Fourier 級数の性質

信号処理 - 第 5 講

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間
  線形演算について閉じた空間
- 内積空間
  内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間
  ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理
  可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個** の要素からなる完全正規直交系が存在する.
- 定理
  可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.
- 定理
  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \ \Rightarrow \ u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理
  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように **Fourier 級数展開**される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 以下の関数 f を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi, \pi)$$

不連続点の性質

片側極限

- 定義

  $h > 0$ として

$$f(x-0) = \lim_{h\to 0} f(x-h)$$
$$f(x+0) = \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

  と書く．これを片側極限という.

不連続点

- 不連続関数

  点 x において不連続な関数を考える.

$$f(x-0) \neq f(x+0)$$

  点 x 以外の近傍での有界性を仮定する.

$$\sup_{0<h<\delta} |f(x-h) - f(x-0)| < \infty$$
$$\sup_{0<h<\delta} |f(x+h) - f(x+0)| < \infty$$

不連続点での評価

- 定理で評価した式

$$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\{f(x-y) - f(x)\}dy$$

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

- P_r の性質

  P_r の積分は偶関数であることから以下が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{0} P_r(y)dy = \frac{1}{2}$$
$$\int_{0}^{\infty} P_r(y)dy = \frac{1}{2}$$

- 不連続点まわりでの評価

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{-\delta}^{\delta} P_r(y)\{f(x-y)-f(x)\}dy\right| \\
&\le \left|\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\{f(x-y)-f(x+0)\}dy\right| \\
&\quad + \left|\int_{0}^{\delta} P_r(y)\{f(x-y)-f(x-0)\}dy\right| \\
&\le \frac{1}{2}\sup_{-\delta<y<0}|f(x-y)-f(x+0)| \\
&\quad + \frac{1}{2}\sup_{0<y<\delta}|f(x-y)-f(x-0)| \\
&\to^{\delta\to 0} 0
\end{aligned}
$$

- 不連続点の Fourier 級数展開

  関数 f の Fourier 級数展開 $\tilde{f}$ は

  $$\tilde{f}(x) = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)f(x-y)dy = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

  が成り立つので，f の不連続点での Fourier 級数展開は両側からの極限の平均値となる．

演習

練習問題

- 以下の関数 f は $x=\pi/2$ で不連続となる．Fourier 級数での $f(\pi/2)$ の値を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi,\pi)$$

Fourier 係数の性質

畳み込み

- 定義

  周期 2π をもつ関数 f と g の**畳み込み** (合成積; convolution) h は以下で定義される．

  $$
  \begin{aligned}
  h(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \\
  &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \\
  &= f * g(x)
  \end{aligned}
  $$

  - **関数 f,g は周期 2π をもつことに注意して，変数変換 $x-y=z$ を用いて 2 つの定義が同値であることを確認せよ**

L^p ノルム

- 定義

  関数 f の L^p ノルムを以下で定義する．

  $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

  ただし Ω は定義域で，一般には $\mathbb{R}$ 上の適当な区間．

- 内積から自然に導かれたノルムは L^2 ノルムである

L^p 空間

- 定義

$$
\begin{aligned}
L^p(\Omega) &= \left\{ f \,\middle|\, \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\} \\
&= \left\{ f \,\middle|\, \|f\|_{L^p} < \infty \right\}
\end{aligned}
$$

Riemann-Lebesgue の定理

- 定理

  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ の Fourier 係数 $a_n = \langle f, \phi_n \rangle$ は

  $$\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$$

  となる.

- 証明

  f_r の Fourier 係数を $a_n(r)$ と書くと

  $$
  \begin{aligned}
  |a_n| &\le |a_n - a_n(r)| + |a_n(r)| \\
  &= |a_n - a_n(r)| + |a_n| r^{|n|} \\
  &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - P_r * f\|_{L^1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{|n|} \|f\|_{L^1}
  \end{aligned}
  $$

  ただし $*$ は畳み込みを表す.

  ここで r を 1 に近くとれば第 1 項はいくらでも小さくすることができる. また $|n|$ を十分大きくとれば第 2 項はいくらでも小さくなるので, $\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$ が示される.

