

# 推定

## 確率分布を推定する

村田 昇

2020.06.19

## 推定とは

### 統計解析の目的

- 観測データを確率変数の実現値と考えてモデル化
- 観測データの背後の確率分布を **推定**
  - 分布のもつ特性量 (平均や分散など) を評価する
  - 分布そのもの (確率関数や確率密度) を決定する
- 統計学で広く利用されている推定方法を説明
  - 点推定
  - 区間推定

### 推定の標準的な枠組

- 観測データは独立同分布な確率変数列  $X_1, X_2, \dots, X_n$
- $X_i$  の従う共通の法則  $\mathcal{L}$  を想定
  - $\mathcal{L}$  として全ての分布を考察対象とすることは困難
    - \* 対象とする範囲が広くなりすぎる
    - \* データ数  $n$  が大きくなると意味のある結論を導き出せない
  - 確率分布  $\mathcal{L}$  を特徴づけるパラメタ  $\theta$  を考察対象
    - \*  $\mathcal{L}$  の平均・分散・歪度・尖度など
    - \*  $\mathcal{L}$  の確率関数・確率密度関数のパラメタ

## 点推定

### 点推定

- 定義

点推定とは  $\mathcal{L}$  に含まれるパラメタ  $\theta$  を  $X_1, \dots, X_n$  の関数

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$$

で推定することで,  $\hat{\theta}$  を  $\theta$  の **推定量** と呼ぶ.

- 記述統計量は分布のパラメタの 1 つ

例:  $\mathcal{L}$  の平均  $\mu$  を標本平均  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  によって推定することが点推定であり,  $\bar{X}$  は  $\mu$  の推定量となる.

## 良い推定量

- 一般に1つのパラメタの推定量は無数に存在
- 推定量の良さの代表的な基準: **不偏性・一致性**
  - $\hat{\theta}$  が  $\theta$  の不偏推定量:

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

- $\hat{\theta}$  が  $\theta$  の (強) 一致推定量:

$$\hat{\theta} \text{ が } \theta \text{ に収束する確率が } 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

例: 標本平均, 不偏分散はそれぞれ  $\mathcal{L}$  の平均, 分散の不偏かつ一致性をもつ推定量

## 良い不偏推定量

- 一般に不偏推定量も複数存在
  - 例:  $\mathcal{L}$  の平均  $\mu$  の不偏推定量:
    - 標本平均  $\bar{X}$
    - $X_1$
    - $X_1, \dots, X_n$  のメディアン ( $\mathcal{L}$  が  $x = \mu$  に関して対称な場合)
- 不偏推定量の良さを評価する基準が必要
- **一様最小分散不偏推定量:**
  - $\theta$  の任意の不偏推定量  $\hat{\theta}'$  に対して推定値のばらつき (分散) が最も小さいもの

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\hat{\theta}')$$

## Cramer-Rao の不等式

- 定理
  - $\mathcal{L}$  は1次元パラメタ  $\theta$  を含む連続分布とし, その確率密度関数  $f_{\theta}(x)$  は  $\theta$  に関して偏微分可能であるとする. このとき, 緩やかな仮定の下で,  $\theta$  の任意の不偏推定量  $\hat{\theta}$  に対して以下の不等式が成り立つ:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)}.$$

ただし

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_{\theta}(x) \right)^2 f_{\theta}(x) dx.$$

## 一様最小分散不偏推定量

- 用語の定義
  - 下界  $1/(nI(\theta))$ : **Cramer-Rao 下界**
  - $I(\theta)$ : **Fisher 情報量**
- 定理 (Cramer-Rao の不等式の系)
  - $\theta$  の不偏推定量  $\hat{\theta}$  で分散が Cramer-Rao 下界  $1/(nI(\theta))$  に一致するものが存在すれば, それは一様最小分散不偏推定量となる.

