回帰分析

予測と発展的なモデル

村田 昇

講義概要

- 第 1 回: 回帰モデルの考え方と推定
- 第 2 回: モデルの評価
- **第 3 回: モデルによる予測と発展的なモデル**

回帰分析の復習

線形回帰モデル

- **目的変数** を **説明変数** で説明する関係式を構成
  - 説明変数: $x_1, \dots, x_p$ (p 次元)
  - 目的変数: y (1 次元)
- **回帰係数** $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ を用いた一次式

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p$$

- **誤差項** を含む確率モデルで観測データを表現

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

問題設定

- 確率モデル

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \text{確率分布}$$

- 式の評価 : **残差平方和** の最小化による推定

$$S(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^\top (\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})$$

解とその一意性

- 解の条件 : **正規方程式**

$$X^\top X \boldsymbol{\beta} = X^\top \boldsymbol{y}$$

- 解の一意性 : **Gram 行列** $X^\top X$ が正則

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^\top X)^{-1} X^\top \boldsymbol{y}$$

解析の事例

東京の 8 月の気候の分析

- データの一部

表 1: 東京の 8 月の気候

日付	気温	降雨	日射	降雪	風向	風速	気圧	湿度	雲量
2022-08-01	30.6	0	24.53	0	SSE	2.8	1010.1	72	8.8
2022-08-02	31.6	0	24.78	0	SSE	2.5	1008.8	71	9.8
2022-08-03	31.5	0	21.24	0	SSE	2.3	1005.1	75	7.3
2022-08-04	24.6	18	3.46	0	NE	2.7	1006	89	10
2022-08-05	23.8	0	7.65	0	NE	2.9	1006.1	83	9.8
2022-08-06	25.2	0	17.06	0	SSE	2.4	1008.1	73	10
2022-08-07	27.6	0	14.45	0	SSE	2.2	1009.3	80	8.3
2022-08-08	29.8	0	22.52	0	S	4.5	1008.5	75	4.8
2022-08-09	30.9	0	25.5	0	S	5.5	1006.9	69	6.8
2022-08-10	30.5	0	25.99	0	S	5.3	1007.2	70	6
2022-08-11	29.5	0	22.9	0	S	5.4	1007.5	75	6
2022-08-12	28.3	2	15.36	0	S	5.8	1007.5	81	9.8
2022-08-13	25.5	47.5	4.53	0	S	4.8	1005.6	94	10
2022-08-14	28.2	0	16.28	0	SSE	2.6	1003	84	8.8
2022-08-15	29.4	0	18.65	0	S	2.5	1003.4	78	8.8
2022-08-16	31	0	20.5	0	SSW	4.8	1000.6	70	8.3
2022-08-17	27.3	5	8.87	0	NE	2.5	1005.8	77	10
2022-08-18	26.8	13	8.74	0	S	2.8	1001.7	81	6
2022-08-19	27.5	0	23.52	0	SSE	3.4	1001.7	62	3
2022-08-20	26.4	1.5	13.5	0	NW	1.8	1000.6	82	9.8
2022-08-21	26	1	8.96	0	NE	2.1	1002.3	87	10
2022-08-22	26.2	0	9.05	0	NNE	2.5	1005.5	82	10
2022-08-23	28.7	0	17.94	0	S	3.2	1003.2	83	8.3
2022-08-24	27.8	2	12.86	0	NE	2.9	1003.2	79	10
2022-08-25	25.7	0	9.83	0	SE	2	1004.1	77	10
2022-08-26	27	3.5	10.05	0	SSE	2.1	1002.5	89	10
2022-08-27	29	0	19.87	0	SSE	3.3	1002.7	80	5.5
2022-08-28	23.7	5	4.58	0	NE	3	1009.2	87	9.8
2022-08-29	23.3	0.5	15.45	0	NE	2.8	1016.1	69	8
2022-08-30	22.8	5	10.12	0	NNE	1.9	1012.5	88	10
2022-08-31	27.1	1	17.46	0	S	3.2	1007.6	85	8.8

