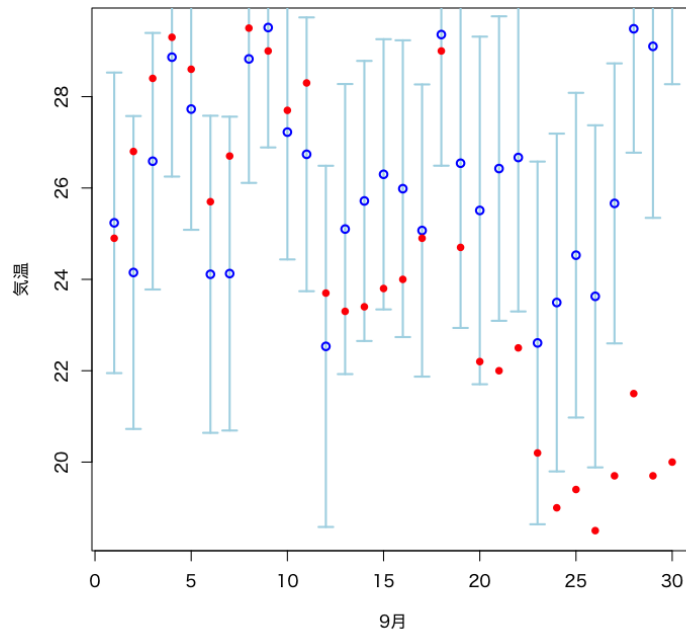


図 5: 8 月モデルによる 9 月の予測値の予測区間

- 2 値の場合は 1,0 (真, 偽) を割り当てる
  - \* 悪性: 1
  - \* 良性: 0
- 3 値以上の場合は **ダミー変数** を利用する (カテゴリ数-1 個)
  - \* A 型: (1,0,0)
  - \* B 型: (0,1,0)
  - \* O 型: (0,0,1)
  - \* AB 型: (0,0,0)

## 解析の事例

### 非線形変換による線形化

- 体重と脳の重さの関係

	body	brain
Mountain beaver	1.350	8.1
Cow	465.000	423.0
Grey wolf	36.330	119.5
Goat	27.660	115.0
Guinea pig	1.040	5.5
Dipliodocus	11700.000	50.0
Asian elephant	2547.000	4603.0
Donkey	187.100	419.0
Horse	521.000	655.0
Potar monkey	10.000	115.0
Cat	3.300	25.6
Giraffe	529.000	680.0

Gorilla	207.000	406.0
Human	62.000	1320.0
African elephant	6654.000	5712.0
Triceratops	9400.000	70.0
Rhesus monkey	6.800	179.0
Kangaroo	35.000	56.0
Golden hamster	0.120	1.0
Mouse	0.023	0.4
Rabbit	2.500	12.1
Sheep	55.500	175.0
Jaguar	100.000	157.0
Chimpanzee	52.160	440.0
Rat	0.280	1.9
Brachiosaurus	87000.000	154.5
Mole	0.122	3.0
Pig	192.000	180.0

- 散布図 (変換なし)

