```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Домашня робота № 1 «Випадкові процеси. Потік подій»

1.

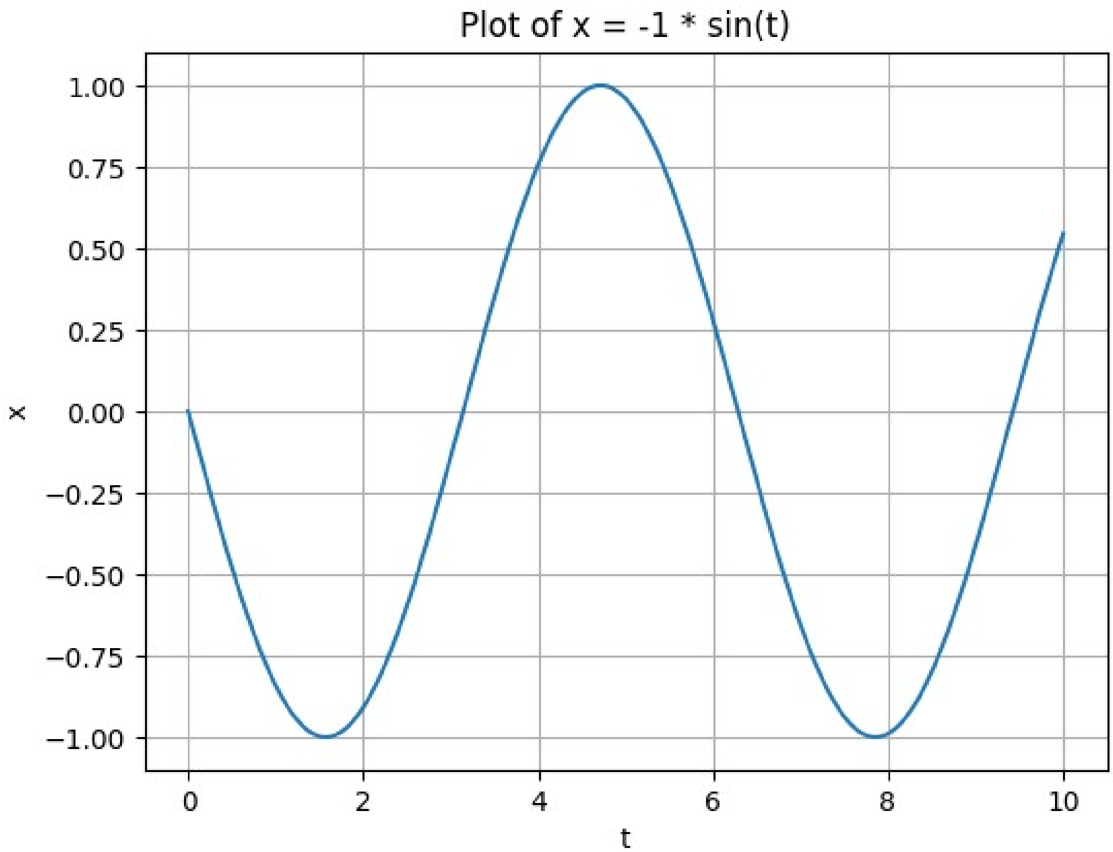
Випадкова функція $X(t) = U \cdot sin(t)$, де U – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[-1; 1]$. Вказати кількість можливих реалізацій випадкового процесу. Знайти будь-які три реалізації функції $X(t)$ під час трьох випробувань, у яких величина U може набувати значень на відрізку $[-1; 1]$ та побудувати їх графіки.

