RÉPUBLIQUE
FRANÇAISE

Liberté
Égalité
Fraternité

ONERA

THE FRENCH AEROSPACE LAB

www.onera.fr

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

Filtrage bayésien et approximation particulaire

Méthodes Monte Carlo, fonctions d'importance (TP)

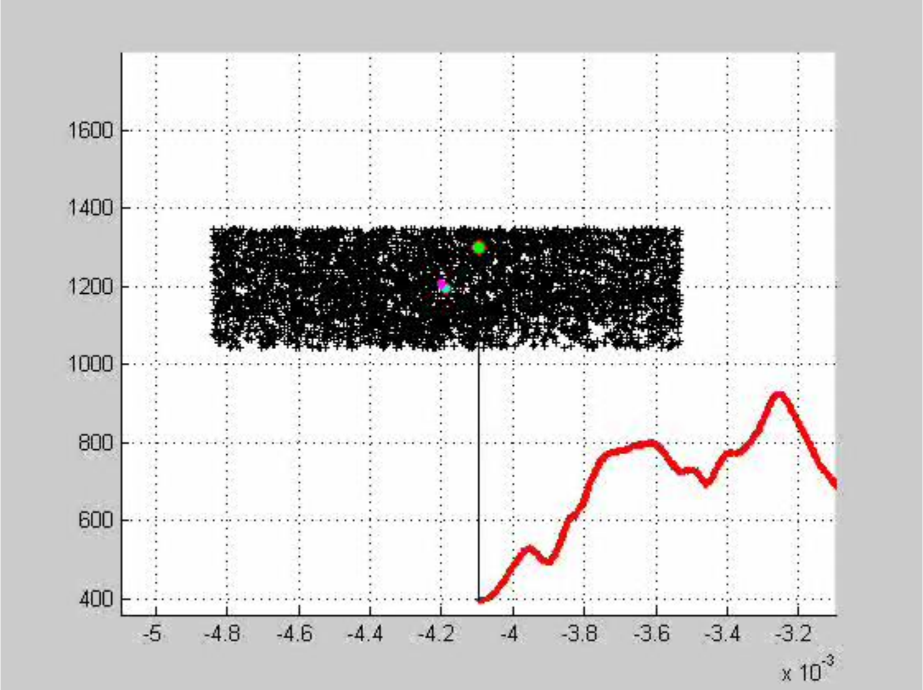
Frédéric Dambreville
[Christian Musso]

frederic.dambreville@onera.fr

Informations

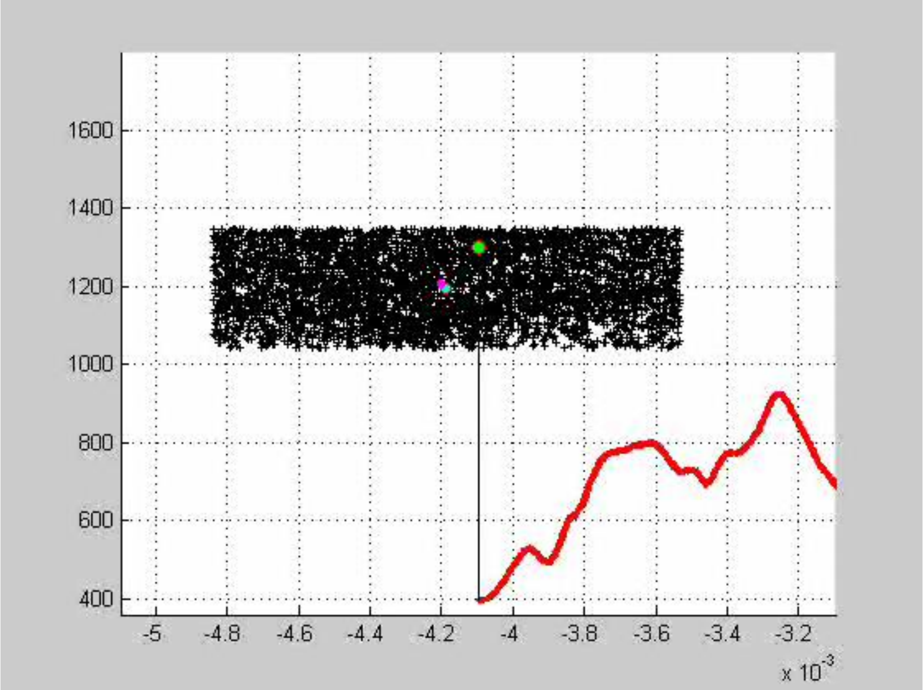
- Questions sur Kalman: nadia.oudjane@edf.fr
- Rapport (4 TP) à rendre au plus tard 15 jours après la dernière séance
  - Filtre de Kalman
  - Méthodes Monte Carlo, fonctions d'importance
  - Borne de Cramer Rao ; Optimisation de la trajectoire
  - Filtre particulaire pour la navigation par corrélation de terrain
- Se mettre en binômes ; pas de langage imposé
- Polycopié pour des démonstrations complètes et rigoureuses

Exemple de filtrage bayésien : corrélation de terrain



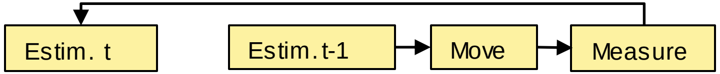
Comment ça marche?

Exemple de filtrage bayésien : corrélation de terrain



Comment ça marche?

