線形フィルタ回路

信号処理 - 第 9 講

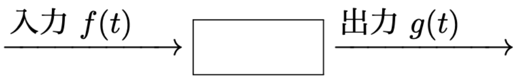
村田 昇

前回のおさらい

フィルタ

- 定義

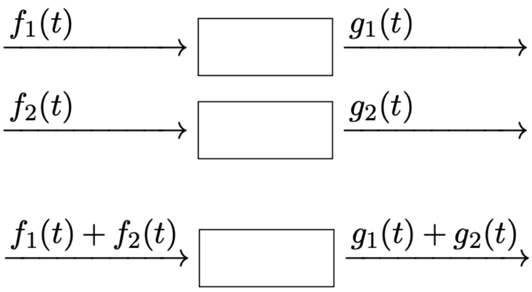
  入力 $f(t)$ を変換して出力 $g(t)$ を生成する機構



線形性

- 定義

  2 つの入出力関係を考えたとき，入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質

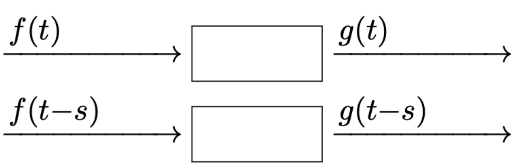


時不変性

- 定義

  入力の時刻が s ずれた場合，出力も s だけずれる性質

  - 時間が経過してもフィルタの性質は変わらない



線形時不変フィルタの数学的表現

- フィルタの積分表現

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds$$

- インパルス応答

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(t-s)ds$$

  - $h(t)$ はフィルタに $\delta(t)$ を入力した時の出力でもある

Fourier 変換による表現

- 時間領域では畳み込み積分

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds = h*f(t)$$

  - 周波数領域では関数の積

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$$

  - フィルタの機能は周波数毎の振幅と位相の変換

因果的フィルタ

- 定義

$$h(t) = 0 \ (t < 0)$$

  - 時刻 0 にインパルスが入力される前には何も出力がされない

- 因果的フィルタの畳み込み
  時刻 t での出力は時刻 t 以前での入力のみにより定まる

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)h(t-s)ds$$

演習

練習問題

- 以下の問に答えよ
  - 関数 $te^{-\frac{t^2}{2}}$ を Fourier 変換せよ
  - 関数 $\Xi_{(-1,1)}(t)$ を Fourier 変換せよ
  - 関数 $(\sin(\omega)/\omega)^2$ を 逆 Fourier 変換せよ

フィルタ回路

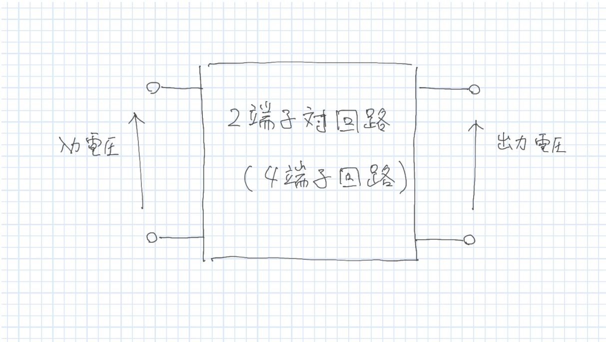
インパルス応答とは

- $\delta(t)$ を入力した時のフィルタ出力

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) h(t - s) ds$$

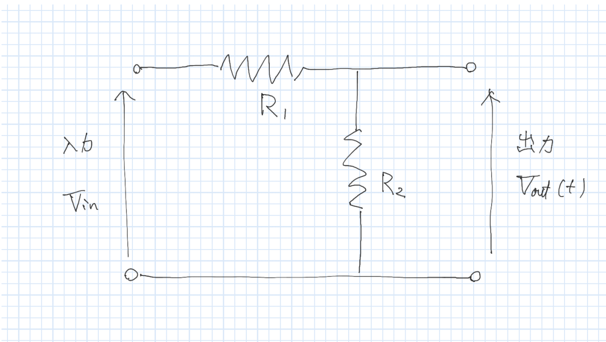
- 物理的には面積 1 ($\Delta \times 1/\Delta$) の矩形波に対する出力を時間幅 $\Delta \to 0$ としたときの波形

