

# デジタル信号処理

## 信号処理 - 講義 14

村田 昇

## 前回のおさらい

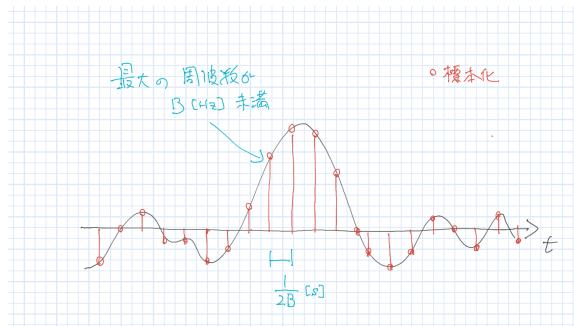
### デジタル信号処理

- 計算機で信号を扱うための方法論
  - 連続時間では扱えない
  - 有限長のデータしか扱えない
- 処理の流れ
  - アナログ信号をデジタル信号に変換 (A/D 変換)
    - \* 標本化 (sampling): 時間の離散化
  - 計算機上でデジタル信号を処理
  - デジタル信号をアナログ信号に変換 (D/A 変換)

### 標本化定理

- 定理

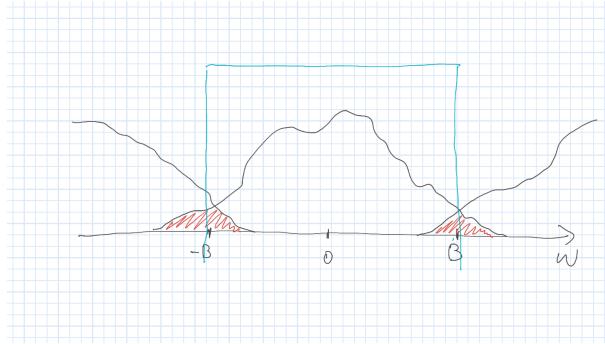
信号  $f(t)$  が  $B$  [Hz] 未満の周波数 (Nyquist 周波数) しか含んでいないなら、サンプリング周波数  $2B$  [Hz] を用いて元の信号は完全に求められる。



### エイリアシング

- 折り返しによる雑音

$4\pi B$  周期の関数  $\tilde{f}$  を構成する際に重なりが生じ、 $(-2\pi B, 2\pi B)$  領域を切り出しても元に戻すことができない。



## 離散 Fourier 変換と逆変換

- 定義

長さ  $N$  の信号  $f(t)$ ,  $t = 0, 1, \dots, N-1$  の離散 Fourier 変換を以下で定義する.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-i \frac{2\pi}{N} nt}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{N} nt}, \quad (t = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

– 時間も周波数も有限であることに注意

## 行列による表現

- 変換行列

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \dots & \alpha^{-(N-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \alpha^{-2(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

- 逆変換行列

$$F^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{(N-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(N-1)} & \alpha^{2(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

- 行列表現

$$\begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(N-1) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\hat{f} = Ff$$

$$f = F^* \hat{f}$$

## デジタル信号におけるフィルタの表現

- 標本化されたフィルタの表現 (周期関数の畳み込み)

$$\begin{aligned} g(t) &= f * h(t) \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} f(s)h(t-s) = \sum_{s=0}^{N-1} f(t-s)h(s), \\ t &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

