

ベクトル空間

信号処理 - 講義 1

村田 昇

ベクトル空間

重ね合わせの原理

- 「複雑な波 (信号) も単純な波 (信号) の重ね合わせで表現できる」という現象を一般化した原理
- 数学・物理・工学分野でのモデル化や解析:
 - 線形方程式・Fourier 解析
 - 量子力学
 - 電気回路
- (線形) ベクトル空間 (vector space)
数学的に取り扱うための道具立て

ベクトル空間

- 定義
以下の性質をもつ集合を体 K (四則演算が定義された集合) 上のベクトル空間 V という.
(体 K はベクトル空間 V の **係数体** と呼ぶ.)
- ベクトル空間の満たすべき性質
 1. $a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$
 2. $a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$ (結合則)
 3. $a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a$ (交換則)
 4. $\exists 0 \in V$ s.t. $\forall a \in V, a + 0 = a$ (零元)
 5. $\forall a \in V \Rightarrow \exists -a \in V$ s.t. $a + (-a) = 0$ (逆元)
 6. $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \Rightarrow \lambda a \in V$ (スカラー倍)
 7. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ (結合則)
 8. $\exists 1 \in K$ s.t. $\forall a \in V, 1a = a$ (K の単位元)
 9. $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \Rightarrow \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (分配則)
 10. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (分配則)

ベクトル空間の例

- 幾何ベクトル
平行移動で互いに移り合う有効線分. 和は 2 つの有向線分で作られる平行四辺形の対角線で, スカラー倍は有向線分のスカラー倍で定義される.

$$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{E}^n$$

あるいはこの部分空間と同一視することができる.

- 数ベクトル

体 K の n 個の順序づけられた数の組. 和は成分ごとの和で, スカラ倍は各成分のスカラ倍で定義される.

- 関数空間 $C^m[0, 1]$

区間 $[0, 1]$ 上の実数値関数で, m 階微分可能な関数の集合. 和とスカラ倍は以下で定義される.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\text{和})$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (\text{スカラ倍})$$

演習

練習問題

- 以下の集合 V のうち, 係数体を実数 \mathbb{R} としてベクトル空間となるものはどれか?
ただし $f^{(k)}$ は f の k 階微分を表す.
 - $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ (n 次元数ベクトルの集合)
 - $V = \{f(x) = ax + bx^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
(原点を通る 2 次関数の集合)
 - $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi)\}$
($(-\pi, \pi)$ 上で定義された 3 階微分可能な関数の集合)
 - $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi) \text{ かつ } f^{(2)} = -f\}$

解答例

- 以下の点に注意すること
 - $V = \{f(x) = ax + bx^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
 $V' = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ と同一視できる
 - $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi) \text{ かつ } f^{(2)} = -f\}$
微分に関する条件は線形性が成り立つ
 $f^{(2)} + g^{(2)} = -f - g$

線形独立性

線形結合

- 定義

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K, a_1, \dots, a_k \in V$ の重み付き線形和によって作られるベクトル

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \in V$$

を a_1, \dots, a_k の **線形結合** という.

線形従属

- 定義

“全てが 0” ではないある係数の組 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に対して

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$$

となるとき, $\{a_1, \dots, a_k\}$ は **線形従属** であるという.

また

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$$

となるとき, b は $\{a_1, \dots, a_k\}$ に **線形従属** であるという.

線形独立

- 定義

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$$

となるのが $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ に限られるとき, $\{a_1, \dots, a_k\}$ は **線形独立** であるという.