- 気温を説明する 5 種類の線形回帰モデルを検討
  - モデル 1 : 気温 = F(気圧)
  - モデル 2 : 気温 = F(日射)
  - モデル 3 : 気温 = F(気圧, 日射)
  - モデル 4 : 気温 = F(気圧, 日射, 湿度)
  - モデル 5 : 気温 = F(気圧, 日射, 雲量)

分析の視覚化

- 関連するデータの散布図

- 観測値とあてはめ値の比較

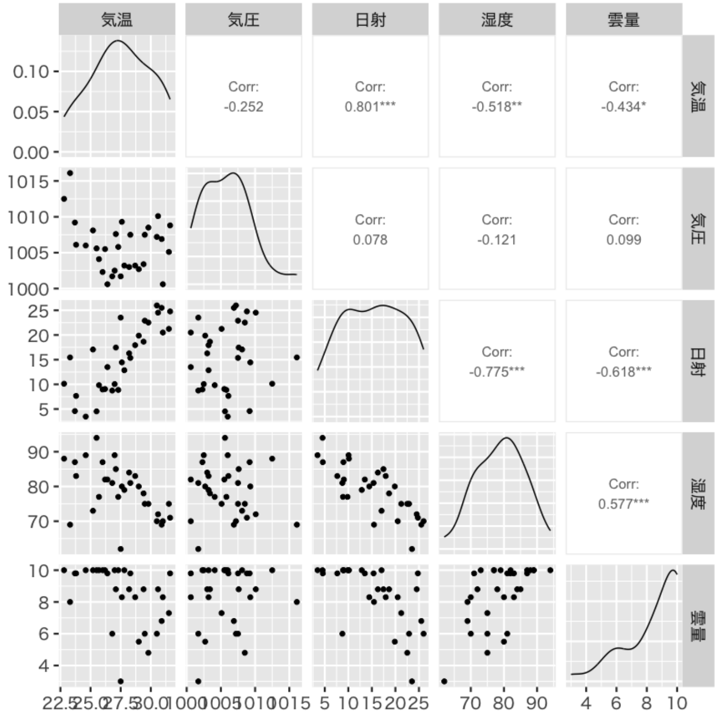

図 1: 散布図

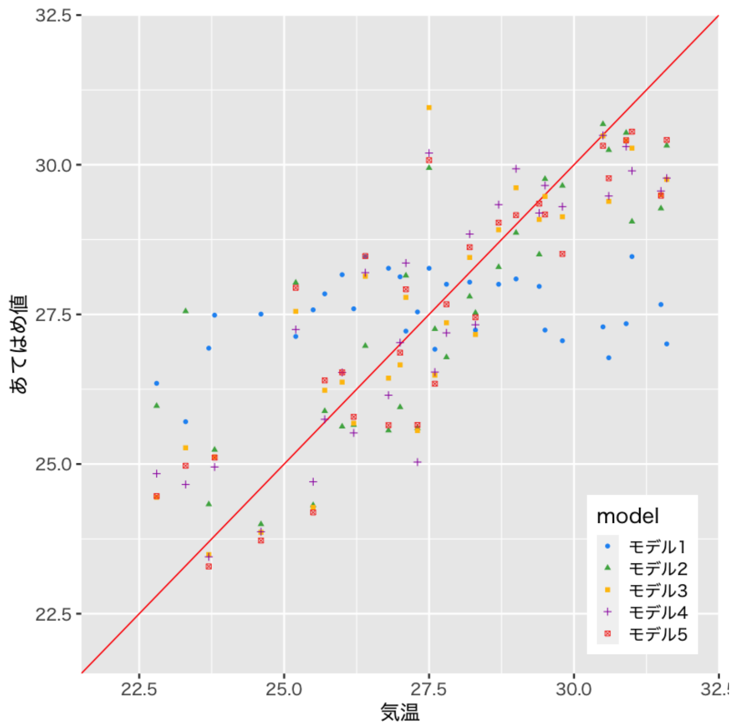

図 2: モデルの比較

寄与率

- **決定係数** (R-squared)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

- **自由度調整済み決定係数** (adjusted R-squared)

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^2}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

  – 不偏分散で補正

モデルの評価

- 決定係数 (R^2, Adjusted R^2)

