

Fourier 級数の性質

信号処理 - 第 5 講

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間
線形演算について閉じた空間
- 内積空間
内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間
ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理
可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個**の要素からなる完全正規直交系が存在する.
- 定理
可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.
- 定理
 $\{\phi_k\}$ が \mathcal{H} の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理
 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように **Fourier 級数展開**される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 以下の関数 f を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \in L^2(-\pi, \pi)$$

不連続点の性質

片側極限

- 定義

$h > 0$ として

$$f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h)$$

$$f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$$

と書く. これを片側極限という.

不連続点

- 不連続関数

点 x において不連続な関数を考える.

$$f(x-0) \neq f(x+0)$$

点 x 以外の近傍での有界性を仮定する.

$$\sup_{0 < h < \delta} |f(x-h) - f(x-0)| < \infty$$

$$\sup_{0 < h < \delta} |f(x+h) - f(x+0)| < \infty$$

不連続点での評価

- 定理で評価した式

$$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) \{f(x-y) - f(x)\} dy$$

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

- P_r の性質

P_r の積分は偶関数であることから以下が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^0 P_r(y) dy = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\infty} P_r(y) dy = \frac{1}{2}$$

- 不連続点まわりでの評価

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\delta}^{\delta} P_r(y) \{f(x-y) - f(x)\} dy \right| \\
& \leq \left| \int_{-\delta}^0 P_r(y) \{f(x-y) - f(x+0)\} dy \right| \\
& \quad + \left| \int_0^{\delta} P_r(y) \{f(x-y) - f(x-0)\} dy \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \sup_{-\delta < y < 0} |f(x-y) - f(x+0)| \\
& \quad + \frac{1}{2} \sup_{0 < y < \delta} |f(x-y) - f(x-0)| \\
& \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

- 不連続点の Fourier 級数展開

関数 f の Fourier 級数展開 \tilde{f} は

$$\tilde{f}(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) dy = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

が成り立つので, f の不連続点での Fourier 級数展開は両側からの極限の平均値となる.

演習

練習問題

- 以下の関数 f は $x = \pi/2$ で不連続となる. Fourier 級数での $f(\pi/2)$ の値を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \in L^2(-\pi, \pi)$$

Fourier 係数の性質

畳み込み

- 定義

周期 2π をもつ関数 f と g の**畳み込み** (合成積; convolution) h は以下で定義される.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \\
&= f * g(x)
\end{aligned}$$

- 関数 f, g は周期 2π をもつことに注意して, 変数変換 $x-y=z$ を用いて 2 つの定義が同値であることを確認せよ

L^p ノルム

- 定義

関数 f の L^p ノルムを以下で定義する.

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ただし Ω は定義域で, 一般には \mathbb{R} 上の適当な区間.

– 内積から自然に導かれたノルムは L^2 ノルムである

L^p 空間

- 定義

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \left\{ f \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \\ &= \{ f \mid \|f\|_{L^p} < \infty \} \end{aligned}$$

Riemann-Lebesgue の定理

- 定理

$f \in L^1(-\pi, \pi)$ の Fourier 係数 $a_n = \langle f, \phi_n \rangle$ は

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0$$

となる.

- 証明

f_r の Fourier 係数を $a_n(r)$ と書くと

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq |a_n - a_n(r)| + |a_n(r)| \\ &= |a_n - a_n(r)| + |a_n| r^{|n|} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - P_r * f\|_{L^1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{|n|} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

ただし $*$ は畳み込みを表す.

ここで r を 1 に近くとれば第 1 項はいくらでも小さくすることができる. また $|n|$ を十分大きくとれば第 2 項はいくらでも小さくなるので, $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0$ が示される.

- (証明のつづき)

最後の不等号は以下を用いればよい.

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x) e^{-inx}| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

– L^1 関数であれば係数の存在が保証されることを示している

Riemann-Lebesgue の定理の応用

- Fourier 級数の項別微分

関数 f は区間 $(-\pi, \pi)$ で連続, $f(-\pi) = f(\pi)$, ほとんどいたるところで f' が存在し, $f' \in L^2 \cap L^1$ であるとする. f, f' の Fourier 級数展開をそれぞれ以下で表す.

$$f(x) = \sum_n a_n \phi_n(x)$$
$$f'(x) = \sum_n b_n \phi_n(x)$$

f を項別に微分して a_n と b_n の間の以下の関係を得る.

$$b_n = in \cdot a_n$$

- 滑らかな関数の高周波成分

Riemann-Lebesgue の定理より $b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なので, $a_n = o(1/n)$ (Landau の記号) となる. すなわち微分できるくらい滑らかな関数は $n \rightarrow \infty$ において $1/n$ より速く a_n が小さくなる (高周波成分が減衰する).

関数の積とノルム

Hölder の不等式

- 定理

$1/p + 1/q = 1$, $p, q > 0$ とする. このとき

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

– **Cauchy-Schwarz の不等式 ($p = q = 2$) の一般化である**

- 証明

対数関数の凸性と $1/p + 1/q = 1$ から任意の $a, b > 0$ について

$$\log \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log ab$$

が成り立つ.

– 凸性について曖昧な者は意味を確認せよ

- (証明のつづき)

また対数関数の単調性から

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}} \left| \int u(x)v(x)dx \right| &\leq \int \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}} dx \\ &\leq \frac{1}{p\|u\|_{L^p}^p} \int |u(x)|^p dx + \frac{1}{q\|v\|_{L^q}^q} \int |v(x)|^q dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

畳み込みのノルム

- 定理

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

とすると

$$\|h\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

- 証明

$1/p + 1/q = 1$ とする.

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \int |f(x-y)g(y)|dy \\ &= \int |f(x-y)| |g(y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|^{\frac{1}{q}} dy \\ &\leq \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

が成り立つ.

- (証明のつづき)

これより

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^p}^p &= \int |h(x)|^p dx \\ &\leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int \int |f(x-y)|^p |g(y)| dy dx \\ &= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int |f(x-y)|^p dx \int |g(y)| dy \\ &= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

畳み込みの Fourier 級数

- 係数の存在

先の定理において $p = 1$ とすると

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

となり, $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ なら $h \in L^1(-\pi, \pi)$ となる. このことから畳み込み h の Fourier 係数が存在することが保証される.

- 係数の関係

f, g, h の Fourier 係数をそれぞれ a_n, b_n, c_n とすると

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x-y)g(y)dy e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x-y) e^{-in(x-y)} g(y) e^{-iny} dx dy \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(z) e^{-inz} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(y) e^{-iny} dy \\ &= \sqrt{2\pi} a_n b_n \end{aligned}$$

という関係が成り立つ.

演習

練習問題

- 関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \in L^2(-\pi, \pi)$$

とすると、畳み込み $f * f$ を求めよ。

- 関数 $f * f$ を Fourier 級数展開せよ。

今回のまとめ

- Fourier 級数の性質
 - Fourier 級数展開:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 不連続点での Fourier 級数の値は平均値
- 連続 (滑らか) な関数に高い周波数は含まれない (Riemann-Lebesgue の定理)
- 畳み込みの Fourier 係数は元の関数の係数の積に比例する