青森大学
AOMORI UNIVERSITY

入学前勉強会　第3回 2021年3月18日

「パスカルの三角形」

青森大学　ソフトウェア情報学部
鈴木幸人（y.suzuki@aomori-u.ac.jp）

勉強（復習）する内容

- 数学
  - 文字式の計算
  - 順列—組み合わせ
  - 二項定理
  - パスカルの三角形
- プログラミング（Python）
  - 出力の方法
  - 変数の使い方
  - for 文（繰り返し）
  - リストの使い方

課題提出用フォームのQRコード

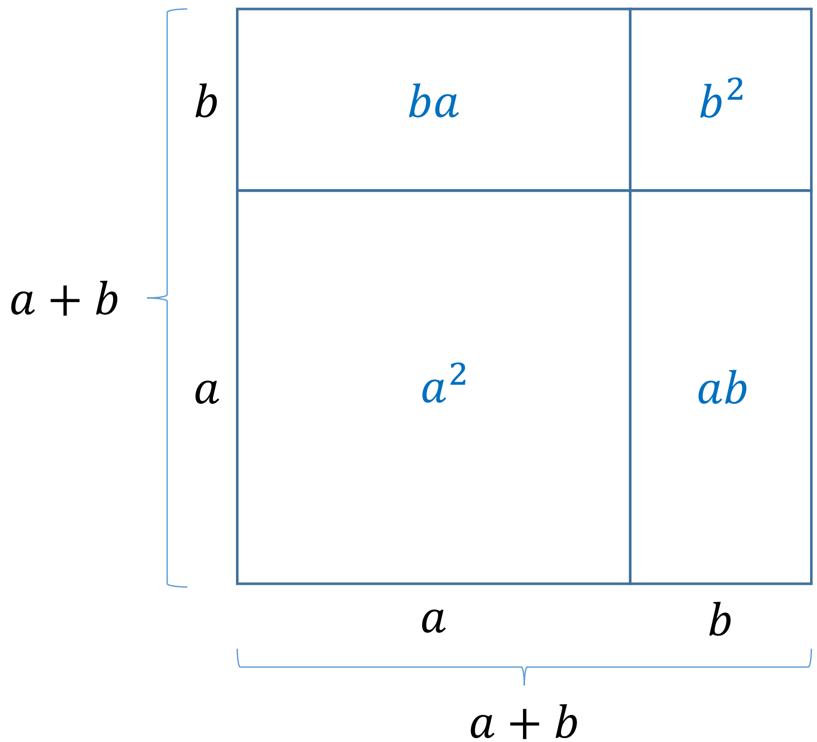
提出期限：３月２７日

文字式の計算

$$(a+b)\boxed{(a+b)} = a(a+b) + b(a+b) = aa + ab + ba + bb$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{lll} a & a & = aa \\ a & b & = ab \\ b & a & = ba \\ b & b & = bb \end{array}$$



文字式の計算

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a+b)(a+b) &= (aa+ab+ba+bb)(a+b) \\
&= aaa+aba+baa+bba+aab+abb+bab+bbb \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

a	a	a	$=aaa$	3つの括弧の中から全て a を取り出す（1通り）
b	a	a	$=baa$	
a	b	a	$=aba$	3つの括弧の中から1つ b を取り出す（3通り）
a	a	b	$=aab$	
b	b	a	$=bba$	
b	a	b	$=bab$	3つの括弧の中から2つ b を取り出す（$3\times 2/2=3$ 通り）
a	b	b	$=abb$	
b	b	b	$=bbb$	3つの括弧の中から全て b を取り出す（1通り）

課題1（文字式の計算）次の文字式を展開し、係数を求めよ

$$(a+b)^4 = \boxed{①}a^4+\boxed{②}a^3b+\boxed{③}a^2b^2+\boxed{④}ab^3+\boxed{⑤}b^4$$

