第6章

固有値と対角化

第10回　固有値

定義 10.1　(固有値・固有ベクトル)
A を n 次正方行列とする。 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ と $\mathbf{0}$ でない n 次ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するとき，λ を A の**固有値**といい，$\boldsymbol{x}$ を A の λ に属する **固有ベクトル** という。

(例)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$ とする。$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ と $\mathbf{0}$ でない n 次ベクトル $\boldsymbol{x}$ 探す (探し方は後述する) と，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

が見つかるので，固有値の一つは $\lambda = 6$ で，それに属する固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ である。

練習 10.1　上の例で，$\lambda = -1$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ も A の固有値・固有ベクトルとなることを確かめよ。

(注)　固有値は複素数の範囲で考える。

定義 10.2　(固有多項式・固有方程式)
A を n 次正方行列とするとき，

$$\phi_A(t) := \det(tE_n - A)$$

を**固有多項式**という。また，t の方程式 $\phi_A(t) = 0$ を**固有方程式**という。

命題 10.3 (固有値の求め方)
n 次正方行列 A の固有方程式は，固有方程式 $\phi_A(t) = 0$ の解である。

証明 省略。 ◡̈

定義 10.4 (重複度)
n 次正方行列 A の固有方程式が

$$(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_r)^{m_r} = 0$$

(ただし，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ は相異なる固有値で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i = n$) という形にできるとき，$m_i$ を λ_i の**重複度**という。

定義 10.5 (固有空間)
A を n 次正方行列とする。$W_A(\lambda) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ を，A の λ に属する **固有空間** という。

(例) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と，各固有値に属する固有空間の基底を求めてみよう。

命題 10.6 (固有値の特徴)
n 次正方行列 A の，重複も含めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする。このとき，以下の式が成り立つ。

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A$ (2) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A$

証明 省略。 ◡̈

系 10.7 (固有値の特徴)
n 次正方行列 A が正則である必要十分条件は，A が 0 を固有値に持たないことである。

証明 省略。 ◡̈