

Itk::Geo3D Notes

野田 五十樹

2024/10/04	初期バージョン
2024/10/20	屈曲点での円周接続

1 class LineSegment

1.1 closestFractionPairFrom()

3次元(以上)の2つの線分の最近点を求める。求めるものは、各線分上の分率とする。

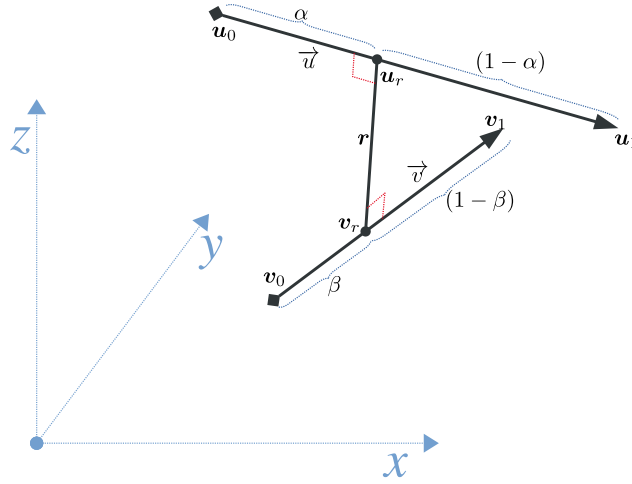


図 1: 2つの線分の最近距離

まず、2つの線分 u, v を考える (図 1)。

$$u = \langle u_0, u_1 \rangle \quad (1)$$

$$v = \langle v_0, v_1 \rangle \quad (2)$$

ただし、 $\langle u_0, u_1 \rangle$ は、位置 u_0 から位置 u_1 への線分を表す。

線分 u, v 上の任意の点 u_r, v_r は、その分率を各々 α, β として、次のように表される。

$$u_r = (1 - \alpha)u_0 + \alpha u_1 \quad (3)$$

$$v_r = (1 - \beta)v_0 + \beta v_1 \quad (4)$$

ここで、 u_r, v_r を両端とする線分 r を考える。

$$r = \langle u_r, v_r \rangle \quad (5)$$

また、この線分の方角 r_d は

$$r_d = v_r - u_r \quad (6)$$

$$= -\alpha(u_1 - u_0) + \beta(v_1 - v_0) + (v_0 - u_0) \quad (7)$$

線分 r が u, v の最近点を結ぶ線分とすると、直線 r と 2 つの直線 u, v は互いに直交する。¹よって、以下の等式が成立する。

$$(v_r - u_r)(u_1 - u_0) = 0 \quad (8)$$

$$(v_r - u_r)(v_1 - v_0) = 0 \quad (9)$$

すなわち、

$$-\alpha(u_1 - u_0)^2 + \beta(u_1 - u_0)(v_1 - v_0) + (v_0 - u_0)(u_1 - u_0) = 0 \quad (10)$$

$$-\alpha(u_1 - u_0)(v_1 - v_0) + \beta(v_1 - v_0)^2 + (v_0 - u_0)(v_1 - v_0) = 0 \quad (11)$$

ここで、以下の置き換えを行う。

$$a = (u_1 - u_0)^2 \quad (12)$$

$$b = (v_1 - v_0)^2 \quad (13)$$

$$c = (u_1 - u_0)(v_1 - v_0) \quad (14)$$

$$g = (v_0 - u_0)(u_1 - u_0) \quad (15)$$

$$h = (v_0 - u_0)(v_1 - v_0) \quad (16)$$

これにより、(10),(11) は以下のベクトル式で書ける。

$$\begin{bmatrix} -a & c \\ -c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ -h \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & c \\ -c & b \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -g \\ -h \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$= \frac{-1}{\det} \begin{bmatrix} b & -c \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (19)$$

ただし、 \det は上記行列の行列式の値であり、以下の通り。

$$\det = c^2 - ab \quad (20)$$

ここで求まった α, β が区間 $[0, 1]$ の間であれば、頂点 u_r, v_r は各々、線分 u, v 上にある。それ以外の場合は、直前 u, v 上となる。