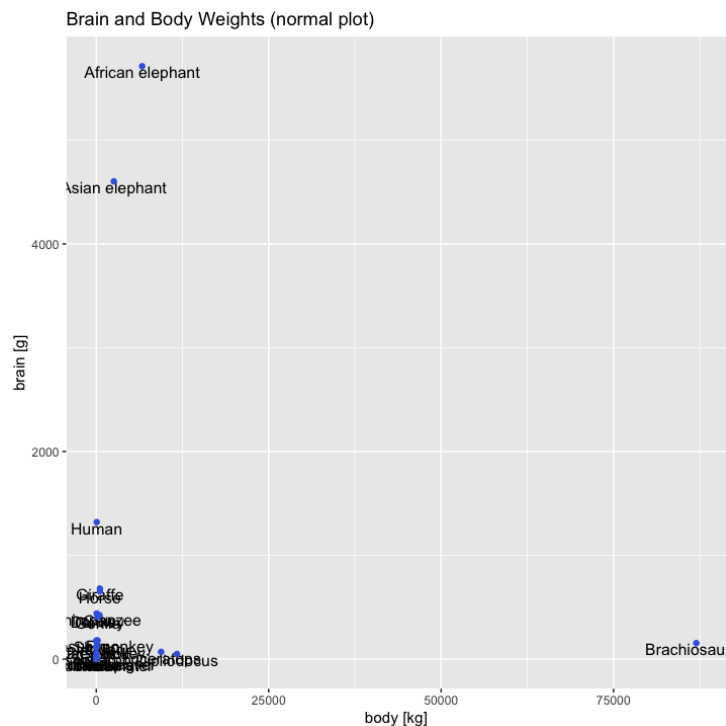


図 6: 散布図 (データの変換なし)

- 散布図 (x 軸を対数変換)
- 散布図 (xy 軸を対数変換)

## 非線形な関係の分析

- 東京の気候データを用いて気温に影響する変数の関係を検討する
  - 日射量と気圧の線形回帰モデル  
(日射量と気圧が気温にどのように影響するか検討する)

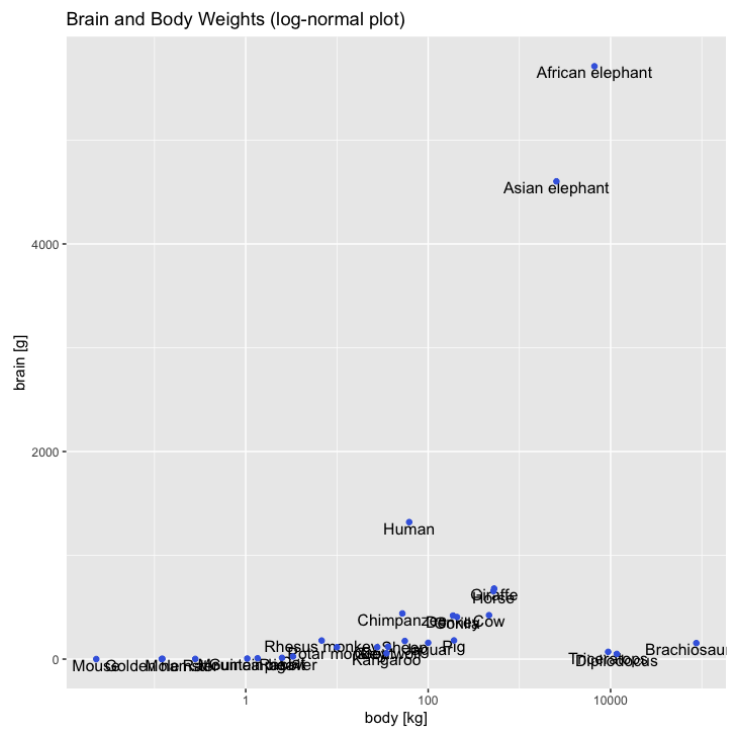


図 7: 散布図 (体重を対数変換)

