# 離散 *Fourier* 変換

信号処理 - 講義 *13*

村田 昇

## 前回のおさらい

### デジタル信号処理

- 計算機で信号を扱うための方法論
- 処理の流れ
  - アナログ信号をデジタル信号に変換 (A/D 変換)
  - 計算機上でデジタル信号を処理
  - デジタル信号をアナログ信号に変換 (D/A 変換)

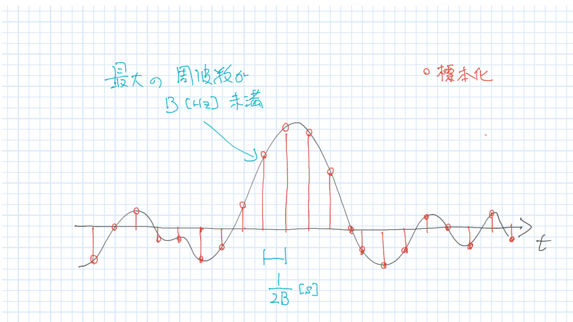
### 標本化と量子化

- デジタル信号に変換するための離散化
  - 標本化 (sampling): 時間の離散化
  - 量子化 (quantization): 数値の離散化

### 標本化定理

- 定理

  信号 $f(t)$ が $B\,[\mathrm{Hz}]$ 未満の周波数しか含んでいないなら，$1/2B\,[s]$ ごとのサンプル点を用いて元の信号は完全に求められる．



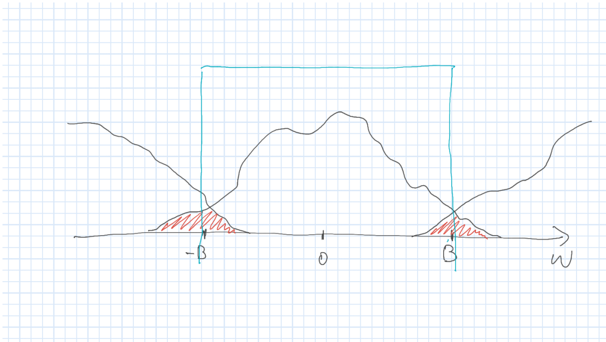

### 標本化における用語

- 1 秒間に取るサンプル数 $f_s\,[\mathrm{Hz}]$:
  サンプリング周波数
- 再構成に必要なサンプリング周波数の下限 $2B\,[\mathrm{Hz}]$:
  Nyquist レート
- 信号に含まれる周波数の上限 $B\,[\mathrm{Hz}]$:
  Nyquist 周波数
- (角周波数と周波数の関係に注意)

### エイリアシング

- 折り返しによる雑音

  $4\pi B$ 周期の関数 $\tilde{f}$ を構成する際に重なりが生じ，$(-2\pi B, 2\pi B)$ 領域を切り出しても元に戻すことができない．




## 離散 Fourier 変換

### 計算機による信号処理

- 連続時間では扱えない
  - 標本化により時間を離散化
  - 周波数帯を限定すれば情報は失われない
- 有限長のデータしか扱えない
  - 周期的な信号として扱う
  - 有界な台を持つ信号として扱う

### 離散 Fourier 変換

- 定義

  長さ $N$ の信号 $f(t),\ t=0,1,\ldots,N-1$ の離散 Fourier 変換を以下で定義する．

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-i\frac{2\pi}{N}nt}, \quad (n = 0,1,2,\ldots,N-1)$$

  - 慣習的に $n$ や $t$ は $1$ ではなく $0$ から始まることに注意する

- 逆変換の定義

  逆変換は以下で定義される．

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{N}nt}, \quad (t = 0,1,2,\ldots,N-1)$$

  - 信号 $f$ は周期信号 (基底) $e^{i\frac{2\pi}{N}nt}$ の重ね合わせで表現される
  - 基底は $e^{i\frac{2\pi}{N}t}$ (基本周波数の信号) の高調波になる
  - 各周波数信号の振幅が $\hat{f}(n)/\sqrt{N}$ となる

# 演習

## 練習問題

- 問 1

  サンプリング周波数 $f_s$ [Hz] のデジタル信号から長さ $N$ のベクトルを切り出し離散 Fourier 変換を考えたとき，基本周波数はいくつになるか?

