Hilbert 空間

信号処理 - 第 2 講

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間

- 以下の条件を満たす
    1. $a, b \in V \implies a + b \in V$ **(線形性)**
    2. $a, b, c \in V \implies (a + b) + c = a + (b + c)$ (結合則)
    3. $a, b \in V \implies a + b = b + a$ (交換則)
    4. $\exists 0 \in V$ s.t. $\forall a \in V,\ a + 0 = a$ (零元)
    5. $\forall a \in V \implies \exists - a \in V$ s.t. $a + (-a) = 0$ (逆元)
    6. $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \implies \lambda a \in V$ **(スカラ倍)**
    7. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \implies (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ (結合則)
    8. $\exists 1 \in K$ s.t.$\forall a \in V,\ 1a = a$ (K の単位元)
    9. $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \implies \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (分配則)
    10. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \implies (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (分配則)

ベクトル空間の例

- 幾何ベクトル
- 数ベクトル
- 関数空間 $C^m[0, 1]$

  区間 $[0, 1]$ 上の実数値関数で，m 階微分可能な関数の集合．和とスカラ倍は以下で定義される．

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{(和)}$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \text{(スカラ倍)}$$

線形独立

- 定義

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$$

となるのが $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ に限られるとき，$\{a_1, \ldots, a_k\}$ は **線形独立** であるという．

基底

- 定義

  V の極大独立集合を V の基底と呼ぶ．V の階数，すなわち極大独立集合の基数を V の **次元 (dimension)** という．

- 極大独立集合

  ある集合 S の線形独立な部分集合 $B \subset S$ を考える．$\forall b \in S - B$ において $B \cup \{b\}$ が線形従属のとき，B は **極大独立集合** であるという．

基底の重要性

- 定理

  $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ を V_n の基底とする．$\forall b \in V_n$ は B に線形従属で，

  $$b = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

  と一意に表される．

  - ベクトル b を数ベクトル $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ で表すことができる

演習

練習問題

- 以下の集合 V のうちベクトル空間はどれか？
  - $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi)$ かつ $f^{(2)} + f^{(1)} + f = 0\}$
  - $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi)$ かつ $f^{(2)} + f^{(1)} + f = 1\}$
- 以下の集合のうち線形独立なものはどれか？
  - $\{1,\ x,\ x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
  - $\{1 - x,\ 1 + x,\ 1 - x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
- 以下のベクトル空間の空間の次元は?
  - $C^m[0, 1]$
  - $V = \{f(x) = a + bx + cx^2,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

内積空間

内積

- 定義

  ベクトル空間の 2 つの要素 $u, v \in \mathcal{H}$ に対して，次の性質を持つ 2 変数関数を**内積**という．

  1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u \rangle = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$
  2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (複素共役)
     なお，体 K が実数の場合は $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
  3. $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$ (線形性)

  - $\langle u, v \rangle$, (u, v), $u \cdot v$ などいろいろな書き方があるが，講義では $\langle u, v \rangle$ を用いる

内積空間

- 定義

  内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**という．

内積空間の例

- 幾何ベクトル空間
- 数ベクトル空間
- 関数空間

内積の例

- 幾何ベクトル空間

  2 つの有効線分のなす角 θ とそれぞれの長さ $|u|, |v|$ を用いて定義

  $$\langle u, v\rangle = |u||v|\cos\theta$$

- 数ベクトル空間

  2 つの複素数値ベクトル $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ に対して

  $$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$$

  ただし $\bar{\cdot}$ は複素共役

- 関数空間

  $\mathbb{R}$ 上で定義された 2 つの複素数値関数 u, v に対して

  $$\langle u, v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\overline{v(x)}dx$$

  - 定義域が Ω で表される場合に

    $$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx$$

  のように書くこともある

ノルム

- 定義

  $u \in \mathcal{H}$ に対して，その**ノルム**を

  $$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

  で定義する．

- ノルムの性質
  - $\|u\| \geq 0$ 特に $\|u\| = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$
  - $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \; \forall\alpha \in K$
    (係数体 K としては $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ を考え，$|\cdot|$ は K 上の絶対値を表す)
  - $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
  - $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)

