数値解析 レポート No. 2

学籍番号

氏名

[〆切] 2020/10/08 19:00

[**I.** 有限桁の呪縛]

I-B. 10 進 3 桁で表された数値 $a = 6.52$, $b = 6.57$ に対して $\frac{a+b}{2}$ と $a + \frac{b-a}{2}$ を計算せよ。ただし加減乗除の際は得られた数値の 10 進 4 桁以降を切り捨てて計算せよ。

実数 x に対して 10 進 4 桁以降を切り捨てる関数を $r(x)$ とおく.

$a = r(a)$, $b = r(b)$ であるため 計算すべき2式はそれぞれ

$$\frac{a+b}{2} \longrightarrow r\left(\frac{r(a+b)}{2}\right) \quad \cdots ①$$

$$a + \frac{b-a}{2} \longrightarrow r\left(a + r\left(\frac{r(b-a)}{2}\right)\right) \quad \cdots ②$$

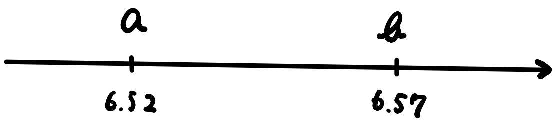
と書き換えられる.

・①を順番に計算する.

$$r(a+b) = r(6.52+6.57) = r(13.09) = 13.0$$

$$r\left(\frac{r(a+b)}{2}\right) = r\left(\frac{13.0}{2}\right) = r(6.50) = \underline{6.50}$$

従って $\frac{a+b}{2} = \underline{6.50}$ //



・②を順番に計算する.

$$r(b-a) = r(6.57-6.52) = r(0.05) = 0.05$$

$$r\left(\frac{r(b-a)}{2}\right) = r\left(\frac{0.05}{2}\right) = r(0.025) = 0.025$$

$$r\left(a + r\left(\frac{r(b-a)}{2}\right)\right) = r(6.52+0.025) = r(6.545) = 6.54$$

従って $a + \frac{b-a}{2} = \underline{6.54}$ //

追加コメント

- 値を $a = -6.52$, $b = 6.57$ と変更すると今度は $\frac{a+b}{2}$ の方が誤差が小さくなる.(旨くなる)
- これも関数 $r(x)$ の引数の絶対値の最大値を考えれば判断できる.
- 丸めの操作は上位の桁ほど特権的地位を持つため値の絶対値を無駄に大きくしない計算の方が下位の桁の精度を維持できる.

数値解析 レポート No. 2　　学籍番号　　氏名

[〆切] 2020/10/08 19:00

[**II.** 有限回の呪縛]

II-A. 指数関数 e^x を $x=0$ でテイラー展開して得られた 9 次の多項式を $p_9(x)$ と置く。$x \in [-1,1]$ の範囲のすべての x に対して

$$|e^x - p_9(x)| \leq 10^{-6}$$

となることを示せ。

$x \in [-1,1]$ の範囲で e^x を考える。剰余項付きテイラーの定理より

e^x はある $n \geq 0$ に対して

$$e^x = p_n(x) + R_n(x) \qquad (x \in [-1,1]) \qquad \cdots ①$$

と表せる。ここで $p_n(x)$ は以下の n次多項式で与えられる。

$$p_n(x) = \qquad (x \in [-1,1])$$

また $R_n(x)$ は以下の式で表されるラグランジュの剰余項である

$$R_n(x) = \qquad (x \in [-1,1],\ c_x \in [-1,1]). \qquad \cdots ②$$

$n=9$ の場合を考えた時、①は

$$e^x = p_9(x) + R_9(x) \iff e^x - p_9(x) = R_9(x)$$

となる。従って問いにある不等式左辺は

$$|e^x - p_9(x)| = |R_9(x)| \qquad \cdots ①'$$

と表せる。②を用いて①'の右辺を変形すると

$$|R_9(x)| = \qquad \cdots ②'$$

となる。$x \in [-1,1]$, $c_x \in [-1,1]$ より $x^{10} \leq$, $e^{c_x} \leq$

であり、また $\frac{1}{10!} =$ 　　　であるから ②'は

$$|R_9(x)| \leq \qquad \cdots ②''$$

のように不等式で 10^{-6} を用いて上からおさえられる。①', ②''より

が示された」

◎ ラグランジュの剰余項について

Lagrange Remainder

(≠ Reminder)