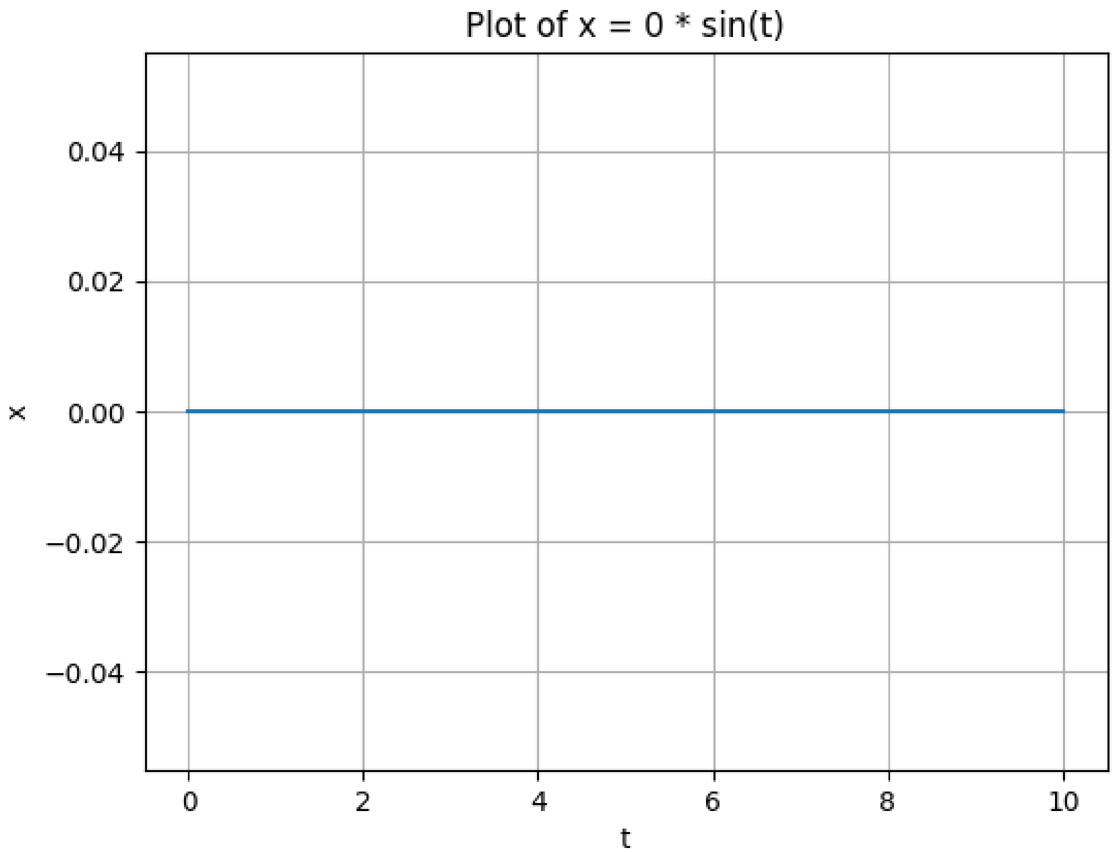
Кількість можливих реалізацій = ∞

$U = -1, 0, 1$
$x_1(t) = -sin(t)$
$x_2(t) = 0$
$x_3(t) = sin(t)$

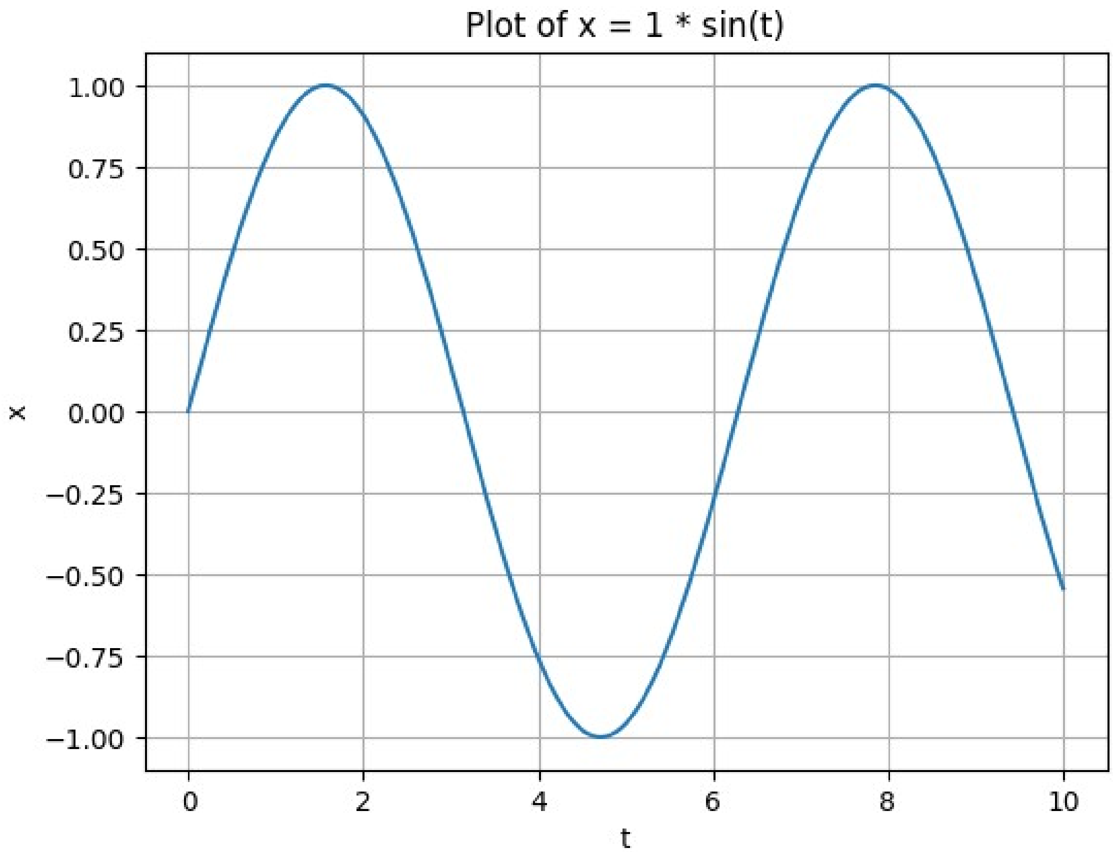
```python
t = np.linspace(0, 10, 1000)


for i in range(-1, 2, 1):
    x = i * np.sin(t)
    plt.plot(t, x)
    plt.title(f'Plot of x = {i} * sin(t)')
