線形フィルタ

信号処理 - 第 8 講

村田 昇

前回のおさらい

Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi,\pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$
$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

  $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \qquad \text{(Fourier 変換)}$$
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \qquad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

  で定義する.

Parseval の定理

- 定理

  関数 f, g は $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする. このとき以下の関係が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega$$

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Plancherel の定理

- 定理

  関数 f は $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の関係が成り立つ．

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

  $$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

Riemann-Lebesgue の補題

- 定理

  関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ は滑らかで $f' \in L^1(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の性質をもつ．

  $$\lim_{|\omega| \to \infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

演算との関係

関数	Fourier 変換
$f'(x)$ (微分)	$i\omega \hat{f}(\omega)$
$f^{(k)}(x)$ (k 階微分)	$(i\omega)^k \hat{f}(\omega)$
$f * g(x)$ (畳み込み)	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$T_a f(x) = f(x-a)$ (移動)	$e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
$D_b f(x) = f(bx)$ (拡大縮小)	$1/b \cdot \hat{f}(\omega/b)$

演習

練習問題

- 関数

  $$f(x) = \frac{1}{x - ia} \quad (a > 0)$$

  の Fourier 変換を求めよ．

  - Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係を利用
  - **複素積分を利用** *(Cauchy* **の積分定理・留数定理***)*

解答例

- Cauchy の積分定理

  f を正則関数とするとき以下が成り立つ

  $$\oint f(z) dz = 0$$

- Cauchy の積分公式 (第 2 定理)

  f を正則関数とするとき以下が成り立つ

  $$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - c} dz$$

- 留数定理

積分路が孤立特異点 c を含むとき以下が成り立つ

$$\mathrm{Res}_{z=c} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz$$

- 留数計算

  孤立特異点が 1 位の極なら以下で計算できる

$$\mathrm{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)$$

- 以下の Fourier 変換を求める

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \frac{1}{x-ia}e^{-i\omega x}dx$$

- 被積分関数を以下で定義

$$g(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{\sqrt{2\pi}(z-ia)}$$

- 積分路

  $\omega < 0$ のとき積分路を ia を含む x 軸と上半平面で考える

  $\omega > 0$ のとき積分路は x 軸と下半平面で考える

  - $e^{-i\omega z}$, $(\omega < 0)$ が上半平面でどうなるか考えよ
  - $e^{-i\omega z}$, $(\omega > 0)$ が下半平面でどうなるか考えよ

$$\oint g(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + (\text{積分に寄与しない}) = \mathcal{F}[f](\omega)$$

- 留数

$$Res_{z=ia}g(z) = \lim_{z=ia}(z-ia)g(z) = \frac{e^{a\omega}}{\sqrt{2\pi}}$$

- 整理すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= 2\pi i Res_{z=ia}g(z)\\ &= \begin{cases} i\sqrt{2\pi}e^{a\omega}, & \omega < 0\\ 0, & \omega > 0\end{cases}\end{aligned}$$

練習問題

- 以下の関数の Fourier 変換を求めよ.

$$\frac{1}{x+ia}\ (a > 0)$$

$$\frac{a}{x^2+a^2}\ (a > 0)$$

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$

解答例

- 以下の関係を利用すればよい

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+ia} &= -i\sqrt{2\pi}\hat{g}(-x) \\
\frac{a}{x^2+a^2} &= \frac{a}{(x-ia)(x+ia)} \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia}\right)
\end{aligned}
$$

- 積の Fourier 変換は畳み込みを利用すればよい

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}[f*f](\alpha) = \sqrt{2\pi}\cdot\hat{f}(\alpha)^2 \\
&\mathcal{F}[\Xi_{(-1,1)}](\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{f}(\alpha) \\
&\mathcal{F}[\hat{f}^2](\omega) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}^2](-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f*f(-\omega) \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}^2\,\Xi_{(-1,1)}*\Xi_{(-1,1)}(-\omega) \\
&\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\Xi_{(-1,1)}*\Xi_{(-1,1)}(\omega)
\end{aligned}
$$

Fourier 変換の例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x),\ x\in\mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$
$e^{-ax^2},\ x\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia},\ x\in\mathbb{R}, a>0$	$\sqrt{2\pi}ie^{a\omega}\Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia},\ x\in\mathbb{R}, a>0$	$-\sqrt{2\pi}ie^{-a\omega}\Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2},\ x\in\mathbb{R}, a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert\omega\rvert}$