- 問 2

  “負” の基本周波数 $e^{-i\frac{2\pi}{N}t}$ と標本点 ($t$ が整数の点) で同じ値を持つ信号 $e^{i\frac{2\pi}{N}kt}$ ($k > 0$) を求めよ．

## 練習問題

- 問 3

  $$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

  と置くと，

  $$\alpha^N = e^{2\pi i} = 1 \quad (1 \text{ の } N \text{ 乗根の一つ})$$

  となる．$m$ を整数とするとき以下の値を求めよ．

  $$1 + \alpha^m + \alpha^{2m} + \cdots + \alpha^{(N-1)m}$$

# 離散 Fourier 変換の行列表現

## 行列による表現

- $N$ 乗根を用いた展開

  $\alpha$ を用いて定義式を書き下すと

  $$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=0}^{N-1} f(t)\alpha^{-nt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\big(f(0)\alpha^{-n\cdot 0} + f(1)\alpha^{-n\cdot 1} + f(2)\alpha^{-n\cdot 2} + \\ &\qquad \cdots + f(N-1)\alpha^{-n\cdot(N-1)}\big)\end{aligned}$$

  となる．

- 変換行列

  $$F = \frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \ldots & \alpha^{-(N-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \alpha^{-2(N-1)} & \ldots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

  – 行列 $F$ は $N \times N$ の要素からなるが，$\alpha$ の性質から値としては (1 を含めて) $N$ 種類しかない．

- 行列表現

$$
\begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(N-1) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}
$$

$$
\hat{\boldsymbol{f}} = F\boldsymbol{f}
$$

- 逆変換行列

$$
F^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{(N-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(N-1)} & \alpha^{2(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}
$$

- 行列表現

$$
\boldsymbol{f} = F^* \hat{\boldsymbol{f}}
$$

## 変換と逆変換の関係

- 行列 $F, F^*$ の積

$$
\begin{aligned}
&F^*F \\
&\quad = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^1 & \dots & \alpha^{(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \dots & \alpha^{-(N-1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- $i$ 行 $j$ 列成分

$$
\begin{aligned}
(F^*F)_{ij} &= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{(i-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(i-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^{-(j-1)} \\ \vdots \\ \alpha^{-(N-1)(j-1)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N} \left( 1 + \alpha^{(i-j)} + \alpha^{2(i-j)} + \dots + \alpha^{(N-1)(i-j)} \right) \\
&= \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{1}{N} \frac{1-\alpha^{N(i-j)}}{1-\alpha^{(i-j)}}, & i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}
\end{aligned}
$$

- 逆も同様

$$
(FF^*)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}
$$

- 変換は可逆となる

$$
F^* \hat{\boldsymbol{f}} = F^* F \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}
$$

$$
F\boldsymbol{f} = FF^* \hat{\boldsymbol{f}} = \hat{\boldsymbol{f}}
$$

# フィルタの表現

## フィルタ

- 定義

  入力 $f(t)$ を変換して出力 $g(t)$ を生成する機構

- 線形性

  入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質

- 時不変性

  入力の時刻がずれた場合，出力も同じだけずれる性質

## デジタル信号におけるフィルタの表現

- 標本化されたフィルタの表現

  $$g(t) = \sum_{s=t-N+1}^{t} f(s)h(t-s)$$

  - $f, g$: 周期 $N$ の入力・出力信号
  - $h$: 長さ $N$ のインパルス応答

- 周期関数の畳み込みによる表現

  $$\begin{aligned} g(t) &= f*h(t) \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} f(s)h(t-s) = \sum_{s=0}^{N-1} f(t-s)h(s), \\ & t = 0, 1, \ldots, N-1 \end{aligned}$$

  - $f, g, h$: 周期 $N$ の関数

# 演習

## 練習問題

- 問題

  $f, g, h$ を長さ $N$ のベクトルと考え，$g$ の離散 Fourier 変換を $f, h$ の離散 Fourier 変換で表しなさい.

  $$g(t) = \sum_{s=0}^{N-1} f(s)h(t-s), \quad t = 0, 1, \ldots, N-1$$

# 窓関数

## 有限長のデータ

- 信号の一部を切り出す必要がある
  - 周期的な信号として扱う
  - 有界な台を持つ信号として扱う
- 不連続点の問題
  - 高い周波数に対応
  - 標本化定理の仮定に抵触

