IS Lab. 問題集

野田五十樹

2024/02/23	素数組問題
2024/02/23	階乗問題
2024/02/23	お釣り問題
2024/02/23	複素数問題

目 次

1 素数の組 **5**
1.1 問題 5
1.2 解答 6

2 階乗に関する問題 **7**
2.1 階乗を割った余り 7
2.1.1 問題 7
2.1.2 解答 8
2.1.3 参考: Wilson の定理 8
定理 2.1 8
2.2 階乗の階乗を割った余り 9
2.2.1 問題 9
2.2.2 解答 10
補題 2.2 10
定理 2.3 10

3 お釣りが足りている **11**
3.1 問題 11
3.1.1 具体問題 11
3.1.2 一般化問題 11
3.2 解答 12
3.2.1 具体問題 12
3.2.2 一般化問題 12

4 複素数に関する問題 **15**
4.1 1 の x 乗 15
4.1.1 問題 15
4.1.2 解答 16

1　素数の組

1.1　問題

$p^q + q^p$ が素数になる素数の組 $\langle p, q \rangle$ を全て求めよ。ただし、$p < q$ とする。

1.2　解答

p, q が共に奇数の素数とする。その場合、p^q, q^p は共に 2 より大きい奇数となる。よって、$p^q + q^p$ は 2 より大きい偶数になり、素数ではない。

よって、p, q はいずれかは偶数の素数、すなわち 2 となる。また、$p < q$ から、$p = 2$ となる。

$q = 3$ の場合、$p^q + q^p = 2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$ となり、素数である。よって、$\langle 2, 3\rangle$ は条件を満たす組となる。

$q > 3$ の場合、2 の倍数、3 の倍数は素数ではないので、$q = 6k \pm 1$ と表される。よって、

$$
\begin{aligned}
p^q + q^p &= 2^{6k\pm 1} + (6k \pm 1)^2 && (1.1)\\
&= 2 + 1 \mod 3 && (1.2)\\
&= 3 && (1.3)\\
&= 0 \mod 3 && (1.4)
\end{aligned}
$$

となり、かならず 3 で割り切れる。すなわち、素数ではない。

よって、$q > 3$ の場合、条件を満たす組 $\langle p, q\rangle$ は存在しない。

よって、条件を満たす素数の組は、$\langle 2, 3\rangle$ のみである。 ■

2　階乗に関する問題

2.1　階乗を割った余り

2.1.1　問題

100! を 97 で割った余りはいくらか？

2.1.2　解答

$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \ldots$ であるので、$100!$ は 97 を因子として持つ。よって、$100!$ を 97 で割った余りは 0 である。

2.1.3　参考: Wilson の定理

定理 2.1
p が素数ならば、 $(p-1)! = -1 \mod p$ である。
逆に、自然数 $p > 1$ に対し $(p-1)! = -1 \mod p$ ならば、p は素数である。 □

2.2　階乗の階乗を割った余り

2.2.1　問題

$(100!)!$ を $(99!)^{100}$ で割った余りはいくらか?

2.2.2 解答

補題 2.2
n を自然数、m を非負の整数とし、$n \geq m$ とする。この時、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。ただし、$0! = 1$ とする。 □

証明

$m = 0$ の時、$m! \cdot (n-m)! = 0! \cdot n! = n!$ となるので、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。

また、$m = n$ の時、$m! \cdot (n-m)! = n! \cdot 0! = n!$ となるので、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。

$n = 1$ の時、可能な m は $0, 1$ であり、これらは上記の条件のいずれかに当たるので、$n = 1$ の時、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。

仮に、ある n に対し、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れると仮定する。つまり、$\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ は整数であるとする。この時、$\frac{(n+1)!}{m! \cdot (n+1-m)!}$ の値を求めてみる。

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+1)!}{m! \cdot (n+1-m)!} &= \frac{(n+1) \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n+1-m) \cdot (n-m)!} && (2.1)\\
&= \frac{((n+1-m)+m) \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n+1-m) \cdot (n-m)!} && (2.2)\\
&= \frac{(n+1-m) \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n+1-m) \cdot (n-m)!} \\
&\quad + \frac{m \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n+1-m) \cdot (n-m)!} && (2.3)\\
&= \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)! \cdot (n+1-m)!} && (2.4)
\end{aligned}
$$

