

# Fourier 級数

## 信号処理 - 第4講

村田 昇

## 前回のおさらい

### ベクトル空間

- 満たすべき条件
  - $a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$  (線形性)
  - $a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$  (結合則)
  - $a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a$  (交換則)
  - $\exists 0 \in V$  s.t.  $\forall a \in V, a + 0 = a$  (零元)
  - $\forall a \in V \Rightarrow \exists -a \in V$  s.t.  $a + (-a) = 0$  (逆元)
  - $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \Rightarrow \lambda a \in V$  (スカラー倍)
  - $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$  (結合則)
  - $\exists 1 \in K$  s.t.  $\forall a \in V, 1a = a$  ( $K$  の単位元)
  - $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \Rightarrow \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$  (分配則)
  - $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$  (分配則)

### 内積空間

- 内積の定義

ベクトル空間の2つの要素  $u, v \in \mathcal{H}$  に対して、次の性質を持つ2変数関数を**内積**という.

  - $\langle u, u \rangle \geq 0$  特に  $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$
  - $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  (複素共役)  
なお、体  $K$  が実数の場合は  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
  - $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$  (線形性)
- 定義

内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**という.

### Hilbert 空間

- 完備性の定義

ある集合の中の Cauchy 列

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(u_n, u_m) = 0$$

の収束先  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  がもとの集合に含まれるとき、その集合は**完備**であるという.
- 定義

ノルムに関して完備な内積空間を **Hilbert 空間**という.

## 正規直交系

- 定義

Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の部分集合  $\mathcal{A}$  が

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{A}, \phi \neq \psi \Rightarrow \langle \phi, \psi \rangle = 0$$

となるとき,  $\mathcal{A}$  を**直交系**という.

さらに

$$\forall \phi \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} = 1$$

となるとき,  $\mathcal{A}$  を**正規直交系**という.

## 完全正規直交系

- 定義

Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  の正規直交系  $\{\phi_k\}$  が **Parseval の等式**

$$\forall u \in \mathcal{H}, \|u\|^2 = \sum_k |\langle u, \phi_k \rangle|^2$$

を満たすとき,  $\{\phi_k\}$  を**完全正規直交系**という.

## 完全正規直交系の性質

- 定理

可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個**の要素からなる完全正規直交系が存在する.

- 定理

可分な無限次元 Hilbert 空間は  $l^2$  空間と同型である.

- 定理

$\{\phi_k\}$  が  $\mathcal{H}$  の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

## Fourier 級数

### 周期関数

- 周期的な信号: 性質の良い (取り扱い易い) 信号
- $2\pi$  周期の信号を考えることにする
- $\mathbb{R}$  上の関数  $f(x)$  が周期  $2\pi$  を持つ:

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

- 1 周期の範囲は  $(-\pi, \pi)$ ,  $(0, 2\pi)$ ,  $(\pi, 3\pi)$  など自由にとってよい
- 計算上取り扱いが簡単なので  $(-\pi, \pi)$  を用いる
- 対象とする関数は 2 乗可積分な複素数値関数とする

$$L^2(-\pi, \pi) = \left\{ f \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

## Fourier 級数展開

- 定理

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

とし,  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$  に対して内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義する.

- (定理のつづき)

$f \in L^2(-\pi, \pi)$  は以下のように **Fourier 級数展開** される.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy \end{aligned}$$

- あとで示すように

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

は  $L^2(-\pi, \pi)$  上の **完全正規直交系** となる.

- **正規直交系** であること容易に確かめられる.

$$\begin{aligned} \langle \phi_m, \phi_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (m \neq n), \end{aligned}$$

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1$$

## Fourier 級数展開の例

- 区間  $(-\pi, \pi)$  上の周期関数 (鋸波)

$$f(x) = x, \quad f \in L^2(-\pi, \pi)$$

- 係数は以下の式を計算すればよい

$$\langle f, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx$$

- 部分積分を用いて計算する ( $n \neq 0$  のとき)

$$\begin{aligned}
 \langle f, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\
 &= \left[ x \cdot \frac{1}{-in\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{1}{-in\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\
 &= \frac{\pi(-1)^n - (-\pi)(-1)^n}{-in\sqrt{2\pi}} - \left[ \frac{e^{-inx}}{-n^2\sqrt{2\pi}} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{i2\pi(-1)^n}{n\sqrt{2\pi}} - \frac{(-1)^n - (-1)^n}{-n^2\sqrt{2\pi}} \\
 &= \frac{i\sqrt{2\pi}(-1)^n}{n}
 \end{aligned}$$

- $n = 0$  も計算してまとめると以下のようなになる

$$x = i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}$$

- Euler の公式

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

を用いると三角関数で書くことができる

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

## 演習

### 練習問題

- $L^2(-\pi, \pi)$  に含まれる以下の関数を Fourier 級数展開せよ.
  - $f(x) = |x|$
  - $f(x) = x^2$

