ベクトル空間

信号処理 - 講義 *1*

村田 昇

ベクトル空間

重ね合わせの原理

- 「複雑な波 (信号) も単純な波 (信号) の重ね合わせで表現できる」という現象を一般化した原理
- 数学・物理・工学分野でのモデル化や解析:
  - 線形方程式・Fourier 解析
  - 量子力学
  - 電気回路
- **(線形) ベクトル空間 (vector space)**
  数学的に取り扱うための道具立て

ベクトル空間

- 定義

  以下の性質をもつ集合を体 K (四則演算が定義された集合) 上の**ベクトル空間** V という．
  (体 K はベクトル空間 V の **係数体** と呼ぶ．)

- ベクトル空間の満たすべき性質
  1. $a, b \in V \ \Rightarrow\ a + b \in V$
  2. $a, b, c \in V \ \Rightarrow\ (a + b) + c = a + (b + c)$ (結合則)
  3. $a, b \in V \ \Rightarrow\ a + b = b + a$ (交換則)
  4. $\exists 0 \in V \,\text{s.t.}\, \forall a \in V,\ a + 0 = a$ (零元)
  5. $\forall a \in V \ \Rightarrow\ \exists -a \in V \,\text{s.t.}\, a + (-a) = 0$ (逆元)
  6. $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \ \Rightarrow\ \lambda a \in V$ (スカラ倍)
  7. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \ \Rightarrow\ (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ (結合則)
  8. $\exists 1 \in K \,\text{s.t.}\, \forall a \in V,\ 1a = a$ (K の単位元)
  9. $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \ \Rightarrow\ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (分配則)
  10. $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \ \Rightarrow\ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (分配則)

ベクトル空間の例

- 幾何ベクトル

  平行移動で互いに移り合う有効線分．和は 2 つの有向線分で作られる平行四辺形の対角線で，スカラ倍は有向線分のスカラ倍で定義される．

  $$K = \mathbb{R},\ V = \mathbb{E}^n$$

  あるいはこの部分空間と同一視することができる．

- 数ベクトル

  体 K の n 個の順序づけられた数の組．和は成分ごとの和で，スカラ倍は各成分のスカラ倍で定義される．

- 関数空間 $C^m[0,1]$

  区間 $[0,1]$ 上の実数値関数で，m 階微分可能な関数の集合．和とスカラ倍は以下で定義される．

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{(和)}$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \text{(スカラ倍)}$$

演習

練習問題

- 以下の集合 V のうち，係数体を実数 $\mathbb{R}$ としてベクトル空間となるものはどれか？
  ただし $f^{(k)}$ は f の k 階微分を表す．
  - $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ (n 次元数ベクトルの集合)
  - $V = \{f(x) = ax + bx^2,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
    (原点を通る 2 次関数の集合)
  - $V = \{f \in C^3(-\pi, \pi)\}$
    ($(-\pi,\pi)$ 上で定義された 3 階微分可能な関数の集合)
  - $V = \{f \in C^3(-\pi,\pi)$ かつ $f^{(2)} = -f\}$

解答例

- 以下の点に注意すること
  - $V = \{f(x) = ax + bx^2,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
    $V' = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ と同一視できる
  - $V = \{f \in C^3(-\pi,\pi)$ かつ $f^{(2)} = -f\}$
    微分に関する条件は線形性が成り立つ
    $f^{(2)} + g^{(2)} = -f - g$

線形独立性

線形結合

- 定義

  $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, $a_1, \ldots, a_k \in V$ の重み付き線形和によって作られるベクトル

  $$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \in V$$

  を $a_1, \ldots, a_k$ の **線形結合** という．

線形従属

- 定義

  "全てが 0" ではないある係数の組 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ に対して

  $$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$$

  となるとき，$\{a_1, \ldots, a_k\}$ は **線形従属** であるという．
  また

  $$b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$$

  となるとき，b は $\{a_1, \ldots, a_k\}$ に **線形従属** であるという．

線形独立

- 定義

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0$$

となるのが $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ に限られるとき，$\{a_1, \ldots, a_k\}$ は **線形独立** であるという．

線形従属・独立の例

- 関数空間 $C^m[0,1]$

$$f(x) = x,\ g(x) = 2x \qquad \text{(線形従属)}$$
$$f(x) = x,\ h(x) = x^2 \qquad \text{(線形独立)}$$