–  $f, g, h$ : 周期  $N$  の関数

## 有限長のデータ

- 信号の一部の切り出し
  - 周期的な信号として扱う
  - 有界な台を持つ信号として扱う

$$f(t) = w(t)\tilde{f}(t)$$

- 端点での不連続性を軽減するために窓関数を導入
  - 矩形窓 (単純な切り出し)
  - gauss 窓
  - hann 窓
  - hamming 窓

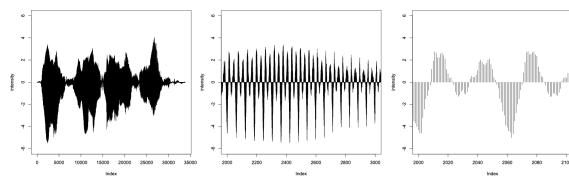
## デジタル信号処理

### デジタル信号処理の流れ

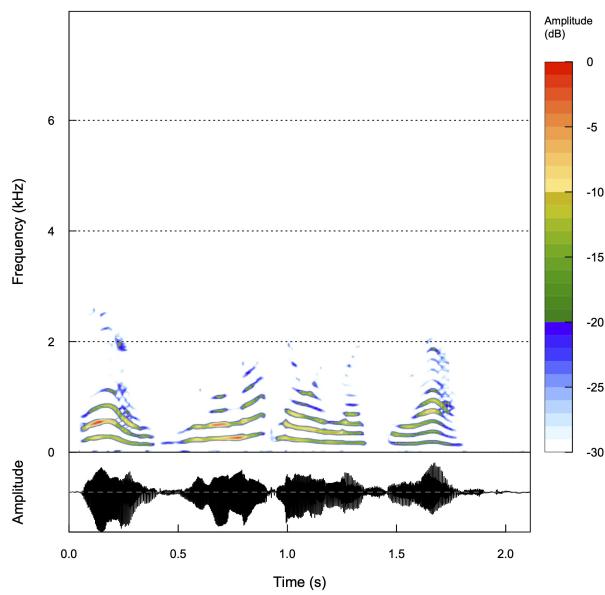
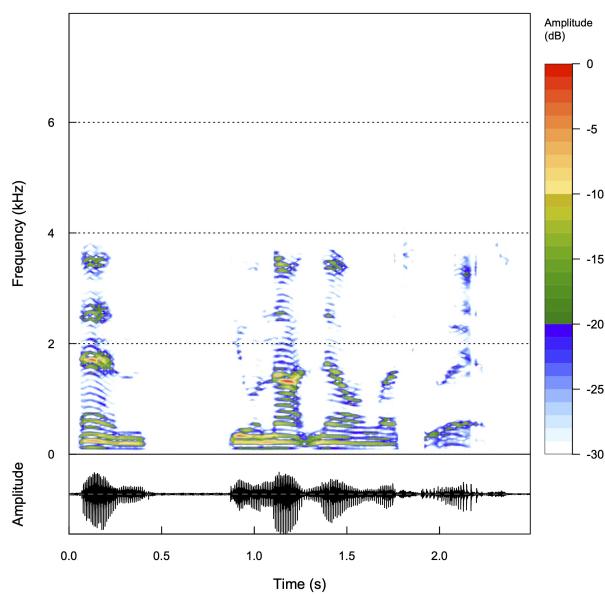
- データの取得 (アナログ信号)
- ローパスフィルタリング (標本化のため)
- A/D 変換 (標本化; デジタル信号)
- 窓関数による切り出し (有限長の時間表現)
- 離散 Fourier 変換 (有限長の周波数表現; 複素数)
- デジタルフィルタリング (有限個の周波数の操作)
- 逆変換 (有限長の時間表現; デジタル信号)
- 窓関数の影響を考慮して合成
- D/A 変換 (アナログ信号)

