Itk::Geo3D Notes

野田 五十樹

2024/10/04	初期バージョン

1 class LineSegment

1.1 closestFractionPairFrom()

3 次元 (以上) の 2 つの線分の最近点を求める。求めるものは、各線分上の分率とする。

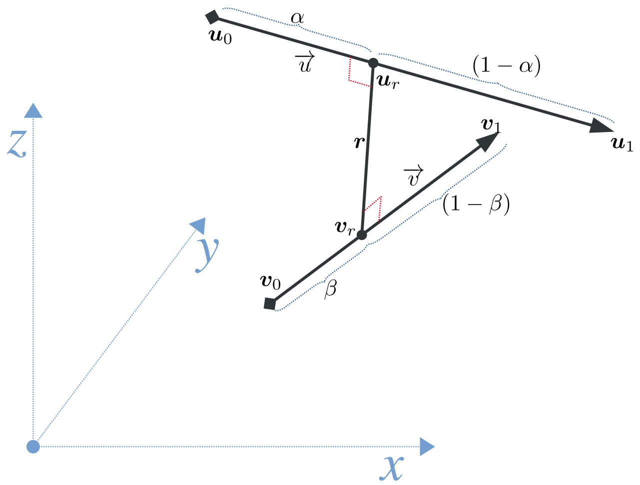

図 1: 2 つの線分の最近距離

まず、2 つの線分 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を考える (図 1)。

$$\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1 \rangle \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1 \rangle \tag{2}$$

ただし、$\langle \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1 \rangle$ は、位置 $\boldsymbol{u}_0$ から位置 $\boldsymbol{u}_1$ から位置への線分を表す。

線分 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 上の任意の点 $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_r$ は、その分率を各々 α, β として、次のように表される。

$$\boldsymbol{u}_r = (1-\alpha)\boldsymbol{u}_0 + \alpha \boldsymbol{u}_1 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}_r = (1-\beta)\boldsymbol{v}_0 + \beta \boldsymbol{v}_1 \tag{4}$$

ここで、$\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ を両端とする線分 $\boldsymbol{r}$ を考える。

$$\boldsymbol{r} = \langle \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_v \rangle \tag{5}$$

また、この線分の方向 $\boldsymbol{r}_d$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_d &= \boldsymbol{v}_r - \boldsymbol{u}_r & (6) \\ &= -\alpha(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) + \beta(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0) & (7) \end{aligned}$$

線分 $\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の最近点を結ぶ線分とすると、直線 $\boldsymbol{r}$ と 2 つの直線 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は互いに直交する。[1]よって、以下の等式が成立する。

$$(\boldsymbol{v}_r - \boldsymbol{u}_r)(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) = 0 \tag{8}$$
$$(\boldsymbol{v}_r - \boldsymbol{u}_r)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) = 0 \tag{9}$$

すなわち、

$$-\alpha(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)^2 + \beta(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) = 0 \tag{10}$$
$$-\alpha(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) + \beta(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)^2 + (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) = 0 \tag{11}$$

ここで、以下の置き換えを行う。

$$a = (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)^2 \tag{12}$$
$$b = (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)^2 \tag{13}$$
$$c = (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) \tag{14}$$
$$g = (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) \tag{15}$$
$$h = (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) \tag{16}$$

これにより、(10),(11) は以下のベクトル式で書ける。

$$\begin{bmatrix} -a & c \\ -c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ -h \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & c \\ -c & b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -g \\ -h \end{bmatrix} \tag{18}$$
$$= \frac{-1}{\det} \begin{bmatrix} b & -c \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \tag{19}$$

ただし、det は上記行列の行列式の値であり、以下の通り。

$$\det = c^2 - ab \tag{20}$$

ここで求まった α, β が区間 $[0, 1]$ の間であれば、頂点 $\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_r$ は各々、線分 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 上にある。それ以外の場合は、直前 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 上となる。

一方、行列式の値 det が 0 となるのは、

$$c^2 - ab = ((\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0))^2 - (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)^2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)^2 = 0 \tag{21}$$
$$((\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0))^2 = (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)^2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0)^2 \tag{22}$$
$$(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) = |\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0|\,|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0| \tag{23}$$

これは、線分 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が並行の場合である。この場合は、$\alpha = \beta = 0$ としてよい。[2]

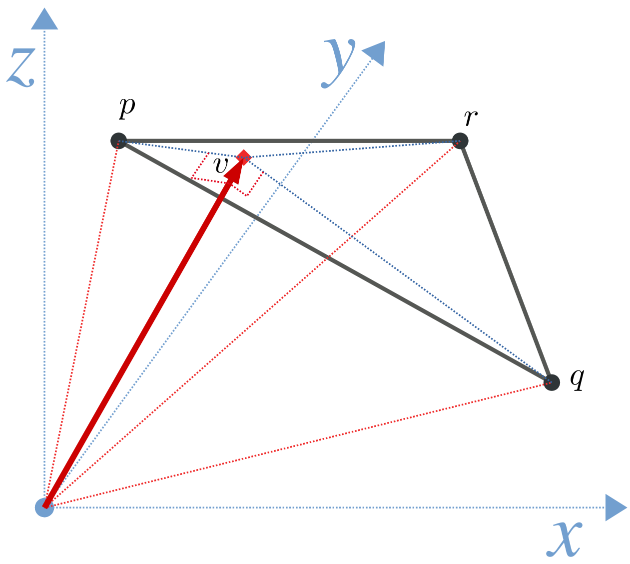

図 2: 三角形と 垂線 (法線)

