Hilbert 空間

信号処理 講義 *2*

村田 昇

*2020*年 *8*月 *23*日

復習

ベクトル空間

- 以下の条件を満たす
    1. $a, b \in V \ \Rightarrow \ a + b \in V$
    2. $a, b, c \in V \ \Rightarrow \ (a + b) + c = a + (b + c)$ (結合則)
    3. $a, b \in V \ \Rightarrow \ a + b = b + a$ (交換則)
    4. $\exists 0 \in V$ s.t. $\forall a \in V,\ a + 0 = a$ (零元)
    5. $\forall a \in V \ \Rightarrow \ \exists - a \in V$ s.t. $a + (-a) = 0$ (逆元)
    6. $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \ \Rightarrow \ \lambda a \in V$ (スカラ倍)
    7. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \ \Rightarrow \ (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ (結合則)
    8. $\exists 1 \in K$ s.t.$\forall a \in V,\ 1a = a$ (K の単位元)
    9. $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \ \Rightarrow \ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (分配則)
    10. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \ \Rightarrow \ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (分配則)

ベクトル空間の例

- 幾何ベクトル
- 数ベクトル
- 関数空間 $C^m[0, 1]$

    区間 $[0, 1]$ 上の実数値関数で，m 階微分可能な関数の集合．和とスカラ倍は以下で定義される．

$$
\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{(和)} \\
(\lambda f)(x) &= \lambda f(x) && \text{(スカラ倍)}
\end{aligned}
$$

線形独立

- 定義

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$$

となるのが $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ に限られるとき，$\{a_1, \ldots, a_k\}$ は **線形独立** であるという．

基底

- 定義

  V の極大独立集合を V の基底と呼ぶ．V の階数，すなわち極大独立集合の基数を V の **次元 (dimension)** という．

- 極大独立集合

  ある集合 S の線形独立な部分集合 $B \subset S$ を考える．$\forall b \in S - B$ において $B \cup \{b\}$ が線形従属のとき，B は **極大独立集合** であるという．

基底の重要性

- 定理

  $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ を V_n の基底とする．$\forall b \in V_n$ は B に線形従属で，

  $$b = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

  と一意に表される．

  – ベクトル b を数ベクトル $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ で表すことができる

内積空間

ベクトル空間に少し条件を加えた空間 $\mathcal{H}$ を考える．

内積

- 定義

  ベクトル空間の 2 つの要素 $u, v \in \mathcal{H}$ に対して，次の性質を持つ 2 変数関数を**内積**という．

  1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u \rangle = 0 \ \Rightarrow \ u = 0$
  2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (複素共役)
なお，体 K が実数の場合は $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
  3. $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$ (線形性)

  – $\langle u, v \rangle$, (u, v), $u \cdot v$ などいろいろな書き方があるが，講義では $\langle u, v \rangle$ を用いる

内積空間

- 定義

  内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**という．

内積空間の例

- 幾何ベクトル空間
- 数ベクトル空間
- 関数空間

内積の例

- 幾何ベクトル空間

  2 つの有効線分のなす角 θ とそれぞれの長さ $|u|, |v|$ を用いて定義

  $$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \theta$$

- 数ベクトル空間

2 つの複素数値ベクトル $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ に対して

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$$

ただし $\bar{\cdot}$ は複素共役

- 関数空間

  2 つの複素数値関数 u, v に対して

  $$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{v(x)}dx$$

ノルム

- 定義

  $u \in \mathcal{H}$ に対して，その**ノルム**を

  $$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

  で定義する．

  ノルムは以下の性質を満たす．

  - $\|u\| \geq 0$ 特に $\|u\| = 0 \ \Rightarrow \ u = 0$
  - $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \ \forall \alpha \in K$
    (係数体 K としては $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ を考え，$|\cdot|$ は K 上の絶対値を表す)
  - $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
  - $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)

