Fourier 変換の性質

信号処理 講義 *8*

村田 昇

*2020*年 *8*月 *23*日

復習

Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi,\pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される．

  $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

  $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して以下で定義する．

  $$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

  $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して

  $$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx && \text{(Fourier 変換)} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(逆 Fourier 変換)} \end{aligned}$$

  で定義する．

反転公式

- 定理

  $$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

  より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば，上の式は L^p の意味で成り立つと表現される．

  $$\lim_{\epsilon \to 0} \| G_\epsilon * f - f \|_{L^p} = 0$$

演習

- 以下の問に答えよ．
  - 次の関数 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ を Fourier 級数展開せよ．

$$f(x) = |\sin(x)|$$

解答例

- 関数 $\sin(x)$ は $\exp(ix)$ と $\exp(-ix)$ で表せる．
- 積分計算は $n = \pm 1$ で場合分けが必要となる．
- 関数 f は別の表現も可能

$$\begin{aligned} f(x) &= |\sin(x)| \\ &= \begin{cases} -\sin(x), & x \leq 0 \\ \sin(x), & x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cos(x + \pi/2), & x \leq 0 \\ \cos(x - \pi/2), & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  - 前回の計算結果を利用できる．

- Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{4} e^{-i(x+\pi/2)} + \frac{1}{4} e^{i(x+\pi/2)} + \sum_{n \neq \pm 1} \frac{i^n}{2\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2} e^{in(x+\pi/2)} \\ + \frac{1}{4} e^{-i(x-\pi/2)} + \frac{1}{4} e^{i(x-\pi/2)} + \sum_{n \neq \pm 1} \frac{i^n}{2\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2} e^{in(x-\pi/2)} \\ = \sum_{n \neq \pm 1} \frac{(-1)^n + 1}{\pi(1 - n^2)} e^{inx} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1 - 4m^2)} e^{2imx} \end{aligned}$$

演習

- 関数 Ξ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

  以下の関数の Fourier 変換を求めよ．
  - $f(x) = e^{-\alpha x} \Xi_{(0,\infty)}(x)$ $(\alpha > 0)$
  - $g(x) = e^{-\beta x^2}$ $(\beta > 0)$
  - $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

解答例

- $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha x}e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(-\alpha-i\omega)x}}{-\alpha-i\omega}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha+i\omega)}
\end{aligned}
$$

- $g(x) = e^{-\beta x^2}$

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2}e^{-i\omega x}dx \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\beta(x+i\omega/2\beta)^2}dx \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}
\end{aligned}
$$

- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^1 e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\omega}(e^{i\omega}-e^{-i\omega}) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}
\end{aligned}
$$

演習

- 関数

$$
f(x) = \frac{1}{x-ia}\ (a>0)
$$

  の Fourier 変換を求めよ．
  - Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係を利用
  - 複素積分を利用

Fourier 変換の性質

Fourier 変換の基本的な性質を確認する．

記法

- 関数の対応
  - f: もとの関数 (以下では Fourier 変換の存在を仮定)
  - $\hat{f}$: Fourier 変換
- 変換の演算子
  - $\mathcal{F}$: Fourier 変換
  - $\mathcal{F}^{-1}$: 逆 Fourier 変換

  例えば

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f], \qquad f = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$$
$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega), \qquad f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)$$

  のように使う.

- 引数に関する注意

  関数の引数 (変数) は単なる名前なので何でも良い.

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{-i\alpha\beta} d\beta$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha\beta} d\alpha$$

対象とする関数の性質

- 絶対可積分

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

  この条件を満たすとき各点で Fourier 変換が存在する.

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \end{aligned}$$

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

- $|x| \to \infty$ での挙動

  適当に大きな値 $M > 0$ に対して

$$|f(x)| > \epsilon > 0, \ |x| > M$$

  とすると，以下のように絶対可積分に矛盾する.

$$\int_{-\infty}^{-M} |f(x)| dx + \int_{M}^{\infty} |f(x)| dx > \epsilon \times (\text{積分区間}) \to \infty$$

  したがって以下の性質が成り立つ.

