# IS Lab. 問題集

野田五十樹

| | |
|---|---|
| 2024/02/23 | 素数組問題 |
| 2024/02/23 | 階乗問題 |
| 2024/02/23 | お釣り問題 |
| 2024/02/23 | 複素数問題 |

# 目 次

# 1　素数の組

## 1.1　問題

$p^q + q^p$ が素数になる素数の組 $\langle p, q \rangle$ を全て求めよ。ただし、$p < q$ とする。

## 1.2　解答

$p, q$ が共に奇数の素数とする。その場合、$p^q, q^p$ は共に 2 より大きい奇数となる。よって、$p^q + q^p$ は 2 より大きい偶数になり、素数ではない。

よって、$p, q$ はいずれかは偶数の素数、すなわち 2 となる。また、$p < q$ から、$p = 2$ となる。

$q = 3$ の場合、$p^q + q^p = 2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$ となり、素数である。よって、$\langle 2, 3 \rangle$ は条件を満たす組となる。

$q > 3$ の場合、2 の倍数、3 の倍数は素数ではないので、$q = 6k \pm 1$ と表される。よって、

$$
\begin{aligned}
p^q + q^p &= 2^{6k\pm1} + (6k \pm 1)^2 && (1.1)\\
&= 2 + 1 \mod 3 && (1.2)\\
&= 3 && (1.3)\\
&= 0 \mod 3 && (1.4)
\end{aligned}
$$

となり、かならず 3 で割り切れる。すなわち、素数ではない。

よって、$q > 3$ の場合、条件を満たす組 $\langle p, q \rangle$ は存在しない。

よって、条件を満たす素数の組は、$\langle 2, 3 \rangle$ のみである。 ■

# 2　階乗に関する問題

## 2.1　階乗を割った余り

### 2.1.1　問題

100! を 97 で割った余りはいくらか？

### 2.1.2 解答

$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \ldots$ であるので、100! は 97 を因子として持つ。よって、100! を 97 で割った余りは 0 である。

### 2.1.3 参考: Wilson の定理

**定理 2.1**
$p$ が素数ならば、 $(p-1)! = -1 \mod p$ である。
逆に、自然数 $p > 1$ に対し $(p-1)! = -1 \mod p$ ならば、$p$ は素数である。 □

## 2.2　階乗の階乗を割った余り

### 2.2.1　問題

$(100!)!$ を $(99!)^{100}$ で割った余りはいくらか?

### 2.2.2 解答

**補題 2.2**
自然数 $n, m$ で、$n \geq m$ の時、$n!$ は $m! \cdot (n-m)!$ で割り切れる。 □

**定理 2.3**
自然数の列 $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ を考える、この時、$(\sum_{i=1}^{n} k_i)!$ は $\prod_{i=1}^{n} k_i!$ で割り切れる。 □

$k_1 = k_2 = \cdots = k_{100!} = 99!$ とすれば、$\sum_{i=1}^{100} k_i = 100 \cdot 99! = 100!$ であり、$\prod_{i=1}^{100} k_i = (99!)^{100}$ である。これにより、上記の定理を使うと、$(100!)!$ は $(99!)^{100}$ で割り切れる。 ■

# 3　お釣りが足りている

## 3.1　問題

### 3.1.1　具体問題

ある商人が 1 個 50 円のおもちゃを 10 個売っているとする。お客は、各々1 つずつそのおもちゃを買うとし、支払いには、100 円玉か 50 円玉でしか支払わないとする。商人は、最初、お釣り用の 50 円玉を 4 枚用意しているとする。おもちゃ10 個が売り切れた時、商人の手元には 50 円玉が 2 枚あった。

この場合、お客が支払った 50 円玉・100 円玉の順序の場合の数は何通りあるか?

### 3.1.2　一般化問題

上記の問題で、おもちゃの数を $n$ 個、最初に用意した 50 円玉の枚数を $m$ 枚、最後の残った 50 円玉の枚数を $l$ 枚とした時、お客が支払った 50 円玉・100 円玉の順序の場合の数は何通りあるか?

## 3.2 解答

### 3.2.1 具体問題

問題の設定により、おもちゃが 1 つ売れる毎に 50 円玉は 1 枚増えるか 1 枚減るかたちで枚数が変化する。

その様子を表したのが、図 1 である。横軸は売れたおもちゃの数、縦軸が 50 円玉の数であり、$(0,4)$ から出発して、$(10,2)$ に至る斜めの碁盤目の経路を辿ることになる。

この内、お釣りの 50 円玉が足らなくなるのは、図の赤い経路を通る場合である。つまり、図 1 で示される碁盤目のうち、赤い経路を通らない経路の数を数えれば良い。

まず、赤い経路を無視して、全ての碁盤目の経路を数え上げると、10 個の選択肢の中から順不同で 4 つ選ぶ場合の数であるので、

$$N_{\mathrm{all}} = {}_{10}C_4 \tag{3.1}$$
$$= \frac{10!}{4!6!} \tag{3.2}$$
$$= 210 \tag{3.3}$$

