

時系列解析

推定と予測

村田 昇

2021.01.12

今週の内容

- 第1日: 時系列のモデル
- 第2日: モデルの推定と予測

時系列解析の復習

時系列解析とは

- 時系列データ
 - 時間軸に沿って観測されたデータ
 - 観測の順序に意味がある
 - 異なる時点間での観測データの従属関係が重要
 - 独立性にもとづく解析は行えない
(そのままでは大数の法則や中心極限定理は使えない)
- 時系列解析の目的
 - 時系列データの特徴を効果的に記述すること
 - 時系列モデルの推定と評価

時系列モデルと定常性

- 確率過程

時間を添え字として持つ確率変数列

$$X_t, t = 1, \dots, T$$

- 弱定常過程: 以下の性質をもつ確率過程 X_t
 - X_t の平均は時点 t によらない
 - X_t と X_{t+h} の共分散は時点 t によらず時差 h のみで定まる
 - 特に X_t の分散は時点 t によらない ($h = 0$ の場合)
- 多くの場合, 弱定常性を考えれば十分なので単に **定常** ということが多い
- 定常でない確率過程は **非定常** であるという

ホワイトノイズ

- 定義

平均 0, 分散 σ^2 である確率変数の確率分布 P からの独立かつ同分布な確率変数列

$$X_t = \epsilon_t, \quad \epsilon_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} P$$

- 記号 $\text{WN}(0, \sigma^2)$ で表記
- **定常** な確率過程

トレンドのあるホワイトノイズ

- 定義

μ, α を定数として

$$X_t = \mu + \alpha t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$$

で定義される確率過程

- **非定常** な確率過程

ランダムウォーク

- 定義

X_0 を定数もしくは確率変数として

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$$

で帰納的に定義される確率過程

- 分散が時間とともに増加・記憶のあるモデル
- **非定常** な確率過程

自己回帰過程

- 定義 (次数 p の AR モデル)

a_1, \dots, a_p を定数とし, X_1, \dots, X_p が初期値として与えられたとき,

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$$

で帰納的に定義される確率過程

- ランダムウォークの一般化
- 無限長の記憶のある (忘却しながら記憶する) モデル
- **定常にも非定常にもなる**

移動平均過程

- 定義 (次数 q の MA モデル)

b_1, \dots, b_q を定数とし, X_1, \dots, X_q が初期値として与えられたとき

$$X_t = b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$$

で定義される確率過程

- 有限長の記憶のあるモデル
- **定常** な確率過程

自己回帰移動平均過程

- 定義 (次数 (p, q) の ARMA モデル)

$a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ を定数とし, $X_1, \dots, X_{\max\{p, q\}}$ が初期値として与えられたとき

$$\begin{aligned} X_t &= a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} \\ &\quad + b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t, \\ \epsilon_t &\sim \text{WN}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

で帰納的に定まる確率過程

- AR・MA モデルの一般化・基本的な時系列モデル
- 定常にも非定常にもなる

自己共分散・自己相関

- 弱定常な確率過程: $X_t, t = 1, \dots, T$

- X_t と X_{t+h} の共分散は時点 t によらずラグ h のみで定まる

自己共分散 (定常過程の性質よりラグは $h \geq 0$ を考えればよい)