## 例: 正規分布モデルの標本平均

- $\mathcal{L}$  は平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の正規分布
  - 平均パラメタ  $\mu$  に関する Fisher 情報量:

$$I(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma^2}$$

- Cramer-Rao 下界:  $\sigma^2/n$
  - 標本平均  $\bar{X}$  の分散:  $\sigma^2/n$  (=Cramer-Rao 下界)
- $\bar{X}$  は  $\mu$  の一様最小分散不偏推定量

## 演習

### 練習問題

- $X$  を一様乱数に従う確率変数とし, 平均値の推定量として以下を考える. それぞれの推定量の分散を比較しなさい.
  - 標本平均 (mean)
  - 中央値 (median)
  - 最大値と最小値の平均  $((\max+\min)/2)$
- ヒント: 以下のような関数を作り, Monte-Carlo 実験を行えばよい

```
myMeanEst <- function(n, min, max){ # 観測データ数
  x <- runif(n, min=min, max=max) # 一様乱数を生成, 範囲は引数から
  return(c(xbar=mean(x), med=median(x), mid=(max(x)+min(x))/2))
} # 3つまとめて計算する関数
```

## 最尤法

### 離散分布の場合

- 観測値  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$  の同時確率
  - 確率関数:  $f_{\theta}(x)$
  - 確率関数のパラメタ:  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_p)$
  - 独立な確率変数の同時確率:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) &= \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = f_{\theta}(x_1) \cdot f_{\theta}(x_2) \cdots f_{\theta}(x_n) \end{aligned}$$

### 尤度関数

- 定義  
パラメタ  $\theta$  に対して観測データ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が得られる理論上の確率

$$L(\theta) := \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i)$$

を  $\theta$  の**尤度** と言い,  $\theta$  の関数  $L$  を **尤度関数** と呼ぶ.

- 観測データ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が現れるのにパラメタ  $\theta$  の値がどの程度尤もらしいかを測る尺度

## 最尤法

- 最尤法:

観測データに対して「最も尤もらしい」パラメタ値を  $\theta$  の推定量として採用する方法を最尤法という.

- 最尤推定量:

$\Theta$  を尤度関数の定義域として, 尤度関数を最大とする  $\hat{\theta}$

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$$

を  $\theta$  の **最尤推定量** という.

以下のように表現することもある.

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$$

## 最尤推定量の計算

- 対数尤度関数:

$$\ell(\theta) := \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(X_i).$$

- 対数関数は狭義増加
- $\ell(\theta)$  の最大化と  $L(\theta)$  の最大化は同義
- 扱い易い和の形なのでこちらを用いることが多い
- 大数の法則を用いて対数尤度関数の収束が議論できる

- 最尤推定量の性質

広い範囲の確率分布に対して最尤推定量は **一貫性** を持つ

## 連続分布の場合

- 確率密度関数  $f_{\theta}(x)$  を用いて尤度を定義
- 尤度関数:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = f_{\theta}(x_1) \cdot f_{\theta}(x_2) \cdots f_{\theta}(x_n)$$

- 対数尤度関数:

$$\ell(\theta) := \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(X_i)$$

## 例: Poisson 分布の最尤推定

- $\mathcal{L}$  をパラメタ  $\lambda > 0$  の Poisson 分布でモデル化
- 対数尤度関数 (未知パラメタ:  $\lambda$ )

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^n (X_i \log \lambda - \log X_i!) - n\lambda$$

- 少なくとも 1 つの  $i$  について  $X_i > 0$  を仮定する

- (Poisson 分布のつづき)

–  $\ell(\lambda)$  の微分:

$$\ell'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n X_i - n, \quad \ell''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n X_i < 0$$

– 方程式  $\ell'(\lambda) = 0$  の解が  $\ell(\lambda)$  を最大化

–  $\lambda$  の最尤推定量:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

### 例: 指数分布の最尤推定

- $\mathcal{L}$  をパラメタ  $\lambda > 0$  の指数分布でモデル化

– 対数尤度関数 (未知パラメタ:  $\lambda$ )

