

# Fourier 変換

信号処理 - 講義 6

村田 昇

## 前回のおさらい

### ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間  
線形演算について閉じた空間
- 内積空間  
内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間  
ノルムに関して完備な内積空間

### Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理  
可分な無限次元 Hilbert 空間には可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する.
- 定理  
可分な無限次元 Hilbert 空間は  $l^2$  空間と同型である.
- 定理  
 $\{\phi_k\}$  が  $\mathcal{H}$  の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

### Fourier 級数展開

- 定理  
 $f \in L^2(-\pi, \pi)$  は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

内積は  $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$  に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

## 演習

### 練習問題

- 以下の問に答えよ.
  - 次の関数  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

## 演習

### 練習問題

- 以下の問に答えよ.
  - 以下の系が周期  $T$  の直交系となるように  $\alpha$  を定めよ.

$$\{e^{\alpha i n x}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

- 以下を内積とするととき, 前問の直交系を正規化せよ.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

## Fourier 変換

### Fourier 級数の一般化

- 周期  $2\pi$  の場合  
正規直交系

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, x \in [-\pi, \pi], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 周期  $T$  の場合  
正規直交系

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi i n x}{T}}, x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 周期  $T$  の場合  
Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n x}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-\frac{2\pi i n y}{T}} dy \end{aligned}$$

- 極限操作のための書き換え  
ここで  $\frac{2\pi}{T} = \Delta$  とする

$$f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} f(y) e^{-in\Delta y} dy$$

- 周期無限大における積分

$T$  が十分大きい ( $\Delta$  が十分小さい) 極限を考えるために, 以下の積分を定義する.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

- 級数和の近似

Fourier 展開の積分部分は  $\sqrt{2\pi} \hat{f}(n\Delta)$  で十分良く近似できると考え Riemann 和の形で書く.

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \hat{f}(n\Delta) \Delta$$

- 区分求積法

Riemann 和は  $n\Delta \rightarrow \omega, \Delta \rightarrow d\omega$  として積分で表される.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta) \cdot \Delta \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$$

- 周期無限大における表現

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(反転公式)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy d\omega \end{aligned}$$

## Fourier 変換と反転公式

- 定義

$\mathbb{R}$  上の関数  $f$  に対して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

で定義する.

## 多次元 Fourier 変換

- $d$  次元の場合

$\mathbb{R}^d$  上の関数  $f$  について

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx \quad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot x} d\omega \quad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

で定義する. なお  $\omega \cdot x$  はベクトル  $\omega \in \mathbb{R}^d$  とベクトル  $x \in \mathbb{R}^d$  の通常の内積である.

## 演習

### 練習問題

- 以下の積分値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx$$

## 反転公式の証明

一般に  $\hat{f}(\omega)$  は可積分かどうか分からないので, Poisson 核と似た原理を用いて反転公式を示す.

### 証明

- step 1

関数  $\hat{f}$  は各点で値が決まるが, 積分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

の値が存在するかどうかはわからない.

- step 2

収束因子  $e^{-\epsilon\omega^2}$  を用いて以下の積分を定義する.

$$\begin{aligned} f_{\epsilon}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x)} d\omega \end{aligned}$$

- step 3

指数の肩を整理する.

$$-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x) = -\epsilon \left( \omega + \frac{i(y-x)}{2\epsilon} \right)^2 - \frac{(y-x)^2}{4\epsilon}$$

- step 4

$\omega$  の積分を行い  $f_{\epsilon}$  を整理する.

$$f_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}} f(y) dy$$

- step 5

関数  $G_{\epsilon}$  (Gauss 核と呼ばれる) を

$$G_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

と定義し,  $f_{\epsilon}$  を畳み込みで書き直す.

$$f_{\epsilon}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\epsilon}(x-y) f(y) dy = G_{\epsilon} * f(x)$$

- step 6

関数  $G_{\epsilon}$  は以下の性質を持つことが確かめられる.

1.  $G_{\epsilon}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} G_{\epsilon}(x) dx = 1$
3.  $\forall \delta > 0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} G_{\epsilon}(x) dx = 0$

したがって Poisson 核と同様に,  $G_{\epsilon}$  は  $\epsilon \rightarrow 0$  において  $\delta$  関数になる.

## 反転公式

- 定理

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

より正確には  $f \in L^1 \cap L^p$  であれば, 上の式は  $L^p$  の意味で成り立つと表現される.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G_{\epsilon} * f - f\|_{L^p} = 0$$

## 演習

### 練習問題

- 関数  $\Xi$  を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の関数の Fourier 変換を求めよ.

- $f(x) = e^{-\alpha x} \Xi_{(0,\infty)}(x)$  ( $\alpha > 0$ )
- $g(x) = e^{-\beta x^2}$  ( $\beta > 0$ )
- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

## 今回のまとめ

- Fourier 変換
  - Fourier 級数の周期の一般化
  - 周期無限大の極限の表現
  - Fourier 変換と反転公式
  - Gauss 核による反転公式の証明