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$$

- X_t と X_{t+h} の相関も t によらずラグ h のみで定まる

自己相関

$$\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})/\text{Var}(X_t)$$

- 異なる時点間での観測データの従属関係を要約するための最も基本的な統計量

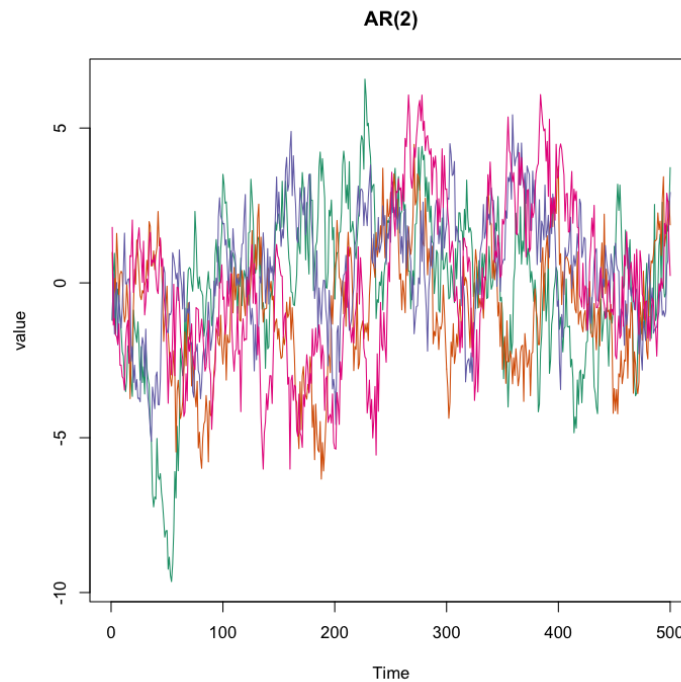


図 1: 同じモデルに従う AR 過程の例

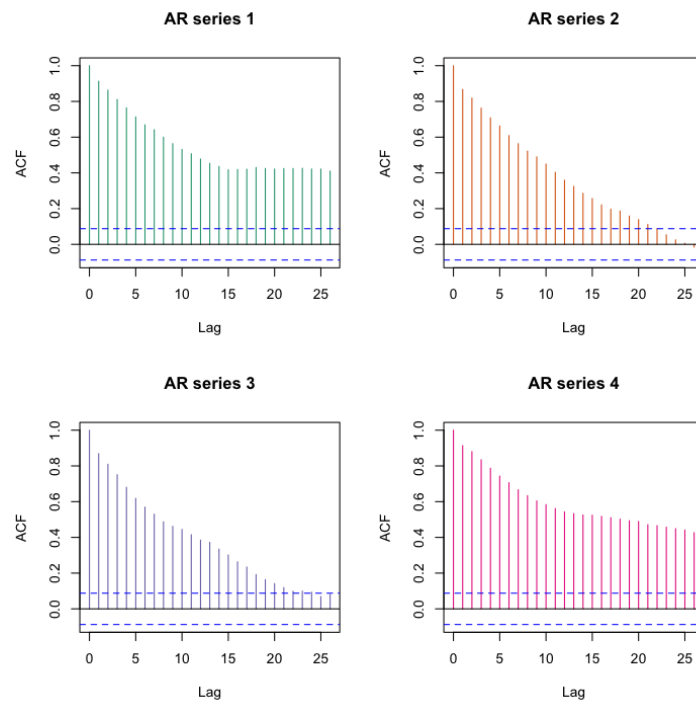


図 2: AR 過程の自己相関

