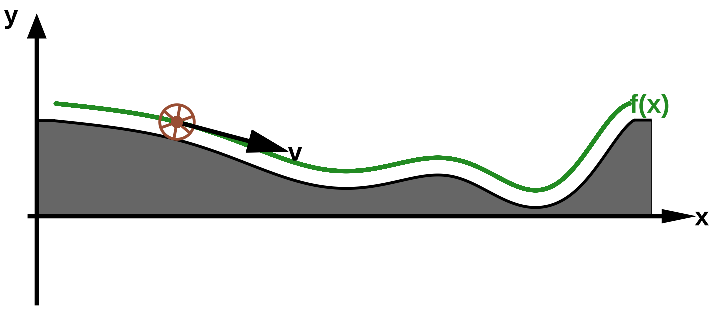
Projet Analyse Numérique, INFO-F-205, 2022

Problème



Le mouvement d'un corps (ou d'une roue) sur une surface ondulée peut être analysé sur base de la loi de la conservation de l'énergie mécanique (potentielle + cinétique). Avec y_0 l'hauteur initiale et v_0 la vitesse initiale, on a

$$mv_0^2/2 + my_0g = mv^2/2 + myg \Leftrightarrow v = \sqrt{2g(y_0 - y) + v_0^2}.$$

Dans cette expression, $v = v(t)$ et $y = y(t)$ sont des fonctions du temps t. Le vecteur de la vitesse $\vec{v}$ (dont la norme, la taille est donnée par la valeur ci-dessus) a deux composantes : $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [f'(x(t))\cdot x'(t)]^2} \\ &= |x'(t)|\cdot\sqrt{1 + [f'(x(t))]^2} \end{aligned}$$

En remplaçant $v(t)$ par l'expression de la conservation de l'énergie, on arrive à

$$\sqrt{2g\,[y_0 - f(x(t))] + v_0^2} = |x'(t)|\cdot\sqrt{1 + [f'(x(t))]^2},$$

ce qui s'écrit comme une EDO d'ordre 1 pour la function $|x(t)|$:

$$\boxed{|x'(t)| = \sqrt{\frac{2g\,[y_0 - f(x(t))] + v_0^2}{1 + [f'(x(t))]^2}}}$$

Cette équation ne se prononce pas sur le signe de $x'(t)$, c'est-à-dire, sur la direction du mouvement. Pour connaître le signe, on examine, chaque fois que $|x'(t)|$ passe par zéro, la direction du mouvement : sachant qu'à un moment donné t on obtient $|x'(t)| = 0$, on sait que le mouvement se reprend dans la direction descendante de $f(x)$: on prend donc, à ce moment-là, $\mathrm{sign}(x'(t)) = -\mathrm{sign}(f'(x(t)))$.

En posant $\widehat{x}(t+h) = \widehat{x}(t)+h\cdot\widehat{x}'(t)$, on peut construire une approximation de genre Euler explicite. Malheureusement, dès que $\widehat{x}'(t)$ s'annule, cette approche ne permet pas de relancer la masse : l'approximation $\widehat{x}(t)$ ne bougera plus. Pour remédier à cette anomalie, il faudra prendre en compte l'accélération quand la vitesse s'annule.

La fonction $f(x)$, qui décrit la surface ondulée, même si elle est connue, peut être compliquée.

Dans le cadre de ce projet on vous demande de fournir un fichier pdf contenant les réponses aux questions suivantes

1. Le fichier `projet2022INFOF205.m` contient une implémentation incomplète de la méthode de Euler explicite (progressive) pour la résolution de l'EDO. Compléter la routine en ajoutant les lignes suivantes
   - Le calcul de $\widehat{v}_x^2(t) = |\widehat{x}'(t)|^2$:
   $$|\widehat{x}'(t)|^2 = \frac{2g\,[y_0 - f(\widehat{x}(t))] + v_0^2}{1 + [f'(\widehat{x}(t))]^2}$$
   où $f(\widehat{x}(t))$ est donné par la variable `yhatE(step)` et $f'(\widehat{x}(t))$ par la variable `slopehatE(step)`. Utiliser une variable, par exemple `vxhat2`, pour dénoter $|\widehat{x}'(t)|^2$.
   - Si $|\widehat{x}'(t)|^2 < 0$, la méthode numérique entre dans une "zone interdite" par la physique (et la mathématique).s Il faut alors inverser la direction du mouvement en évaluant
   `direction = -sign(slopehatE(step));`
   c'est-à-dire, $\mathrm{sign}(\widehat{x}'(t)) = -\mathrm{sign}(f'(\widehat{x}(t)))$.
   - Si $|\widehat{x}'(t)|^2 < 0$, la valeur est remplacée par zéro.
   - Calculer la $|\widehat{x}'(t)| = \sqrt{|\widehat{x}'(t)|^2}$.
   - Appliquer le pas d'Euler
   $$\widehat{x}(t+h) = \widehat{x}(t) + h \cdot \widehat{x}'(t) = \widehat{x}(t) + h \cdot \mathrm{sign}(\widehat{x}'(t)) \cdot |\widehat{x}'(t)|$$
   - Par contre, si $\widehat{x}'(t) = 0$, il faut calculer l'accélération, $a_x(t) = x''(t)$, dont la valeur absolue est donnée par
   $$|x''(t)| = g \cdot \frac{|f'(\widehat{x}(t))|}{1 + [f'(\widehat{x}(t))]^2},$$
   tandis que la direction (le signe) est donnée par la variable `direction`. On a
   `xhatE(step+1) = xhatE(step) + h^2*direction*axhat/2;`
2. Tracer le graphique de l'énergie cinétique $E_{\mathrm{cin}}(t) = mv^2(t)/2$ et de lénergie potentielle $E_{\mathrm{pot}}(t) = mgh(t)$, pour une masse de $m = 1$, et avec
   $$v(t) = v_x(t) \cdot \sqrt{1 + [f'(\widehat{x}(t))]^2},$$

