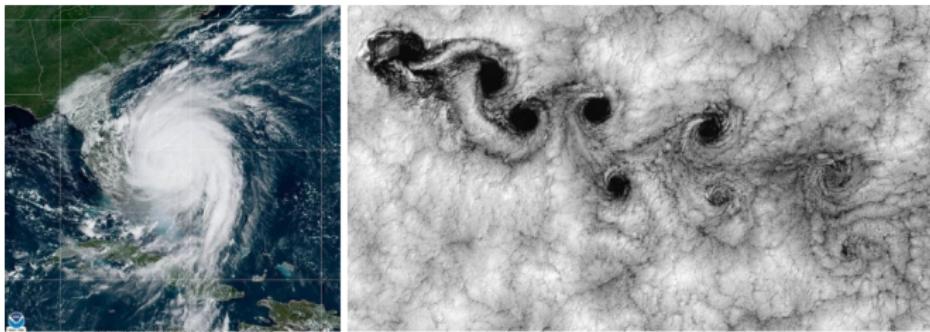


Fraktale in der Meteorologie

Workshop StuMeTa 2022
Berlin
26.05.2022

Motivation



Universität Innsbruck / Blick nach Nordosten ins Unterinntal
16.05.22 03:50 - 16.9°C

universität
innsbruck



Übersicht

Teil 1 - Grundlagen

- ▶ fraktale Dimension
- ▶ Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz
- ▶ historische Entwicklung der fraktalen Geometrie
- ▶ Anwendungsbeispiele in der Meteorologie

Teil 2 - Aufgaben zu den Anwendungsbeispielen

- ▶ Niederschlag (Programmieren)
- ▶ Turbulenz (Theorie)

Teil 3 - Besprechung der Aufgaben und Ausblick

Fraktale: Einführung

aus der klassischen Geometrie (\rightarrow keine Fraktale) wissen wir:

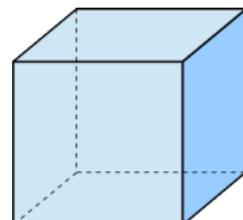
Linie



Quadrat



Würfel



$1/2$ der Länge

$$2 = 2^1$$

Dimension: 1

$1/2$ der Länge

$1/4$ der Fläche

$$4 = 2^2$$

Dimension: 2

$1/2$ der Länge

$1/8$ des Volumens

$$8 = 2^3$$

Dimension: 3

Verallgemeinerung:

Maß (oder intuitiver Masse)

Längen-Skalierungsfaktor s

Massen-Skalierungsfaktor

Länge: $L \longrightarrow sL$

Masse: $M \longrightarrow s^{\text{Dimension}} M$

Fraktale: Selbstähnlichkeitsdimension

Sierpinski-Dreieck



1/2 der Länge
1/3 der Masse

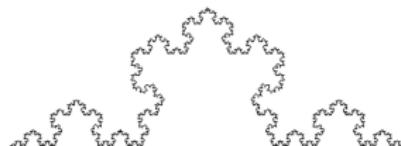
Länge: $L \rightarrow \frac{1}{2}L$

Masse: $M \rightarrow \frac{1}{3}M$

$2^{\text{Dimension}} = 3$

Dimension: $\log_2(3) \approx 1,585$

Koch-Kurve



1/3 der Länge
1/4 der Masse

Länge: $L \rightarrow \frac{1}{3}L$

Masse: $M \rightarrow \frac{1}{4}M$

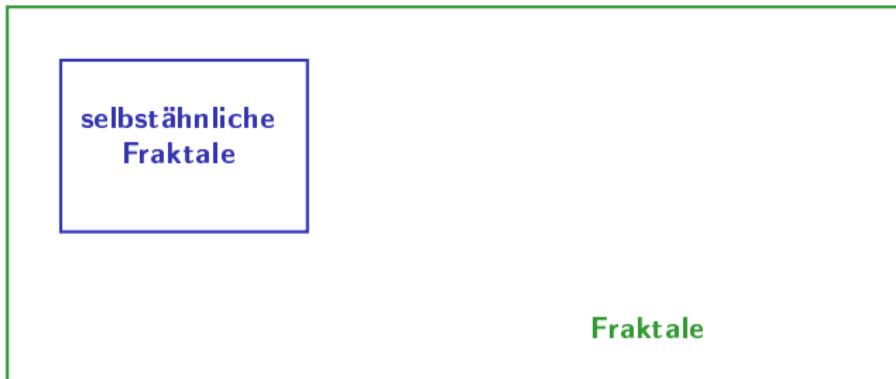
$3^{\text{Dimension}} = 4$

Dimension: $\log_3(4) \approx 1,262$

Definition: Fraktale sind Objekte mit einer nicht-ganzzahligen Selbstähnlichkeitsdimension.

