*Fourier*級数の性質

信号処理 講義 *5*

村田 昇

*2020*年 *8*月 *23*日

復習

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間

  線形演算について閉じた空間

- 内積空間

  内積が定義されたベクトル空間

- Hilbert 空間

  ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個** の要素からなる完全正規直交系が存在する.

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.

- 定理

  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

  $$\forall u \in \mathcal{H} \;\Rightarrow\; u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように **Fourier 級数展開**される.

  $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

  $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

  $$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$$

演習

- 以下の問に答えよ．
  - 次の関数 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ を Fourier 級数展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

解答

- 係数 $\langle f, \phi_n \rangle$ の計算
  - $n = 0$ のとき

$$\langle f, \phi_0 \rangle = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}$$

  - $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_n \rangle &= \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\ &= \left[\frac{1}{-in} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right]_0^\pi = \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-in\pi} - 1) \\ &= \frac{i}{n\sqrt{2\pi}} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{-2i}{n\sqrt{2\pi}}, & n \text{ が奇数} \\ 0, & n \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

- Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{i\{(-1)^n - 1\}}{2\pi n} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-i}{\pi(2m+1)} e^{i(2m+1)x} \end{aligned}$$

不連続点の性質

これまでは暗黙の内に関数 f の連続性を仮定しているが，f に不連続点がある場合には注意する必要がある．

片側極限

- 定義

  $h > 0$ として

$$\begin{aligned} f(x-0) &= \lim_{h \to 0} f(x - h) \\ f(x+0) &= \lim_{h \to 0} f(x + h) \end{aligned}$$

  と書く．これを片側極限という．

不連続点

- 不連続関数

  点 x において不連続な関数を考える

$$f(x{-}0) \neq f(x{+}0)$$

  点 x 以外の近傍での有界性を仮定する

$$\sup_{0<h<\delta} |f(x-h) - f(x{-}0)| < \infty$$
$$\sup_{0<h<\delta} |f(x+h) - f(x{+}0)| < \infty$$

不連続点での評価

- 定理で評価した式

$$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\{f(x-y) - f(x)\}dy$$

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

- P_r の性質

  P_r の積分は偶関数であることから以下が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{0} P_r(y)dy = \frac{1}{2}$$

- 不連続点まわりでの評価

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\delta}^{\delta} P_r(y)\{f(x-y) - f(x)\}dy\right| \\
&\leq \left|\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\{f(x-y) - f(x{+}0)\}dy\right| \\
&\quad + \left|\int_{0}^{\delta} P_r(y)\{f(x-y) - f(x{-}0)\}dy\right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{-\delta<y<0} |f(x-y) - f(x{+}0)| \\
&\quad + \frac{1}{2} \sup_{0<y<\delta} |f(x-y) - f(x{-}0)| \\
&\to^{\delta\to 0} 0
\end{aligned}$$

- 不連続点の Fourier 級数展開

  関数 f の Fourier 級数展開 $\tilde{f}$ は

$$\tilde{f}(x) = \lim_{r\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y)dy = \frac{f(x{-}0) + f(x{+}0)}{2}$$

  が成り立つので，f の不連続点での Fourier 級数展開は両側からの極限の平均値となる．

演習

- 以下の問に答えよ
  - 以下の関数は $x=0$ で不連続となる．Fourier 級数での $f(0)$ の値を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}\quad \in L^2(-\pi,\pi)$$

解答

- Fourier 級数展開に代入すればよい

$$\begin{aligned}f(0)&=\frac{1}{2}+\sum_{n\neq 0}\frac{i\{(-1)^n-1\}}{2\pi n}\\&=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{i\{(-1)^{-n}-1\}}{-2\pi n}+\frac{i\{(-1)^n-1\}}{2\pi n}\right\}\\&=\frac{1}{2}=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}\end{aligned}$$

係数の性質

畳み込み

- 定義

  周期 2π をもつ関数 f と g の畳み込み (合成積; convolution) h を以下で定義される．

$$\begin{aligned}h(x)&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)g(y)dy\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)dy\\&=f*g(x)\end{aligned}$$

  - 関数 f,g は周期 2π をもつことに注意して，変数変換 $x-y=z$ を用いて 2 つの定義が同値であることを確認せよ

L^p ノルム

- 定義

  関数 f の L^p ノルムを以下で定義する．

$$\|f\|_{L^p}=\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

    - Ω は定義域で，一般には $\mathbb{R}$ 上の適当な区間
  - 内積から自然に導かれたノルムは L^2 ノルムである

L^p 空間

- 定義

$$\begin{aligned}L^p(\Omega)&=\left\{f\ \middle|\ \int_\Omega |f(x)|^p dx<\infty\right\}\\&=\left\{f\ \middle|\ \|f\|_{L^p}<\infty\right\}\end{aligned}$$

