離散 *Fourier* 変換

信号処理 講義 *13*

村田 昇

*2020*年 *8*月 *23*日

復習

デジタル信号処理

- 計算機で信号を扱うための方法論
- 処理の流れ
  - アナログ信号をデジタル信号に変換 (A/D 変換)
  - 計算機上でデジタル信号を処理
  - デジタル信号をアナログ信号に変換 (D/A 変換)

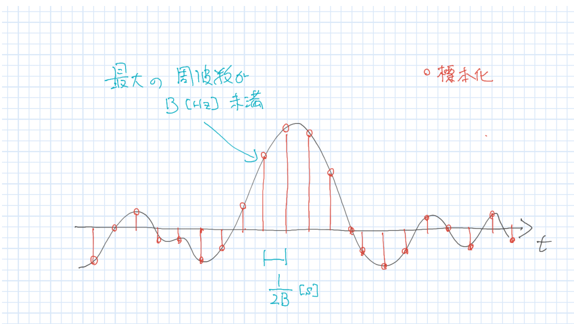
標本化と量子化

- デジタル信号に変換するための離散化
  - 標本化 (sampling): 時間の離散化
  - 量子化 (quantization): 数値の離散化

標本化定理

- 定理

  信号 $f(t)$ が B [Hz] 未満の周波数しか含んでいないなら，$1/2B$ [s] ごとのサンプル点を用いて元の信号は完全に求められる．



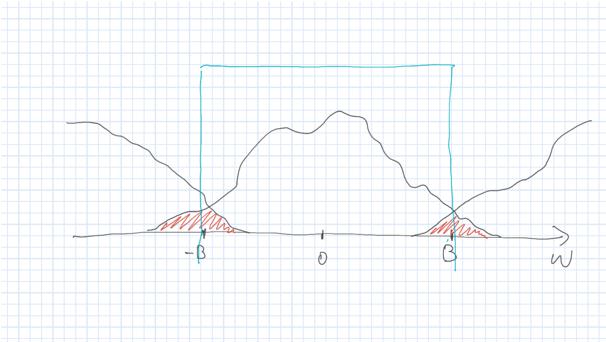
標本化における用語

- 1 秒間に取るサンプル数 f_s [Hz]:
  サンプリング周波数
- 再構成に必要なサンプリング周波数の下限 $2B$ [Hz]:
  Nyquist レート
- 信号に含まれる周波数の上限 B [Hz]:
  Nyquist 周波数
- (角周波数と周波数の関係に注意)

エイリアシング

- 折り返しによる雑音

  $4\pi B$ 周期の関数 $\tilde{f}$ を構成する際に重なりが生じ，$(-2\pi B, 2\pi B)$ 領域を切り出しても元に戻すことができない．



離散 Fourier 変換

計算機による信号処理

- 連続時間では扱えない
  - 標本化により時間を離散化
  - 周波数帯を限定すれば情報は失われない
- 有限長のデータしか扱えない
  - 周期的な信号として扱う
  - 有界な台を持つ信号として扱う

離散 Fourier 変換

- 定義

  長さ N の信号 $f(t)$, $t = 0, 1, \ldots, N-1$ の離散 Fourier 変換を以下で定義する．

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{N}nt}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

  - 慣習的に n や t は 1 ではなく 0 から始まることに注意する

- 逆変換の定義

  逆変換は以下で定義される．

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{N}nt}, \quad (t = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

  - 信号 f は周期信号 (基底) $e^{i\frac{2\pi}{N}nt}$ の重ね合わせで表現される
  - 基底は $e^{i\frac{2\pi}{N}t}$ (基本周波数の信号) の高調波になる
  - 各周波数信号の振幅が $\hat{f}(n)/\sqrt{N}$ となる

練習問題

- 問題 1

  サンプリング周波数 f_s [Hz] のデジタル信号から長さ N のベクトルを切り出し離散 Fourier 変換を考えたとき，基本周波数はいくつになるか?

