$Fourier$ 級数の性質

信号処理 - 講義 5

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間
  線形演算について閉じた空間
- 内積空間
  内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間
  ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理
  可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個** の要素からなる完全正規直交系が存在する.
- 定理
  可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.
- 定理
  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \ \Rightarrow \ u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理
  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように **Fourier 級数展開**される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 以下の関数 f を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi, \pi)$$

解答例

- 係数 $\langle f, \phi_n \rangle$ の計算
  - $n = 0$ のとき

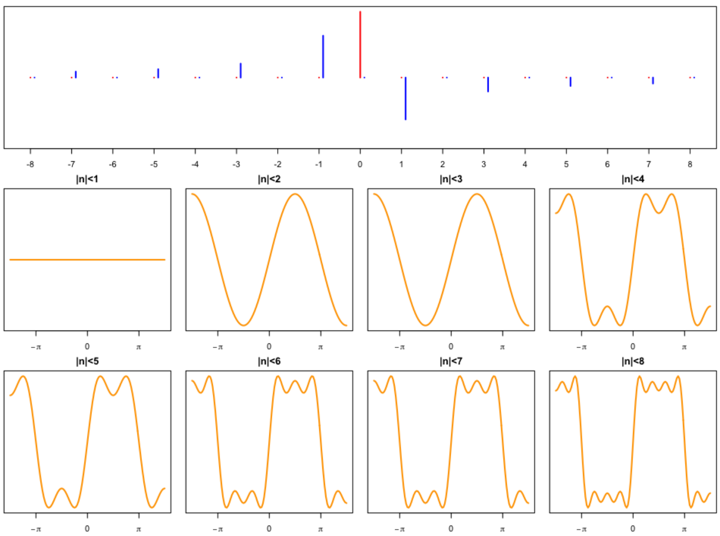
$$\langle f, \phi_0 \rangle = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}$$

  - $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_n \rangle &= \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\ &= \left[\frac{1}{-in} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right]_0^\pi = \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-in\pi} - 1) \\ &= \frac{i}{n\sqrt{2\pi}} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \frac{-2i}{n\sqrt{2\pi}}, & n \text{ が奇数} \\ 0, & n \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

- Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{i\{(-1)^n - 1\}}{2\pi n} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-i}{\pi(2m+1)} e^{i(2m+1)x} \end{aligned}$$



不連続点の性質

片側極限

- 定義

  $h > 0$ として

  $$f(x{-}0) = \lim_{h\to 0} f(x-h)$$
  $$f(x{+}0) = \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

  と書く．これを片側極限という．

不連続点

- 不連続関数

  点 x において不連続な関数を考える

  $$f(x{-}0) \neq f(x{+}0)$$

  点 x 以外の近傍での有界性を仮定する

  $$\sup_{0<h<\delta} |f(x-h) - f(x{-}0)| < \infty$$
  $$\sup_{0<h<\delta} |f(x+h) - f(x{+}0)| < \infty$$

不連続点での評価

- 定理で評価した式

  $$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\{f(x-y) - f(x)\}dy$$
  $$P_r(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}$$

- P_r の性質

  P_r の積分は偶関数であることから以下が成り立つ．

  $$\int_{-\infty}^{0} P_r(y)dy = \frac{1}{2}$$
  $$\int_{0}^{\infty} P_r(y)dy = \frac{1}{2}$$

- 不連続点まわりでの評価

  $$\begin{aligned}
  &\left|\int_{-\delta}^{\delta} P_r(y)\{f(x-y) - f(x)\}dy\right| \\
  &\leq \left|\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\{f(x-y) - f(x{+}0)\}dy\right| \\
  &\quad + \left|\int_{0}^{\delta} P_r(y)\{f(x-y) - f(x{-}0)\}dy\right| \\
  &\leq \frac{1}{2}\sup_{-\delta<y<0} |f(x-y) - f(x{+}0)| \\
  &\quad + \frac{1}{2}\sup_{0<y<\delta} |f(x-y) - f(x{-}0)| \\
  &\to^{\delta\to 0} 0
  \end{aligned}$$

- 不連続点の Fourier 級数展開

  関数 f の Fourier 級数展開 $\tilde{f}$ は

  $$\tilde{f}(x) = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y)dy = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

  が成り立つので，f の不連続点での Fourier 級数展開は両側からの極限の平均値となる．

演習

練習問題

- 以下の関数 f は $x=0$ で不連続となる．Fourier 級数での $f(0)$ の値を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi,\pi)$$

解答例

- Fourier 級数展開に代入すればよい

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} + \sum_{n\neq 0} \frac{i\{(-1)^n - 1\}}{2\pi n} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{i\{(-1)^{-n} - 1\}}{-2\pi n} + \frac{i\{(-1)^n - 1\}}{2\pi n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} = \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} \end{aligned}$$

係数の性質

畳み込み

- 定義

  周期 2π をもつ関数 f と g の**畳み込み** (合成積; convolution) h を以下で定義される．

  $$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \\ &= f * g(x) \end{aligned}$$

  - 関数 f, g は周期 2π をもつことに注意して，変数変換 $x - y = z$ を用いて 2 つの定義が同値であることを確認せよ

L^p ノルム

- 定義

  関数 f の L^p ノルムを以下で定義する．

  $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

  ただし Ω は定義域で，一般には $\mathbb{R}$ 上の適当な区間．

  - 内積から自然に導かれたノルムは L^2 ノルムである

L^p 空間

- 定義

$$
\begin{aligned}
L^p(\Omega) &= \left\{ f \,\middle|\, \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\} \\
&= \left\{ f \,\middle|\, \|f\|_{L^p} < \infty \right\}
\end{aligned}
$$