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('x')
    plt.grid()
    plt.show()
```


Plot of x = -1 * sin(t)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
x
0
2
4
6
8
10
t



Plot of x = 0 * sin(t)
0.04
0.02
0.00
−0.02
−0.04
x
0
2
4
6
8
10
t



2.

Задано випадковий процес $X(t)=U*e^{5t}$, U – випадкова величина, закон

розподілу якої задано у вигляді ряду розподілу:

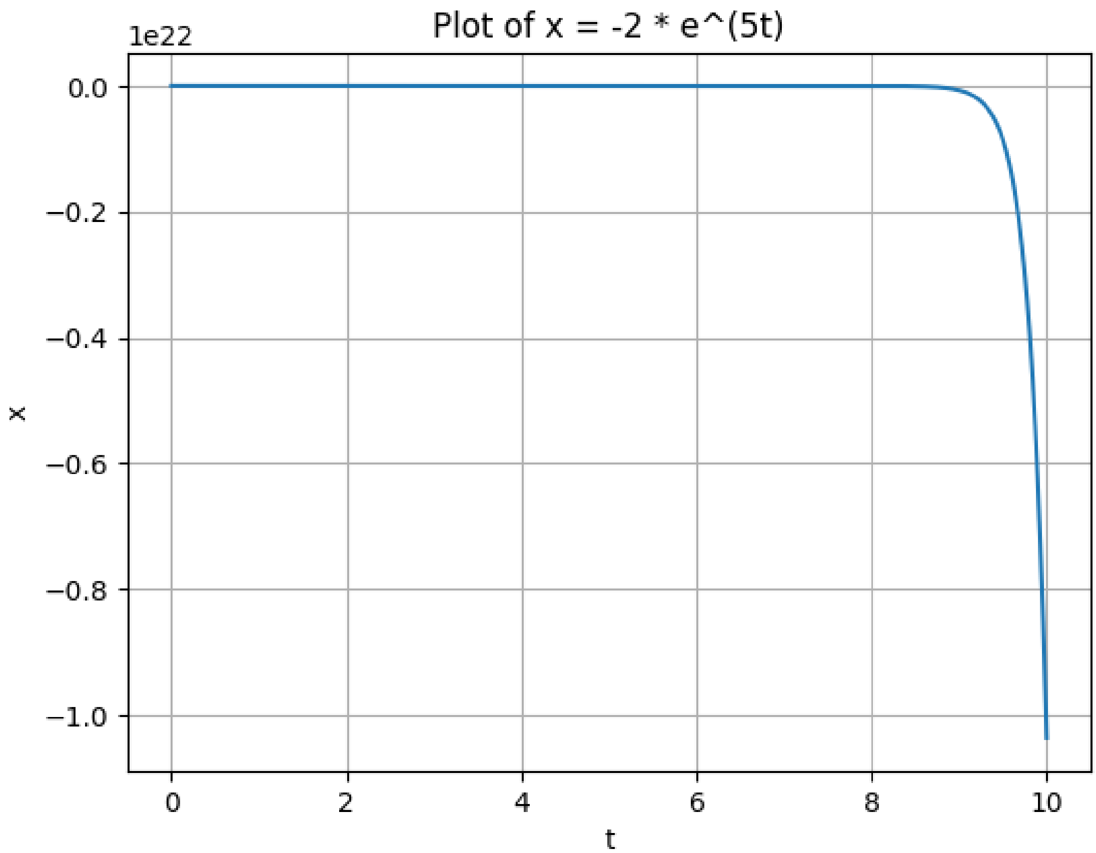
a) Знайти перерізи випадкового процесу при t=1,2,3.
$X(1) = U * e^{5} $
$X(2)=U*e^{10}$
$X(3)=U*e^{15}$

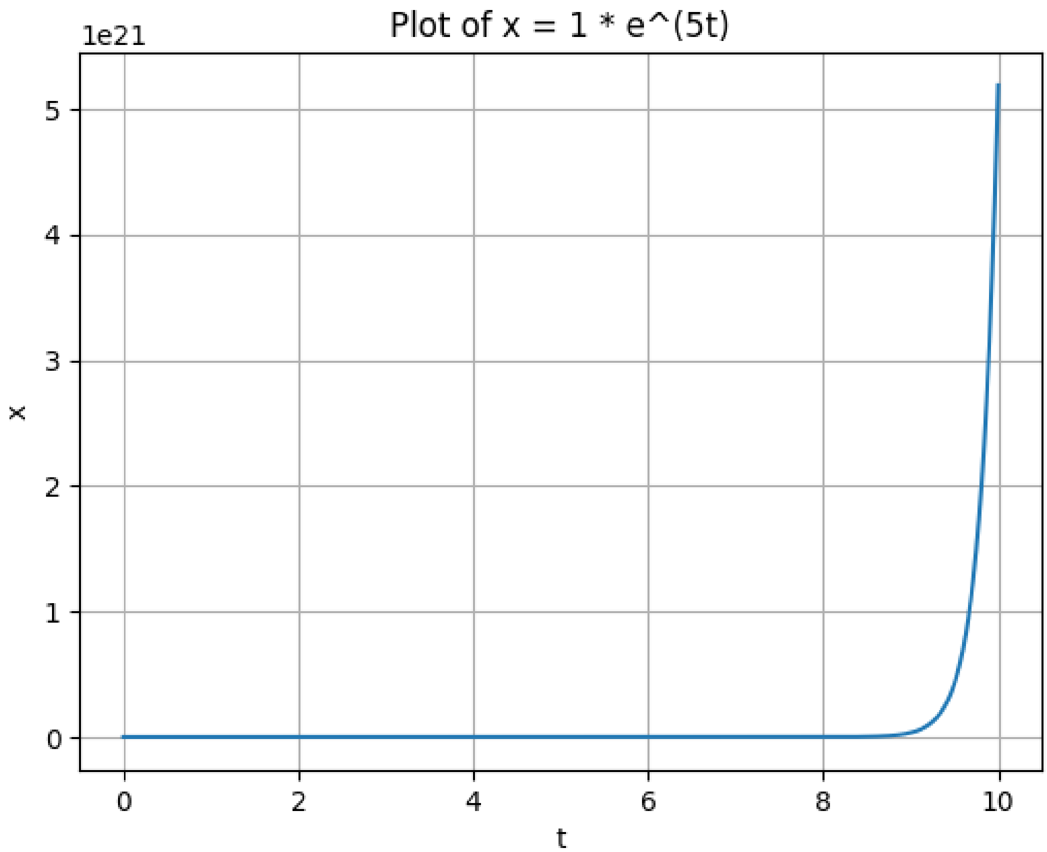
b) Знайти всі можливі реалізації випадкового процесу, побудувати їх графіки.
