

Fourier 級数

信号処理 - 講義 4

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間

- 満たすべき条件

1. $a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$ (線形性)
2. $a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ (結合則)
3. $a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a$ (交換則)
4. $\exists 0 \in V$ s.t. $\forall a \in V, a + 0 = a$ (零元)
5. $\forall a \in V \Rightarrow \exists -a \in V$ s.t. $a + (-a) = 0$ (逆元)
6. $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \Rightarrow \lambda a \in V$ (スカラー倍)
7. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ (結合則)
8. $\exists 1 \in K$ s.t. $\forall a \in V, 1a = a$ (K の単位元)
9. $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \Rightarrow \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (分配則)
10. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (分配則)

内積空間

- 内積の定義

ベクトル空間の 2 つの要素 $u, v \in \mathcal{H}$ に対して、次の性質を持つ 2 変数関数を **内積** という。

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (複素共役)
なお、体 K が実数の場合は $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
3. $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$ (線形性)

- 定義

内積が定義されたベクトル空間を **内積空間** という。

Hilbert 空間

- 完備性の定義

ある集合の中の Cauchy 列

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(u_n, u_m) = 0$$

の収束先 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ がもとの集合に含まれるとき、その集合は **完備** であるという。

- 定義

ノルムに関して完備な内積空間を **Hilbert 空間** という。

正規直交系

- 定義

Hilbert 空間 \mathcal{H} の部分集合 \mathcal{A} が

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{A}, \phi \neq \psi \Rightarrow \langle \phi, \psi \rangle = 0$$

となるとき, \mathcal{A} を**直交系**という.

さらに

$$\forall \phi \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} = 1$$

となるとき, \mathcal{A} を**正規直交系**という.

完全正規直交系

- 定義

Hilbert 空間 \mathcal{H} の正規直交系 $\{\phi_k\}$ が **Parseval の等式**

$$\forall u \in \mathcal{H}, \|u\|^2 = \sum_k |\langle u, \phi_k \rangle|^2$$

を満たすとき, $\{\phi_k\}$ を**完全正規直交系**という.

完全正規直交系の性質

- 定理

可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個**の要素からなる完全正規直交系が存在する.

- 定理

可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.

- 定理

$\{\phi_k\}$ が \mathcal{H} の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数

周期関数

- 周期的な信号: 性質の良い (取り扱い易い) 信号
- 2π 周期の信号を考えることにする
- \mathbb{R} 上の関数 $f(x)$ が周期 2π を持つ:

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

- 1 周期の範囲は $[-\pi, \pi]$, $[0, 2\pi]$, $[\pi, 3\pi]$ など自由にとってよい
- 計算上取り扱いが簡単なので $[-\pi, \pi]$ を用いる
- 対象とする関数は 2 乗可積分な複素数値関数とする

$$L^2(-\pi, \pi) = \left\{ f \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Fourier 級数展開

- 定理

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

とし, $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義する.

- (定理のつづき)

$f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように **Fourier 級数展開** される.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy \end{aligned}$$

注意

- あとで示すように

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

は $L^2(-\pi, \pi)$ 上の **完全正規直交系** となる.

- **正規直交系** であることは容易に確かめられる.

$$\begin{aligned} \langle \phi_m, \phi_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (m \neq n), \end{aligned}$$

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1$$

Fourier 級数展開の例

- 区間 $(-\pi, \pi)$ 上の周期関数 $f(x) = x$ ($\in L^2(-\pi, \pi)$) Fourier 級数展開を求める
- 係数は以下の式を計算すればよい.

$$\langle f, \phi_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx$$

- 部分積分を用いて計算する ($n \neq 0$ のとき)

$$\begin{aligned}
 \langle f, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\
 &= \left[x \cdot \frac{1}{-in\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{1}{-in\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\
 &= \frac{\pi(-1)^n - (-\pi)(-1)^n}{-in\sqrt{2\pi}} - \left[\frac{e^{-inx}}{-n^2\sqrt{2\pi}} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{i2\pi(-1)^n}{n\sqrt{2\pi}} - \frac{(-1)^n - (-1)^n}{-n^2\sqrt{2\pi}} \\
 &= \frac{i\sqrt{2\pi}(-1)^n}{n}
 \end{aligned}$$