順列・組み合わせ（1）

- m 個のものを順番に並べる場合の数

$$m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = m!$$ （ m の階乗）

$m = 20$ の場合

1番目を選ぶ	： m 通り	○○○①○・・・○○○
2番目を選ぶ	： $m-1$ 通り	○②○●○・・・○○○
3番目を選ぶ	： $m-2$ 通り	○●○●○・・・③○○
・・・・・・・・・・・・・		・・・・・・・・・・・・・・・・
$(m-1)$ 番目を選ぶ	： 2通り	●●●●●・・・●○⑲
m 番目を選ぶ	： 1通り	●●●●●・・・●⑳●

$m = 3$ の場合

①②③　③①②　②③①
①③②　②①③　③②①

$3 \times 2 \times 1 = 6$ 通り

階乗をプログラムで計算する

- 準備（for文）

1 から 199 までの奇数の和を計算する。

Python3

Enter a title here

Main.py

Success ツイート Share 0

```
n = 100

sum = 0
for i in range(n):
    sum += 2*(i+1) - 1

print("sum = ",sum)
```

← 変数 n に 100 を代入する
（プログラムでは = は代入を表す）

← 変数 sum に 0 を代入する

n	sum
100	0

変数 i に 0 から n - 1 までの値を代入して
次の文を繰り返し実行する

文字列 “sum = “ と変数 sum の値を
出力する
（” “で囲んだ部分は文字列として扱われる）

実行 (Ctrl-Enter)

出力 入力 コメント 0

```
sum =  10000
```

[for 文の説明]

```
for i in range(n):
    sum += 2*(i+1) - 1
```

変数 i に 0 から n - 1 までの値を代入して
次の文を繰り返し実行する

|| 同じ意味

```
for i in range(n):
    sum = sum + 2*(i+1) - 1
```

現在の sum の値を用いて sum + 2 × (i + 1) − 1
を計算して、その結果を sum に上書きする

sum

0 から開始する

	sum		sum		
i = 0 :	1	代入 ⇐	0	+	$2\times(0+1)-1$ → 1
i = 1 :	4	代入 ⇐	1	+	$2\times(1+1)-1$ → 3
i = 2 :	9	代入 ⇐	4	+	$2\times(2+1)-1$ → 5

⋮

$$\sum_{i=0}^{n-1}[2(i+1)-1]$$

$$\left(=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)$$

[余談]　1 から $2n-1$ までの奇数の和は n^2 に等しい

何故なら

$$k^2-(k-1)^2=k^2-(k^2-2k+1)=2k-1$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}[k^2-(k-1)^2]$$

が成り立つ。ところが右辺は

$$\sum_{k=1}^{n}[k^2-(k-1)^2]$$

$$=(\cancel{1}^2-0^2)+(\cancel{2}^2-\cancel{1}^2)+(\cancel{3}^2-\cancel{2}^2)+\cdots+[n^2-\cancel{(n-1)}^2]$$

$$=n^2$$

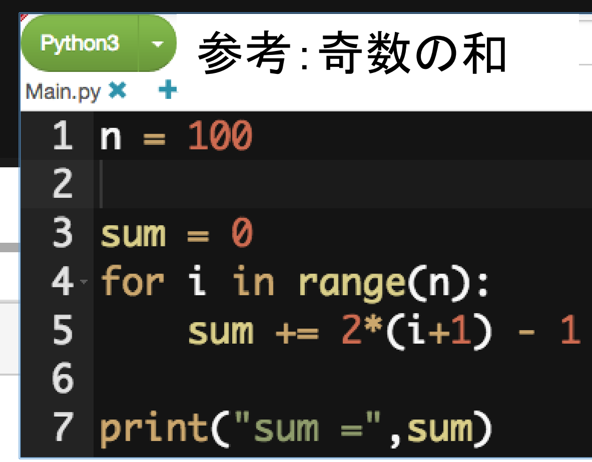
と計算することができるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

