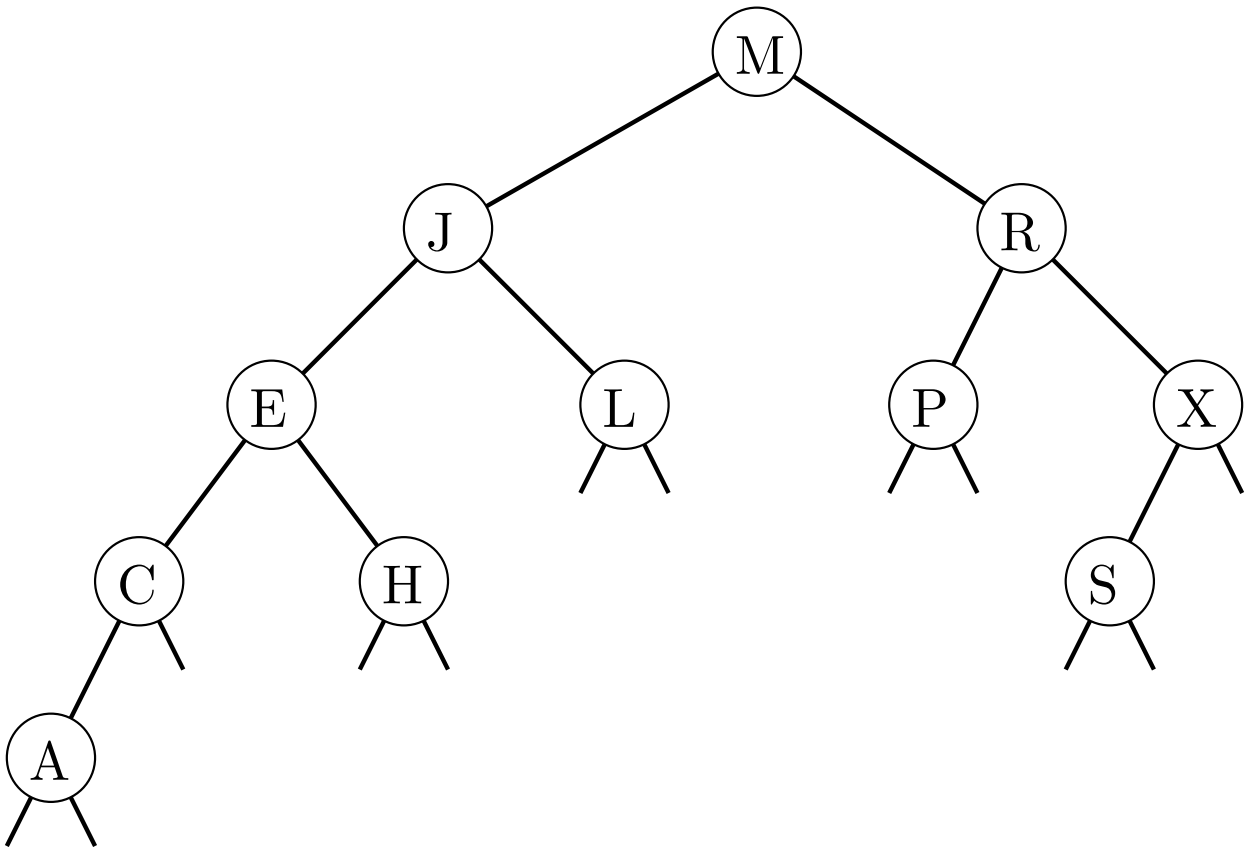
Algorithmique 2 (INFO-F203)
Arbres binaires de recherche

Jean Cardinal

Mars 2021

Arbres binaires de recherche



Analyse en moyenne

Distribution : Construction par insertion successives dans un ordre (permutation) aléatoire $\neq$ distribution uniforme !

Analyse en moyenne

Proposition 1

La recherche dans un arbre binaire de recherche construit par insertions successives de n clés dans un ordre aléatoire utilise en moyenne $\sim 2 \ln n$ comparaisons.