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$$

Parseval の定理

- 定理

  関数 f, g は $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の関係が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega$$

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

- 略証

  反転公式と同様に収束因子を考える．

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}e^{-\epsilon\omega^2}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y)e^{i\omega y}}dy \cdot e^{-\epsilon\omega^2}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(y)G_\epsilon(x-y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g_\epsilon(x)}dx
\end{aligned}$$

  $\epsilon \to 0$ とすると定理の両辺が一致することがわかる．

Plancherel の定理

- 定理

  関数 f は $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の関係が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2d\omega$$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

Riemann-Lebesgue の定理 (補題)

- 定理

  関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ は滑らかで $f' \in L^1(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の性質をもつ．

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

- 略証

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\omega)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right| \\
&< \left|\left[\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-\infty}^{\infty}\right| + \left|\frac{1}{i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx\right| \\
&< \frac{1}{|\omega|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx \\
&= \frac{1}{|\omega|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f'\|_{L^1}
\end{aligned}$$

  より明らか．

演算との関係

関数に対する演算と Fourier 変換の関係を確認する．

符号の反転

- 練習問題

  関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(-x)$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

- 解答例

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(z) e^{i\omega z} (-dz) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\omega z} dz \\
&= \mathcal{F}[f](-\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f](\omega)
\end{aligned}
$$

- 注意

  符号が反転しているだけなので，ほとんど対称だと思ってよい．すなわち，Fourier 変換 $\mathcal{F}$ について成り立つことは逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}$ でも成り立つ．ただし符号の反転などには注意すること．

微分

- 練習問題

  関数 f の Fourier 変換と関数 $g = f'$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

- 解答例

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \left[\frac{f(x) e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\
\mathcal{F}[f'](\omega) &= i\omega \mathcal{F}[f](\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)
\end{aligned}
$$

  - Fourier 変換可能な関数は $|x| \to \infty$ での値が 0 になるとしてよい．

高階微分

- 練習問題

  関数 f の Fourier 変換と関数 $g = f^{(k)}$ (k 階微分) の Fourier 変換の関係を考えよ．

- 解答例

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= \left[\frac{f^{(k-1)}(x) e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(x) e^{-i\omega x} dx \\
&= (\text{部分積分を繰り返す}) \\
\mathcal{F}[f^{(k)}](\omega) &= (i\omega)^k \mathcal{F}[f](\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega)
\end{aligned}
$$

畳み込み

- 練習問題

  関数 f, g の Fourier 変換と関数 $h = f*g$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = f*g(x)$$

- 解答例

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[h](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f*g(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dye^{-i\omega x}dx \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}dy \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\omega z}dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}dy \\
\mathcal{F}[f*g](\omega) &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)
\end{aligned}$$

移動

- 練習問題

  関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(x-a)$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

- 解答例

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\omega x}dx \\
&= e^{-i\omega a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\omega(x-a)}dx \\
&= e^{-i\omega a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\omega z}dz \\
\mathcal{F}[T_a[f]](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega) = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

拡大縮小

- 練習問題

  関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(bx)$ $(b > 0)$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

- 解答例

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(bx)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\omega/b\cdot z}dz \\
\mathcal{F}[D_b[f]](\omega) &= \frac{1}{b}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{b}\right) = \frac{1}{b}\hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right)
\end{aligned}$$

演算との関係 (まとめ)

関数	Fourier 変換
$f'(x)$ (微分)	$i\omega\hat{f}(\omega)$
$f^{(k)}(x)$ (k 階微分)	$(i\omega)^k\hat{f}(\omega)$
$f*g(x)$ (畳み込み)	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$T_af(x)=f(x-a)$ (移動)	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$D_bf(x)=f(bx)$ (拡大縮小)	$1/b\cdot\hat{f}(\omega/b)$

まとめ

- Fourier 変換の性質
  - Fourier 変換な可能な関数
  - Fourier 変換の基本的な性質
    - Parseval の定理
    - Plancherel の定理
    - Riemann-Lebesgue の定理 (補題)
  - 関数の演算と Fourier 変換の関係