Itk::Geo3D Notes

野田 五十樹

2024/10/04	初期バージョン
2024/10/20	屈曲点での円周接続

1 class LineSegment

1.1 closestFractionPairFrom()

3 次元 (以上) の 2 つの線分の最近点を求める。求めるものは、各線分上の分率とする。

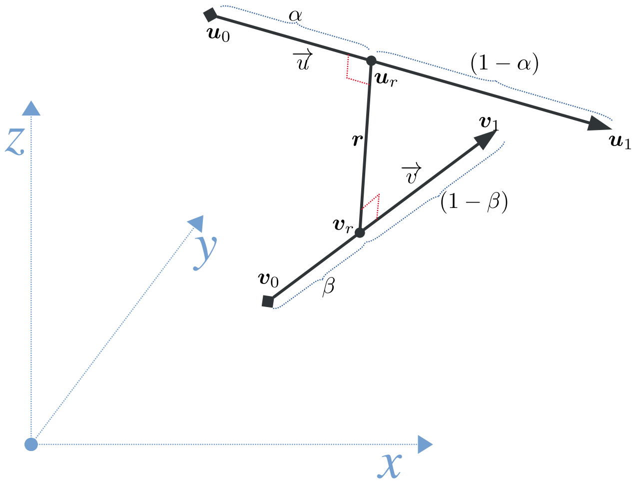

図 1: 2 つの線分の最近距離

まず、2 つの線分 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を考える (図 1)。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1 \rangle & (1) \\ \boldsymbol{v} &= \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \rangle & (2) \end{aligned}$$

ただし、$\langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1 \rangle$ は、位置 $\boldsymbol{u}_0$ から位置 $\boldsymbol{u}_1$ から位置への線分を表す。

線分 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 上の任意の点 $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_r$ は、その分率を各々 α, β として、次のように表される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_r &= (1-\alpha)\boldsymbol{u}_0 + \alpha \boldsymbol{u}_1 & (3) \\ \boldsymbol{v}_r &= (1-\beta)\boldsymbol{v}_0 + \beta \boldsymbol{v}_1 & (4) \end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ を両端とする線分 $\boldsymbol{r}$ を考える。

$$\boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_v \rangle \quad (5)$$

また、この線分の方向 $\boldsymbol{r}_d$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_d &= \boldsymbol{v}_r - \boldsymbol{u}_r & (6) \\ &= -\alpha(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) + \beta(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0) & (7) \end{aligned}$$

線分 $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の最近点を結ぶ線分とすると、直線 $\boldsymbol{r}$ と 2 つの直線 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は互いに直交する。[1]よって、以下の等式が成立する。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}_r - \boldsymbol{u}_r)(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) &= 0 \quad (8)\\
(\boldsymbol{v}_r - \boldsymbol{u}_r)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) &= 0 \quad (9)
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$
\begin{aligned}
-\alpha(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)^2 + \beta(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) &= 0 \quad (10)\\
-\alpha(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) + \beta(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)^2 + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) &= 0 \quad (11)
\end{aligned}
$$

ここで、以下の置き換えを行う。

$$
\begin{aligned}
a &= (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)^2 \quad (12)\\
b &= (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)^2 \quad (13)\\
c &= (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) \quad (14)\\
g &= (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) \quad (15)\\
h &= (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) \quad (16)
\end{aligned}
$$

これにより、(10),(11) は以下のベクトル式で書ける。

$$
\begin{bmatrix} -a & c \\ -c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ -h \end{bmatrix} \quad (17)
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a & c \\ -c & b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -g \\ -h \end{bmatrix} \quad (18)\\
&= \frac{-1}{\det} \begin{bmatrix} b & -c \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (19)
\end{aligned}
$$

ただし、det は上記行列の行列式の値であり、以下の通り。

$$
\det = c^2 - ab \quad (20)
$$

ここで求まった α, β が区間 $[0, 1]$ の間であれば、頂点 $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_r$ は各々、線分 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 上にある。それ以外の場合は、直前 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 上となる。

一方、行列式の値 det が 0 となるのは、

$$
\begin{aligned}
c^2 - ab &= ((\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0))^2 - (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)^2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)^2 = 0 \quad (21)\\
((\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0))^2 &= (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)^2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)^2 \quad (22)\\
(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) &= |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0|\,|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0| \quad (23)
\end{aligned}
$$

これは、線分 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が並行の場合である。この場合は、$\alpha = \beta = 0$ としてよい。[2]