- ➔ X_t : la position du véhicule à l'instant t
  - → Connaissance *a priori* : $p(X_0)$ et $p(X_{t+1}|X_t)$
  - ▪ Markovien [X_{t+1} conditionné par X_t seulement]
  - ▪ $X_0 \sim$ uniforme sur un rectangle [incertitude forte]
  - ▪ $X_{t+1} = f(X_t, u) + \boldsymbol{n}$ [loi de contrôle + bruit]
- ➔ Y_t : distance verticale mesurée au relief
  - → Connaissance de loi de mesure $p(Y_t| X_t)$
  - ▪ Loi de mesure ← carte de relief + bruit de mesure



- ➔ $p(X_t|Y_{1:t}) \propto \int_{X_{t-1}} p(X_{t-1}|Y_{1:t-1}) p(X_t|X_{t-1}) p(Y_t|X_t)\ \mathrm{d}X_{t-1}$
  - → **Inversion bayésienne**
  - ▪ $p(X_t|Y_{1:t})$ est la loi a posteriori de X_t
  - ➔ Estimation de la position à partir des mesures reçues
- ➔ Multimodal (donc non gaussien) et non linéaire
  - → Le filtre de Kalman ne s'applique pas
- ➔ Filtre bayésien non calculable : $\propto \int_{X_{t-1}} \dots$
  - → Approximé par approche Monte Carlo
  - ➔ **Filtre particulaire**

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté Égalité Fraternité

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

Plan

- Approximation Monte Carlo
- Echantillonnage d’importance
- Méthodes de rejet
- Théorème central limite
- TP sur l’approximation d’une intégrale
- Espérance conditionnelle, loi a posteriori
- Exemples d’application du filtre particulaire

Approximation Monte Carlo

Evaluer une intégrale par approximation Monte Carlo

- q est une *densité* (pdf: probability density fonction)

$$\mu = \int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}_q g(X) \quad \text{où} \quad X \sim q$$

- Loi forte des grands nombres (convergence presque sûre)

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1:N} g(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mu = \mathbb{E}_g \hat{\mu}_N$$

On note : $\sigma^2 = \mathbb{E}_q[g(X) - \mu]^2$ et on calcule la variance de $\hat{\mu}_N$

$$\mathbb{V}(\hat{\mu}_N) = \frac{1}{N}\int [g(x) - \mu]^2 q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{N}\int g^2(x)q(x)\,\mathrm{d}x - \mu^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

- Théorème central limite – la loi de $\hat{\mu}_N$ est approximée par $\mathcal{N}\big(\mu, \mathbb{V}(\hat{\mu}_N)\big)$ pour N grand

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma}(\hat{\mu}_N - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Importance sampling (échantillonnage pondéré)

Utilisation d'une autre pdf $\tilde{q}$ (FI : fonction d'importance) pour effectuer le Monte Carlo

$$\mu = \int g(x)\frac{q(x)}{\tilde{q}(x)}\tilde{q}(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}_{\tilde{q}}\left[\frac{q(X)}{\tilde{q}(X)}g(X)\right] \quad \text{où} \quad X \sim \tilde{q}$$

- ➔ Exemples d'usage : échantillonnage de $\tilde{q}$ plus facile ; améliorer la variance $\mathbb{V}(\hat{\mu}_N)$, …
- Par la loi forte des grands nombres:

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1:N}\frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)}g(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mu \quad \text{où} \quad X_i \sim \tilde{q}$$

Que vaut la variance $\mathbb{V}(\hat{\mu}_N)$?

Choix de $\tilde{q}$ pour minimiser $\mathbb{V}(\hat{\mu}_N)$?

Importance sampling – choix de la fonction d'importance

Utilisation d'une autre fonction d'importance $\tilde{q}$ pour effectuer le Monte Carlo

$$\mu = \int g(x) \frac{q(x)}{\tilde{q}(x)} \tilde{q}(x) \,\mathrm{d}x = \mathbb{E}_{\tilde{q}}\left[\frac{q(X)}{\tilde{q}(X)} g(X)\right] \quad \text{où} \quad X \sim \tilde{q}$$

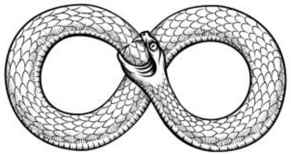
LGN: $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1:N} \frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)} g(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mu \quad \text{où} \quad X_i \sim \tilde{q}$

Variance :

$$\mathbb{V}(\hat{\mu}_N) = \frac{1}{N}\left[\int g^2(x) \frac{q^2(x)}{\tilde{q}(x)} \mathrm{d}x - \mu^2\right]$$

Choix de $\tilde{q}$ minimisant $\mathbb{V}(\hat{\mu}_N)$:

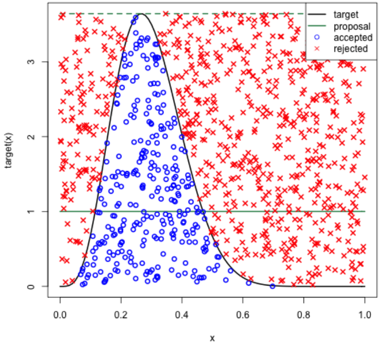
$$\text{Si} \quad \tilde{q}(x) = \frac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{g(x)q(x)}{\boldsymbol{\mu}}, \qquad \text{alors} \quad \mathbb{V}(\hat{\mu}_N) = 0 \ldots \qquad \text{Certes} \ldots$$



➔ Choisir une FI $\tilde{q}$ la plus proche possible de l'optimale, facile à simuler et à évaluer

Echantillonnage par la méthode du rejet

Générer un échantillon de p : $p(x) = \dfrac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x}$ où q est une pdf



Hypothèse : C majore de g, c-à-d $\forall x, g(x) \leq C$

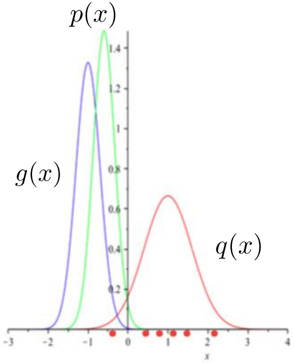
La variable Z définie par le tirage suivant vérifie $Z \sim p$

i. $X \sim q$

ii. $U \sim \mathbb{U}[0,1]$

iii. Si $g(x) > CU$, alors $(X,U) \in A$ (accepté) et retourner $Z = X$; sinon

$$\mathrm{P}\big((X,U) \in A\big) = \int_x \int_{u=0}^{1} [g(x) > Cu]q(x)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x = \int_x \int_{u=0}^{g(x)/C} q(x)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x = \frac{1}{C}\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