$\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ および $\frac{n!}{(m-1)! \cdot (n+1-m)!}$ は、仮定より整数である。よって、その和である $\frac{(n+1)!}{m! \cdot (n+1-m)!}$ は整数である。すなわち、$(n+1)!$ は $m! \cdot (n+1-m)!$ で割り切れる。

■

定理 2.3
自然数の列 $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ を考える、この時、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ は $\prod_{i=1}^{n} k_i!$ で割り切れる。 □

証明

まず、自然数 a, b, c について、a が b で割り切れ、b が c で割り切れるなら、a は c で割り切れる。

次に、上記の自然数の列の長さ n が 2 の場合を考える。この時、補題 2.2 より、$(k_1 + k_2)!$ は $k_1! \cdot k_2!$ で割り切れる。

さらに、ある n までにおいて、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ は $\prod_{i=1}^{n} k_i!$ で割り切れると仮定する。この時、補題 2.2 より、$\left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i\right)! = (\sum_{i=1}^{n} k_i + k_{n+1})!$ は $(\sum_{i=1}^{n} k_i)! \cdot k_{n+1}!$ で割り切れる。また、仮定により、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ は $\prod_{i=1}^{n} k_i!$ で割り切れるので、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)! \cdot k_{n+1}!$ は $\prod_{i=1}^{n+1} k_i! = \prod_{i=1}^{n} k_i! \cdot k_{n+1}!$ で割り切れる。よって、$\left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i\right)!$ は $\prod_{i=1}^{n+1} k_i!$ で割り切れる。

よって、任意の n において、定理は成立する。

■

以上の定理を利用すると、$k_1 = k_2 = \cdots = k_{100} = 99!$ とすれば、$\sum_{i=1}^{100} k_i = 100 \cdot 99! = 100!$ であり、$\prod_{i=1}^{100} k_i = (99!)^{100}$ である。これにより、上記の定理を使うと、$(100!)!$ は $(99!)^{100}$ で割り切れる。 ■

3　お釣りが足りている

3.1　問題

3.1.1　具体問題

ある商人が1個50円のおもちゃを10個売っているとする。お客は、各々1つずつそのおもちゃを買うとし、支払いには、100円玉か50円玉でしか支払わないとする。商人は、最初、お釣り用の50円玉を4枚用意しているとする。おもちゃ10個が売り切れた時、商人の手元には50円玉が2枚あった。

この場合、お客が支払った50円玉・100円玉の順序の場合の数は何通りあるか?

3.1.2　一般化問題

上記の問題で、おもちゃの数を n 個、最初に用意した50円玉の枚数を m 枚、最後の残った50円玉の枚数を l 枚とした時、お客が支払った50円玉・100円玉の順序の場合の数は何通りあるか?

3.2 解答

3.2.1 具体問題

問題の設定により、おもちゃが 1 つ売れる毎に 50 円玉は 1 枚増えるか 1 枚減るかたちで枚数が変化する。

その様子を表したのが、図 1 である。横軸は売れたおもちゃの数、縦軸が 50 円玉の数であり、$(0,4)$ から出発して、$(10,2)$ に至る斜めの碁盤目の経路を辿ることになる。

この内、お釣りの 50 円玉が足らなくなるのは、図の赤い経路を通る場合である。つまり、図 1 で示される碁盤目のうち、赤い経路を通らない経路の数を数えれば良い。

まず、赤い経路を無視して、全ての碁盤目の経路を数え上げると、10 個の選択肢の中から順不同で 4 つ選ぶ場合の数であるので、

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{all}} &= {}_{10}C_4 && (3.1)\\
&= \frac{10!}{4!6!} && (3.2)\\
&= 210 && (3.3)
\end{aligned}
$$

次に、全て数え上げた中から、お釣りが足らなかった経路を取り上げる。この時、お釣りが足らなくなった瞬間から、50 円玉の残り数を示す碁盤目を辿る方向を反転させるとする。すると、その経路が行き着く先は、図 2 のように、$y=-1$ のところで鏡像にした経路を描く。よって、その後、$(10,2)$ にたどり着いていた経路は、この鏡像にした経路の中では、$(10,-4)$ に辿り着く。

