

Fourier 変換の性質

信号処理 - 講義 8

村田 昇

前回のおさらい

Fourier 級数展開

- 定理

$f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

\mathbb{R} 上の関数 f に対して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (\text{Fourier 変換})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (\text{逆 Fourier 変換})$$

で定義する.

反転公式

- 定理

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば, 上の式は L^p の意味で成り立つと表現される.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G_{\epsilon} * f - f\|_{L^p} = 0$$

演習

練習問題

- 関数 Ξ を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下の関数の Fourier 変換を求めよ.

- $f(x) = e^{-\alpha x} \Xi_{(0,\infty)}(x) \ (\alpha > 0)$
- $g(x) = e^{-\beta x^2} \ (\beta > 0)$
- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

解答例

- $f(x) = e^{-\alpha x} \Xi_{(0,\infty)}(x)$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha x} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(-\alpha-i\omega)x}}{-\alpha-i\omega} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha+i\omega)} \end{aligned}$$

- $g(x) = e^{-\beta x^2}$

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta x^2} e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\beta(x+i\omega/2\beta)^2} dx \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\beta}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \end{aligned}$$

- $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

$$\begin{aligned} \hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\omega} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

Fourier 変換の性質

記法

- 関数の対応
 - f : もとの関数 (以下では Fourier 変換の存在を仮定)
 - \hat{f} : Fourier 変換
 - 変換の演算子
 - \mathcal{F} : Fourier 変換
 - \mathcal{F}^{-1} : 逆 Fourier 変換
- 例えば以下のように使う.

$$\begin{aligned}\hat{f} &= \mathcal{F}[f], & f &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] \\ \hat{f}(\omega) &= \mathcal{F}[f](\omega), & f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)\end{aligned}$$

- 引数に関する注意
関数の引数 (変数) は単なる名前なので何でも良い.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) e^{-i\alpha\beta} d\beta \\ \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\beta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha\beta} d\alpha\end{aligned}$$

絶対可積分

- 定義

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

- 以下ではこの条件を満たす関数を考える
- Fourier 変換の存在 (各点)

$$\begin{aligned}|\hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty\end{aligned}$$

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \left(= \sup_{\omega} |\hat{f}(\omega)| \right) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

- $|x| \rightarrow \infty$ での挙動
適当に大きな値 $M > 0$ に対して

$$|f(x)| > \epsilon > 0, \quad |x| > M$$

とすると, 以下のように絶対可積分に矛盾する.

$$\int_{-\infty}^{-M} |f(x)| dx + \int_M^{\infty} |f(x)| dx > \epsilon \times (\text{積分区間}) \rightarrow \infty$$

したがって以下の性質が成り立つ.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Parseval の定理

- 定理

関数 f, g は $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする. このとき以下の関係が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

- 略証

反転公式と同様に収束因子を考える.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} e^{-\epsilon \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y) e^{i\omega y}} dy \cdot e^{-\epsilon \omega^2} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(y)} G_{\epsilon}(x-y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g_{\epsilon}(x)} dx \end{aligned}$$

$\epsilon \rightarrow 0$ とすると定理の両辺が一致することがわかる.

Plancherel の定理

- 定理

関数 f は $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする. このとき以下の関係が成り立つ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$$

Riemann-Lebesgue の定理 (補題)

- 定理

関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ は滑らかで $f' \in L^1(\mathbb{R})$ とする. このとき以下の性質をもつ.

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

- 略証

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \\ &< \left| \left[\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right]_{-\infty}^{\infty} \right| + \left| \frac{1}{i\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \right| \\ &< \frac{1}{|\omega|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx \\ &= \frac{1}{|\omega|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_{L^1} \end{aligned}$$

より明らか.

演習

練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(-x)$ の Fourier 変換の関係を考えよ.

解答例

- 符号の反転

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ \mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(z) e^{i\omega z} (-dz) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{i\omega z} dz \\ &= \mathcal{F}[f](-\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f](\omega)\end{aligned}$$

- 注意

符号が反転しているだけなので、ほとんど対称だと思ってよい. すなわち, Fourier 変換 \mathcal{F} について成り立つことは逆 Fourier 変換 \mathcal{F}^{-1} でも成り立つ. ただし符号の反転などには注意すること.