線形時不変フィルタ

注意

- 以降，音声や音楽などの時系列信号を扱う
- 時間 t を明示的に表すために

$$
f(t),\ g(t),\ h(t)
$$

のように書く

フィルタ

- 定義

  入力 $f(t)$ を変換して出力 $g(t)$ を生成する機構

$$
\xrightarrow{\text{入力 } f(t)} \boxed{} \xrightarrow{\text{出力 } g(t)}
$$

フィルタの例

- エレキギターのエフェクター (effects unit, pedal)
  - 歪み : オーバードライブ / ディストーション / ファズ
  - モジュレーション : コーラス / フランジャー / トレモロ
  - 空間系 : リバーブ / ディレイ
  - フィルタ : ワウ / ピッチシフター / ワーミー
  - その他 : イコライザー / コンプレッサー / ノイズゲート

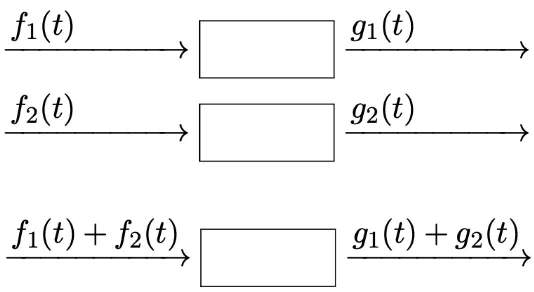
フィルタ

- 関数 $f(t)$ を関数 $g(t)$ に変換する
- 関数に作用する作用素 (演算子)
- いろいろな機能が有り得る
- 以降では理論的に扱い易い性質を想定

線形性

- 定義

  2 つの入出力関係を考えたとき，入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質



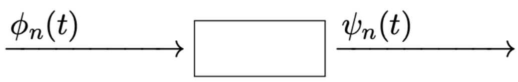
線形フィルタ

- 線形性を持つフィルタ
- 入力の分解表現

  入力信号 $f(t)$ を基底関数 $\phi_n(t)$ を用いて分解

  $$f(t) = \sum_n a_n \phi_n(t)$$

- フィルタによる基底関数の変換



- 出力の分解表現

  出力信号 $g(t)$ は変換された基底関数 $\psi_n(t)$ の合成

  $$g(t) = \sum_n a_n \psi_n(t)$$

- 入出力の基底の変換にだけ着目すれば十分

非線形フィルタ

- 信号の変換において非線形作用を持つフィルタ
- 多くのフィルタは線形性を持っている
- 線形でない例 (エフェクタ)
  - ディストーション
  - オーバードライブ

  入力信号の振幅の大きさによって歪みが生じる
- 非線形フィルタでは出力から入力を再現することが難しい

時不変性

- 定義

  入力の時刻が s ずれた場合，出力も s だけずれる性質
  - 時間が経過してもフィルタの性質は変わらない

$$\xrightarrow{f(t)} \boxed{} \xrightarrow{g(t)}$$

$$\xrightarrow{f(t-s)} \boxed{} \xrightarrow{g(t-s)}$$

フィルタの数学的表現

信号の近似

- 信号 $f(t)$ の階段関数近似

$$f_\tau(t) = \sum_n a_n \Delta(t-t_n)$$

- 階段関数の基底

  $\Delta(t)$ は区間 $(0,\tau)$ で高さ 1 となる単一の矩形波で，時間 $t_n = n\tau$ だけシフトした矩形波の集合

$$\Delta(t-t_n) = \Delta(t-n\tau), \quad (n \text{ は整数})$$

- 矩形波 (基底関数) の変換

  矩形波 $\Delta(t)$ はフィルタによって $H(t)$ に変換される．

$$\xrightarrow{\Delta(t)} \boxed{} \xrightarrow{H(t)}$$

- 時不変性

  矩形波 Δ を平行移動したものはフィルタの時不変性により H を平行移動したものとなる．

$$\xrightarrow{\Delta(t-t_1)} \boxed{} \xrightarrow{H(t-t_1)}$$
$$\xrightarrow{\Delta(t-t_2)} \boxed{} \xrightarrow{H(t-t_2)}$$
$$\vdots$$
$$\xrightarrow{\Delta(t-t_n)} \boxed{} \xrightarrow{H(t-t_n)}$$

- 線形性

  フィルタの線形性から入力を定数倍すると出力も定数倍される.

