デジタル信号処理

信号処理 - 講義 *14*

村田 昇

前回のおさらい

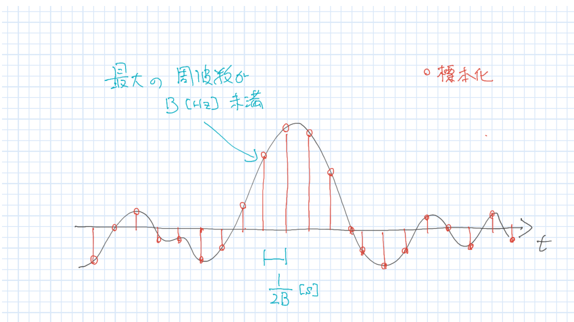
デジタル信号処理

- 計算機で信号を扱うための方法論
  - 連続時間では扱えない
  - 有限長のデータしか扱えない
- 処理の流れ
  - アナログ信号をデジタル信号に変換 (A/D 変換)
    - 標本化 (sampling): 時間の離散化
  - 計算機上でデジタル信号を処理
  - デジタル信号をアナログ信号に変換 (D/A 変換)

標本化定理

- 定理

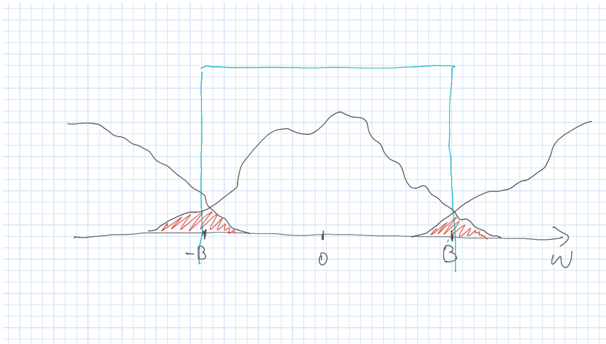
  信号 $f(t)$ が B [Hz] 未満の周波数 (Nyquist 周波数) しか含んでいないなら，サンプリング周波数 $2B$ [Hz] を用いて元の信号は完全に求められる．



エイリアシング

- 折り返しによる雑音

  $4\pi B$ 周期の関数 $\tilde{f}$ を構成する際に重なりが生じ，$(-2\pi B, 2\pi B)$ 領域を切り出しても元に戻すことができない．



離散 Fourier 変換と逆変換

- 定義

長さ N の信号 $f(t),\ t=0,1,\dots,N-1$ の離散 Fourier 変換を以下で定義する.

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=0}^{N-1} f(t)e^{-i\frac{2\pi}{N}nt},\quad (n=0,1,2,\dots,N-1)$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n)e^{i\frac{2\pi}{N}nt},\quad (t=0,1,2,\dots,N-1)$$

行列による表現

- 変換行列

$$F=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \dots & \alpha^{-(N-1)}\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \alpha^{-2(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)}\end{pmatrix}$$

$$\alpha=e^{i\frac{2\pi}{N}}$$

- 逆変換行列

$$F^*=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \alpha^{1} & \alpha^{2} & \dots & \alpha^{(N-1)}\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha^{(N-1)} & \alpha^{2(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)}\end{pmatrix}$$

- 行列表現

$$\begin{pmatrix}\hat{f}(0)\\ \hat{f}(1)\\ \vdots\\ \hat{f}(N-1)\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}f(0)\\ f(1)\\ \vdots\\ f(N-1)\end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}=F\boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{f}=F^*\hat{\boldsymbol{f}}$$

デジタル信号におけるフィルタの表現

- 標本化されたフィルタの表現 (周期関数の畳み込み)

$$
\begin{aligned}
g(t) &= f*h(t) \\
&= \sum_{s=0}^{N-1} f(s)h(t-s) = \sum_{s=0}^{N-1} f(t-s)h(s), \\
& t = 0, 1, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

  - f, g, h: 周期 N の関数

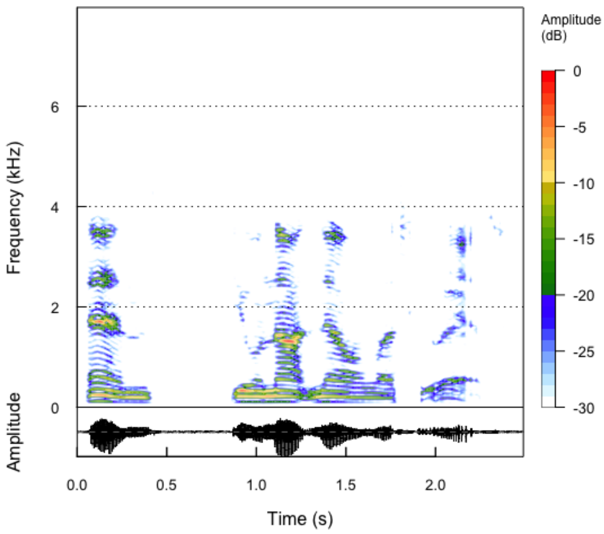
有限長のデータ

- 信号の一部の切り出し
  - 周期的な信号として扱う
  - 有界な台を持つ信号として扱う

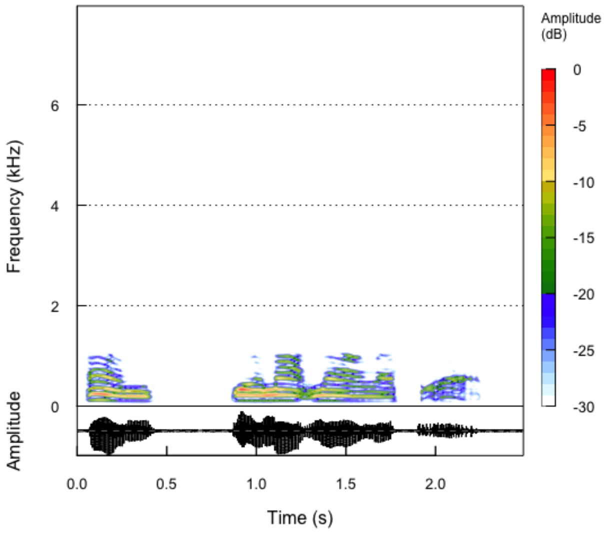
$$
f(t) = w(t)\tilde{f}(t)
$$

- 端点での不連続性を軽減するために窓関数を導入
  - 矩形窓 (単純な切り出し)
  - gauss 窓
  - hann 窓
  - hamming 窓

スペクトログラム



加工後 (ローパスフィルタ)



加工後 (ハイパスフィルタ)