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^n \log \lambda e^{-\lambda X_i} = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n X_i$$

- (指数分布のつづき)

–  $\ell(\lambda)$  の微分:

$$\ell'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n X_i, \quad \ell''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

– 方程式  $\ell'(\lambda) = 0$  の解が  $\ell(\lambda)$  を最大化

–  $\lambda$  の最尤推定量:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}$$

### 例: ガンマ分布の最尤推定

- $\mathcal{L}$  をパラメタ  $\nu, \alpha > 0$  のガンマ分布でモデル化

– 対数尤度関数 (未知パラメタ:  $\nu, \alpha$ )

$$\begin{aligned} \ell(\nu, \alpha) &= \sum_{i=1}^n \log \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} X_i^{\nu-1} e^{-\alpha X_i} \\ &= n\nu \log \alpha - n \log \Gamma(\nu) + \sum_{i=1}^n \{(\nu-1) \log X_i - \alpha X_i\} \end{aligned}$$

–  $\ell(\nu, \alpha)$  を最大化する  $\nu, \alpha$  は解析的に求まらないので実際の計算では数値的に求める

- R での計算例 (ガンマ分布の最尤推定量の例)

```
library(stats4) # 関数 mle を利用するため
## 数値最適化のためには尤度関数を最初に評価する初期値が必要
mle.gamma <- function(x, # 観測データ
  nu0=1, alpha0=1){ # nu, alpha の初期値
  ## 負の対数尤度関数を定義 (最小化を考えるため)
  ll <- function(nu, alpha) # nu と alpha の関数として定義
    suppressWarnings(-sum(dgamma(x, nu, alpha, log=TRUE)))
  ## suppressWarnings は定義域外で評価された際の警告を表示させない
  ## 最尤推定 (負の尤度の最小化)
```

```

    est <- mle(minuslogl=ll, # 負の対数尤度関数
              start=list(nu=nu0, alpha=alpha0), # 初期値
              method="BFGS", # 最適化方法 (選択可能)
              nobs=length(x)) # 観測データ数
    return(coef(est)) # 推定値のみ返す
}

```

## 演習

### 練習問題

- 東京都の気候データ (tokyo\_weather.csv) の風速の項目について以下の問に答えよ.

```
myData <- read.csv("data/tokyo_weather.csv", fileEncoding="utf8")
```

- 全データを用いてヒストグラム (密度) を作成しなさい.
- ガンマ分布でモデル化して最尤推定を行いなさい.
- 推定した結果をヒストグラムに描き加えて比較しなさい.
- 自身で収集したデータを用いて, モデル化と最尤推定を試みよ.

## 区間推定

### 推定誤差

- 推定量  $\hat{\theta}$  には推定誤差が必ず存在
- 推定結果の定量評価には推定誤差の評価が重要
  - “誤差  $\hat{\theta} - \theta$  が区間  $[l, u]$  の内側にある確率が  $1-\alpha$  以上 ”  
 (“外側にある確率が  $\alpha$  以下” と言い換えてもよい)

$$P(l \leq \hat{\theta} - \theta \leq u) \geq 1-\alpha$$

- パラメタの範囲の推定に書き換え
  - “  $\theta$  が含まれる確率が  $1-\alpha$  以上となるような区間  $[\hat{\theta} - u, \hat{\theta} - l]$  を推定”

$$P(\hat{\theta} - u \leq \theta \leq \hat{\theta} - l) \geq 1-\alpha$$

### 区間推定

- 定義  
 区間推定とは未知パラメタ  $\theta$  とある値  $\alpha \in (0, 1)$  に対して以下を満たす確率変数  $L, U$  を観測データから求めることをいう.