でなければならない。

- 課題2（for 文）

次の ______ を埋めて 2 から 200 までの偶数の和を計算し出力するプログラムを完成させよ。



階乗をプログラムで計算する

- 1 から 10 までの階乗（ 1!, 2!, ..., 10! ）を計算し、リスト（番号付けられた変数の列）に格納する。

Python3 Enter a title here

Main.py

Success ツイート Share 0

```python
n = 10

factorial = [1]
print(str(0)+"! = ",factorial[0])
for i in range(n):
    factorial.append(factorial[i]*(i+1))
    print(str(i+1)+"! = ",factorial[i+1])
```

← 変数 n に 10 を代入する

← リスト factorial に [1] を代入する

← 変数 i に 0 から n - 1 までの値を代入して次の文を繰り返し実行する

実行 (Ctrl-Enter)

出力 入力 コメント 0

```
0! =  1
1! =  1
2! =  2
3! =  6
4! =  24
5! =  120
6! =  720
7! =  5040
8! =  40320
9! =  362880
10! =  3628800
```

[リストの定義]

```
factorial = [1]
```
← リスト factorial に [1] を代入する

リスト型変数 factorial が生成され 0 番要素に 1 が代入される

	factorial[0]
factorial	[0] 1

○ リストの例（ 10以下の偶数のリスト）

```
list = [0, 2, 4, 6, 8, 10]
```
← リスト list に [0,2,4,6,8,10] を代入する

リスト型変数 list が生成され 0 番要素に 0, 1 番要素に 2, 2 番要素に 4, 3番要素に 6, 4番要素に 8, 5番要素に 10 が代入される

	list[0]	list[1]	list[2]	list[3]	list[4]	list[5]
list	[0] 0	[1] 2	[2] 4	[3] 6	[4] 8	[5] 10

[リストの追加 (append)]

```
for i in range(n):
    factorial.append(factorial[i]*(i+1))
```

factorial

factorial[0]
[0] 1

から開始する

i = 0 :　factorial.append(factorial[0]*(0+1))

1

factorial[0]	factorial[1]
[0] 1	[1] 1 × 1
	1

i = 1 :　factorial.append(factorial[1]*(1+1))

2

factorial[0]	factorial[1]	factorial[2]
[0] 1	[1] 1	[2] 1 × 2
	1	1 × 2

i = 2 :　factorial.append(factorial[2]*(2+1))

3

factorial[0]	factorial[1]	factorial[2]	factorial[3]
[0] 1	[1] 1	[2] 2	[3] 2 × 3
1	1	1 × 2	1 × 2 × 3
0!	1!	2!	3!

⋮

[出力ー変数の型変換(str : 整数→文字列)と文字列の和]

```
for i in range(n):
    factorial.append(factorial[i]*(i+1))
    print(str(i+1)+"! = ",factorial[i+1])
```

「整数 i + 1 を文字列に変換 (str) して、それに文字列 ”! = “ を加えた (+) 文字列」
と
「リスト factorial の i + 1 番要素」
を出力する

i = 0 :	1! = 1
i = 1 :	2! = 2
i = 2 :	3! = 6
i = 3 :	4! = 24
i = 4 :	5! = 120
i = 5 :	6! = 720
i = 6 :	7! = 5040
i = 7 :	8! = 40320
i = 8 :	9! = 362880
i = 9 :	10! = 3628800

- 課題3（リスト ＋ for 文）

次の を埋めて $2^0 = 1$ から 2^{10} までの 2 の冪乗を計算し、それらをリストに格納するプログラムを完成させよ。

Python3

Enter a title here

Main.py

Success ツイート Share 0

```python
n = 10

power2 = [1]
for i in range(n):
    power2.

print("power of 2 = ",power2)
```

実行 (Ctrl-Enter)

出力 入力 コメント 0

```
power of 2 =  [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]
```

参考：階乗 $n! = 1 \times \cdots \times n$ の計算

Python3

Main.py

```python
n = 10

factorial = [1]
print(str(0)+"! = ",factorial[0])
for i in range(n):
    factorial.append(factorial[i]*(i+1))
    print(str(i+1)+"! = ",factorial[i+1])
```

