標本化定理

信号処理 - 講義 *12*

村田 昇

前回のおさらい

フィルタ

- 定義

  入力 $f(t)$ を変換して出力 $g(t)$ を生成する機構

- 線形性

  入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質

- 時不変性

  入力の時刻がずれた場合，出力も同じだけずれる性質

線形時不変フィルタの数学的表現

- フィルタの積分表現

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds$$

h: インパルス応答 = フィルタの表現

Fourier 変換による表現

- 時間領域では畳み込み積分

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds = h*f(t)$$

- 周波数領域では関数の積

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$$

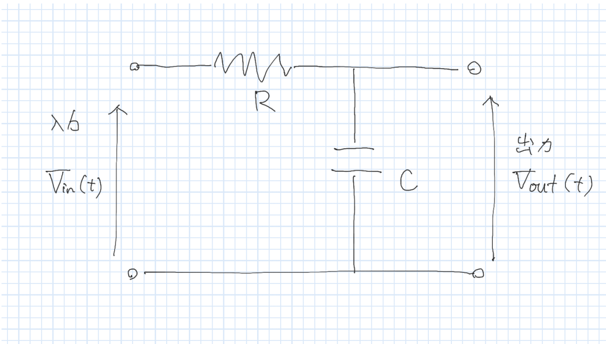
インパルス応答

- インパルス応答

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds$$

- $h(t)$ はフィルタに $\delta(t)$ を入力した時の出力
- 物理的には面積 1 ($\Delta \times 1/\Delta$) の矩形波に対する出力を時間幅 $\Delta \to 0$ としたときの波形

ローパスフィルタ (RC 回路)



入出力の関係

- 時間領域

$$V_{in}(t) = CR\frac{d}{dt}V_{out}(t) + V_{out}(t)$$

- 周波数領域

$$\hat{V}_{in}(\omega) = i\omega CR\hat{V}_{out}(\omega) + \hat{V}_{out}(\omega)$$

$$\hat{V}_{out}(\omega) = \frac{1}{i\omega CR + 1}\hat{V}_{in}(\omega)$$

インパルス応答 (逆 Fourier 変換)

- フィルタの Fourier 変換

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega CR + 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}iCR}\frac{1}{\omega - i/CR}$$

- 逆 Fourier 変換

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{h}](t) = h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{CR}e^{-\frac{t}{CR}}, & t > 0 \end{cases}$$

インパルス応答 (矩形波の極限)

- 矩形波の出力

$$V_{out}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta}(1 - e^{-\frac{t}{CR}}), & 0 < t \leq \Delta \\ \frac{1}{\Delta}(e^{\frac{\Delta}{CR}} - 1)e^{-\frac{t}{CR}}, & \Delta < t \end{cases}$$

- $\Delta \to 0$

$$h(t) = \lim_{\Delta \to 0} V_{out}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{CR}e^{-\frac{t}{CR}}, & t > 0 \end{cases}$$

デジタル信号処理

デジタル信号処理

- 計算機で信号を扱うための方法論
- 処理の流れ
  - アナログ信号をデジタル信号に変換 (A/D 変換)
  - 計算機上でデジタル信号を処理
  - デジタル信号をアナログ信号に変換 (D/A 変換)

計算機によるデータ処理

- アナログ信号は扱えない
  - 連続時間に対応していない
  - 連続値を正確に記録できない
- 信号の表現
  - 離散時間 (クロックがある)
  - 0-1 ベクトル (有限個の値)

アナログとデジタル

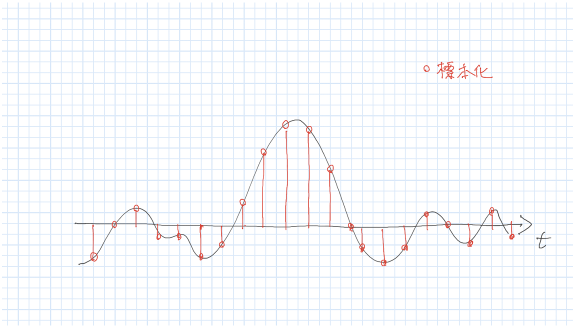
- アナログ
  - 連続的な量 (時間，振幅)
  - 雑音の影響を受けやすい
  - 物理的な保存や複製において劣化が生じる
- デジタル
  - 離散的な量 (時間，振幅)
  - 標本化と量子化による近似
  - 電子的に保存や複製が劣化なく行える

標本化と量子化

- デジタル信号に変換するための離散化 (discretization)
  - 標本化 (sampling): 時間の離散化
  - 量子化 (quantization): 数値の離散化
- 量子化は計算機で扱う数値の丸め誤差の問題
  (この講義では扱わない)

