Fourier 変換

信号処理 講義 *6*

村田 昇

2020 年 *8* 月 *23* 日

復習

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間

  線形演算について閉じた空間

- 内積空間

  内積が定義されたベクトル空間

- Hilbert 空間

  ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間には可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する.

- 定理

  可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.

- 定理

  $\{\phi_k\}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \ \Rightarrow \ u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

- 以下の問に答えよ．
  - 次の関数 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ を Fourier 級数展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

解答例

- 関数 $\cos(x)$ は $\exp(ix)$ と $\exp(-ix)$ で表せる．
- 積分計算は $n = \pm 1$ で場合分けが必要となる．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{ix} + e^{-ix}) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{-i(n-1)x} + e^{-i(n+1)x}) dx \end{aligned}$$

- Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} e^{-ix} + \frac{1}{4} e^{ix} + \sum_{n \neq \pm 1} \frac{i^n}{2\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2} e^{inx} \\ &= \frac{1}{4} e^{-ix} + \frac{1}{4} e^{ix} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\pi(1 - 4m^2)} e^{2imx} \end{aligned}$$

演習

- 以下の問に答えよ．
  - 以下の系が周期 T の直交系となるように α を定めよ．

    $\{e^{\alpha inx},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

  - 以下を内積とするとき，前問の直交系を正規化せよ．

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

解答例

- 周期

  区間 $[-\pi, \pi]$ と区間 $[-T/2, T/2]$ の関係を考えればよい．

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}$$

- 正規化

  正規化定数を $c_n(>0)$ とするとき，内積の定義より

$$|c_n|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{\frac{2\pi i n x}{T}}|^2 dx = |c_n|^2 T$$

  であるから

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi i n x}{T}},\ x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right],\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  となる．

Fourier 変換

Fourier 級数の一般化

- 周期 2π の場合

  正規直交系

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},\ x \in [-\pi, \pi],\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- 周期 T の場合

  正規直交系

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi i n x}{T}},\ x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right],\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- 周期 T の場合

  Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n x}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-\frac{2\pi i n y}{T}} dy \end{aligned}$$

- 極限操作のための書き換え

  ここで $\frac{2\pi}{T} = \Delta$ とする

$$f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} f(y) e^{-in\Delta y} dy$$

- 周期無限大における積分

  T が十分大きい (Δ が十分小さい) 極限を考えるために，以下の積分を定義する．

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

- 級数和の近似

  Fourier 展開の積分部分は $\sqrt{2\pi}\hat{f}(n\Delta)$ で十分良く近似できると考え Riemann 和の形で書く．

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \hat{f}(n\Delta) \Delta$$

- 区分求積法

  Riemann 和は $n\Delta \to \omega$, $\Delta \to d\omega$ として積分で表される．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta) \cdot \Delta \xrightarrow{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$$

- 周期無限大における表現

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(反転公式)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy d\omega \end{aligned}$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

  $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \qquad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \qquad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

  で定義する．

多次元 Fourier 変換

- d 次元の場合

  $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f について

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} dx \qquad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x}} d\omega \qquad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

  で定義する．なお $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$ とベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ の通常の内積である．

演習

- 以下の積分値を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx$$

解答例

- 2 重積分を利用する

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\epsilon r^2} r dr d\theta && (\text{極座標変換}) \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\epsilon r^2} r dr && (\text{変数変換} z = r^2) \\
&= \pi \int_0^{\infty} e^{-\epsilon z} dz
\end{aligned}
$$

- 解答

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}
$$

反転公式の証明

一般に $\hat{f}(\omega)$ は可積分かどうかわからないので，Poisson 核と似た原理を用いて反転公式を示す．

証明

- step 1

  関数 $\hat{f}$ は各点で値が決まるが，積分

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega
$$

  の値が存在するかどうかはわからない．

- step 2

  収束因子 $e^{-\epsilon\omega^2}$ を用いて以下の積分を定義する．

$$
\begin{aligned}
f_\epsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-\epsilon\omega^2}e^{i\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2+i\omega x}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2-i\omega(y-x)}d\omega
\end{aligned}
$$

- step 3

  指数の肩を整理する．

$$
-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x) = -\epsilon\left(\omega + \frac{i(y-x)}{2\epsilon}\right)^2 - \frac{(y-x)^2}{4\epsilon}
$$

- step 4

  ω の積分を行い f_ϵ を整理する．

$$
f_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}} f(y)dy
$$

- step 5

関数 G_ϵ (Gauss 核と呼ばれる) を

$$G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

と定義し，f_ϵ を畳み込みで書き直す．

$$f_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x-y) f(y) dy = G_\epsilon * f(x)$$

- step 6

  関数 G_ϵ は以下の性質を持つことが確かめられる．

  1. $G_\epsilon(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x) dx = 1$
  3. $\forall \delta > 0\ \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|>\delta} G_\epsilon(x) dx = 0$

  したがって Poisson 核と同様に，G_ϵ は $\epsilon \to 0$ において δ 関数になる．

反転公式

- 定理

$$f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば，上の式は L^p の意味で成り立つと表現される．

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|G_\epsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

演習

- 関数 Ξ を以下で定義する．

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

  以下の関数の Fourier 変換を求めよ．

  - $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)\ (\alpha > 0)$
  - $g(x) = e^{-\beta x^2}\ (\beta > 0)$
  - $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

まとめ

- Fourier 変換
  - Fourier 級数の周期の一般化
  - 周期無限大の極限の表現
  - Fourier 変換と反転公式
  - Gauss 核による反転公式の証明