2020
10/6

剰余項付きテイラーの定理

Taylor's Theorem with Remainder

$f(x)$ がある $n \geq 0$ に対して閉区間 $[a, b]$ で連続な $n+1$ 階導関数を持つとし、$x, x_0 \in [a, b]$ とする。このとき

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

が成り立つ。ここで

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \quad \left(\text{積分形の剰余項}\right)$$

さらに $x \neq x_0$ のとき、$x < \xi_x < x_0$ または $x_0 < \xi_x < x$ を満たすある ξ_x が存在し、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \left(\text{ラグランジュ形の剰余項}\right)$$

を満たす。

- 剰余項付きテイラーの定理の証明にロルの定理と平均値の定理を使う

  ↑繰り返し使う　↑$n=0$ の時

ロルの定理

Rolle's Theorem

関数 $g(t)$ が $t \in [x_0, x]$ で連続、

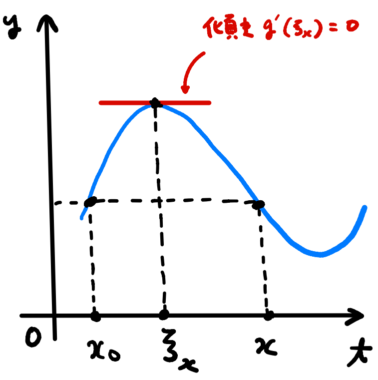
$t \in (x_0, x)$ のすべての t で $g'(t)$ が存在するとする。

もし $g(x_0) = g(x)$ ならば

$$g'(\xi_x) = 0 \quad (\xi_x \in (x_0, x))$$

となる ξ_x が少なくとも1つ存在する。

x と x_0 を入れ替えた場合も同じく成り立つ。



↑ $x_0 < x$ の時の図

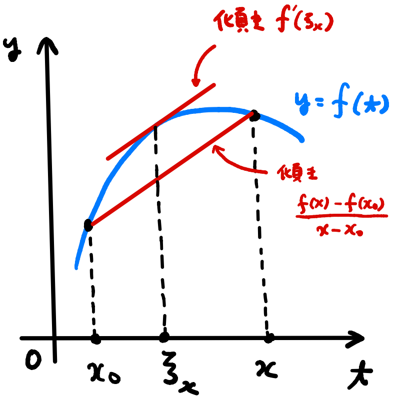
- 証明省略。

平均値の定理

Mean Value Theorem

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(\xi_x)(x - x_0)$$



$x_0 < x$ の時の図

x と x_0 を入れ替えた場合も同じ.

平均値の定理の証明

$g(t)$ を以下のように定義する.

$g(t) =$ …①

- $g(x) =$

- $g(x_0) =$

従って　　　　　　　　となる.

ロルの定理より　　　　　　　　となる

ξ_x が少なくとも1つ存在する. ① の両辺を t で微分すると

$g'(t) =$

であるから $t = \xi_x$ とすると

$g'(\xi_x) =$

$\therefore$

//

x と x_0 を入れ換えた場合も同様

剰余項付きテイラーの定理の証明

n=0 のとき、平均値の定理より

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{P_0(x)} + \underbrace{f'(\xi_x)(x-x_0)}_{R_0(x)}$$

n≧1 のとき、g(t) を以下のように定義する。

この時点では f(t) がどのような形になるか未知

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t-x_0)^k - K(t-x_0)^{n+1} \quad \cdots ①$$

$$= f(t) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t-x_0)^k - K(t-x_0)^{n+1} \quad \cdots ①'$$

①式において K は $g(x)=0$ を満たすように決定する。つまり

$t=x$ の点

$$K = \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-n-1}$$

とおく。K を $g(x)=0$ を満たすように決めたため

$$g(x) = 0. \quad \cdots ②$$

が成り立つ。また ①' において $t=x_0$ とすると

$$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0 \quad \cdots ③$$

となる。①' の両辺を t で 1～n 回微分した式をそれぞれ考えると

$$g'(t) = f'(t) - f'(x_0) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} - K\cdot(n+1)\cdot(x-x_0)^n$$

$$g''(t) = f''(t) - f''(x_0) - \sum_{k=3}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2} - K\cdot(n+1)\cdot n\cdot(x-x_0)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0) - K\cdot(n+1)\cdot n \cdots 3\cdot(x-x_0)^2$$

