

# Fourier 級数の性質

信号処理 - 第 5 講

村田 昇

## 前回のおさらい

### ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間  
線形演算について閉じた空間
- 内積空間  
内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間  
ノルムに関して完備な内積空間

### Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理  
可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個**の要素からなる完全正規直交系が存在する.
- 定理  
可分な無限次元 Hilbert 空間は  $l^2$  空間と同型である.
- 定理  
 $\{\phi_k\}$  が  $\mathcal{H}$  の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

### Fourier 級数展開

- 定理  
 $f \in L^2(-\pi, \pi)$  は以下のように **Fourier 級数展開**される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

内積は  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$  に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

## 演習

### 練習問題

- 以下の関数  $f$  を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \in L^2(-\pi, \pi)$$

### 解答例

- Fourier 係数  $\langle f, \phi_n \rangle$  の計算
  - $n = 0$  のとき

$$\langle f, \phi_0 \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}$$

- Fourier 係数  $\langle f, \phi_n \rangle$  の計算
  - $n \neq 0$  のとき

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\ &= \left[ \frac{1}{-in} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-i\pi/2 \cdot n} - e^{i\pi/2 \cdot n}) \\ &= \frac{i}{n\sqrt{2\pi}} ((-i)^n - i^n) = \frac{i^{n+1}}{n\sqrt{2\pi}} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\sqrt{2\pi}}, & n \text{ が } 4 \text{ で割ると余り } 1 \\ \frac{-2}{n\sqrt{2\pi}}, & n \text{ が } 4 \text{ で割ると余り } 3 \\ 0, & n \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

- Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{i^{n+1} \{(-1)^n - 1\}}{2\pi n} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-i^{n+1}}{\pi(2m+1)} e^{i(2m+1)x} \end{aligned}$$

- 書き方はいろいろある

## 不連続点の性質

### 片側極限

- 定義

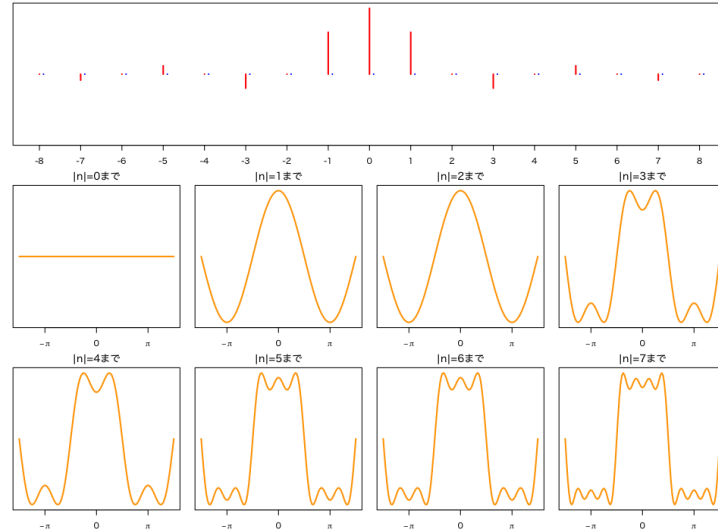


図 1: Fourier 係数と有限項での展開

$h > 0$  として

$$f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h)$$

$$f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$$

と書く。これを片側極限という。

## 不連続点

- 不連続関数

点  $x$  において不連続な関数を考える。

$$f(x-0) \neq f(x+0)$$

点  $x$  以外の近傍での有界性を仮定する。

$$\sup_{0 < h < \delta} |f(x-h) - f(x-0)| < \infty$$

$$\sup_{0 < h < \delta} |f(x+h) - f(x+0)| < \infty$$

## 不連続点での評価

- 定理で評価した式

$$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) \{f(x-y) - f(x)\} dy$$

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

- $P_r$  の性質

$P_r$  の積分は偶関数であることから以下が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^0 P_r(y) dy = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\infty} P_r(y) dy = \frac{1}{2}$$