## デジタルフィルタ

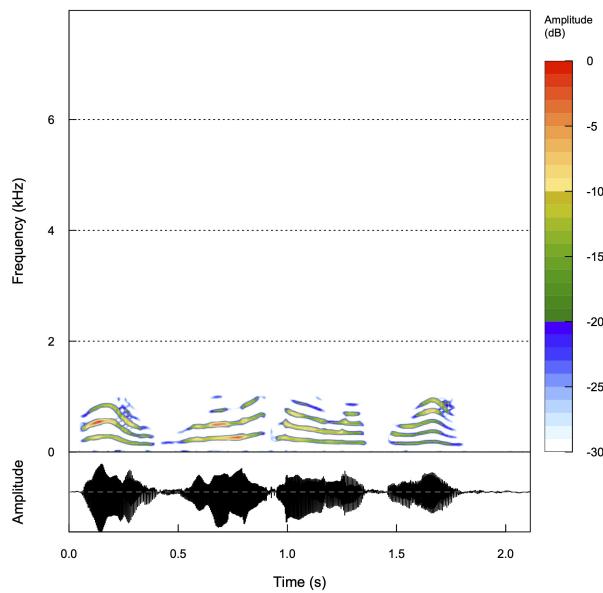
- 音声信号



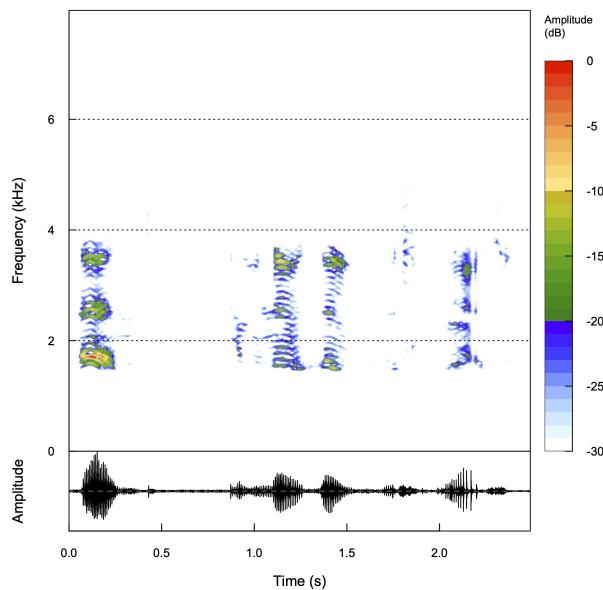
## スペクトログラム



## ローパスフィルタ



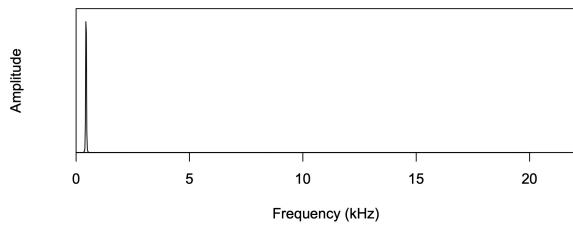
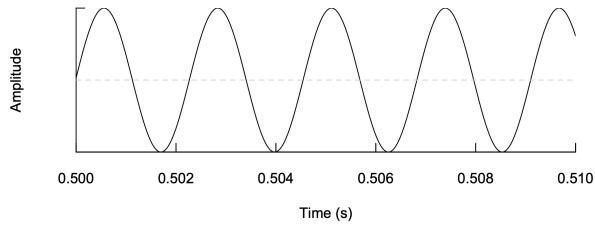
## ハイパスフィルタ



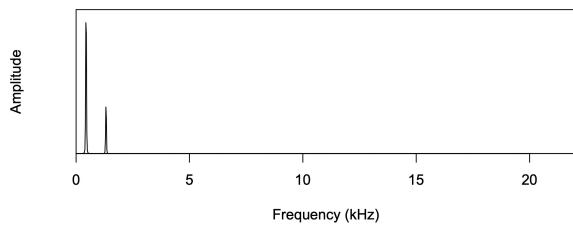
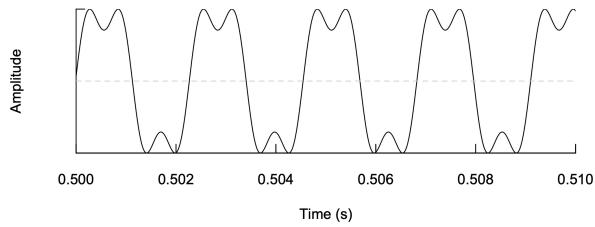
## 音の合成

- 正弦波の重ね合わせでさまざまな音色を合成
- Fourier 級数展開で求めた係数を利用  
(離散 Fourier 変換では周波数に上限がある)

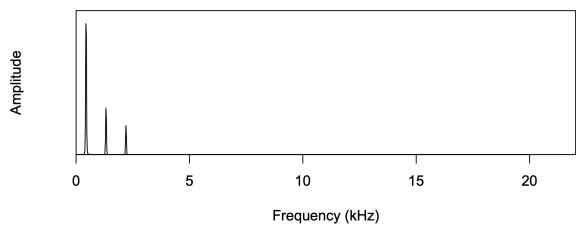
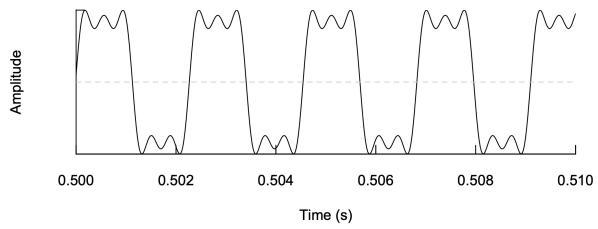
## 矩形波の合成 (1)