et $h(t) = y(x(t)) - h_0$ où h_0 est une hauteur de référence (à choisir librement. Si on prend $h_0 = 0$, on aura des valeurs E_{pot} négatives, ce qui est peu incoventionel, mais pas grave.) Tracer la somme $E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t)$ Qu'est ce que vous constatez ? Expliquer la phrase : "le principe de la conservation de l'énergie est très interessant de point de vue d'une implémentation numérique".

3. Poser `stepsize=stepsize*100;` et relancer la simulation. Vous constater des erreurs numériques : de quel genre d'erreur s'agit-il (principalement) : troncature (approximation), génération ou propagation ?

Aspects pratiques

1. Les routines mises à votre disposition sont téléchargeables depuis UV (Université Virtuelle) :
   - `projet2022INFOF205.m` contient une résolution numérique (complète) de l'EDO pour le pendule sans frottement.
   - `roadprofile.m` contient la définition de la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$. Vous pouvez expérimenter avec d'autres fonctions (si vous voulez), en remplaçant la définition. (Vous n'êtes pas obligé(e) de garder la fonction de `roadprofile.m` dans votre rapport)
   - `rollonhills.m`, appelée par `projet2022INFOF205.m`, si activée en posant `playvideo = true` pour l'animation de la solution.
   - Les autres routines présentes soutiennent le fonctionnement de `rollonhills.m`.
2. Pour exporter un graphique sous le format j-peg, utiliser la commande suivante après la construction du graphique

```
outfilename = ['projet' num2str(matricule) 'graph' num2str(graphnumber)];
print('-djpeg90',outfilename)
```

Pour exporter un graphique sous le format eps, taper

```
outfilename = ['projet' num2str(matricule) 'graph' num2str(graphnumber)];
print('-depsc',outfilename)
```

3. N'oubliez-pas d'intituler les graphiques, avec toutes les informations spécifiques pour chaque graphique, en utilisant (par exemple)

```
titre = ['Method 1; value = ' num2str(parameter)];
title(titre,'fontsize',fontsize,'fontweight','b')
```

4. Installation logiciel Matlab ou Octave (vous pouvez choisir)
   - Matlab est (était, mais n'est plus) disponible depuis `https://sisc.ulb.ac.be/shop/`

- Pour télécharger et installer `GNU octave`, consulter le site `http://www.gnu.org/software/octave/`

5. La création du fichier `jpg` peut poser des problèmes en octave, ou dans des versions de Matlab plus anciennes. On pourrait considérer d'utiliser la touche `PrintScreen` du clavier.

Evaluation

L' évaluation sera basée sur la qualité, la clarté, ainsi que sur la correction des implémentations. Le projet est individuel. Evidemment, vous pouvez discuter entre vous sur les questions et l'implémentation du projet, mais le rapport doit refléter votre contribution personnelle.

Ce qui devra être rendu

- Chaque étudiant doit envoyer un dossier `zip` ou `gz` individuel et original contenant
  1. un fichier ou des fichiers `.m` contenant le code demandé
     et
  2. — **ou bien** : un fichier `.pdf` contenant un rapport avec le texte et les graphiques
     — **ou bien** : un fichier `.txt` avec le texte et des fichiers `.jpg`, `.eps` ou `.pdf` pour les graphiques.
     — Les fichiers `.doc` sont interdits.
- **Le nombre de pages (en dehors du code matlab) est strictement limité à deux, y inclus les graphiques** Pour ce qui est du texte, il n'y a que quelques lignes à écrire. N'oubliez pas d'inclure les valeurs des paramètres utilisées dans vos expériences (permettant la reproduction de votre graphique).
- Le nom du dossier doit être composé par le nom de famille de l'etudiant suivi par son matricule et 4 lettres pour sa section tout en minuscule. Donc, si vous êtes Margot Dubois et votre matricule est `12345`, votre fichier doit porter le nom
  `dubois12345info.zip`
  `dubois12345math.zip`
  `dubois12345actu.zip`
- le dossier doit être compressé sous format `.zip` ou `.gz`. Les autres formats (notamment `winmail.dat`, `.rar`, `.7z`) sont interdits.
- Utiliser Université Virtuelle (Section Projet) (`https://uv.ulb.ac.be/`) pour déposer votre projet.

Rappel

- la date de remise est le lundi 2 mai 2022 à 17h00.