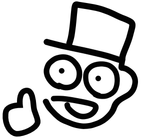

[数値解析 第1回]

有限桁の呪縛

丸めた数値と真面目に向き合う

数値解析とは

数値解析 (Numerical Analysis)

数学の問題を数値を用いて近似的に解く応用数学の一分野

- 現代的には「数値を用いて」の部分を**「計算機 (コンピュータ) を用いて」**としても良い

数値解析に現れる２つの有限

- 数値解析は**２つの有限縛り**を数学に加えたもの
- **有限桁縛り**
  - 数値は有限桁までしか扱えないという縛り
- **有限回縛り**
  - 繰り返しの処理は有限回までしか試行できないという縛り

数値解析で目指すもの

- **速さ**
  - 同じ問題をより速く解ける
- **安さ**
  - 記憶領域を節約できる
- **旨さ**
  - 近似解の質が高い (誤差が小さい)

[問題] I-A

有効数字10進3桁で表された数値 $a = 0.537$, $b = 0.612$, $c = 0.126$ に対して $(a + b) + c$ と $a + (b + c)$ を計算せよ。ただし加算の際に得られた数値は有効数字10進4桁以降を切り捨てて計算せよ。

[略解] I-A

$$
\begin{aligned}
(a \ + \ b) + c \\
&= (0.537 + 0.612) + 0.126 \\
&= 1.14 + 0.126 = 1.26
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \ + \ (b + c) \\
&= 0.537 + (0.612 + 0.126) \\
&= 0.537 + 0.738 = 1.27
\end{aligned}
$$

[解説] 有限桁の呪縛

- **結合法則が成り立たない**
  - $(a+b)+c \neq a+(b+c)$
- 有限桁の数値の加算は**足す順番に依存する**
  - 演算の度に丸め操作を繰り返すと**丸め誤差**が蓄積するため

[用語解説]

丸め誤差 (rounding error)

ある数値を有限桁に丸めることによって生じる誤差

- 丸め操作
  - 問題I-A では「10進4桁以降を切り捨て」の部分が丸めの操作
- 有限桁しか扱えない数値解析では丸め誤差がいつもつきまとう

[手法] 旨くするための工夫

カハンの保証付き総和法
(Kahan summation algorithm/compensated summation)

Input: $a_1, \ldots, a_n, n$

Output: sum

$sum \leftarrow 0.0;\ cp \leftarrow 0.0$

for $i = 1, 2, \ldots, n$ **:**

  $y \leftarrow a_i - cp$

  $t \leftarrow sum + y$

  $cp \leftarrow (t - sum) - y$

  $sum \leftarrow t$

return sum

[問題] I-B

有効数字10進3桁で表された数値 $a = 6.52$, $b = 6.57$ に対して $\frac{a+b}{2}$ と $a + \frac{b-a}{2}$ を計算せよ。ただし加減乗除の際は得られた数値の有効数字10進4桁以降を切り捨てて計算せよ。