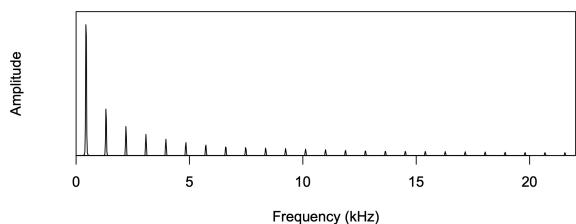
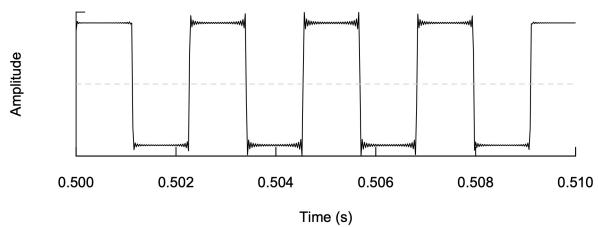
## 矩形波の合成 (2)



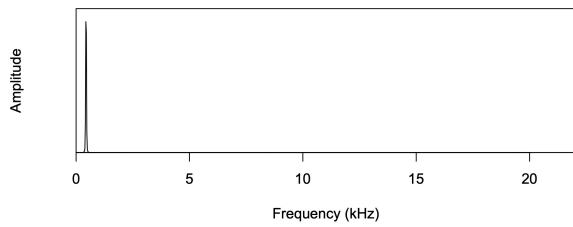
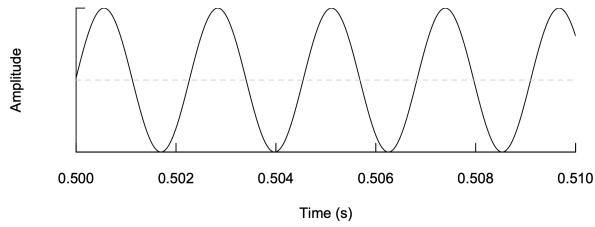
### 矩形波の合成 (3)



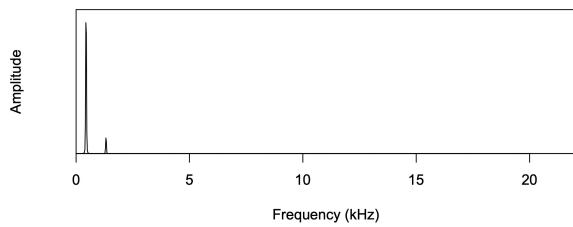
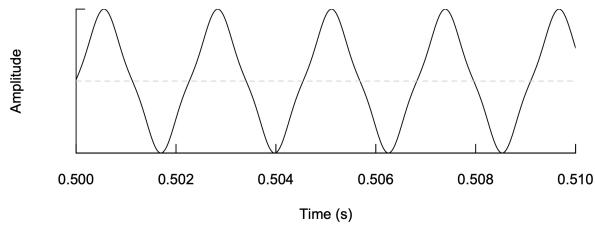
### 矩形波の合成 (4)



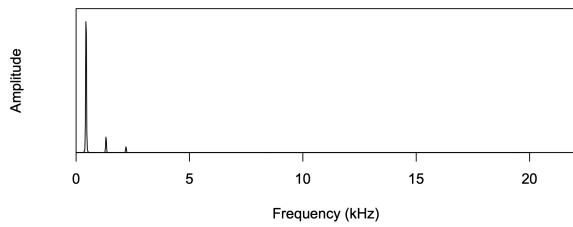
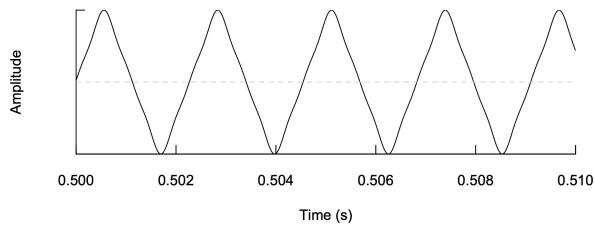
### 三角波の合成 (1)