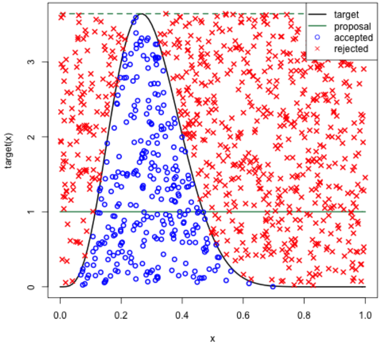


Probabilité d'acceptation : $P_a = \frac{1}{C}\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x$

Coûteux car P_a est en général faible

Echantillonnage par la méthode du rejet

Générer un échantillon de p : $p(x) = \dfrac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x}$ où q est une pdf



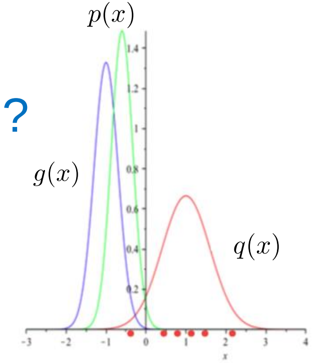
Hypothèse : C majore de g, c-à-d $\forall x, g(x) \leq C$

La variable Z définie par le tirage suivant vérifie $Z \sim p$

i. $X \sim q$

ii. $U \sim \mathbb{U}[0,1]$

iii. Si $g(x) > CU$, alors $(X, U) \in A$ (accepté) et retourner $Z = X$; sinon



Loi de la taille de l'échantillon avant acceptation (nombre d'itérations) ?

$$T = \inf\{k \geq 1 \mid g(X_k) > CU_k\}$$

Avantages et inconvénients de la méthode de rejet ?

Importance sampling
Codage sur un exemple d'approximation d'une intégrale

$$\mu = \int_0^1 g(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \quad \text{avec} \quad q = \mathbb{U}[0,1]$$

Monte Carlo force brute: générer $X_1, \cdots X_N$ selon q, i.e. uniformément sur $[0,1]$

$$\mu \approx \hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1:N} g(X_i)$$

Calculer la variance théorique

Estimer empiriquement la variance (prendre N = 50)

Importance sampling

$$\mu = \int_0^1 g(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \quad \text{avec} \quad q = \mathbb{U}[0,1]$$

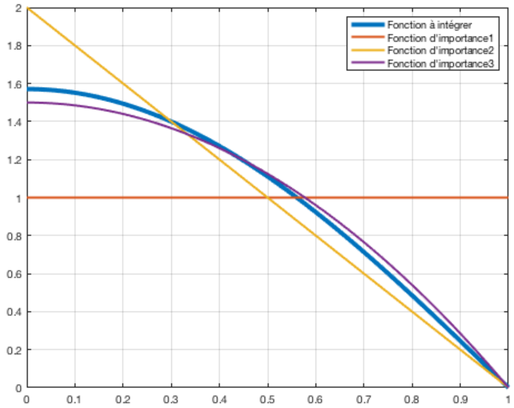
Chercher une bonne FI qui approche la densité *a posteriori*

- Force brute : $\tilde{q} = \mathbb{U}[0,1]$
- $\tilde{q}(x) = 2(1-x)$
- On ne peut pas prendre :

$$\tilde{q}(x) \propto g(x)q(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \approx 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8}$$ ← non positivité

→ s'en rapprocher en prenant $\tilde{q}(x) \propto 1 - x^2$, c'est-à-dire :

$$\tilde{q}(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)$$



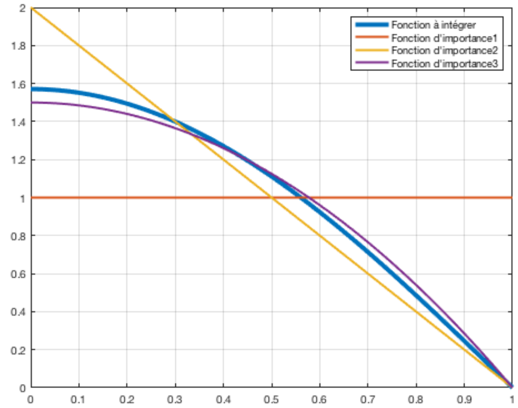
Importance sampling

$$\mu = \int_0^1 g(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \quad \text{avec} \quad q = \mathbb{U}[0,1]$$

Echantillonnage pondéré : on génère suivant un FI $\tilde{q}$ au plus proche de $g(x)q(x)$

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1:N} \frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)} g(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mu \quad \text{où} \quad X_i \sim \tilde{q}$$

- Chercher une bonne FI (idée : DL au voisinage de 0)
- Calculer la variance théorique
- Utiliser la méthode de rejet pour générer suivant la FI et comparer la probabilité d'acceptation théorique à celle obtenue par simulations
- Estimer empiriquement la variance



Importance sampling

$$\mu = \int_0^1 g(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \quad \text{avec} \quad q = \mathbb{U}[0,1]$$

Monte Carlo force brute: générer $X_1, \cdots X_N$ selon q et $\mu \approx \hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1:N} g(X_i)$

Echantillonnage pondéré : on génère suivant un FI $\tilde{q}$ au plus proche de $g(x)q(x)$

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1:N} \frac{q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)} g(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mu \quad \text{où} \quad X_i \sim \tilde{q}$$

- Comparer le rapport des variances des 2 méthodes. Théoriquement et par simulations
- Valider par simulations les TCL pour les 2 méthodes en comparant la loi théorique (loi normale) à la loi empirique (histogramme)
- Comparer les budgets pour chaque méthode
- Calculer la variance de l'estimateur en prenant la FI ~ optimale
- (Même travail avec $\tilde{q}(x) = 2(1-x)$, ici on simule la FI par la méthode d'inversion de la CDF)

Importance sampling

$$\mu = \int_0^1 g(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \quad \text{avec} \quad q = \mathbb{U}[0,1]$$

Monte Carlo force brute: générer $X_1, \cdots X_N$ selon q et $\mu \approx \hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1:N} g(X_i)$

Variance pour un échantillon $\mathbb{V}_q \cong 0.095$; décroissance de l'erreur en $1/\sqrt{N}$ avec N