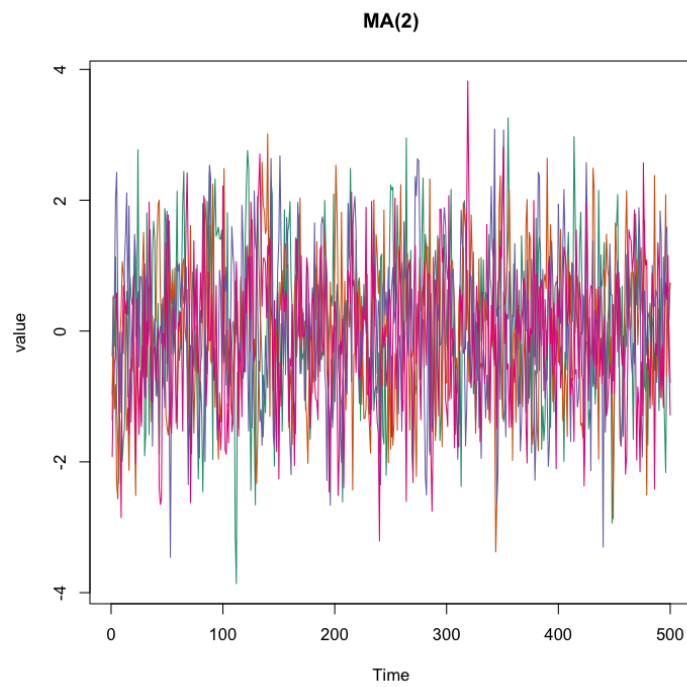


図 3: 同じモデルに従う MA 過程の例

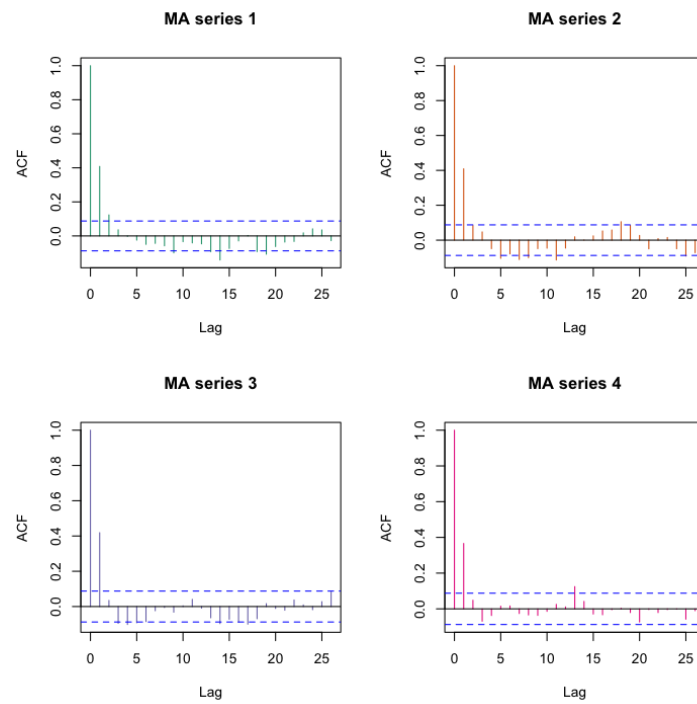


図 4: MA 過程の自己相関

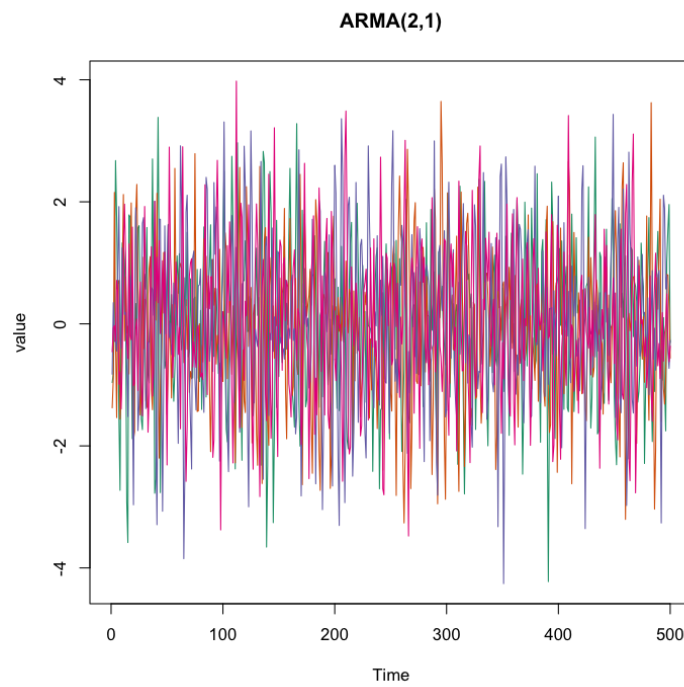


図 5: 同じモデルに従う ARMA 過程の例

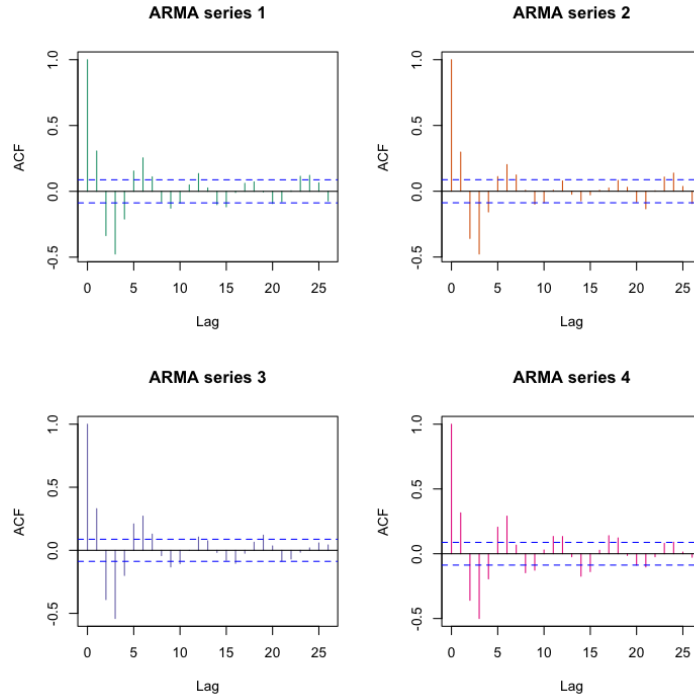


図 6: ARMA 過程の自己相関

AR モデルの推定

自己共分散・自己相関

- 平均 0 の弱定常な確率過程: $X_t, t = 1, \dots, T$
 - X_t と X_{t+h} の共分散は時点 t にらずラグ h のみで定まる