表 2: 寄与率によるモデルの比較

	目的変数				
	気温				
	モデル 1	モデル 2	モデル 3	モデル 4	モデル 5
気圧	−0.178 (0.127)		−0.223*** (0.068)	−0.214*** (0.067)	−0.242*** (0.068)
日射		0.297*** (0.041)	0.306*** (0.036)	0.366*** (0.056)	0.348*** (0.045)
湿度				0.071 (0.051)	
雲量					0.238 (0.161)
Constant	206.535 (127.430)	22.969*** (0.690)	247.477*** (68.433)	231.843*** (68.254)	263.717*** (67.941)
R^2	0.064	0.641	0.741	0.758	0.760
Adjusted R^2	0.031	0.628	0.722	0.731	0.733

F 統計量による検定

- 説明変数のうち 1 つでも役に立つか否かを検定する
  – 帰無仮説 H_0: $\beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$
  – 対立仮説 H_1: $\exists j \ \beta_j \neq 0$ (少なくとも 1 つは役に立つ)
- F 統計量: 決定係数 (または残差) を用いて計算

$$F = \frac{n-p-1}{p} \frac{R^2}{1 - R^2}$$

- p 値: 自由度 $p, n-p-1$ の F 分布で計算

モデルの評価

- F 統計量

表 3: F 統計量によるモデルの比較

	目的変数				
	気温				
	モデル 1	モデル 2	モデル 3	モデル 4	モデル 5
気圧	−0.178 (0.127)		-0.223^{***} (0.068)	-0.214^{***} (0.067)	-0.242^{***} (0.068)
日射		0.297^{***} (0.041)	0.306^{***} (0.036)	0.366^{***} (0.056)	0.348^{***} (0.045)
湿度				0.071 (0.051)	
雲量					0.238 (0.161)
Constant	206.535 (127.430)	22.969^{***} (0.690)	247.477^{***} (68.433)	231.843^{***} (68.254)	263.717^{***} (67.941)
R^2	0.064	0.641	0.741	0.758	0.760
Adjusted R^2	0.031	0.628	0.722	0.731	0.733
Residual Std. Error	2.463 (df = 29)	1.526 (df = 29)	1.320 (df = 28)	1.298 (df = 27)	1.293 (df = 27)
F Statistic	1.973 (df = 1; 29)	51.743^{***} (df = 1; 29)	39.964^{***} (df = 2; 28)	28.174^{***} (df = 3; 27)	28.484^{***} (df = 3; 27)

Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

t 統計量による検定

- 回帰係数 β_j が回帰式に寄与するか否かを検定する
  - 帰無仮説 H_0: $\beta_j = 0$
  - 対立仮説 H_1: $\beta_j \neq 0$ (β_j は役に立つ)
- t 統計量: 各係数ごと，ζ は $(X^\top X)^{-1}$ の対角成分

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}\zeta_j}$$

- p 値: 自由度 $n{-}p{-}1$ の t 分布を用いて計算

モデルの評価

- t 統計量

表 4: t 統計量によるモデルの比較

	目的変数				
	気温				
	モデル 1	モデル 2	モデル 3	モデル 4	モデル 5
気圧	−0.178 (0.127)		-0.223^{***} (0.068)	-0.214^{***} (0.067)	-0.242^{***} (0.068)
	t = −1.405		t = −3.281	t = −3.185	t = −3.566
	p = 0.171		p = 0.003	p = 0.004	p = 0.002
日射		0.297^{***} (0.041)	0.306^{***} (0.036)	0.366^{***} (0.056)	0.348^{***} (0.045)
		t = 7.193	t = 8.547	t = 6.582	t = 7.699
		p = 0.00000	p = 0.000	p = 0.00000	p = 0.00000
湿度				0.071 (0.051)	
				t = 1.390	
				p = 0.176	
雲量					0.238 (0.161)
					t = 1.474
					p = 0.152
Constant	206.535 (127.430)	22.969^{***} (0.690)	247.477^{***} (68.433)	231.843^{***} (68.254)	263.717^{***} (67.941)
	t = 1.621	t = 33.277	t = 3.616	t = 3.397	t = 3.882
	p = 0.116	p = 0.000	p = 0.002	p = 0.003	p = 0.001

