Übungsaufgaben komplexe Wechselstromrechnung

Kamal Abdellatif, Philip Geißler

27. September 2020

Impendanz-, Strom, Spannungs-, Leistungs- und Arbeitsrechnung

Aufgabe I: Wirkleistung Motor

Ein Elektromotor kann im Ersatzschaltbild als Reihenschaltung von einer Spule mit Induktivität L_{Motor} und eines Widerstandes R_{Motor} dargestellt werden. Der Motor habe $1\,\mathrm{kW}$ Wirkleistung bei $U_{\mathrm{eff}} = 230\,\mathrm{V}$ und $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Was ist die maximal mögliche Induktivität L_{Motor} des Motors und welchen Widerstand R_{Motor} würde dies erzwingen? Vergleiche den Wirk- mit dem Blindwiderstand.

Lösung I: Wirkleistung Motor

$$P_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\frac{\mathrm{Re}(R+X_L)}{|R+X_L|} = \frac{\hat{U}^2}{2}\frac{\mathrm{Re}(R+X_L)}{|R+X_L|^2} = \frac{\hat{U}^2}{2}\frac{R}{R^2-X_L^2}$$
$$R_{1/2} = \frac{\hat{U}^2 \pm \sqrt{\hat{U}^4 + 16P_{\mathrm{eff}}^2X_L^2}}{4P_{\mathrm{eff}}}$$

Da X_L^2 negativ (oder 0) ist, gibt es 2 mögliche Motorwiderstände für geringe Induktivitäten. Für steigende Induktivitäten nähren sich diese aneinander an, bis sie bei der Grenzinduktivität denselben Wert wiedergeben. Für noch höhere Induktivitäten existieren keine Widerstände mehr, welche die angegebene Wirkleistung erzielen. Warum nicht? Um die Grenzinduktivität zu erhalten, setzen wir den Radikanten also gleich 0.

$$0 \stackrel{!}{=} \hat{U}^4 + 16P_{\mathrm{eff}}^2X_L^2$$
$$R_{1/2} = \frac{\hat{U}^2 \pm \sqrt{0}}{4P_{\mathrm{eff}}} = \frac{\hat{U}^2}{4P_{\mathrm{eff}}} \qquad \Longrightarrow X_L = \frac{\hat{U}^2}{4P_{\mathrm{eff}}}\mathrm{i} = R_{1/2}\mathrm{i}$$

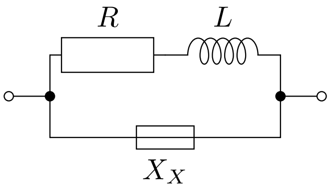
Im Grenzfall sind Blind- und Wirkwiderstand also gleich. Nun können wir schließlich noch den Spezialfall explizit ausrechnen.

$$R_{\mathrm{Motor}} = \frac{\hat{U}^2}{4P_{\mathrm{eff}}} = \frac{(\sqrt{2}\cdot 230\,\mathrm{V})^2}{4\,\mathrm{kW}} = 26{,}45\,\Omega$$
$$L_{\mathrm{Motor}} = \frac{X_L}{\omega\mathrm{i}} = \frac{R_{\mathrm{Motor}}\mathrm{i}}{2\pi\mathrm{i}f} = \frac{26{,}45\,\Omega}{2\pi\cdot 50\,\mathrm{Hz}} \approx 84{,}2\,\mathrm{mH}$$

Aufgabe II: Motorkompensation

Selbes Motorkonzept, anderer Motor. Der Wirkwiderstand R_{Motor} sei $10\,\Omega$. Man habe nun die Möglichkeit, ein weiteres passives Bauteil parallel zum Motor zu schalten, um die Blindleistung der Gesamtschaltung zu minimieren. Welches Bauteil sollte man wählen und wie verhält sich dessen Kenngröße in Abhängigkeit von L_{Motor}. Man berechne die Kenngröße explizit für $L_{\text{Motor}} = 100\,\text{mH}$ und $f = 50\,\text{Hz}$.