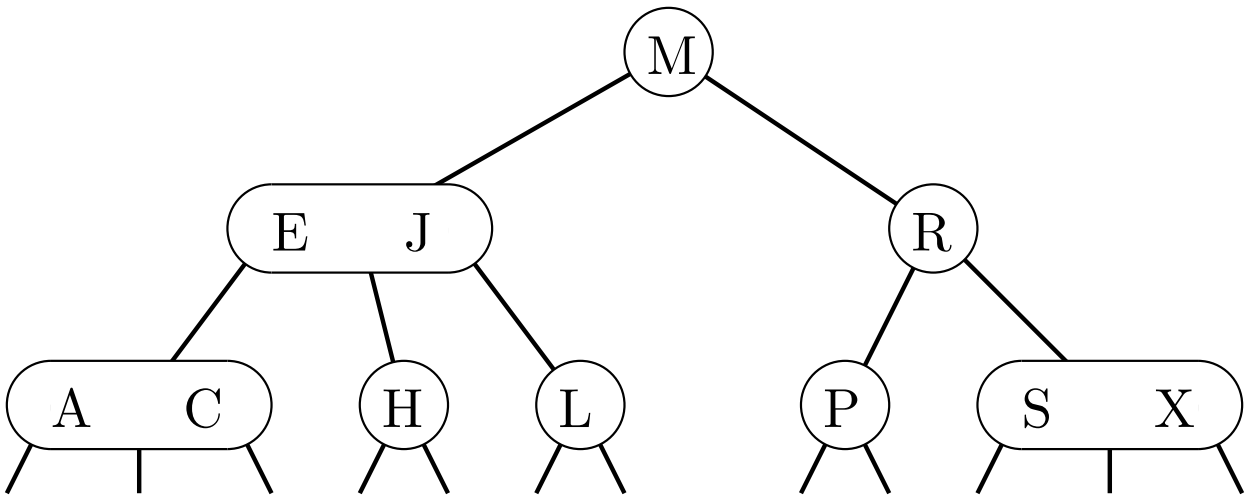
Démonstration

On considère d'abord la quantité $T(n)$ définie comme la somme des profondeurs des nœuds de l'arbre, avec la convention que la profondeur de la racine est égale à 1. Cette quantité satisfait la récurrence suivante :

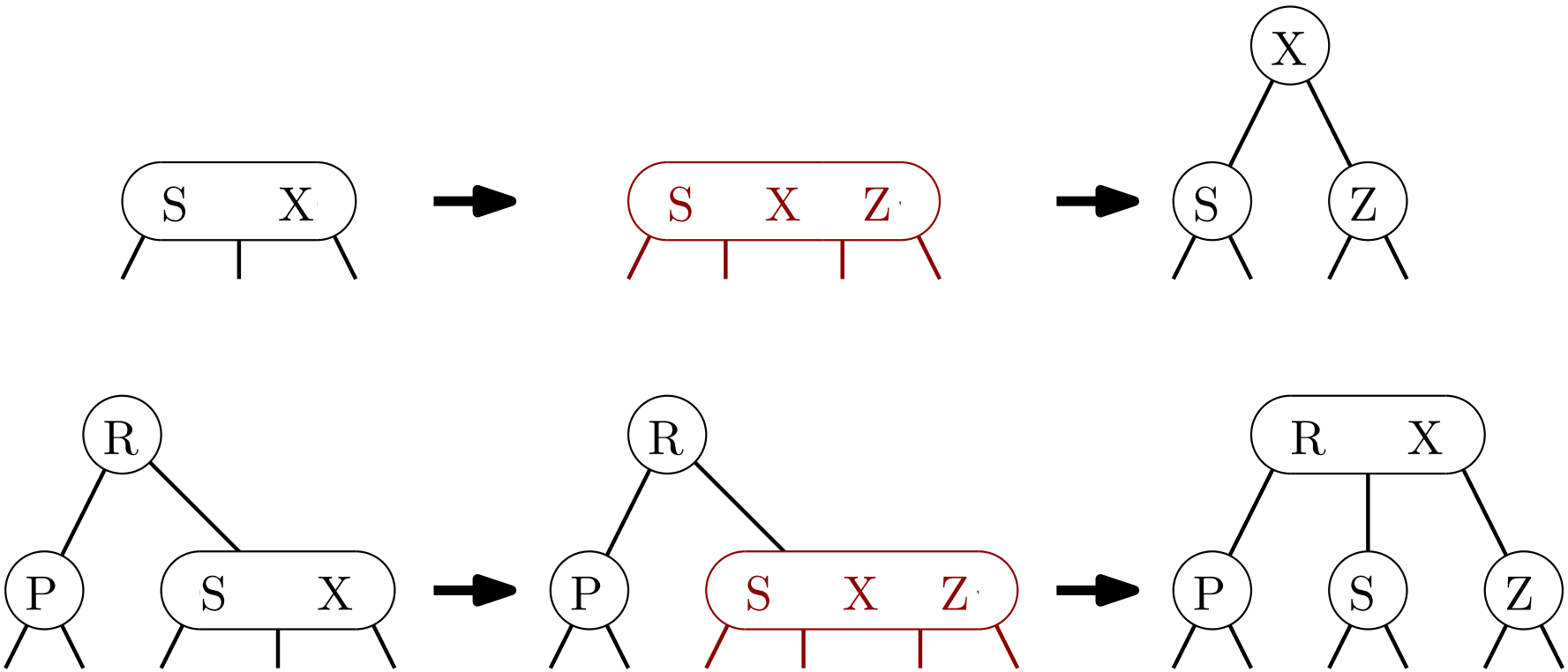
$$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}(T(i) + T(n-i)) + (n-1).$$