診断プロットによる評価

- モデル 4

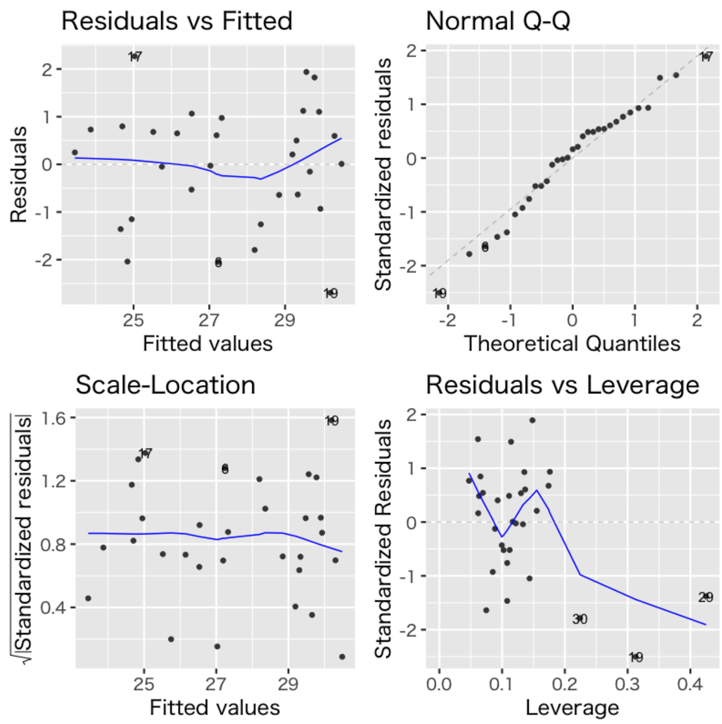

図 3: モデル 4 の診断

- モデル 5

回帰モデルによる予測

予測

- 新しいデータ (説明変数) $\boldsymbol{x}$ に対する **予測値**

$$\hat{y} = (1, \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}})\hat{\boldsymbol{\beta}}, \qquad \hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^{\mathsf{T}}X)^{-1}X^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}$$

- 予測値は元データの目的変数の重み付け線形和

$$\hat{y} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} = (1, \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}})(X^{\mathsf{T}}X)^{-1}X^{\mathsf{T}}$$

  - 重みは元データと新規データの説明変数で決定

予測値の性質

- 推定量は以下の性質をもつ多変量正規分布

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] &= \boldsymbol{\beta}\\ \mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \sigma^2(X^{\mathsf{T}}X)^{-1}\end{aligned}$$

- この性質を利用して以下の 3 つの値の違いを評価

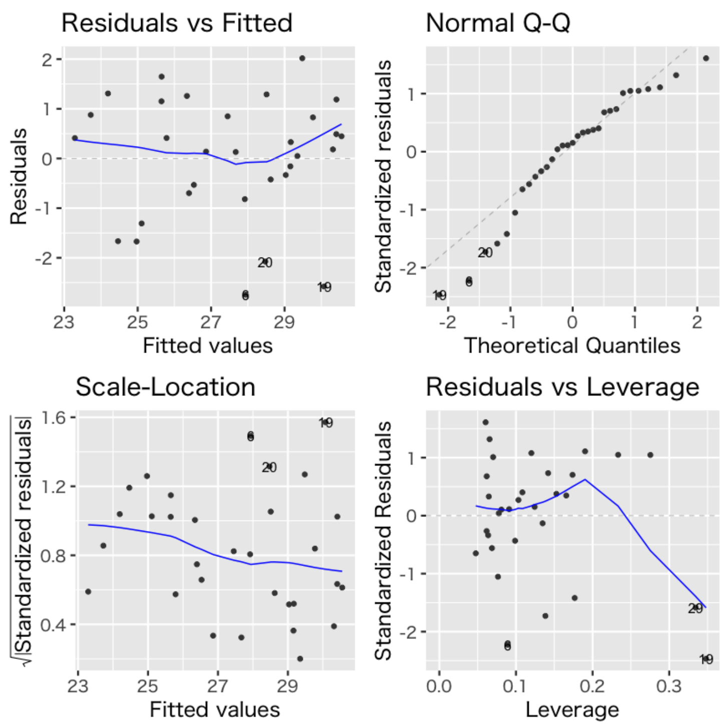

図 4: モデル 5 の診断

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &= (1, \boldsymbol{x}^\top)\hat{\boldsymbol{\beta}} && \text{(回帰式による予測値)} \\
\tilde{y} &= (1, \boldsymbol{x}^\top)\boldsymbol{\beta} && \text{(最適な予測値)} \\
y &= (1, \boldsymbol{x}^\top)\boldsymbol{\beta} + \epsilon && \text{(観測値)}
\end{aligned}
$$