距離

- 内積空間では自然に距離が導入される

  $d(u, v) = \|u - v\|$ を考えると d は**距離** になっている．

演習

練習問題

- 距離の定義を述べよ．
- 2 つのベクトルの差のノルムが距離となることを確かめよ．
- 係数体を $\mathbb{C}$ とする内積空間 $\mathcal{H}$ を考える．内積およびノルムの性質として正しいものはどれか？
  - $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
  - $\|u\| = 0$ ならば $u = 0$
  - $\forall\alpha \in \mathbb{C},\ \|\alpha u\| = \alpha\|u\|$
  - $|\langle u, v\rangle| > \|u\| + \|v\|$

Hilbert 空間

完備性

- 定義

  ある集合の中で無限に続く点列 u_n を考え，この点列がだんだん動かなくなる状況を考える．

  $$\lim_{n,m\to\infty} d(u_n, u_m) = 0. \text{ (Cauchy 列という)}$$

  この点列の収束先 $\lim_{n\to\infty} u_n$ がもとの集合に含まれるとき，その集合は**完備**であるという．

完備性の例

- 有理数は完備でない

  点列 a_n を円周率の小数 n 桁以下を切り捨てた数と定義する．明らかに a_n は有限桁なので有理数であるが，$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$ は無理数
- 実数の区間 $[0, 1]$ は完備だが，$(0, 1)$ は完備でない

  点列 $1/2n \in (0, 1)$ であるが，$\lim_{n\to\infty} 1/2n = 0 \notin (0, 1)$

Hilbert 空間

- 定義

  内積空間 $\mathcal{H}$ がノルムに関して完備なとき，**Hilbert 空間**という．
  - “ノルムに関して” とはノルムから自然に導出された距離を用いて Cauchy 列を考えるということ
  - 完備の厳密な定義は解析学の本を参照

Hilbert 空間の例

- l^2 空間 (無限次元数ベクトル空間)

  $$l^2 = \{u = (u_1, u_2, \ldots),\ u_i \in K,\ \|u\| < \infty\}$$

  $$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \overline{v_i}, \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2.$$

  - Cauchy-Schwarz の不等式 $\langle u, v\rangle \le \|u\| \cdot \|v\|$ により，条件 (ノルムが有限の値を持つ) から必ず内積の値は存在

- 完備性の証明はかなり面倒．興味のあるものは成書を参照

- L^2 空間

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \,\middle|\, \|f\| < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx, \quad \|f\|^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 dx$$

  - 今後扱う信号の空間に対応する
  - ノルムが有界であることは信号の物理的な性質と関係する

演習

練習問題

- 以下の集合の中で完備なものはどれか?
  - 実数全体 $(-\infty, \infty)$
  - 0 以外の実数
  - 区間 $[0, 1]$ の無理数
- 実数 $\mathbb{R}$ を係数体とする以下の内積空間で Hilbert 空間となるものはどれか?
  - $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ (内積は $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$)
  - 区間 $[-1, 1]$ 上の実数値連続関数の空間 $C[-1, 1]$ (内積は $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$．不連続な点がない関数．微分できなくても良い)

今回のまとめ

- 内積 : ベクトル空間の 2 つの要素に対して定義され，以下の性質を持つ
  - $\langle u, u \rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u \rangle = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$
  - $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (複素共役)
  - $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$ (線形性)
- ノルム : 内積を用いて $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ で定義され，以下の性質を持つ
  - $\|u\| \geq 0$ 特に $\|u\| = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$
  - $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \; \forall \alpha \in K$
  - $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
  - $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)
- 完備性 : ある集合の点列の収束先がもとの集合に含まれること
- 内積空間 : 内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間 : 完備な内積空間