

# Hilbert 空間

## 信号処理 - 講義 2

村田 昇

## 前回のおさらい

### ベクトル空間

- 以下の条件を満たす
  - $a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$
  - $a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$  (結合則)
  - $a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a$  (交換則)
  - $\exists 0 \in V$  s.t.  $\forall a \in V, a + 0 = a$  (零元)
  - $\forall a \in V \Rightarrow \exists -a \in V$  s.t.  $a + (-a) = 0$  (逆元)
  - $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \Rightarrow \lambda a \in V$  (スカラー倍)
  - $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$  (結合則)
  - $\exists 1 \in K$  s.t.  $\forall a \in V, 1a = a$  ( $K$  の単位元)
  - $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \Rightarrow \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$  (分配則)
  - $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$  (分配則)

### ベクトル空間の例

- 幾何ベクトル
- 数ベクトル
- 関数空間  $C^m[0, 1]$

区間  $[0, 1]$  上の実数値関数で,  $m$  階微分可能な関数の集合. 和とスカラー倍は以下で定義される.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{(和)} \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) && \text{(スカラー倍)}\end{aligned}$$

### 線形独立

- 定義

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$$

となるのが  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$  に限られるとき,  $\{a_1, \dots, a_k\}$  は **線形独立** であるという.

## 基底

- 定義

$V$  の極大独立集合を  $V$  の基底と呼ぶ.  $V$  の階数, すなわち極大独立集合の基数を  $V$  の **次元 (dimension)** という.

- 極大独立集合

ある集合  $S$  の線形独立な部分集合  $B \subset S$  を考える.  $\forall b \in S - B$  において  $B \cup \{b\}$  が線形従属のとき,  $B$  は **極大独立集合** であるという.

## 基底の重要性

- 定理

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$  を  $V_n$  の基底とする.  $\forall b \in V_n$  は  $B$  に線形従属で,

$$b = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

と一意に表される.

- ベクトル  $b$  を数ベクトル  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  で表すことができる

## 演習

### 練習問題

- 以下の集合  $V$  のうちベクトル空間はどれか?
  - $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi) \text{ かつ } f^{(2)} + f^{(1)} + f = 0\}$
  - $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi) \text{ かつ } f^{(2)} + f^{(1)} + f = 1\}$
- 以下の集合のうち線形独立なものはどれか?
  - $\{1, x, x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
  - $\{1 - x, 1 + x, 1 - x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
- 以下のベクトル空間の空間の次元は?
  - $C^m[0, 1]$
  - $V = \{f(x) = a + bx + cx^2, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

### ヒント

- 条件の線形性として,  $h = f + g$  のとき

$$\begin{aligned} h^{(2)} + h^{(1)} + h \\ = (f^{(2)} + f^{(1)} + f) + (g^{(2)} + g^{(1)} + g) \end{aligned}$$

がどうなるか考えればよい

- 適当な  $x$  を用いて連立方程式の解を考えればよい

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$$

- 線形独立な要素がいくつ取れるかを考えればよい

## 内積空間

### 内積

- 定義

ベクトル空間の2つの要素  $u, v \in \mathcal{H}$  に対して、次の性質を持つ2変数関数を**内積**という.

1.  $\langle u, u \rangle \geq 0$  特に  $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$
  2.  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  (複素共役)  
なお, 体  $K$  が実数の場合は  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
  3.  $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$  (線形性)
- $\langle u, v \rangle, (u, v), u \cdot v$  などいろいろな書き方があるが, 講義では  $\langle u, v \rangle$  を用いる

### 内積空間

- 定義

内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**という.

### 内積空間の例

- 幾何ベクトル空間
- 数ベクトル空間
- 関数空間

### 内積の例

- 幾何ベクトル空間

2つの有効線分のなす角  $\theta$  とそれぞれの長さ  $|u|, |v|$  を用いて定義

$$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \theta$$

- 数ベクトル空間

2つの複素数値ベクトル  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  に対して

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$$

ただし  $\bar{\cdot}$  は複素共役

- 関数空間

2つの複素数値関数  $u, v$  に対して

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{v(x)} dx$$

### ノルム

- 定義

$u \in \mathcal{H}$  に対して, その**ノルム**を

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

で定義する.

ノルムは以下の性質を満たす.

