# *Fourier* 変換

信号処理 - 第 *6* 講

村田 昇

## 前回のおさらい

### ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間

  線形演算について閉じた空間

- 内積空間

  内積が定義されたベクトル空間

- Hilbert 空間

  ノルムに関して完備な内積空間

### Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間には可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する.

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間は $l^2$ 空間と同型である.

- 定理

  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \;\Rightarrow\; u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

### Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

# 演習

## 練習問題

- 以下が周期 $T$ の直交系となるように $\alpha$ を定めよ.

$$\{e^{\alpha inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

- 以下を内積とするとき前問の直交系を正規化せよ.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

# Fourier 変換

## Fourier 級数の一般化

- 周期 $2\pi$ の場合 ($x \in [-\pi, \pi]$ で考えよ)
  正規直交系 :

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- 周期 $T$ の場合 ($x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ で考えよ)
  正規直交系 :

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{2\pi inx}{T}},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- 周期 $T$ の場合
  Fourier 級数展開は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi inx}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)e^{-\frac{2\pi iny}{T}}dy \end{aligned}$$

- 極限操作のための書き換え
  ここで $\frac{2\pi}{T} = \Delta$ とする.

$$f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} f(y)e^{-in\Delta y}dy$$

- 周期無限大における積分
  $T$ が十分大きい ($\Delta$ が十分小さい) 極限を考えるために，以下の積分を定義する.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy$$

- 級数和の近似

Fourier 展開の積分部分は $\sqrt{2\pi}\hat{f}(n\Delta)$ で十分良く近似できると考え Riemann 和の形で書く．

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \hat{f}(n\Delta)\Delta$$

- 区分求積法

  Riemann 和は $n\Delta \to \omega, \Delta \to d\omega$ として積分で表される．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta) \cdot \Delta \xrightarrow{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$$

- 周期無限大における表現

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(反転公式)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy d\omega \end{aligned}$$

### Fourier 変換と反転公式

- 定義

  $\mathbb{R}$ 上の関数 $f$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx && \text{(Fourier 変換)} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(逆 Fourier 変換)} \end{aligned}$$

  で定義する．

### 多次元 Fourier 変換

- d 次元の場合

  $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $f$ について

$$\begin{aligned} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} dx && \text{(Fourier 変換)} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} d\omega && \text{(逆 Fourier 変換)} \end{aligned}$$

  で定義する．なお $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ の通常の内積である．

## 演習

### 練習問題

- 以下の積分値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx$$

### 練習問題

- 関数 $\Xi$ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

以下の関数の Fourier 変換を求めよ．

- $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)$ $(\alpha > 0)$
- $g(x) = e^{-\beta x^2}$ $(\beta > 0)$
- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

# Fourier 変換の例

## 応用上重要な関数の例

- 定義関数

関数 $\Xi$ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

- 代表的な例

| 関数 | Fourier 変換 |
|---|---|
| $\Xi_{(-1,1)}(x),\ x \in \mathbb{R}$ | $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$ |
| $e^{-ax^2},\ x \in \mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}$ |
| $\frac{1}{x-ia},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$ | $\sqrt{2\pi}ie^{a\omega}\Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$ |
| $\frac{1}{x+ia},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$ | $-\sqrt{2\pi}ie^{-a\omega}\Xi_{(0,\infty)}(\omega)$ |
| $\frac{a}{x^2+a^2},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$ | $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert\omega\rvert}$ |

# 反転公式の証明

## 証明

- step 1

関数 $\hat{f}$ は各点で値が決まるが，積分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

の値が存在するかどうかはわからない．

- step 2

収束因子 $e^{-\epsilon\omega^2}$ を用いて以下の積分を定義する．

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-\epsilon\omega^2}e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\epsilon\omega^2+i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\omega y}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\epsilon\omega^2-i\omega(y-x)}d\omega \end{aligned}$$

- step 3

  指数の肩を整理する．

  $$-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x) = -\epsilon\left(\omega + \frac{i(y-x)}{2\epsilon}\right)^2 - \frac{(y-x)^2}{4\epsilon}$$

- step 4

  $\omega$ の積分を行い $f_\epsilon$ を整理する．

  $$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}} f(y)dy$$

- step 5

  関数 $G_\epsilon$ (Gauss 核と呼ばれる) を

  $$G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

  と定義し，$f_\epsilon$ を畳み込みで書き直す．

  $$f_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x-y)f(y)dy = G_\epsilon * f(x)$$

- step 6

  関数 $G_\epsilon$ は以下の性質を持つことが確かめられる．

  1. $G_\epsilon(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x)dx = 1$
  3. $\forall\delta > 0 \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\delta} G_\epsilon(x)dx = 0$

  したがって $G_\epsilon$ は $\epsilon \to 0$ において Dirac の $\delta$ 関数になる．

  - *Fourier* **級数展開の証明で出た** *Poisson* **核と同様な性質**

### 反転公式

- 定理

  $$f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x}d\omega$$

  より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば，上の式は $L^p$ の意味で成り立つと表現される．

  $$\lim_{\epsilon\to 0}\|G_\epsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

## 今回のまとめ

- Fourier 変換
  - Fourier 級数の周期の一般化
  - 周期無限大の極限の表現
  - Fourier 変換と反転公式
  - Gauss 核による反転公式の証明