$x_1(t)=-2*e^{5t}$
$x_1(t)=1*e^{5t}$
$x_1(t)=2*e^{5t}$

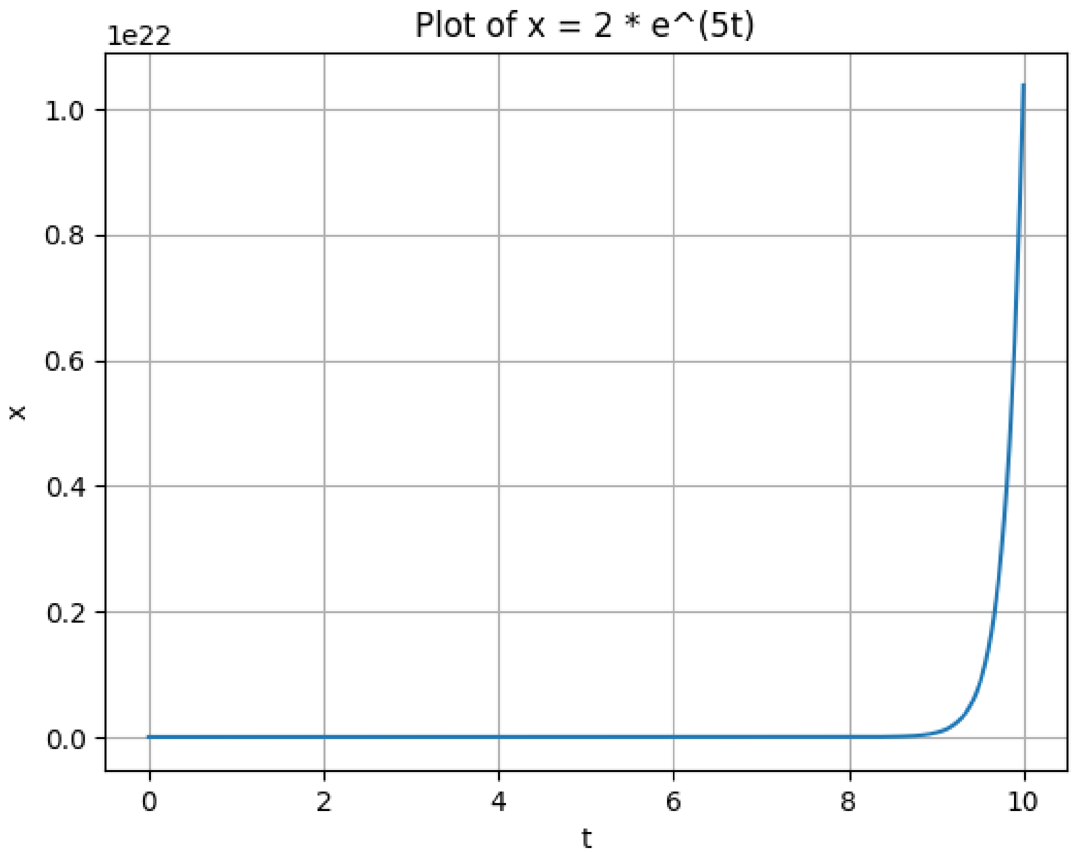
```
t = np.linspace(0, 10, 1000)
U = [-2, 1, 2]

for i in range(3):
    x = U[i] * np.e ** (5 * t)
    # Plot the function
```

```
    plt.plot(t, x)
    plt.title(f'Plot of x = {U[i]} * e^(5t)')
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('x')
    plt.grid()
    plt.show()
```




Plot of x = 1 * e^(5t)
1e21
5
4
3
2
1
0
x
0
2
4
6
8
10
t



3.

Знайти математичні сподівання випадкових функцій $X(t)=U*sin^2(t)$ та $Y(t)=V*(2t+tgt)^2$, де U та V випадкові величини, причому $M(U)=7$, $M(V)=1$.