Echantillonnage pondéré : être proche de $g(x)q(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8} + \cdots$

➔ On prend $\tilde{q}(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)$

Variance pour un échantillon $\mathbb{V}_{\tilde{q}} \cong 0.00099$

On a besoin de 100 fois moins d'échantillons pour une même précision

Estimation bayésienne : espérance conditionnelle

Modèle de la mesure (équation de mesure) : $Y = h(X) + \epsilon$

X : vecteur aléatoire distribué selon l'a priori q (pdf)

But : estimer par Monte Carlo la distribution conditionnelle $P(X|Y)$ → a posteriori

– Permet en particulier d'estimer tous les moments a posteriori → lois générales

Vraisemblance – loi de ϵ

A priori – q

$$P(X = x|Y = y) \triangleq p(x|y) \propto P(Y = y|X = x)P(X = x) \propto g(x)q(x)$$

$g(x) = P(Y = y|X = x)$

Cas linéaire gaussien : $X|Y \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}(X|Y), \Sigma_{X|Y}\right)$

– Caractérisé par les seuls moments d'ordre 1 et d'ordre 2

Estimation bayésienne : espérance conditionnelle

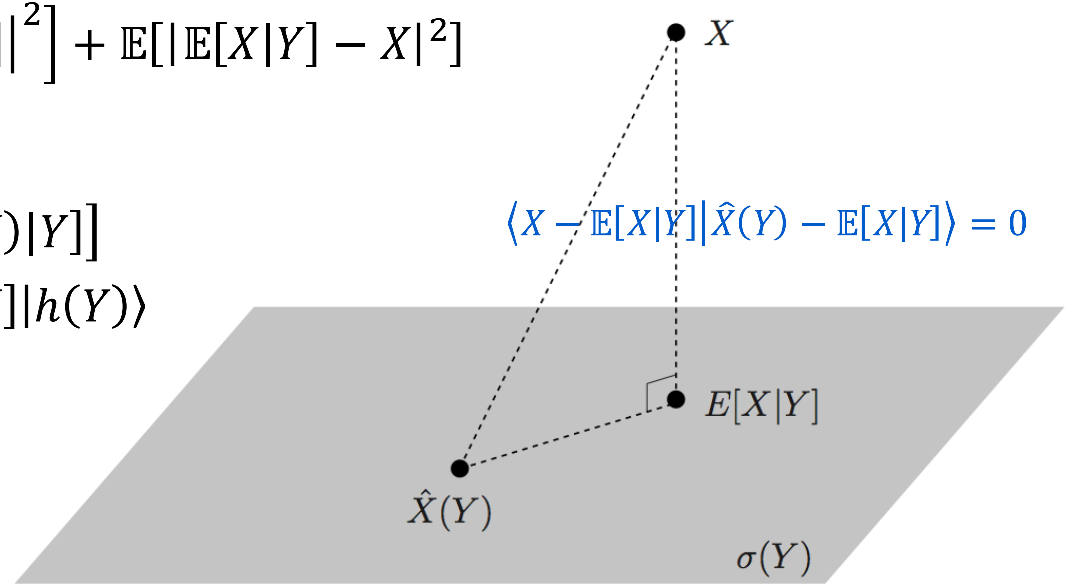
Minimiser $MSE\left(\hat{X}(Y)\right) = \mathbb{E}\left[\left|\hat{X}(Y) - X\right|^2\right] \longrightarrow \hat{X}(Y) = \mathbb{E}[X|Y]$

Variance minimale

$$\mathbb{E}\left[\left|\hat{X}(Y) - X\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|\hat{X}(Y) - \mathbb{E}[X|Y]\right|^2\right] + \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|Y] - X|^2]$$

Projection

$$\langle X|h(Y)\rangle \triangleq \mathbb{E}[Xh(Y)] = \mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_X[Xh(Y)|Y]\right]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]h(Y)] = \langle \mathbb{E}[X|Y]|h(Y)\rangle$$
$$\Rightarrow \langle X - \mathbb{E}[X|Y]|h(Y)\rangle = 0$$



Sans biais

$$\mathbb{E}_Y\left[\mathbb{E}_X[X|Y]\right] = \mathbb{E}[X]$$

Estimation bayésienne : distribution a posteriori

$$P(X = x|Y = y) \triangleq p(x|y) \propto P(Y = y|X = x)P(X = x) \propto g(x)q(x)$$

Générer un échantillon suivant le produit

$$p(x|y) = \frac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x} \propto g(x)q(x)$$

Terme de normalisation inconnu ; on sait échantillonner suivant q

Objectif : distribution complète : permet d'estimer les quantiles de l'a posteriori

– Inutile si $p(x|y)$ est gaussienne

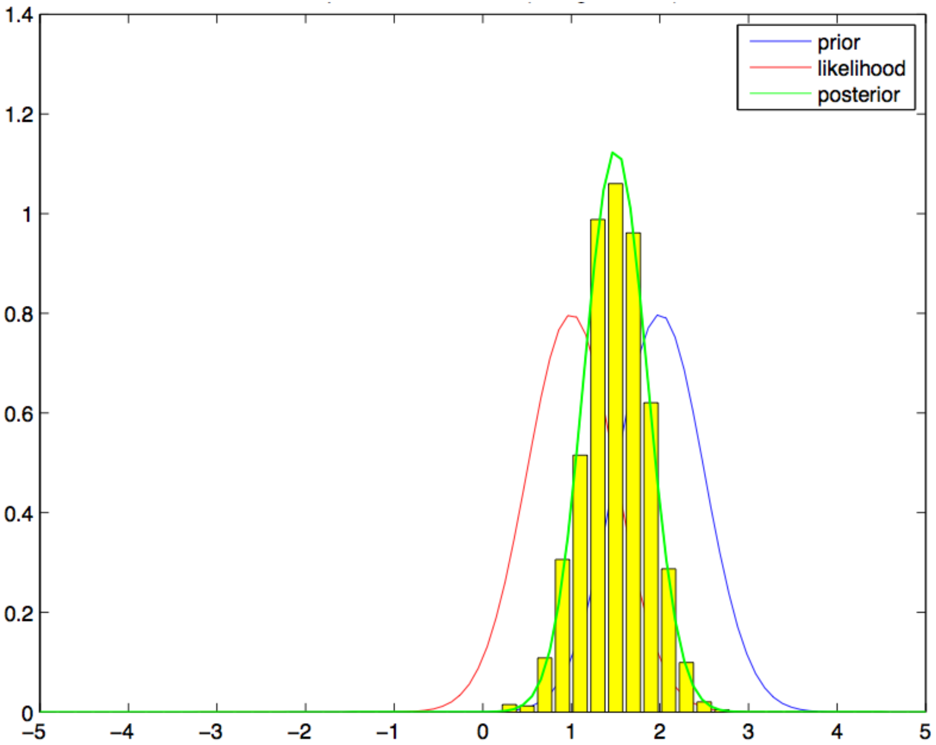
Estimation bayésienne : distribution a posteriori