Lösung II: Motorkompensation



$$\begin{aligned} X_{R,L} &= R + \mathrm{i}\omega L \\ Z = X_{R,L} \parallel X_X &= \frac{1}{\frac{1}{R+\mathrm{i}\omega L} + \frac{1}{X_X}} \end{aligned}$$

Wir können versuchen, den Gesamtblindwiderstand gleich 0 zu setzen. Denn sollte dies möglich sein, so haben wir mit Sicherheit den Blindwidersatnd minimiert.

$$\operatorname{Re}(Z) = Z = \frac{1}{\frac{1}{R+\mathrm{i}\omega L} + \frac{1}{X_X}} = \frac{1}{\frac{X_X+R+\mathrm{i}\omega L}{X_X\cdot(R+\mathrm{i}\omega L)}} = \frac{X_X\cdot(R+\mathrm{i}\omega L)}{X_X+R+\mathrm{i}\omega L}$$

Hier ergibt sich die triviale Lösung, $X_X = 0\,\Omega$ zu setzen. Dies entspricht aber einer Parallelschaltung mit einem Kurzschluss, über welchen logischerweise jeder Strom fließt (keine Resonanz). Da der Motor dadurch aber nutzlos wird, schließen wir diese Lösung aus und bringen den Bruch auf einen reellen Nenner.

$$\frac{\mathrm{i}\omega L X_X + R X_X}{R + (\mathrm{i}\omega L + X_X)} = \underbrace{\frac{\mathrm{i}\omega L X_X R - \mathrm{i}\omega L R X_X - R X_X^2}{R^2 - (\mathrm{i}\omega L + X_X)^2}}_{\text{Realteil}} + \underbrace{\frac{R^2 X_X + \omega^2 L^2 X_X - \mathrm{i}\omega L X_X^2}{R^2 - (\mathrm{i}\omega L + X_X)^2}}_{\text{Imaginärteil (reeller Nenner)}}$$

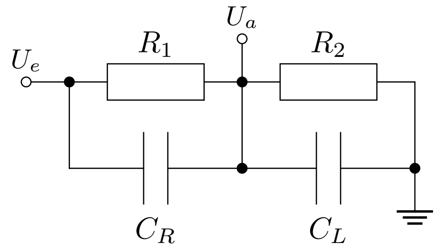
$$\begin{aligned} \implies \qquad 0 &= R^2 X_X + \omega^2 L^2 X_X - \mathrm{i}\omega L X_X^2 \\ \omega L \cdot X_X \mathrm{i} &= R^2 + \omega^2 L^2 \\ X_X &= -\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{\omega L}\mathrm{i} \qquad \implies \qquad \operatorname{Im}(X_X) < 0\,\Omega \end{aligned}$$

Das kompensierende Bauteil sollte also kapazitiv sein. Einsetzen der vorgegebenen Größen liefert

$$\begin{aligned} X_C &= -\frac{(10\,\Omega)^2 + (2\pi\cdot 50\,\text{Hz})^2(100\,\text{mH})^2}{2\pi\cdot 50\,\text{Hz}\cdot 100\,\text{mH}}\mathrm{i} \approx -34.6\mathrm{i}\Omega \\ C &= \frac{-\mathrm{i}}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi\cdot 50\,\text{Hz}\cdot 34{,}6\,\Omega} \approx 92\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

Aufgabe III: Kenngrößen des kompensierten RC-Spannungsteilers

Ein Spannungsteiler aus zwei Widerständen mit den Widerstandswerten R_1 und R_2 wird mit einem Kondensator C_L im Wechselstrom belastet. Zu diesem Zeitpunkt sei die Kapazität C_R des Regelkondensators noch 0, praktisch ein offener Schalter. Wie sehr bricht die Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ein [$f(\omega) := U_a(\omega)/U_e$]?



Welches Verhalten lässt sich beobachten, wenn man nun C_R so auswählt, dass $C_R R_1 = C_L R_2$ gilt?