Fraktale: Selbstähnlichkeitsdimension

aber: nicht alle Fraktale sind selbstähnlich



Idealisierung
glatt

Natur

Idealisierung
perfekt selbstähnlich

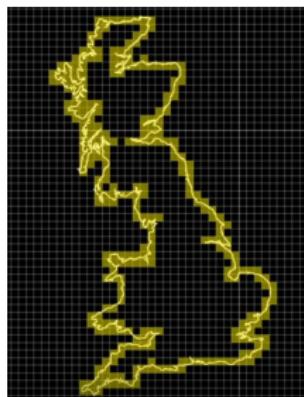
Fraktale: Boxcounting-Dimension

Frage: Wie kann man die Dimension nicht selbstähnlicher Objekte messen?

Box Counting: (\rightarrow lineare Regression, um Dimension d zu finden)

$$\text{Anzahl der Boxen} \approx c \cdot \text{Skalierungsfaktor}^d \quad (1)$$

$$\log(\text{Anzahl der Boxen}) \approx \log(c) + d \cdot \log(\text{Skalierungsfaktor}) \quad (2)$$



(skaliert mit Skalierungsfaktor)

Beispiel:

$$d(\text{Großbritannien}) \approx 1,21$$

$$d(\text{Norwegen}) \approx 1,55$$

Intuition: Norwegens Küstenlinie ist *rauer* als die von Großbritannien.

Fraktale: Dimensionsbegriffe

Interpretation:

Objekt mit $d \in (1, 2)$ hat:

- ▶ Länge = ∞
- ▶ Fläche = 0

weitere Dimensionsbegriffe:

- ▶ Hamel-Dimension (Vektorräume)
- ▶ Hausdorff-Dimension (metrische Räume)
- ▶ Lebesgue'sche Überdeckungsdimension (topologische Räume)
- ▶ ...

Skaleninvarianz

Definition: Eine Funktion f heißt *skaleninvariant*, wenn ein Skalierungsexponent γ existiert, sodass für alle Skalierungsfaktoren λ

$$f(\lambda x) = \lambda^\gamma f(x) \quad (3)$$

gilt.

Beispiel: Sei $f(x) = Ax^\gamma$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= A(\lambda x)^\gamma \\ &= \underbrace{Ax^\gamma}_{=f(x)} \lambda^\gamma \end{aligned}$$

Selbstähnlichkeit

große Skalen sind vergrößerte Kopien der kleinen Skalen [Lovejoy und Schertzer, 1986]

- ▶ exakt selbstähnlich
- ▶ quasi-selbstähnlich
- ▶ stochastisch selbstähnlich
- ▶ Skalengesetz: skaleninvariant \leftrightarrow selbstähnlich

Entwicklung der fraktalen Geometrie

1669: Newton-Verfahren → Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Newton-Verfahren für reelle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

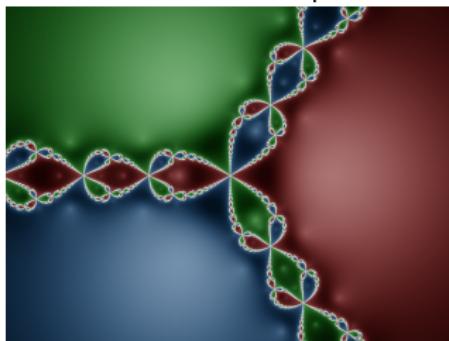
Ziel: Finden der Nullstellen $f(x) = 0$ ausgehend von einem Startwert x_0 durch Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4)$$