$$P(L \leq \theta \leq U) \geq 1-\alpha$$

- 区間  $[L, U]$  :  $1-\alpha$  **信頼区間** ( $100(1-\alpha)$  % と書くことも多い)
- $L$  :  $1-\alpha$  **下側信頼限界**
- $U$  :  $1-\alpha$  **上側信頼限界**
- $1-\alpha$  : **信頼係数** ( $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$  とすることが多い)

## 信頼区間の性質

- 信頼区間は幅が狭いほど推定精度が良い
  - 真のパラメタが取りうる値の範囲を限定することになるため
- 最も推定精度の良い  $1-\alpha$  信頼区間  $[L, U]$

$$P(L \leq \theta \leq U) = 1-\alpha$$

- 信頼区間の幅が狭いほど  $P(L \leq \theta \leq U)$  は小さくなるため
- 実行可能である限り  $1-\alpha$  信頼区間  $[L, U]$  は上式を満たすように  $L, U$  を決定する

## 正規母集団の区間推定

### 平均の区間推定 (分散既知)

- 正規分布に従う独立な確率変数の重み付き和は正規分布に従う
- 一般の場合  
 $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  を独立な確率変数列とし、各  $i = 1, 2, \dots, k$  に対して  $Z_i$  は平均  $\mu_i$ 、分散  $\sigma_i^2$  の正規分布に従うとする。このとき  $a_0, a_1, \dots, a_k$  を  $(k+1)$  個の 0 でない実数とすると、 $a_0 + \sum_{i=1}^k a_i Z_i$  は平均  $a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \mu_i$ 、分散  $\sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_i^2$  の正規分布に従う。

- 同分布の場合

$$k = n, \mu_i = \mu, \sigma_i^2 = \sigma^2, a_0 = 0, a_i = 1/n \ (i = 1, \dots, n)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{標本平均})$$

は平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2/n$  の正規分布に従う。

- 同分布を標準化した場合

$$k = 1, \mu_1 = \mu, \sigma_1^2 = \sigma^2/n, a_0 = -\sqrt{n}\mu/\sigma, a_1 = \sqrt{n}/\sigma$$

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$$

は標準正規分布に従う。

- 標準化した確率変数の確率

$z_{1-\alpha/2}$  を標準正規分布の  $1-\alpha/2$  分位点とすれば

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

- 信頼区間の構成

$\mu$  について解くと

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

となるので、 $\sigma$  が既知の場合の平均  $\mu$  の  $1-\alpha$  **信頼区間** は以下で構成される。

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

## 平均の区間推定 (分散未知)

- $\chi^2$  分布の特徴付け
  - 標準正規分布に従う  $k$  個の独立な確率変数の二乗和は自由度  $k$  の  $\chi^2$  分布に従う
- $t$  分布の特徴付け
  - $Z$  を標準正規分布に従う確率変数,  $Y$  を自由度  $k$  の  $\chi^2$  分布に従う確率変数とし,  $Z, Y$  は独立であるとする. このとき確率変数

$$\frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

は自由度  $k$  の  $t$  分布に従う

- 標本平均と不偏分散の性質

$X_1, X_2, \dots, X_n$  は独立同分布な確率変数列で, 平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の正規分布に従うとする. 不偏分散を

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

とすると,  $\bar{X}$  と  $s^2$  は独立であり, 確率変数  $(n-1)s^2/\sigma^2$  は自由度  $n-1$  の  $\chi^2$  分布に従う.

- 標準化した確率変数の性質

前の命題と  $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$  が標準正規分布に従うことから, 確率変数

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{(n-1)s^2/\sigma^2/(n-1)}}$$

は自由度  $n-1$  の  $t$  分布に従う.

