

# 標本化定理

## 信号処理 - 第 10 講

村田 昇

## 前回のおさらい

### フィルタ

- 定義  
入力  $f(t)$  を変換して出力  $g(t)$  を生成する機構
- 線形性  
入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質
- 時不変性  
入力の時刻がずれた場合、出力も同じだけずれる性質

### 線形時不変フィルタの数学的表現

- フィルタの積分表現

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds$$

$h$ : インパルス応答 = フィルタの表現

### Fourier 変換による表現

- 時間領域では畳み込み積分

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds = h*f(t)$$

- 周波数領域では関数の積

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)$$

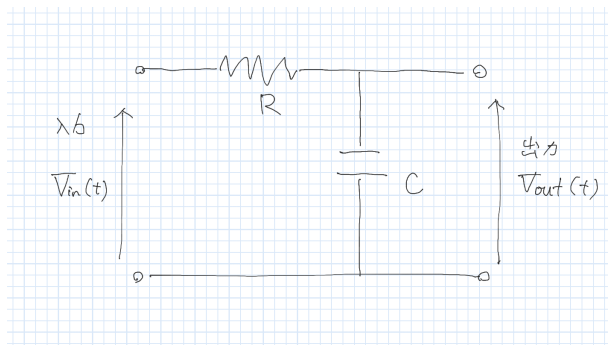
### インパルス応答

- インパルス応答

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds$$

- $h(t)$  はフィルタに  $\delta(t)$  を入力した時の出力
- 物理的には面積  $1$  ( $\Delta \times 1/\Delta$ ) の矩形波に対する出力を時間幅  $\Delta \rightarrow 0$  としたときの波形

## ローパスフィルタ (RC 回路)



### 入出力の関係

- 時間領域

$$V_{in}(t) = CR \frac{d}{dt} V_{out}(t) + V_{out}(t)$$

- 周波数領域

$$\hat{V}_{in}(\omega) = i\omega CR \hat{V}_{out}(\omega) + \hat{V}_{out}(\omega)$$

$$\hat{V}_{out}(\omega) = \frac{1}{i\omega CR + 1} \hat{V}_{in}(\omega)$$

### インパルス応答 (逆 Fourier 変換)

- フィルタの Fourier 変換

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega CR + 1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega CR} \frac{1}{\omega - i/CR}$$

- 逆 Fourier 変換

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{h}](t) = h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}, & t > 0 \end{cases}$$

### インパルス応答 (矩形波の極限)

- 矩形波の出力

$$V_{out}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta} (1 - e^{-\frac{t}{CR}}), & 0 < t \leq \Delta \\ \frac{1}{\Delta} (e^{\frac{\Delta}{CR}} - 1) e^{-\frac{t}{CR}}, & \Delta < t \end{cases}$$

- $\Delta \rightarrow 0$

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} V_{out}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}, & t > 0 \end{cases}$$

## 演習

### 練習問題

- 周期  $2\pi$  の Fourier 級数展開の基底 (正規直交系) を

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$$

としたとき, 周期  $2\pi \cdot 2B$  の基底は

$$\psi_n(t) = a \cdot \phi_n(bt)$$

で構成することができる.  $a$  と  $b$  を求めよ.

### 解答例

- $t$  軸の拡大縮小を考え, 正規化項を計算すればよい

$$a = \frac{1}{\sqrt{2B}}$$
$$b = \frac{1}{2B}$$

## デジタル信号処理

### デジタル信号処理

- 計算機で信号を扱うための方法論
- 処理の流れ
  - アナログ信号をデジタル信号に変換 (A/D 変換)
  - 計算機上でデジタル信号を処理
  - デジタル信号をアナログ信号に変換 (D/A 変換)

### 計算機によるデータ処理

- アナログ信号は扱えない
  - 連続時間に対応していない
  - 連続値を正確に記録できない
- 信号の表現
  - 離散時間 (クロックがある)
  - 0-1 ベクトル (有限個の値)

### アナログとデジタル

- アナログ
  - 連続的な量 (時間, 振幅)
  - 雑音の影響を受けやすい
  - 物理的な保存や複製において劣化が生じる

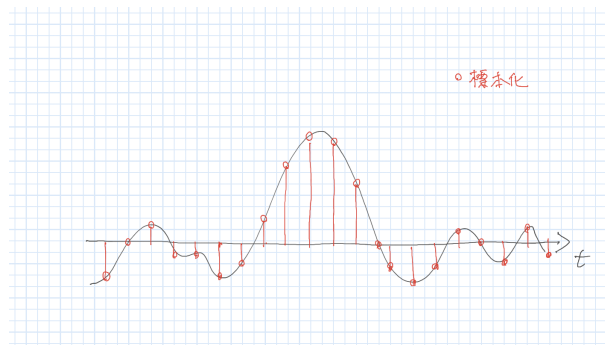
- デジタル
  - 離散的な量 (時間, 振幅)
  - 標本化と量子化による近似
  - 電子的に保存や複製が劣化なく行える