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0) - K\cdot(n+1)!\cdot(x-x_0) \quad \cdots ④$$

となり、これらの式に$t=x_0$を代入すると

$$g'(x_0)=g''(x_0)=\cdots=g^{(n)}(x_0)=0 \quad \cdots ⑤$$

となる. ②, ③ より $g(x_0)=g(x)(=0)$ であるからロルの定理より

となる ξ_1 が存在する. ⑤ より $g'(x_0)=g'(\xi_1)\ (=0)$ であるから

再びロルの定理より

となる ξ_2 が存在する. 以下 ⑤ を順番に用いて

$$\cdots ⑥$$

となる. ④ の両辺を t で微分すると

$$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-K\cdot(n+1)!$$

であるため ⑥ の $g^{(n+1)}(\xi_{n+1})=0$ と合わせて

$$\therefore \qquad \cdots ⑦$$

となる. ①, ②, ⑦ より

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k-\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

数値解析 レポート No. 2　　学籍番号　　氏名

[〆切] 2020/10/08 19:00

[I. 有限桁の呪縛]

I-B. 10 進 3 桁で表された数値 $a = 6.52$, $b = 6.57$ に対して $\frac{a+b}{2}$ と $a + \frac{b-a}{2}$ を計算せよ。ただし加減乗除の際は得られた数値の 10 進 4 桁以降を切り捨てて計算せよ。

実数 x に対して 10 進 4 桁以降を切り捨てる関数を $r(x)$ とおく。

$a = r(a)$, $b = r(b)$ であるため 計算すべき 2 式はそれぞれ

$$\frac{a+b}{2} \longrightarrow r\left(\frac{r(a+b)}{2}\right) \quad \cdots ①$$

$$a + \frac{b-a}{2} \longrightarrow r\left(a + r\left(\frac{r(b-a)}{2}\right)\right) \quad \cdots ②$$

と書き換えられる。

・①を順番に計算する。

値が一時的に大きくなった所で丸め誤差が大きくなる。

$$r(a+b) = r(6.52+6.57) = r(13.09) = 13.0$$

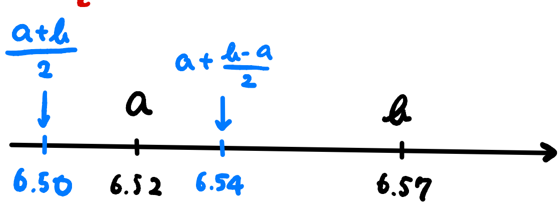
丸め誤差 0.09

$$r\left(\frac{r(a+b)}{2}\right) = r\left(\frac{13.0}{2}\right) = r(6.50) = 6.50$$

従って $\frac{a+b}{2} = 6.50$ //

関数 $r(x)$ の引数の絶対値の最大値 $|x| = 13.09$

平均値が区間 (a, b) からはみ出す!



・②を順番に計算する。

$$r(b-a) = r(6.57-6.52) = r(0.05) = 0.05$$

$$r\left(\frac{r(b-a)}{2}\right) = r\left(\frac{0.05}{2}\right) = r(0.025) = 0.025$$

$$r\left(a + r\left(\frac{r(b-a)}{2}\right)\right) = r(6.52+0.025) = r(6.545) = 6.54$$

丸め誤差 0.005

従って $a + \frac{b-a}{2} = 6.54$ //

関数 $r(x)$ の引数の絶対値の最大値 $|x| = 6.545$

追加コメント

- 値を $a = -6.52$, $b = 6.57$ と変更すると今度は $\frac{a+b}{2}$ の方が誤差が小さくなる。(旨くなる)
- これも関数 $r(x)$ の引数の絶対値の最大値を考えれば判断できる。
- 丸めの操作は上位の桁ほど特権的地位を持つため値の絶対値を無駄に大きくしない計算の方が下位の桁の精度を維持できる。

数値解析 レポート No. 2

[〆切] 2020/10/08 19:00

学籍番号

氏名

[**II.** 有限回の呪縛]

II-A. 指数関数 e^x を $x = 0$ でテイラー展開して得られた 9 次の多項式を $p_9(x)$ と置く。$x \in [-1, 1]$ の範囲のすべての x に対して

$$|e^x - p_9(x)| \leq 10^{-6}$$

となることを示せ。

$x \in [-1, 1]$ の範囲で e^x を考える. 剰余項付きテイラーの定理より

e^x はある $n \geq 0$ に対して

$$e^x = p_n(x) + R_n(x) \quad (x \in [-1, 1]) \quad \cdots ①$$

と表せる. ここで $p_n(x)$ は以下の n 次多項式で与えられる.