練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数 f の Fourier 変換と関数 $g = f'$ の Fourier 変換の関係を考えよ.

解答例

- 微分

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \left[\frac{f(x) e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ \mathcal{F}[f'](\omega) &= i\omega \mathcal{F}[f](\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

– Fourier 変換可能な関数は $|x| \rightarrow \infty$ での値が 0 になるとしてよい.

練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数 f の Fourier 変換と関数 $g = f^{(k)}$ (k 階微分) の Fourier 変換の関係を考えよ.

解答例

- 高階微分

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \left[\frac{f^{(k-1)}(x) e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} \right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= (\text{部分積分を繰り返す}) \\ \mathcal{F}[f^{(k)}](\omega) &= (i\omega)^k \mathcal{F}[f](\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数 f, g の Fourier 変換と関数 $h = f * g$ の Fourier 変換の関係を考えよ.

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = f * g(x)$$

解答例

- 畳み込み

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[h](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy e^{-i\omega x} dx \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} dy \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega z} dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} dy \\ \mathcal{F}[f * g](\omega) &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f](\omega) \mathcal{F}[g](\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)\end{aligned}$$

練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(x-a)$ の Fourier 変換の関係を考えよ.

解答例

- 移動

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{-i\omega a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-i\omega(x-a)} dx \\ &= e^{-i\omega a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega z} dz \\ \mathcal{F}[T_a[f]](\omega) &= e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega) = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

練習問題

- 以下の問題に答えよ

関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(bx)$ ($b > 0$) の Fourier 変換の関係を考えよ.

解答例

- 拡大縮小

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(bx) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega/b \cdot z} dz \\ \mathcal{F}[D_b[f]](\omega) &= \frac{1}{b} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{b}\right) = \frac{1}{b} \hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right)\end{aligned}$$

演算との関係

Fourier 変換で用いる基本演算

関数	Fourier 変換
$f'(x)$ (微分)	$i\omega \hat{f}(\omega)$
$f^{(k)}(x)$ (k 階微分)	$(i\omega)^k \hat{f}(\omega)$
$f * g(x)$ (畳み込み)	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$
$T_a f(x) = f(x-a)$ (移動)	$e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
$D_b f(x) = f(bx)$ (拡大縮小)	$1/b \cdot \hat{f}(\omega/b)$

演習

練習問題

- 関数

$$f(x) = \frac{1}{x - ia} \quad (a > 0)$$

の Fourier 変換を求めよ.

- Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係を利用
- 複素積分を利用

解答例

- 以下の Fourier 変換を利用

$$\begin{aligned}g(x) &= e^{-ax} \Xi_{(0,\infty)}(x) \quad (a > 0) \\ \hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + i\omega)} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}(\omega - ia)}\end{aligned}$$

- 関数 f は \hat{g} で表される

$$f(x) = i\sqrt{2\pi} \hat{g}(x)$$

- Fourier 変換と逆 Fourier 変換の関係

$$\mathcal{F}[f](-\omega) = \mathcal{F}^{-1}[f](\omega)$$

- 整理すると

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}[\hat{g}](\omega) \\ &= i\sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](-\omega) \\ &= i\sqrt{2\pi}e^{-a(-\omega)}\Xi_{(0,\infty)}(-\omega) \\ &= i\sqrt{2\pi}e^{a\omega}\Xi_{(-\infty,0)}(\omega)\end{aligned}$$

Fourier 変換の代表的な例

- 定義関数

関数 Ξ を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 代表的な例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x), x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$
$e^{-ax^2}, x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{2\pi} i e^{a\omega} \Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$-\sqrt{2\pi} i e^{-a\omega} \Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a \omega }$

今回のまとめ

- Fourier 変換の性質
 - Fourier 変換可能な関数
 - Fourier 変換の基本的な性質
 - * Parseval の定理
 - * Plancherel の定理
 - * Riemann-Lebesgue の定理 (補題)
 - 関数の演算と Fourier 変換の関係