IS Lab. 問題集

野田五十樹

2024/02/23	素数組問題
2024/02/23	階乗問題
2024/02/23	お釣り 問題
2024/02/23	複素数問題
2024/08/15	三体宇宙船問題

目次

1　素数の組

1.1　問題

$p^q + q^p$ が素数になる素数の組 $\langle p, q \rangle$ を全て求めよ。ただし、$p < q$ とする。

1.2 解答

p, q が共に奇数の素数とする。その場合、p^q, q^p は共に 2 より大きい奇数となる。よって、$p^q + q^p$ は 2 より大きい偶数になり、素数ではない。

よって、p, q はいずれかは偶数の素数、すなわち 2 となる。また、$p < q$ から、$p = 2$ となる。

$q = 3$ の場合、$p^q + q^p = 2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$ となり、素数である。よって、$\langle 2, 3 \rangle$ は条件を満たす組となる。

$q > 3$ の場合、2 の倍数、3 の倍数は素数ではないので、$q = 6k \pm 1$ と表される。よって、

$$
\begin{aligned}
p^q + q^p &= 2^{6k\pm1} + (6k \pm 1)^2 && (1.1) \\
&= 2 + 1 \mod 3 && (1.2) \\
&= 3 && (1.3) \\
&= 0 \mod 3 && (1.4)
\end{aligned}
$$

となり、かならず 3 で割り切れる。すなわち、素数ではない。

よって、$q > 3$ の場合、条件を満たす組 $\langle p, q \rangle$ は存在しない。

よって、条件を満たす素数の組は、$\langle 2, 3 \rangle$ のみである。 ■

2　階乗に関する問題

2.1　階乗を割った余り

2.1.1　問題

$100!$ を 97 で割った余りはいくらか？

2.1.2 解答

$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \ldots$ であるので、100! は 97 を因子として持つ。よって、100! を 97 で割った余りは 0 である。

2.1.3 参考: Wilson の定理

定理 2.1
p が素数ならば、$(p-1)! = -1 \mod p$ である。
逆に、自然数 $p > 1$ に対し $(p-1)! = -1 \mod p$ ならば、p は素数である。 □

2.2　階乗の階乗を割った余り

2.2.1　問題

$(100!)!$ を $(99!)^{100}$ で割った余りはいくらか?

2.2.2 解答

補題 2.2
n を自然数、m を非負の整数とし、$n \geq m$ とする。この時、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。ただし、$0! = 1$ とする。 □

証明

$m = 0$ の時、$m! \cdot (n-m)! = 0! \cdot n! = n!$ となるので、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。

また、$m = n$ の時、$m! \cdot (n-m)! = n! \cdot 0! = n!$ となるので、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。

$n = 1$ の時、可能な m は $0, 1$ であり、これらは上記の条件のいずれかに当たるので、$n = 1$ の時、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。

仮に、ある n に対し、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れると仮定する。つまり、$\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ は整数であるとする。この時、$\frac{(n+1)!}{m! \cdot (n+1-m)!}$ の値を求めてみる。

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+1)!}{m! \cdot (n+1-m)!} &= \frac{(n+1) \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n+1-m) \cdot (n-m)!} && (2.1) \\
&= \frac{((n+1-m)+m) \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n+1-m) \cdot (n-m)!} && (2.2) \\
&= \frac{(n+1-m) \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n+1-m) \cdot (n-m)!} \\
&\quad + \frac{m \cdot n!}{m \cdot (m-1)! \cdot (n+1-m) \cdot (n-m)!} && (2.3) \\
&= \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)! \cdot (n+1-m)!} && (2.4)
\end{aligned}
$$

$\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ および $\frac{n!}{(m-1)! \cdot (n+1-m)!}$ は、仮定より整数である。よって、その和である $\frac{(n+1)!}{m! \cdot (n+1-m)!}$ は整数である。すなわち、$(n+1)!$ は $m! \cdot (n+1-m)!$ で割り切れる。

■

定理 2.3
自然数の列 $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ を考える、この時、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ は $\prod_{i=1}^{n} k_i!$ で割り切れる。 □

証明

まず、自然数 a, b, c について、a が b で割り切れ、b が c で割り切れるなら、a は c で割り切れる。

次に、上記の自然数の列の長さ n が 2 の場合を考える。この時、補題 2.2 より、$(k_1 + k_2)!$ は $k_1! \cdot k_2!$ で割り切れる。