一方、行列式の値 \det が 0 となるのは、

$$c^2 - ab = ((u_1 - u_0)(v_1 - v_0))^2 - (u_1 - u_0)^2(v_1 - v_0)^2 = 0 \quad (21)$$

$$((u_1 - u_0)(v_1 - v_0))^2 = (u_1 - u_0)^2(v_1 - v_0)^2 \quad (22)$$

$$(u_1 - u_0)(v_1 - v_0) = |u_1 - u_0| |v_1 - v_0| \quad (23)$$

これは、線分 u, v が並行の場合である。この場合は、 $\alpha = \beta = 0$ としてよい。²

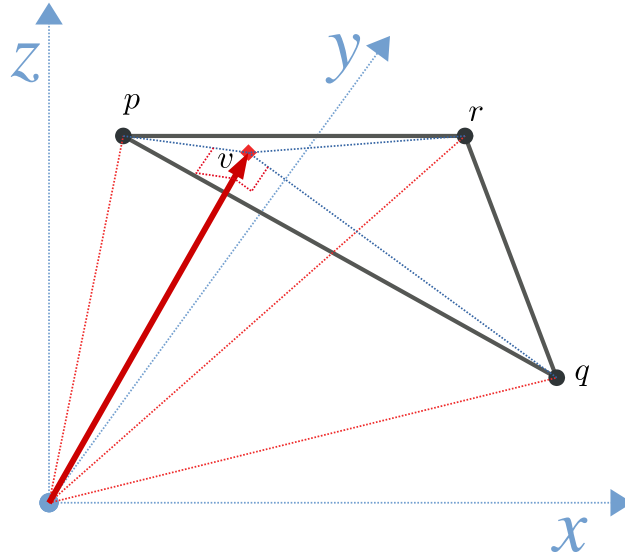


図 2: 三角形と 垂線 (法線)

2 class Triangle

2.1 orthogonalDirection()

3次元 (以上) の空間にある 3 点 p, q, r で定まる平面 S の方向 s を考える。ただし、平面 S の方向とは、平面に対して垂直な方向とする。また、その平面 S は原点 $[0, 0, 0]$ を含まないものとする。³

平面 S 上の点 v は以下の式で表される。

$$v = \alpha p + \beta q + (1 - \alpha - \beta)r \quad (24)$$

ただし、 α, β は実数とする。なお、 α, β が以下の範囲の時、 v は三角形 $\langle p, q, r \rangle$ の内部にある。

$$0 < \alpha < 1 \quad (25)$$

$$0 < \beta < 1 \quad (26)$$

$$0 < (1 - \alpha - \beta) < 1 \quad (27)$$

ここで、ベクトル v が平面 S に垂直であるとする。この場合、以下が成立する。

$$v(p - r) = 0 \quad (28)$$

$$v(q - r) = 0 \quad (29)$$

つまり、

$$\alpha(p - r)^2 + \beta(q - r)(p - r) + r(p - r) = 0 \quad (30)$$

$$\alpha(p - r)(q - r) + \beta(p - r)^2 + r(q - r) = 0 \quad (31)$$

¹本来、線分は両端をはみ出さないが、ここでは話を簡単にするため、直線で考える。

²正確には、線分の方向により一方を 1 にする必要がある。

³原点を含む場合は、座標系全体を平行移動して原点を含まないようにする。

ここで以下の置き換えを行う。

$$a = (\mathbf{p} - \mathbf{r})^2 \quad (32)$$

$$b = (\mathbf{p} - \mathbf{r})(\mathbf{q} - \mathbf{r}) \quad (33)$$

$$c = (\mathbf{q} - \mathbf{r})^2 \quad (34)$$

$$g = \mathbf{r}(\mathbf{p} - \mathbf{r}) \quad (35)$$

$$h = \mathbf{r}(\mathbf{q} - \mathbf{r}) \quad (36)$$

これにより、(30)、(31) は以下のように表記できる。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (37)$$