## 窓関数

- 信号の切り出し

$$f(t) = w(t)\tilde{f}(t)$$

- 端点での不連続性を軽減するために導入
- 周波数特性の一部を改変することに注意
  - 矩形窓 (単純な切り出し)
  - gauss 窓
  - hann 窓
  - hamming 窓

## 矩形窓

$$w(\tau) = \Xi_{(0,1)}(\tau)$$

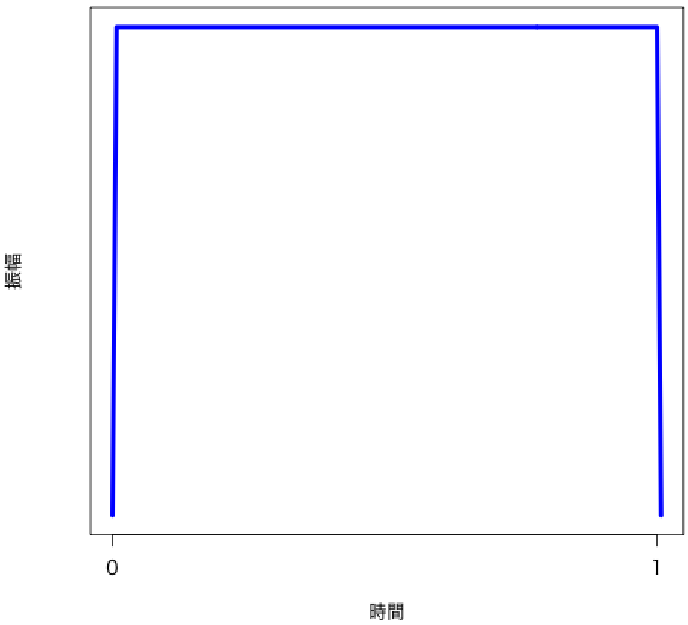



図 1: 矩形窓

## gauss 窓

$$w(\tau) = e^{-\frac{(\tau-0.5)^2}{\sigma^2}}$$

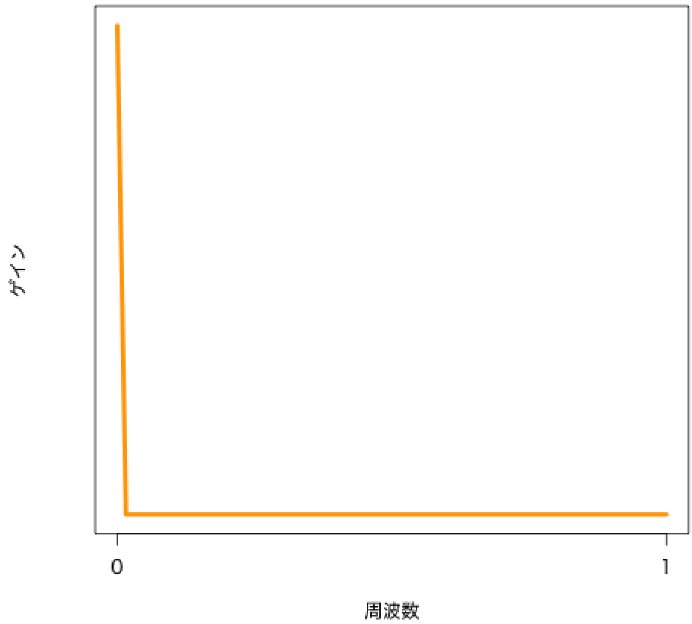