$\rightarrow$ Tri Rapide : $T(n) \sim 2n \ln n$

Arbres 2-3



Insertion

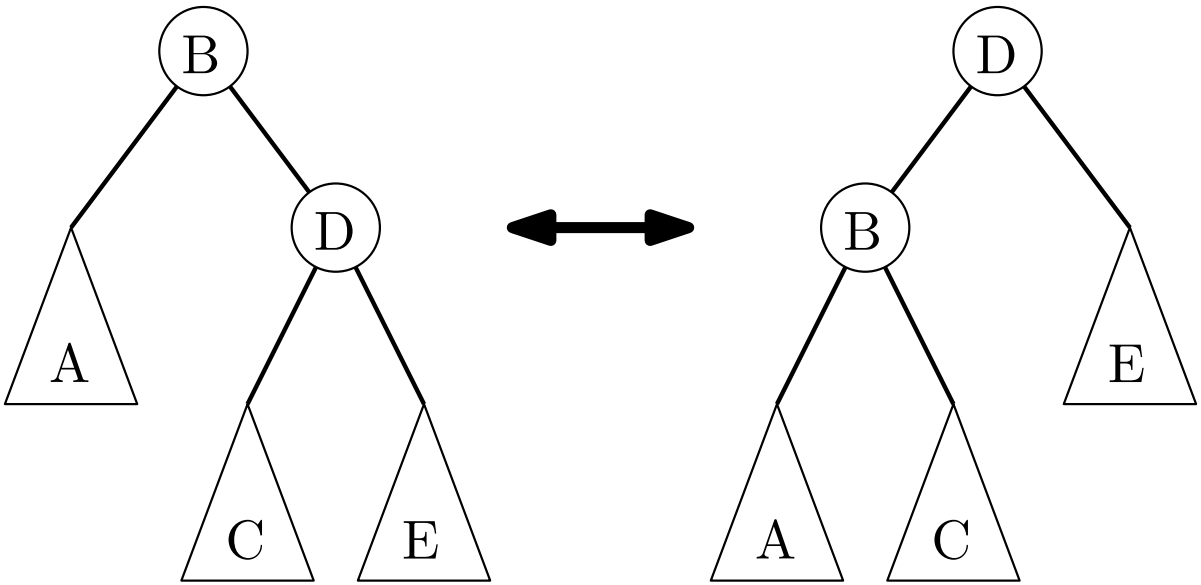


Analyse au pire cas

Proposition 2

Les opérations d'insertion et de recherche dans un arbre 2-3 à n clés visitent au plus $\log n$ nœuds de l'arbre.