### 解答例

- 定義に則って計算すればよい
- $f(x) = |x|$

$$\begin{aligned}
 |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{i(2m+1)x} \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)x
 \end{aligned}$$

- 偶関数なので余弦関数で書き直すことができる

- $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \end{aligned}$$

–  $f(x) = x$  の結果と比較してみよ

## Fourier 級数の応用

### 級数和の計算

- 展開式から級数和に関していろいろな公式を得ることができる
- $f(x) = |x|$  に対して  $x = 0$  とすれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- $f(x) = x^2$  に対して  $x = 0$  とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

### Fourier 級数の性質

- 三角関数による展開

Euler の公式により以下のように変形することができる

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} + \frac{a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right) \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \cos nx + i \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \sin nx \right) \end{aligned}$$

– 正弦関数と余弦関数で完全正規直交系を構成できる

- 実数値関数の係数

関数  $f(x)$  が実数値の場合

$$\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2\pi}}, i \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{2\pi}}$$

は実数になるので  $a_n$  と  $a_{-n}$  は複素共役の関係にある.

- 定義域の異なる基底

$L^2(0, \pi)$  においては

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx; n = 1, 2, \dots \right\}$$
$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx; n = 1, 2, \dots \right\}$$

がそれぞれ完全正規直交系となる.

- $(0, \pi)$  で定義された関数をそれぞれ偶関数, 奇関数として  $(-\pi, \pi)$  に拡張すれば, 余弦関数または正弦関数のみで展開できることがわかる

## 演習

### 練習問題

- 以下の級数和を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (\text{Basel problem})$$

- 正弦関数と余弦関数で正規直交系を構成せよ.

### 解答例

- $f(x) = x^2$  の Fourier 級数展開において  $x = \pm\pi$  とすればよい

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- 三角関数の積の展開は公式を駆使してもよいが, Euler の公式から

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

となることを利用すればよい. またグラフより以下は明らか.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = 2\pi \times \frac{1}{2}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = 2\pi \times \frac{1}{2}$$

## Fourier 基底の完全性

### 完全性の証明

- step 1

関数  $f$  が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

と展開されたとする.

- step 2

Bessel の不等式 (の特殊な場合) から

$$|a_n| < \|f\|$$

であることはわかるが,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

の和が存在するとは限らない.

- step 3

収束因子を導入して収束する無限和の極限を考える.

$$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} \phi_n(x)$$

$0 < r < 1$  とすれば級数和は必ず存在する.

- step 4

級数和が収束するので積分と和を交換してもよい.

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-y)} f(y) dy \end{aligned}$$

- step 5

積分の中の級数和に着目して

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

とおく (Poisson 核という).

- step 6

関数

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

の右辺の和の各項は  $(-\pi, \pi)$  の周期関数なので,  $(-\infty, \infty)$  に拡大可能である.

- step 7

周期関数  $f$  も同様に  $(-\infty, \infty)$  に拡大可能であるので, 一周分積分区間を適切に取り直して

$$f_r(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y) f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) dy$$

と書き変えることができる.

- step 8

右辺の級数和を計算すると以下になる.

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - re^{ix}|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \end{aligned}$$

• step 9

$r \rightarrow 1$  とすると  $P_r(x)$  は Dirac の  $\delta$  関数となる.

- $P_r(x) > 0$  (3 行目の表現より明らか)
- $P_r$  の一周期の積分は

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_n r^{|n|} e^{inx} dx = 1$$

- $\forall \delta (0 < \delta < \pi)$  に対して

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} P_r(x) = 0$$

$\cos x$  は上記の範囲では  $\cos \delta$  で最大となることから

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \leq \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \delta} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$$

• step 10

$f_r$  と  $f$  の差

$$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) \{f(x-y) - f(x)\} dy$$

の積分を 3 つに分解して考える.

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$$

• step 11

$\delta$  と  $r$  は適当に選ぶことができることに注意する.

- 積分の第 1,3 項では  $P_r$  をいくらでも小さくすることができる
  - 第 2 項では  $f(x-y) - f(x)$  をいくらでも小さくすることができる
- この結果,  $\delta$  と  $r$  とを適当に選ぶことによって 3 つの積分の和はいくらでも小さくなる.

• step 12

以上より, 各点  $x$  において

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) = f(x)$$

となることが示された.

- 前回の定理 (完全性の同値な条件) の 2 を参照



## 今回のまとめ

- Fourier 級数展開 :
  - 周期関数 ( $\in L^2(-\pi, \pi)$ ) の Fourier 級数展開:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

- Fourier 基底の完全性 :

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

は完全正規直交系である.