Конспекты

Содержание

1 Матеша

1.1 Логарифмы

Полезные свойства логарифмов:

$$\boxed{log_a(n^k) = k \cdot log_a(n)}$$

Доказательство:

$$a^{log_a(n^k)} = n^k = (a^{log_a(n)})^k = a^{k \cdot log_a(n)}$$

$$\blacksquare$$

$$\boxed{log_a(n) = \frac{log_b(n)}{log_b(a)}}$$

Доказательство:

$$n = a^{log_a(n)} = b^{log_b(n)} \Rightarrow log_b(n) = log_b(a^{log_a(n)}) = log_a(n) \cdot log_b(a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow log_a(n) = \frac{log_b(n)}{log_b(a)}$$

$$\blacksquare$$

$$\boxed{log_{a^b}(n) = \frac{1}{b} \cdot log_a(n)}$$

Доказательство:

$$log_{a^b}(n) = \frac{log_a(n)}{log_a(a^b)} = \frac{1}{b} \cdot log_a(n)$$

$$\blacksquare$$

$$\boxed{a^{log_b(n)} = n^{log_b(a)}}$$

Доказательство:

$$a^{log_b(n)} = n^{log_b(a)} \Leftrightarrow log_a(a^{log_b(n)}) = log_a(n^{log_b(a)}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow log_b(n) \cdot log_a(a) = log_b(a) \cdot log_a(n) \Leftrightarrow log_a(n) = \frac{log_b(n)}{log_b(a)}$$

$$\blacksquare$$

1.2 Основная теорема о рекурентных соотношениях (разделяй и властвуй)

Предположим, некоторый алгоритм который для решения задачи размером n сначала рекурсивно вызывает сам себя a раз на подзадачах размером $\frac{n}{b}$, а также тратит время $O(n^d)$ на подготовку к рекурсии и сборку ответа. Тогда время работы алгоритма:

$$T(n) = a \cdot T(\lceil \frac{n}{b} \rceil) + O(n^d), a > 0, b > 1, d \geq 0$$

$$\begin{aligned} T(n) &= O(n^d),\ d > log_b(a) \\ T(n) &= O(n^d \cdot log(n)),\ d = log_b(a) \\ T(n) &= O(n^{log_b(a)}),\ d < log_b(a) \end{aligned}$$