Générer un échantillon issu de :

$$p(x|y) = \frac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x} \propto g(x)q(x)$$

2 méthodes possibles :

- Rejet
- Echantillonnage pondéré



Estimation bayésienne : méthode de rejet (rappel)

Générer un échantillon de $p(x|y) = \dfrac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x}$

Hypothèse : C majore de g, c-à-d $\forall x, g(x) \leq C$

La variable Z définie par le tirage suivant suit la loi $p(x|y)$

i. $X \sim q$

ii. $U \sim \mathbb{U}[0,1]$

iii. Si $g(x) > CU$, alors $(X, U) \in A$ (accepté) et retourner $Z = X$; sinon

Probabilité d'acceptation : $P_a = \frac{1}{C}\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x$

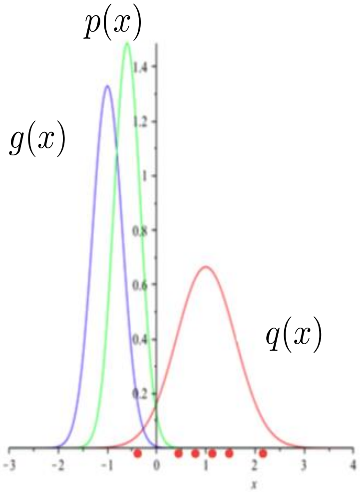
Coûteux car P_a est en général faible

Estimation bayésienne : méthode de rejet

Probabilité d'acceptation : $P_a = \frac{1}{\max_x g(x)} \int g(x) q(x)\,\mathrm{d}x$ si $C = \max_x g(x)$ est connu

- Ecart-type du bruit de mesure faible. Cas gaussien : $C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
- Faible recouvrement entre la vraisemblance et l'a priori

➔ Grand nombre d'échantillons nécessaires en entrée de la boucle de rejet mais échantillon « exact »



Estimation bayésienne : échantillonnage pondéré

Générer un échantillon suivant le produit $p(x|y) = \frac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x} \propto g(x)q(x)$

$$\int \phi(x)p(x|y)\,\mathrm{d}x = \frac{\int \phi(x)p(y|x)p(x)\mathrm{d}x}{\int p(y|x)p(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int \phi(x)g(x)q(x)\,\mathrm{d}x}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x} \approx \frac{\sum_{i=1}^N g(X_i)\phi(X_i)}{\sum_{i=1}^N g(X_i)}$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N} w_i\phi(X_i) \quad avec \;\; w_i = \frac{g(X_i)}{\sum_{i=1}^N g(X_i)} \quad \text{(Poids)}$$

Formellement (au sens faible ou en loi) :

$$\boxed{p(x|y) \approx \sum_{i=1:N} w_i \delta_{x=X_i} \triangleq \hat{p}^N(x)}$$

Echantillon pondéré : (X_i, w_i) pour $i = 1, \cdots, N$

Estimation bayésienne : échantillonnage pondéré

Analyse de l'erreur Monte Carlo : TCL $\quad p(x|y) \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \delta_{x=X_i} \triangleq \hat{p}^N(x)$

$$\sqrt{N}\left(\int \phi(x)\hat{p}^N(x)\mathrm{d}x - \int \phi(x)p(x|y)\,\mathrm{d}x\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \mathrm{Var}(\phi)\big)$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\phi) = \frac{\int \phi^2(x)g^2(x)q(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int \phi(x)g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\left(\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}}$$

Idée de démonstration : $\mathbb{V}\left(\sqrt{N}\sum_{i=1}^{N} w_i\phi(X_i)\right) = \mathbb{V}\left(\frac{N}{\sum_{i=1}^{N} g(X_i)} \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)\phi(X_i)\right)$

Tend en proba vers Cte $\quad \left[\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right]^{-1}$

Tend en loi (TCL) au « centrage » près $\quad \mathcal{N}\left(0, \int \phi^2(x)g^2(x)q(x)\,\mathrm{d}x - \cdots\right)$

Lemme de Slutsky

Démonstration rigoureuse : Polycopié

Estimation bayésienne : échantillonnage pondéré

Analyse de l'erreur Monte Carlo : TCL

$$p(x|y) \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \delta_{x=X_i} \triangleq \hat{p}^N(x)$$

$$\sqrt{N}\left(\int \phi(x)\hat{p}^N(x)\mathrm{d}x - \int \phi(x)p(x|y)\,\mathrm{d}x\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\big(0, \mathrm{Var}(\phi)\big)$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(\phi) = \frac{\int \phi^2(x)g^2(x)q(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int \phi(x)g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\left(\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}}$$

Idée de démonstration : $\mathbb{V}\left(\sqrt{N}\sum_{i=1}^{N} w_i\phi(X_i)\right) = \mathbb{V}\left(\frac{N}{\sum_{i=1}^{N} g(X_i)} \; \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)\phi(X_i)\right)$

