$Fourier$ 変換の性質

信号処理 - 講義 8

村田 昇

前回のおさらい

Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

  $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

  $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

  $$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

  $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して

  $$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \qquad \text{(Fourier 変換)}$$
  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \qquad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

  で定義する.

反転公式

- 定理

  $$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon \omega^2 + i\omega x} d\omega$$

  より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば，上の式は L^p の意味で成り立つと表現される.

  $$\lim_{\epsilon \to 0} \| G_\epsilon * f - f \|_{L^p} = 0$$

演習

練習問題

- 関数 Ξ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

  以下の関数の Fourier 変換を求めよ．
  - $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)$ $(\alpha > 0)$
  - $g(x) = e^{-\beta x^2}$ $(\beta > 0)$
  - $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

解答例

- $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha x} e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(-\alpha - i\omega)x}}{-\alpha - i\omega} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha + i\omega)}
\end{aligned}$$

- $g(x) = e^{-\beta x^2}$

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2} e^{-i\omega x} dx \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta (x + i\omega/2\beta)^2} dx \\
&= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\beta}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}
\end{aligned}$$

- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\omega} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega}
\end{aligned}$$

Fourier 変換の性質

記法

- 関数の対応
  - f: もとの関数 (以下では Fourier 変換の存在を仮定)
  - $\hat{f}$: Fourier 変換
- 変換の演算子
  - $\mathcal{F}$: Fourier 変換
  - $\mathcal{F}^{-1}$: 逆 Fourier 変換

    例えば以下のように使う.

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f], \qquad f = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$$
$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega), \qquad f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)$$

- 引数に関する注意

    関数の引数 (変数) は単なる名前なので何でも良い.

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{-i\alpha\beta} d\beta$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha\beta} d\alpha$$

絶対可積分

- 定義

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

- 以下ではこの条件を満たす関数を考える
- Fourier 変換の存在 (各点)

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right|$$
$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \left(= \sup_{\omega} |\hat{f}(\omega)| \right) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

- $|x| \to \infty$ での挙動

    適当に大きな値 $M > 0$ に対して

$$|f(x)| > \epsilon > 0, \ |x| > M$$

    とすると，以下のように絶対可積分に矛盾する.

$$\int_{-\infty}^{-M} |f(x)| dx + \int_{M}^{\infty} |f(x)| dx > \epsilon \times (\text{積分区間}) \to \infty$$

    したがって以下の性質が成り立つ.

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$$

Parseval の定理

- 定理

関数 f, g は $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の関係が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega$$

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

- 略証

反転公式と同様に収束因子を考える．

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}e^{-\epsilon\omega^2}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y)e^{i\omega y}}dy \cdot e^{-\epsilon\omega^2}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(y)G_\epsilon(x-y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g_\epsilon(x)}dx
\end{aligned}$$

$\epsilon \to 0$ とすると定理の両辺が一致することがわかる．

Plancherel の定理

- 定理

関数 f は $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の関係が成り立つ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

Riemann-Lebesgue の定理 (補題)

- 定理

関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ は滑らかで $f' \in L^1(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の性質をもつ．

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

- 略証

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \right| \\
&< \left| \left[\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-\infty}^{\infty} \right| + \left| \frac{1}{i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx \right| \\
&< \frac{1}{|\omega|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\, dx \\
&= \frac{1}{|\omega|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f'\|_{L^1}
\end{aligned}$$

より明らか．

演習

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x)=f(-x)$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

解答例

- 符号の反転

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-\infty} f(z)e^{i\omega z}(-dz) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{i\omega z}dz \\
&= \mathcal{F}[f](-\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f](\omega)
\end{aligned}
$$

- 注意

  符号が反転しているだけなので，ほとんど対称だと思ってよい．すなわち，Fourier 変換 $\mathcal{F}$ について成り立つことは逆 Fourier 変換 $\mathcal{F}^{-1}$ でも成り立つ．ただし符号の反転などには注意すること．

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 f の Fourier 変換と関数 $g=f'$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

