

1. **Skaleninvarianz und isotrope Kaskaden** Die Navier-Stokes'sche Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten ( $\rho_o = \text{const.}$ ) ohne Coriolisbeschleunigung und Gravitationsbeschleunigung sei folgendermaßen gegeben:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_o} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

- a) Zeige zunächst für das reibungsfreie System, dass die zur Euler'schen Bewegungsgleichung gehörige 3D Wirbelgleichung und die Kontinuitätsgleichung skaleninvariant unter den folgenden raum-zeitlichen Skalentransformationen sind:

$$\mathbf{r}' = \lambda \mathbf{r} \quad (3)$$

$$t' = \lambda^{(1-H)} t \quad (4)$$

$$\mathbf{v}' = \lambda^H \mathbf{v} \quad (5)$$

$$\nabla' = \lambda^{-1} \nabla \quad (6)$$

Dabei ist  $\lambda > 0$  ein Skalierungsfaktor und  $H$  ein zunächst freier Skalenexponent.

Der freie Skalenexponent  $H$  kann im Rahmen der Turbulenztheorie durch die Festlegung der Konstanz der kaskadierenden Größe im Trägheitsbereich festgelegt werden. So kommt es zu einer Schließung des Turbulenzproblems, welche auf einer Symmetrie der Navier-Stokes'schen (Wirbel)-Gleichung beruht.

- b) Zeige zunächst, wie sich die Energiedissipation  $\varepsilon$  allgemein unter der Skalentransformation verhält.
- c) Zeige dann weiter, dass sich  $H = 1/3$  im Rahmen der Kolmogorov'schen Annahme der konstanten Energiedissipation  $\varepsilon = \text{const.}$  im Trägheitsbereich ergibt.
- d) Bestimme speziell mit der Kolmogorov'schen Annahme der konstanten Energiedissipation den Exponenten  $\gamma$  der spektralen Verteilung der kinetischen Energie pro Wellenzahl  $E(k) \sim k^{-\gamma}$ .

In diesem Youtube-Video finden sich interessante Visualisierungen und Experimente dazu: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_UoTTq651dE](https://www.youtube.com/watch?v=_UoTTq651dE)

2. **anisotrope Kaskaden** In dem Review-Paper

Lovejoy, S. und Schertzer, D.: *Scale Invariance, Symmetries, Fractals, and Stochastic Simulations of Atmospheric Phenomena*, Bulletin American Meteorological Society, 67, 1, 1986.

werden verschiedene Modelle (isotrop, anisotrop, homogen, inhomogen) zur Beschreibung von Turbulenz und der damit einhergehenden Energiekaskade vorgestellt. Um anisotrope Kaskaden zu beschreiben, wird ein allgemeines Symmetrieprinzip, der GSI (generalized scale invariance), eingeführt. Erkläre das Konzept (Kap. 3 mit Kap. 2 vergleichen).