## 標本化と量子化

- デジタル信号に変換するための離散化 (discretization)
  - 標本化 (sampling): 時間の離散化
  - 量子化 (quantization): 数値の離散化
- 量子化は計算機で扱う数値の丸め誤差の問題  
(この講義では扱わない)

## 標本化における疑問

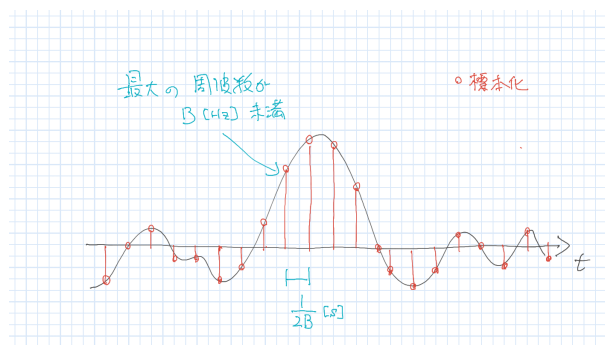
- 標本化: 明らかに情報は落ちている
  - 離散データから連続データを再構成することはできるのか?
  - 再構成することができるのであれば, その条件は何か?



## 標本化定理

### 標本化定理

- 定理  
信号  $f(t)$  が  $B$  [Hz] 未満の周波数しか含んでいないなら,  $1/2B$  [s] ごとのサンプル点を用いて元の信号は完全に求められる。



- 定理の呼び名は色々ある (同時期に独立に発見)
  - Shannon の標本化定理
  - Nyquist-Shannon の標本化定理

- Nyquist-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
- Whittaker-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
- Whittaker-Nyquist-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
- 染谷の標本化定理

- 用語

- 1 秒間を取るサンプル数  $f_s$  [Hz]:  
**サンプリング周波数** (sampling frequency)
- 再構成に必要なサンプリング周波数の下限  $2B$  [Hz]:  
**Nyquist レート** (Nyquist rate)
- 信号に含まれる周波数の上限  $B$  [Hz]:  
**Nyquist 周波数** (Nyquist frequency)

## 演習

### 練習問題

- 以下の積分

$$\frac{1}{2\pi \cdot 2B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i(t+\frac{n}{2B})\omega} d\omega$$

を計算しなさい.

### 解答例

- 定義に従って計算する

$$\frac{1}{2\pi \cdot 2B} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i(t+\frac{n}{2B})\omega} d\omega = \frac{\sin 2\pi B (t + \frac{n}{2B})}{2\pi B (t + \frac{n}{2B})}$$

- 矩形波の Fourier 変換で出てきた sinc 関数

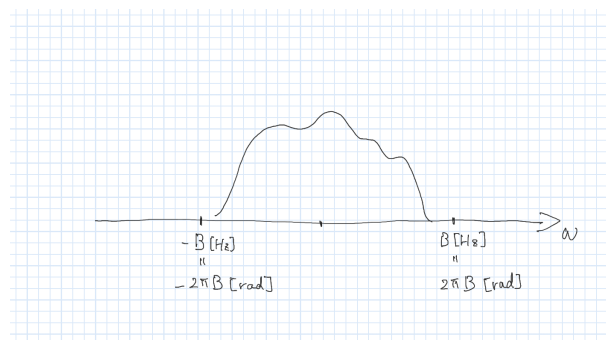
## 定理の証明と注意

### 標本化定理の証明

- step 1

定理の仮定より  $f(t)$  の Fourier 変換を  $\hat{f}(\omega)$  の台 (0 でない  $\omega$  の領域) は  $(-2\pi B, 2\pi B)$  である.

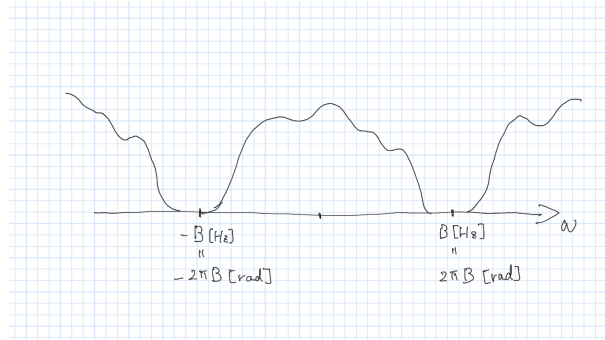
$$(B \text{ [Hz]} = 2\pi B \text{ [rad]})$$



- step 2

$\tilde{f}$  を  $2\pi \cdot 2B$  ごとに繰り返したものを  $\tilde{f}$  とする.