次に、全て数え上げた中から、お釣りが足らなかった経路を取り上げる。この時、お釣りが足らなくなった瞬間から、50 円玉の残り数を示す碁盤目を辿る方向を反転させるとする。すると、その経路が行き着く先は、図 2 のように、$y=-1$ のところで鏡像にした経路を描く。よって、その後、$(10,2)$ にたどり着いていた経路は、この鏡像にした経路の中では、$(10,-4)$ に辿り着く。

そこで、$(0,4)$ から $(10,-4)$ に辿る経路を数え上げると、10 個の選択肢の中から 1 つ順不同で選び出す場合の数であるので、

$$N_{\mathrm{short}} = {}_{10}C_1 \tag{3.4}$$
$$= \frac{10!}{1!9!} \tag{3.5}$$
$$= 10 \tag{3.6}$$

$$N_{\mathrm{ans}} = N_{\mathrm{all}} - N_{\mathrm{short}} \tag{3.7}$$
$$= 210 - 10 \tag{3.8}$$
$$= 200 \tag{3.9}$$

よって答えは、200 通り。

### 3.2.2 一般化問題

上記と同じ考え方をすると、お釣りが足らなくなる場合の考えずに全ての経路を考えると、$(0,m)$ から $(n,l)$ に至る斜めの碁盤目の経路となる。この経路の数は $n$ の候補の中から $\frac{n-(m-l)}{2}$ を順不同で選び出す場合の数であるので、以下のように表せる。

$$N_{\mathrm{all}} = {}_nC_{\frac{n-(m-l)}{2}} \tag{3.10}$$

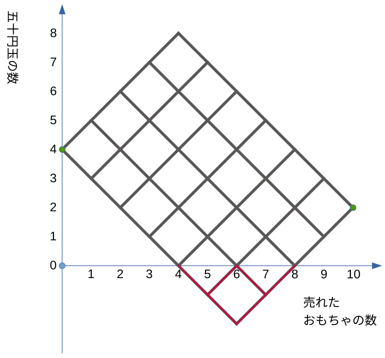


図 1: お釣り玉の残数の変化経路図

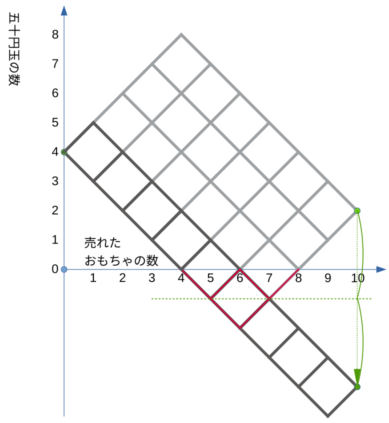


図 2: お釣り玉が足らなくなる場合の残数の変化経路図

一方、お釣りが足りなくなる経路の数は、$(0, m)$ から $(n, -l-2)$ に至る斜めの碁盤目の経路となる。この経路の数は $n$ の候補の中から $\frac{n-(m+l+2)}{2}$ を順不同で選び出す場合の数であるので、以下のように表せる。

$$N_{\text{short}} = {}_nC_{\frac{n-(m+l+2)}{2}} \tag{3.11}$$

よって、お釣りが足らなくならない経路の数は、以下のように表すことができる。

$$N_{\text{ans}} = N_{\text{all}} - N_{\text{short}} \tag{3.12}$$

$$= {}_nC_{\frac{n-(m-l)}{2}} - {}_nC_{\frac{n-(m+l+2)}{2}} \tag{3.13}$$

# 4　複素数に関する問題

## 4.1　1 の $x$ 乗

### 4.1.1　問題

以下の式が成り立つ $x$ を求めよ。

$$1^x = 2 \tag{4.1}$$

### 4.1.2　解答

　複素数 $z$ は以下のように表される。

$$z = e^{r+i\theta} \tag{4.2}$$

ここで $z=1$ とすると、

$$\begin{aligned} 1 &= z && (4.3)\\ &= e^{r+i\theta} && (4.4)\\ r &= 0 && (4.5)\\ \theta &= 2k\pi && (4.6)\\ k &\in \mathbb{Z} && (4.7) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} 1^x &= z^x && (4.8)\\ &= e^{x(0+2ik\pi)} && (4.9)\\ &= e^{x(2ikx\pi)} && (4.10)\\ &= 2 && (4.11)\\ \log 2 &= \log\left(e^{2ikx\pi}\right) && (4.12)\\ &= 2ikx\pi && (4.13) \end{aligned}$$

ここで $x = u + iv$ とおいておく。ただし、$u, v$ は実数とする。

$$\begin{aligned} \log 2 &= 2ikx\pi && (4.14)\\ &= 2ik(u+iv) && (4.15)\\ &= -2kv + 2iku && (4.16)\\ u &= 0 && (4.17)\\ v &= -\frac{\log 2}{2k} && (4.18) \end{aligned}$$

ただし、$k \neq 0$。よって、解 $x$ は、

$$\begin{aligned} x &= \pm\frac{i\log 2}{2k} && (4.19)\\ k &\in \mathbb{N} && (4.20) \end{aligned}$$

# 参考文献