線形フィルタ回路

信号処理 講義 *10*

村田 昇

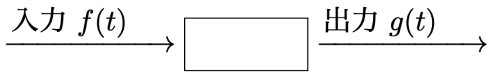
*2020*年 *8*月 *23*日

復習

フィルタ

- 定義

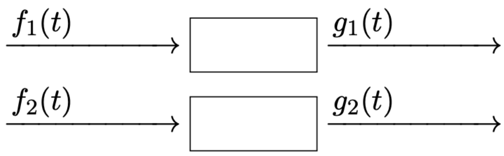
    入力 $f(t)$ を変換して出力 $g(t)$ を生成する機構

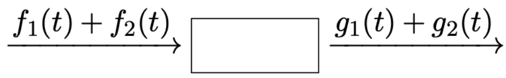


線形性

- 定義

    2 つの入出力関係を考えたとき，入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質



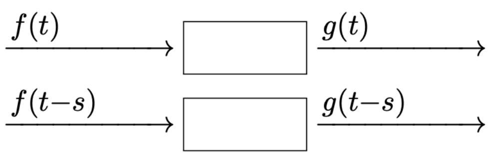


時不変性

- 定義

    入力の時刻が s ずれた場合，出力も s だけずれる性質

    – 時間が経過してもフィルタの性質は変わらない



線形時不変フィルタの数学的表現

- フィルタの積分表現

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds$$

- インパルス応答

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(t-s)ds$$

  – $h(t)$ はフィルタに $\delta(t)$ を入力した時の出力でもある

Fourier 変換による表現

- 時間領域では畳み込み積分

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds = h*f(t)$$

  – 周波数領域では関数の積

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$$

  – フィルタの機能は周波数毎の振幅と位相の変換

因果的フィルタ

- 定義

$$h(t) = 0 \; (t < 0)$$

  – 時刻 0 にインパルスが入力される前には何も出力がされない

- 因果的フィルタの畳み込み
  時刻 t での出力は時刻 t 以前での入力のみにより定まる

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)h(t-s)ds$$

演習

- 以下の問に答えよ
  – 関数 $te^{-\frac{t^2}{2}}$ を Fourier 変換せよ
  – 関数 $\Xi_{(-1,1)}(t)$ を Fourier 変換せよ
  – 関数 $(\sin(\omega)/\omega)^2$ を 逆 Fourier 変換せよ

解答

- 関数 $te^{-\frac{t^2}{2}}$ の Fourier 変換

  $$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\hat{f}(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}'](t) = -itf(t)$$

  を利用すればよい

  $$te^{-\frac{t^2}{2}} = (-e^{-\frac{t^2}{2}})'$$

  であるから

  $$\mathcal{F}[te^{-\frac{t^2}{2}}](\omega) = -i\omega\mathcal{F}[e^{-\frac{t^2}{2}}](\omega) = -i\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

- 関数 $\Xi_{(-1,1)}(t)$ の Fourier 変換

  $$\mathcal{F}[\Xi_{(-1,1)}](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

- 関数 $(\sin(\omega)/\omega)^2$ の 逆 Fourier 変換
  畳み込みを利用

  $$\mathcal{F}[h*f](\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$$

  $$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}^2](t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f*f(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}^2 \Xi_{(-1,1)}*\Xi_{(-1,1)}(t) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{8}}\Xi_{(-1,1)}*\Xi_{(-1,1)}(t)\end{aligned}$$

フィルタ回路

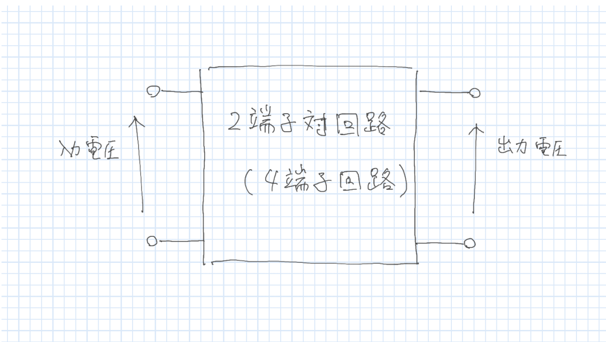
インパルス応答

- $\delta(t)$ を入力した時のフィルタ出力

  $$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds$$

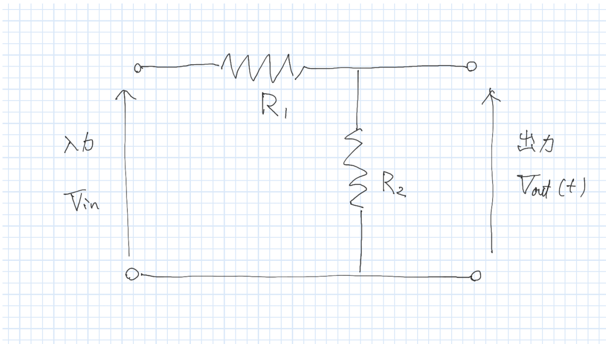
- 物理的には面積 1 $(\Delta \times 1/\Delta)$ の矩形波に対する出力を時間幅 $\Delta \to 0$ としたときの波形

2 端子対回路



例題

- 以下の回路の時間領域での入出力関係を求めよ
- 同じく周波数領域での入出力関係を求めよ



解答

- 時間領域

$$V_{out}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}(t)$$

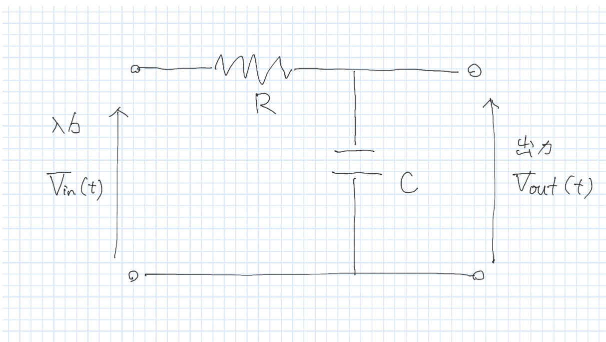
- 周波数領域

$$\hat{V}_{out}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \hat{V}_{in}(\omega)$$