順列・組み合わせ(2)

- n 個の中から m 個を取り出す場合の数

$$\binom{n}{m} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times \left(n-(m-1)\right)}{m!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

１番目を選ぶ　: n 通り
2番目を選ぶ　: $n-1$ 通り
3番目を選ぶ　: $n-2$
・・・・・・・・・・・・・
$(m-1)$ 番目を選ぶ　: $n-(m-2)$ 通り
m 番目を選ぶ　: $n-(m-1)$ 通り

選んだ m 個は 1 から m まで順番付けられているが、
それら $m!$ 個は全て同等である。

$n=20, m=3$ の場合

○○○①○・・・○○○
○②○①○・・・○○○
○②○①○・・・○③○
⬇
○●○●○・・・○●○

○①○○○・・・○○○
○①○○○・・・○②○
○①○③○・・・○②○
⬇
○●○●○・・・○●○

順列・組み合わせ（2）

- 二項定理

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}^{n\text{ 個}}$$

$$= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

$$= a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + n a b^{n-1} + b^n$$

各項の係数は、n 個の $(a+b)$ の中から b を選び出す場合の数に等しい。

- 課題4（順列・組み合わせ）

次の値（5 個から 0 ～ 5 個を取り出す場合の数）を計算せよ。

(1) $\binom{5}{0} = ?$

(2) $\binom{5}{1} = ?$

(3) $\binom{5}{2} = ?$

(4) $\binom{5}{3} = ?$

(5) $\binom{5}{4} = ?$

(6) $\binom{5}{5} = ?$

$$\binom{n}{m} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times \bigl(n-(m-1)\bigr)}{m!}$$
$$= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

ここで $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$
ただし $0! = 1$ と定義する。

二項定理の係数をプログラムで計算する

- $(a+b)^{10}$ を展開したときの係数を計算し出力する。

Python3 Enter a title here

Main.py

Success ツイート

```python
n = 10

fact = [1]
for i in range(n):
    fact.append(fact[i]*(i+1))
    print(fact)

print()

for m in range(n+1):
    binary = [1.0]
    for i in range(m):
        p = i + 1
        binary.append(fact[m]/(fact[p]*fact[m-p]))
    print(binary)
```

0 から 10 までの階乗の計算
→ リスト fact に格納

fact に格納した階乗を使って二項係数を計算する

fact[0]	fact[1]	fact[2]	fact[3]	
0!	1!	2!	3!	・・・・・

実行 (Ctrl-Enter)

出力 入力 コメント 0

```
[1, 1]
[1, 1, 2]
[1, 1, 2, 6]
[1, 1, 2, 6, 24]
[1, 1, 2, 6, 24, 120]
[1, 1, 2, 6, 24, 120, 720]
[1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040]
[1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320]
[1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880]
[1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800]

[1.0]
[1.0, 1.0]
[1.0, 2.0, 1.0]
[1.0, 3.0, 3.0, 1.0]
[1.0, 4.0, 6.0, 4.0, 1.0]
[1.0, 5.0, 10.0, 10.0, 5.0, 1.0]
[1.0, 6.0, 15.0, 20.0, 15.0, 6.0, 1.0]
[1.0, 7.0, 21.0, 35.0, 35.0, 21.0, 7.0, 1.0]
[1.0, 8.0, 28.0, 56.0, 70.0, 56.0, 28.0, 8.0, 1.0]
[1.0, 9.0, 36.0, 84.0, 126.0, 126.0, 84.0, 36.0, 9.0, 1.0]
[1.0, 10.0, 45.0, 120.0, 210.0, 252.0, 210.0, 120.0, 45.0, 10.0, 1.0]
```

[二項係数の計算(二重ループ)]

```
for m in range(n+1):
    binary = [1.0]
    for i in range(m):
        p = i + 1
        binary.append(fact[m]/(fact[p]*fact[m-p]))
    print(binary)
```