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \quad (x \in [-1, 1])$$

また $R_n(x)$ は以下の式で表されるラグランジュの剰余項である.

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^{c_x} \quad (x \in [-1, 1],\ c_x \in [-1, 1]). \quad \cdots ②$$

$n = 9$ の場合を考えた時, ① は

$$e^x = p_9(x) + R_9(x) \iff e^x - p_9(x) = R_9(x)$$

となる. 従って問いにある不等式左辺は

$$|e^x - p_9(x)| = |R_9(x)| \quad \cdots ①'$$

と表せる. ② を用いて ①′ の右辺を変形すると

$$|R_9(x)| = \frac{1}{10!} x^{10} e^{c_x} \quad \cdots ②'$$

となる. $x \in [-1, 1]$, $c_x \in [-1, 1]$ より $x^{10} \leq 1$, $e^{c_x} \leq e$

であり, また $\frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800} \leq \frac{1}{3.6} \times 10^{-6} \leq \frac{1}{e} \times 10^{-6}$ であるから ②′ は

$$|R_9(x)| \leq \left(\frac{1}{e} \times 10^{-6}\right) \times 1 \times e = 10^{-6} \quad \cdots ②''$$

のように不等式で 10^{-6} を用いて上からおさえられる. ①′, ②″ より

$$|e^x - p_9(x)| \leq 10^{-6}$$

が示された. ◢

2020 10/6

ラグランジュの剰余項について

Lagrange Remainder

(≒ Reminder)

剰余項付きテイラーの定理

Taylor's Theorem with Remainder

$f(x)$ がある $n \geq 0$ に対して閉区間 $[a,b]$ で連続な $n+1$ 階導関数を持つとし、$x, x_0 \in [a,b]$ とする。このとき

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

が成り立つ。ここで

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \quad \left(\begin{array}{c}\text{積分形の}\\\text{剰余項}\end{array}\right)$$

さらに $x \neq x_0$ のとき、$x < \xi_x < x_0$ または $x_0 < \xi_x < x$ を満たすある ξ_x が存在し、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \left(\begin{array}{c}\text{ラグランジ形の}\\\text{剰余項}\end{array}\right)$$

を満たす。

- 剰余項付きテイラーの定理の証明にロルの定理と平均値の定理を使う

繰り返し使う

n=0の時

ロルの定理

Rolle's Theorem

関数 $g(t)$ が $t \in [x_0, x]$ で連続、

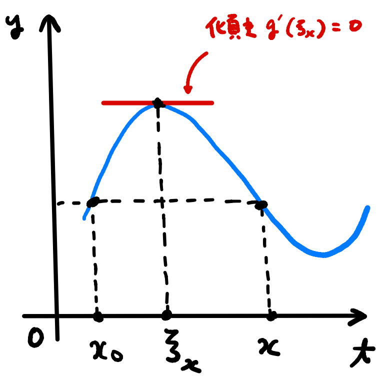
$t \in (x_0, x)$ のすべての t で $g'(t)$ が存在するとする。

もし $g(x_0) = g(x)$ ならば

$$g'(\xi_x) = 0 \quad (\xi_x \in (x_0, x))$$

となる ξ_x が少なくとも1つ存在する。

x と x_0 を入れ替えた場合も同じく成り立つ。



$x_0 < x$ の時の図

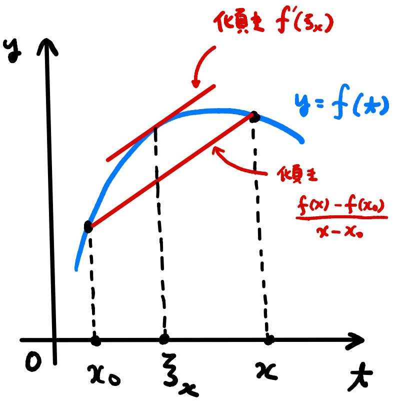
- 証明省略.