図 2: 周波数特性

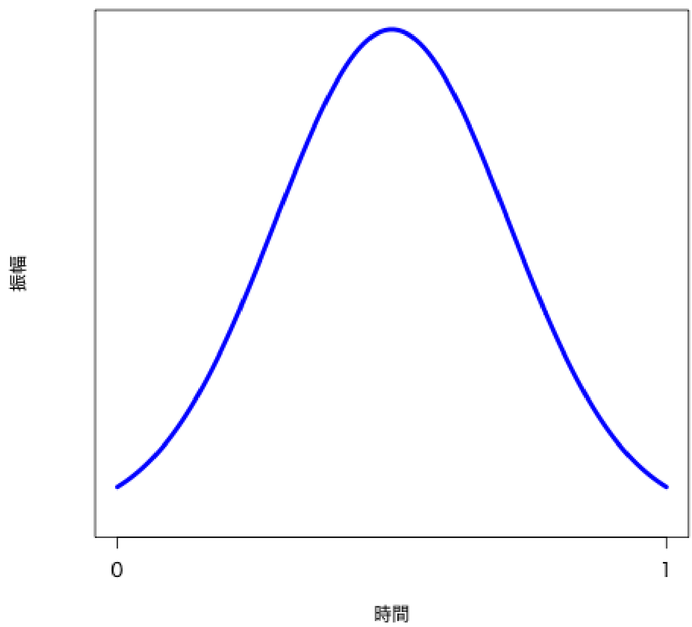



図 3: gauss 窓

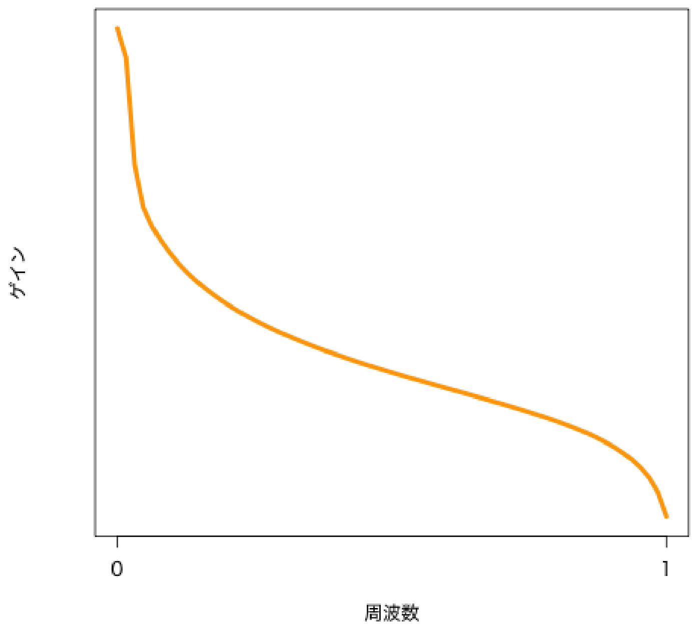



図 4: 周波数特性

### hann 窓

$$w(\tau) = 0.5 - 0.5\cos(2\pi\tau)$$

### hamming 窓

$$w(\tau) = 0.54 - 0.46\cos(2\pi\tau)$$

## 今回のまとめ

- 離散 Fourier 変換
  - 変換と逆変換
  - 行列による表現
- 窓関数
  - 切り出すときの不連続性の軽減
  - 周波数特性を考慮した窓関数