Tend en proba vers Cte

$$\left[\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right]^{-1}$$

Tend en loi (TCL) au « centrage » près

$$\mathcal{N}\left(0, \int \phi^2(x)g^2(x)q(x)\,\mathrm{d}x - \cdots\right)$$

Lemme de Slutsky

Si X_n converge en loi vers X et Y_n converge en probabilité vers une constant c, alors (X_n, Y_n) converge en loi vers (X, c)

Démonstration rigoureuse : Polycopié

Estimation bayésienne : échantillonnage pondéré

Analyse de l'erreur Monte Carlo : TCL

$$p(x|y) \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \delta_{x=X_i} \triangleq \hat{p}^N(x)$$

Considérons $\phi = 1$

- Cas $X_i \sim q$

$$\mathbb{V}_q(\hat{\mu}_N) = \frac{1}{N}\left[\frac{\int g^2(x)q(x)\,\mathrm{d}x}{\left(\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2} - 1\right]$$

- Cas $X_i \sim \tilde{q}$

$$w_i \propto \frac{g(X_i)q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)}$$

$$\mathbb{V}_{\tilde{q}}(\hat{\mu}_N) = \frac{1}{N}\left[\frac{\int g^2(x)\frac{q^2(x)}{\tilde{q}(x)}\,\mathrm{d}x}{\left(\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2} - 1\right]$$

Estimation bayésienne : échantillonnage pondéré

Analyse de l'erreur Monte Carlo : $p(x|y) \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \delta_{x=X_i}$ avec $w_i = \frac{g(X_i)}{\sum_{i=1}^{N} g(X_i)}$

Variance des poids non normalisés

$$\mathbb{V}_q\left(\frac{g(X)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x}\right) = \left[\frac{\int g^2(x)q(x)\,\mathrm{d}x}{\left(\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2} - 1\right]$$

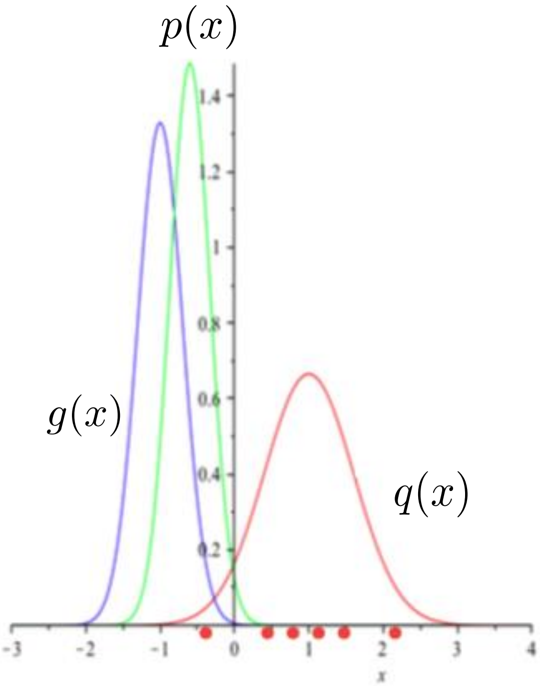
$\longrightarrow$ Bon critère pour quantifier l'erreur Monte Carlo

Estimation bayésienne : échantillonnage pondéré

Critère de concentration des poids normalisés

$$\frac{1}{N} \leq \sum_{i=1:N} w_i^2 \leq 1 \quad \begin{cases} \text{minimal si } w_i = \frac{1}{N} \\ \text{maximal si } w_i = [i = i_o] \end{cases}$$

$$\mathbb{V}_q(\hat{\mu}_N) = \frac{1}{N}\left[\frac{\int g^2(x) q(x)\, \mathrm{d}x}{\left(\int g(x) q(x)\, \mathrm{d}x\right)^2} - 1\right] \approx \left[\sum_{i=1:N} w_i^2\right] - \frac{1}{N}$$



Estimation bayésienne : résumé

$$Y = h(X) + \epsilon$$

$$p(x|y) = \frac{g(x)q(x)}{\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x} \propto g(x)q(x)$$

Echantillonner $X^i \sim \tilde{q}$

$$p(x|y) \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \delta_{x=X_i} \quad \text{avec} \quad w_i \propto \frac{g(X_i)q(X_i)}{\tilde{q}(X_i)}$$

Erreur MC
(var des poids)

$$\mathbb{V}_{\tilde{q}}(\hat{\mu}_N) = \frac{1}{N}\left[\frac{\int g^2(x)\frac{q^2(x)}{\tilde{q}(x)}\,\mathrm{d}x}{\left(\int g(x)q(x)\,\mathrm{d}x\right)^2} - 1\right]$$

$\longrightarrow$ Choisir $\tilde{q}$ proche de l'a posteriori.
En particulier doit dépendre de la mesure

Filtre particulaire

Filtrage particulaire : calcul numérique approché du filtre Bayésien, estimation de l'état caché dans un système dynamique bruité, modélisé par une chaîne de Markov à l'aide d'un système de particules en interaction.

Les particules explorent l'espace d'état de manière indépendante selon le système dynamique (noyau markovien) les particules interagissent sous l'effet d'un mécanisme de sélection de pondération, de correction en fonction de l'adéquation de chaque particule avec la mesure (vraisemblance)

Filtre particulaire

Filtrage non-linéaire : estimer la densité conditionnelle ou a posteriori.