- 不連続点まわりでの評価

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\delta}^{\delta} P_r(y) \{f(x-y) - f(x)\} dy \right| \\
& \leq \left| \int_{-\delta}^0 P_r(y) \{f(x-y) - f(x+0)\} dy \right| \\
& \quad + \left| \int_0^{\delta} P_r(y) \{f(x-y) - f(x-0)\} dy \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \sup_{-\delta < y < 0} |f(x-y) - f(x+0)| \\
& \quad + \frac{1}{2} \sup_{0 < y < \delta} |f(x-y) - f(x-0)| \\
& \rightarrow^{\delta \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

- 不連続点の Fourier 級数展開

関数  $f$  の Fourier 級数展開  $\tilde{f}$  は

$$\tilde{f}(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) dy = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

が成り立つので、 $f$  の不連続点での Fourier 級数展開は両側からの極限の平均値となる。

## 演習

### 練習問題

- 以下の関数  $f$  は  $x = \pi/2$  で不連続となる。Fourier 級数での  $f(\pi/2)$  の値を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \in L^2(-\pi, \pi)$$

### 解答例

- Fourier 級数展開に代入すればよい

$$\begin{aligned}
f(\pi/2) &= \frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{i^{n+1} \{(-1)^n - 1\}}{2\pi n} e^{i\pi/2 \cdot n} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{i^{-2n+1} \{(-1)^{-n} - 1\}}{-2\pi n} + \frac{i^{2n+1} \{(-1)^n - 1\}}{2\pi n} \right\} \\
&= \frac{1}{2} = \frac{f(\pi/2-0) + f(\pi/2+0)}{2}
\end{aligned}$$

## Fourier 係数の性質

### 畳み込み

- 定義

周期  $2\pi$  をもつ関数  $f$  と  $g$  の**畳み込み** (合成積; convolution)  $h$  は以下で定義される.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \\ &= f * g(x) \end{aligned}$$

- 関数  $f, g$  は周期  $2\pi$  をもつことに注意して, 変数変換  $x-y=z$  を用いて 2 つの定義が同値であることを確認せよ

## $L^p$ ノルム

- 定義

関数  $f$  の  $L^p$  ノルムを以下で定義する.

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ただし  $\Omega$  は定義域で, 一般には  $\mathbb{R}$  上の適当な区間.

- **内積から自然に導かれたノルムは  $L^2$  ノルムである**

## $L^p$ 空間

- 定義

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \left\{ f \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \\ &= \{ f \mid \|f\|_{L^p} < \infty \} \end{aligned}$$

## Riemann-Lebesgue の定理

- 定理

$f \in L^1(-\pi, \pi)$  の Fourier 係数  $a_n = \langle f, \phi_n \rangle$  は

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0$$

となる.

- 証明

$f_r$  の Fourier 係数を  $a_n(r)$  と書くと

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq |a_n - a_n(r)| + |a_n(r)| \\ &= |a_n - a_n(r)| + |a_n| r^{|n|} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - P_r * f\|_{L^1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{|n|} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

ただし  $*$  は畳み込みを表す.

ここで  $r$  を 1 に近くとれば第 1 項はいくらでも小さくすることができる. また  $|n|$  を十分大きくとれば第 2 項はいくらでも小さくなるので,  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0$  が示される.

- (証明のつづき)

最後の不等号は以下を用いればよい.