Lösung III: Kenngrößen des kompensierten RC-Spannungsteilers

Die Gesamtschaltung bleibt weiterhin ein Spannungsteiler, nur nun mit einer Parallelschaltung aus Kondensator und Widerstand. Insofern kann man die übliche Spannungsteilerformel verwenden.

$$U_a = \frac{R_2 \parallel X_{C_L}}{R_1 + (R_2 \parallel X_{C_L})} \qquad\qquad R_2 \parallel X_{C_L} = \frac{R_2 \cdot X_{C_L}}{R_2 + X_{C_L}}$$

Definieren wir uns nun die normierte Frequenz $\Omega_L = \omega R_2 C_L$, so können wir uns die Ausgangsspannung in einigen Grenzfällen für ω approximieren, um ein Gefühl für das Verhalten der Übertragsfunktion zu bekommen.

$$R_2 \parallel X_{C_L} = \frac{\frac{R_2}{\mathrm{i}\omega C_L}}{R_2 + \frac{1}{\mathrm{i}\omega C_L}} = \frac{R_2}{1+\mathrm{i}\Omega_L} \approx \begin{cases} R_2 & \text{für } \Omega_L \ll 1 \\ \frac{R_2}{1+\mathrm{i}} & \text{für } \Omega_L = 1 \\ X_{C_L} & \text{für } \Omega_L \gg 1 \end{cases}$$

$$\implies \frac{U_e}{U_a} \approx \begin{cases} \frac{R_2}{R_1+R_2} & \text{für } \Omega_L \ll 1 \\ \frac{R_2}{(1+\mathrm{i})R_1+R_2} & \text{für } \Omega_L = 1 \\ \frac{X_{C_L}}{R_1+X_{C_L}} & \text{für } \Omega_L \gg 1 \end{cases}$$

Für niedrige Frequenzen arbeitet der kapazitive Spannungsteiler wie ein ohmscher, für große Frequenzen $\omega^{-1} \ll R_2 C_L$ sinkt die Ausgangsspannung wie beim Tiefpass 1.Ordnung, mit der Grenzkreisfrequenz $(R_2 C_L)^{-1}$. Setzen wir nun $C_R R_1 = C_L R_2$, so wird auch die erste Teilimpedanz des Spannungsteilers komplex. Wir definieren zusätzlich noch $\Omega_R = \omega R_1 C_R$ zur Vereinfachung der folgenden Formeln und bemerken $\Omega_L = \Omega_R =: \Omega$.

$$\begin{aligned} \frac{U_e}{U_a} &= \frac{R_2 \parallel X_{C_L}}{(R_1 \parallel X_{C_R}) + (R_2 \parallel X_{C_L})} = \frac{\frac{R_2}{1+\mathrm{i}\Omega_L}}{\frac{R_1}{1+\mathrm{i}\Omega_R} + \frac{R_2}{1+\mathrm{i}\Omega_L}} \\ &= \frac{(1+\mathrm{i}\Omega_R)R_2}{(1+\mathrm{i}\Omega_L)R_1 + (1+\mathrm{i}\Omega_R)R_2} = \frac{(1+\mathrm{i}\Omega)R_2}{(R_1+R_2)+(R_1+R_2)\Omega\mathrm{i}} \\ &= \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+\Omega\mathrm{i}}{1+\Omega\mathrm{i}} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{aligned}$$

Für ein solches Verhältnis der Kapazitäten und Widerstände ist das Spannungsteilerverhältnis also unabhängig von der Frequenz des Signals. Dies wird sich bei Tastköpfen von Oszilloskopen zunutze gemacht, da die Eingänge sowohl Widerstand als auch Kapazität aufweisen. Tastköpfe haben dies dann auch (mit einstellbarer Kapazität) und werden dann vor das Oszilloskop, sodass der Eingang hochfrequente nicht stärker als niederfrequente Signale dämpft, wie es beim Frequenzunkompensierten Spannungsteiler (erster Aufgabenteil) der Fall wäre.

Konzeption komplexer Wechselstrom

Aufgabe III: Effektive und Genaue verrichtete Arbeit

hallo hallo