よって、 α, β は以下の式で求まる。

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} \left(- \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \right) \quad (38)$$

$$= \frac{-1}{\det} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\det = ac - b^2 \quad (40)$$

なお、 $\det = 0$ では上記解は求まらない。これは、 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ の3点の内2つが一致している場合である。

2.2 orthogonalDirection2()

外積の定義より 推薦を計算する。

2つのベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} について、以下のような外積 \mathbf{w} は、以下の性質を満たす。

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad (41)$$

$$= \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (43)$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (44)$$

$$|\mathbf{w}| = \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ が張る 三角形の面積} \quad (45)$$

このベクトルの外積を使って、図3のような三角形 PQR に対する垂線 \mathbf{h} は以下のように求めることができる。

$$P : \mathbf{p} = {}^\top \begin{bmatrix} p_x, p_y, p_z \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$Q : \mathbf{q} = {}^\top \begin{bmatrix} q_x, q_y, q_z \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$R : \mathbf{r} = {}^\top \begin{bmatrix} r_x, r_y, r_z \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\overrightarrow{PQ} = {}^\top \begin{bmatrix} q_x - p_x, q_y - p_y, q_z - p_z \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\overrightarrow{QR} = {}^\top \begin{bmatrix} r_x - q_x, r_y - q_y, r_z - q_z \end{bmatrix} \quad (50)$$

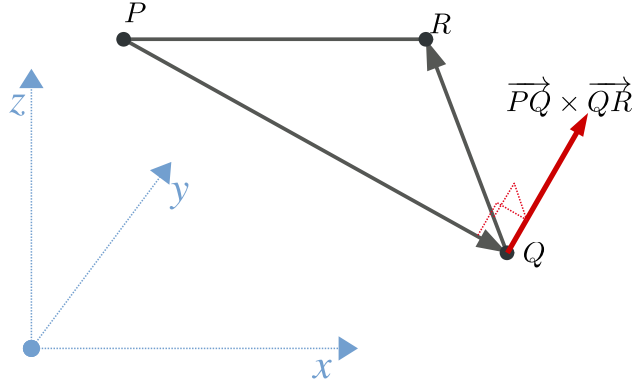


図 3: 三角形と外積による垂線 (法線)

$$\mathbf{h} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} \quad (51)$$

$$= \begin{bmatrix} (q_y - p_y)(r_z - q_z) - (q_z - p_z)(r_y - q_y) \\ (q_z - p_z)(r_x - q_x) - (q_x - p_x)(r_z - q_z) \\ (p_x - p_x)(r_y - q_y) - (q_y - p_y)(r_x - q_x) \end{bmatrix} \quad (52)$$

