

Fourier 変換

信号処理 - 講義 6

村田 昇

前回のおさらい

ベクトル空間・内積空間・Hilbert 空間

- ベクトル空間
線形演算について閉じた空間
- 内積空間
内積が定義されたベクトル空間
- Hilbert 空間
ノルムに関して完備な内積空間

Hilbert 空間の完全正規直交系

- 定理
可分な無限次元 Hilbert 空間には可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する.
- 定理
可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である.
- 定理
 $\{\phi_k\}$ が \mathcal{H} の完全正規直交系のとき以下が成り立つ.

$$\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$$

Fourier 級数展開

- 定理
 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

演習

練習問題

- 次の関数 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

解答例

- 関数 $\cos(x)$ は $\exp(ix)$ と $\exp(-ix)$ で表せる.
- 積分計算は $n = \pm 1$ で場合分けが必要となる.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{-i(n-1)x} + e^{-i(n+1)x}) dx \end{aligned}$$

- Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} e^{-ix} + \frac{1}{4} e^{ix} + \sum_{n \neq \pm 1} \frac{i^n}{2\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2} e^{inx} \\ &= \frac{1}{4} e^{-ix} + \frac{1}{4} e^{ix} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\pi(1 - 4m^2)} e^{2imx} \end{aligned}$$

練習問題

- 次の関数 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = |\sin(x)|$$

解答例

- 関数 $\sin(x)$ は $\exp(ix)$ と $\exp(-ix)$ で表せる.
- 積分計算は $n = \pm 1$ で場合分けが必要となる.
- 関数 f は別の表現も可能

$$\begin{aligned} f(x) &= |\sin(x)| \\ &= \begin{cases} -\sin(x), & x \leq 0 \\ \sin(x), & x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \cos(x + \pi/2), & x \leq 0 \\ \cos(x - \pi/2), & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

– 前問の計算結果を利用できる.

- Fourier 級数展開

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}e^{-i(x+\pi/2)} + \frac{1}{4}e^{i(x+\pi/2)} + \sum_{n \neq \pm 1} \frac{i^n}{2\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2} e^{in(x+\pi/2)} \\ &\quad + \frac{1}{4}e^{-i(x-\pi/2)} + \frac{1}{4}e^{i(x-\pi/2)} + \sum_{n \neq \pm 1} \frac{i^n}{2\pi} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2} e^{in(x-\pi/2)} \\ &= \sum_{n \neq \pm 1} \frac{(-1)^n + 1}{\pi(1 - n^2)} e^{inx} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1 - 4m^2)} e^{2imx} \end{aligned}$$

練習問題

- 以下が周期 T の直交系となるように α を定めよ.

$$\{e^{\alpha inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

- 以下を内積とするとき前問の直交系を正規化せよ.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

解答例

- 周期

区間 $[-\pi, \pi]$ と区間 $[-T/2, T/2]$ の関係を考えればよい.

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}$$

- 正規化

正規化定数を $c_n (> 0)$ とするとき, 内積の定義より

$$|c_n|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{\frac{2\pi inx}{T}}|^2 dx = |c_n|^2 T$$

であるから

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi inx}{T}}, \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

となる.

Fourier 変換

Fourier 級数の一般化

- 周期 2π の場合

正規直交系:

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 周期 T の場合

正規直交系:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi i n x}{T}}, \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 周期 T の場合

Fourier 級数展開は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i n x}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-\frac{2\pi i n y}{T}} dy \end{aligned}$$

- 極限操作のための書き換え

ここで $\frac{2\pi}{T} = \Delta$ とする.

$$f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} f(y) e^{-in\Delta y} dy$$

- 周期無限大における積分

T が十分大きい (Δ が十分小さい) 極限を考えるために, 以下の積分を定義する.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

- 級数和の近似

Fourier 展開の積分部分は $\sqrt{2\pi} \hat{f}(n\Delta)$ で十分良く近似できると考え Riemann 和の形で書く.