- 信頼区間の構成

$t_{1-\alpha/2}(n-1)$  を自由度  $n-1$  の  $t$  分布の  $1-\alpha/2$  分位点とすれば

$$P\left(-t_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s} \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

となるので, 分散が未知の場合の平均  $\mu$  の  $1-\alpha$  **信頼区間** は以下で構成される.

$$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

## 分散の区間推定

- 不偏分散の性質

$(n-1)s^2/\sigma^2$  は自由度  $n-1$  の  $\chi^2$  分布に従う

- 不偏分散の確率

$\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ ,  $\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$  をそれぞれ自由度  $n-1$  の  $\chi^2$  分布の  $\alpha/2, 1-\alpha/2$  分位点とすれば

$$P\left(\chi_{\alpha/2}^2(n-1) \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\right) = 1-\alpha$$

- 信頼区間の構成



$\sigma^2$  について解くと

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

となるので,  $\sigma^2$  の  $1-\alpha$  **信頼区間** は以下で構成される.

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \right]$$

## 漸近正規性にもとづく区間推定

### 推定量の漸近正規性

- 漸近正規性

多くの推定量  $\hat{\theta}$  の分布は正規分布で近似できる

- モーメントに基づく記述統計量は漸近正規性をもつ
- 最尤推定量は広い範囲の確率分布に対して漸近正規性をもつ
- いずれも中心極限定理にもとづく

- 正規分布を用いて近似的に信頼区間を構成することができる

### 標本平均の漸近正規性

- 定理

確率分布  $\mathcal{L}$  が2次のモーメントを持てば,  $\mathcal{L}$  の平均  $\mu$  の推定量である標本平均は漸近正規性をもつ.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$\mathcal{L}$  の標準偏差を  $\sigma$  とすれば, 任意の  $a \leq b$  に対して以下が成立する. ( $\phi$  は標準正規分布の確率密度関数)

$$P\left(a \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq b\right) \rightarrow \int_a^b \phi(x) dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

### 平均の区間推定 (分散既知)

- 標本平均の確率

$z_{1-\alpha/2}$  を標準正規分布の  $1-\alpha/2$  分位点とすれば

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \rightarrow 1-\alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

となるので,  $\mu$  について解くと以下が成り立つ.

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 1-\alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

- 信頼区間の構成

$\sigma$  が既知の場合の平均  $\mu$  の  $1-\alpha$  **信頼区間** は以下で構成される.

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

(サンプル数  $n$  が十分大きい場合に近似的に正しい)

## 平均の区間推定 (分散未知)

- $\sigma$  をその一致推定量  $\hat{\sigma}$  で置き換えてもそのまま成立する
  - $\hat{\sigma}$  としては例えば不偏分散の平方根を用いる

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

- 実問題で平均はわからないが、分散はわかるという場合はあまりない
- $t$ -分布は自由度  $n \rightarrow \infty$  で標準正規分布になる
- 信頼区間の構成

$\sigma$  が未知の場合の平均  $\mu$  の  $1-\alpha$  **信頼区間** は以下で構成される.

$$\left[ \bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

(サンプル数  $n$  が十分大きい場合に近似的に正しい)

## 最尤推定量の区間推定

- 定理 (最尤推定量の漸近正規性)  
 $\mathcal{L}$  が 1 次元パラメタ  $\theta$  を含む連続分布とすると、最尤推定量  $\hat{\theta}$  は平均  $\theta$  (真の値), 分散  $1/(nI(\hat{\theta}))$  の正規分布で近似できる.
- 信頼区間の構成

$\theta$  の  $1-\alpha$  **信頼区間** は以下で構成される.

$$\left[ \hat{\theta} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}}, \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}} \right]$$

(サンプル数  $n$  が十分大きい場合に近似的に正しい)

## 演習

### 練習問題

- 東京都の気候データ (tokyo\_weather.csv) の日射量の項目について以下の問に答えよ.
  - 全データによる平均値を計算しなさい.
  - ランダムに抽出した 50 点を用いて、平均値の 0.9(90%) 信頼区間を求めなさい.
  - 上記の推定を 100 回繰り返した際、真の値 (全データによる平均値) が信頼区間に何回含まれるか確認しなさい.
- 自身で収集したデータで区間推定を試みよ.