変数 m に 0 から n までの値を代入して以下の文を繰り返し実行する

変数 i に 0 から m - 1 までの値を代入して以下の文を繰り返し実行する

	binary[0]
binary	[0] 1.0

から開始する

i = 0 (p = 1)

binary.append(fact[m]/(fact[1]*fact[m-1]))

binary[0]	binary[1]
[0] 1.0	[1] $\frac{\mathrm{fact}[m]}{\mathrm{fact}[1]\cdot\mathrm{fact}[m-1]}$
$\binom{m}{0}$	$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!\,(m-1)!}$

i = 1 (p = 2)

binary.append(fact[m]/(fact[2]*fact[m-2]))

binary[0]	binary[1]	binary[2]
[0] 1.0	[1] $\frac{\mathrm{fact}[m]}{\mathrm{fact}[1]\cdot\mathrm{fact}[m-1]}$	[2] $\frac{\mathrm{fact}[m]}{\mathrm{fact}[2]\cdot\mathrm{fact}[m-2]}$
$\binom{m}{0}$	$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1!\,(m-1)!}$	$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2!\,(m-2)!}$

⋮

- 課題5（二重ループ）

次の　　　　　を埋めて、1 から 10 までの 冪乗を 0 乗から 10 乗まで計算し、それらをリストに格納するプログラムを完成させよ。

Python3

Enter a title here

Main.py

Success ツイート Share 0

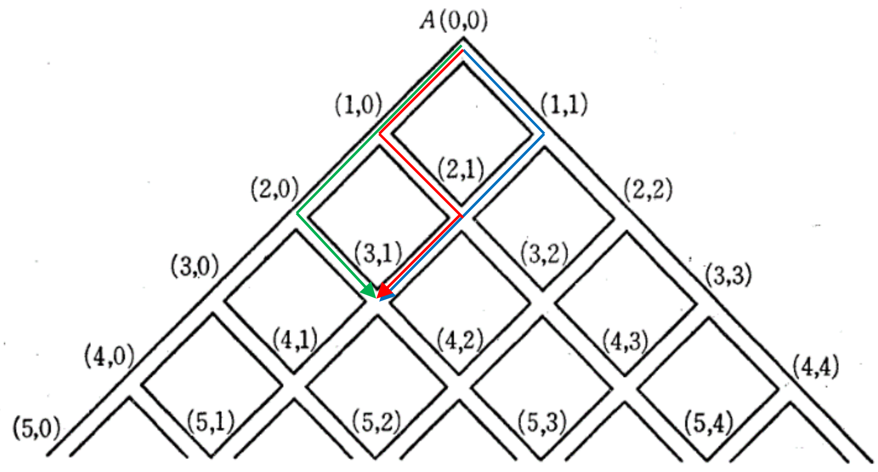
```python
n = 10

for k in range(n):
    power = [1]
    for i in range(n):
        power.
    print("power of ",k+1," = ",power)
```

実行 (Ctrl-Enter)

出力 入力 コメント 0

```
power of  1  =  [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
power of  2  =  [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]
power of  3  =  [1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049]
power of  4  =  [1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384, 65536, 262144, 1048576]
power of  5  =  [1, 5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625, 1953125, 9765625]
power of  6  =  [1, 6, 36, 216, 1296, 7776, 46656, 279936, 1679616, 10077696, 60466176]
power of  7  =  [1, 7, 49, 343, 2401, 16807, 117649, 823543, 5764801, 40353607, 282475249]
power of  8  =  [1, 8, 64, 512, 4096, 32768, 262144, 2097152, 16777216, 134217728, 1073741824]
power of  9  =  [1, 9, 81, 729, 6561, 59049, 531441, 4782969, 43046721, 387420489, 3486784401]
power of  10  =  [1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000, 100000000, 1000000000, 10000000000]
```

パスカルの三角形



A 地点から (n, m) 地点まで最短距離で到達する道は $\binom{n}{m}$ 通りある。

（例）$(3,1)$ 地点まで行く道は、3つの分岐点の中で右に向かう箇所を1つ選ぶことで決まる:

① 右ー左ー左
② 左ー右ー左
③ 左ー左ー右

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

二項定理の係数と一致する:
「n 個の $(a+b)$ の中から b を選ぶ場合の数」
＝
「n 個の分岐点の中から右を選ぶ場合の数」

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

計算すると・・・

				1					$\mathrm{sum} = 1 = 2^0$
			1		1				$\mathrm{sum} = 2 = 2^1$
		1		2		1			$\mathrm{sum} = 4 = 2^2$
	1		3		3		1		$\mathrm{sum} = 8 = 2^3$
1		4		6		4		1	
		$(1+3)$		$(3+3)$		$(1+3)$			

○ $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$ が成り立つ

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \cdots \\ &\quad \cdots + \binom{n}{n-1} 1^1 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^0 1^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\end{aligned}$$

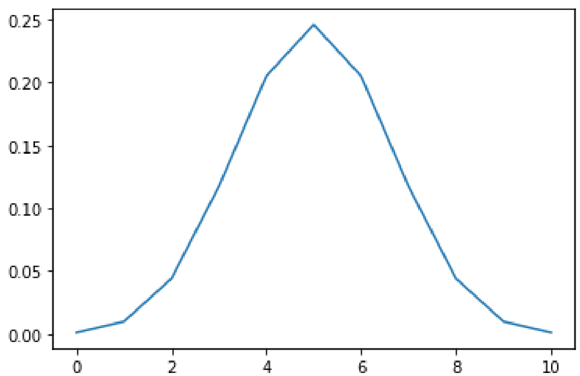
○ $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$ が成り立つ

$$\binom{n-1}{m-1} \qquad \binom{n-1}{m}$$
$$\binom{n}{m}$$

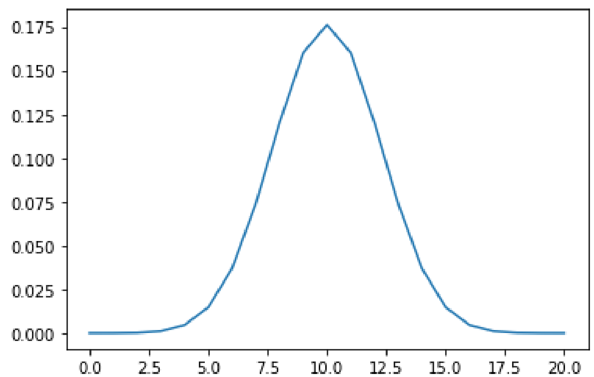
(n, m) 地点に行き着く一歩手前で必ず $(n-1, m-1)$ 地点あるいは $(n-1, m)$ 地点を通らなければならない

（補足）二項分布

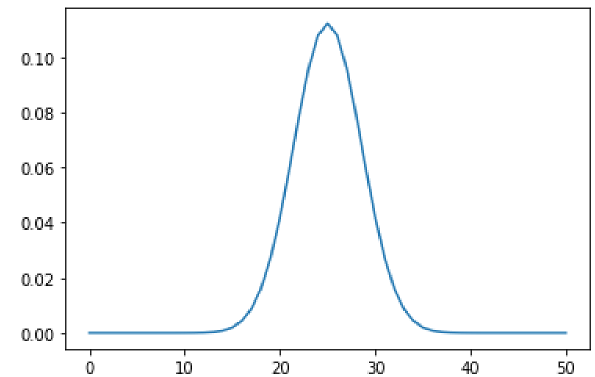
$$P_n(i) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i} = \binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i},\ i = 0,1,\ldots,n$$



P_{10} 平均：5 分散：2.5



P_{20} 平均：10 分散：5.0



P_{50} 平均：25 分散：12.5

平均：$m = \sum_{i=0}^{n} iP_n(i)$,

分散：$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{n}(i-m)^2 P_n(i)$

平均：25, 分散：12.5
のガウス分布

$$G(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(i-m)^2}{2\sigma^2}}$$