$X(t)=U*sin^2(t)$
$m_x(t)=M[U*sin^2(t)]=sin^2(t)*M[U]=7*sin^2(t)$

$Y(t)=V*(2t+tgt)^2$
$m_x(t)=M[V*(2t+tgt)^2]=(2t+tgt)^2*M[V]=(2t+tgt)^2$

4.

Знайти дисперсію випадкових функцій $X(t)=U*(t+cost)^2$ та $V(T)=V*cos(2t)$, де U та V випадкові величини, причому, $D(U)=2$, $D(V)=3$.

$X(t)=U*(t+cost)^2$
$D_x(t)=D[U*(t+cost)^2]=(t+cost)^4*D[U]=2*(t+cost)^4$

$V(T)=V*cos(2t)$
$D_x(t)=D[V*cos(2t)]=cos(2t)^2*D[V]=3cos(2t)^2$

5.

Випадковий процес заданий функцією $X(t)=t+U*cos(t)$, де U – випадкова величина з математичним сподіванням, рівним 2, та дисперсією, рівною 1. Знайти кореляційну функцію та нормовану кореляційну функцію випадкового процесу $X(t)$.

$M(U)=2$
$D(U)=1$

Кореляційна функція:

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[\left(X(t_1)-m_x(t_1)\right)*\left(X(t_2)-m_x(t_2)\right)\right]$$

$m_x(t)=M[t+U*cos(t)]=t+cos(t)*M[U]=t+2cos(t)$
$m_x(t_1)=t_1+2cos(t_1)$
$m_x(t_2)=t_2+2cos(t_2)$

$X(t_1)=t_1+U*cos(t_1)$
$X(t_2)=t_2+U*cos(t_2)$

$$K_x(t_1,t_2)=M\left[\left(t_1+U*cos(t_1)-t_1-2cos(t_1)\right)*\left(t_2+U*cos(t_2)-t_1-2cos(t_1)\right)\right]=M\left[cos(t_1)*cos(t_2)*(U-2)^2\right]=c$$

Нормована кореляційна функція:

$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)} * \sqrt{K_x(t_2, t_2)}} $

$\sqrt{K_x(t_1,t_1)}=\sqrt{cos(t_1)*cos(t_1)}=cos(t_1)$
$\sqrt{K_x(t_2,t_2)}=\sqrt{cos(t_2)*cos(t_2)}=cos(t_2)$

$$r_x(t_1,t_2)=\frac{cos(t_1)*cos(t_2)}{cos(t_1)*cos(t_2)}=1$$

6.

Середня кількість викликів, які надходять на АТС за 1 хв, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 4 хв надійде:

1) 3 виклики; 2) менш як 3 виклики; 3) не менш як 3 виклики.

Потік викликів вважається найпростішим.

$\lambda=2$
$t=4$

$$P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}*e^{-\lambda t}=\frac{(8)^m}{m!}*e^{-8}$$

1) $m_1=3$

$$P_t(m_1)=\frac{(2*4)^3}{3!}*e^{-2*4}=\frac{512}{6}*e^{-8}\approx 85.(3)*0.0003354626\approx 0.0286261419$$

2) $m_2=[0,2)$

$$P_t(0)=\frac{(8)^0}{0!}*e^{-8}=1*e^{-8}\approx 0.00033546$$
$$P_t(1)=\frac{(8)^1}{1!}*e^{-8}=8*0.00033546\approx 0.0026837008$$
$$P_t(2)=\frac{(8)^2}{2!}*e^{-8}=32*0.00033546\approx 0.0107348032$$

$$P_t(m_2)=P_t(0)+P_t(1)+P_t(2)=0.00033546+0.0026837008+0.0107348032\approx 0.013753964$$

3) $m_3\geq 3$

$$P_t(m_3)=1-P_t(m_2)=1-0.0286261419=0.9713738581$$

7.

Інтенсивність поломки комп’ютера $\lambda=\frac{10^{-2}}{24}\textit{год}^{-1}$. Поломки розглядають як випадкові події, що утворюють найпростіший потік подій. Яка ймовірність того, що за 200 робочих днів поломок комп’ютера буде: 1) 2; 2) від 1 до 3.