自己共分散

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[X_t X_{t+h}]$$

- X_t と X_{t+h} の相関も t にらずラグ h のみで定まる

自己相関係数

$$\rho(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) / \text{Var}(X_t) = \gamma(h) / \gamma(0)$$

自己共分散と AR モデル

- AR(p) モデル:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

- 係数と自己共分散の関係

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \mathbb{E}[X_t X_{t+h}] \\ &= \mathbb{E}[X_t (a_1 X_{t+h-1} + \dots + a_p X_{t+h-p} + \epsilon_{t+h})] \\ &= a_1 \mathbb{E}[X_t X_{t+h-1}] + \dots + a_p \mathbb{E}[X_t X_{t+h-p}] + \mathbb{E}[X_t \epsilon_{t+h}] \\ &= a_1 \gamma(h-1) + \dots + a_p \gamma(h-p) \end{aligned}$$

Yule-Walker 方程式

- $1 \leq h \leq p$ を考えると以下の関係が成り立つ

$$\begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(-1) & \dots & \gamma(-p+1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \dots & \gamma(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(p-1) & \gamma(p-2) & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

- 行列は Toeplitz 行列と呼ばれる
- 行列が正則ならば AR の係数は一意に求まる

偏自己相関

- AR(p) モデル:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

- ラグ p の **自己相関係数** (特殊な解釈)

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = 0 \text{ のときの } a_p$$

$$\mathbb{E}[X_t X_{t+p}] = a_p \mathbb{E}[X_t X_t] \Rightarrow \gamma(p) = a_p \gamma(0) \Rightarrow \rho(p) = a_p$$

- ラグ p の **偏自己相関係数**

AR(p) モデルを仮定したときの a_p の推定値 (Yule-Walker 方程式の解)