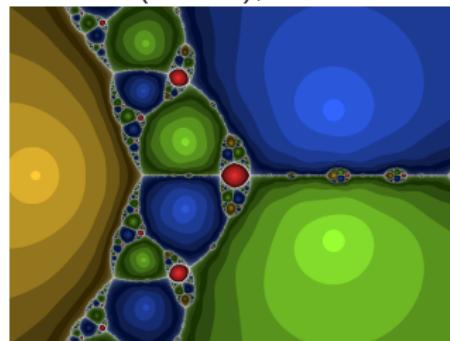
Newton-Verfahren für komplexe (holomorphe) Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (5)$$

Einfärben des Startwerts entsprechend der Nullstelle (Wurzel), zu der das Verfahren konvergiert:



$$f(z) = z^3 - 1$$



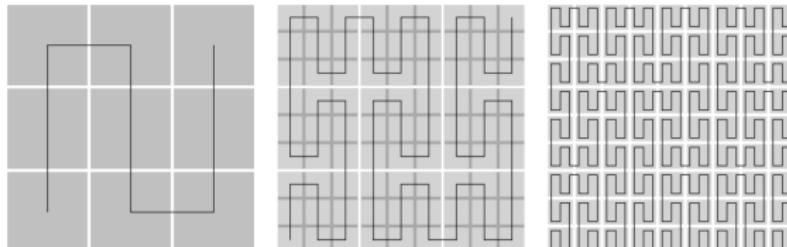
$$f(z) = z^3 - 2z + 2$$

→ Rand =: Julia-Menge (Umgebung enthält immer alle Farben)

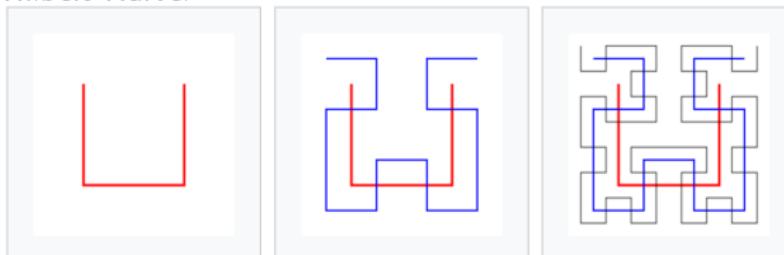
Entwicklung der fraktalen Geometrie

1890/91: Finden von raumfüllenden Kurven

Peano-Kurve:



Hilbert-Kurve:

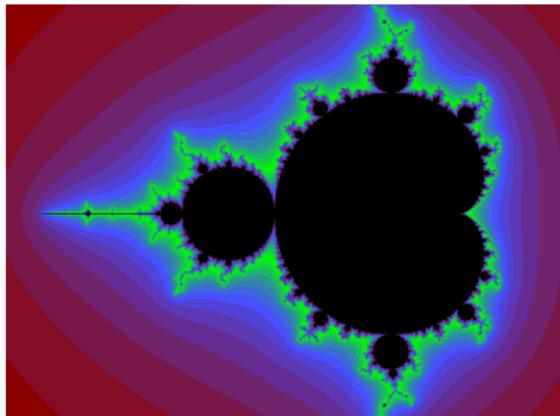
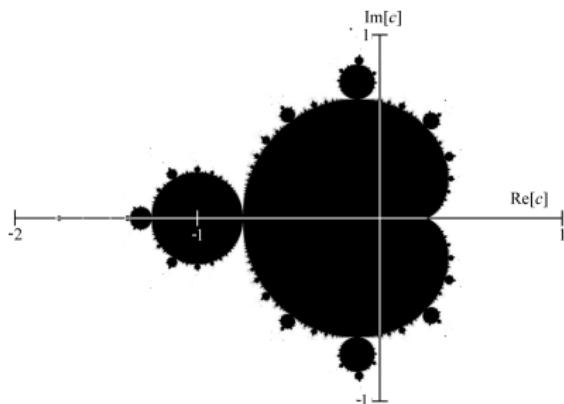


