

# 線形フィルタ回路

信号処理 - 第9講

村田 昇

## 前回のおさらい

### フィルタ

- 定義

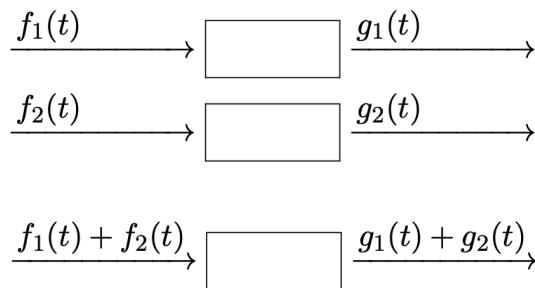
入力  $f(t)$  を変換して出力  $g(t)$  を生成する機構



### 線形性

- 定義

2つの入出力関係を考えたとき、入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質

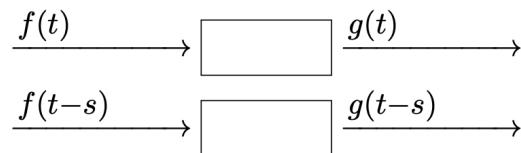


### 時不变性

- 定義

入力の時刻が  $s$  ずれた場合、出力も  $s$  だけずれる性質

- 時間が経過してもフィルタの性質は変わらない



## 線形時不变フィルタの数学的表現

- フィルタの積分表現

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds$$

- インパルス応答

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(t-s)ds$$

-  $h(t)$  はフィルタに  $\delta(t)$  を入力した時の出力でもある

## Fourier 変換による表現

- 時間領域では畳み込み積分

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds = h*f(t)$$

- 周波数領域では関数の積

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$$

- フィルタの機能は周波数毎の振幅と位相の変換

## 因果的フィルタ

- 定義

$$h(t) = 0 \ (t < 0)$$

- 時刻 0 にインパルスが入力される前には何も出力がされない

- 因果的フィルタの畳み込み

時刻  $t$  での出力は時刻  $t$  以前での入力のみにより定まる

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(s)h(t-s)ds$$

## 演習

### 練習問題

- 以下の間に答えよ
  - 関数  $te^{-\frac{t^2}{2}}$  を Fourier 変換せよ
  - 関数  $\Xi_{(-1,1)}(t)$  を Fourier 変換せよ
  - 関数  $(\sin(\omega)/\omega)^2$  を逆 Fourier 変換せよ

## フィルタ回路

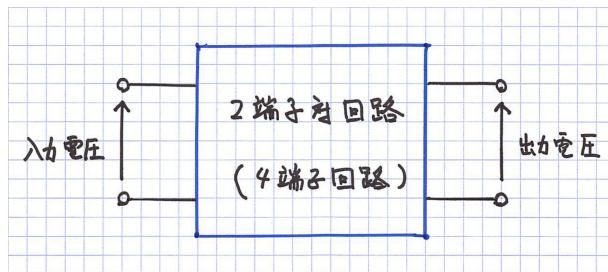
### インパルス応答とは

- $\delta(t)$  を入力した時のフィルタ出力

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds$$

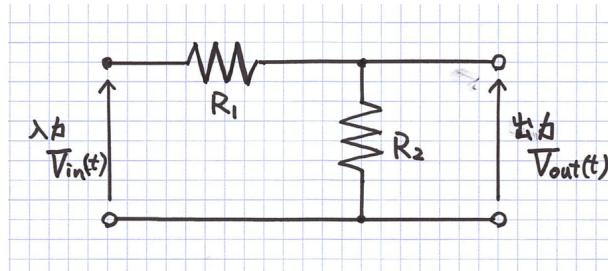
- 物理的には面積 1 ( $\Delta \times 1/\Delta$ ) の矩形波に対する出力を時間幅  $\Delta \rightarrow 0$ としたときの波形

### 2端子対回路



### 例題

- 以下の回路の時間領域での入出力関係を求めよ。
- 同じく周波数領域での入出力関係を求めよ。



### 解答

- 時間領域

$$V_{out}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}(t)$$

- 周波数領域

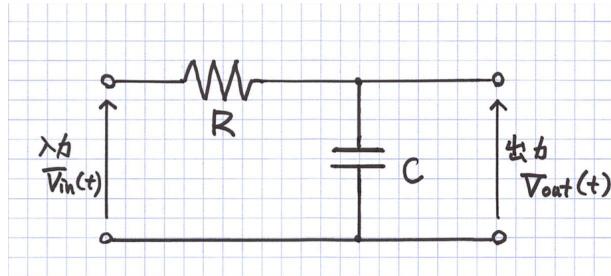
$$\hat{V}_{out}(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \hat{V}_{in}(\omega)$$

- 同じ形になることに注意

## 演習

### 練習問題

- 以下の回路の時間領域での入出力関係を求めよ。
- 同じく周波数領域での入出力関係を求めよ。



## 逆 Fourier 変換を用いた解析

### インパルス応答

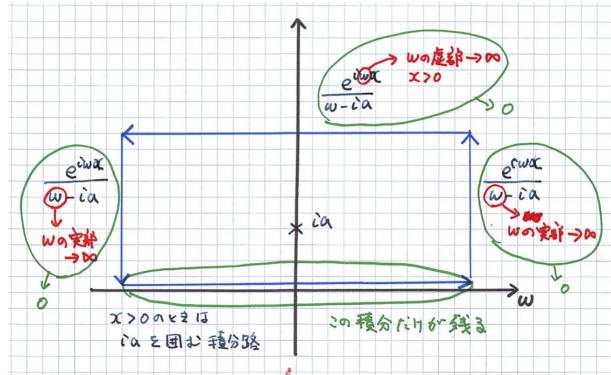
- 逆 Fourier 変換

式を見易くするため  $a = 1/CR$  とおく

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{h}](t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{a}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - ia} d\omega \end{aligned}$$

- 複素積分の積分路

- $t > 0$  のとき,  $ia$  を囲む上半平面
- $t < 0$  のとき, 下半平面



- 留数定理

積分路が孤立特異点  $c$  を含むとき以下が成り立つ

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz = \text{Res}_{z=c} f(z) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z)$$

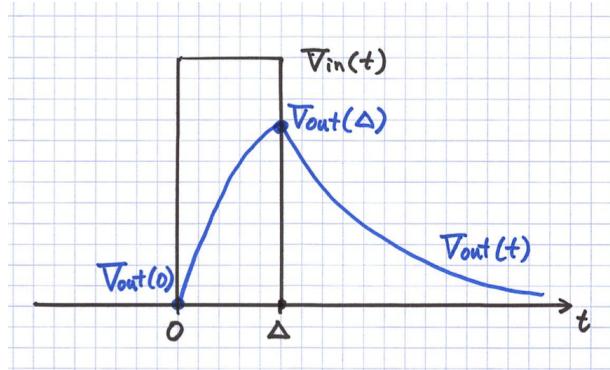
- 計算結果

$$h(t) = \begin{cases} ae^{-at} = \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

## 演習

### 練習問題

- 矩形波の入力に対して微分方程式を直接解き、その極限からインパルス応答を求めよ。



## 今回のまとめ

- 線形フィルタ回路
  - 時間領域での表現(微分方程式)
  - 周波数領域での表現(関数の積)
  - フィルタの周波数特性
  - インパルス応答の求め方