

# Fourier 変換の性質

信号処理 - 講義 8

村田 昇

## 前回のおさらい

### Fourier 級数展開

- 定理

$f \in L^2(-\pi, \pi)$  は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

内積は  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$  に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

### Fourier 変換と反転公式

- 定義

$\mathbb{R}$  上の関数  $f$  に対して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (\text{Fourier 変換})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (\text{逆 Fourier 変換})$$

で定義する.

### 反転公式

- 定理

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

より正確には  $f \in L^1 \cap L^p$  であれば, 上の式は  $L^p$  の意味で成り立つと表現される.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G_{\epsilon} * f - f\|_{L^p} = 0$$

## 演習

### 練習問題

- 次の関数  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = |\sin(x)|$$

### 練習問題

- 関数  $\Xi$  を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の関数の Fourier 変換を求めよ.

- $f(x) = e^{-\alpha x} \Xi_{(0,\infty)}(x)$  ( $\alpha > 0$ )
- $g(x) = e^{-\beta x^2}$  ( $\beta > 0$ )
- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

### 練習問題

- 関数

$$f(x) = \frac{1}{x - ia} \quad (a > 0)$$

の Fourier 変換を求めよ.

- Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係を利用
- 複素積分を利用

## Fourier 変換の例

- 定義関数

関数  $\Xi$  を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 代表的な例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x), x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$
$e^{-ax^2}, x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{2\pi i} e^{a\omega} \Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$-\sqrt{2\pi i} e^{-a\omega} \Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega}$

## Fourier 変換の性質

### 記法

- 関数の対応
  - $f$ : もとの関数 (以下では Fourier 変換の存在を仮定)
  - $\hat{f}$ : Fourier 変換
- 変換の演算子
  - $\mathcal{F}$ : Fourier 変換
  - $\mathcal{F}^{-1}$ : 逆 Fourier 変換例えば以下のように使う.

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \mathcal{F}[f], & f &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] \\ \hat{f}(\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega), & f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)\end{aligned}$$

- 引数に関する注意  
関数の引数 (変数) は単なる名前なので何でも良い.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{-i\alpha\beta} d\beta \\ \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\beta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha\beta} d\alpha\end{aligned}$$

### 対象とする関数の性質

- 絶対可積分

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

この条件を満たすとき各点で Fourier 変換が存在する.

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty\end{aligned}$$

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

- $|x| \rightarrow \infty$  での挙動  
適当に大きな値  $M > 0$  に対して

$$|f(x)| > \epsilon > 0, \quad |x| > M$$

とすると, 以下のように絶対可積分に矛盾する.

$$\int_{-\infty}^{-M} |f(x)| dx + \int_M^{\infty} |f(x)| dx > \epsilon \times (\text{積分区間}) \rightarrow \infty$$

したがって以下の性質が成り立つ.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

## Parseval の定理

- 定理

関数  $f, g$  は  $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  とする. このとき以下の関係が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

- 略証

反転公式と同様に収束因子を考える.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} e^{-\epsilon \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y)} e^{i\omega y} dy \cdot e^{-\epsilon \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(y)} G_{\epsilon}(x-y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g_{\epsilon}(x)} dx \end{aligned}$$

$\epsilon \rightarrow 0$  とすると定理の両辺が一致することがわかる.

## Plancherel の定理

- 定理

関数  $f$  は  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  とする. このとき以下の関係が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

## Riemann-Lebesgue の定理 (補題)

- 定理

関数  $f \in L^1(\mathbb{R})$  は滑らかで  $f' \in L^1(\mathbb{R})$  とする. このとき以下の性質をもつ.

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

- 略証

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \\ &< \left| \left[ \frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-\infty}^{\infty} \right| + \left| \frac{1}{i\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \right| \\ &< \frac{1}{|\omega|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx \\ &= \frac{1}{|\omega|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_{L^1} \end{aligned}$$

より明らか.

## 演習

### 練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数  $f(x)$  の Fourier 変換と関数  $g(x) = f(-x)$  の Fourier 変換の関係を考えよ.

### 練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数  $f$  の Fourier 変換と関数  $g = f'$  の Fourier 変換の関係を考えよ.

### 練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数  $f$  の Fourier 変換と関数  $g = f^{(k)}$  ( $k$  階微分) の Fourier 変換の関係を考えよ.

### 練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数  $f, g$  の Fourier 変換と関数  $h = f * g$  の Fourier 変換の関係を考えよ.

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = f * g(x)$$

### 練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数  $f(x)$  の Fourier 変換と関数  $g(x) = f(x-a)$  の Fourier 変換の関係を考えよ.

### 練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数  $f(x)$  の Fourier 変換と関数  $g(x) = f(bx)$  ( $b > 0$ ) の Fourier 変換の関係を考えよ.

## 演算との関係

### Fourier 変換で用いる基本演算

関数	Fourier 変換
$f'(x)$ (微分)	$i\omega \hat{f}(\omega)$
$f^{(k)}(x)$ ( $k$ 階微分)	$(i\omega)^k \hat{f}(\omega)$
$f * g(x)$ (畳み込み)	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$
$T_a f(x) = f(x-a)$ (移動)	$e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
$D_b f(x) = f(bx)$ (拡大縮小)	$1/b \cdot \hat{f}(\omega/b)$

## 今回のまとめ

- Fourier 変換の性質
  - Fourier 変換可能な関数
  - Fourier 変換の基本的な性質
    - \* Parseval の定理
    - \* Plancherel の定理
    - \* Riemann-Lebesgue の定理 (補題)

– 関数の演算と Fourier 変換の関係