- $\|u\| \geq 0$  特に  $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in K$   
(係数体  $K$  としては  $\mathbb{R}$  か  $\mathbb{C}$  を考え,  $|\cdot|$  は  $K$  上の絶対値を表す)
- $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$  (Cauchy-Schwarz の不等式)
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (三角不等式)

## 距離

- 内積空間では自然に距離が導入される

$d(u, v) = \|u - v\|$  を考えると  $d$  は**距離** になっている.

## 演習

### 練習問題

- 距離の定義を述べよ.
- 2つのベクトルの差のノルムが距離となることを確かめよ.
- 係数体を  $\mathbb{C}$  とする内積空間  $\mathcal{H}$  を考える. 内積およびノルムの性質として正しいものはどれか?
  - $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
  - $\|u\| = 0$  ならば  $u = 0$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha u\| = \alpha \|u\|$
  - $|\langle u, v \rangle| > \|u\| + \|v\|$

### ヒント

- 距離は以下の4つの条件を満たす
  - $d(x, y) \geq 0$  (非負性)
  - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (非退化性)
  - $d(x, y) = d(y, x)$  (対称性)
  - $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  (三角不等式)
- 内積, ノルムの定義を確認せよ

## Hilbert 空間

### 完備性

- 定義

ある集合の中で無限に続く点列  $u_n$  を考え, この点列がだんだん動かなくなる状況を考える.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(u_n, u_m) = 0. \text{ (Cauchy 列という)}$$

この点列の収束先  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  がもとの集合に含まれるとき, その集合は**完備**であるという.

### 完備性の例

- 有理数は完備でない  
点列  $a_n$  を円周率の小数  $n$  桁以下を切り捨てた数と定義する. 明らかに  $a_n$  は有限桁なので有理数であるが,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi$  は無理数
- 実数の区間  $[0, 1]$  は完備だが,  $(0, 1)$  は完備でない  
点列  $1/n \in (0, 1)$  であるが,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0 \notin (0, 1)$

## Hilbert 空間

- 定義

内積空間  $\mathcal{H}$  がノルムに関して完備なとき、**Hilbert 空間**という。

- “ノルムに関して” とはノルムから自然に導出された距離を用いて Cauchy 列を考えるということ
- 完備の厳密な定義は解析学の本を参照

## Hilbert 空間の例 (1/2)

- $l^2$  空間 (無限次元ベクトル空間)

$$l^2 = \left\{ u = (u_1, u_2, \dots), u_i \in K, \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \overline{v_i}$$

- Cauchy-Schwarz の不等式  $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$  により, 条件 (ノルムが有限の値を持つ) から必ず内積の値は存在
- 完備性の証明はかなり面倒. 興味のあるものは成書を参照

## Hilbert 空間の例 (2/2)

- $L^2$  空間

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \mid \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

## 演習

### 練習問題

- 以下の集合の中で完備なものはどれか?
  - 実数全体  $(-\infty, \infty)$
  - 0 以外の実数
  - 区間  $[0, 1]$  の無理数
- 実数  $\mathbb{R}$  を係数体とする以下の内積空間で Hilbert 空間となるものはどれか?
  - $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  (内積は  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$ )
  - 区間  $[-1, 1]$  上の実数値連続関数の空間  $C[-1, 1]$  (内積は  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$ )

## ヒント

- 点列の収束先に含まれない要素の有無を考える.
- $C[-1, 1]$  は Hilbert 空間にならない.  
関数列  $f_n$  として例えば次のようなものを考える.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & (x < -1/n) \\ nx, & (-1/n \leq x \leq 1/n) \\ 1, & (x > 1/n) \end{cases}$$

$f_n$  は連続関数であるが,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  は不連続になる.

## 今回のまとめ

- 内積: ベクトル空間の 2 つの要素に対して定義され, 以下の性質を持つ
  - $\langle u, u \rangle \geq 0$  特に  $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$
  - $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  (複素共役)
  - $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$  (線形性)
- ノルム: 内積を用いて  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  で定義され, 以下の性質を持つ
  - $\|u\| \geq 0$  特に  $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$
  - $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in K$
  - $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$  (Cauchy-Schwarz の不等式)
  - $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (三角不等式)
- 完備性: ある集合の点列の収束先がもとの集合に含まれること
- 内積空間: 内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間: 完備な内積空間