Anwendung: z.B. Sound-/Bildkompression

Entwicklung der fraktalen Geometrie

1970-1980: Mandelbrot-Menge

Iteration: $z_{n+1} = z_n + c$



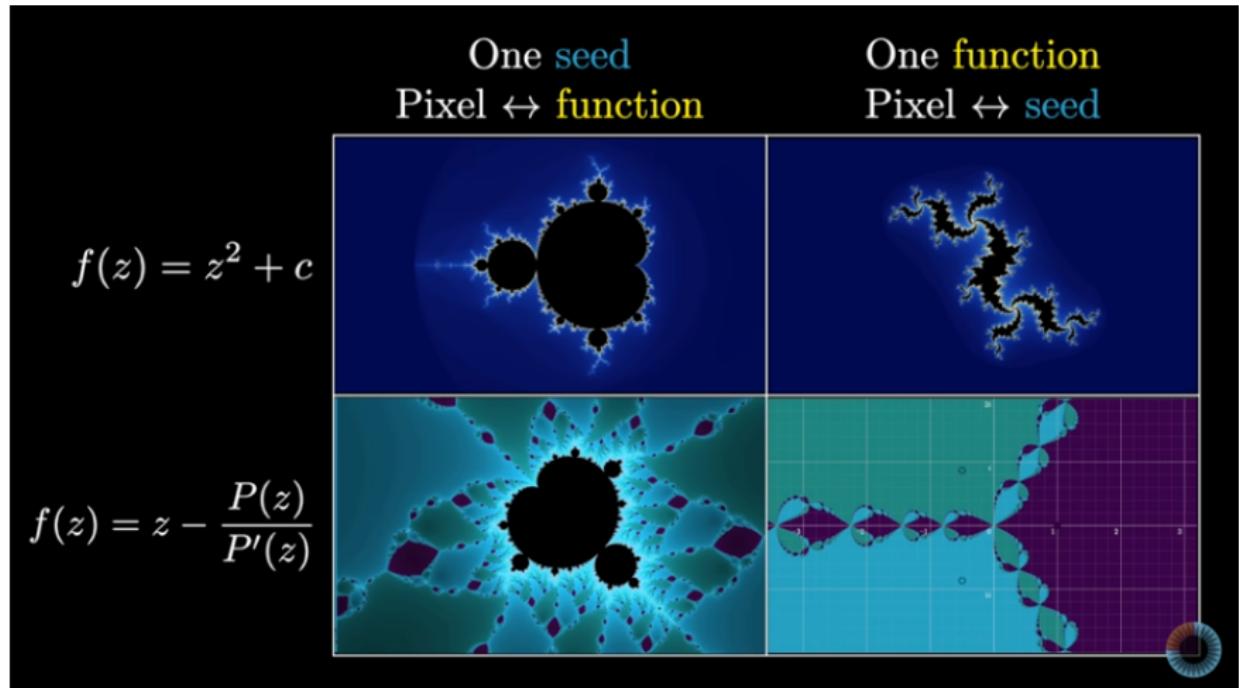
schwarz: Konvergenzbereich

farbig: Divergenzbereich eingefärbt nach Divergenzgeschwindigkeit

→ holomorphe Dynamik

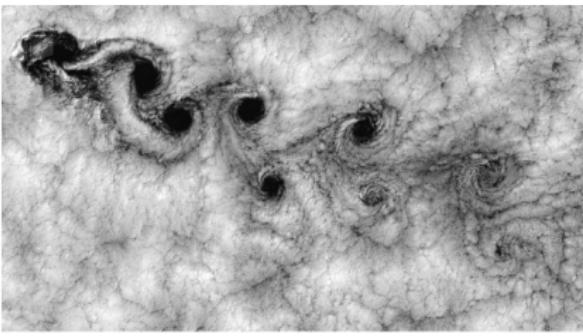
1983: Mandelbrot: "The Fractal Geometry of Nature" → Definition von Fraktalen

Entwicklung der fraktalen Geometrie



aus: 3b1b <https://www.youtube.com/watch?v=LqbZpur38nw> (Empfehlung)