さらに、ある n までにおいて、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ は $\prod_{i=1}^{n} k_i!$ で割り切れると仮定する。この時、補題 2.2 より、$\left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i\right)! = (\sum_{i=1}^{n} k_i + k_{n+1})!$ は $(\sum_{i=1}^{n} k_i)! \cdot k_{n+1}!$ で割り切れる。また、仮定により、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ は $\prod_{i=1}^{n} k_i!$ で割り切れるので、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)! \cdot k_{n+1}!$ は $\prod_{i=1}^{n+1} k_i! = \prod_{i=1}^{n} k_i! \cdot k_{n+1}!$ で割り切れる。よって、$\left(\sum_{i=1}^{n+1} k_i\right)!$ は $\prod_{i=1}^{n+1} k_i!$ で割り切れる。

よって、任意の n において、定理は成立する。

■

以上の定理を利用すると、$k_1 = k_2 = \cdots = k_{100} = 99!$ とすれば、$\sum_{i=1}^{100} k_i = 100 \cdot 99! = 100!$ であり、$\prod_{i=1}^{100} k_i = (99!)^{100}$ である。これにより、上記の定理を使うと、$(100!)!$ は $(99!)^{100}$ で割り切れる。 ■

3 お釣りが足りている

3.1 問題

3.1.1 具体的問題

ある商人が1個50円のおもちゃを10個売っているとする。お客は、各々1つずつそのおもちゃを買うとし、支払いには、100円玉か50円玉でしか支払わないとする。商人は、最初、お釣り用の50円玉を4枚用意しているとする。おもちゃ10個が売り切れた時、商人の手元には50円玉が2枚あった。

この場合、お客が支払った50円玉・100円玉の順序の場合の数は何通りあるか?

3.1.2 一般化問題

3.1.1節の問題で、おもちゃの数を n 個、最初に用意した50円玉の枚数を m 枚、最後の残った50円玉の枚数を l 枚とした時、お客が支払った50円玉・100円玉の順序の場合の数は何通りあるか?

3.1.3 派生系具体的問題

以下のようなカッコばかりの文字列を考える。

```
(((((__________)))
```

文字列の構成は、まず先頭に開きカッコ "(" が5個並び、続いて空白 "_" が10個並び、最後に閉じカッコ ")" が3つ並んでいる。この空白の部分に開きカッコと閉じカッコを合計10個入れ、最終的に、この文字列の最後の閉じカッコでちょうど先頭の開きカッコが閉じられるようにしたい。空白に並べるカッコの順列組み合わせはいくつか?

ただし、文字列の途中で最初のカッコが閉じられではいけない。

3.1.4 派生系一般化問題

3.1.3節の問題で、空白の数を n 個、最初の開きカッコの数を m 個最後の閉じカッコの数を l 個とした時、空白に並べるカッコの順列組み合わせはいくつか?

3.2 解答

3.2.1 具体的問題

問題の設定により、おもちゃが 1 つ売れる毎に 50 円玉は 1 枚増えるか 1 枚減るかたちで枚数が変化する。

その様子を表したのが、図 1 である。横軸は売れたおもちゃの数、縦軸が 50 円玉の数であり、$(0,4)$ から出発して、$(10,2)$ に至る斜めの碁盤目の経路を辿ることになる。

この内、お釣りの 50 円玉が足らなくなるのは、図の赤い経路を通る場合である。つまり、図 1 で示される碁盤目のうち、赤い経路を通らない経路の数を数えれば良い。

まず、赤い経路を無視して、全ての碁盤目の経路を数え上げると、10 個の選択肢の中から順不同で 4 つ選ぶ場合の数であるので、

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{all}} &= {}_{10}C_4 && (3.1)\\
&= \frac{10!}{4!6!} && (3.2)\\
&= 210 && (3.3)
\end{aligned}
$$

次に、全て数え上げた中から、お釣りが足らなかった経路を取り上げる。この時、お釣りが足らなくなった瞬間から、50 円玉の残り数を示す碁盤目を辿る方向を反転させるとする。すると、その経路が行き着く先は、図 2 のように、$y=-1$ のところで鏡像にした経路を描く。よって、その後、$(10,2)$ にたどり着いていた経路は、この鏡像にした経路の中では、$(10,-4)$ に辿り着く。

そこで、$(0,4)$ から $(10,-4)$ に辿る経路を数え上げると、10 個の選択肢の中から 1 つ順不同で選び出す場合の数であるので、

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{short}} &= {}_{10}C_1 && (3.4)\\
&= \frac{10!}{1!9!} && (3.5)\\
&= 10 && (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_{\mathrm{ans}} &= N_{\mathrm{all}} - N_{\mathrm{short}} && (3.7)\\
&= 210 - 10 && (3.8)\\
&= 200 && (3.9)
\end{aligned}
$$

