

Hilbert 空間

信号処理 - 講義 2

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間

- 以下の条件を満たす
 - $a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$
 - $a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ (結合則)
 - $a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a$ (交換則)
 - $\exists 0 \in V$ s.t. $\forall a \in V, a + 0 = a$ (零元)
 - $\forall a \in V \Rightarrow \exists -a \in V$ s.t. $a + (-a) = 0$ (逆元)
 - $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \Rightarrow \lambda a \in V$ (スカラー倍)
 - $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ (結合則)
 - $\exists 1 \in K$ s.t. $\forall a \in V, 1a = a$ (K の単位元)
 - $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \Rightarrow \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (分配則)
 - $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (分配則)

ベクトル空間の例

- 幾何ベクトル
- 数ベクトル
- 関数空間 $C^m[0, 1]$

区間 $[0, 1]$ 上の実数値関数で, m 階微分可能な関数の集合. 和とスカラー倍は以下で定義される.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{(和)} \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) && \text{(スカラー倍)}\end{aligned}$$

線形独立

- 定義

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$$

となるのが $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ に限られるとき, $\{a_1, \dots, a_k\}$ は **線形独立** であるという.

基底

- 定義

V の極大独立集合を V の基底と呼ぶ. V の階数, すなわち極大独立集合の基数を V の **次元 (dimension)** という.

- 極大独立集合

ある集合 S の線形独立な部分集合 $B \subset S$ を考える. $\forall b \in S - B$ において $B \cup \{b\}$ が線形従属のとき, B は **極大独立集合** であるという.

基底の重要性

- 定理

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ を V_n の基底とする. $\forall b \in V_n$ は B に線形従属で,

$$b = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

と一意に表される.

- ベクトル b を数ベクトル $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ で表すことができる

演習

練習問題

- 以下の問に答えよ

- 以下の集合 V のうちベクトル空間はどれか?
 - * $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi) \text{ かつ } f^{(2)} + f^{(1)} + f = 0\}$
 - * $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi) \text{ かつ } f^{(2)} + f^{(1)} + f = 1\}$
- 以下の集合のうち線形独立なものはどれか?
 - * $\{1, x, x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
 - * $\{1 - x, 1 + x, 1 - x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
- 以下のベクトル空間の空間の次元は?
 - * $C^m[0, 1]$
 - * $V = \{f(x) = a + bx + cx^2, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

解答例

- ヒント

- 条件の線形性として, $h = f + g$ のとき

$$\begin{aligned} h^{(2)} + h^{(1)} + h \\ = (f^{(2)} + f^{(1)} + f) + (g^{(2)} + g^{(1)} + g) \end{aligned}$$

がどうなるか考えればよい

- 適当な x を用いて連立方程式の解を考えればよい

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$$

- 線形独立な要素がいくつ取れるかを考えればよい

内積空間

内積

- 定義

ベクトル空間の2つの要素 $u, v \in \mathcal{H}$ に対して、次の性質を持つ2変数関数を**内積**という.

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$
 2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (複素共役)
なお, 体 K が実数の場合は $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
 3. $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$ (線形性)
- $\langle u, v \rangle, (u, v), u \cdot v$ などいろいろな書き方があるが, 講義では $\langle u, v \rangle$ を用いる

内積空間

- 定義

内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**という.

内積空間の例

- 幾何ベクトル空間
- 数ベクトル空間
- 関数空間

内積の例

- 幾何ベクトル空間

2つの有効線分のなす角 θ とそれぞれの長さ $|u|, |v|$ を用いて定義

$$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \theta$$

- 数ベクトル空間

2つの複素数値ベクトル $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ に対して

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$$

ただし $\bar{\cdot}$ は複素共役

- 関数空間

2つの複素数値関数 u, v に対して

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{v(x)} dx$$

ノルム

- 定義

$u \in \mathcal{H}$ に対して, その**ノルム**を

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

で定義する.

ノルムは以下の性質を満たす.