$$\xrightarrow{a_1 \times \Delta(t-t_1)} \boxed{} \xrightarrow{a_1 \times H(t-t_1)}$$
$$\xrightarrow{a_2 \times \Delta(t-t_2)} \boxed{} \xrightarrow{a_2 \times H(t-t_2)}$$
$$\ldots$$
$$\xrightarrow{a_n \times \Delta(t-t_n)} \boxed{} \xrightarrow{a_n \times H(t-t_n)}$$

- 階段関数の変換

  階段関数

$$f_\tau(t) = \sum_n a_n \Delta(t-t_n)$$

  はフィルタにより H の線形和である

$$g_\tau(t) = \sum_n a_n H(t-t_n)$$

  に変換される.

積分による表現

- 階段関数の係数

  信号 $f(t)$ の階段関数近似の係数は $a_n = f(t_n) = f(n\tau)$ とすれば良い.

$$f_\tau(t) = \sum_n f(t_n)\Delta(t-t_n) = \sum_n f(n\tau)\Delta(t-n\tau)$$
$$g_\tau(t) = \sum_n f(t_n)H(t-t_n) = \sum_n f(n\tau)H(t-n\tau)$$

- 矩形波の極限

  関数 $\Delta(t)$ は区間 $(0,\tau)$ で高さ 1 となる単一の矩形波なので，極限は以下のようになる.

$$\delta_\tau(t) = \Delta(t)/\tau \xrightarrow{\tau\to 0} \delta(t) \text{ (デルタ関数)}$$

- 階段関数の極限

$$f_\tau(t) = \sum_n f(n\tau)\Delta(t-n\tau)/\tau \cdot \tau \xrightarrow{\tau\to 0} \int f(s)\delta(t-s)ds$$
$$g_\tau(t) = \sum_n f(n\tau)H(t-n\tau)/\tau \cdot \tau \xrightarrow{\tau\to 0} \int f(s)h(t-s)ds$$
$$H(t)/\tau \xrightarrow{\tau\to 0} h(t)$$

- $n\tau = s$ とおいて区分求積法の原理を用いればよい

- フィルタの積分表現

$$f(t) = \int f(s)\delta(t-s)ds$$
$$g(t) = \int f(s)h(t-s)ds$$

インパルス応答

- 変換された信号の表現 (畳み込み積分)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds$$

- 入力の表現

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t-s)ds$$

  - $f(s)$ は時刻 s のインパルス $\delta(t-s)$ の高さ

- フィルタの表現

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(t-s)ds$$

  - $h(t)$ はフィルタに $\delta(t)$ を入力した時の出力でもある
  - $h(t)$ をフィルタの **インパルス応答** という

因果的フィルタ

- 音響信号などのフィルタのインパルス応答

$$h(t) = 0 \ (t < 0)$$

  - 時刻 0 にインパルスが入力される前には何も出力がされない
  - 時間を遡ることがないという意味で **因果的** という

- 因果的フィルタの畳み込み

$$h(t-s) = 0 \ (t < s)$$

  時刻 t での出力は時刻 t 以前での入力のみにより定まる

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)h(t-s)ds$$

非因果的フィルタ

- 理想的なローパスフィルタ
(物理的な回路では作成することができない)
- 画像処理に用いられるフィルタ
(画素の上下左右に因果律があるわけではない)
- オフラインの信号処理
(時間遅れを許容するデジタル信号処理)

演習

練習問題

- 線形時不変フィルタの機能はインパルス応答の畳み込み積分として表される.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds = h*f(t)$$

この関係を Fourier 変換を用いて表せ.

解答例

- 入力信号 f とインパルス応答 h の Fourier 変換

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$
$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt$$

- 出力信号 g の Fourier 変換

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds\right)e^{-i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)e^{-i\omega(t-s)}e^{-i\omega s}dtds \\
&= \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)e^{-i\omega(t-s)}dt \\
&\qquad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds
\end{aligned}$$

- 整理すると

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi}\cdot\hat{h}(\omega)\cdot\hat{f}(\omega)$$

- 時間 t に対して ω は周波数に対応

  Fourier 変換した周波数領域で見るとフィルタの機能は周波数毎の振幅と位相の変換として理解できる.

今回のまとめ

- 線形時不変フィルタ
  - 線形性
  - 時不変性
  - 因果的フィルタ
- フィルタの数学的表現
  - 階段関数近似
  - 重ね合わせの原理
  - 畳み込み積分
  - インパルス応答