令和５年度後期 演習問題

線　形　代　数

注　意　事　項

1　この問題冊子は，試験開始の合図がなくとも開いてよい。

2　問題冊子は，全部で 14 ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

問題冊子の最後のページは，下書き用紙となっている。

線 形 代 数　　1 ～ 14　ページ，　　　下 書 き　　15　ページ

3　解答用紙は用意していないので，各自好きな紙に解答すること。

4　受験番号は各自好きな番号を決めて，解答用紙に記入すること。

5　解答時間は，次のとおりである。

(1) 理学部欧州分子生物学科の受験者は，60 分。

(2) 文学部デジタル考古学科の受験者は，90 分。

(3) その他の受験者は，解答時間無制限。

6　問題を解く際は，いかなるものを参照して答えてもよい。

7　問題冊子および下書き用紙は，持ち帰ること。

8　素人が作成した問題なので，問題に不備がある可能性がある。不備を発見した場合は，問題作成者に速やかに報告すること。

第1回　10月5日　演習問題

$\boxed{1}$　次のそれぞれの数ベクトルの組の1次独立性を調べよ。

(1)　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2)　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ を，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ の1次結合で表せ。

$\boxed{3}$　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ とする。$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$$

このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は1次従属であることを証明せよ。

$\boxed{4}$　次の直線の方程式を，媒介変数のない形で表せ。

(1) 点 $(1, -2, 0)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ に平行な直線

(2) 点 $(5, 1, 4)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ に平行な直線

$\boxed{5}$　点 $(5, 7, 3)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式を，

$$ax + by + cz + d = 0$$

の形で書け。

第2回　10月12日　演習問題

$\boxed{6}$　次の行列 A, B について，以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 7 & -2 & -8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 A の型を，「$m \times n$ 行列」または「n 次正方行列」という形式で答えよ。

(2)　A の $(1,2)$ 成分を求めよ。また，A の $(2,3)$ 成分を求めよ。

(3)　B^T を求めよ。

(4)　$\operatorname{tr} B$ を求めよ。

$\boxed{7}$　以下の計算をせよ。

(1) $8\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$　$n \in \mathbb{N}$ とするとき，$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ を計算せよ。

$\boxed{9}$　$n \in \mathbb{N}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ。

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n$ を計算せよ。

(3) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，B^n を求めよ。

$\boxed{10}$　A を正方行列とするとき，$A + A^T$ は対称行列であることを証明せよ。

第3回　10月19日　演習問題

$\boxed{11}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\sigma(3)$ を求めよ。　　(2) $\operatorname{sgn}\sigma$ を求めよ。

$\boxed{12}$ 以下の行列式を，サラスの方法で計算せよ。

(1) $\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ -6 & -9 & 4 \\ 4 & -10 & 9 \end{pmatrix}$

$\boxed{13}$ 以下の行列式を計算せよ。

(1) $\det\begin{pmatrix} 7 & 10 & 4 & -1 & -12 \\ 1 & -5 & 8 & -6 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 13 \\ 1 & -5 & 8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\det\begin{pmatrix} 1 & -9 & -95 & 514 \\ 0 & 2 & -28 & -79 \\ 0 & 0 & 3 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{14}$ 次の行列式を計算せよ。

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{15}$ 次の行列式を計算せよ。

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

第4回　10月26日　演習問題

$\boxed{16}$　次の行列式を計算し，因数分解した形で答えよ。

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a & c & d & d \\ a & c & e & f \end{pmatrix}$$

$\boxed{17}$　次の行列式を余因子展開を利用して求めよ。

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{18}$　次の2つの行列 A, B について，以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

(1) $\det A, \det B$ を求めよ。

(2) A, B のうち，正則行列を選べ。

(3) (2) で選んだ方について，逆行列を求めよ。

$\boxed{19}$　次の2つの行列 A, B について，以下の問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -a^2 & ab & ca \\ ab & -b^2 & bc \\ ca & bc & -c^2 \end{pmatrix}$$