Estimer à tout instant la probabilité de l'état caché sachant toutes les mesures

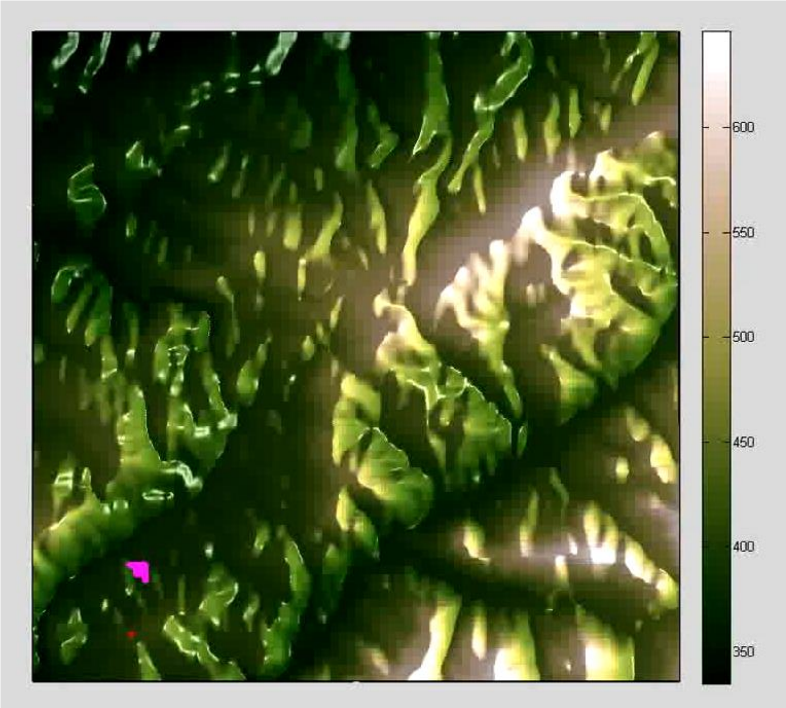
La densité peut être multimodale

→ Le filtre de Kalman étendu (ou non parfumé) n'est pas adapté

→ FP : estimer la densité par la méthode Monte Carlo en propageant (dynamique) et en corrigeant (pondération par la mesure) un ensemble de particules

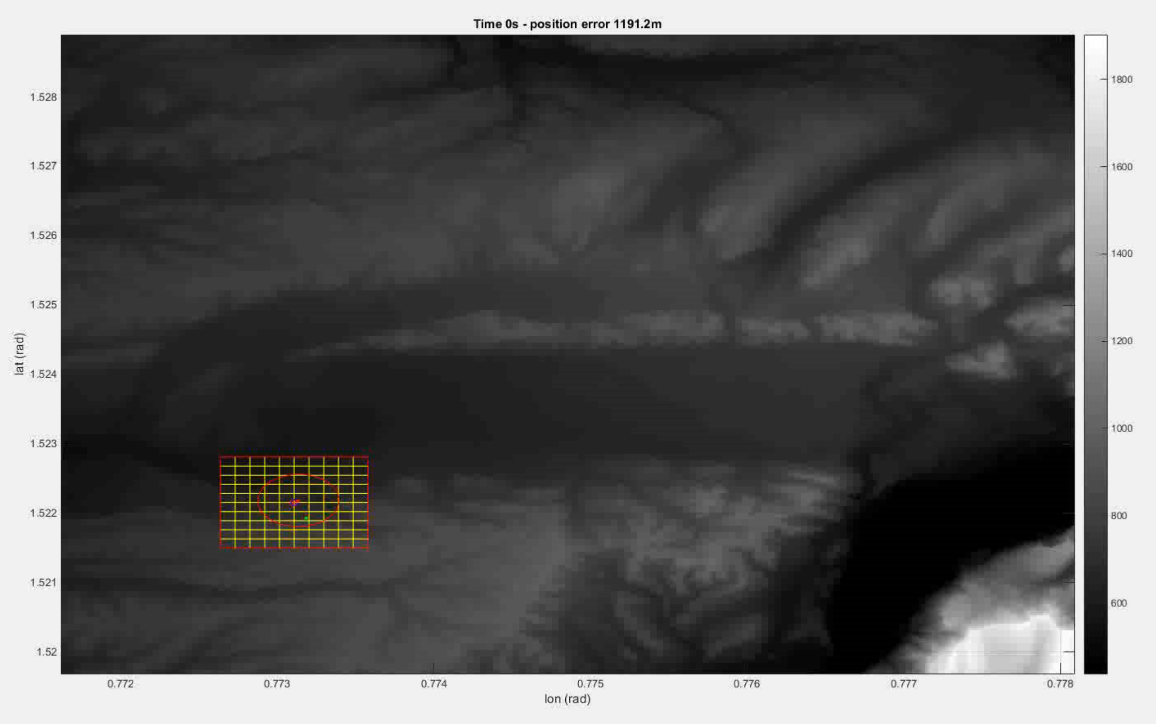
Chaque particule est une trajectoire candidate de l'état