- 問題 2

  “負” の基本周波数 $e^{-i\frac{2\pi}{N}t}$ と標本点 (t が整数の点) で同じ値を持つ信号 $e^{i\frac{2\pi}{N}kt}$ ($k > 0$) を求めよ．

- 解答例 1

  サンプルの区間幅は $1/f_s$ [s] なので，長さ N の信号は N/f_s [s] の信号となる．これが 1 周期に対応するので，基本周波数は f_s/N [Hz] となり，信号はこの高調波で展開される．

- 解答例 2

  t を整数とすると $e^{2\pi it} = 1$ であるから

  $$e^{-i\frac{2\pi}{N}t} = e^{-i\frac{2\pi}{N}t}e^{2\pi it} = e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)t}$$

  となり $k = N-1$ である．

  – これは標本点のみでは周波数が -1 なのか $N-1$ なのか区別できないことを示している．

  – 一般に $n \geq N/2$ 以上の高調波は負の周波数に対応させ，信号は $f_s/2$ 未満の (正負の) 周波数で展開される．

  – 標本化定理の結果と比較せよ．

1 の N 乗根

- 定義

  $$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

  と置くと，

  $$\alpha^N = e^{2\pi i} = 1 \quad (1 \text{ の } N \text{ 乗根の一つ})$$

  となる．

練習問題

- 問題

  m を整数とするとき以下の値を求めよ．

  $$1 + \alpha^m + \alpha^{2m} + \cdots + \alpha^{(N-1)m}$$

- 解答例

  k を整数として $m = kN$ のとき (m が N の倍数)

  $$\alpha^m = (\alpha^N)^k = 1$$

  であるから，与式は N となる．
  それ以外のとき，等比数列の和から

  $$(\text{与式}) = \frac{1-\alpha^{mN}}{1-\alpha^m} = \frac{1-(\alpha^N)^m}{1-\alpha^m} = 0$$

  となる．

行列による表現

- N 乗根を用いた展開

  α を用いて定義式を書き下すと

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\alpha^{-nt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\Big(f(0)\alpha^{-n\cdot 0} + f(1)\alpha^{-n\cdot 1} + f(2)\alpha^{-n\cdot 2} + \\ &\qquad \cdots + f(N{-}1)\alpha^{-n\cdot(N-1)}\Big)\end{aligned}$$

  となる.

- 変換行列

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \dots & \alpha^{-(N-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \alpha^{-2(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

  - 行列 F は $N \times N$ の要素からなるが，α の性質から値としては (1 を含めて) N 種類しかない.

- 行列表現

$$\begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(N{-}1) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N{-}1) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}} = F\boldsymbol{f}$$

- 逆変換行列

$$F^* = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{1} & \alpha^{2} & \dots & \alpha^{(N-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(N-1)} & \alpha^{2(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

- 行列表現

$$\boldsymbol{f} = F^*\hat{\boldsymbol{f}}$$

変換と逆変換の関係

- 行列 F, F^* の積

$$\begin{aligned}&F^*F \\ &= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{1} & \dots & \alpha^{(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \dots & \alpha^{-(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- i 行 j 列成分

$$(F^*F)_{ij} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & \alpha^{(i-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(i-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^{-(j-1)} \\ \vdots \\ \alpha^{-(N-1)(j-1)} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{N}\left(1 + \alpha^{(i-j)} + \alpha^{2(i-j)} + \cdots + \alpha^{(N-1)(i-j)}\right)$$
$$= \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{1}{N}\frac{1-\alpha^{N(i-j)}}{1-\alpha^{(i-j)}}, & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- 逆も同様

$$(FF^*)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- 変換は可逆となる

$$F^*\hat{\boldsymbol{f}} = F^*F\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$$

$$F\boldsymbol{f} = FF^*\hat{\boldsymbol{f}} = \hat{\boldsymbol{f}}$$

フィルタの表現

フィルタ

- 定義

  入力 $f(t)$ を変換して出力 $g(t)$ を生成する機構
- 線形性

  入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質
- 時不変性

  入力の時刻がずれた場合，出力も同じだけずれる性質

デジタル信号におけるフィルタの表現

- 標本化されたフィルタの表現

$$g(t) = \sum_{s=t-N+1}^{t} f(s)h(t-s)$$

  - f, g: 周期 N の入力・出力信号
  - h: 長さ N のインパルス応答
- 周期関数の畳み込みによる表現

$$
\begin{aligned}
g(t) &= f*h(t) \\
&= \sum_{s=0}^{N-1} f(s)h(t-s) = \sum_{s=0}^{N-1} f(t-s)h(s), \\
& t = 0, 1, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

– f, g, h: 周期 N の関数

練習問題

- 問題

  f, g, h を長さ N のベクトルと考え，g の離散 Fourier 変換を f, h の離散 Fourier 変換で表しなさい．

$$
g(t) = \sum_{s=0}^{N-1} f(s)h(t-s), \quad t = 0, 1, \ldots, N-1
$$

- 解答例

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} g(t)\alpha^{-nt} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} f(s)h(t-s)\alpha^{-n(t-s+s)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} f(s)\alpha^{-ns}h(t-s)\alpha^{-n(t-s)}
\end{aligned}
$$

