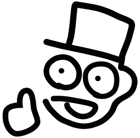
# [問題] I-B

有効数字10進3桁で表された数値 $a = 6.52$, $b = 6.57$ に対して $\frac{a+b}{2}$ と $a + \frac{b-a}{2}$ を計算せよ。ただし加減乗除の際は得られた数値の有効数字10進4桁以降を切り捨てて計算せよ。

# [略解] I-B

$$\frac{a+b}{2} = \frac{6.52+6.57}{2} = \frac{13.0}{2} = 6.50$$

$$\begin{aligned} a + \frac{b-a}{2} &= 6.52 + \frac{0.05}{2} \\ &= 6.52 + 0.025 = 6.54 \end{aligned}$$



[数値解析 第2回]

# 有限回の呪縛

終わらない計算を始めないために

# 有限回縛りにつきまとう誤差

無限回の試行を仮定しているアルゴリズムを有限回で止めてしまうと**打ち切り誤差**が生じる

**打ち切り誤差** (Truncation error)

ある繰り返し処理を途中で打ち切ることによって生じる誤差

# 打ち切り誤差を飼いならす

数値解析が提供してくれるもの

- 解の精度を保証する方法
  - 何回処理すれば十分な精度の近似解が得られるかが予めわかる
- 近似解への収束の速さを測る方法
  - どの手法を使えばより収束が速いかが予めわかる

# [問題] II-A

指数関数 $e^x$ を $x = 0$ でテイラー展開して得られた9次の多項式を $p_9(x)$ と置く。$x \in [-1, 1]$ の範囲のすべての $x$ に対して

$$|e^x - p_9(x)| \leq 10^{-6}$$

となることを示せ。

# [略解] II-A

**テイラーの定理より** $e^x$ は $p_9(x)$ と**ラグランジュの剰余項** $R_9(x)$ を用いて
$e^x = p_9(x) + R_9(x)$ と表される。

ここで $R_9(x) = \frac{1}{10!}x^{10}e^{c_x}$ $(c_x \in [-1, 1])$ である。

$|R_9(x)| \leq 10^{-6}$ より不等式が示された。

# [解説] 有限回の呪縛

- テイラー展開に現れる項を有限項までしか足せない
  - **打ち切り誤差**が生じてしまう
- 何項まで足せば十分か知りたい
  - 問題毎に異なる精度目標に対してその精度を実現するための指標があると便利
  - **テイラーの定理**が使える

# [用語解説]

## テイラーの定理 (Taylor's Theorem)

$f(x)$ は $f(x)$ の $n$ 次までのテイラー多項式 $p_n(x)$ と剰余項 $R_n(x)$ を用いて $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ と表せる。

- 剰余項には複数の形がある
  - 打ち切り誤差を調べるには**ラグランジュの剰余項**が便利。誤差の上限が予め計算できる。

# [問題] II-B

$\sqrt{x+1}$ を $x=0$ でテイラー展開して得られた2次の多項式を $p_2(x)$ と置く。$x \in [0,1]$ の範囲のすべての $x$ に対して

$$|\sqrt{x+1} - p_2(x)| \leq \frac{1}{16}$$

となることを示せ。