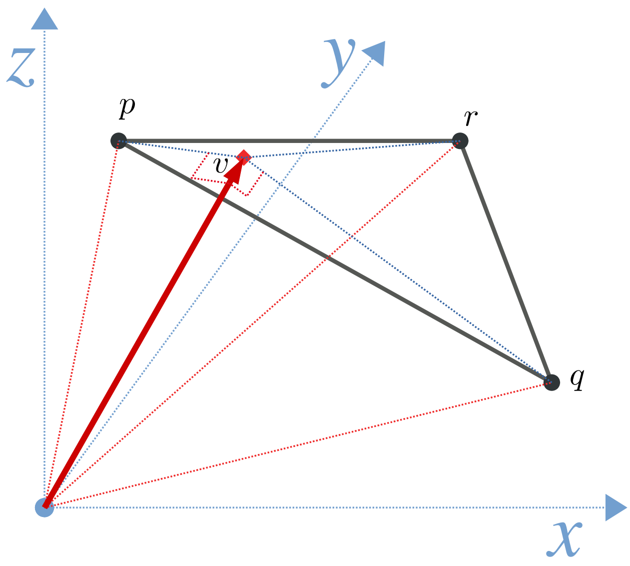

図 2: 三角形と 垂線 (法線)

2 class Triangle

2.1 orthogonalDirection()

3 次元 (以上) の空間にある 3 点 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ で定まる平面 S の方向 $\boldsymbol{s}$ を考える。ただし、平面 S の方向とは、平面に対して垂直な方向とする。また、その平面 S は原点 $[0, 0, 0]$ を含まないものとする。[3]

平面 S 上の点 $\boldsymbol{v}$ は以下の式で表される。

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q} + (1 - \alpha - \beta)\boldsymbol{r} \tag{24}$$

ただし、α, β は実数とする。なお、α, β が以下の範囲の時、$\boldsymbol{v}$ は三角形 $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \rangle$ の内部にある。

$$0 < \alpha < 1 \tag{25}$$
$$0 < \beta < 1 \tag{26}$$
$$0 < (1 - \alpha - \beta) < 1 \tag{27}$$

ここで、ベクトル $\boldsymbol{v}$ が平面 S に垂直であるとする。この場合、以下が成立する。

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{28}$$
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{29}$$

つまり、

$$\alpha(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r})^2 + \beta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r})(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{30}$$
$$\alpha(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r})(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}) + \beta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r})^2 + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{31}$$

[1]本来、線分は両端をはみ出さないが、ここでは話を簡単にするため、直線で考える。
[2]正確には、線分の方向により一方を 1 にする必要がある。
[3]原点を含む場合は、座標系全体を平行移動して原点を含まないようにする。

ここで以下の置き換えを行う。

$$
\begin{aligned}
a &= (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})^2 & (32)\\
b &= (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}) & (33)\\
c &= (\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r})^2 & (34)\\
g &= \boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}) & (35)\\
h &= \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}) & (36)
\end{aligned}
$$

これにより、(30)、(31) は以下のように表記できる。

$$
\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \tag{37}
$$

よって、α, β は以下の式で求まる。

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1}\left(-\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\right) & (38)\\
&= \frac{-1}{\det}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} & (39)\\
\det &= ac-b^2 & (40)
\end{aligned}
$$

なお、 $\det = 0$ では上記解は求まらない。これは、$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の 3 点の内 2 つが一致している場合である。

2.2 orthogonalDirection2()

外積の定義より推薦を計算する。

2 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について、以下のような外積 $\boldsymbol{w}$ は、以下の性質を満たす。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} & (41)\\
&= \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_z \end{bmatrix} & (42)\\
\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} &= 0 & (43)\\
\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} &= 0 & (44)\\
|\boldsymbol{w}| &= \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \text{ が張る三角形の面積} & (45)
\end{aligned}
$$

このベクトルの外積を使って、図 3 のような三角形 PQR に対する垂線 $\boldsymbol{h}$ は以下のように求めることができる。

$$
\begin{aligned}
P:\boldsymbol{p} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} p_x, p_y, p_z \end{bmatrix} & (46)\\
Q:\boldsymbol{q} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} q_x, q_y, q_z \end{bmatrix} & (47)\\
R:\boldsymbol{r} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} r_x, r_y, r_z \end{bmatrix} & (48)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} q_x-p_x, q_y-p_y, q_z-p_z \end{bmatrix} & (49)\\
\overrightarrow{QR} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} r_x-q_x, r_y-q_y, r_z-q_z \end{bmatrix} & (50)
\end{aligned}
$$