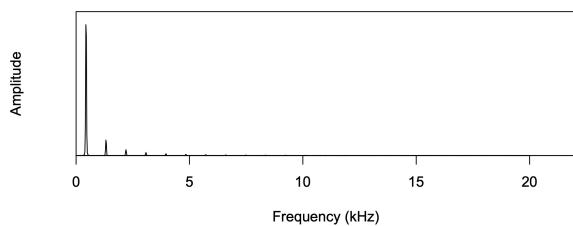
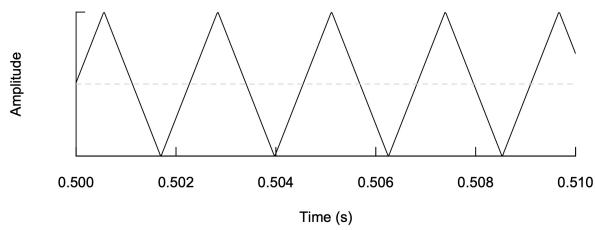
### 三角波の合成 (2)



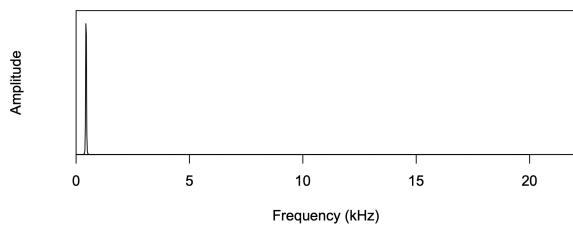
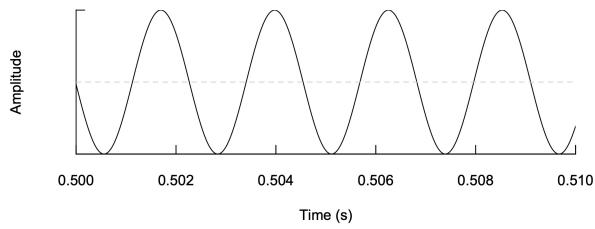
### 三角波の合成 (3)



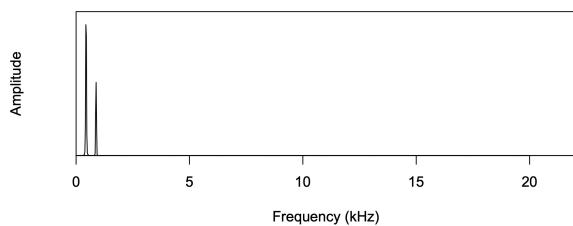
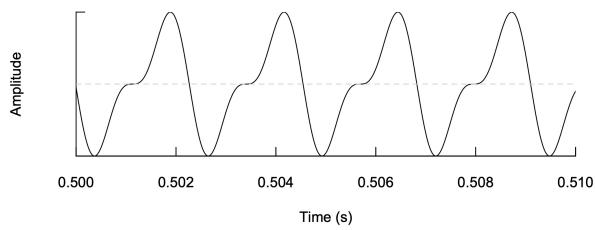
### 三角波の合成 (4)



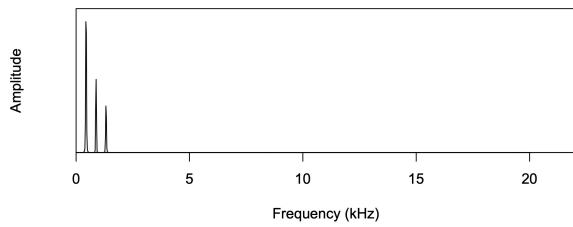
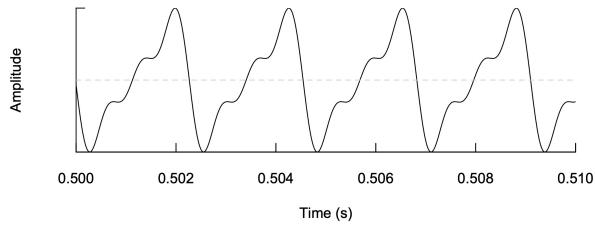
## 鋸波の合成 (1)



