IS Lab. 問題集

野田五十樹

2024/02/23	素数組問題
2024/02/23	階乗問題
2024/02/23	お釣り 問題
2024/02/23	複素数問題
2024/08/15	三体宇宙船問題

目 次

5　三体に関する問題

5.1　宇宙船の加速

5.1.1　問題

地球から何光年も離れたある星までの宇宙旅行を考える。(目的の星は、地球に対し相対速度 0 であるとしておく。)

質量 m の宇宙船を加速し、速度 v まで加速してから巡航し、その後、減速して目的の星に着陸する。星での調査の後、地球に向けて同様に加速・減速して帰還する。この加速・減速に対し、超未来の技術により、ほぼエネルギーロスゼロで加速・減速できるものとする。

このプランで、出発時に宇宙船と同じ質量 m のエネルギー源を積んでいったとして、光速 c との速度比 $r = v/c$ の最大値を求めよ。

ヒント　相対性理論により、光速を c とすると、静止質量 m_0 の物体が速度 v で動いている場合の質量 m_v は以下の式となる。

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.1}$$

5.1.2 解答

(エネルギー保存則だけを考慮した場合)
エネルギー用物質の質量を m_E としておく。
出発時の総重量 m_a は、

$$m_a = m + m_E \tag{5.2}$$

往路の加速後の速度 v における静止質量を m_b としておく。(加速によりエネルギーを使い、質量が減る。) また、その速度での、地球運動系での質量を m_c とする。この時、エネルギー変換が理想的であるとすると、以下の式が成り立つ。

$$m_c = m_a \tag{5.3}$$

$$m_b = m_c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_a\sqrt{1-r^2} \tag{5.4}$$

目的の星に静止した時の静止質量を m_d とし、速度 v での運動系における質量を m_e とすると、以下の式となる。

$$m_e = m_b \tag{5.5}$$

$$m_d = m_e\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_b\sqrt{1-r^2} \tag{5.6}$$

$$= m_a\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2} = m_a(1-r^2) \tag{5.7}$$

これを、復路でも繰り返すので、復路の速度 v での移動時の静止質量を v_f、地球運動系での質量を v_g、地球に静止した時の静止質量を v_h、速度 v の運動系から見た質量を v_i とすると、

$$m_g = m_d \tag{5.8}$$

$$m_f = m_g\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_d\sqrt{1-r^2} \tag{5.9}$$

$$= m_a(1-r^2)\sqrt{1-r^2} \tag{5.10}$$

$$m_i = m_f \tag{5.11}$$

$$m_h = m_i\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_f\sqrt{1-r^2} \tag{5.12}$$

$$= m_a(1-r^2)\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2} = m_a(1-r^2)^2 \tag{5.13}$$

地球帰還時に、エネルギー用物質を使い果たしているとすると、$m_h = m$ である。また、仮定により、$m_E = m$ であるので、

$$m_h = m_a(1-r^2)^2 \tag{5.14}$$

$$m = (m+m)(1-r^2)^2 \tag{5.15}$$

$$\frac{1}{2} = (1-r^2)^2 \tag{5.16}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1-r^2 \tag{5.17}$$

$$r^2 = 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{5.18}$$

$$r = \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0.5411961001461969... \tag{5.19}$$

つまり、v は光速の 0.54 倍程度である。

5.1.3 解答 2

(エネルギー保存則と運動量保存則を考慮した場合)

質量について、5.1.2 節の変数をそのまま用いるとする。

出発時、宇宙船及び燃料は静止しているとする。よって、系全体の運動量は 0 である。

往路において、速度 0 から速度 $\boldsymbol{v}$ になった時、その宇宙船の運動量 $\boldsymbol{P}_c$ は以下となる。

$$\boldsymbol{P}_c = m_c \boldsymbol{v} \tag{5.20}$$

この運動量を打ち消すために、速度 $\boldsymbol{v}$ と逆方向 $\boldsymbol{u}$ に進む光を仮定する。その光のエネルギーを E_{lc} とすると、その運動量 $\boldsymbol{P}_{lc}$ は以下となる。

$$\boldsymbol{P}_{lc} = \frac{E_{lc}\boldsymbol{u}}{c} \tag{5.21}$$

$$\boldsymbol{u} = -\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{5.22}$$

ここで、エネルギー E_{lc} を質量 m_{lc} として換算すると、

$$m_{lc} = \frac{E_{lc}}{c^2} \tag{5.23}$$

最初の運動量 0 を保存するためには、$\boldsymbol{P}_c$ と $\boldsymbol{P}_{lc}$ はバランスしてないと行けない。よって、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_c + \boldsymbol{P}_{lc} &= 0 &(5.24)\\
m_c v &= \frac{E_{lc}}{c} &(5.25)\\
&= \frac{m_{lc}c^2}{c} &(5.26)\\
&= m_{lc}c &(5.27)\\
m_{lc} &= m_c\frac{v}{c} &(5.28)
\end{aligned}$$

これらの質量分を (5.3) 式、(5.4) 式を組み込むと以下になる。

$$\begin{aligned}
m_a &= m_c + m_{lc} &(5.29)\\
&= \left(1+\frac{v}{c}\right)m_c &(5.30)\\
&= (1+r)m_c &(5.31)\\
m_b &= m_c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} &(5.32)\\
&= \frac{m_a\sqrt{1-r^2}}{1+r} &(5.33)
\end{aligned}$$