- $n = 0$ も計算してまとめると以下のようなになる

$$x = i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx}$$

- Euler の公式

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

を用いると三角関数で書くことができる

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

演習

練習問題

- $L^2(-\pi, \pi)$ に含まれる以下の関数を Fourier 級数展開せよ.
 - $f(x) = |x|$
 - $f(x) = x^2$

解答例

- 定義に則って計算すればよい
- $f(x) = |x|$

$$\begin{aligned}
 |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{i(2m+1)x} \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)x
 \end{aligned}$$

- 偶関数なので余弦関数で書き直すことができる

- $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \end{aligned}$$

- $f(x) = x$ の結果と比較してみよ

Fourier 級数の応用

級数和の計算

- 展開式から級数和に関していろいろな公式を得ることができる.
- $f(x) = |x|$ に対して $x = 0$ とすれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- $f(x) = x^2$ に対して $x = 0$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Fourier 級数の性質

- 三角関数による展開

Euler の公式により以下のように変形することができる

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} + \frac{a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right) \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \cos nx + i \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \sin nx \right) \end{aligned}$$

— 正弦関数と余弦関数で完全正規直交系を構成できる

- 実数値関数の係数

関数 $f(x)$ が実数値の場合

$$\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2\pi}}, i \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{2\pi}}$$

は実数になることから a_n と a_{-n} は複素共役の関係にある.

- 定義域の異なる基底

$L^2(0, \pi)$ においては

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx; n = 1, 2, \dots \right\}$$
$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx; n = 1, 2, \dots \right\}$$

がそれぞれ完全正規直交系となる.

これは $(0, \pi)$ で定義された関数をそれぞれ偶関数, 奇関数として $(-\pi, \pi)$ に拡張すれば, 余弦関数または正弦関数のみで展開できることを利用すればよい.

演習

練習問題

- 以下の級数和を求めよ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

- 正弦関数と余弦関数で正規直交系を構成せよ.

解答例

- $f(x) = x^2$ の Fourier 級数展開において $x = \pm\pi$ とすればよい

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- 三角関数の積の展開は公式を駆使してもよいが, Euler の公式から

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

となることを利用すればよい. またグラフより以下は明らか.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = 2\pi \times \frac{1}{2}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = 2\pi \times \frac{1}{2}$$

完全性の証明

- step 1
関数 f が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

と展開されたとする.

- step 2

Bessel の不等式 (の特殊な場合) から

$$|a_n| < \|f\|$$

であることはわかるが,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

の和が存在するとは限らない.

- step 3

収束因子を導入して収束する無限和の極限を考える.

$$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} \phi_n(x)$$

$0 < r < 1$ とすれば級数和は必ず存在する.

- step 4

級数和が収束するので積分と和を交換してもよい.

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-y)} f(y) dy \end{aligned}$$

- step 5

積分の中の級数和に着目して

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

とおく (Poisson 核という).

- step 6

関数

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

の右辺の和の各項は $(-\pi, \pi)$ の周期関数なので, $(-\infty, \infty)$ に拡大可能である.

- step 7

周期関数 f も同様に $(-\infty, \infty)$ に拡大可能であるので, 一周分分の積分区間を適切に取り直して

$$f_r(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y) f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) dy$$

と書き変えることができる.

- step 8

右辺の級数和を計算すると以下になる.

$$\begin{aligned}
 P_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - re^{ix}|^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x}
 \end{aligned}$$

• step 9

$P_r(x)$ は $r \rightarrow 1$ で $P_r(x)$ は Dirac の δ 関数となる.

- $P_r(x) > 0$ (3 行目の表現より明らか)
- P_r の一周分の積分は

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_n r^{|n|} e^{inx} dx = 1$$

- $\forall \delta (0 < \delta < \pi)$ に対して

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} P_r(x) = 0$$

$\cos x$ は上記の範囲では $\cos \delta$ で最大となることから

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \leq \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \delta} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$$

• step 10

f_r と f の差

$$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) \{f(x - y) - f(x)\} dy$$

の積分を 3 つに分解して考える.

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$$

• step 11

δ と r は適当に選ぶことができることに注意する.

- 積分の第 1,3 項では P_r をいくらでも小さくすることができる
- 第 2 項では $f(x - y) - f(x)$ をいくらでも小さくすることができる

この結果, δ と r とを適当に選ぶことによって 3 つの積分の和はいくらでも小さくなる.

• step 12

以上より, 各点 x において

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) = f(x)$$

となることが示された.

- 前回の定理 (完全性の同値な条件) の 2 を参照

今回のまとめ

- Fourier 級数展開:
 - 周期関数 ($\in L^2(-\pi, \pi)$) の Fourier 級数展開:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

- Fourier 基底の完全性:

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

は完全正規直交系である