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \hat{f}(n\Delta) \Delta$$

- 区分求積法

Riemann 和は $n\Delta \rightarrow \omega$, $\Delta \rightarrow d\omega$ として積分で表される.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta) \cdot \Delta \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$$

- 周期無限大における表現

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy d\omega \end{aligned} \quad (\text{反転公式})$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

\mathbb{R} 上の関数 f に対して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (\text{Fourier 変換})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (\text{逆 Fourier 変換})$$

で定義する.

多次元 Fourier 変換

- d 次元の場合

\mathbb{R}^d 上の関数 f について

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx \quad (\text{Fourier 変換})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot x} d\omega \quad (\text{逆 Fourier 変換})$$

で定義する. なお $\omega \cdot x$ はベクトル $\omega \in \mathbb{R}^d$ とベクトル $x \in \mathbb{R}^d$ の通常の内積である.

演習

練習問題

- 以下の積分値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx$$

解答例

- 2 重積分を利用する

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon r^2} r dr d\theta \quad (\text{極座標変換}) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\epsilon r^2} r dr \quad (\text{変数変換 } z = r^2) \\ &= \pi \int_0^{\infty} e^{-\epsilon z} dz \end{aligned}$$

- 解答

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}$$

練習問題

- 関数 Ξ を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の関数の Fourier 変換を求めよ.

- $f(x) = e^{-\alpha x} \Xi_{(0,\infty)}(x)$ ($\alpha > 0$)
- $g(x) = e^{-\beta x^2}$ ($\beta > 0$)
- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

解答例

- $f(x) = e^{-\alpha x} \Xi_{(0,\infty)}(x)$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha x} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(-\alpha-i\omega)x}}{-\alpha-i\omega} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha+i\omega)} \end{aligned}$$

- $g(x) = e^{-\beta x^2}$

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2} e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta(x+i\omega/2\beta)^2} dx \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\beta}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \end{aligned}$$

- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\omega} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

Fourier 変換の例

応用上重要な関数の例

- 定義関数

関数 Ξ を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 代表的な例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x), x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$
$e^{-ax^2}, x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{2\pi} i e^{a\omega} \Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$-\sqrt{2\pi} i e^{-a\omega} \Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega}$

反転公式の証明

証明

- step 1

関数 \hat{f} は各点で値が決まるが, 積分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

の値が存在するかどうかはわからない.

- step 2

収束因子 $e^{-\epsilon\omega^2}$ を用いて以下の積分を定義する.

$$\begin{aligned} f_{\epsilon}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x)} d\omega \end{aligned}$$

- step 3

指数の肩を整理する.

$$-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x) = -\epsilon \left(\omega + \frac{i(y-x)}{2\epsilon} \right)^2 - \frac{(y-x)^2}{4\epsilon}$$

- step 4

ω の積分を行い f_{ϵ} を整理する.

$$f_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}} f(y) dy$$

- step 5

関数 G_{ϵ} (Gauss 核と呼ばれる) を

$$G_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

と定義し, f_{ϵ} を畳み込みで書き直す.

$$f_{\epsilon}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\epsilon}(x-y) f(y) dy = G_{\epsilon} * f(x)$$

- step 6

関数 G_ϵ は以下の性質を持つことが確かめられる.

1. $G_\epsilon(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x) dx = 1$
3. $\forall \delta > 0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} G_\epsilon(x) dx = 0$

したがって G_ϵ は $\epsilon \rightarrow 0$ において Dirac の δ 関数になる.

- Fourier 級数展開の証明で出た Poisson 核と同様な性質

反転公式

- 定理

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば, 上の式は L^p の意味で成り立つと表現される.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G_\epsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

今回のまとめ

- Fourier 変換
 - Fourier 級数の周期の一般化
 - 周期無限大の極限の表現
 - Fourier 変換と反転公式
 - Gauss 核による反転公式の証明