    - Ω は定義域で，一般には $\mathbb{R}$ 上の適当な区間

Riemann-Lebesgue の定理

- 定理

  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ の Fourier 係数 $a_n = \langle f, \phi_n \rangle$ は

  $$\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$$

  となる．

- 証明

  f_r の Fourier 係数を $a_n(r)$ と書くと

  $$\begin{aligned} |a_n| &\leq |a_n - a_n(r)| + |a_n(r)| \\ &= |a_n - a_n(r)| + |a_n| r^{|n|} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - P_r * f\|_{L^1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{|n|} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

  ただし $*$ は畳み込みを表す．

  ここで r を 1 に近くとれば第 1 項はいくらでも小さくすることができる．また $|n|$ を十分大きくとれば第 2 項はいくらでも小さくなるので，$\lim_{n\to\pm\infty} a_n = 0$ が示される．

- (証明のつづき)

  最後の不等号は以下を用いればよい．

  $$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left| f(x) e^{-inx} \right| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

  – L^1 関数であれば係数の存在が保証されることを示している

Riemann-Lebesgue の定理の応用

- Fourier 級数の項別微分

  関数 f は区間 $[-\pi, \pi]$ で連続，$f(-\pi) = f(\pi)$ ，ほとんどいたるところで f' が存在し，$f' \in L^2 \cap L^1$ であるとする．f, f' の Fourier 級数展開をそれぞれ

  $$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n a_n \phi_n(x) \\ f'(x) &= \sum_n b_n \phi_n(x) \end{aligned}$$

  とする．f を項別に微分すると a_n と b_n の間には

  $$b_n = in \cdot a_n$$

  という関係が成立する．

- 滑らかな関数の高周波成分

  Riemann-Lebesgue の定理より $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ なので，$a_n = o(1/n)$ (Landau の記号) となる．すなわち微分できるくらい滑らかな関数は $n \to \infty$ において $1/n$ より速く a_n が小さくなる (高周波成分が減衰する)．

関数の積とノルム

このとき関数の積のノルム関数のノルムの間にはいくつかの関係が成り立つ.

Hölder の不等式

- 定理

  $1/p+1/q=1,\ p,q>0$ とする．このとき

  $$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \le \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$$

  - Cauchy-Schwarz の不等式 $(p=q=2)$ の一般化である

- 証明

  対数関数の凸性と $1/p+1/q=1$ から任意の $a,b>0$ について

  $$\log\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q=\log ab$$

  が成り立つ.

  - 凸性について曖昧な者は意味を確認せよ.

- (証明のつづき)

  また対数関数の単調性から

  $$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$$

  が成り立つ．したがって

  $$\begin{aligned}\frac{1}{\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}}\left|\int u(x)v(x)dx\right| &\le \int \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}}\frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}}dx\\ &\le \frac{1}{p\|u\|_{L^p}^p}\int |u(x)|^p dx+\frac{1}{q\|v\|_{L^q}^q}\int |v(x)|^q dx\\ &= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{aligned}$$

畳み込みのノルム

- 定理

  $$h(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

  とするとき

  $$\|h\|_{L^p}\le \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}$$

- 証明

  $1/p+1/q=1$ とする.

  $$\begin{aligned}|h(x)| &\le \int |f(x-y)g(y)|dy\\ &= \int |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{q}}dy\\ &\le \left(\int |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |g(y)|dy\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

  が成り立つ.

- (証明のつづき)

  これより

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{L^p}^p &= \int |h(x)|^p dx \\
&\le \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int\int |f(x-y)|^p |g(y)| dy dx \\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int |f(x-y)|^p dx \int |g(y)| dy \\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p
\end{aligned}
$$

畳み込みの Fourier 級数

- 係数の存在

  先の定理において $p=1$ とすると

$$
\|h\|_{L^1} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}
$$

  となり，$f, g \in L^1(-\pi,\pi)$ なら $h \in L^1(-\pi,\pi)$ となる．このとき h の Fourier 係数が存在することが保証される．

- 係数の関係

  f, g, h の Fourier 係数をそれぞれ a_n, b_n, c_n とすると

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int f(x-y) g(y) dy e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int f(x-y) e^{-in(x-y)} g(y) e^{-iny} dx dy \\
&= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(z) e^{-inz} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(y) e^{-iny} dy \\
&= \sqrt{2\pi} a_n b_n
\end{aligned}
$$

  という関係が成り立つ．

演習

- 以下の問に答えよ．
  - 関数 f を

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \in L^2(-\pi,\pi)
$$

    とするとき，畳み込み $f * f$ を求めよ．
  - 関数 $f * f$ を Fourier 級数展開せよ．

解答

- 周期関数であることに注意して定義に従って計算する.

$$
\begin{aligned}
f(x-y) &= \begin{cases} 0, & x \le y \\ 1, & x > y \end{cases} \\
f * f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) f(y) dy \\
&= \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

  - 図を描いて確認せよ.

まとめ

- Fourier 級数の性質
  - Fourier 級数展開:

$$
f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)
$$

$$
\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
$$

  - 不連続点での Foureir 級数の値は平均値
  - 連続 (滑らか) な関数に高い周波数は含まれない (Riemann-Lebesgue の定理)
  - 畳み込みの Fourier 係数は元の関数の係数の積に比例する