- $\|u\| \geq 0$ 特に $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in K$
(係数体 K としては \mathbb{R} か \mathbb{C} を考え, $|\cdot|$ は K 上の絶対値を表す)
- $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)

距離

- 内積空間では自然に距離が導入される
 $d(u, v) = \|u - v\|$ を考えると d は**距離** になっている.

演習

練習問題

- 以下の問に答えよ
 - 距離の定義を述べよ.
 - 2つのベクトルの差のノルムが距離となることを確かめよ.
 - 係数体を \mathbb{C} とする内積空間 \mathcal{H} を考える. 内積およびノルムの性質として正しいものはどれか?
 - * $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
 - * $\|u\| = 0$ ならば $u = 0$
 - * $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha u\| = \alpha \|u\|$
 - * $|\langle u, v \rangle| > \|u\| + \|v\|$

解答例

- 距離は以下の4つの条件を満たす
 - $d(x, y) \geq 0$ (非負性)
 - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (非退化性)
 - $d(x, y) = d(y, x)$ (対称性)
 - $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (三角不等式)
- 内積, ノルムの定義を確認せよ

Hilbert 空間

完備性

- 定義
ある集合の中で無限に続く点列 u_n を考え, この点列がだんだん動かなくなる状況を考える.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(u_n, u_m) = 0. \text{ (Cauchy 列という)}$$

この点列の収束先 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ がもとの集合に含まれるとき, その集合は**完備**であるという.

完備性の例

- 有理数は完備でない
点列 a_n を円周率の小数 n 桁以下を切り捨てた数と定義する. 明らかに a_n は有限桁なので有理数であるが, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi$ は無理数
- 実数の区間 $[0, 1]$ は完備だが, $(0, 1)$ は完備でない
点列 $1/n \in (0, 1)$ であるが, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0 \notin (0, 1)$

Hilbert 空間

- 定義

内積空間 \mathcal{H} がノルムに関して完備なとき、**Hilbert 空間**という。

- “ノルムに関して” とはノルムから自然に導出された距離を用いて Cauchy 列を考えるということ
- 完備の厳密な定義は解析学の本を参照

Hilbert 空間の例 (1/2)

- l^2 空間 (無限次元ベクトル空間)

$$l^2 = \left\{ u = (u_1, u_2, \dots), u_i \in K, \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \overline{v_i}$$

- Cauchy-Schwarz の不等式 $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$ により, 条件 (ノルムが有限の値を持つ) から必ず内積の値は存在
- 完備性の証明はかなり面倒. 興味のあるものは成書を参照

Hilbert 空間の例 (2/2)

- L^2 空間

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \mid \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 以下の問に答えよ
 - 以下の集合の中で完備なものはどれか?
 - * 実数全体 $(-\infty, \infty)$
 - * 0 以外の実数
 - * 区間 $[0, 1]$ の無理数
 - 実数 \mathbb{R} を係数体とする以下の内積空間で Hilbert 空間となるものはどれか?
 - * $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ (内積は $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$)
 - * 区間 $[-1, 1]$ 上の実数値連続関数の空間 $C[-1, 1]$ (内積は $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$)

解答例

- ヒント
 - 点列の収束先に含まれない要素の有無を考える.
 - $C[-1, 1]$ は Hilbert 空間にならない.
関数列 f_n として例えば次のようなものを考える.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & (x < -1/n) \\ nx, & (-1/n \leq x \leq 1/n) \\ 1, & (x > 1/n) \end{cases}$$

f_n は連続関数であるが, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ は不連続になる.

今回のまとめ

- 内積: ベクトル空間の 2 つの要素に対して定義され, 以下の性質を持つ
 - $\langle u, u \rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$
 - $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (複素共役)
 - $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$ (線形性)
- ノルム: 内積を用いて $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ で定義され, 以下の性質を持つ
 - $\|u\| \geq 0$ 特に $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$
 - $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in K$
 - $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
 - $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)
- 完備性: ある集合の点列の収束先がもとの集合に含まれること
- 内積空間: 内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間: 完備な内積空間