距離

- 内積空間では自然に距離が導入される

  $d(u, v) = \|u - v\|$ を考えると d は**距離** になっている．

演習

- 距離の定義を述べよ．
- 2 つのベクトルの差のノルムが距離となることを確かめよ．
- 係数体を $\mathbb{C}$ とする内積空間 $\mathcal{H}$ を考える．内積およびノルムの性質として正しいものはどれか？
  - $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
  - $\|u\| = 0$ ならば $u = 0$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \|\alpha u\| = \alpha \|u\|$
  - $|\langle u, v \rangle| > \|u\| + \|v\|$

解答例

- 距離は以下の 4 つの条件を満たす
  - $d(x, y) \geq 0$ (非負性)
  - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (非退化性)
  - $d(x, y) = d(y, x)$ (対称性)
  - $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (三角不等式)

Hilbert 空間

点列の収束に関する強い条件を入れてより扱い易い内積空間を定義する．

完備性

- 定義

  ある集合の中で無限に続く点列 u_n を考え，この点列がだんだん動かなくなる状況を考える．

  $$\lim_{n,m\to\infty} d(u_n, u_m) = 0. \text{ (Cauchy 列という)}$$

  この点列の収束先 $\lim_{n\to\infty} u_n$ がもとの集合に含まれるとき，その集合は**完備**であるという．

完備性の例

- 有理数は完備でない

  点列 a_n を円周率の小数 n 桁以下を切り捨てた数と定義する．明らかに a_n は有限桁なので有理数であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$ は無理数

- 実数の区間 $[0, 1]$ は完備だが，$(0, 1)$ は完備でない

  点列 $1/n \in (0, 1)$ であるが，$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \notin (0, 1)$

Hilbert 空間

- 定義

  内積空間 $\mathcal{H}$ がノルムに関して完備なとき，**Hilbert 空間**という．

  - "ノルムに関して" とはノルムから自然に導出された距離を用いて Cauchy 列を考えるということ
  - 完備の厳密な定義は解析学の本を参照

Hilbert 空間の例 (1/2)

- l^2 空間 (無限次元数ベクトル空間)

$$l^2 = \left\{ u = (u_1, u_2, \dots),\ u_i \in K,\ \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \overline{v_i}$$

  - Cauchy-Schwarz の不等式 $\langle u, v\rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$ により，条件 (ノルムが有限の値を持つ) から必ず内積の値は存在
  - 完備性の証明はかなり面倒．興味のあるものは成書を参照

Hilbert 空間の例 (2/2)

- L^2 空間

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \;\middle|\; \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} dx$$

演習

- 以下の集合の中で完備なものはどれか?
  - 実数全体 $(-\infty, \infty)$
  - 0 以外の実数
  - 区間 $[0, 1]$ の無理数
- 実数 $\mathbb{R}$ を係数体とする以下の内積空間で Hilbert 空間となるものはどれか?
  - $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ (内積は $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$)
  - 区間 $[-1, 1]$ 上の実数値連続関数の空間 $C[-1, 1]$ (内積は $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$)

解答例

- $C[-1, 1]$ は Hilbert 空間にならない．

  関数列 f_n として例えば次のようなものを考える．

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & (x < -1/n) \\ nx, & (-1/n \le x \le 1/n) \\ 1, & (x > 1/n) \end{cases}$$

  f_n は連続関数であるが，$\lim_{n\to\infty} f_n$ は不連続になる．

まとめ

- 内積: ベクトル空間の 2 つの要素に対して定義され，以下の性質を持つ
  - $\langle u, u\rangle \ge 0$ 特に $\langle u, u\rangle = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$
  - $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ (複素共役)
  - $\langle \alpha u + \beta u', v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u', v\rangle$ (線形性)
- ノルム: 内積を用いて $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ で定義され，以下の性質を持つ
  - $\|u\| \ge 0$ 特に $\|u\| = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$
  - $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \; \forall\alpha \in K$
  - $|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
  - $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)
- 完備性: ある集合の点列の収束先がもとの集合に含まれること
- 内積空間: 内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間: 完備な内積空間