Fourier 変換

信号処理 - 第 *6* 講

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間

  線形演算について閉じた空間

- 内積空間

  内積が定義されたベクトル空間

- Hilbert 空間

  ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間には可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する.

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.

- 定理

  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

  $$\forall u \in \mathcal{H} \;\Rightarrow\; u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

  $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

  $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

  $$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 以下が周期 T の直交系となるように α を定めよ.

$$\{e^{\alpha inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

- 以下を内積とするとき前問の直交系を正規化せよ.

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

解答例

- 周期

  区間 $[-\pi, \pi]$ と区間 $[-T/2, T/2]$ の関係を考えればよい.

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}$$

- 正規化

  正規化定数を $c_n(> 0)$ とするとき，内積の定義より

$$|c_n|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{\frac{2\pi inx}{T}}|^2 dx = |c_n|^2 T$$

  であるから

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi inx}{T}},\ x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right],\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  となる.

Fourier 変換

Fourier 級数の一般化

- 周期 2π の場合 ($x \in [-\pi, \pi]$ で考えよ)

  正規直交系 :

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- 周期 T の場合 ($x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ で考えよ)

  正規直交系 :

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi inx}{T}},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- 周期 T の場合

Fourier 級数展開は以下で与えられる．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x) \\
&= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n x}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-\frac{2\pi i n y}{T}} dy
\end{aligned}
$$

- 極限操作のための書き換え

  ここで $\frac{2\pi}{T} = \Delta$ とする．

$$
f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} f(y) e^{-in\Delta y} dy
$$

- 周期無限大における積分

  T が十分大きい (Δ が十分小さい) 極限を考えるために，以下の積分を定義する．

$$
\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy
$$

- 級数和の近似

  Fourier 展開の積分部分は $\sqrt{2\pi}\hat{f}(n\Delta)$ で十分良く近似できると考え Riemann 和の形で書く．

$$
f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \hat{f}(n\Delta) \Delta
$$

- 区分求積法

  Riemann 和は $n\Delta \to \omega, \Delta \to d\omega$ として積分で表される．

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta) \cdot \Delta \xrightarrow{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega
$$

- 周期無限大における表現

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(反転公式)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy d\omega
\end{aligned}
$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

  $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx && \text{(Fourier 変換)} \\
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(逆 Fourier 変換)}
\end{aligned}
$$

  で定義する．

多次元 Fourier 変換

- d 次元の場合

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 f について

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}}dx \qquad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}}d\omega \qquad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

で定義する．なお $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^d$ とベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ の通常の内積である．

演習

練習問題

- 以下の積分値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2}dx$$

解答例

- 2 重積分を利用する

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\epsilon r^2}rdrd\theta && \text{(極座標変換)} \\
&= 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-\epsilon r^2}rdr && \text{(変数変換} z = r^2\text{)} \\
&= \pi\int_{0}^{\infty} e^{-\epsilon z}dz
\end{aligned}$$

- 解答

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}$$

練習問題

- 関数 Ξ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x\in(a,b) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

以下の関数の Fourier 変換を求めよ．

- $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)$ $(\alpha > 0)$
- $g(x) = e^{-\beta x^2}$ $(\beta > 0)$
- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

解答例

- $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha x}e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(-\alpha-i\omega)x}}{-\alpha-i\omega}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha+i\omega)}
\end{aligned}
$$

- $g(x) = e^{-\beta x^2}$

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2}e^{-i\omega x}dx \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta(x+i\omega/2\beta)^2}dx \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}
\end{aligned}
$$

- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^1 e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\omega}(e^{i\omega}-e^{-i\omega}) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}
\end{aligned}
$$

Fourier 変換の例

応用上重要な関数の例

- 定義関数
  関数 Ξ を以下で定義する．

$$
\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}
$$

- 代表的な例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x),\ x\in\mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$
$e^{-ax^2},\ x\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia},\ x\in\mathbb{R}, a>0$	$\sqrt{2\pi}ie^{a\omega}\Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia},\ x\in\mathbb{R}, a>0$	$-\sqrt{2\pi}ie^{-a\omega}\Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2},\ x\in\mathbb{R}, a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert\omega\rvert}$

反転公式の証明

証明

- step 1

  関数 $\hat{f}$ は各点で値が決まるが，積分

  $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

  の値が存在するかどうかはわからない.

- step 2

  収束因子 $e^{-\epsilon\omega^2}$ を用いて以下の積分を定義する.

  $$\begin{aligned}f_\epsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-\epsilon\omega^2}e^{i\omega x}d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\epsilon\omega^2+i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\omega y}dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\epsilon\omega^2-i\omega(y-x)}d\omega\end{aligned}$$

- step 3

  指数の肩を整理する.

  $$-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x) = -\epsilon\left(\omega + \frac{i(y-x)}{2\epsilon}\right)^2 - \frac{(y-x)^2}{4\epsilon}$$

- step 4

  ω の積分を行い f_ϵ を整理する.

  $$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}}f(y)dy$$

- step 5

  関数 G_ϵ (Gauss 核と呼ばれる) を

  $$G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

  と定義し，f_ϵ を畳み込みで書き直す.

  $$f_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty}G_\epsilon(x-y)f(y)dy = G_\epsilon * f(x)$$

- step 6

  関数 G_ϵ は以下の性質を持つことが確かめられる.

  1. $G_\epsilon(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty}G_\epsilon(x)dx = 1$
  3. $\forall\delta > 0\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\delta}G_\epsilon(x)dx = 0$

  したがって G_ϵ は $\epsilon \to 0$ において Dirac の δ 関数になる.

  - ***Fourier* 級数展開の証明で出た *Poisson* 核と同様な性質**

反転公式

- 定理

$$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば，上の式は L^p の意味で成り立つと表現される．

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|G_\epsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

今回のまとめ

- Fourier 変換
  - Fourier 級数の周期の一般化
  - 周期無限大の極限の表現
  - Fourier 変換と反転公式
  - Gauss 核による反転公式の証明