2.3 屈曲点での半径 R の接続とセットバック

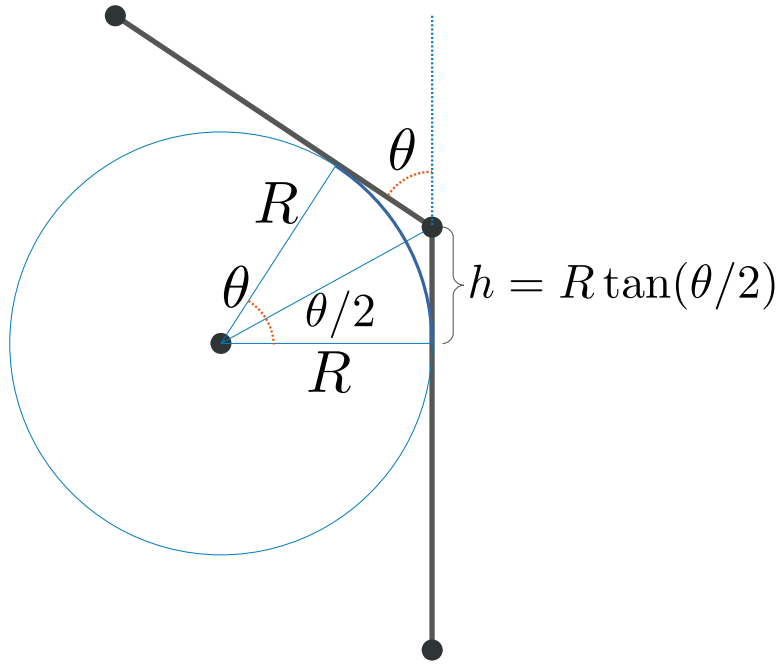


図 4: 屈曲点での円周に寄る接続とセットバック

2つの連続する線分が角度 θ をつけて曲がっている時、その屈曲点で半径 R の円周で接続することを考える。この場合、円周と線分の接点と屈曲点の間の距離 (セットバック) を h とする (図 4)。

この h は以下の式で表すことができる。

$$h = R \tan \frac{\theta}{2} \quad (53)$$

3 class Ellipse

3.1 楕円の定義

3次元空間の楕円は、 $\langle \mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ で定義される。ただし、

$$\mathbf{o} : \text{中心} \quad (54)$$

$$\mathbf{u} : \text{主軸方向。角度 } 0 \text{ の方向} \quad (55)$$

$$\mathbf{v} : \text{副軸方向。角度 } 90 \text{ 度 の方向} \quad (56)$$

である。補助的なパラメータとして、楕円が属する平面に垂直な方向 \mathbf{w} は、以下を満たす。

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (57)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (58)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (59)$$

楕円周上の点 \mathbf{p} と、その点における接線ベクトル $\dot{\mathbf{p}}$ は、主軸からの角度 θ をパラメータとして、

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + \cos(\theta)\mathbf{u} + \sin(\theta)\mathbf{v} \quad (60)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\sin(\theta)\mathbf{u} + \cos(\theta)\mathbf{v} \quad (61)$$

で表される。

3.2 2つの円の最近点

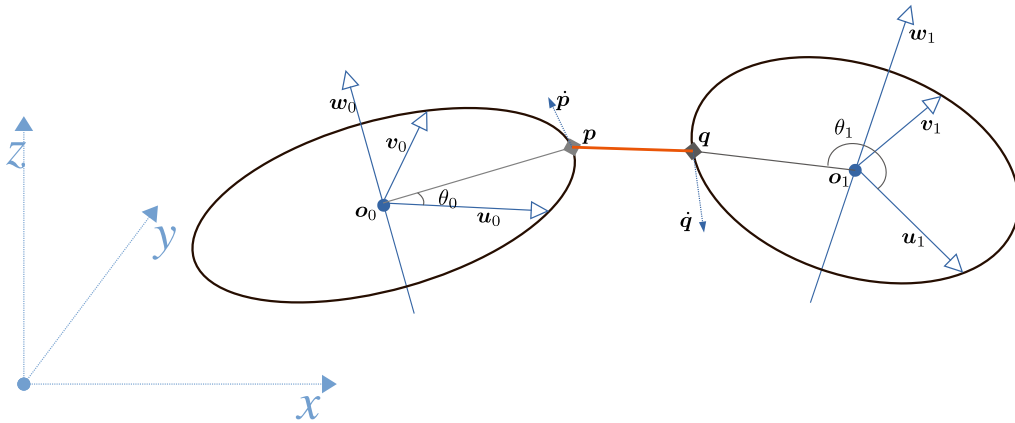


図 5: 2つの円の最近点

2つの円、 $\langle \mathbf{o}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0 \rangle$ 、 $\langle \mathbf{o}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$ を考える (図 5)。この 2つの円の最近点を \mathbf{p}, \mathbf{q} として、これらの点の楕円の主軸からの角度を θ_0, θ_1 としておく。

$$\mathbf{p} = \mathbf{o}_0 + \cos(\theta_0)\mathbf{u}_0 + \sin(\theta_0)\mathbf{v}_0 \quad (62)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{o}_1 + \cos(\theta_1)\mathbf{u}_1 + \sin(\theta_1)\mathbf{v}_1 \quad (63)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\sin(\theta_0)\mathbf{u}_0 + \cos(\theta_0)\mathbf{v}_0 \quad (64)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\sin(\theta_1)\mathbf{u}_1 + \cos(\theta_1)\mathbf{v}_1 \quad (65)$$