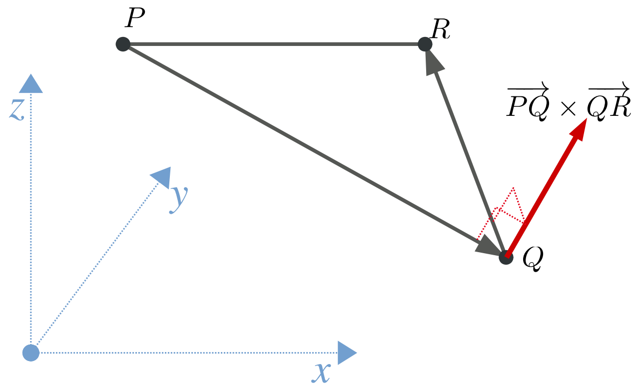

図 3: 三角形と外積による垂線 (法線)

$$\boldsymbol{h} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} \tag{51}$$

$$= \begin{bmatrix} (q_y - p_y)(r_z - q_z) - (q_z - p_z)(r_y - q_y) \\ (q_z - p_z)(r_x - q_x) - (q_x - p_x)(r_z - q_z) \\ (p_x - p_x)(r_y - q_y) - (q_y - p_y)(r_x - q_x) \end{bmatrix} \tag{52}$$

2.3 屈曲点での半径 R の接続とセットバック

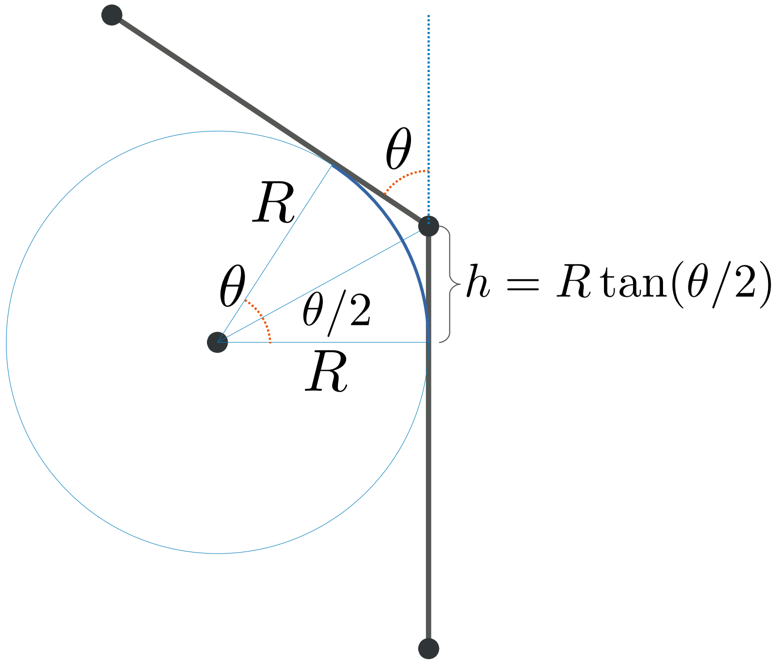

図 4: 屈曲点での円周に寄る接続とセットバック

2つの連続する線分が角度 θ をつけて曲がっている時、その屈曲点で半径 R の円周で接続することを考える。この場合、円周と線分の接点と屈曲点の間の距離 (セットバック) を h とする (図 4)。

この h は以下の式で表すことができる。

$$h = R\tan\frac{\theta}{2} \tag{53}$$

3　class Ellipse

3.1　楕円の定義

3 次元空間の楕円は、$\langle \boldsymbol{o}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ で定義される。ただし、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o} &: \text{中心} && (54)\\ \boldsymbol{u} &: \text{主軸方向。角度 0 の方向} && (55)\\ \boldsymbol{v} &: \text{副軸方向。角度 90 度の方向} && (56) \end{aligned}$$

である。補助的なパラメータとして、楕円が属する平面に垂直な方向 $\boldsymbol{w}$ は、以下を満たす。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} &= 0 && (57)\\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} &= 0 && (58)\\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= 0 && (59) \end{aligned}$$

楕円周上の点 $\boldsymbol{p}$ と、その点における接線ベクトル $\dot{\boldsymbol{p}}$ は、主軸からの角度 θ をパラメータとして、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{o} + \cos(\theta)\boldsymbol{u} + \sin(\theta)\boldsymbol{v} && (60)\\ \dot{\boldsymbol{p}} &= -\sin(\theta)\boldsymbol{u} + \cos(\theta)\boldsymbol{v} && (61) \end{aligned}$$