2 class Triangle

2.1 orthogonalDirection()

3 次元 (以上) の空間にある 3 点 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ で定まる平面 S の方向 $\boldsymbol{s}$ を考える。ただし、平面 S の方向とは、平面に対して垂直な方向とする。また、その平面 S は原点 $[0, 0, 0]$ を含まないものとする。[3]
平面 S 上の点 $\boldsymbol{v}$ は以下の式で表される。

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q} + (1 - \alpha - \beta)\boldsymbol{r} \tag{24}$$

ただし、α, β は実数とする。なお、α, β が以下の範囲の時、$\boldsymbol{v}$ は三角形 $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \rangle$ の内部にある。

$$0 < \alpha < 1 \tag{25}$$
$$0 < \beta < 1 \tag{26}$$
$$0 < (1 - \alpha - \beta) < 1 \tag{27}$$

ここで、ベクトル $\boldsymbol{v}$ が平面 S に垂直であるとする。この場合、以下が成立する。

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{28}$$
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{29}$$

つまり、

$$\alpha(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r})^2 + \beta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r})(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{30}$$
$$\alpha(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r})(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}) + \beta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{r})^2 + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{31}$$

[1]本来、線分は両端をはみ出さないが、ここでは話を簡単にするため、直線で考える。
[2]正確には、線分の方向により一方を 1 にする必要がある。
[3]原点を含む場合は、座標系全体を平行移動して原点を含まないようにする。

ここで以下の置き換えを行う。

$$\begin{aligned} a &= (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})^2 && (32)\\ b &= (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r})(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}) && (33)\\ c &= (\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r})^2 && (34)\\ g &= \boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}) && (35)\\ h &= \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{r}) && (36) \end{aligned}$$

これにより、(30)、(31) は以下のように表記できる。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \tag{37}$$

よって、α, β は以下の式で求まる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1}\left(-\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\right) && (38)\\ &= \frac{-1}{\det}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} && (39)\\ \det &= ac-b^2 && (40) \end{aligned}$$

なお、 $\det = 0$ では上記解は求まらない。これは、$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の 3 点の内 2 つが一致している場合である。

2.2 orthogonalDirection2()

外積の定義より推薦を計算する。

2 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について、以下のような外積 $\boldsymbol{w}$ は、以下の性質を満たす。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} && (41)\\ &= \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_z \end{bmatrix} && (42)\\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} &= 0 && (43)\\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} &= 0 && (44)\\ |\boldsymbol{w}| &= \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\text{ が張る三角形の面積} && (45) \end{aligned}$$

このベクトルの外積を使って、図 3 のような三角形 PQR に対する垂線 $\boldsymbol{h}$ は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} P:\boldsymbol{p} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} p_x, p_y, p_z \end{bmatrix} && (46)\\ Q:\boldsymbol{q} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} q_x, q_y, q_z \end{bmatrix} && (47)\\ R:\boldsymbol{r} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} r_x, r_y, r_z \end{bmatrix} && (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} q_x-p_x, q_y-p_y, q_z-p_z \end{bmatrix} && (49)\\ \overrightarrow{QR} &= {}^{\top}\begin{bmatrix} r_x-q_x, r_y-q_y, r_z-q_z \end{bmatrix} && (50) \end{aligned}$$

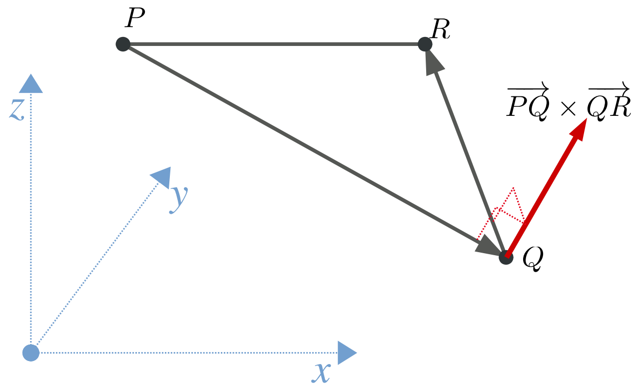

図 3: 三角形と外積による垂線 (法線)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{h} &= \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} && (51) \\
&= \begin{bmatrix} (q_y - p_y)(r_z - q_z) - (q_z - p_z)(r_y - q_y) \\ (q_z - p_z)(r_x - q_x) - (q_x - p_x)(r_z - q_z) \\ (p_x - p_x)(r_y - q_y) - (q_y - p_y)(r_x - q_x) \end{bmatrix} && (52)
\end{aligned}
$$