- $\hat{y}$ と y は独立な正規分布に従うことに注意

信頼区間

最適な予測値との差

- 差の分布は以下の平均・分散をもつ正規分布に従う

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{y} - \hat{y}] &= (1, \boldsymbol{x}^\top)\boldsymbol{\beta} - (1, \boldsymbol{x}^\top)\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = 0 \\
\mathrm{Var}(\tilde{y} - \hat{y}) &= \underbrace{\sigma^2 (1, \boldsymbol{x}^\top)(X^\top X)^{-1}(1, \boldsymbol{x}^\top)^\top}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}\ \text{の推定誤差による分散}} = \sigma^2 \gamma_c(\boldsymbol{x})^2
\end{aligned}
$$

- 正規化による表現

$$
\frac{\tilde{y} - \hat{y}}{\sigma \gamma_c(\boldsymbol{x})} \sim \mathcal{N}(0, 1)
$$

信頼区間

- 未知の分散を不偏分散で推定

$$
Z = \frac{\tilde{y}-\hat{y}}{\hat{\sigma}\gamma_c(\boldsymbol{x})} \sim \mathcal{T}(n-p-1) \quad (t \text{ 分布})
$$

- 確率 α の信頼区間

$$
\mathcal{I}^c_\alpha = (\hat{y} - C_\alpha\hat{\sigma}\gamma_c(\boldsymbol{x}),\ \hat{y} + C_\alpha\hat{\sigma}\gamma_c(\boldsymbol{x}))
$$

$$
P(|Z| < C_\alpha | Z \sim \mathcal{T}(n-p-1)) = \alpha
$$

  - 最適な予測値 $\tilde{y}$ が入ることが期待される区間

予測区間

観測値との差

- 差の分布は以下の平均・分散をもつ正規分布に従う

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[y-\hat{y}] &= (1,\boldsymbol{x}^\top)\boldsymbol{\beta} + \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}] - (1,\boldsymbol{x}^\top)\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = 0 \\
\mathrm{Var}(y-\hat{y}) &= \underbrace{\sigma^2(1,\boldsymbol{x}^\top)(X^\top X)^{-1}(1,\boldsymbol{x}^\top)^\top}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}\text{ の推定誤差による分散}} + \underbrace{\sigma^2}_{\text{誤差の分散}} = \sigma^2\gamma_p(\boldsymbol{x})^2
\end{aligned}
$$

- 正規化による表現

$$
\frac{y-\hat{y}}{\sigma\gamma_p(\boldsymbol{x})} \sim \mathcal{N}(0,1)
$$

予測区間

- 未知の分散を不偏分散で推定

$$
Z = \frac{y-\hat{y}}{\hat{\sigma}\gamma_p(\boldsymbol{x})} \sim \mathcal{T}(n-p-1) \quad (t \text{ 分布})
$$

- 確率 α の予測区間

$$
\mathcal{I}^p_\alpha = \left(\hat{y} - C_\alpha\hat{\sigma}\gamma_p(\boldsymbol{x}),\ \hat{y} + C_\alpha\hat{\sigma}\gamma_p(\boldsymbol{x})\right)
$$