演習

練習問題

- 以下の集合のうち線形独立なものはどれか？
  ただし i は虚数単位で，係数体は $\mathbb{C}$ とする．
  - $\{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
  - $\{1,\ \sin(x),\ \sin^2(x)\} \quad (x \in \mathbb{R})$
  - $\{1,\ \log(x),\ \log(2x)\} \quad (x > 0)$
  - $\{\exp(ix), \exp(3ix), \exp(5ix)\} \quad (x \in \mathbb{R})$

解答例

- 線形結合

  $$\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$$

  を考え，適当な x の値で α, β, γ を解いてみればよい
  - $\{1,\ \log(x),\ \log(2x)\} = \{1,\ \log(x),\ \log(2) + \log(x)\}$ なので，独立でない

階数

極大独立集合

- 定義

  ベクトル空間 V の有限部分集合 S に対して，線形独立な部分集合 $B \subset S$ を考える．$\forall b \in S - B$ において $B \cup \{b\}$ が線形従属のとき，B は **極大独立集合** であるという．

階数

- 定義

  有限部分集合 S の極大独立集合 B はいろいろあるが，$|B|$ (基数; cardinality) は一定となる．

  $|B|$ を S の **階数 (rank)** といい，$\mathrm{rank} S$ で表す．

階数の性質

- 定理

  階数については以下が成り立つ.
  - $\mathrm{rank}\emptyset = 0$
  - $\mathrm{rank}(S \cup \{b\}) = \mathrm{rank}S$ または $\mathrm{rank}S + 1$
  - $\forall b_1, b_2$ に対して

$$\mathrm{rank}(S \cup \{b_1\}) = \mathrm{rank}(S \cup \{b_2\}) = \mathrm{rank}S \\ \Rightarrow \ \mathrm{rank}(S \cup \{b_1, b_2\}) = \mathrm{rank}S$$

ベクトル空間の基底

基底

- 定義

  V の極大独立集合を V の基底と呼ぶ.
  V の階数，すなわち極大独立集合の基数を V の **次元 (dimension)** という.

基底の性質

- 定理

  集合 B を n 次元ベクトル空間 V_n の基底とする.

$$\begin{aligned} &\dim V_n && \text{(ベクトル空間の次元)} \\ &= \mathrm{rank}V_n && \text{(ベクトル空間の階数)} \\ &= |B| && \text{(基底の基数)} \\ &= n \end{aligned}$$

- 定理

  $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ を V_n の基底とする．$\forall b \in V_n$ は B に線形従属で,

$$b = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

  と一意に表される.

- 証明

  2 つの異なる表現があっても

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = 0$$

  となることより，$\lambda_i = \mu_i$ となることがわかる.

- 定理

  $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $u_i \in V_n$ とする.
  $\forall b \in V_n$, $\{b\} \cup B$ が線形従属ならば B は V_n の基底となる.

演習

練習問題

- 以下のベクトル空間の適当な基底を考え，空間の次元を求めなさい.
  - 数ベクトル空間 K^n (K は体)
  - 関数空間 $C^m[0,1]$

解答例

- 数ベクトル

  K^n において

  $$e_k = (0, \ldots, \overbrace{1}^{k}, \ldots, 0)$$

  と書くことにする．$\{e_1, \ldots, e_n\}$ は K^n の基底であり，$\dim K^n = n$ となる．
  e_k を自然基底と呼ぶことがある．

- 関数空間 $C^m[0,1]$

  $C^m[0,1]$ において，$\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ の任意の有限部分集合は線形独立となる．

  したがって有限な極大独立集合がない．

  $C^m[0,1]$ は無限次元となる．

今回のまとめ

- 体 K 上のベクトル空間
  - 線形性の条件を満たす集合のこと
    - 幾何ベクトル
    - 数ベクトル
    - 閉区間上の関数
  - これから取り扱う信号の数学的性質
- 独立と従属
  - 線形独立 (一次独立): $\{\phi_i\}_{i=1,\ldots,n}$

    $$\alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n\phi_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

  - 線形従属 (一次従属): 線形独立でないこと
- ベクトル空間の基底
  - 極大独立集合: 何か 1 つでも要素を加えると従属になってしまう集合
  - ベクトル空間 V の次元はどうやって決めるか？
    V の中の線形独立な集合の最大の要素数 (基数，集合のとり方によらず要素数は一定)
  - 基底: ベクトル空間 V の極大独立集合を V の基底という