で表される。

3.2　2 つの円の最近点

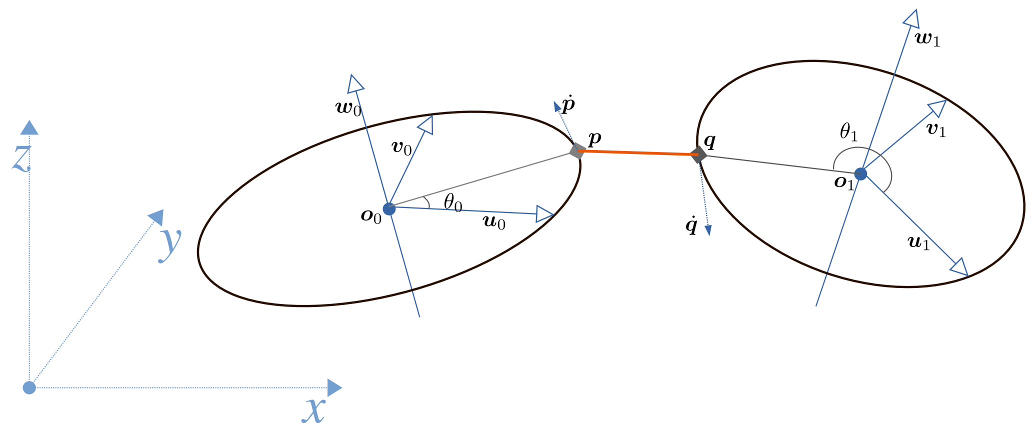

図 5: 2 つの円の最近点

2 つの円、$\langle \boldsymbol{o}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0 \rangle$、$\langle \boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle$ を考える (図 5)。この 2 つの円の最近点を $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ として、これらの点の楕円の主軸からの角度を θ_0, θ_1 としておく。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{o}_0 + \cos(\theta_0)\boldsymbol{u}_0 + \sin(\theta_0)\boldsymbol{v}_0 && (62)\\ \boldsymbol{q} &= \boldsymbol{o}_1 + \cos(\theta_1)\boldsymbol{u}_1 + \sin(\theta_1)\boldsymbol{v}_1 && (63)\\ \dot{\boldsymbol{p}} &= -\sin(\theta_0)\boldsymbol{u}_0 + \cos(\theta_0)\boldsymbol{v}_0 && (64)\\ \dot{\boldsymbol{q}} &= -\sin(\theta_1)\boldsymbol{u}_1 + \cos(\theta_1)\boldsymbol{v}_1 && (65) \end{aligned}$$

さらに、 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ 間のベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする。この場合、最近点、すなわち極値であることから以下が成立するはずである。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} && (66) \\ \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{w}_0 &= 0 && (67) \\ \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{w}_1 &= 0 && (68) \\ \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{p}} &= 0 && (69) \\ \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} &= 0 && (70) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{r}$ を展開すると以下のようになる。

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = (\boldsymbol{o}_1 - \boldsymbol{o}_0) + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{u}_0 & -\boldsymbol{v}_0 & \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \\ \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} \tag{71}$$

ここで、以下のように変数を整理する。

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{o} &= \boldsymbol{o}_1 - \boldsymbol{o}_0 && (72) \\ \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_0 & \boldsymbol{v}_0 & -\boldsymbol{u}_1 & -\boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} && (73) \\ \boldsymbol{\lambda} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \\ \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} && (74) \end{aligned}$$

これにより (71) は以下になる。

$$\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{o} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda} \tag{75}$$

同様に、$\dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{q}}$ も以下のように表現する。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 & -\boldsymbol{u}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{bmatrix} && (76) \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 & -\boldsymbol{u}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \\ \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} && (77) \\ &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{\lambda} && (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{q}} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & -\boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} && (79) \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{v}_1 & -\boldsymbol{u}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \\ \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix} && (80) \\ &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{\lambda} && (81) \end{aligned}$$

よって、整理すると、

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{r} &= {}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{G}\left(\Delta\boldsymbol{o} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}\right) = 0 && (82)\\
{}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{o} &= {}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda} && (83)\\
\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{r} &= {}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{H}\left(\Delta\boldsymbol{o} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}\right) = 0 && (84)\\
{}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{o} &= {}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda} && (85)
\end{aligned}$$

つまり、2 次形式のベクトル方程式である。
2 次形式の方程式を解くためには、対角化を行えば良い。つまり、

$$\begin{aligned}
{}^{\top}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P} && (86)\\
\boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{\lambda} && (87)
\end{aligned}$$

とし、$\boldsymbol{P}^{-1} = {}^{\top}\boldsymbol{P}$ とすれば、

$$\begin{aligned}
{}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{o} &= {}^{\top}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{o} && (88)\\
&= {}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{o} && (89)\\
&= {}^{\top}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{o} && (90)\\
{}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda} &= {}^{\top}\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\lambda} && (91)\\
&= {}^{\top}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\psi} && (92)
\end{aligned}$$

よって、

$$
{}^{\top}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{G}\Delta\boldsymbol{o} = {}^{\top}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\psi} \qquad (93)
$$

これだとなんとか解けそうである。
ただ、以下の難点があり、実際は不可能。

- 一般に、$\boldsymbol{P}^{-1} = {}^{\top}\boldsymbol{P}$ が成り立たない。$\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ が対称行列であればよいが、多分違う。
- $\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$ についても同様の変換が必要であるが、その時の変換行列 $\boldsymbol{P}$ は異なるものとなる。異なると、連立で容易には解けなくなる。