Filtre particulaire – Exemples



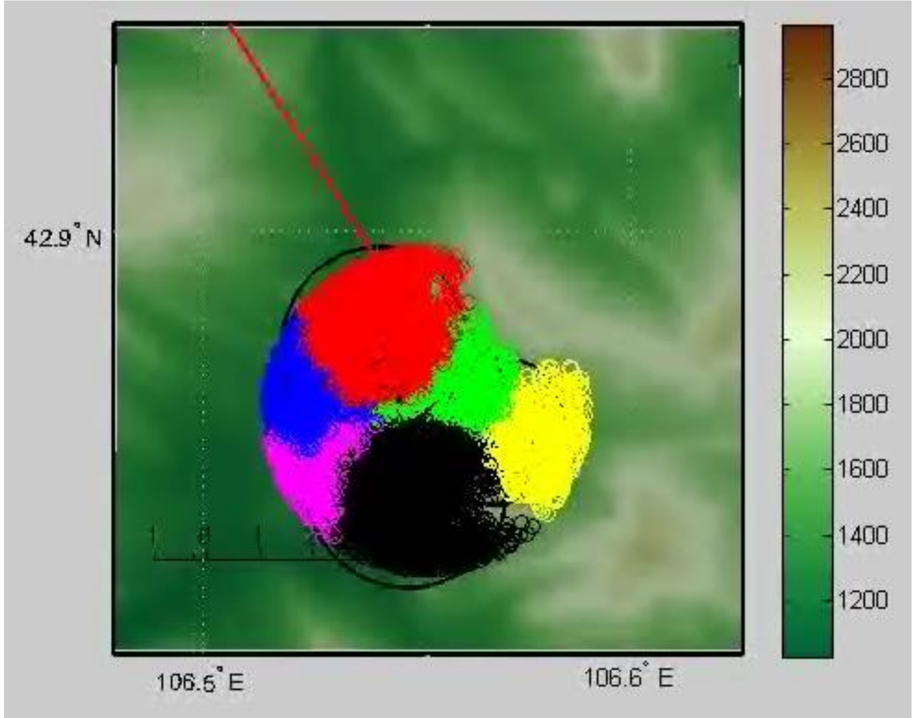
Corrélation de terrain

Filtre particulaire – Exemples



Corrélation de terrain

Filtre particulaire – Exemples



Corrélation de terrain

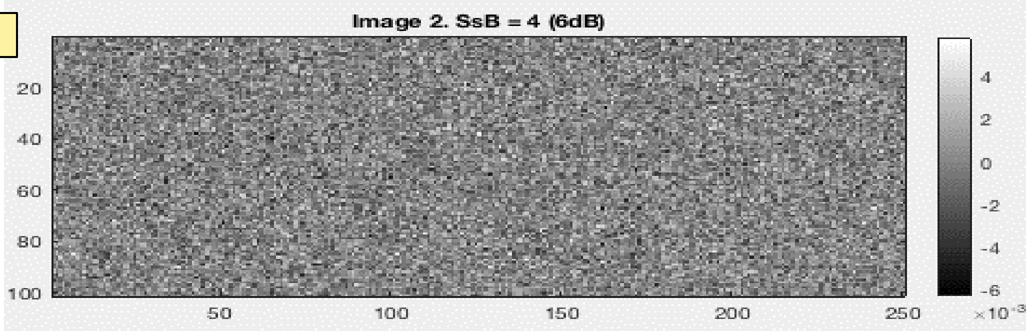
Filtre particulaire avec nuage de particules régularisé par un mélange de gaussiennes

➔ Réduit les risques de dégénérescence du nuage de particules

Filtre particulaire – Exemples

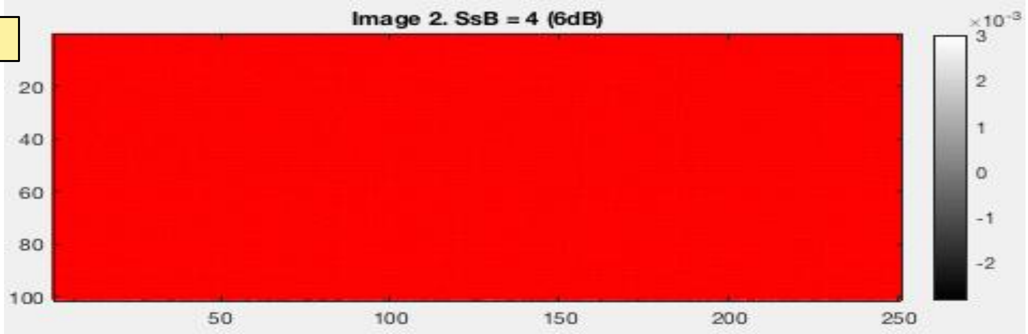
Détection par TBD (Track Before Detect) : suivi de satellite / IR

vidéo en entrée du filtre



- → Inversion bayésienne sur la base d'un a priori trajectographique
- → Fonction d'importance obtenue comme mélange de gaussiennes autour des points de MAP

Filtrage



Filtre particulaire – Exemples

Suivi visuel par histogramme

Particule = boite

Filtre particulaire – Applications

Avantages du FP

- Facilité de mise en œuvre
- Prise en compte de modèles complexes (hybrides avec contraintes).
- Cadre non-linéaire, non gaussien → Multimodalité
- Prise en comptes des informations a priori (contraintes,...)
- Estimation de la densité conditionnelle complète
- Méthode non paramétrique

Applications

- Corrélation de terrain, poursuite
- Vidéo
- robotique mobile
- intégration longue, track before detect (radar, GPS)

Historique des méthodes de Monte Carlo en filtrage

- Filtre pondéré séquentiel (Handschin et Mayne, 1969)
  - Théorique issu de la physique
- Filtre particulaire (Del Moral, Rigal et Salut, 1992)
  - Pistage
- Bootstrap filter, SIR (Gordon, Salmond et Smith, 1993)
  - Pistage
- Monte Carlo filter (Kitagawa, 1996)
  - Pistage
- Condensation (Blake, Isard, 1996)
  - Image/vidéo

Filtre particulaire – Améliorations des algorithmes

- Linéarisation locale : Doucet (96) pour l'EKF, Doucet (00) pour l'UKF
- Auxilliary particle filter : Pitt & Shephard (99)
- Kernel smoothing (regularisation) : Hurzeler & Kunsch (98), Oudjane & Musso & Le Gland (00), Liu & West (00), Pham & Dahia &Musso (03)
- Laplace particle filter : Bui Quang & Musso & Le Gland
- Mixture regularized particle filter : Murangira & Musso & Allard & Dahia
- Filtres particulaires basés sur les groupes de Lie : Chahbazian & Dahia & Musso

Filtre particulaire – Tutoriaux

2002 : Arulampalam, M Sanjeev & Maskell, Simon & Gordon, Neil & Clapp, Tim

« A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking »

2009 : Doucet, Arnaud & Johansen, Adam M

« A tutorial on particle filtering and smoothing: Fifteen years later »

Filtre particulaire – Thèses à l'Onera

2000 Nadia Oudjane. Doctorat de l'université de Rennes I, option mathématiques appliquées. « Stabilité et approximations particulaires en filtrage non linéaire. Application au pistage »

2005 Karim Dahia. Doctorat de l'Université Joseph Fourier Grenoble, spécialité Mathématiques et applications. « Nouvelles méthodes en filtrage particulaire. Application au recalage de navigation par mesures altimétriques »

2013 Paul Bui Quang de l'université de Rennes 1. « Approximation particulaire et méthode de Laplace pour le filtrage Bayesien »

2014 Achille Murangira « Nouvelles approches en filtrage particulaire : application au recalage de la navigation inertielle portant sur le filtrage particulaire appliqué au recalage altimétrique »

2018 Nicolas Merlinge. « State estimation and trajectory planning using box particle kernels »

2023 Clément Chahbazian : « Nouveaux filtres particulaires basés sur les groupes de Lie »