これは周期  $2\pi \cdot 2B$  を持つ周期関数なので Fourier 級数展開が存在する.



- step 3

周期  $2\pi$  の Fourier 級数展開の基底を

$$\phi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\omega}$$

とすると, 周期  $2\pi \cdot 2B$  の基底は

$$\psi_n(\omega) = \phi_n\left(\frac{\omega}{2B}\right) \frac{1}{\sqrt{2B}}$$

となる.

- step 4

$\tilde{f}$  の Fourier 級数展開は

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \tilde{f}, \psi_n \rangle \psi_n(\omega)$$

で与えられる.

- step 5

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2B})\omega} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \tilde{f}(\xi) e^{-i(\frac{n}{2B})\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2B})\omega} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{f}(\xi) e^{-i(\frac{n}{2B})\xi} d\xi \end{aligned}$$

- 1 周期分の積分範囲に注意して  $\tilde{f}$  をもとの  $\hat{f}$  で置き換える

- step 6

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2B})\omega} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{f}(\xi) e^{-i(\frac{n}{2B})\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2B})\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i(\frac{n}{2B})\xi} d\xi \end{aligned}$$

-  $\hat{f}$  は区間  $(-2\pi B, 2\pi B)$  の外では 0

- step 7

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2B})\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i(\frac{n}{2B})\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2B})\omega} f\left(-\frac{n}{2B}\right)\end{aligned}$$

–  $x = -n/2B$  における  $\hat{f}$  の Fourier 逆変換

$$f\left(-\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i(-\frac{n}{2B})\xi} d\xi$$

- step 8

$$\hat{h}_B(\omega) = \Xi_{(-2\pi B, 2\pi B)}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi B \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_B(\omega) \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega\end{aligned}$$

–  $\hat{h}_B$  は  $\tilde{f}$  から  $\hat{f}$  を取り出す周波数フィルタ

- step 9

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_B(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2B})\omega} f\left(-\frac{n}{2B}\right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2B}\right) \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i(t+\frac{n}{2B})\omega} d\omega\end{aligned}$$

–  $\hat{h}_B$  の定義に従って積分領域を書き換える

- step 10

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2B}\right) \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i(t+\frac{n}{2B})\omega} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi B(t + \frac{n}{2B})}{2\pi B(t + \frac{n}{2B})} f\left(-\frac{n}{2B}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi B(t - \frac{n}{2B})}{2\pi B(t - \frac{n}{2B})} f\left(\frac{n}{2B}\right)\end{aligned}$$

- step 11

以上から,  $f(t)$  は  $1/2B$  ごとのサンプル点  $f(n/2B)$  を用いて完全に再構成できる.

## 定理に関する注意

- 直感的な意味

正弦波は山と谷の値が与えられれば補間できるので、一番高い周波数でも 1 周期の間に 2 点の標本があれば良い。

- Nyquist 周波数での挙動

周波数  $B$  で  $\theta$  の値によって位相と振幅が異なる次の波形を考える。

$$f(t) = \frac{\cos(2\pi Bt + \theta)}{\cos \theta} = \cos(2\pi Bt) - \sin(2\pi Bt) \tan \theta$$

標本点を  $n/2B$  とすると

$$f\left(\frac{n}{2B}\right) = (-1)^n - 0 \cdot \tan \theta = (-1)^n$$

$\theta$  によらないため、サンプリングレート  $2B$  の標本点からは  $\theta$  の値を推定することはできない。

## エイリアシング

- 定理の前提

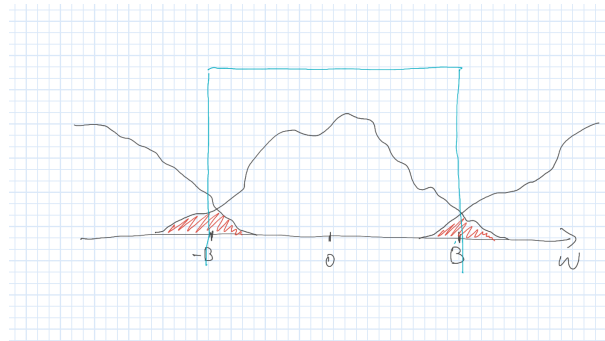
信号の Fourier 変換が  $(-2\pi B, 2\pi B)$  以外で 0 である。

- 成立しない場合に生じる雑音

- エイリアシング (aliasing)
- 折り返し雑音 (folding noise)

- 雑音の原因

$4\pi B$  周期の関数  $\tilde{f}$  を構成する際に重なりが生じ、 $(-2\pi B, 2\pi B)$  領域を切り出しても元に戻すことができない。



## 今回のまとめ

- デジタル信号処理
  - アナログとデジタル
  - 標本化と量子化
- 標本化定理
  - Nyquist 周波数
  - サンプリング周波数
  - エイリアシング