第 9 回　線形写像

定義 9.1　(固有値・固有ベクトル)
写像 $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ が**線形性**と呼ばれる 2 つの性質:

$$\begin{aligned}&(1)\quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}^n, \qquad f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})\\ &(2)\quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n,\ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

を満たすとき，f を **線形写像** または **線形変換** という。

命題 9.2　(線形写像と零ベクトル)
線形写像 $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ は $f(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$ を満たす。ただし，$\mathbf{0}_n$ は $\mathbb{F}^n$ の零ベクトル，$\mathbf{0}_m$ は $\mathbb{F}^m$ の零ベクトルである。

証明 $\mathbf{0}_n + \mathbf{0}_n = \mathbf{0}_n$ なので，$f(\mathbf{0}_n + \mathbf{0}_n) = f(\mathbf{0}_n)$。$f$ は線形写像なので，

$$f(\mathbf{0}_n) + f(\mathbf{0}_n) = f(\mathbf{0}_n)$$

が成り立つ。両辺に $-f(\mathbf{0}_n)$ を加えると

$$f(\mathbf{0}_n) + f(\mathbf{0}_n) - f(\mathbf{0}_n) = f(\mathbf{0}_n) - f(\mathbf{0}_n)$$

を得る。したがって $f(\mathbf{0}_n) + \mathbf{0}_m = \mathbf{0}_m$ であるから，$f(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$ が成り立つ。 ◡̈

練習 9.1　$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする。

(1) $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2$ が成り立つことを確かめよ。
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形写像とする。このとき，

$$f(\alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2) = \alpha f(\boldsymbol{e}_1) + \beta\ f(bme_2)$$

が成り立つことを示せ。

命題 9.3　(線形写像を行列で表す)
線形写像 $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ は，ある $m \times n$ 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表せる。このときの A を f の **表現行列** という。

証明 省略。 ◡̈

練習 9.2　線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4\beta \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，f の表現行列を求めよ。

命題 9.4　(行列の定める線形写像)
写像 $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ が，$\mathbb{F}$ を成分に持つ $m \times n$ 行列 A を用いて $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表せるとき，f は線形写像になる。このときの f を **行列 A の定める線形写像** といい，f_A と表す。

練習 9.3　命題 9.4 を証明せよ。

定理 9.5　(行列の定める線形写像)
$\mathbb{R}^2$ において，原点を中心に反時計回りに角度 θ だけ回転させる移動は $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の線形変換で，その表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である。この行列を **回転行列** という。

練習 9.4　定理 9.5 を証明せよ。

定義 9.6　(線形写像の像と核)
線形写像 $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ に対して，以下の用語を定義する:

(1) $\operatorname{Im} f := \{f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{F}^m \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n\}$ ：f の **像 (イメージ)**
(2) $\operatorname{rank} f := \dim(\operatorname{Im} f)$
(3) $\operatorname{Ker} f := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ ：f の **核 (カーネル)**
(4) $\operatorname{null} f := \dim(\operatorname{Ker} f)$

定理 9.7　(次元公式)
線形写像 $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ について，

$$\operatorname{rank} f + \operatorname{null} f = n$$

が成り立つ。この式を**次元公式**という。