線形従属・独立の例

- 関数空間 $C^m[0, 1]$

$$f(x) = x, g(x) = 2x \quad (\text{線形従属})$$

$$f(x) = x, h(x) = x^2 \quad (\text{線形独立})$$

演習

練習問題

- 以下の集合のうち線形独立なものはどれか?
ただし i は虚数単位で, 係数体は \mathbb{C} とする.
 - $\{1, 1+x, 1+x+x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
 - $\{1, \sin(x), \sin^2(x)\} \quad (x \in \mathbb{R})$
 - $\{1, \log(x), \log(2x)\} \quad (x > 0)$
 - $\{\exp(ix), \exp(3ix), \exp(5ix)\} \quad (x \in \mathbb{R})$

解答例

- 線形結合を考え, 適当な x の値で α, β, γ を解いてみればよい

$$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$$

$\{1, \log(x), \log(2x)\} = \{1, \log(x), \log(2) + \log(x)\}$ なので, 独立ではない

階数

極大独立集合

- 定義

ベクトル空間 V の有限部分集合 S に対して, 線形独立な部分集合 $B \subset S$ を考える.
 $\forall b \in S - B$ において $B \cup \{b\}$ が線形従属のとき, B は **極大独立集合** であるという.

階数

- 定義

有限部分集合 S の極大独立集合 B はいろいろあるが, $|B|$ (基数; cardinality) は一定となる.

$|B|$ を S の **階数 (rank)** といい, $\text{rank} S$ で表す.

階数の性質

- 定理

階数については以下が成り立つ.

- $\text{rank}\emptyset = 0$
- $\text{rank}(S \cup \{b\}) = \text{rank}S$ または $\text{rank}S + 1$
- $\forall b_1, b_2$ に対して

$$\text{rank}(S \cup \{b_1\}) = \text{rank}(S \cup \{b_2\}) = \text{rank}S$$

$$\Rightarrow \text{rank}(S \cup \{b_1, b_2\}) = \text{rank}S$$

ベクトル空間の基底

基底

- 定義

V の極大独立集合を V の基底と呼ぶ.

V の階数, すなわち極大独立集合の基数を V の **次元 (dimension)** という.

基底の性質

- 定理

集合 B を n 次元ベクトル空間 V_n の基底とする.

$$\begin{aligned} \dim V_n & \quad (\text{ベクトル空間の次元}) \\ &= \text{rank}V_n \quad (\text{ベクトル空間の階数}) \\ &= |B| \quad (\text{基底の基数}) \\ &= n \end{aligned}$$

- 定理

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ を V_n の基底とする. $\forall b \in V_n$ は B に線形従属で,

$$b = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

と一意に表される.

- 証明

2つの異なる表現があっても

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = 0$$

となることより, $\lambda_i = \mu_i$ となることがわかる.

- 定理

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $u_i \in V_n$ とする.

$\forall b \in V_n$, $\{b\} \cup B$ が線形従属ならば B は V_n の基底となる.

演習

練習問題

- 以下のベクトル空間の適当な基底を考え, 空間の次元を求めなさい.
 - 数ベクトル空間 K^n (K は体)
 - 関数空間 $C^m[0, 1]$

解答例

- 数ベクトル

K^n において

$$e_k = (0, \dots, \overbrace{1}^k, \dots, 0)$$

と書くことにする. $\{e_1, \dots, e_n\}$ は K^n の基底であり, $\dim K^n = n$ となる.
 e_k を自然基底と呼ぶことがある.

- 関数空間 $C^m[0, 1]$

$C^m[0, 1]$ において, $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ の任意の有限部分集合は線形独立となる.

したがって有限な極大独立集合がない.

$C^m[0, 1]$ は無限次元となる.

今回のまとめ

- 体 K 上のベクトル空間

- 線形性の条件を満たす集合のこと

- * 幾何ベクトル

- * 数ベクトル

- * 閉区間上の関数

- これから取り扱う信号の数学的性質

- 独立と従属

- 線形独立 (一次独立): $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, n}$

$$\alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

- 線形従属 (一次従属): 線形独立でないこと

- ベクトル空間の基底

- 極大独立集合: 何か1つでも要素を加えると従属になってしまう集合

- ベクトル空間 V の次元はどうやって決めるか?

- V の中の線形独立な集合の最大の要素数 (基数, 集合のとり方によらず要素数は一定)

- 基底: ベクトル空間 V の極大独立集合を V の基底という