2 端子対回路



例題

- 以下の回路の時間領域での入出力関係を求めよ．
- 同じく周波数領域での入出力関係を求めよ．



解答

- 時間領域

$$V_{out}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}(t)$$

- 周波数領域

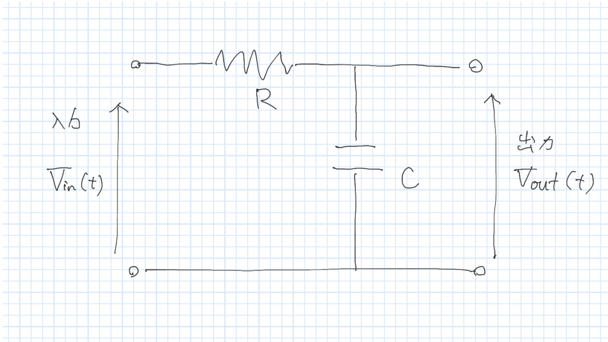
$$\hat{V}_{out}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \hat{V}_{in}(\omega)$$

- 同じ形になることに注意

演習

練習問題

- 以下の回路の時間領域での入出力関係を求めよ．
- 同じく周波数領域での入出力関係を求めよ．



逆 Fourier 変換を用いた解析

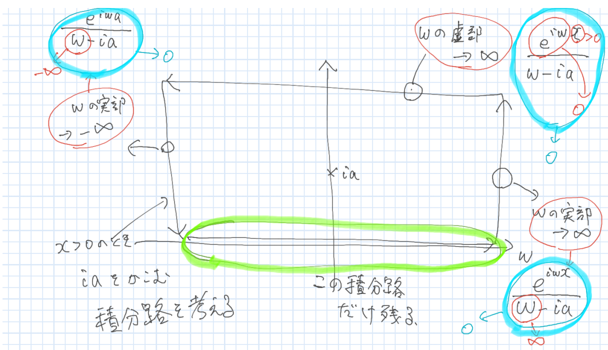
インパルス応答

- 逆 Fourier 変換

  式を見易くするため $a = 1/CR$ とおく

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{h}](t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{a}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ia} d\omega
\end{aligned}
$$

- 複素積分の積分路
  - $t > 0$ のとき，ia を囲む上半平面
  - $t < 0$ のとき，下半平面



- 留数定理

  積分路が孤立特異点 c を含むとき以下が成り立つ

$$
\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = \mathrm{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z \to c} (z - c) f(z)
$$

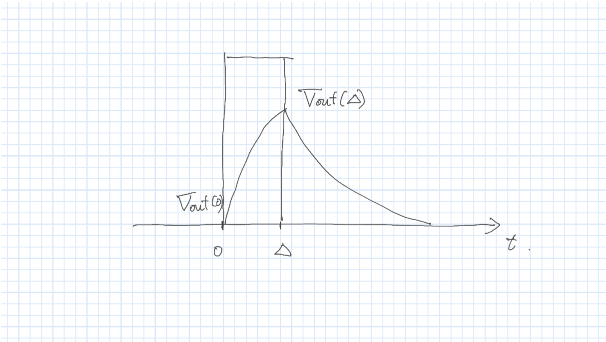
- 計算結果

$$
h(t) = \begin{cases} ae^{-at} = \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}
$$

演習

練習問題

- 矩形波の入力に対して微分方程式を直接解き，その極限からインパルス応答を求めよ．



今回のまとめ

- 線形フィルタ回路
  - 時間領域での表現 (微分方程式)
  - 周波数領域での表現 (関数の積)
  - フィルタの周波数特性
  - インパルス応答の求め方