さらに、 \mathbf{p}, \mathbf{q} 間のベクトルを \mathbf{r} とする。この場合、最近点、すなわち極値であることから以下が成立するはずである。

$$\mathbf{r} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \quad (66)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}_0 = 0 \quad (67)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}_1 = 0 \quad (68)$$

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (69)$$

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (70)$$

\mathbf{r} を展開すると以下のようになる。

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = (\mathbf{o}_1 - \mathbf{o}_0) + \begin{bmatrix} -\mathbf{u}_0 & -\mathbf{v}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

ここで、以下のように変数を整理する。

$$\Delta \mathbf{o} = \mathbf{o}_1 - \mathbf{o}_0 \quad (72)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{v}_0 & -\mathbf{u}_1 & -\mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (74)$$

これにより (71) は以下になる。

$$\mathbf{r} = \Delta \mathbf{o} - \mathbf{A} \boldsymbol{\lambda} \quad (75)$$

同様に、 $\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}}$ も以下のように表現する。

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 & -\mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 & -\mathbf{u}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$= \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda} \quad (78)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & -\mathbf{u}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{v}_1 & -\mathbf{u}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$= \mathbf{H} \boldsymbol{\lambda} \quad (81)$$

よって、整理すると、

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} = {}^T\lambda {}^T G (\Delta \mathbf{o} - \mathbf{A}\lambda) = 0 \quad (82)$$

$${}^T\lambda {}^T G \Delta \mathbf{o} = {}^T\lambda {}^T G \mathbf{A}\lambda \quad (83)$$

$$\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r} = {}^T\lambda {}^T H (\Delta \mathbf{o} - \mathbf{A}\lambda) = 0 \quad (84)$$

$${}^T\lambda {}^T H \Delta \mathbf{o} = {}^T\lambda {}^T H \mathbf{A}\lambda \quad (85)$$

つまり、2次形式のベクトル方程式である。

2次形式の方程式を解くためには、対角化を行えば良い。つまり、

$${}^T G \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \Lambda \mathbf{P} \quad (86)$$

$$\psi = \mathbf{P}\lambda \quad (87)$$

とし、 $\mathbf{P}^{-1} = {}^T \mathbf{P}$ とすれば、

$${}^T\lambda {}^T G \Delta \mathbf{o} = {}^T\lambda \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} {}^T G \Delta \mathbf{o} \quad (88)$$

$$= {}^T\lambda {}^T \mathbf{P} \mathbf{P} {}^T G \Delta \mathbf{o} \quad (89)$$

$$= {}^T\psi \mathbf{P} {}^T G \Delta \mathbf{o} \quad (90)$$

$${}^T\lambda {}^T G \mathbf{A}\lambda = {}^T\lambda {}^T \mathbf{P} \Lambda \mathbf{P}\lambda \quad (91)$$

$$= {}^T\psi \Lambda \psi \quad (92)$$

よって、

$${}^T\psi \mathbf{P} {}^T G \Delta \mathbf{o} = {}^T\psi \Lambda \psi \quad (93)$$

これだとなんとか解けそうである。

ただ、以下の難点があり、実際は不可能。

- 一般に、 $\mathbf{P}^{-1} = {}^T \mathbf{P}$ が成り立たない。 $\mathbf{G}\mathbf{A}$ が対称行列であればよいが、多分違う。
- $\mathbf{G}\mathbf{A}$ についても同様の変換が必要であるが、その時の変換行列 \mathbf{P} は異なるものとなる。異なると、連立で容易には解けなくなる。

3.3 点から円の最近点 (垂線)