$\lambda=10^{-2}$
$t=200$

$$P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}*e^{-\lambda t}=\frac{(2)^m}{m!}*e^{-2}$$

1) $m_1=2$

$$P_t(m_1)=\frac{(2)^2}{2!}*e^{-2}\approx 2*0.1353352832\approx 0.2706705664$$

2) $m_2=[1,3)$

$$P_t(1)=\frac{(2)^1}{1!}*e^{-2}=0.2706705664$$
$$P_t(2)=0.2706705664$$
$$P_t(3)=\frac{(2)^3}{3!}*e^{-2}=1.(3)*0.1353352832\approx 0.1804470443$$

$$P_t(m_2)=P_t(1)+P_t(2)+P_t(3)=0.2706705664+0.2706705664+0.1804470443=0.7217881771$$

8.

Комп’ютер, що працює в реальному масштабі часу, обробляє інформацію, яка до неї надходить. Протягом 1 с на обробку надходять 4 умовні одиниці інформації. Беручи до уваги, що потік інформації є найпростішим, обчислити ймовірності таких подій:

1) за 2 с на комп’ютер надійдуть 5 одиниць; 2) за 2 с на комп’ютер надійдуть від 2 до 6 одиниць.

$\lambda=4$
$t=2$

$$P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}*e^{-\lambda t}=\frac{(8)^m}{m!}*e^{-8}$$

1) $m_1=5$

$$P_t(m_1)=\frac{(8)^5}{5!}*e^{-8}\approx 273.0(6)*0.0003354626\approx 0.0916036540$$

2) $m_2=[2,6]$

$P_t(2)\approx 0.0107348040$
$P_t(3)\approx 0.0286261442$
$P_t(4)\approx 0.0572522884$
$P_t(5)=0.0916036540$
$P_t(6)\approx 0.1221382154$

$$P_t(m_2)=P_t(2)+P_t(3)+P_t(4)+P_t(5)+P_t(6)=0.310355106$$

9.

У години «пік» через пропускний автомат станції метро за 1 с проходить у середньому один пасажир. Яка ймовірність того, що за 5 с через пропускний автомат станції метро пройдуть:

1) 4 пасажири; 2) від 1 до 5 пасажирів.

Потік пасажирів вважається найпростішим.

$\lambda=1$
$t=5$

$$P_t(m)=\frac{(\lambda t)^m}{m!}*e^{-\lambda t}=\frac{(5)^m}{m!}*e^{-5}$$

1) $m_1=4$

$$P_t(m_1)\approx 0.1754673697$$

2) $m_2 = [1, 5]$

$P_t(1) \approx 0.0336897349$
$P_t(2) \approx 0.0842243374$
$P_t(3) \approx 0.1403738958$
$P_t(4) = 0.1754673697$
$P_t(5) \approx 0.1754673697$

$P_t(m_2) = P_t(1) + P_t(2) + P_t(3) + P_t(4) + P_t(5) = 0.6092227075$

10.

На АЗС за кожну хвилину надходять у середньому два автомобілі для заправляння пальним. Потік автомобілів для заправляння вважається найпростішим. Яка ймовірність того, що за 3 хв на АЗС для заправляння надійде:

1) 1 автомобіль; 2) не більш як 3 автомобілі.

$\lambda = 2$
$t = 3$

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} * e^{-\lambda t} = \frac{(6)^m}{m!} * e^{-6}$$

1) $m_1 = 1$

$P_t(m_1) \approx 0.0148725130586537$

2) $m_2 \leq 3$

$P_t(0) \approx 0.0024787521$
$P_t(1) \approx 0.0148725130$
$P_t(2) \approx 0.0446175391$
$P_t(3) \approx 0.0892350783$

$P_t(m_2) = P_t(0) + P_t(1) + P_t(2) + P_t(3) = 0.1512038825$

```
# Simple calculator for probabilities

from math import factorial

l = 2
t = 3
m = 3

( (l*t)**m ) * ( 2.7182818285 ** (-l*t) ) / factorial(m)
```

```
0.0892350783519222
```