Fourier 級数の性質

信号処理 - 第 *5* 講

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間
  線形演算について閉じた空間
- 内積空間
  内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間
  ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理
  可分な無限次元 Hilbert 空間には**可算個** の要素からなる完全正規直交系が存在する.
- 定理
  可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.
- 定理
  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \ \Rightarrow \ u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理
  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように **Fourier 級数展開**される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 以下の関数 f を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi, \pi)$$

解答例

- Fourier 係数 $\langle f, \phi_n \rangle$ の計算
  - $n = 0$ のとき

$$\langle f, \phi_0 \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}$$

- Fourier 係数 $\langle f, \phi_n \rangle$ の計算
  - $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\ &= \left[\frac{1}{-in} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-i\pi/2 \cdot n} - e^{i\pi/2 \cdot n}) \\ &= \frac{i}{n\sqrt{2\pi}} ((-i)^n - i^n) = \frac{i^{n+1}}{n\sqrt{2\pi}} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\sqrt{2\pi}}, & n \text{ が } 4 \text{ で割ると余り } 1 \\ \frac{-2}{n\sqrt{2\pi}}, & n \text{ が } 4 \text{ で割ると余り } 3 \\ 0, & n \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

- Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{i^{n+1} \{(-1)^n - 1\}}{2\pi n} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{-i^{n+1}}{\pi(2m+1)} e^{i(2m+1)x} \end{aligned}$$

  - 書き方はいろいろある

不連続点の性質

片側極限

- 定義

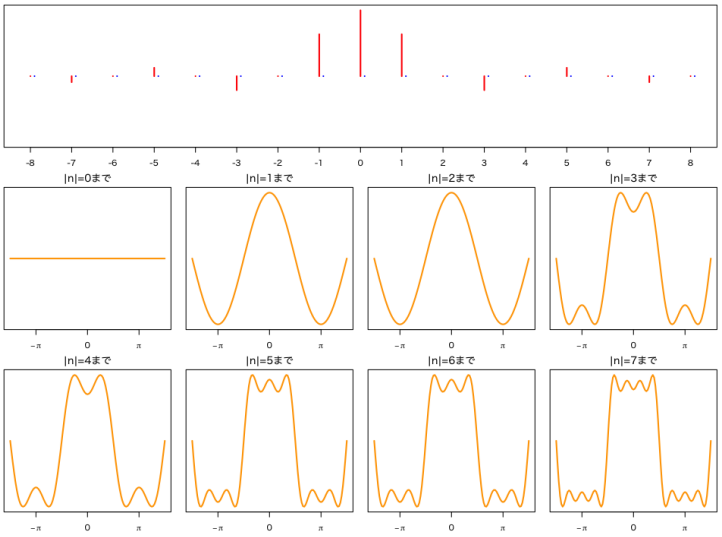

図 1: Fourier 係数と有限項での展開

$h > 0$ として

$$f(x-0) = \lim_{h \to 0} f(x-h)$$
$$f(x+0) = \lim_{h \to 0} f(x+h)$$

と書く．これを片側極限という．

不連続点

- 不連続関数

  点 x において不連続な関数を考える．

  $$f(x-0) \neq f(x+0)$$

  点 x 以外の近傍での有界性を仮定する．

  $$\sup_{0<h<\delta} |f(x-h) - f(x-0)| < \infty$$
  $$\sup_{0<h<\delta} |f(x+h) - f(x+0)| < \infty$$

不連続点での評価

- 定理で評価した式

$$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\{f(x-y) - f(x)\}dy$$
$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

- P_r の性質

  P_r の積分は偶関数であることから以下が成り立つ．

  $$\int_{-\infty}^{0} P_r(y)dy = \frac{1}{2}$$
  $$\int_{0}^{\infty} P_r(y)dy = \frac{1}{2}$$