図6のように、円 $\langle \mathbf{o}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ と点 \mathbf{p} が与えられているとする。また、 \mathbf{p} から円周への垂線の足を \mathbf{q} 、 \mathbf{p} から \mathbf{u} への垂線の足を \mathbf{g} 、 \mathbf{p} から \mathbf{v} への垂線の足を \mathbf{h} 、および、 \mathbf{p} から $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ がなす平面への垂線の足を \mathbf{f} としておく。

この場合、以下のような垂直の関係がある。

$$\overrightarrow{p\mathbf{q}} \perp \dot{\mathbf{q}} \quad (94)$$

$$\overrightarrow{f\mathbf{q}} \perp \dot{\mathbf{q}} \quad (95)$$

$$\overrightarrow{p\mathbf{g}} \perp \mathbf{u} \quad (96)$$

$$\overrightarrow{p\mathbf{h}} \perp \mathbf{v} \quad (97)$$

$$\overrightarrow{p\mathbf{f}} \perp \mathbf{u} \quad (98)$$

$$\overrightarrow{p\mathbf{f}} \perp \mathbf{v} \quad (99)$$

$$\overrightarrow{p\mathbf{f}} \perp \overrightarrow{f\mathbf{g}} \quad (100)$$

$$\overrightarrow{p\mathbf{f}} \perp \overrightarrow{f\mathbf{h}} \quad (101)$$

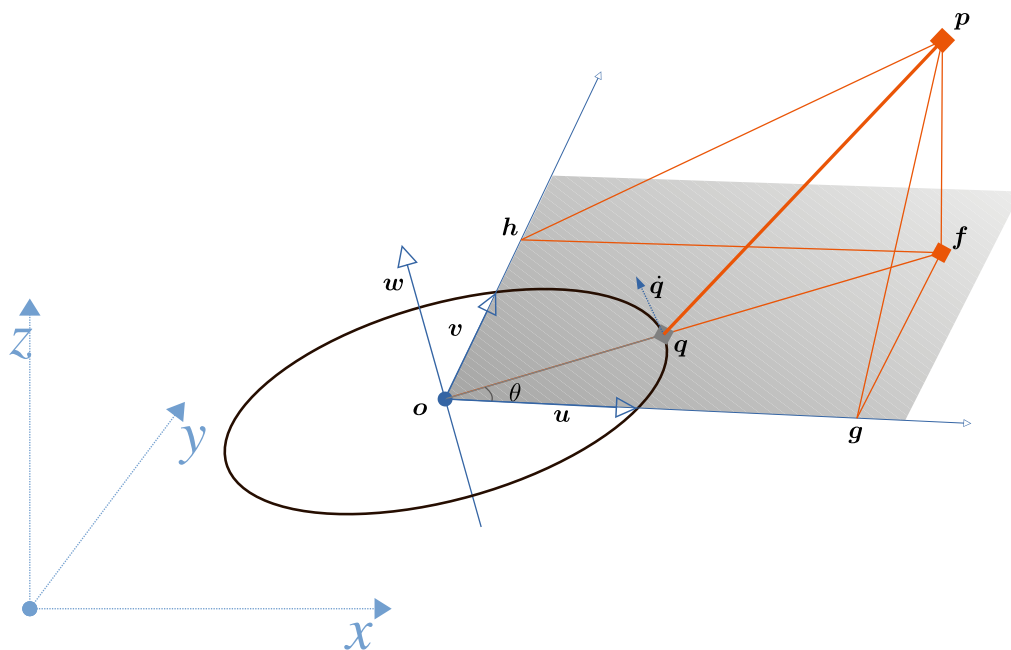


図 6: 点から円の最近点 (垂線)

また、 q の主軸からの角度を θ とすると、以下が成り立つ。

$$\tan \theta = \frac{|\vec{gf}|}{|\vec{og}|} \quad (102)$$

$$= \frac{|\vec{oh}|}{|\vec{og}|} \quad (103)$$

すなわち、 p から u, v への垂線の足 g, h を求め、 $|\vec{og}|$ と $|\vec{oh}|$ の比から \arctan を用いて θ を求めることができる。