Anwendungen in der Meteorologie



Universität Innsbruck / Blick nach Nordosten ins Unterinntal
16.05.22 03:50 - 16.9°C

universität
innsbruck



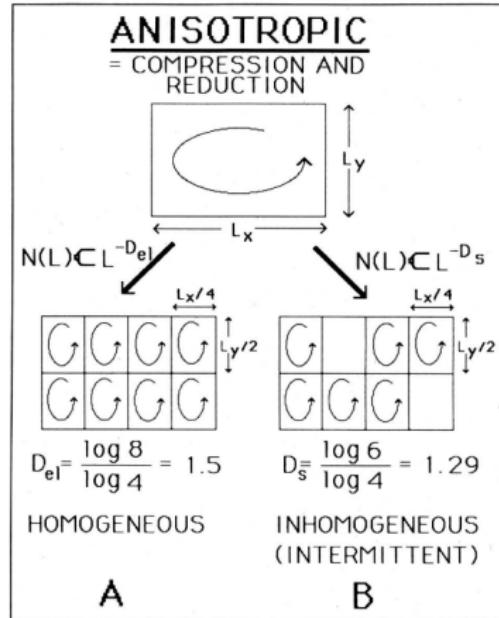
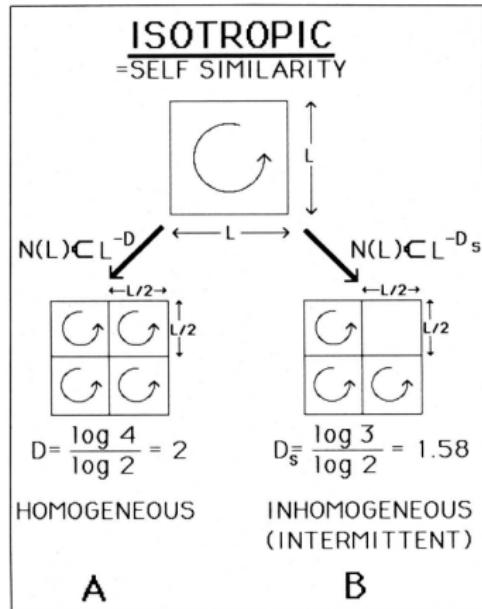
Turbulenz

Smoke Rings:



(aus 3b1b https://www.youtube.com/watch?v=_UoTTq651dE)

Turbulenz



Fall isotrop homogen:

Längenskalierung: 1/2

Energie: 1/4

→ homogene, isotrope Energieverteilung

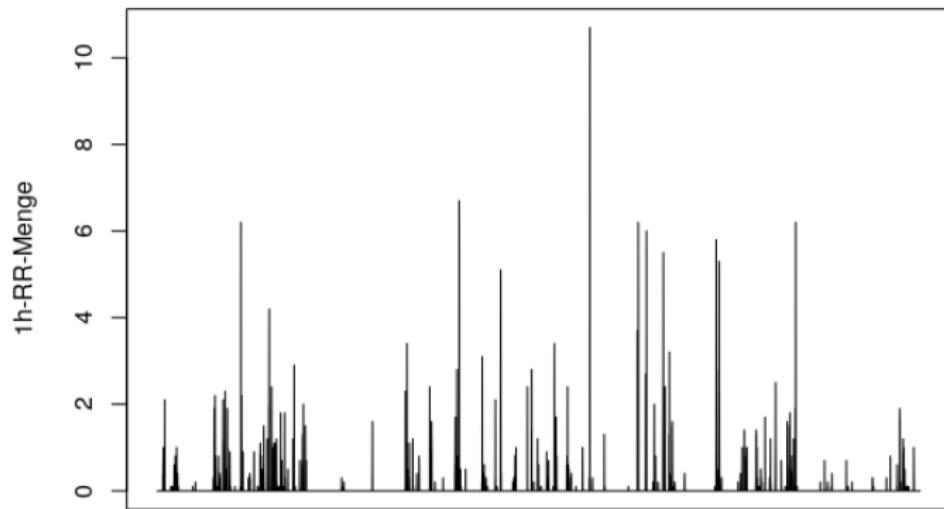
→ Kolmogorov'sches $k^{-5/3}$ -Gesetz

Fall inhomogen → GSI

[Lovejoy und Schertzer, 1986]