平均値の定理

Mean Value Theorem

$$f'(\xi_x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Leftrightarrow\ f(x)=f(x_0)+f'(\xi_x)(x-x_0)$$



↑ $x_0<x$ の時の図

x と x_0 を入れ替えた場合も同じ.

平均値の定理の証明

$g(t)$ を以下のように定義する.

$$g(t)=f(t)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(t-x_0)\qquad\cdots ①$$

- $g(x)=f(x)-\frac{f(x)-f(x_0)}{\cancel{x-x_0}}\cancel{(x-x_0)}$

$$=f(x)-f(x)+f(x_0)$$

$$=f(x_0)$$

- $g(x_0)=f(x_0)$

従って $g(x)=g(x_0)=f(x_0)$ となる.

ロルの定理より $g'(\xi_x)=0\quad(\xi_x\in[x_0,x])$ となる

ξ_x が少なくとも1つ存在する. ① の両辺を t で微分すると

$$g'(t)=f'(t)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

であるから $t=\xi_x$ とすると

$$g'(\xi_x)=f'(\xi_x)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$$

$$\therefore\ f'(\xi_x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\quad /\!/$$

x と x_0 を入れ替えた場合も同様

剰余項付きテイラーの定理の証明

$n=0$ のとき、平均値の定理より

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{P_0(x)} + \underbrace{f'(\xi_x)(x-x_0)}_{R_0(x)}$$

$n \geq 1$ のとき、$g(t)$ を以下のように定義する。

この時点では $f(t)$ が どのような形になるか未知

$$g(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t-x_0)^k - K(t-x_0)^{n+1} \quad \cdots ①$$

$$= f(t) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t-x_0)^k - K(t-x_0)^{n+1} \quad \cdots ①'$$

①式において K は $g(x)=0$ を満たすように決定する。つまり

$t=x$ の点

$$K = \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-n-1}$$

とおく。K を $g(x)=0$ を満たすように決めたため

$$g(x) = 0. \quad \cdots ②$$

が成り立つ。また ①' において $t=x_0$ とすると

$$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0 \quad \cdots ③$$

となる。①'の両辺を t で $1 \sim n$ 回微分した式をそれぞれ考えると

$$g'(t) = f'(t) - f'(x_0) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(t-x_0)^{k-1} - K\cdot(n+1)\cdot(t-x_0)^n$$

$$g''(t) = f''(t) - f''(x_0) - \sum_{k=3}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(t-x_0)^{k-2} - K\cdot(n+1)\cdot n\cdot(t-x_0)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(t-x_0) - K\cdot(n+1)\cdot n \cdots 3\cdot(t-x_0)^2$$

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0) - K\cdot(n+1)!\cdot(t-x_0) \quad \cdots ④$$

となり、これらの式に $t=x_0$ を代入すると

$$g'(x_0)=g''(x_0)=\cdots=g^{(n)}(x_0)=0 \quad \cdots ⑤$$

となる。②, ③ より $g(x_0)=g(x)(=0)$ であるからロルの定理より

$$g'(\xi_1)=0 \quad (\xi_1 \in (x_0, x))$$

となる ξ_1 が存在する。⑤ より $g'(x_0)=g'(\xi_1)\ (=0)$ であるから

再びロルの定理より

$$g''(\xi_2)=0 \quad (\xi_2 \in (x_0, \xi_1))$$

となる ξ_2 が存在する。以下 ⑤ を順番に用いて

$$g^{(n+1)}(\xi_{n+1})=g^{(n)}(\xi_n)=\cdots=g''(\xi_2)=g'(\xi_1)=0 \quad \cdots ⑥$$

$$x_0<\xi_{n+1}<\xi_n<\cdots<\xi_2<\xi_1<x$$

となる。④ の両辺を t で微分すると

$$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-K\cdot(n+1)!$$

であるため ⑥ の $g^{(n+1)}(\xi_{n+1})=0$ と合わせて

$$g^{(n+1)}(\xi_{n+1})=f^{(n+1)}(\xi_{n+1})-K\cdot(n+1)!=0$$

$$\therefore K=\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \quad \cdots ⑦$$

となる。①, ②, ⑦ より

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k-\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\lrcorner$