標本化における疑問

- 標本化: 明らかに情報は落ちている
  - 離散データから連続データを再構成することはできるのか？
  - 再構成することができるのであれば，その条件は何か？

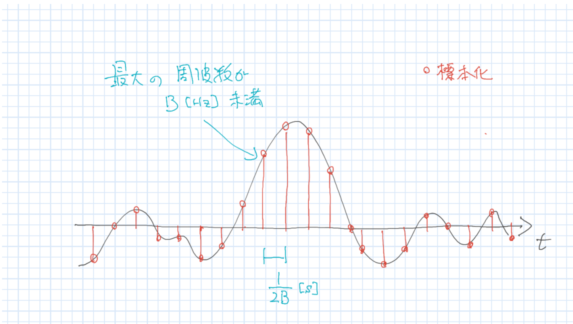


標本化定理

標本化定理

- 定理

  信号 $f(t)$ が B [Hz] 未満の周波数しか含んでいないなら，$1/2B$ [s] ごとのサンプル点を用いて元の信号は完全に求められる．



- 定理の呼び名は色々ある
  - Shannon の標本化定理
  - Nyquist-Shannon の標本化定理
  - Nyquist-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
  - Whittaker-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
  - Whittaker-Nyquist-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
  - 染谷の標本化定理
- 用語
  - 1 秒間に取るサンプル数 f_s [Hz]:
    サンプリング周波数 (sampling frequency)
  - 再構成に必要なサンプリング周波数の下限 $2B$ [Hz]:
    Nyquist レート (Nyquist rate)
  - 信号に含まれる周波数の上限 B [Hz]:
    Nyquist 周波数 (Nyquist frequency)

演習

練習問題

- 周期 2π の Fourier 級数展開の基底 (正規直交系) を

$$\phi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\omega}$$

としたとき，周期 $2\pi \cdot 2B$ の基底は

$$\psi_n(\omega) = a \cdot \phi_n\left(b\omega\right)$$

で構成することができる．a と b を求めよ．

解答例

- ω 軸の拡大縮小を考え，正規化項を計算すればよい

$$a = \frac{1}{\sqrt{2B}}$$
$$b = \frac{1}{2B}$$

練習問題

- 以下の積分

$$\frac{1}{2\pi \cdot 2B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i\left(t + \frac{n}{2B}\right)\omega} d\omega$$

を計算しなさい．

解答例

- 定義に従って計算する

$$\frac{1}{2\pi \cdot 2B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i\left(t + \frac{n}{2B}\right)\omega} d\omega = \frac{\sin 2\pi B \left(t + \frac{n}{2B}\right)}{2\pi B \left(t + \frac{n}{2B}\right)}$$

  - 矩形波の Fourier 変換で出てきた sinc 関数

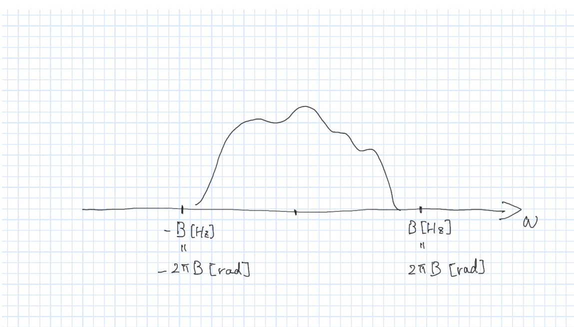
定理の証明と注意

標本化定理の証明

- step 1

  定理の仮定より $f(t)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(\omega)$ の台 (0 でない ω の領域) は $(-2\pi B, 2\pi B)$ である．

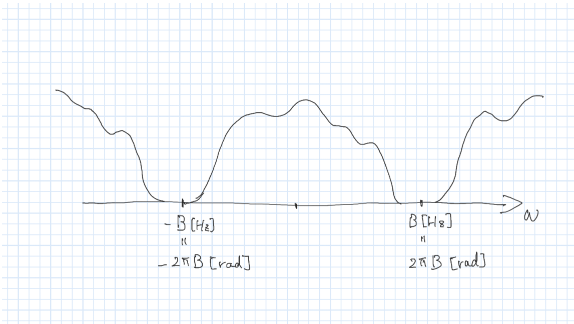
  $(B\,[\mathrm{Hz}] = 2\pi B\,[\mathrm{rad}])$



- step 2

  $\hat{f}$ を $2\pi \cdot 2B$ ごとに繰り返したものを $\tilde{f}$ とする．

  これは周期 $2\pi \cdot 2B$ を持つ周期関数なので Fourier 級数展開が存在する．



- step 3

  周期 2π の Fourier 級数展開の基底を

  $$\phi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\omega}$$

  とすると，周期 $2\pi \cdot 2B$ の基底は

  $$\psi_n(\omega) = \phi_n\left(\frac{\omega}{2B}\right) \frac{1}{\sqrt{2B}}$$

  となる．

- step 4

  $\tilde{f}$ の Fourier 級数展開は

  $$\tilde{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \tilde{f}, \psi_n \right\rangle \psi_n(\omega)$$

