Fourier 級数

信号処理 - 第 *4* 講

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間

- 満たすべき条件
    1. $a, b \in V \;\Rightarrow\; a+b \in V$ (線形性)
    2. $a, b, c \in V \;\Rightarrow\; (a+b)+c = a+(b+c)$ (結合則)
    3. $a, b \in V \;\Rightarrow\; a+b = b+a$ (交換則)
    4. $\exists 0 \in V$ s.t. $\forall a \in V,\; a+0 = a$ (零元)
    5. $\forall a \in V \;\Rightarrow\; \exists -a \in V$ s.t. $a+(-a) = 0$ (逆元)
    6. $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \;\Rightarrow\; \lambda a \in V$ (スカラ倍)
    7. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \;\Rightarrow\; (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ (結合則)
    8. $\exists 1 \in K$ s.t.$\forall a \in V,\; 1a = a$ (K の単位元)
    9. $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \;\Rightarrow\; \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ (分配則)
    10. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \;\Rightarrow\; (\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$ (分配則)

内積空間

- 内積の定義

    ベクトル空間の 2 つの要素 $u, v \in \mathcal{H}$ に対して，次の性質を持つ 2 変数関数を**内積**という.

    1. $\langle u, u\rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u\rangle = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$
    2. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ (複素共役)
       なお，体 K が実数の場合は $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
    3. $\langle \alpha u + \beta u', v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u', v\rangle$ (線形性)

- 定義

    内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**という.

Hilbert 空間

- 完備性の定義

    ある集合の中の Cauchy 列

    $$\lim_{n,m\to\infty} d(u_n, u_m) = 0$$

    の収束先 $\lim_{n\to\infty} u_n$ がもとの集合に含まれるとき，その集合は**完備**であるという.

- 定義

    ノルムに関して完備な内積空間を **Hilbert 空間**という.

正規直交系

- 定義

  Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の部分集合 $\mathcal{A}$ が

  $$\forall \phi, \psi \in \mathcal{A},\ \phi \neq \psi \ \Rightarrow\ \langle \phi, \psi \rangle = 0$$

  となるとき，$\mathcal{A}$ を**直交系**という．
  さらに

  $$\forall \phi \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} = 1$$

  となるとき，$\mathcal{A}$ を**正規直交系**という．

完全正規直交系

- 定義

  Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の正規直交系 $\{\phi_k\}$ が **Parseval の等式**

  $$\forall u \in \mathcal{H},\ \|u\|^2 = \sum_k |\langle u, \phi_k \rangle|^2$$

  を満たすとき，$\{\phi_k\}$ を**完全正規直交系**という．

完全正規直交系の性質

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個** の要素からなる完全正規直交系が存在する．

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である．

- 定理

  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ．

  $$\forall u \in \mathcal{H} \ \Rightarrow\ u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数

周期関数

- 周期的な信号: 性質の良い (取り扱い易い) 信号
- 2π 周期の信号を考えることにする
- $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ が周期 2π を持つ:

  $$f(x + 2\pi) = f(x)$$

- 1 周期の範囲は $[-\pi, \pi]$ ，$[0, 2\pi]$ ，$[\pi, 3\pi]$ など自由に取ってよい
- 計算上取り扱いが簡単なので $[-\pi, \pi]$ を用いる
- 対象とする関数は 2 乗可積分な複素数値関数とする

  $$L^2(-\pi, \pi) = \left\{ f \ \middle|\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Fourier 級数展開

- 定理

$$\left\{\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$$

とし，$f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して内積を

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$$

で定義する.

- (定理のつづき)

$f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように **Fourier 級数展開**される.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy \end{aligned}$$

注意

- あとで示すように

$$\left\{\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$$

は $L^2(-\pi, \pi)$ 上の **完全正規直交系** となる.

- **正規直交系** であることは容易に確かめられる.

$$\begin{aligned} \langle \phi_m, \phi_n\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\ (m \neq n), \end{aligned}$$

$$\langle \phi_n, \phi_n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1$$

Fourier 級数展開の例

- 区間 $(-\pi, \pi)$ 上の周期関数 $f(x) = x$ $(\in L^2(-\pi, \pi))$ Fourier 級数展開を求める
- 係数は以下の式を計算すればよい.

$$\langle f, \phi_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx$$

- 部分積分を用いて計算する ($n \neq 0$ のとき)

$$
\begin{aligned}
\langle f, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\
&= \left[x \cdot \frac{1}{-in\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{1}{-in\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\
&= \frac{\pi(-1)^n - (-\pi)(-1)^n}{-in\sqrt{2\pi}} - \left[\frac{e^{-inx}}{-n^2\sqrt{2\pi}} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{i2\pi(-1)^n}{n\sqrt{2\pi}} - \frac{(-1)^n - (-1)^n}{-n^2\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{i\sqrt{2\pi}(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

