第 11 回　対角化

定義 11.1　(相似)
A, B を正方行列とする。ある正則行列 P をが存在して $B = P^{-1}AP$ という関係が成り立っているとき，A, B は **相似** であるという。

命題 11.2　(相似な行列の性質)
正方行列 A, B が相似であるとき，A と B の固有多項式は等しい。よって固有値も等しい。

証明 省略。

定義 11.3　(対角化)
- A を正方行列とする。ある正則行列 P と対角行列 B を用いて $B = P^{-1}AP$ とできるとき，A は **対角化可能** であるという。このときの P を **変換行列**という。
- 正方行列 A が与えられたとき，P をうまく定めて B を得ることを，A を**対角化**するという。

命題 11.4　(対角化と固有値)
対角化可能な行列 A が $B = P^{-1}AP$ と対角化されたとき，B の対角成分には A の固有値がそれぞれ A の重複度ずつ現れる。

証明 A を n 次正方行列とする。B の対角成分を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする。

$$\phi_B(t) = \det(tE_n - B) = \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & t-\lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(t-\lambda_i)$$

であるから，B の固有値は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ である。A と B は相似であるから，命題 11.2 より $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値に一致する。

命題 11.5　(固有ベクトルの一次独立性)
$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ を n 次正方行列 A の相異なる固有値とする。$i = 1, \cdots, r$ に対し，$\boldsymbol{p}_{i,1}, \cdots, \boldsymbol{p}_{i,s_i}$ を固有空間 $W_a(\lambda_i)$ の属する一次独立な s_i 個の固有ベクトルとする。このとき，

$$\{\boldsymbol{p}_{1,1}, \boldsymbol{p}_{1,2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1,s_1}, \boldsymbol{p}_{2,1}, \boldsymbol{p}_{2,2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{2,s_2}, \cdots\cdots, \boldsymbol{p}_{r,1}, \boldsymbol{p}_{r,2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{r,s_r}\}$$

は一次独立である。

証明 省略。

定理 11.6 (対角化可能性の判定・対角化の手順)
省略。

系 11.7 (固有値が全て異なる行列の対角化)
省略。

(例) (対角化可能な例)

$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ 9 & -4 & -3 \\ 9 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ を対角化する。固有多項式は

$$\phi_A(t) = (t+1)^2(t-2)$$

である。固有値は $\phi_A(t) = 0$ で $\lambda = 2$(重複度 1), -1(重複度 2) 。● $\lambda = -1$ について,

(例) (対角化不可能な例)

$A = \begin{pmatrix} 9 & -13 & -7 \\ 3 & -4 & -3 \\ 4 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ を対角化する。

(注)

定義 11.8 (ジョルダン標準形)
$\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{C}$ とする (これらは値が重複していても良い)。
$J_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & O \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ の形の行列を**ジョルダン細胞**といい，ジョルダン細胞が並んだ行列 $\begin{pmatrix} J_i & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_n \end{pmatrix}$ を**ジョルダン標準形**という。

定理 11.9 (ジョルダン標準形にする)
任意の正方行列 A に対して，ある正則行列 P とジョルダン標準形 B が存在して $B = P^{-1}AP$ と表せる。

証明 証明は難しいので省略。詳しくは線形代数あるいは代数学の教科書を参照せよ。 □