(1) $\det B$ を計算せよ。

(2) AB を計算せよ。また，$\det AB$ を計算せよ。

(3) (1)(2) の結果を用いて，$\det A$ を求めよ。

$\boxed{20}$　$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

(2) 問題9を見返して，気づいたことを述べよ。

第5回　11月9日　演習問題

$\boxed{21}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 第3行に関する余因子展開をして，$\det A$ を求めよ。

(2) A が正則行列であることを証明せよ。

(3) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ。

(4) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

$\boxed{22}$ 次の連立方程式について，以下の問いに答えよ。

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

(1) この連立方程式を，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形で表せ。

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(3) この連立方程式の解を求めよ。

$\boxed{23}$ クラーメルの公式を用いて，次の連立方程式を解け。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{24}$ 次の連立方程式について，以下の問いに答えよ。

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + 2y + 5z = -2 \\ 3x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

(1) 拡大係数行列を答えよ。

(2) 掃き出し法を用いて，この連立方程式の解を求めよ。

$\boxed{25}$ 次の連立方程式を掃き出し法で解け。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

第 6 回　11 月 16 日　演習問題

$\boxed{26}$　次の行列 A を階段行列にせよ。また，$\mathrm{rank}\,A$ を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{27}$　次のベクトルの組が 1 次独立かどうかを，連立方程式を用いて調べよ。

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{28}$　次のベクトルの組が 1 次独立かどうかを，行列の行基本変形を用いて調べよ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{29}$　次の連立方程式を掃き出し法で解け。また，解の自由度を答えよ。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

$\boxed{30}$　次の連立方程式を掃き出し法で解け。また，解の自由度を答えよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

第7回　11月30日　演習問題

$\boxed{31}$　次の行列が正則なら逆行列を求め，正則でないならそれを証明せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{32}$　次の行列が正則なら逆行列を求め，正則でないならそれを証明せよ。

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{33}$　次の行列が正則行列となるような a の条件を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 3 & 4 & 2a+1 \\ -2 & 1 & -a+6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{34}$　A, B を n 次正則行列とする。AB の逆行列は $B^{-1}A^{-1}$ であることを証明せよ。

$\boxed{35}$　X, Y, Z, W を集合とする。次の問いに答えよ。

(1) 写像 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z,\ h : Z \to W$ の合成は結合法則

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

を満たすことを証明せよ。

(2) 写像 $f : X \to X,\ g : X \to X$ は交換法則

$$g \circ f = f \circ g$$

を満たすか？満たすならこれを証明し，満たさないなら具体的な集合 X と写像 f, g を用いて反例を挙げよ。

第8回　12月7日　演習問題

$\boxed{36}$　$\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を次のように定義する。

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 5x + 7y + 3z = 0 \right\}$$

(1) V が $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを証明せよ。
(2) V の基底を求め，$\dim V$ を求めよ。

$\boxed{37}$　以下に示すベクトルの組の各々について，それが $\mathbb{R}^3$ の基底を成しているかどうかを調べよ。

$$(1)\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix} \right\} \qquad (2)\ \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{38}$　$\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$，$\boldsymbol{v}_4$ を，次のように定める。

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ の部分空間 W を $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ で定義する。W の基底を求め，$\dim W$ を求めよ。

$\boxed{39}$　次の連立方程式について，解空間の基底と次元を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{40}$　X, Y, Z を集合とする。また，$f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ を全単射とする。このとき，$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であることを証明せよ。図を用いた説明でもよい。

第 9 回　12 月 21 日　演習問題

$\boxed{41}$ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\mathbb{R}^3$ の標準基底とする。線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす 3 次正方行列 A を求めよ。

$\boxed{42}$ 回転行列 R_θ を次のように定める。

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1)　$R_\beta R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$ であることを証明せよ。

(2)　(1) の式は図形的にはどのようなことを意味するかを述べよ。

$\boxed{43}$ 行列式が 0 になることと逆行列が存在することは同値であった。この理由を，行列が $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の線形変換を表すことを元に，図形的・定性的に説明せよ。

$\boxed{44}$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする。A の定める線形写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\operatorname{Ker} f_A$ の基底を求めよ。また，$\operatorname{null} f_A$ を求めよ。