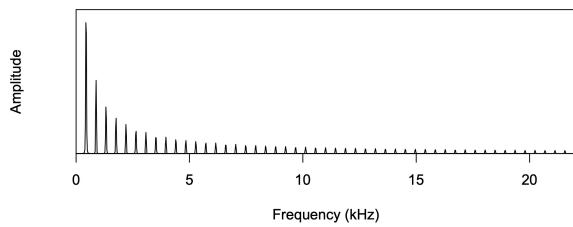
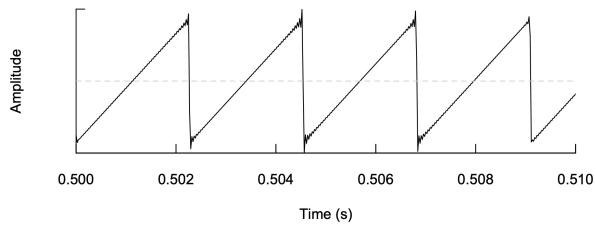
## 鋸波の合成 (2)



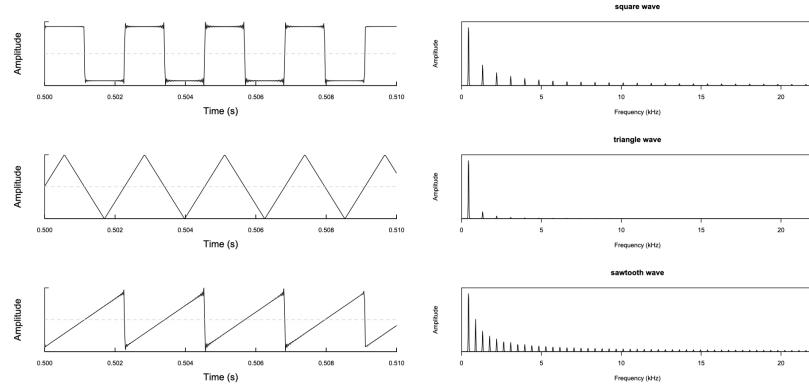
### 鋸波の合成 (3)



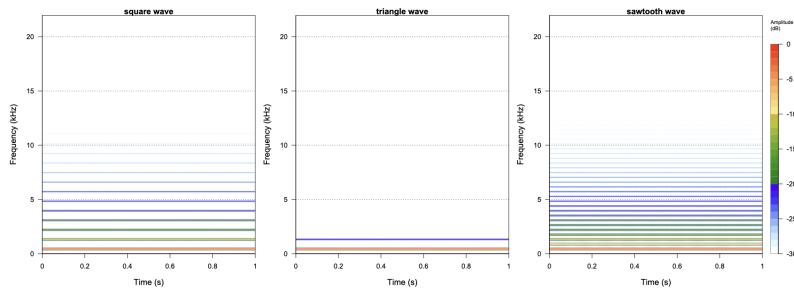
### 鋸波の合成 (4)



## 時間・周波数表現の比較



## スペクトログラムの比較



## 高速 Fourier 変換

### 離散 Fourier 変換の計算量

- 定義

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-i \frac{2\pi}{N} nt}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) \alpha^{-nt}, \quad \alpha = e^{i \frac{2\pi}{N}}\end{aligned}$$

- 定義に従うと離散フーリエ変換の計算量は  $O(N^2)$   
( $N^2$  回程度の乗算が必要)

### 離散 Fourier 変換行列の性質

- $N = 4$  で考える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \alpha^{-3} \\ 1 & \alpha^{-2} & \alpha^{-4} & \alpha^{-6} \\ 1 & \alpha^{-3} & \alpha^{-6} & \alpha^{-9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & -1 & \alpha^{-3} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha^{-3} & -1 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{4}}$$

