数値解析 レポート No. 12

学籍番号

氏名

[〆切] 2021/1/13 19:00

[XI. 数値積分法]

XI-B. XI-A で示した定積分をシンプソン則を用いて数値積分する問題を考える。ニュートン・コーツ則で 2 次多項式近似を行う区間の数を $M = 2^{n-1}$ (積分点の数は $2M + 1 = 2^n + 1$) とした時の $n \geq 1$ を 1 ずつ増やして積分値を求めるプログラムを作成し、数値積分の値の相対誤差が 10^{-8} を下回る最も小さい n を求めよ。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

```
import numpy as np

def f(x):
    return np.exp(x) + 1

ans = np.e
n_max = 21
a = 0.0
b = 1.0
width = b - a

for n in range(1, n_max+1):
    M = 2**(n-1)
    h = width/(2*M)
    I = 1.0/3.0 * f(a)
    for i in range(1, 2*M, 2):
        I += 4.0/3.0 *f(a + i * h)
    for i in range(2, 2*M, 2):
        I += 2.0/3.0 *f(a + i * h)
    I += 1.0/3.0 * f(b)
    I *= h
    if abs(I - ans)/ans < 10**-8:
        print(n, M, I, ans, abs(I - ans)/ans)
        break
```

$f(x) = e^x + 1$ とおく.

α_0 / h

$\alpha_1/h, \alpha_3/h, \cdots, \alpha_{2^n-1}/h$

$\alpha_2/h, \alpha_4/h, \cdots, \alpha_{2^n-2}/h$

α_{2^n}/h

相対誤差

$n = 5$

$M = 16$

プログラムの出力

n M

5 16 2.718281837561771 2.718281828459045

3.348705801259184e-09

相対誤差

数値解析 レポート No. 12

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

[〆切] 2021/1/13 19:00

[XII. 数値積分法]

XII-A. 1 階の常微分方程式 $\frac{dy}{dt} = y$ について考える。

(1) $\frac{dy}{dt} = y$ を解析的に解くことにより一般解を求めよ。

(2) 上記の常微分方程式をオイラー法を用いて数値的に解く場合を考える。初期値を $(t_0, y_0) = (0, 1)$、時間の刻み幅を $h = 0.01$ とした時、$y(10)$ の数値解を求めるプログラムを作成し解答せよ。また問 1 の答えと比べることにより相対誤差を求めよ。解答の数値は有効数字 3 桁で 4 桁目を四捨五入すること。作成したプログラムも提出すること。プログラミング言語は問わない。

(1)

(i) $y = 0$ のとき

$\frac{dy}{dt} = y$ を満たし特異解になっている。

(ii) $y \neq 0$ のとき

両辺を y で割ると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 1$$

となる。さらに両辺を t で不定積分すると

$$(\text{左辺}) = \int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt = \int \frac{1}{y}\,dy \quad (\because \text{変数変換})$$

$$= \log y + C_1$$

$$(\text{右辺}) = \int dt = t + C_2$$

$$\therefore \log y + C_1 = t + C_2$$

2つの積分定数をまとめて $C = C_2 - C_1$ として

$$\log y = t + C_2 - C_1 = t + C$$

$$\therefore y = e^C \cdot e^t$$

(2)

```python
import numpy as np

h = 0.01
n = 1000

t = 0
y = 1

for i in range(n):
    y = y + y * h
    t += h

print(t, y)
print(abs(y-np.exp(10))/np.exp(10))
```

```
9.999999999999831 20959.15563781363
0.04845580616227286
```

$$\tilde{y}(10) = 21000$$

初期条件が $(t_0, y(t_0)) = (0, 1)$ であるから

$$y(t_0) = e^C \cdot e^{t_0}$$

$$(\text{左辺}) = 1, \quad (\text{右辺}) = e^C \cdot e^0 = e^C$$

$$\therefore e^C = 1$$

従って与えられた初期条件で一般解は

$$y(t) = e^t$$

となる。これより相対誤差は

$$\frac{|\tilde{y}(10) - y(10)|}{|y(10)|} = \frac{|\tilde{y}(10) - e^{10}|}{|e^{10}|} = 0.0486$$