$$
P(|Z| < C_\alpha | Z \sim \mathcal{T}(n-p-1)) = \alpha
$$

  - 観測値 y が入ることが期待される区間
  - $\gamma_p > \gamma_c$ なので信頼区間より広くなる

実習

R：予測値と区間推定

- 関数 `stats::predict()` を用いた予測

```r
#' モデルの作成
toy_train <- tibble(x1 = ..., x2 = ..., y = ...)
toy_lm  <- lm(y ~ x1 + x2, data = toy_train)
toy_train_fitted  <- predict(toy_lm) # あてはめ値の計算
#' 新しいデータの予測
toy_test <- tibble(x1 = ..., x2 = ...) # 予測したいデータの説明変数
toy_test_fitted <- predict(toy_lm, # 予測値の計算
                           newdata = toy_test)
toy_test_conf <- predict(toy_lm, newdata = toy_test, # 信頼区間
                         interval="confidence", level=0.95)
toy_test_pred <- predict(toy_lm, newdata = toy_test, # 予測区間
                         interval="prediction", level=0.95)
#' 信頼区間, 予測区間の水準の既定値は 0.95
```

R：モデルからの予測

- 東京の気候データによる例

```r
#' 9,10 月のデータでモデルを構築し, 8,11 月のデータを予測
#' データの整理
tw_data <- read_csv("data/tokyo_weather.csv")
tw_train <- tw_data |> # モデル推定用データ
  filter(month %in% c(9,10)) # %in% は集合に含むかどうかを判定
tw_test  <- tw_data |> # 予測用データ
  filter(month %in% c(8,11))
#' モデルの構築
tw_model <- temp ~ solar + press # モデルの定義
tw_lm <- lm(tw_model, data = tw_train) # モデルの推定
summary(tw_lm) # モデルの評価
#' あてはめ値の計算
tw_train_fitted <- tw_train |>
  mutate(fitted = predict(tw_lm)) # データのあてはめ値
tw_test_fitted <- tw_test  |>
  mutate(fitted = predict(tw_lm, newdata = tw_test)) # 予測
```

- グラフ表示の例

```r
#' 予測結果を図示
bind_rows(tw_train_fitted, tw_test_fitted) |> # 2つのデータフレームを結合
  mutate(month = as_factor(month)) |> # 月を因子化して表示に利用
  ggplot(aes(x = fitted, y = temp)) +
  geom_point(aes(colour = month, shape = month)) + # 月ごとに色と形を変える
  geom_abline(slope = 1, intercept = 0, # 予測が完全に正しい場合のガイド線
              colour = "gray") +
  labs(y = "observed")
```

R：区間表示のための関数

- 関数 ggplot2::geom_errorbar()：区間の表示

```r
geom_errorbar(
  mapping = NULL,
  data = NULL,
  stat = "identity",
  position = "identity",
  ...,
  na.rm = FALSE,
  orientation = NA,
  show.legend = NA,
  inherit.aes = TRUE
)
```

```
#' mapping: 区間を表すために xmin,xmax または ymin,ymax を与える
#' data: データフレーム
#' ...: その他の描画オプション
#' orientation: 特別な場合に指定 (一般に向きは mapping で自動的決定)
#' 詳細は '?ggplot2::geom_errorbar' を参照
```

- 関数 `stats::predict()` の返り値 'lwr/upr' を用いればよい

練習問題

- 東京の気候データを用いて以下の実験を試みなさい
  - 8 月のデータで回帰式を推定する
  - 上記のモデルで 9 月のデータを予測する

```
#' 特定の月のデータを取り出すには, 例えば以下のようにすればよい
tw_data <- read_csv("data/tokyo_weather.csv")
tw_train <- tw_data |> filter(month == 8) # 単一の数字と比較
tw_test  <- tw_data |> filter(month %in% c(9,10)) # 集合と比較
```

発展的なモデル

非線形性を含むモデル

- 目的変数 y
- 説明変数 $x_1,\dots,x_p$
- 説明変数の追加で対応可能
  - 交互作用 (交差項) : $x_i x_j$ のような説明変数の積
  - 非線形変換 : $\log(x_k)$ のような関数による変換

カテゴリカル変数を含むモデル

- 数値ではないデータ
  - 悪性良性
  - 血液型
- 適切な方法で数値に変換して対応:
  - 2 値の場合は 1,0 (真, 偽) を割り当てる
    - 悪性 : 1
    - 良性 : 0
  - 3 値以上の場合は **ダミー変数** を利用する (カテゴリ数-1 個)
    - A 型 : (1,0,0)
    - B 型 : (0,1,0)
    - O 型 : (0,0,1)
    - AB 型 : (0,0,0)