解答例

- 微分

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \left[\frac{f(x)e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
\mathcal{F}[f'](\omega) &= i\omega\mathcal{F}[f](\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)
\end{aligned}
$$

  - Fourier 変換可能な関数は $|x|\to\infty$ での値が 0 になるとしてよい．

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 f の Fourier 変換と関数 $g=f^{(k)}$ (k 階微分) の Fourier 変換の関係を考えよ．

解答例

- 高階微分

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \left[\frac{f^{(k-1)}(x)e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= (\text{部分積分を繰り返す}) \\
\mathcal{F}[f^{(k)}](\omega) &= (i\omega)^k\mathcal{F}[f](\omega) = (i\omega)^k\hat{f}(\omega)
\end{aligned}
$$

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 f, g の Fourier 変換と関数 $h = f*g$ の Fourier 変換の関係を考えよ.

$$
h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = f*g(x)
$$

解答例

- 畳み込み

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[h](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f*g(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dye^{-i\omega x}dx \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}dy \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\omega z}dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}dy \\
\mathcal{F}[f*g](\omega) &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)
\end{aligned}
$$

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(x-a)$ の Fourier 変換の関係を考えよ.

解答例

- 移動

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\omega x}dx \\
&= e^{-i\omega a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\omega(x-a)}dx \\
&= e^{-i\omega a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-i\omega z}dz \\
\mathcal{F}[T_a[f]](\omega) &= e^{-i\omega a}\mathcal{F}[f](\omega) = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)
\end{aligned}
$$

練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(bx)$ $(b > 0)$ の Fourier 変換の関係を考えよ.

解答例

- 拡大縮小

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(bx) e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega/b \cdot z} dz \\
\mathcal{F}[D_b[f]](\omega) &= \frac{1}{b} \mathcal{F}[f] \left(\frac{\omega}{b}\right) = \frac{1}{b} \hat{f} \left(\frac{\omega}{b}\right)
\end{aligned}
$$

演算との関係

Fourier 変換で用いる基本演算

関数	Fourier 変換
$f'(x)$ (微分)	$i\omega \hat{f}(\omega)$
$f^{(k)}(x)$ (k 階微分)	$(i\omega)^k \hat{f}(\omega)$
$f * g(x)$ (畳み込み)	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$
$T_a f(x) = f(x-a)$ (移動)	$e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
$D_b f(x) = f(bx)$ (拡大縮小)	$1/b \cdot \hat{f}(\omega/b)$

演習

練習問題

- 関数

$$
f(x) = \frac{1}{x - ia} \ (a > 0)
$$

の Fourier 変換を求めよ.
  - Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係を利用
  - **複素積分を利用**

解答例

- 以下の Fourier 変換を利用

$$
\begin{aligned}
g(x) &= e^{-ax} \Xi_{(0,\infty)}(x) \ (a > 0) \\
\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + i\omega)} \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}(\omega - ia)}
\end{aligned}
$$

- 関数 f は $\hat{g}$ で表される

$$f(x) = i\sqrt{2\pi}\hat{g}(x)$$

- Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係

$$\mathcal{F}[f](-\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f](\omega)$$

- 整理すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](\omega) &= i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[\hat{g}](\omega) \\
&= i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](-\omega) \\
&= i\sqrt{2\pi}e^{-a(-\omega)}\Xi_{(0,\infty)}(-\omega) \\
&= i\sqrt{2\pi}e^{a\omega}\Xi_{(-\infty,0)}(\omega)
\end{aligned}$$

Fourier 変換の代表的な例

- 定義関数

    関数 Ξ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 代表的な例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x),\ x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$
$e^{-ax^2},\ x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{2\pi}ie^{a\omega}\Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$-\sqrt{2\pi}ie^{-a\omega}\Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\|\omega\|}$

今回のまとめ

- Fourier 変換の性質
    - Fourier 変換な可能な関数
    - Fourier 変換の基本的な性質
        * Parseval の定理
        * Plancherel の定理
        * Riemann-Lebesgue の定理 (補題)
    - 関数の演算と Fourier 変換の関係