

Fourier 変換

信号処理 - 第6講

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間
線形演算について閉じた空間
- 内積空間
内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間
ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理
可分な無限次元 Hilbert 空間には可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する.
- 定理
可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.
- 定理
 $\{\phi_k\}$ が \mathcal{H} の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理
 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 次の関数 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

練習問題

- 次の関数 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = |\sin(x)|$$

練習問題

- 以下が周期 T の直交系となるように α を定めよ.

$$\{e^{i\alpha n x}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

- 以下を内積とするととき前問の直交系を正規化せよ.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Fourier 変換

Fourier 級数の一般化

- 周期 2π の場合 ($x \in [-\pi, \pi]$ で考えよ)

正規直交系:

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 周期 T の場合 ($x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ で考えよ)

正規直交系:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi i n x}{T}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 周期 T の場合

Fourier 級数展開は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n x}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-\frac{2\pi i n y}{T}} dy \end{aligned}$$

- 極限操作のための書き換え

ここで $\frac{2\pi}{T} = \Delta$ とする.

$$f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} f(y) e^{-in\Delta y} dy$$

- 周期無限大における積分

T が十分大きい (Δ が十分小さい) 極限を考えるために, 以下の積分を定義する.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

- 級数和の近似

Fourier 展開の積分部分は $\sqrt{2\pi} \hat{f}(n\Delta)$ で十分良く近似できると考え Riemann 和の形で書く.

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \hat{f}(n\Delta) \Delta$$

- 区分求積法

Riemann 和は $n\Delta \rightarrow \omega, \Delta \rightarrow d\omega$ として積分で表される.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta) \cdot \Delta \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$$

- 周期無限大における表現

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(反転公式)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy d\omega \end{aligned}$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

\mathbb{R} 上の関数 f に対して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

で定義する.

多次元 Fourier 変換

- d 次元の場合

\mathbb{R}^d 上の関数 f について

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx \quad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot x} d\omega \quad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

で定義する. なお $\omega \cdot x$ はベクトル $\omega \in \mathbb{R}^d$ とベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ の通常の内積である.

演習

練習問題

- 以下の積分値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx$$

練習問題

- 関数 Ξ を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の関数の Fourier 変換を求めよ.

- $f(x) = e^{-\alpha x} \Xi_{(0,\infty)}(x) \ (\alpha > 0)$
- $g(x) = e^{-\beta x^2} \ (\beta > 0)$
- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

Fourier 変換の例

応用上重要な関数の例

- 定義関数

関数 Ξ を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 代表的な例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x), x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$
$e^{-ax^2}, x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{2\pi} i e^{a\omega} \Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$-\sqrt{2\pi} i e^{-a\omega} \Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega}$

反転公式の証明

証明

- step 1

関数 \hat{f} は各点で値が決まるが, 積分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

の値が存在するかどうかはわからない.

- step 2

収束因子 $e^{-\epsilon\omega^2}$ を用いて以下の積分を定義する.

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x)} d\omega \end{aligned}$$

- step 3

指数の肩を整理する.

$$-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x) = -\epsilon \left(\omega + \frac{i(y-x)}{2\epsilon} \right)^2 - \frac{(y-x)^2}{4\epsilon}$$

- step 4

ω の積分を行い f_ϵ を整理する.

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}} f(y) dy$$

- step 5

関数 G_ϵ (Gauss 核と呼ばれる) を

$$G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

と定義し, f_ϵ を畳み込みで書き直す.

$$f_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x-y) f(y) dy = G_\epsilon * f(x)$$

- step 6

関数 G_ϵ は以下の性質を持つことが確かめられる.

1. $G_\epsilon(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x) dx = 1$
3. $\forall \delta > 0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} G_\epsilon(x) dx = 0$

したがって G_ϵ は $\epsilon \rightarrow 0$ において Dirac の δ 関数になる.

– Fourier 級数展開の証明で出た Poisson 核と同様な性質

反転公式

- 定理

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば, 上の式は L^p の意味で成り立つと表現される.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G_\epsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

今回のまとめ

- Fourier 変換
 - Fourier 級数の周期の一般化
 - 周期無限大の極限の表現
 - Fourier 変換と反転公式
 - Gauss 核による反転公式の証明