実習

R : 線形でないモデル式の書き方

- 交互作用を記述するためには特殊な記法がある
- 非線形変換はそのまま関数を記述すればよい
- 1 つの変数の多項式は関数 `I()` を用いる

```
#' 目的変数 Y, 説明変数 X1,X2,X3
#' 交互作用を含む式 (formula) の書き方
Y ~ X1 + X1:X2        # X1 + X1*X2
Y ~ X1 * X2           # X1 + X2 + X1*X2
Y ~ (X1 + X2 + X3)^2 # X1 + X2 + X3 + X1*X2 + X2*X3 + X3*X1
#' 非線形変換を含む式 (formula) の書き方
Y ~ f(X1)             # f(X1) (f は任意の関数)
Y ~ X1 + I(X2^2)      # X1 + X2^2
```

R：カテゴリカル変数の取り扱い

- 何も宣言しなくても通常は適切に対応してくれる
- 陽に扱う場合は関数 factor() を利用する

```
#' factor 属性の与え方
X <- c("A", "S", "A", "B", "D")
Y <- c(85, 100, 80, 70, 30)
toy_data1 <- tibble(X, Y)
toy_data2 <- toy_data1 |> # 因子化
  mutate(X2 = factor(X))  # 関数 as_factor() を用いてもよい
str(toy_data2) # 作成したデータフレームの素性を見る
toy_data3 <- toy_data2 |> # 順序付き (levels) の因子化
  mutate(X3 = factor(X, levels=c("S","A","B","C","D")))
str(toy_data3) # toy_data2 とは factor の順序が異なる
toy_data4 <- toy_data2 |>
  mutate(Y2 = factor(Y > 60)) # 条件による因子化
str(toy_data4) # 条件の真偽で 2 値に類別される
```

練習問題

- 東京の気候データ (9-11 月) を用いて気温を回帰する以下のモデルを検討しなさい
  - 日射量，気圧，湿度の線形回帰モデル
  - 湿度の対数を考えた線形回帰モデル
  - 最初のモデルにそれぞれの交互作用を加えたモデル
- 東京の気候データ (1 年分) を用いて気温を回帰する以下のモデルを検討しなさい
  - 降水の有無を表すカテゴリカル変数を用いたモデル
    (雨が降ると気温が変化することを検証する)
  - 上記に月をカテゴリカル変数として加えたモデル
    (月毎の気温の差を考慮する)

補足

R：モデルの探索

- 変数が増えるとモデルの比較が困難
- 関数 step() を用いて自動化することができる

```
#' モデルの探索
adv_data <- read_csv('https://www.statlearning.com/s/Advertising.csv')
summary(lm(sales ~ radio, data = adv_data))
summary(lm(sales ~ TV + radio, data = adv_data))
summary(lm(sales ~ TV + radio + newspaper, data = adv_data))
summary(init <- lm(sales ~ TV * radio * newspaper, data = adv_data))
opt <- step(init) # step 関数による探索 (最大のモデルから削減増加を行う)
```

```
summary(opt) # 探索された（準）最適なモデルの確認
```

– 全探索ではないので最適とは限らないことに注意は必要

R：package::car

- 回帰モデルの評価
  – 与えられたデータの再現
  – 新しいデータの予測
- モデルの再構築のための視覚化
  – **residual plots**: 説明変数・予測値と残差の関係
  – **marginal-model plots**: 説明変数と目的変数・モデルの関係
  – **added-variable plots**: 説明変数・目的変数をその他の変数で回帰したときの残差の関係
  – **component+residual plots**: 説明変数とそれ以外の説明変数による残差の関係

  などが用意されている

例題

- これまでに用いたデータでモデルを更新して評価してみよう
  – 変数間の線形回帰の関係について仮説を立てる
  – モデルのあてはめを行い評価する
    * 説明力があるのか? (F 統計量，t 統計量，決定係数)
    * 残差に偏りはないか? (様々な診断プロット)
    * 変数間の線形関係は妥当か? (様々な診断プロット)
  – 検討結果を踏まえてモデルを更新する (評価の繰り返し)

次回の予定

- **第 1 回: 主成分分析の考え方**
- 第 2 回: 分析の評価と視覚化