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left| \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x) e^{-inx}| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}\end{aligned}$$

–  $L^1$  関数であれば係数の存在が保証されることを示している

## Riemann-Lebesgue の定理の応用

- Fourier 級数の項別微分

関数  $f$  は区間  $(-\pi, \pi)$  で連続,  $f(-\pi) = f(\pi)$ , ほとんどいたるところで  $f'$  が存在し,  $f' \in L^2 \cap L^1$  であるとする.  $f, f'$  の Fourier 級数展開をそれぞれ以下で表す.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_n a_n \phi_n(x) \\ f'(x) &= \sum_n b_n \phi_n(x)\end{aligned}$$

$f$  を項別に微分して  $a_n$  と  $b_n$  の間の以下の関係を得る.

$$b_n = in \cdot a_n$$

- 滑らかな関数の高周波成分

Riemann-Lebesgue の定理より  $b_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) なので,  $a_n = o(1/n)$  (Landau の記号) となる. すなわち微分できるくらい滑らかな関数は  $n \rightarrow \infty$  において  $1/n$  より速く  $a_n$  が小さくなる (高周波成分が減衰する).

## 関数の積とノルム

### Hölder の不等式

- 定理

$1/p + 1/q = 1$ ,  $p, q > 0$  とする. このとき

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right| \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

– **Cauchy-Schwarz の不等式 ( $p = q = 2$ ) の一般化である**

- 証明

対数関数の凸性と  $1/p + 1/q = 1$  から任意の  $a, b > 0$  について

$$\log \left( \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log ab$$

が成り立つ.

– 凸性について曖昧な者は意味を確認せよ

- (証明のつづき)

また対数関数の単調性から

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}} \left| \int u(x)v(x)dx \right| &\leq \int \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}} dx \\ &\leq \frac{1}{p\|u\|_{L^p}^p} \int |u(x)|^p dx + \frac{1}{q\|v\|_{L^q}^q} \int |v(x)|^q dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

## 畳み込みのノルム

- 定理

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

とすると

$$\|h\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

- 証明

$1/p + 1/q = 1$  とする.

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \int |f(x-y)g(y)|dy \\ &= \int |f(x-y)| |g(y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|^{\frac{1}{q}} dy \\ &\leq \left( \int |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

が成り立つ.

- (証明のつづき)

これより

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^p}^p &= \int |h(x)|^p dx \\ &\leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int \int |f(x-y)|^p |g(y)| dy dx \\ &= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int |f(x-y)|^p dx \int |g(y)| dy \\ &= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

## 畳み込みの Fourier 級数

- 係数の存在

先の定理において  $p = 1$  とすると

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

となり,  $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$  なら  $h \in L^1(-\pi, \pi)$  となる. このことから畳み込み  $h$  の Fourier 係数が存在することが保証される.

- 係数の関係

$f, g, h$  の Fourier 係数をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n$  とすると

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x-y) g(y) dy e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x-y) e^{-in(x-y)} g(y) e^{-iny} dx dy \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(z) e^{-inz} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(y) e^{-iny} dy \\ &= \sqrt{2\pi} a_n b_n \end{aligned}$$

という関係が成り立つ.

## 演習

### 練習問題

- 関数  $f$  を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \in L^2(-\pi, \pi)$$

とするとき, 畳み込み  $f * f$  を求めよ.

- 関数  $f * f$  を Fourier 級数展開せよ.

### 解答例

- 周期関数であることに注意して定義に従って計算する.

$$\begin{aligned} f(x-y) &= \begin{cases} 1, & -\pi/2 \leq x-y \leq \pi/2 \\ 0, & |x-y| > \pi/2 \end{cases} \\ f * f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) f(y) dy \\ &= \begin{cases} \pi - x, & x \geq 0 \\ \pi + x, & x < 0 \end{cases} = \pi - |x| \end{aligned}$$

- $f(x-y), f(y)$  とともに 1 となる範囲を考えれば良い
- $|x| \in L^2(-\pi, \pi)$  の Fourier 級数展開と比較せよ

## 今回のまとめ

- Fourier 級数の性質
  - Fourier 級数展開:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



- 不連続点での Fourier 級数の値は平均値
- 連続 (滑らか) な関数に高い周波数は含まれない (Riemann-Lebesgue の定理)
- 畳み込みの Fourier 係数は元の関数の係数の積に比例する