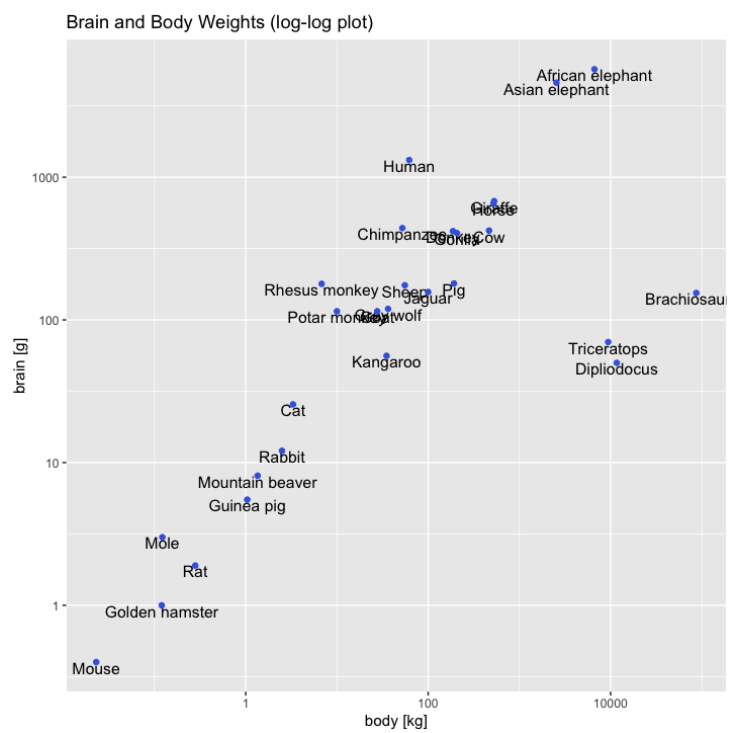


図 8: 散布図 (体重と脳の重さを対数変換)

- これらの交互作用を加えた線形回帰モデル  
(日射量と気圧の相互の関係の影響を検討する)

- 日射量, 気圧の線形回帰モデル

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	274.000	117.0000	2.34	0.02670
solar	0.261	0.0738	3.53	0.00145
press	-0.248	0.1170	-2.13	0.04240

[1] "R2: 0.32 ; adj. R2: 0.271 ; F-stat: 6.58 ; p-val: 0.00454"

- 係数の正負から
  - \* 日射が高くなるほど
  - \* 気圧が低くなるほど
 気温が高くなることが示唆される

- 交互作用を加えた線形回帰モデル

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-944.0000	820.0000	-1.15	0.260
solar	55.0000	36.5000	1.51	0.144
press	0.9610	0.8140	1.18	0.248
solar:press	-0.0543	0.0362	-1.50	0.145

[1] "R2: 0.372 ; adj. R2: 0.302 ; F-stat: 5.33 ; p-val: 0.00513"

- 2次式を整理すると
  - \* ある気圧より低い場合には日射量が高くなるほど
  - \* ある日射量より低い場合には気圧が高くなるほど
 気温が高くなることが示唆される
- 係数の有意性は低いのでより多くのデータでの分析が必要

## カテゴリカル変数の利用

- 東京の気候データを用いて気温を回帰するモデルを検討する
  - 降水の有無を表すカテゴリカル変数を用いたモデル  
(雨が降ると気温が変化することを検証する)
  - 月をカテゴリカル変数として加えたモデル  
(月毎の気温の差を考慮する)
- 降水の有無を表すカテゴリカル変数を用いたモデル

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	15.80	0.499	31.70	7.49e-107
rainTRUE	1.96	0.821	2.38	1.76e-02

[1] "R2: 0.0154 ; adj. R2: 0.0127 ; F-stat: 5.68 ; p-val: 0.0176"

- 降水の有無は気温の予測に無関係ではないと考えられる
- 決定係数から回帰式としての説明力は極めて低い

- 月をカテゴリカル変数として加えたモデル

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	7.590	0.452	16.800	6.46e-47
rainTRUE	-1.600	0.296	-5.390	1.32e-07
month2	0.962	0.638	1.510	1.32e-01
month3	3.720	0.625	5.950	6.48e-09
month4	5.960	0.631	9.450	4.94e-19
month5	12.600	0.625	20.100	1.88e-60
month6	16.400	0.632	26.000	5.65e-84
month7	18.000	0.641	28.100	4.17e-92
month8	21.700	0.626	34.700	8.49e-116
month9	17.700	0.638	27.700	1.14e-90
month10	10.400	0.625	16.700	1.32e-46
month11	6.590	0.632	10.400	2.22e-22
month12	0.278	0.628	0.443	6.58e-01

[1] "R2: 0.9 ; adj. R2: 0.896 ; F-stat: 264 ; p-val: 0"

– 月毎に比較すると雨の日の方が気温が低いことが支持される

## 次週の予定

- 第1回: 主成分分析の考え方
- 第2回: 分析の評価と視覚化