Riemann-Lebesgue の定理

- 定理

  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ の Fourier 係数 $a_n = \langle f, \phi_n \rangle$ は

  $$\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$$

  となる．

- 証明

  f_r の Fourier 係数を $a_n(r)$ と書くと

  $$
  \begin{aligned}
  |a_n| &\le |a_n - a_n(r)| + |a_n(r)| \\
  &= |a_n - a_n(r)| + |a_n| r^{|n|} \\
  &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - P_r * f\|_{L^1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{|n|} \|f\|_{L^1}
  \end{aligned}
  $$

  ただし $*$ は畳み込みを表す．

  ここで r を 1 に近くとれば第 1 項はいくらでも小さくすることができる．また $|n|$ を十分大きくとれば第 2 項はいくらでも小さくなるので，$\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$ が示される．

- (証明のつづき)

  最後の不等号は以下を用いればよい．

  $$
  \begin{aligned}
  |a_n| &= \left| \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \right| \\
  &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left| f(x) e^{-inx} \right| dx \\
  &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)| \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}
  \end{aligned}
  $$

  - L^1 関数であれば係数の存在が保証されることを示している

Riemann-Lebesgue の定理の応用

- Fourier 級数の項別微分

  関数 f は区間 $[-\pi, \pi]$ で連続，$f(-\pi) = f(\pi)$ ，ほとんどいたるところで f' が存在し，$f' \in L^2 \cap L^1$ であるとする．f, f' の Fourier 級数展開をそれぞれ以下で表す．

  $$
  \begin{aligned}
  f(x) &= \sum_n a_n \phi_n(x) \\
  f'(x) &= \sum_n b_n \phi_n(x)
  \end{aligned}
  $$

  f を項別に微分して a_n と b_n の間の以下の関係を得る．

  $$b_n = in \cdot a_n$$

- 滑らかな関数の高周波成分

  Riemann-Lebesgue の定理より $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ なので，$a_n = o(1/n)$ (Landau の記号) となる．すなわち微分できるくらい滑らかな関数は $n \to \infty$ において $1/n$ より速く a_n が小さくなる (高周波成分が減衰する)．

関数の積とノルム

Hölder の不等式

- 定理

  $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 0$ とする．このとき

  $$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \le \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$$

  - Cauchy-Schwarz の不等式 ($p = q = 2$) の一般化である

- 証明

  対数関数の凸性と $1/p + 1/q = 1$ から任意の $a, b > 0$ について

  $$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log ab$$

  が成り立つ．

  - 凸性について曖昧な者は意味を確認せよ．

- (証明のつづき)

  また対数関数の単調性から

  $$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ge ab$$

  が成り立つ．したがって

  $$\begin{aligned}
  &\frac{1}{\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}}\left|\int u(x)v(x)dx\right| \le \int \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}}\frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}}dx \\
  &\quad \le \frac{1}{p\|u\|_{L^p}^p}\int |u(x)|^p dx + \frac{1}{q\|v\|_{L^q}^q}\int |v(x)|^q dx \\
  &\quad = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
  \end{aligned}$$

畳み込みのノルム

- 定理

  $$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

  とするとき

  $$\|h\|_{L^p} \le \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}$$

- 証明

  $1/p + 1/q = 1$ とする．

  $$\begin{aligned}
  |h(x)| &\le \int |f(x-y)g(y)|dy \\
  &= \int |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{q}}dy \\
  &\le \left(\int |f(x-y)|^p|g(y)|dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int |g(y)|dy\right)^{\frac{1}{q}}
  \end{aligned}$$

  が成り立つ．

- (証明のつづき)

  これより

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{L^p}^p &= \int |h(x)|^p dx \\
&\leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int\int |f(x-y)|^p |g(y)| dy dx \\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int |f(x-y)|^p dx \int |g(y)| dy \\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p
\end{aligned}
$$

畳み込みの Fourier 級数

- 係数の存在

  先の定理において $p=1$ とすると

$$
\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}
$$

  となり，$f, g \in L^1(-\pi,\pi)$ なら $h \in L^1(-\pi,\pi)$ となる．このことから畳み込み h の Fourier 係数が存在することが保証される．

- 係数の関係

  f, g, h の Fourier 係数をそれぞれ a_n, b_n, c_n とすると

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int f(x-y) g(y) dy e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\int f(x-y) e^{-in(x-y)} g(y) e^{-iny} dx dy \\
&= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(z) e^{-inz} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(y) e^{-iny} dy \\
&= \sqrt{2\pi} a_n b_n
\end{aligned}
$$

  という関係が成り立つ．

演習

練習問題

- 関数 f を

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi,\pi)
$$

  とするとき，畳み込み $f * f$ を求めよ．

- 関数 $f * f$ を Fourier 級数展開せよ．

解答例

- 周期関数であることに注意して定義に従って計算する.

$$
\begin{aligned}
f(x-y) &= \begin{cases} 0, & x \leq y \\ 1, & x > y \end{cases} \\
f * f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) f(y) dy \\
&= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

  - 図を描いて確認せよ.

今回のまとめ

- Fourier 級数の性質
  - Fourier 級数展開:

$$
f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)
$$

$$
\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
$$

  - 不連続点での Foureir 級数の値は平均値
  - 連続 (滑らか) な関数に高い周波数は含まれない (Riemann-Lebesgue の定理)
  - 畳み込みの Fourier 係数は元の関数の係数の積に比例する