- 2列目と3列目を入れ換える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-3} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & \alpha^{-3} & \alpha^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^{-1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 疎な行列の積になっている
- $N \neq 4$  でも同様に議論できる

## 係数の分解

- $N$  は二つの整数の積  $N = N_1 N_2$  とする
- $t, n$  をそれぞれ  $N_1, N_2$  で割った商と余りで表す

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 N_1, & t_1 &= 0, \dots, N_1 - 1, t_2 &= 0, \dots, N_2 - 1 \\ n &= n_1 N_2 + n_2, & n_1 &= 0, \dots, N_1 - 1, n_2 &= 0, \dots, N_2 - 1 \end{aligned}$$

- 1の  $N_1, N_2$  乗根を  $\beta, \gamma$  とする

$$\beta = e^{i\frac{2\pi}{N_1}}, \quad \gamma = e^{i\frac{2\pi}{N_2}}$$

- 係数は以下のように分解される

$$\begin{aligned} \alpha^{-nt} &= \alpha^{-(n_1 N_2 + n_2)(t_1 + t_2 N_1)} \\ &= \alpha^{-n_1 t_2 N_2 N_1} \alpha^{-n_1 t_1 N_2} \alpha^{-n_2 t_2 N_1} \alpha^{-n_2 t_1} \\ &= \beta^{-n_1 t_1} \gamma^{-n_2 t_2} \alpha^{-n_2 t_1} \end{aligned}$$

$$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{N}}, \quad \beta = e^{i\frac{2\pi}{N_1}}, \quad \gamma = e^{i\frac{2\pi}{N_2}}$$

-  $n_1 t_2$  の項は 1 になるので消えることに注意

## 計算の分解

- 記法

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_1, t_2), & t_1 &= 0, \dots, N_1 - 1, t_2 &= 0, \dots, N_2 - 1 \\ \hat{f}(n) &= \hat{f}(n_1, n_2) & n_1 &= 0, \dots, N_1 - 1, n_2 &= 0, \dots, N_2 - 1 \end{aligned}$$

- 定義

$$\begin{aligned}\sqrt{N} \hat{f}(n_1, n_2) &= \sum_{t=0}^{N-1} f(t) \alpha^{-nt} \\ &= \sum_{t_1=0}^{N_1-1} \sum_{t_2=0}^{N_2-1} f(t_1, t_2) \beta^{-n_1 t_1} \gamma^{-n_2 t_2} \alpha^{-n_2 t_1}\end{aligned}$$

- 計算は以下のように分解される

$$\begin{aligned}\bar{f}(t_1, n_2) &= \sum_{t_2=0}^{N_2-1} f(t_1, t_2) \gamma^{-n_2 t_2} && \forall t_1, n_2 \\ \tilde{f}(t_1, n_2) &= \bar{f}(t_1, n_2) \alpha^{-n_2 t_1} && \forall t_1, n_2 \\ \sqrt{N} \hat{f}(n_1, n_2) &= \sum_{t_1=0}^{N_1-1} \tilde{f}(t_1, n_2) \beta^{-n_1 t_1} && \forall n_1, n_2\end{aligned}$$

- 1行目は長さ  $N_2$  の離散 Fourier 変換を  $N_1$  回
- 3行目は長さ  $N_1$  の離散 Fourier 変換を  $N_2$  回

## 計算量の漸化式

- 長さ  $N_i$  の系列の計算量(乗算回数)を  $T(N_i)$
- 長さ  $N = N_1 N_2$  の系列の計算量  $T(N)$

$$\begin{aligned}T(N) &= N_1 T(N_2) + N + N_2 T(N_1) \\ &= N \left[ \frac{T(N_1)}{N_1} + \frac{T(N_2)}{N_2} + 1 \right]\end{aligned}$$

- 一般に  $N = N_1 N_2 \dots N_P$  のとき

$$T(N) = N \left[ \sum_{i=1}^P \frac{T(N_i)}{N_i} + P - 1 \right]$$

- 特に  $N = 2^P$ , ( $P = \log_2 N$ ) のとき

$$T(N) = N \log_2 N \cdot \frac{T(2)}{2} + N \log_2 N - N \ll N^2$$