- (証明のつづき)

  最後の不等号は以下を用いればよい.

  $$
  \begin{aligned}
  |a_n| &= \left| \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \right| \\
  &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left| f(x) e^{-inx} \right| dx \\
  &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)| \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}
  \end{aligned}
  $$

  - L^1 関数であれば係数の存在が保証されることを示している

Riemann-Lebesgue の定理の応用

- Fourier 級数の項別微分

  関数 f は区間 $(-\pi, \pi)$ で連続, $f(-\pi) = f(\pi)$, ほとんどいたるところで f' が存在し, $f' \in L^2 \cap L^1$ であるとする. f, f' の Fourier 級数展開をそれぞれ以下で表す.

  $$
  \begin{aligned}
  f(x) &= \sum_n a_n \phi_n(x) \\
  f'(x) &= \sum_n b_n \phi_n(x)
  \end{aligned}
  $$

  f を項別に微分して a_n と b_n の間の以下の関係を得る.

  $$b_n = in \cdot a_n$$

- 滑らかな関数の高周波成分

  Riemann-Lebesgue の定理より $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ なので，$a_n = o(1/n)$ (Landau の記号) となる．すなわち微分できるくらい滑らかな関数は $n \to \infty$ において $1/n$ より速く a_n が小さくなる (高周波成分が減衰する).

関数の積とノルム

Hölder の不等式

- 定理

  $1/p + 1/q = 1,\ p, q > 0$ とする．このとき

  $$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \le \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$$

  - **Cauchy-Schwarz の不等式 ($p = q = 2$) の一般化である**

- 証明

  対数関数の凸性と $1/p + 1/q = 1$ から任意の $a, b > 0$ について

  $$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab$$

  が成り立つ.

  - **凸性について曖昧な者は意味を確認せよ**

- (証明のつづき)

  また対数関数の単調性から

  $$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ge ab$$

  が成り立つ．したがって

  $$\begin{aligned}\frac{1}{\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}}\left|\int u(x)v(x)dx\right| &\le \int \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}}\frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}}dx \\ &\le \frac{1}{p\|u\|_{L^p}^p}\int |u(x)|^p dx + \frac{1}{q\|v\|_{L^q}^q}\int |v(x)|^q dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

畳み込みのノルム

- 定理

  $$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

  とするとき

  $$\|h\|_{L^p} \le \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}$$

- 証明

$1/p + 1/q = 1$ とする．

$$
\begin{aligned}
|h(x)| &\le \int |f(x-y)g(y)|dy \\
&= \int |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{q}}dy \\
&\le \left(\int |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y)|dy\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

- (証明のつづき)

  これより

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{L^p}^p &= \int |h(x)|^p dx \\
&\le \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int\int |f(x-y)|^p|g(y)|dydx \\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int |f(x-y)|^p dx \int |g(y)|dy \\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1}\|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p\|f\|_{L^p}^p
\end{aligned}
$$

畳み込みの Fourier 級数

- 係数の存在

  先の定理において $p = 1$ とすると

$$
\|h\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}
$$

  となり，$f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ なら $h \in L^1(-\pi, \pi)$ となる．このことから畳み込み h の Fourier 係数が存在することが保証される．

- 係数の関係

  f, g, h の Fourier 係数をそれぞれ a_n, b_n, c_n とすると

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int f(x-y)g(y)dy\ e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int f(x-y)e^{-in(x-y)}g(y)e^{-iny}dxdy \\
&= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(z)e^{-inz}dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(y)e^{-iny}dy \\
&= \sqrt{2\pi}a_n b_n
\end{aligned}
$$

  という関係が成り立つ．

演習

練習問題

- 関数 f を

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi, \pi)
$$

とするとき，畳み込み $f * f$ を求めよ．

- 関数 $f * f$ を Fourier 級数展開せよ．

今回のまとめ

- Fourier 級数の性質
  - Fourier 級数展開:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  - 不連続点での Foureir 級数の値は平均値
  - 連続 (滑らか) な関数に高い周波数は含まれない (Riemann-Lebesgue の定理)
  - 畳み込みの Fourier 係数は元の関数の係数の積に比例する