Fourier 変換

信号処理 - 第 6 講

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間

  線形演算について閉じた空間

- 内積空間

  内積が定義されたベクトル空間

- Hilbert 空間

  ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間には可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する.

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.

- 定理

  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \ \Rightarrow \ u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 以下が周期 T の直交系となるように α を定めよ．

$$\{e^{\alpha inx},\ n=0,\pm1,\pm2,\dots\}$$

- 以下を内積とするとき前問の直交系を正規化せよ．

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Fourier 変換

Fourier 級数の一般化

- 周期 2π の場合 ($x\in[-\pi,\pi]$ で考えよ)

  正規直交系：

$$\phi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\ n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

- 周期 T の場合 ($x\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ で考えよ)

  正規直交系：

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{T}}e^{\frac{2\pi inx}{T}},\ n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

- 周期 T の場合

  Fourier 級数展開は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f,\psi_n\rangle\psi_n(x)\\&=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\frac{2\pi inx}{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(y)e^{-\frac{2\pi iny}{T}}dy\end{aligned}$$

- 極限操作のための書き換え

  ここで $\frac{2\pi}{T}=\Delta$ とする．

$$f(x)=\frac{\Delta}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\Delta x}\int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}}f(y)e^{-in\Delta y}dy$$

- 周期無限大における積分

  T が十分大きい (Δ が十分小さい) 極限を考えるために，以下の積分を定義する．

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\omega y}dy$$

- 級数和の近似

Fourier 展開の積分部分は $\sqrt{2\pi}\hat{f}(n\Delta)$ で十分良く近似できると考え Riemann 和の形で書く．

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \hat{f}(n\Delta)\Delta$$

- 区分求積法

  Riemann 和は $n\Delta \to \omega, \Delta \to d\omega$ として積分で表される．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta) \cdot \Delta \xrightarrow{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$$

- 周期無限大における表現

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega & \text{(反転公式)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy d\omega \end{aligned}$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

  $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx & \text{(Fourier 変換)} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega & \text{(逆 Fourier 変換)} \end{aligned}$$

  で定義する．

多次元 Fourier 変換

- d 次元の場合

  $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f について

$$\begin{aligned} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} dx & \text{(Fourier 変換)} \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} d\omega & \text{(逆 Fourier 変換)} \end{aligned}$$

  で定義する．なお $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ の通常の内積である．

演習

練習問題

- 以下の積分値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx$$

練習問題

- 関数 Ξ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

以下の関数の Fourier 変換を求めよ．
  - $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)\ (\alpha > 0)$
  - $g(x) = e^{-\beta x^2}\ (\beta > 0)$
  - $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

Fourier 変換の例

応用上重要な関数の例

- 定義関数

  関数 Ξ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

- 代表的な例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x),\ x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$
$e^{-ax^2},\ x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{2\pi}ie^{a\omega}\Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$-\sqrt{2\pi}ie^{-a\omega}\Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert\omega\rvert}$

反転公式の証明

証明

- step 1

  関数 $\hat{f}$ は各点で値が決まるが，積分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

  の値が存在するかどうかはわからない．

- step 2

  収束因子 $e^{-\epsilon\omega^2}$ を用いて以下の積分を定義する．

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-\epsilon\omega^2}e^{i\omega x}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\epsilon\omega^2+i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\omega y}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\epsilon\omega^2-i\omega(y-x)}d\omega \end{aligned}$$

- step 3

  指数の肩を整理する．

$$-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x) = -\epsilon\left(\omega + \frac{i(y-x)}{2\epsilon}\right)^2 - \frac{(y-x)^2}{4\epsilon}$$

- step 4

  ω の積分を行い f_ϵ を整理する．

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}} f(y)dy$$

- step 5

  関数 G_ϵ (Gauss 核と呼ばれる) を

$$G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

  と定義し，f_ϵ を畳み込みで書き直す．

$$f_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x-y)f(y)dy = G_\epsilon * f(x)$$

- step 6

  関数 G_ϵ は以下の性質を持つことが確かめられる．

  1. $G_\epsilon(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x)dx = 1$
  3. $\forall\delta > 0\ \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\delta} G_\epsilon(x)dx = 0$

  したがって G_ϵ は $\epsilon \to 0$ において Dirac の δ 関数になる．

  - ***Fourier* 級数展開の証明で出た *Poisson* 核と同様な性質**

反転公式

- 定理

$$f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x}d\omega$$

  より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば，上の式は L^p の意味で成り立つと表現される．

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|G_\epsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

今回のまとめ

- Fourier 変換
  - Fourier 級数の周期の一般化
  - 周期無限大の極限の表現
  - Fourier 変換と反転公式
  - Gauss 核による反転公式の証明