  で与えられる．

- step 5

  $$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \tilde{f}(\xi) e^{-i\left(\frac{n}{2B}\right)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{f}(\xi) e^{-i\left(\frac{n}{2B}\right)\xi} d\xi\end{aligned}$$

  - 1 周期分の積分範囲に注意して $\tilde{f}$ をもとの $\hat{f}$ で置き換える

- step 6

  $$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{f}(\xi) e^{-i\left(\frac{n}{2B}\right)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\left(\frac{n}{2B}\right)\xi} d\xi\end{aligned}$$

- $\hat{f}$ は区間 $(-2\pi B, 2\pi B)$ の外では 0

- step 7

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi\cdot 2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{-i\left(\frac{n}{2B}\right)\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} f\left(-\frac{n}{2B}\right)\end{aligned}$$

  - $x = -n/2B$ における $\hat{f}$ の Fourier 逆変換

$$f\left(-\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\left(-\frac{n}{2B}\right)\xi}d\xi$$

- step 8

$$\hat{h}_B(\omega) = \Xi_{(-2\pi B, 2\pi B)}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi B \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

とすると

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_B(\omega)\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\end{aligned}$$

  - $\hat{h}_B$ は $\tilde{f}$ から $\hat{f}$ を取り出す周波数フィルタ

- step 9

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}_B(\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} f\left(-\frac{n}{2B}\right)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi\cdot 2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2B}\right)\int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i\left(t+\frac{n}{2B}\right)\omega}d\omega\end{aligned}$$

  - $\hat{h}_B$ の定義に従って積分領域を書き換える

- step 10

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2\pi\cdot 2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2B}\right)\int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i\left(t+\frac{n}{2B}\right)\omega}d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi B\left(t+\frac{n}{2B}\right)}{2\pi B\left(t+\frac{n}{2B}\right)} f\left(-\frac{n}{2B}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi B\left(t-\frac{n}{2B}\right)}{2\pi B\left(t-\frac{n}{2B}\right)} f\left(\frac{n}{2B}\right)\end{aligned}$$

- step 11

以上から，$f(t)$ は $1/2B$ ごとのサンプル点 $f(n/2B)$ を用いて完全に再構成できる.

定理に関する注意

- 直感的な意味

  正弦波は山と谷の値が与えられれば補間できるので，一番高い周波数でも 1 周期の間に 2 点の標本があれば良い．

- Nyquist 周波数での挙動

  周波数 B で θ の値によって位相と振幅が異なる次の波形を考える．

  $$f(t) = \frac{\cos(2\pi Bt + \theta)}{\cos\theta} = \cos(2\pi Bt) - \sin(2\pi Bt)\tan\theta$$

  標本点を $n/2B$ とすると

  $$f\left(\frac{n}{2B}\right) = (-1)^n - 0 \cdot \tan\theta = (-1)^n$$

  θ によらないため，サンプリングンレート $2B$ の標本点からは θ の値を推定することはできない．

エイリアシング

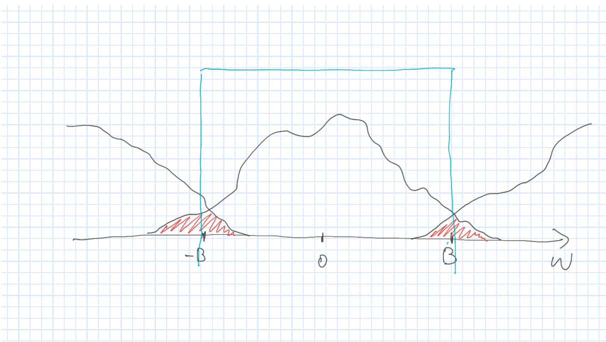
- 定理の前提

  信号の Fourier 変換が $(-2\pi B, 2\pi B)$ 以外で 0 である．

- 成立しない場合に生じる雑音
  - エイリアシング (aliasing)
  - 折り返し雑音 (folding noise)

- 雑音の原因

  $4\pi B$ 周期の関数 $\tilde{f}$ を構成する際に重なりが生じ，$(-2\pi B, 2\pi B)$ 領域を切り出しても元に戻すことができない．



今回のまとめ

- デジタル信号処理
  - アナログとデジタル
  - 標本化と量子化
- 標本化定理
  - Nyquist 周波数
  - サンプリング周波数
  - エイリアシング