- $n = 0$ も計算してまとめると以下のようになる

$$
x = i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}
$$

- Euler の公式

$$
e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)
$$

  を用いると三角関数で書くことができる

$$
x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx
$$

演習

練習問題

- $L^2(-\pi, \pi)$ に含まれる以下の関数を Fourier 級数展開せよ.
  - $f(x) = |x|$
  - $f(x) = x^2$

Fourier 級数の応用

級数和の計算

- 展開式から級数和に関していろいろな公式を得ることができる.
- $f(x) = |x|$ に対して $x = 0$ とすれば

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
$$

- $f(x) = x^2$ に対して $x = 0$ とすれば

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}
$$

Fourier 級数の性質

- 三角関数による展開

  Euler の公式により以下のように変形することができる

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \\
&= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} + \frac{a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right) \\
&= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \cos nx + i \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \sin nx \right)
\end{aligned}
$$

  - 正弦関数と余弦関数で完全正規直交系を構成できる

- 実数値関数の係数

  関数 $f(x)$ が実数値の場合

$$
\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2\pi}},\ i\frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{2\pi}}
$$

  は実数になることから a_n と a_{-n} は複素共役の関係にある.

- 定義域の異なる基底

  $L^2(0, \pi)$ においては

$$
\left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx;\ n = 1, 2, \ldots \right\}
$$

$$
\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx;\ n = 1, 2, \ldots \right\}
$$

  がそれぞれ完全正規直交系となる.

  これは $(0, \pi)$ で定義された関数をそれぞれ偶関数，奇関数として $(-\pi, \pi)$ に拡張すれば，余弦関数または正弦関数のみで展開できることを利用すればよい.

演習

練習問題

- 以下の級数和を求めよ

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}
$$

- 正弦関数と余弦関数で正規直交系を構成せよ.

完全性の証明

- step 1

  関数 f が

$$
f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)
$$

  と展開されたとする.

- step 2
  Bessel の不等式 (の特殊な場合) から
  $$|a_n| < \|f\|$$
  であることはわかるが,
  $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$
  の和が存在するとは限らない.

- step 3
  収束因子を導入して収束する無限和の極限を考える.
  $$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} \phi_n(x)$$
  $0 < r < 1$ とすれば級数和は必ず存在する.

- step 4
  級数和が収束するので積分と和を交換してもよい.
  $$\begin{aligned} f_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-y)} f(y) dy \end{aligned}$$

- step 5
  積分の中の級数和に着目して
  $$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$
  とおく (Poisson 核という).

- step 6
  関数
  $$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$
  の右辺の和の各項は $(-\pi, \pi)$ の周期関数なので, $(-\infty, \infty)$ に拡大可能である.

- step 7
  周期関数 f も同様に $(-\infty, \infty)$ に拡大可能であるので, 一周期分の積分区間を適切に取り直して
  $$f_r(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y) f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) dy$$
  と書き変えることができる.

- step 8

右辺の級数和を計算すると以下になる．

$$
\begin{aligned}
P_r(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1-re^{-ix}}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{|1-re^{ix}|^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}
\end{aligned}
$$

- step 9

  $P_r(x)$ は $r \to 1$ で $P_r(x)$ は Dirac の δ 関数となる．
  - $P_r(x) > 0$ (3 行目の表現より明らか)
  - P_r の一周期分の積分は

    $$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\sum_n r^{|n|}e^{inx}dx = 1$$

  - $\forall\delta$ $(0 < \delta < \pi)$ に対して

    $$\lim_{r\to1} \sup_{\delta\le|x|\le\pi} P_r(x) = 0$$

    $\cos x$ は上記の範囲では $\cos\delta$ で最大となることから

    $$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} \le \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta} \xrightarrow{r\to1} 0$$

- step 10

  f_r と f の差

  $$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\{f(x-y)-f(x)\}dy$$

  の積分を 3 つに分解して考える．

  $$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$$

- step 11

  δ と r は適当に選ぶことができることに注意する．
  - 積分の第 1,3 項では P_r をいくらでも小さくすることができる
  - 第 2 項では $f(x-y)-f(x)$ をいくらでも小さくすることできる

  この結果，δ と r とを適当に選ぶことによって 3 つの積分の和はいくらでも小さくなる．

- step 12

  以上より，各点 x において

  $$\lim_{r\to1} f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n\rangle\phi_n(x) = f(x)$$

  となることが示された．

- 前回の定理 (完全性の同値な条件) の 2 を参照

今回のまとめ

- Fourier 級数展開:
  - 周期関数 ($\in L^2(-\pi,\pi)$) の Fourier 級数展開:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

  - Fourier 基底の完全性:

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

    は完全正規直交系である