そこで、$(0,4)$ から $(10,-4)$ に辿る経路を数え上げると、10 個の選択肢の中から 1 つ順不同で選び出す場合の数であるので、

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{short}} &= {}_{10}C_1 && (3.4)\\
&= \frac{10!}{1!9!} && (3.5)\\
&= 10 && (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{ans}} &= N_{\mathrm{all}} - N_{\mathrm{short}} && (3.7)\\
&= 210 - 10 && (3.8)\\
&= 200 && (3.9)
\end{aligned}
$$

よって答えは、200 通り。

3.2.2 一般化問題

上記と同じ考え方をすると、お釣りが足らなくなる場合の考えずに全ての経路を考えると、$(0,m)$ から (n,l) に至る斜めの碁盤目の経路となる。この経路の数は n の候補の中から $\frac{n-(m-l)}{2}$ を順不同で選び出す場合の数であるので、以下のように表せる。

$$
N_{\mathrm{all}} = {}_{n}C_{\frac{n-(m-l)}{2}} \qquad (3.10)
$$

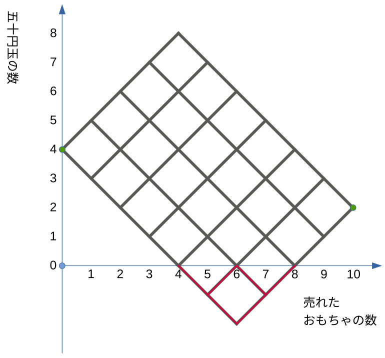

図 1: お釣り玉の残数の変化経路図

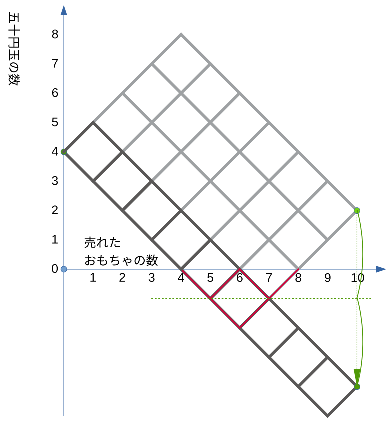

図 2: お釣り玉が足らなくなる場合の残数の変化経路図

一方、お釣りが足りなくなる経路の数は、$(0, m)$ から $(n, -l-2)$ に至る斜めの碁盤目の経路となる。この経路の数は n の候補の中から $\frac{n-(m+l+2)}{2}$ を順不同で選び出す場合の数であるので、以下のように表せる。

$$N_{\text{short}} = {}_nC_{\frac{n-(m+l+2)}{2}} \tag{3.11}$$

よって、お釣りが足らなくならない経路の数は、以下のように表すことができる。

$$N_{\text{ans}} = N_{\text{all}} - N_{\text{short}} \tag{3.12}$$

$$= {}_nC_{\frac{n-(m-l)}{2}} - {}_nC_{\frac{n-(m+l+2)}{2}} \tag{3.13}$$

4　複素数に関する問題

4.1　1 の x 乗

4.1.1　問題

以下の式が成り立つ x を求めよ。

$$1^x = 2 \tag{4.1}$$

4.1.2 解答

複素数 z は以下のように表される。

$$z = e^{r+i\theta} \tag{4.2}$$

ここで $z = 1$ とすると、

$$\begin{aligned} 1 &= z & (4.3)\\ &= e^{r+i\theta} & (4.4)\\ r &= 0 & (4.5)\\ \theta &= 2k\pi & (4.6)\\ k &\in \mathbb{Z} & (4.7) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} 1^x &= z^x & (4.8)\\ &= e^{x(0+2ik\pi)} & (4.9)\\ &= e^{x(2ikx\pi)} & (4.10)\\ &= 2 & (4.11)\\ \log 2 &= \log\left(e^{2ikx\pi}\right) & (4.12)\\ &= 2ikx\pi & (4.13) \end{aligned}$$

ここで $x = u + iv$ とおいておく。ただし、u, v は実数とする。

$$\begin{aligned} \log 2 &= 2ikx\pi & (4.14)\\ &= 2ik(u+iv) & (4.15)\\ &= -2kv + 2iku & (4.16)\\ u &= 0 & (4.17)\\ v &= -\frac{\log 2}{2k} & (4.18) \end{aligned}$$

ただし、$k \neq 0$。よって、解 x は、

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{i\log 2}{2k} & (4.19)\\ k &\in \mathbb{N} & (4.20) \end{aligned}$$

参考文献