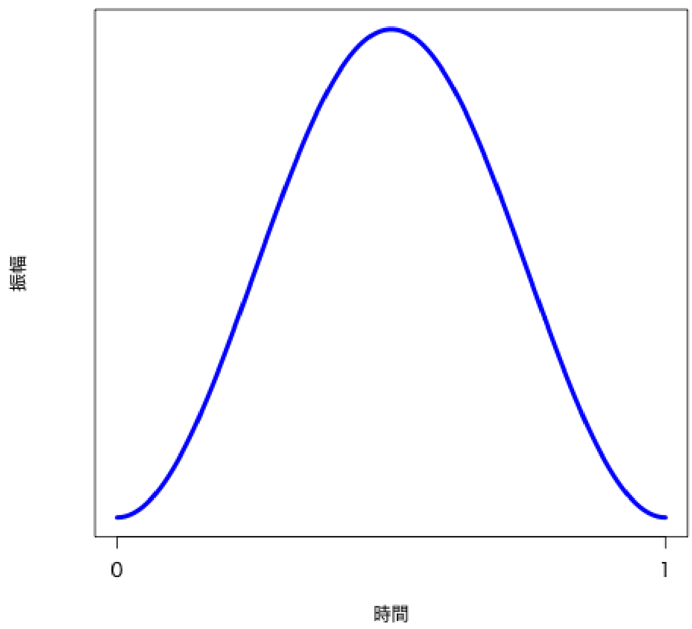



図 5: hann 窓

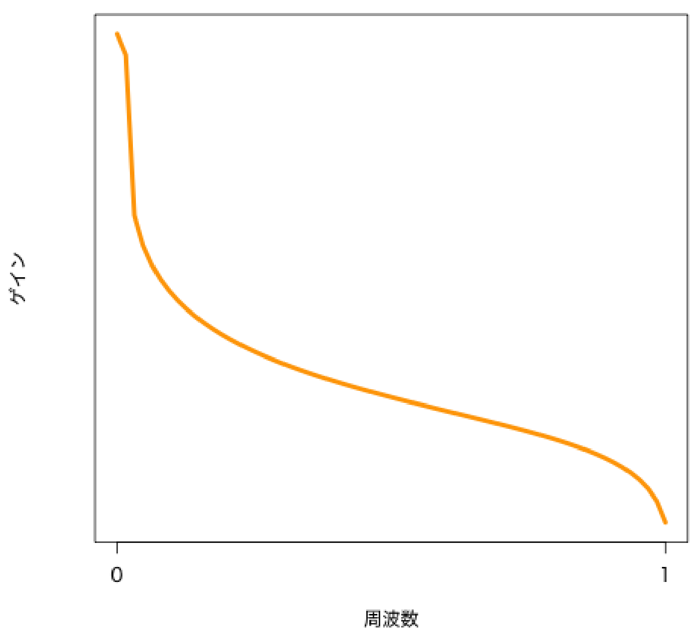



図 6: 周波数特性

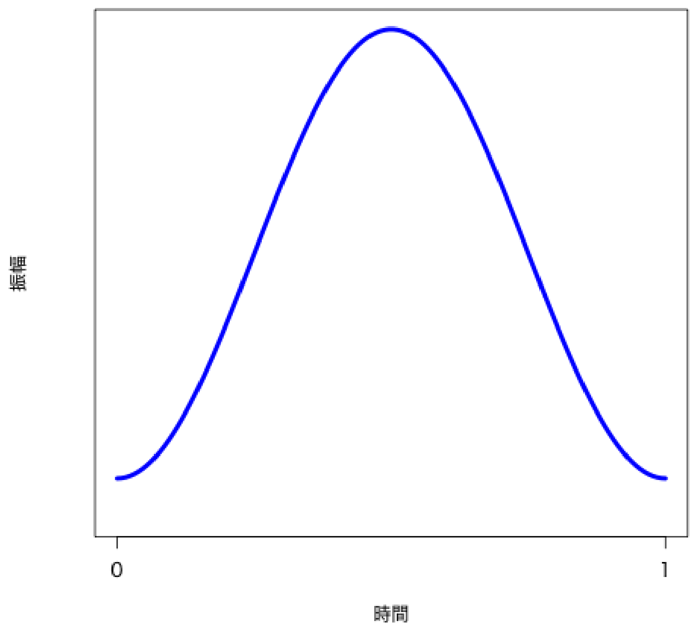



図 7: hamming 窓

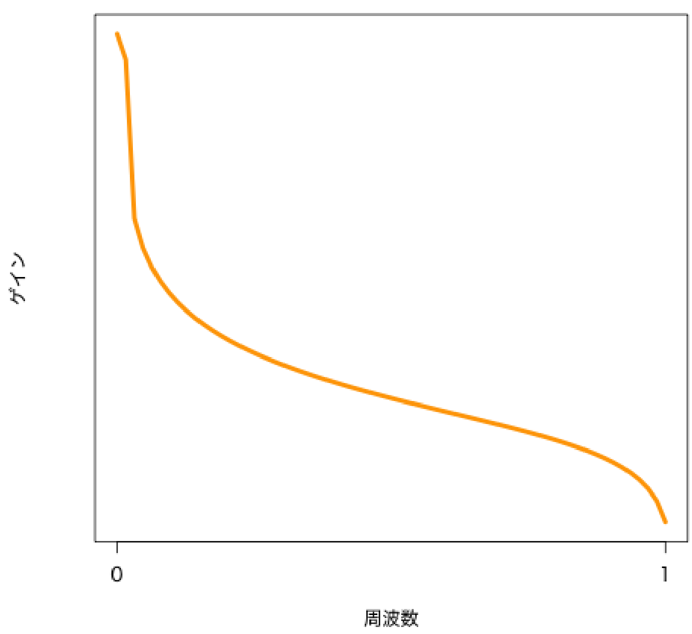



図 8: 周波数特性