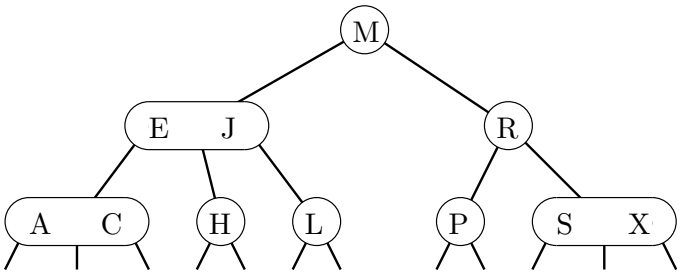
Rotations

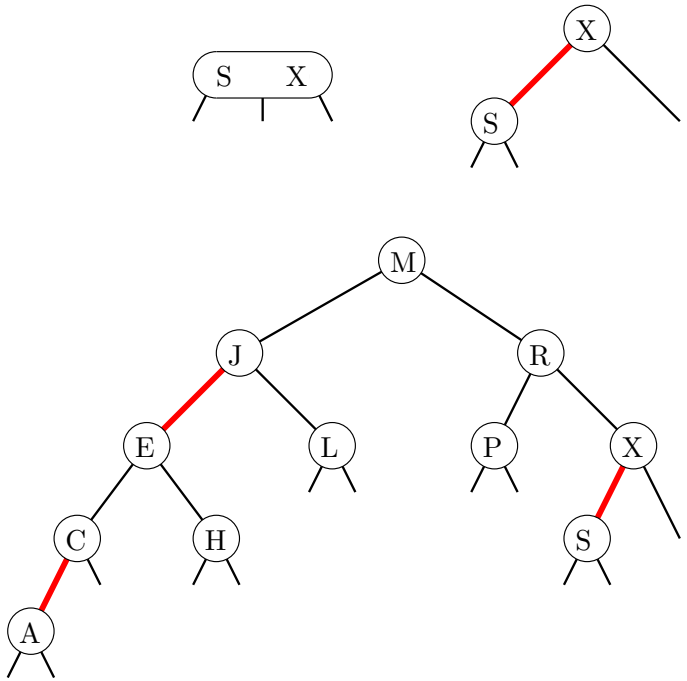


Rotations

```
private Node rotateLeft(Node h)
{
   Node x = h.right;
   h.right = x.left;
   x.left = h;
   return x;
}
```

Arbres rouges-noirs





1. Jamais deux arêtes rouges consécutives sur un chemin de la racine à une feuille.
2. Les arêtes rouges pointent toujours vers un fils gauche.

Insertion

1. Insertion dans un 2-nœud
2. Insertion dans un 3-nœud

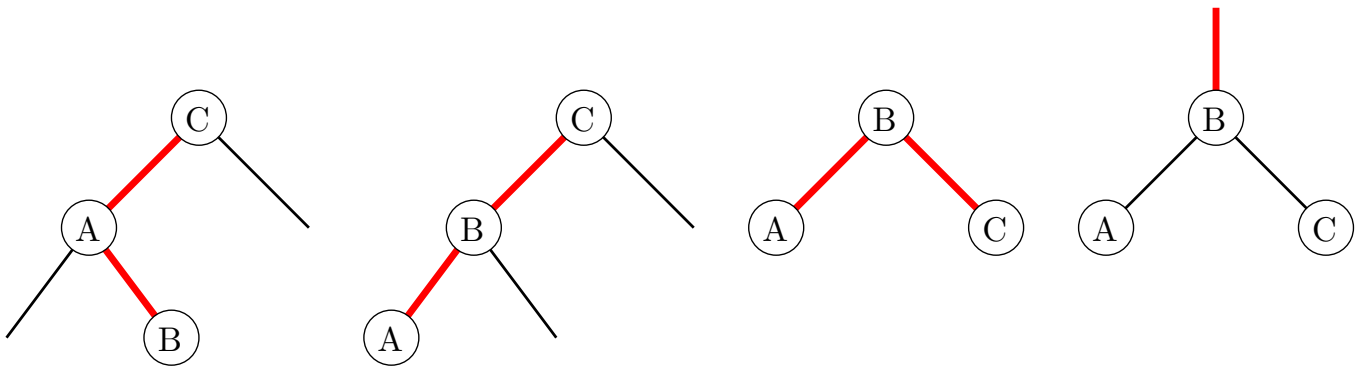
Insertion dans un 2-nœud

le nouveau nœud créé a un nœud noir comme parent. On le lie à ce parent avec une arête rouge, de façon à créer transformer le 2-nœud en 3-nœud. Ce faisant, on peut néanmoins violer la condition qui stipule que les arêtes rouges pointent toujours vers un fils gauche. Si c'est le cas, on effectue une rotation vers la gauche, en prenant soin de mettre à jour les couleurs des nœuds :

```
private Node rotateLeft(Node h) {
  Node x = h.right;
  h.right = x.left;
  x.left = h;
  x.color = x.left.color;
  x.left.color = RED;
  return x;
}
```

Insertion dans un 3-nœud

Trois cas à distinguer :



“Échange de couleurs”, pour la dernière étape à droite :

```
private void flipColors(Node h)
{
  h.color = RED;
  h.left.color = BLACK;
  h.right.color = BLACK;
}
```