- 不連続点まわりでの評価

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{-\delta}^{\delta} P_r(y)\{f(x-y)-f(x)\}dy\right| \\
&\le \left|\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\{f(x-y)-f(x{+}0)\}dy\right| \\
&\quad + \left|\int_{0}^{\delta} P_r(y)\{f(x-y)-f(x{-}0)\}dy\right| \\
&\le \frac{1}{2}\sup_{-\delta<y<0}|f(x-y)-f(x{+}0)| \\
&\quad + \frac{1}{2}\sup_{0<y<\delta}|f(x-y)-f(x{-}0)| \\
&\to^{\delta\to 0} 0
\end{aligned}
$$

- 不連続点の Fourier 級数展開

  関数 f の Fourier 級数展開 $\tilde{f}$ は

$$
\tilde{f}(x) = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y)dy = \frac{f(x{-}0)+f(x{+}0)}{2}
$$

  が成り立つので，f の不連続点での Fourier 級数展開は両側からの極限の平均値となる．

演習

練習問題

- 以下の関数 f は $x=\pi/2$ で不連続となる．Fourier 級数での $f(\pi/2)$ の値を求めよ．

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi,\pi)
$$

解答例

- Fourier 級数展開に代入すればよい

$$
\begin{aligned}
f(\pi/2) &= \frac{1}{2} + \sum_{n\neq 0}\frac{i^{n+1}\{(-1)^n-1\}}{2\pi n} e^{i\pi/2\cdot n} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{i^{-2n+1}\{(-1)^{-n}-1\}}{-2\pi n} + \frac{i^{2n+1}\{(-1)^n-1\}}{2\pi n}\right\} \\
&= \frac{1}{2} = \frac{f(\pi/2{-}0)+f(\pi/2{+}0)}{2}
\end{aligned}
$$

Fourier 係数の性質

畳み込み

- 定義

周期 2π をもつ関数 f と g の**畳み込み** (合成積; convolution) h は以下で定義される.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \\ &= f * g(x) \end{aligned}$$

- 関数 f, g は周期 2π をもつことに注意して，変数変換 $x - y = z$ を用いて 2 つの定義が同値であることを確認せよ

L^p ノルム

- 定義

  関数 f の L^p ノルムを以下で定義する.

  $$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

  ただし Ω は定義域で，一般には $\mathbb{R}$ 上の適当な区間.

- **内積から自然に導かれたノルムは L^2 ノルムである**

L^p 空間

- 定義

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \left\{ f \,\middle|\, \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \\ &= \left\{ f \,\middle|\, \|f\|_{L^p} < \infty \right\} \end{aligned}$$

Riemann-Lebesgue の定理

- 定理

  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ の Fourier 係数 $a_n = \langle f, \phi_n \rangle$ は

  $$\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$$

  となる.

- 証明

  f_r の Fourier 係数を $a_n(r)$ と書くと

  $$\begin{aligned} |a_n| &\leq |a_n - a_n(r)| + |a_n(r)| \\ &= |a_n - a_n(r)| + |a_n| r^{|n|} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - P_r * f\|_{L^1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{|n|} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

  ただし $*$ は畳み込みを表す.

  ここで r を 1 に近くとれば第 1 項はいくらでも小さくすることができる．また $|n|$ を十分大きくとれば第 2 項はいくらでも小さくなるので，$\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$ が示される.

- (証明のつづき)

最後の不等号は以下を用いればよい.

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left| \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left| f(x) e^{-inx} \right| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}\end{aligned}$$

- L^1 関数であれば係数の存在が保証されることを示している

Riemann-Lebesgue の定理の応用

- Fourier 級数の項別微分

  関数 f は区間 $(-\pi, \pi)$ で連続，$f(-\pi) = f(\pi)$ ，ほとんどいたるところで f' が存在し，$f' \in L^2 \cap L^1$ であるとする．f, f' の Fourier 級数展開をそれぞれ以下で表す.

  $$f(x) = \sum_n a_n \phi_n(x)$$
  $$f'(x) = \sum_n b_n \phi_n(x)$$

  f を項別に微分して a_n と b_n の間の以下の関係を得る.

  $$b_n = in \cdot a_n$$

- 滑らかな関数の高周波成分

  Riemann-Lebesgue の定理より $b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ なので，$a_n = o(1/n)$ (Landau の記号) となる．すなわち微分できるくらい滑らかな関数は $n \to \infty$ において $1/n$ より速く a_n が小さくなる (高周波成分が減衰する).

