

# 回帰分析

変数間の関係を推測する

村田 昇

## 講義の内容

- 回帰分析
- 回帰係数の推定
  - 点推定
  - 区間推定
- 回帰係数の検定
  - 係数の有意性
- 決定係数

## 回帰分析

### 回帰分析

- データのある変量をその他の変量を用いて説明・予測するモデル (**回帰モデル**) を構築するための分析法
- 変数の分類
  - 説明される側: **目的変数** (または被説明, 従属, 応答変数など)
  - 説明する側: **説明変数** (または独立変数, 共変量など)
- 目的変数・説明変数ともに複数個あってもよい
  - 目的変数は通常は 1 つ (複数の場合は個別に回帰モデルを構築)
  - 説明変数は, 1 つの場合を **単回帰**, 2 つ以上の場合を **重回帰**
  - この講義では単回帰のみ扱う

### 回帰モデル

- $X$ : 説明変数
- $Y$ : 目的変数
- $Y$  を  $X$  で説明する関係式として一次関数を考える:

$$Y = \alpha + \beta X \quad (\text{線形回帰モデル})$$

- $\alpha$ : **定数項**
- $\beta$ :  $X$  の **回帰係数**
- **注意:** 非線形な関係への対応
  - 適切な変数変換 (二乗, 対数など) を施して線形な関係に変換
  - 弱い非線形性を線形で近似

## 回帰係数の点推定

### 回帰係数の点推定

- $n$  個の説明変数と目的変数の組  $(X, Y)$  を観測

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$$

- 回帰モデル: データには観測誤差が含まれる

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

–  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ : 誤差項 または 攪乱項

- 線形回帰モデルのパラメータ  $\alpha, \beta$  を推定

### 分析における仮定

- 説明変数  $X_1, \dots, X_n$  は確率変数ではなく **確定値**
- 説明変数は一定値ではない ( $X_1 = \dots = X_n$  ではない)
- 誤差項  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  は独立同分布な確率変数列
- 誤差項は 平均 0, 分散  $\sigma^2$

### 最小二乗法

- 係数  $\alpha, \beta$  の回帰式で説明できない目的変数の変動:

$$e_i(\alpha, \beta) = Y_i - (\alpha + \beta X_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

- 方針

回帰モデルの当てはまりがよい

$\Leftrightarrow e_1(\alpha, \beta), \dots, e_n(\alpha, \beta)$  の絶対値が小さい

- 評価基準

$e_1(\alpha, \beta), \dots, e_n(\alpha, \beta)$  の平方和 (**残差平方和**) を最小にするように  $\alpha, \beta$  を決定

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n e_i(\alpha, \beta)^2 = \sum_{i=1}^n \{Y_i - (\alpha + \beta X_i)\}^2$$

- $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ : **最小二乗推定量**

$S(\alpha, \beta)$  を最小にするパラメータの組  $(\alpha, \beta)$

- 最小二乗推定量

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

ただし

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

### R: 回帰分析の関数

- 線形モデルを当てはめる関数 `lm()`

```
lm(formula, data, subset, na.action, ...)
## formula: 式. (目的変数 ~ 説明変数)
## data: データフレーム
## subset: 対象とする部分データ
## na.action: 欠損値の扱い
## ...: 他のオプション. 詳細は help(lm) を参照
```

## 演習

### 練習問題

- 東京の気象データを用いて、必要であれば適当な期間を抽出し、日射量から気温を説明する回帰モデルを構成しなさい。

## 回帰係数の区間推定

### 誤差項に関する仮定

- $\epsilon_i$  は正規分布に従う
- 上の仮定より  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  は **正規分布** に従う
- 点推定の平均と分散

$$\mathbb{E}[\hat{\alpha}] = \alpha,$$

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta,$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

- $\sigma^2$  が **既知なら** 正規分布を用いて信頼区間を構成

### 誤差分散の推定

- 一般に  $\sigma^2$  は **既知でない** ためデータから推定
  - $\epsilon_i$  の平均は 0
  - $\sigma^2$  は  $\epsilon_i$  の共通の分散
- 誤差と回帰式の関係:

$$\epsilon_i = Y_i - (\alpha + \beta X_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

- $\sigma^2$  の自然な推定量 (良いとは限らない):

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2 \quad \text{ただし} \quad \hat{\epsilon}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i), \quad (i = 1, \dots, n)$$

- 残差**  $\hat{\epsilon}_1, \dots, \hat{\epsilon}_n$  の性質 (資料; 正規方程式):

$$\sum \hat{\epsilon}_i = 0, \quad \sum \hat{\epsilon}_i X_i = 0.$$

- 残差の二乗平均の性質 (標本分散と同様の計算):

$$\mathbb{E}[\hat{\epsilon}_i^2] = \sigma^2(n-2)/n \quad (i = 1, \dots, n)$$

- $\sigma^2$  の不偏推定量:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2.$$

## 回帰係数の性質

- $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  の分散の推定量 (資料; Gauss-Markov の定理):

$$\text{s.e.}(\hat{\alpha})^2 = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum_i X_i^2}{n \sum_i (X_i - \bar{X})^2}, \quad \text{s.e.}(\hat{\beta})^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}$$

–  $\text{s.e.}(\hat{\alpha}), \text{s.e.}(\hat{\beta})$  は **標準誤差** と呼ばれる

- 以下は  $\hat{\beta}$  と独立で自由度  $n-2$  の  $\chi^2$  分布に従う:

$$\frac{(n-2)\text{s.e.}(\hat{\beta})^2}{\text{Var}(\hat{\beta})}$$

## 回帰係数の区間推定

- 以下の確率変数は自由度  $n-2$  の  $t$  分布に従う:

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\text{s.e.}(\hat{\beta})} = \frac{(\hat{\beta} - \beta)/\sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})}}{\sqrt{(n-2)\text{s.e.}(\hat{\beta})^2/(n-2)\text{Var}(\hat{\beta})}}$$

- $\gamma \in (0, 1)$  に対する  $\beta$  の  $1 - \gamma$  信頼区間:

$$\left[ \hat{\beta} - t_{1-\gamma/2}(n-2) \cdot \text{s.e.}(\hat{\beta}), \hat{\beta} + t_{1-\gamma/2}(n-2) \cdot \text{s.e.}(\hat{\beta}) \right]$$

## R: 区間推定の関数

- 係数の信頼区間を求める関数 `confint()`

```
confint(object, parm, level = 0.95, ...)
## object: 関数 lm で推定したモデル
## parm: 区間推定をするパラメタ. 指定しなければ全て
## level: 信頼係数
## ...: 他のオプション. 詳細は help(confint) を参照
```

- 予測値の信頼区間を求める関数 `predict()`

```
predict(object, newdata, interval="confidence", level=0.95,...)
## object: 関数 lm で推定したモデル
## newdata: 予測値を計算する説明変数
## interval: 信頼区間 "confidence" (既定値は "none")
## level: 信頼係数 (既定値は 0.95)
## ...: 他のオプション. 詳細は help(predict.lm) を参照
```

## 演習

### 練習問題

- 前問で作成した回帰モデルについて区間推定を行いなさい。

## 回帰係数の有意性検定

### 回帰係数の有意性

- 説明変数  $X$  が目的変数  $Y$  を説明・予測するのに本当に役立っているかを検証:

$$H_0: \beta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \beta \neq 0$$

- $\beta$  の 有意性の検定

帰無仮説  $H_0$  が有意水準  $\gamma$  で棄却される時、 $\beta$  は有意水準  $\gamma$  で **有意である**

### 回帰係数の有意性検定

- 帰無仮説  $H_0$  が正しいければ以下の統計量は自由度  $n-2$  の  $t$  分布に従う

$$t = \frac{\hat{\beta}}{\text{s.e.}(\hat{\beta})}$$

- 対立仮説  $H_1$  が正しいければ、 $\hat{\beta}$  は 0 でない値  $\beta$  に近い値を取ることが期待されるため、 $|t|$  は 0 から離れた値を取る
- 棄却域による検定:

有意水準を  $\gamma \in (0, 1)$  とし、 $\hat{\beta}$  の  **$t$ -値** が以下の場合には帰無仮説を棄却

$$|t| > t_{1-\gamma/2}(n-2)$$

- $p$  値による検定:

以下で定義される  $\hat{\beta}$  の  **$p$ -値** が  $\gamma$  未満の場合に帰無仮説を棄却

$$(p\text{-値}) = 2 \int_{|t|}^{\infty} f(x) dx$$

## R: 係数の検定のための関数

- 推定されたモデルの情報を引き出す関数 `summary()`

```
summary(object)
## object: 関数 lm で推定したモデル
```

- 出力 (リスト名 `$` “名前” で参照可能)
  - `coefficients`: 係数と  $t$  値
  - `fstatistics`:  $F$  値 (モデルの評価)

## 演習

### 練習問題

- 前問で作成した回帰モデルについて係数の検定を行いなさい。

## 決定係数

### 決定係数

- $X$  が  $Y$  の変動をどの程度説明できるかを数量化
- 決定係数 (あるいは 寄与率):

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$\hat{Y}_i$  は **あてはめ値** または **予測値** と呼ばれる

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

- 以下の等式が成立:

$$\hat{e}_i = Y_i - \hat{Y}_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{e}_i = 0,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \bar{Y},$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i = \bar{Y}.$$

- 決定係数:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

- $R^2$  の意味
  - $R^2$  の分子: あてはめ値の (標本平均まわりでの) 変動
  - $R^2$  の分母: 目的変数の (標本平均まわりでの) 変動
- 回帰式が目的変数の変動をどの位説明できるか評価
- 大きいほど説明力が高いと解釈される

### 決定係数の別表現

- $R^2$  は以下のように書き直すことも可能:
  - 目的変数の観測データとあてはめ値の相関の二乗:

$$R^2 = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \right\}^2$$

- 説明変数と目的変数の観測データの間の相関の二乗:

$$R^2 = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \right\}^2$$

## 自由度調整済み決定係数

- 不偏分散による  $R^2$  の修正:
  - 残差  $\epsilon_i$  と目的変数  $Y_i$  の標本分散による表現:

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}.$$

- 不偏推定量で代替: **自由度調整済み決定係数** (または寄与率)

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}.$$

## R: 決定係数のための関数

- 推定されたモデルの情報を引き出す関数 `summary()`

```
summary(object)  
## object: 関数 lm で推定したモデル
```

- 出力 (リスト名 `$“名前”` で参照可能)
  - `r.squareds`: 決定係数
  - `adj.r.squareds`: 自由度調整済み決定係数

## 演習

### 練習問題

- 前問で作成した回帰モデルについて決定係数を確認しなさい.
- 説明変数として降水量を用いた回帰モデルについて検討しなさい.