よって答えは、200 通り。

3.2.2 一般化問題

上記と同じ考え方をすると、お釣りが足らなくなる場合の考えずに全ての経路を考えると、$(0,m)$ から (n,l) に至る斜めの碁盤目の経路となる。この経路の数は n の候補の中から $\frac{n-(m-l)}{2}$ を順不同で選び出す場合の数であるので、以下のように表せる。

$$
N_{\mathrm{all}} = {}_nC_{\frac{n-(m-l)}{2}} \qquad (3.10)
$$

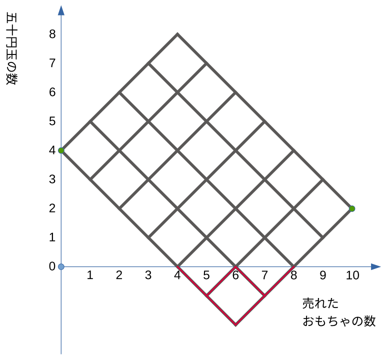

図 1: お釣り玉の残数の変化経路図

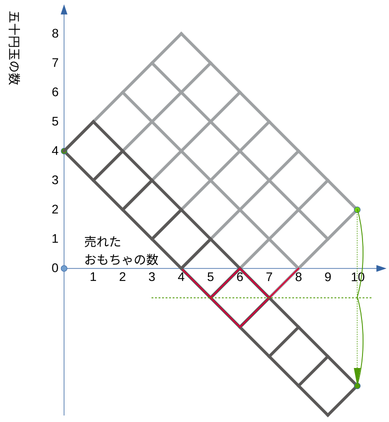

図 2: お釣り玉が足らなくなる場合の残数の変化経路図

一方、お釣りが足りなくなる経路の数は、$(0, m)$ から $(n, -l-2)$ に至る斜めの碁盤目の経路となる。この経路の数は n の候補の中から $\frac{n-(m+l+2)}{2}$ を順不同で選び出す場合の数であるので、以下のように表せる。

$$N_{\text{short}} = {}_nC_{\frac{n-(m+l+2)}{2}} \tag{3.11}$$

よって、お釣りが足らなくならない経路の数は、以下のように表すことができる。

$$N_{\text{ans}} = N_{\text{all}} - N_{\text{short}} \tag{3.12}$$

$$= {}_nC_{\frac{n-(m-l)}{2}} - {}_nC_{\frac{n-(m+l+2)}{2}} \tag{3.13}$$

3.2.3 派生系具体的問題

3.2.1 節と同じ。

3.2.4 派生系一般化問題

3.2.2 節と同じ。

4 複素数に関する問題

4.1 1 の x 乗

4.1.1 問題

以下の式が成り立つ x を求めよ。

$$1^x = 2 \tag{4.1}$$

4.1.2　解答

　複素数 z は以下のように表される。

$$z = e^{r+i\theta} \tag{4.2}$$

ここで $z = 1$ とすると、

$$\begin{aligned}
1 &= z & (4.3)\\
&= e^{r+i\theta} & (4.4)\\
r &= 0 & (4.5)\\
\theta &= 2k\pi & (4.6)\\
k &\in \mathbb{Z} & (4.7)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
1^x &= z^x & (4.8)\\
&= e^{x(0+2ik\pi)} & (4.9)\\
&= e^{x(2ikx\pi)} & (4.10)\\
&= 2 & (4.11)\\
\log 2 &= \log\left(e^{2ikx\pi}\right) & (4.12)\\
&= 2ikx\pi & (4.13)
\end{aligned}$$

ここで $x = u + iv$ とおいておく。ただし、u, v は実数とする。

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 2ikx\pi & (4.14)\\
&= 2ik(u+iv) & (4.15)\\
&= -2kv + 2iku & (4.16)\\
u &= 0 & (4.17)\\
v &= -\frac{\log 2}{2k} & (4.18)
\end{aligned}$$

ただし、$k \neq 0$。よって、解 x は、

$$\begin{aligned}
x &= \pm\frac{i\log 2}{2k} & (4.19)\\
k &\in \mathbb{N} & (4.20)
\end{aligned}$$

5　三体に関する問題

5.1　宇宙船の加速

5.1.1　問題

地球から何光年も離れたある星までの宇宙旅行を考える。(目的の星は、地球に対し相対速度 0 であるとしておく。)

質量 m の宇宙船を加速し、速度 v まで加速してから巡航し、その後、減速して目的の星に着陸する。星での調査の後、地球に向けて同様に加速･減速して帰還する。この加速･減速に対し、超未来の技術により、ほぼエネルギーロスゼロで加速･減速できるものとする。