Niederschlag

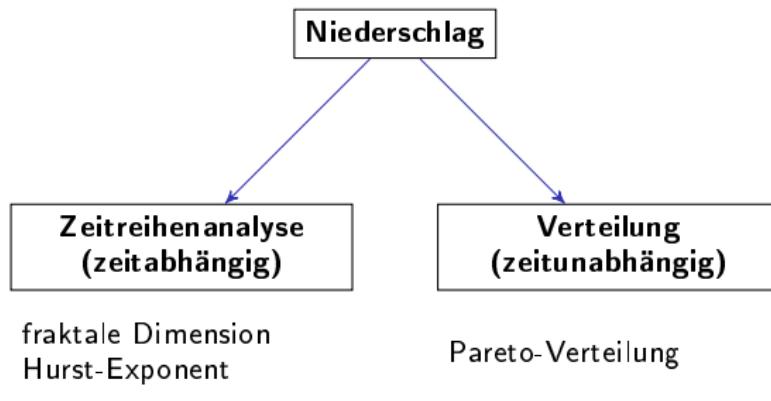
1h-Niederschlagsmenge Berlin-Dahlem 2020



- ▶ keine universelle Beschreibung über alle Skalen [Claußnitzer, 2010]

Niederschlag

Frage: Ist Niederschlag dann skaleninvariant, wenn die zugrundeliegenden Prozesse gleich sind?



[Claußnitzer, 2010]

Pareto-Verteilung

ursprüngliche Idee: Beschreibung der Einkommensverteilung (Pareto, 1897)

$$N = Ax^{-\alpha} \quad (6)$$

N: Anzahl der Personen mit Einkommen $> x$

Pareto-Prinzip: 20 % der Bevölkerung besitzen 80 % des Vermögens

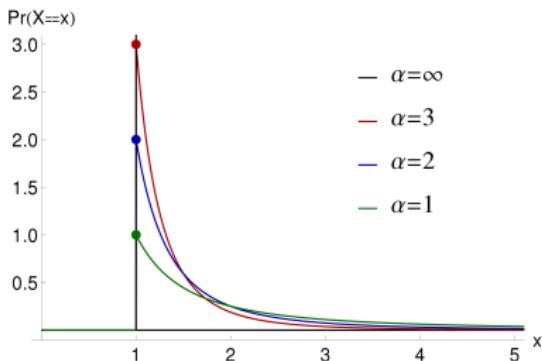
Pareto-Verteilung:

$$F(x > k) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}, \quad k > 0, \alpha > 0$$

Pareto-Dichte:

$$p(x) = \alpha k^{\alpha} x^{-\alpha-1} \in \mathbb{R}_{>0}$$

- ▶ skaleninvariant (Potenzgesetz)
- ▶ für kleine α : heavy tail



Hurst-Exponent

Definition des Hurst-Exponenten H:

$$X(at) = a^H X(t) \quad (7)$$

Interpretation: Abhängigkeitsindex

$$H \begin{cases} \in (0, 5, 1] & \rightarrow persistent \\ = 0,5 & \rightarrow unkorreliert \\ \in [0, 0, 5) & \rightarrow antipersistent \end{cases} \quad (8)$$

Zerlegung:

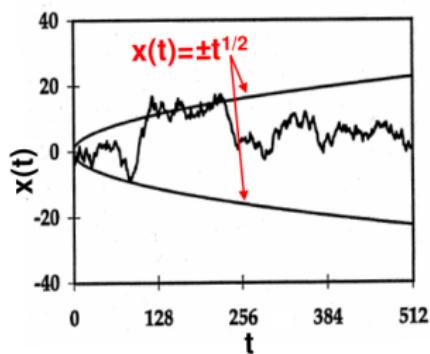
$$H(\alpha, D) = \frac{1}{\alpha} + D \quad (9)$$

α : Verteilungsparameter

D: Gedächtnisparameter

Beispiel: Brown'sche Molekularbewegung

$\sigma = t^H$ mit $H = 1/2$ und $d = 0$



[Claußnitzer, 2010]

Fraktale Dimension und Boxcounting-Dimension

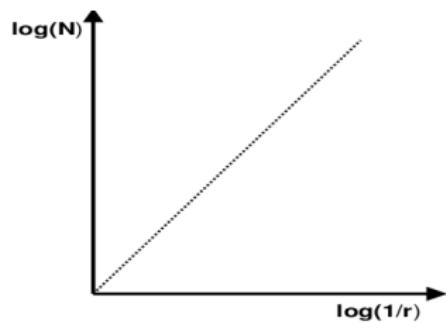
Berechnung der Boxcounting-Dimension (wie zuvor):

$$\text{Anzahl der Boxen} \approx c \cdot \text{Skalierungsfaktor}^d \quad (10)$$