関数の積とノルム

Hölder の不等式

- 定理

  $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 0$ とする．このとき

  $$\left| \int_\Omega u(x) v(x) dx \right| \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

  - *Cauchy-Schwarz* **の不等式** *($p = q = 2$)* **の一般化である**

- 証明

  対数関数の凸性と $1/p + 1/q = 1$ から任意の $a, b > 0$ について

  $$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log ab$$

  が成り立つ.

  - 凸性について曖昧な者は意味を確認せよ

- (証明のつづき)

また対数関数の単調性から

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}} \left| \int u(x)v(x)dx \right| \leq \int \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}} dx \\
&\quad \leq \frac{1}{p\|u\|_{L^p}^p} \int |u(x)|^p dx + \frac{1}{q\|v\|_{L^q}^q} \int |v(x)|^q dx \\
&\quad = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

畳み込みのノルム

- 定理

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

とするとき

$$\|h\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^p}$$

- 証明

$1/p + 1/q = 1$ とする．

$$\begin{aligned}
|h(x)| &\leq \int |f(x-y)g(y)|dy \\
&= \int |f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|^{\frac{1}{q}}dy \\
&\leq \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)|dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y)|dy \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

- (証明のつづき)

これより

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^p}^p &= \int |h(x)|^p dx \\
&\leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int \int |f(x-y)|^p |g(y)|dydx \\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int |f(x-y)|^p dx \int |g(y)|dy \\
&= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p
\end{aligned}$$

畳み込みの Fourier 級数

- 係数の存在

先の定理において $p = 1$ とすると

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

となり，$f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ なら $h \in L^1(-\pi, \pi)$ となる．このことから畳み込み h の Fourier 係数が存在することが保証される．

- 係数の関係

  f, g, h の Fourier 係数をそれぞれ a_n, b_n, c_n とすると

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x-y) g(y) dy \; e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x-y) e^{-in(x-y)} g(y) e^{-iny} dx dy \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(z) e^{-inz} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(y) e^{-iny} dy \\ &= \sqrt{2\pi} a_n b_n \end{aligned}$$

  という関係が成り立つ.

演習

練習問題

- 関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases} \quad \in L^2(-\pi, \pi)$$

  とするとき，畳み込み $f * f$ を求めよ.

- 関数 $f * f$ を Fourier 級数展開せよ.

解答例

- 周期関数であることに注意して定義に従って計算する.

$$\begin{aligned} f(x-y) &= \begin{cases} 1, & -\pi/2 \le x - y \le \pi/2 \\ 0, & |x-y| > \pi/2 \end{cases} \\ f * f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) f(y) dy \\ &= \begin{cases} \pi - x, & x \ge 0 \\ \pi + x, & x < 0 \end{cases} = \pi - |x| \end{aligned}$$

  - $f(x-y), f(y)$ ともに 1 となる範囲を考えれば良い
  - $|x| \in L^2(-\pi, \pi)$ の Fourier 級数展開と比較せよ

今回のまとめ

- Fourier 級数の性質
  - Fourier 級数展開:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- 不連続点での Foureir 級数の値は平均値
- 連続 (滑らか) な関数に高い周波数は含まれない (Riemann-Lebesgue の定理)
- 畳み込みの Fourier 係数は元の関数の係数の積に比例する

注意

- 確認テスト (講義 5 の中)
  - Fourier 級数の基本的な問題の復習
    - 手を動かしてしっかり計算
    - 場合分けや番号の偶奇に注意
    - 前回の問題との結果を比較
  - 試験の意味を考えて誠実な対応をすること
  - ネットワーク環境等には自身で配慮すること