このプランで、出発時に宇宙船と同じ質量 m のエネルギー源を積んでいったとして、光速 c との速度比 $r = v/c$ の最大値を求めよ。

ヒント　相対性理論により、光速を c とすると、静止質量 m_0 の物体が速度 v で動いている場合の質量 m_v は以下の式となる。

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.1}$$

5.1.2 解答

エネルギー用物質の質量を m_E としておく。
出発時の総重量 m_a は、

$$m_a = m + m_E \tag{5.2}$$

往路の加速後の速度 v における静止質量を m_b としておく。(加速によりエネルギーを使い、質量が減る。) また、その速度での、地球運動系での質量を m_c とする。この時、エネルギー変換が理想的であるとすると、以下の式が成り 立つ。

$$\begin{aligned} m_c &= m_a && (5.3)\\ m_b &= m_c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_a\sqrt{1-r^2} && (5.4)\end{aligned}$$

目的の星に静止した時の静止質量を m_d とし、速度 v での運動系における質量を m_e とすると、以下の式となる。

$$\begin{aligned} m_e &= m_b && (5.5)\\ m_d &= m_e\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_b\sqrt{1-r^2} && (5.6)\\ &= m_a\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2} = m_a(1-r^2) && (5.7)\end{aligned}$$

これを、復路でも繰り 返すので、復路の速度 v での移動時の静止質量を v_f、地球運動系での質量を v_g、地球に静止した時の静止質量を v_h、速度 v の運動系から見た質量を v_i とすると、

$$\begin{aligned} m_g &= m_d && (5.8)\\ m_f &= m_g\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_d\sqrt{1-r^2} && (5.9)\\ &= m_a(1-r^2)\sqrt{1-r^2} && (5.10)\\ m_i &= m_f && (5.11)\\ m_h &= m_i\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m_f\sqrt{1-r^2} && (5.12)\\ &= m_a(1-r^2)\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2} = m_a(1-r^2)^2 && (5.13)\end{aligned}$$

地球帰還時に、エネルギー用物質を使い果たしているとすると、$m_h = m$ である。また、仮定により、$m_E = m$ であるので、

$$\begin{aligned} m_h &= m_a(1-r^2)^2 && (5.14)\\ m &= (m+m)(1-r^2)^2 && (5.15)\\ \frac{1}{2} &= (1-r^2)^2 && (5.16)\\ \frac{1}{\sqrt{2}} &= 1-r^2 && (5.17)\\ r^2 &= 1-\frac{1}{\sqrt{2}} && (5.18)\\ r &= \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0.5411961001461969... && (5.19)\end{aligned}$$

つまり、v は光速の 0.54 倍程度である。

5.1.3 参考:特殊相対性理論とニュートン力学の運動エネルギーの関係

特殊相対性理論では、静止質量 m_0 である物体が速度 v で移動している時、その質量は以下のように変化する。

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{5.20}$$

$$= m_0(1-(v/c)^2)^{-1/2} \tag{5.21}$$

これを $v=0$ で Taylor 展開すると:

$$m(v) = m(0) + \frac{dm}{dv}v + \frac{1}{2}\frac{d^2m}{dv^2}v^2 + \cdots \tag{5.22}$$

$$\frac{dm}{dv} = m_0(-1/2)(1-(v/c)^2)^{-3/2}(-1)2v/c^2 \tag{5.23}$$

$$= (m_0/c^2)(1-(v/c)^2)^{-3/2}v \tag{5.24}$$

$$\frac{d^2m}{dv^2} = (m_0/c^2)(-3/2)(1-(v/c)^2)^{-5/2}(-2v/c^2)v + (m_0/c^2)(1-(v/c)^2)^{-3/2} \tag{5.25}$$

$v=0$ の時の各微係数は以下の通り。

$$\left.\frac{dm}{dv}\right|_{v=0} = 0 \tag{5.26}$$

$$\left.\frac{d^2m}{dv^2}\right|_{v=0} = \frac{m_0}{c^2} \tag{5.27}$$

よって、速度 v の時の物体の質量の増分 Δm は以下になる。

$$\Delta m = m(v) - m(0) \tag{5.28}$$

$$\sim \frac{dm}{dv}v + \frac{1}{2}\frac{d^2m}{dv^2}v^2 \tag{5.29}$$

$$= \frac{m_0v^2}{2c^2} \tag{5.30}$$

この増分質量をエネルギー変換すると以下になる。

$$E_v = \Delta mc^2 \tag{5.31}$$

$$\sim \frac{m_0v^2}{2} \tag{5.32}$$

つまり、ニュートン力学における運動エネルギーとなる。

ただし、この関係が成立するのは、v が十分小さいところであり、光速 c に近づくと Taylor 展開の 3 次以降の値が大きくなり、質量増分すなわちエネルギー増分が大きくなり、加速が難しくなる。

参考文献