(2) $\operatorname{Im} f_A$ の基底を求めよ。また，$\operatorname{rank} f_A$ を求めよ。

(3) 次元公式 $\operatorname{null} f_A + \operatorname{rank} f_A = n$ が成り立っていることを確認せよ。

$\boxed{45}$ 　3 次以下の実数係数多項式全体の集合を $\mathbb{R}_3[x]$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 多項式の微分を写像

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x], \qquad \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と捉える。$\dfrac{d}{dx}$ は線形写像であることを確かめよ。

(2) 以下，多項式 $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$ を，数ベクトル $(a, b, c, d)^T \in \mathbb{R}^4$ と同一視することを考える。例えば，多項式 $x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ は数ベクトル $(1, -2, -3, 4)^T \in \mathbb{R}^4$ と考える。このとき，線形写像 $\dfrac{d}{dx}$ の表現行列を求めよ。

(3) n を 2 以上の自然数とする。n 階微分を

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) := \underbrace{\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}}_{\frac{d}{dx}\text{ が }n\text{ 個}}f(x)$$

で定めるとき，$\dfrac{d^n}{dx^n}$ の表現行列を求めよ。

(4) $\mathrm{Ker}\,\dfrac{d}{dx}$ と $\mathrm{Im}\,\dfrac{d}{dx}$ を求めよ。

(5) 次元公式 $\mathrm{null}\,\dfrac{d}{dx} + \mathrm{rank}\,\dfrac{d}{dx} = \dim \mathbb{R}_3[x]$ が成り立つことを確かめよ。

第10回　12月28日　演習問題

$\boxed{46}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式を求めよ。

$\boxed{47}$　行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ。

$\boxed{48}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ。

$\boxed{49}$　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と，それぞれの固有値に対する固有空間を求めよ。

$\boxed{50}$　n 次正方行列 A が $A^2 = A$ を満たすとき，A の固有値は $\lambda = 0, 1$ であることを示せ。

第 11 回　1 月 11 日　演習問題

$\boxed{51}$　次の行列が対角化可能なら対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{52}$　$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。A^n $(n \in \mathbb{N})$ を，以下の手順で求めてみよう。

(1) A の固有多項式を求めよ。
(2) $B = P^{-1}AP$ を満たす対角行列 B と正則行列 P を求めよ。
(3) P^{-1} を求めよ。また，B^n を求めよ。
(4) (2),(3) を用いて，A^n を求めよ。

$\boxed{53}$　漸化式 $\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

で定義される数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ。必要なら，問題 52 の結果を用いてもよい。

(1) この漸化式の特性方程式を求めよ。また，これを見て気づいたことを言え。
(2) この漸化式は行列を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と表されることを確かめよ。
(3) (1) の漸化式を用いると，

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

が分かる。これを用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{54}$ t の関数 $x(t), y(t)$ を単に x, y と書く。連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

を，初期条件 $x(0) = 3,\ y(0) = 1$ のもとで解いてみよう。

(1) この微分方程式は，行列を用いて

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される。このとき，行列 A を求めよ。

(2) $B = P^{-1}AP$ を満たす対角行列 B と正則行列 P を求めよ。

(3) $B = P^{-1}AP$ を A について解くと $A = PBP^{-1}$ となり，これを (1) の式に代入すると

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = PBP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。両辺に P^{-1} をかけると

$$\frac{d}{dt}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = BP^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり，$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} := P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

となる。この微分方程式の初期値は $r(0) = 1,\ s(0) = 2$ となる (これは証明無しに用いてよい)。r, s の微分方程式を解け。

(4) 以上を用いて，微分方程式の解 x, y を求めよ。

$\boxed{55}$ 次の問いに答えよ。

(1) ジョルダン標準形になっている行列を一つ選べ。

(ア) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (イ) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ (ウ) $\begin{pmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(2) (1) で選んだ行列を A とする。A^2 と A^3 を計算せよ。

(3) $n \in \mathbb{N}$ とする。A^n を求めよ。

復習問題

問題未作成

(下書き用紙)