同様の式変形が (5.7) 式、(5.10) 式、(5.13) 式でも適用されるので、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
m_d &= \frac{m_a(1-r^2)}{(1+r)^2} &(5.34)\\
m_f &= \frac{m_a(1-r^2)^{3/2}}{(1+r)^3} &(5.35)\\
m_h &= \frac{m_a(1-r^2)^2}{(1+r)^4} &(5.36)
\end{aligned}$$

ここで、初期のエネルギー源燃料の質量が宇宙船質量と同じ、つまり $m_E = m$ とし、帰還時、その燃料を使い果たしているとすると、

$$
\begin{aligned}
m_a &= m + m_E = 2m & (5.37)\\
m_h &= m & (5.38)\\
m_h &= (1/2)m_a & (5.39)
\end{aligned}
$$

これを (5.36) 式に代入して r を求めると以下になる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{(1-r^2)^2}{(1+r)^4} & (5.40)\\
(1+r)^4 &= 2(1-r^2)^2 & (5.41)\\
r^4 - 4r^3 - 10r^2 - 4r + 1 &= 0 & (5.42)\\
(r+1)^2(r^2 - 6 + 1) &= 0 & (5.43)\\
r &= -1 \text{ or } 3 \pm 2\sqrt{2} & (5.44)
\end{aligned}
$$

$0 < r < 1$ であるので、

$$
\begin{aligned}
r &= 3 - 2\sqrt{2} & (5.45)\\
&\sim 0.1715728752538097\ldots & (5.46)
\end{aligned}
$$

また、燃料質量 m_E を宇宙船質量の k 倍としておくと、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+k} &= \frac{(1-r^2)^2}{(1+r)^4} & (5.47)\\
1+k &= \frac{(1+r)^4}{(1-r^2)^2} & (5.48)\\
&= \frac{(1+r)^4}{(1+r)^2(1-r)^2} & (5.49)\\
&= \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} & (5.50)\\
k &= \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2} - 1 & (5.51)\\
&= \frac{(1+r)^2 - (1-r)^2}{(1-r)^2} & (5.52)\\
&= \frac{4r}{(1-r)^2} & (5.53)
\end{aligned}
$$

つまり、光速の半分まで加速しながら帰ってくる宇宙旅行をするためには宇宙船質量の 8 倍の燃料を積む必要がある。光速の 90% の場合は、360 倍の燃料となる。

5.1.4 参考:特殊相対性理論とニュートン力学の運動エネルギーの関係

特殊相対性理論では、静止質量 m_0 である物体が速度 v で移動している時、その質量は以下のように変化する。

$$
\begin{aligned}
m(v) &= \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & (5.54)\\
&= m_0(1-(v/c)^2)^{-1/2} & (5.55)
\end{aligned}
$$

これを $v=0$ で Taylor 展開すると：

$$m(v) = m(0) + \frac{dm}{dv}v + \frac{1}{2}\frac{d^2m}{dv^2}v^2 + \cdots \tag{5.56}$$

$$\frac{dm}{dv} = m_0(-1/2)(1-(v/c)^2)^{-3/2}(-1)2v/c^2 \tag{5.57}$$

$$= (m_0/c^2)(1-(v/c)^2)^{-3/2}v \tag{5.58}$$

$$\frac{d^2m}{dv^2} = (m_0/c^2)(-3/2)(1-(v/c)^2)^{-5/2}(-2v/c^2)v + (m_0/c^2)(1-(v/c)^2)^{-3/2} \tag{5.59}$$

$v=0$ の時の各微係数は以下の通り。

$$\left.\frac{dm}{dv}\right|_{v=0} = 0 \tag{5.60}$$

$$\left.\frac{d^2m}{dv^2}\right|_{v=0} = \frac{m_0}{c^2} \tag{5.61}$$

よって、速度 v の時の物体の質量の増分 Δm は以下になる。

$$\Delta m = m(v) - m(0) \tag{5.62}$$

$$\sim \frac{dm}{dv}v + \frac{1}{2}\frac{d^2m}{dv^2}v^2 \tag{5.63}$$

$$= \frac{m_0v^2}{2c^2} \tag{5.64}$$

この増分質量をエネルギー変換すると以下になる。

$$E_v = \Delta mc^2 \tag{5.65}$$

$$\sim \frac{m_0v^2}{2} \tag{5.66}$$

つまり、ニュートン力学における運動エネルギーとなる。

ただし、この関係が成立するのは、v が十分小さいところであり、光速 c に近づくと Taylor 展開の 3 次以降の値が大きくなり、質量増分すなわちエネルギー増分が大きくなり、加速が難しくなる。

5.1.5 参考:特殊相対性理論とニュートン力学の運動量の関係

特殊相対性理論に於いても、速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている質量 m の物体の運動量 P_v は以下で表される。

$$\boldsymbol{P}_v = m\boldsymbol{v} \tag{5.67}$$

ただし、質量 m は静止質量 m_0 ではなく運動質量である。よって、静止質量で書いた運動量は以下の通り。

$$\boldsymbol{P}_v = m_0\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{5.68}$$

一方、エネルギー E_l で $\boldsymbol{u}$ の方向に進む光の運動量 $\boldsymbol{P}_l$ は以下で表される。

$$\boldsymbol{P}_l = \frac{E\boldsymbol{u}}{c} \tag{5.69}$$

$$\text{, where} \quad |\boldsymbol{u}| = 1 \tag{5.70}$$

参考文献