- 同じ形になることに注意

例題

- 以下の回路の時間領域での入出力関係を求めよ
- 同じく周波数領域での入出力関係を求めよ



解答

- 時間領域

  以下の微分方程式が成り立つ

$$V_{in}(t) = RI(t) + V_{out}(t)$$
$$I(t) = C\frac{d}{dt}V_{out}(t)$$

整理して

$$V_{in}(t) = CR\frac{d}{dt}V_{out}(t) + V_{out}(t)$$

- 周波数領域

  時間領域の結果を Fourier 変換して

  $$\hat{V}_{in}(\omega) = i\omega CR\hat{V}_{out}(\omega) + \hat{V}_{out}(\omega)$$

  入出力の関係を見直して

  $$\hat{V}_{out}(\omega) = \frac{1}{i\omega CR + 1}\hat{V}_{in}(\omega)$$

- フィルタとしての関係

  $$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi}\cdot\hat{h}(\omega)\cdot\hat{f}(\omega)$$

  と比較して

  $$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \hat{V}_{in}(\omega)\\ \hat{g}(\omega) &= \hat{V}_{out}(\omega)\\ \sqrt{2\pi}\cdot\hat{h}(\omega) &= \frac{1}{i\omega CR + 1} = \frac{1}{iCR}\frac{1}{\omega - i/CR}\end{aligned}$$

  – 周波数依存性について考察せよ

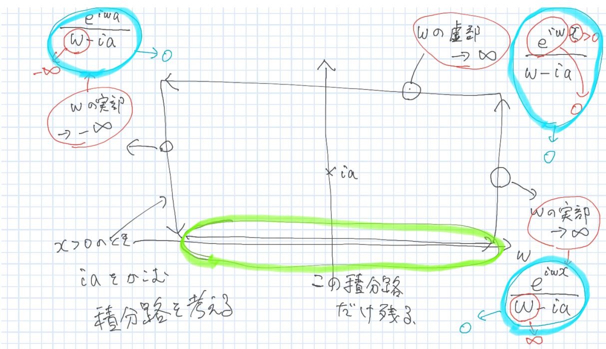
インパルス応答 (逆 Fourier 変換)

- 逆 Fourier 変換

  式を見易くするため $a = 1/CR$ とおく

  $$\begin{aligned}h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{h}](t)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \hat{h}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\\ &= \frac{a}{2\pi i}\int\frac{e^{i\omega t}}{\omega - ia}d\omega\end{aligned}$$

- 複素積分の積分路
  - $t > 0$ のとき，ia を囲む上半平面
  - $t < 0$ のとき，下半平面



- 留数定理

積分路が孤立特異点 c を含むとき以下が成り立つ

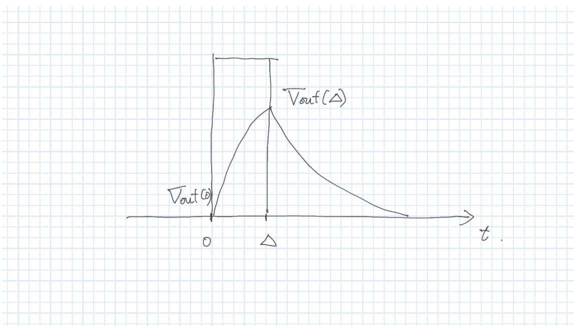
$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz = \mathrm{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)$$

- 計算結果

$$h(t) = \begin{cases} ae^{-at} = \frac{1}{CR}e^{-\frac{t}{CR}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

演習

- 矩形波の入力に対して微分方程式を直接解き，その極限からインパルス応答を求めよ．



解答例

- $0 < t \leq \Delta$

$$\frac{1}{\Delta} = CR\frac{d}{dt}V_{out}(t) + V_{out}(t)$$

$U(t) = V_{out}(t) - 1/\Delta$ と置くと

$$\frac{d}{dt}U(t) = -\frac{1}{CR}U(t)$$

よって

$$V_{out}(t) = ae^{-\frac{t}{CR}} + \frac{1}{\Delta}$$

- 初期条件 $V_{out}(0) = 0$

$$0 = a + \frac{1}{CR}$$

よって

$$V_{out}(t) = \frac{1}{\Delta}(1 - e^{-\frac{t}{CR}})$$

- $\Delta < t$

$$0 = CR\frac{d}{dt}V_{out}(t) + V_{out}(t)$$

よって

$$V_{out}(t) = ae^{-\frac{1}{CR}}$$

- 初期条件 $V_{out}(\Delta) = 1/\Delta \cdot (1 - e^{-\frac{\Delta}{CR}})$

$$\frac{1}{\Delta}(1 - e^{-\frac{\Delta}{CR}}) = ae^{-\frac{\Delta}{CR}}$$

よって

$$V_{out}(t) = \frac{1}{\Delta}(e^{\frac{\Delta}{CR}} - 1)e^{-\frac{t}{CR}}$$

- $\Delta \to 0$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}(e^{\frac{\Delta}{CR}} - 1) = \frac{1}{CR}$$

よって

$$V_{out}(t) = \frac{1}{CR}e^{-\frac{t}{CR}} \quad (t > 0)$$

まとめ

- 線形フィルタ回路
  - 時間領域での表現 (微分方程式)
  - 周波数領域での表現 (関数の積)
  - フィルタの周波数特性
  - インパルス応答の求め方