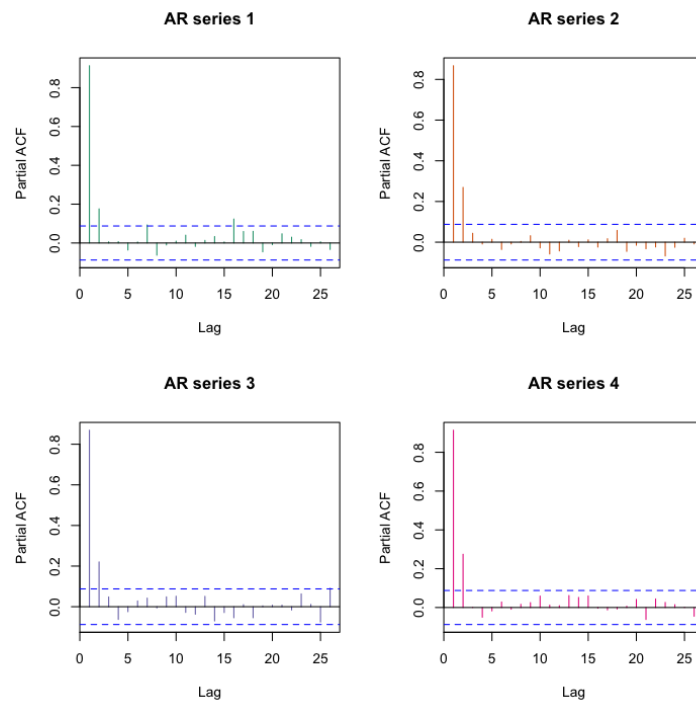


図 7: AR 過程の偏自己相関

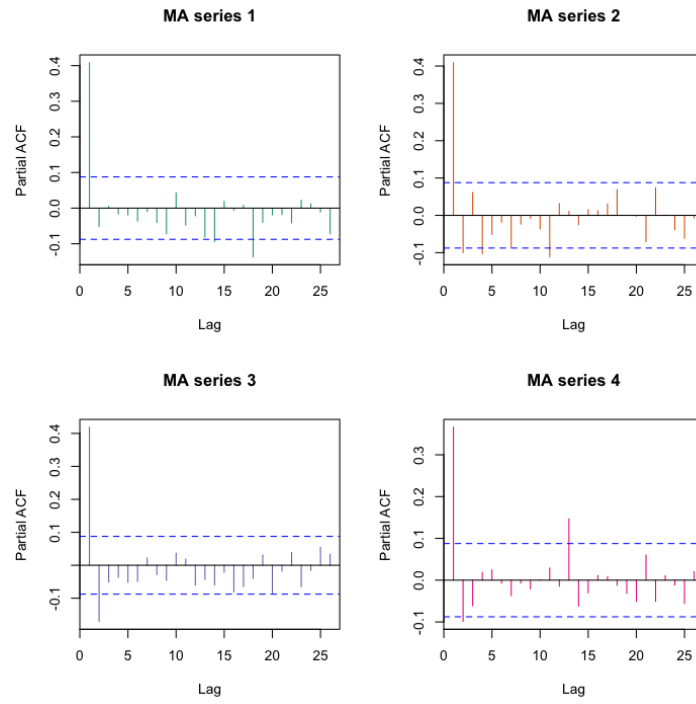


図 8: MA 過程の偏自己相関

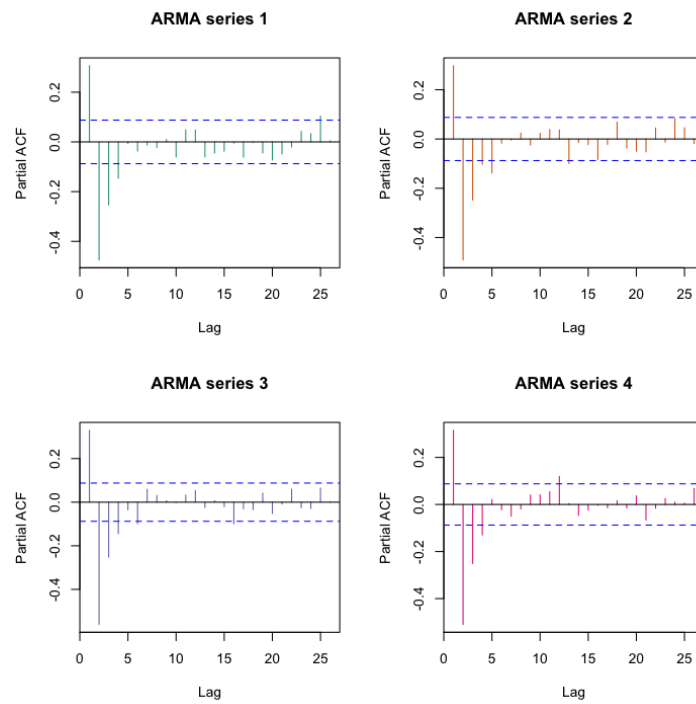


図 9: ARMA 過程の偏自己相関

モデルの推定に関する補足

- ARMA モデルの推定方法は主に以下の 3 つ
 - Yule-Walker 方程式
 - 最小二乗
 - * 予測誤差の平方和の最小化
 - * 回帰と同じだが、従属系列のため多重共線性に注意
 - 最尤推定
 - * WN の分布を仮定して同時尤度関数を設定
 - * 非線形最適化を行う
- 一般にモデルは近似なので、どの推定が良いかは問題による

演習

問題

- 以下で定義される MA(1) について問に答えなさい

$$X_t = b_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$$

- ラグ 2 までの自己共分散係数を求めなさい
- パラメタ b_1 が満すべき方程式を求めなさい

モデルによる予測

モデルによる予測

- 推定したモデルを用いて n 期先を予測
 - AR モデル: 観測時点までの観測値を用いて回帰
 - MA モデル: 観測時点までのホワイトノイズで回帰
 - ARMA モデル: 上記の複合
- いずれも n が大きいと不確実性が増大
- 階差による変換は累積 (階差の逆変換) により推定

分解による予測

- トренд成分+季節成分+ランダム成分への分解

$$X_t = T_t + S_t + R_t$$

- トренд成分: 時間の関数やランダムウォークなどを想定
- 季節成分: 周期的な関数を想定
- ランダム成分: ARMA モデルなどを想定
- 分解の考え方
 - ランダム成分: 適切な幅の移動平均が 0
 - 季節成分: 1 周期の平均が 0

解析事例