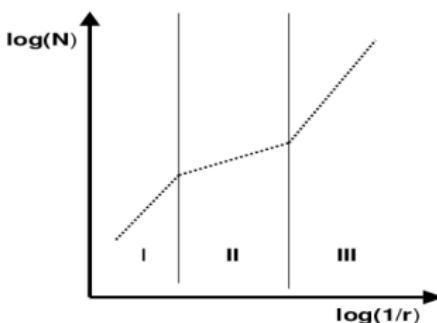
$$\log(\text{Anzahl der Boxen}) \approx \log(c) + d \cdot \log(\text{Skalierungsfaktor}) \quad (11)$$

Unterscheidung:

- ▶ Monofraktal $d = \text{konst.}$
- ▶ Multifraktal $d = d(t)$



Monofraktal



Multifraktal

[Claußnitzer, 2010]

Zusammenhang

- ▶ Hurst-Exponent H und Pareto-Exponent α :

$$H = \frac{1}{\alpha}$$

(wenn $D = 0$, also gedächtnislos, nur "Verteilungseigenschaft")

- ▶ Hurst-Exponent H und fraktale Dimension d für selbstähnliche Zeitreihen:

$$H = 2 - d$$

Hurst-Exponent: "langfristige Abhängigkeit"

fraktale Dimension: "kurzfristige Abhängigkeit"

Zusammenfassung

Grundlagen:

- ▶ Fraktal := nicht-ganzzahlige Dimension
- ▶ mehrere Dimensionsbegriffe: für Anwendungen häufig die Boxcounting-Dimension

Beispiele für Fraktale:

- ▶ Sierpinski-Dreieck, Julia-Menge, Mandelbrot-Menge, ...

Anwendungen in der Meteorologie:

- ▶ Turbulenz, Energiekaskaden
- ▶ Niederschlag
- ▶ weitere, insbesondere phänomenologisch

Literatur

-  Argyris, J; Faust, G.; Haase, M. und Friedrich, R.: *Die Erforschung des Chaos. Dynamische Systeme*, Springer Vieweg, Berlin, 2017(3).
-  Claußnitzer, A.: *Statistisch-Dynamische Analyse skalenabhängiger Niederschlagsprozesse: Vergleich zwischen Beobachtungen und Modell*, Dissertation, Freie Universität Berlin, 2010.
-  Lovejoy, S. und Mandelbrot, B. B.: *Fractal properties of rain, and a fractal model*, Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography, 37A, 209-232, DOI: 10.3402/tellusa.v37i3.11668, 1985.
-  Lovejoy, S. und Schertzer, D.: *Scale Invariance, Symmetries, Fractals, and Stochastic Simulations of Atmospheric Phenomena*, Bulletin American Meteorological Society, 67, 1, 1986.
-  Mandelbrot, B. B.: *Die fraktale Geometrie der Natur*, Springer Basel AG, DOI: 10.1007/978-3-0348-5027-8, 1987.

Literatur

Youtube:

TED Talk mit Benoit Mandelbrot: <https://www.youtube.com/watch?v=ay80M0sf6AQ>

3blue1brown über Fraktale:

Selbstähnlichkeit: <https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4>

Newton-Fraktal: <https://www.youtube.com/watch?v=-Rd0whmqP5s>

Mandelbrot-Menge: <https://www.youtube.com/watch?v=LqbZpur38nw>

raumfüllende Kurven: <https://www.youtube.com/watch?v=RU0wScIj36o>

Numberphile: <https://www.youtube.com/watch?v=FFftmWSzgmk>

Abbildungen

- S. 4: https://en.wikipedia.org/wiki/Sierpi%C5%84ski_triangle
- S. 6: <https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4>
- S. 9: <https://de.wikipedia.org/wiki/Newtonfraktal>
- S. 10 oben: <https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve>
- S. 10 unten: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_curve
- S. 11: <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>