- 解答例 (つづき)

  周期 N の関数であることに注意すると

$$
\sum_{t=0}^{N-1} h(t-s)\alpha^{-n(t-s)} = \sum_{t=0}^{N-1} h(t)\alpha^{-nt} = \sqrt{N}\hat{h}(n)
$$

$$
\sum_{s=0}^{N-1} f(s)\alpha^{-ns} = \sqrt{N}\hat{f}(n)
$$

$$
\hat{g}(n) = \sqrt{N}\hat{f}(n)\hat{h}(n)
$$

窓関数

有限長のデータ

- 信号の一部を切り出す必要がある
  - 周期的な信号として扱う
  - 有界な台を持つ信号として扱う
- 不連続点の問題
  - 高い周波数に対応
  - 標本化定理の仮定に抵触

窓関数

- 信号の切り出し

$$f(t) = w(t)\tilde{f}(t)$$

- 端点での不連続性を軽減するために導入
- 周波数特性の一部を改変することに注意
  - 矩形窓 (単純な切り出し)
  - gauss 窓
  - hann 窓
  - hamming 窓

矩形窓

$$w(\tau) = \Xi_{(0,1)}(\tau)$$

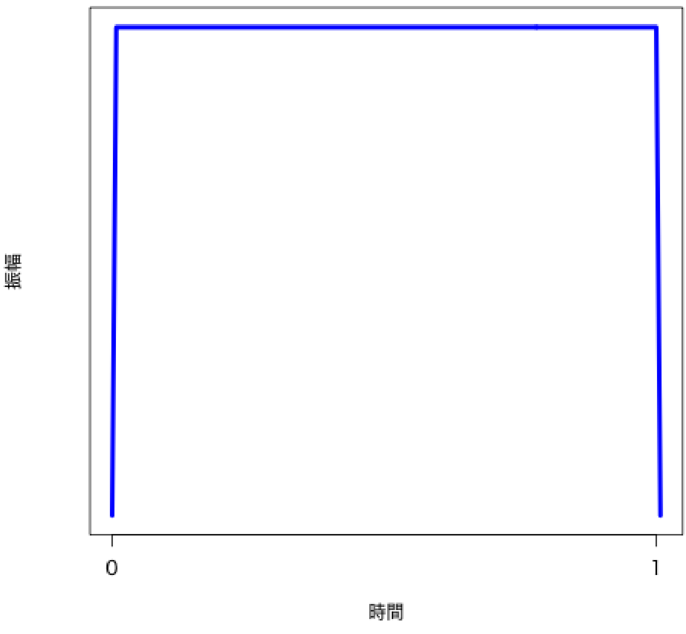


図 1: 矩形窓

gauss 窓

$$w(\tau) = e^{-\frac{(\tau-0.5)^2}{\sigma^2}}$$

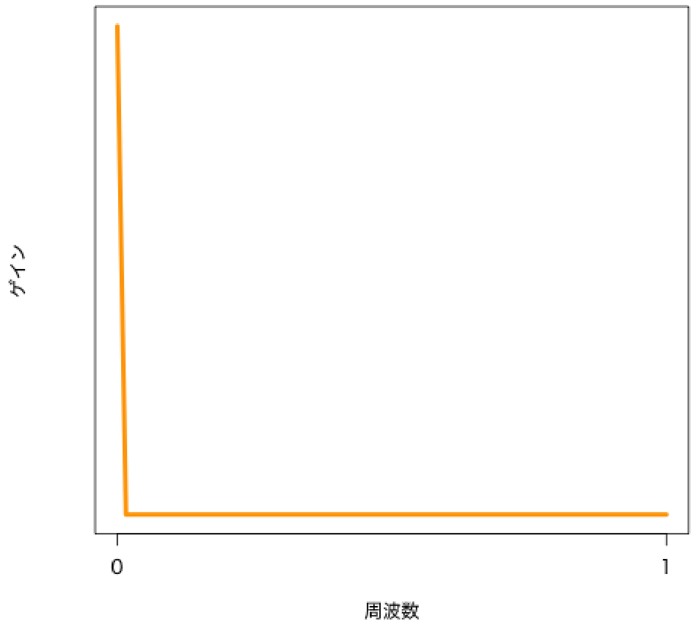


図 2: 周波数特性

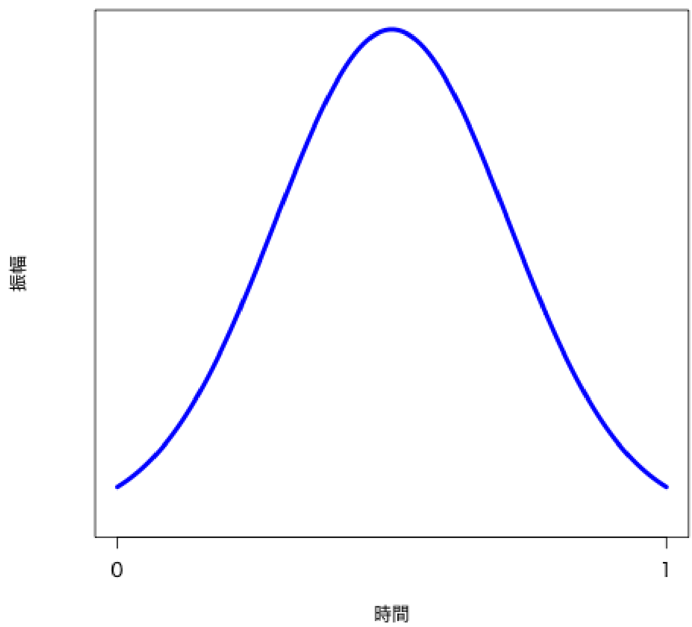


図 3: gauss 窓

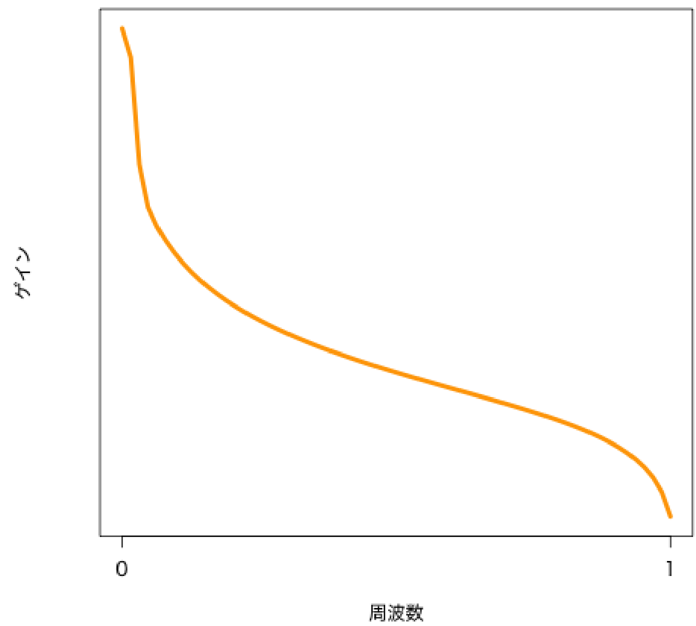


図 4: 周波数特性

hann 窓

$$w(\tau) = 0.5 - 0.5\cos(2\pi\tau)$$

hamming 窓

$$w(\tau) = 0.54 - 0.46\cos(2\pi\tau)$$

まとめ

- 離散 Fourier 変換
  - 変換と逆変換
  - 行列による表現
- 窓関数
  - 切り出すときの不連続性の軽減
  - 周波数特性を考慮した窓関数

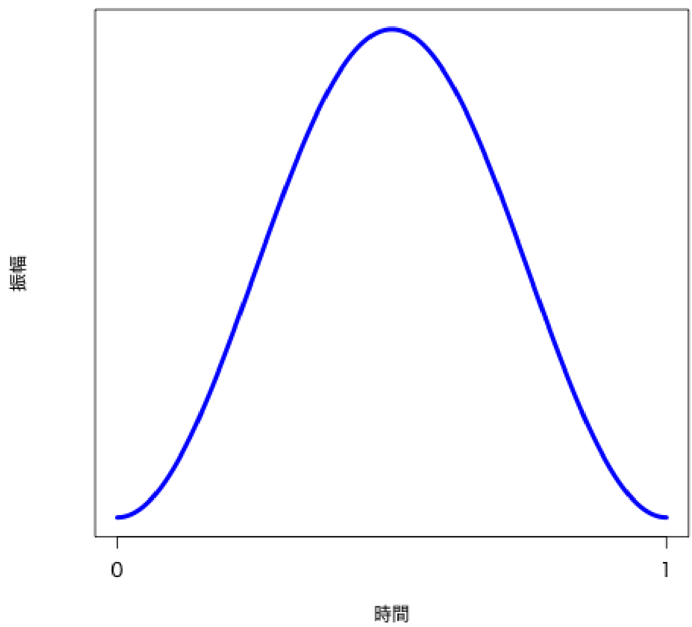


図 5: hann 窓

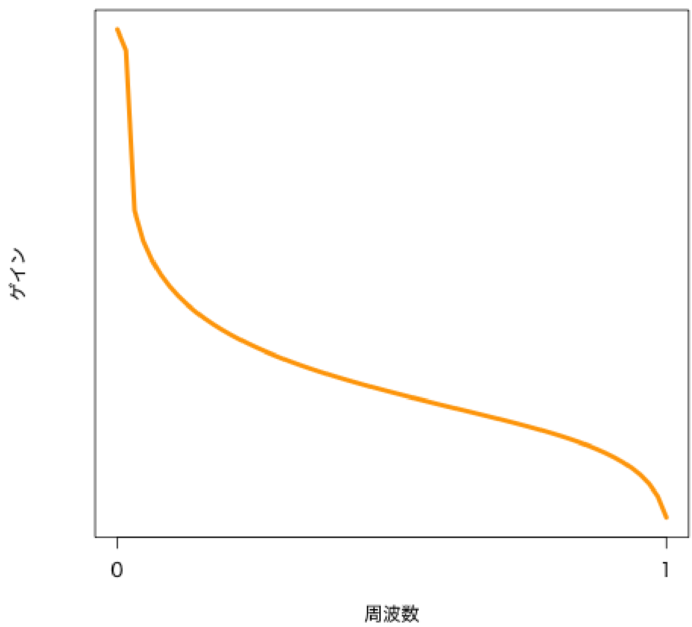


図 6: 周波数特性

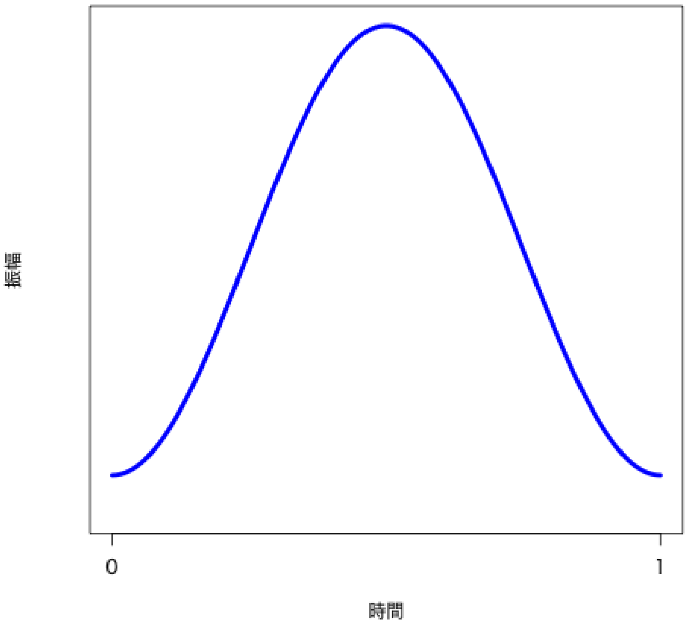


図 7: hamming 窓

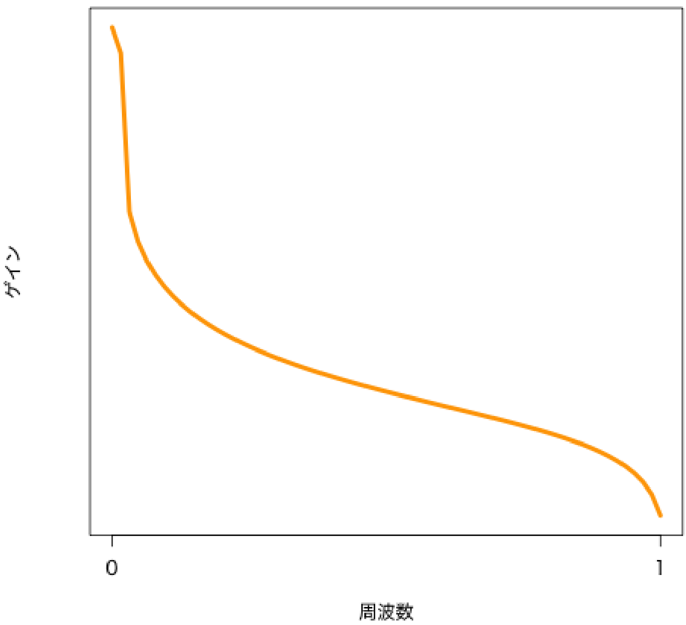


図 8: 周波数特性