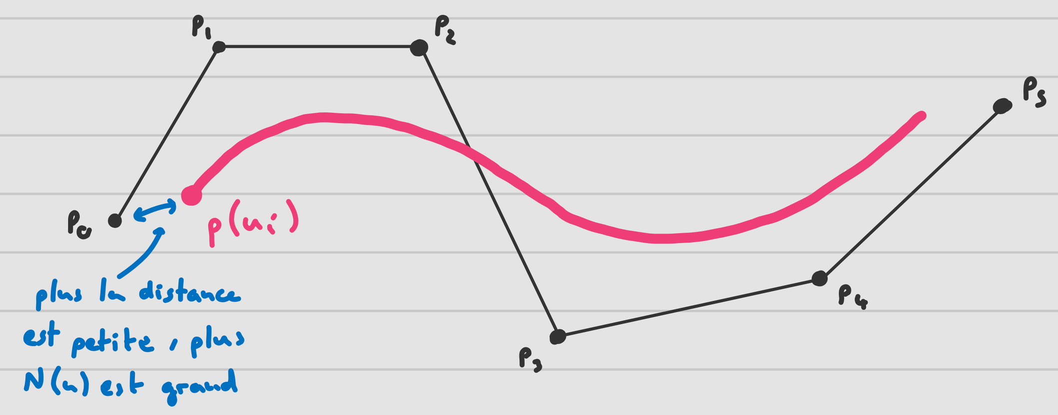
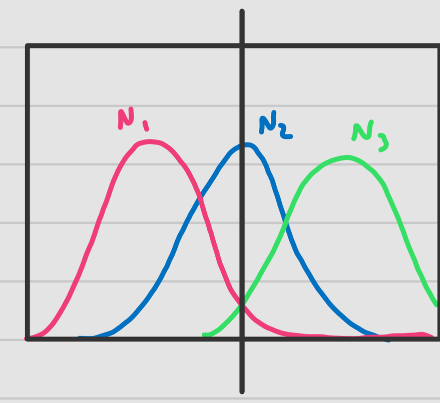
Génération de courbes paramétrique

$p(u) = \sum_{i=0}^{n} N_i(u)\, P_i$ (liste points) avec $\sum_{i=0}^{n} N_i(u) = 1$





$\Sigma = 1$

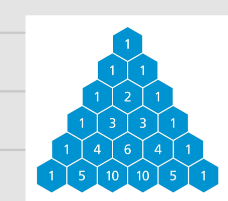
Courbes de Bezier

$p(u)$ avec $u \in [0,1]$ et $N_i(u) = B_i^n(u)$

polynômes de Bernstein $B_i^n(u) = C_i^n \times u^i \times (1-u)^{n-i}$

$C_i^n = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$ — En pratique on utilise pas car trop gourmand en mémoire

Tirés du triangle de pascal



Exo

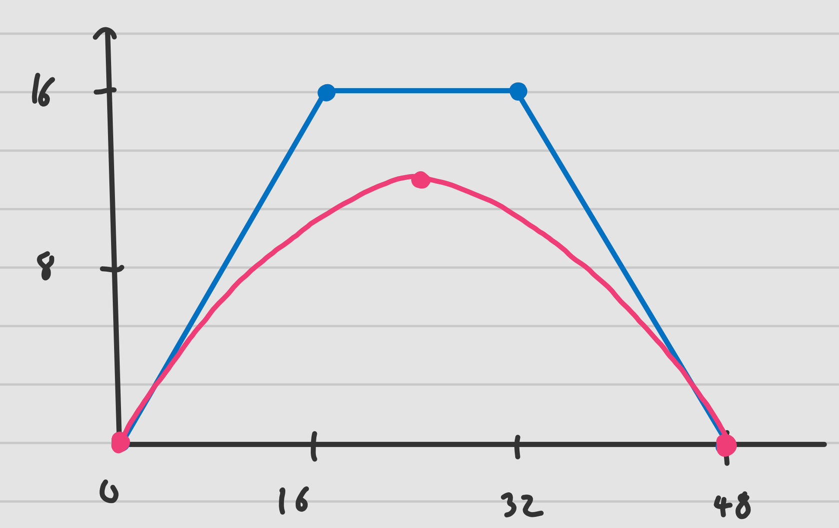
$P_0(0,0)$ $P_1(16,16)$ $P_2(32,16)$ $P_3(48,0)$

calculer $p(1/2)$ $p(0)$ $p(1)$

$$p(u) = (1-u)^3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 3u(1-u)^2\begin{pmatrix}16\\16\end{pmatrix} + 3u^2(1-u)\begin{pmatrix}32\\16\end{pmatrix} + u^3\begin{pmatrix}48\\0\end{pmatrix}$$

$p(0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $p(1) = \begin{pmatrix}48\\0\end{pmatrix}$

$p(1/2) = \begin{pmatrix}24\\12\end{pmatrix}$



Courbe de Bezier

- commence
  - en P_0
  - tangeante à $[P_0 P_1]$
- finit
  - en P_n
  - tangeante à $[P_{n-1} P_n]$
- elle approxime les autres points

limiter à 5-7 points
cubic bezier : 4 pts

si trop de points la courbe n'est pas réalisable
=> on sépare en plusieurs

B B

propriétés :

1. symétrie
2. la courbe n'oscille pas plus que le polynome de base

Respect de la continuité (fusion de plusieurs courbes bézier)

C^0 : $P_3^i = P_0^{i+1}$

C^1 : $P_3^i = P_0^{i+1}$ et $(P_3^i - P_2^i) = (P_1^{i+1} - P_0^{i+1})$

G^1 : $(P_3^i - P_2^i) = \alpha(P_1^{i+1} - P_0^{i+1})$ avec $\alpha > 0$

B. Spline

$p(u) = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(u)\, P_i \quad \forall u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$

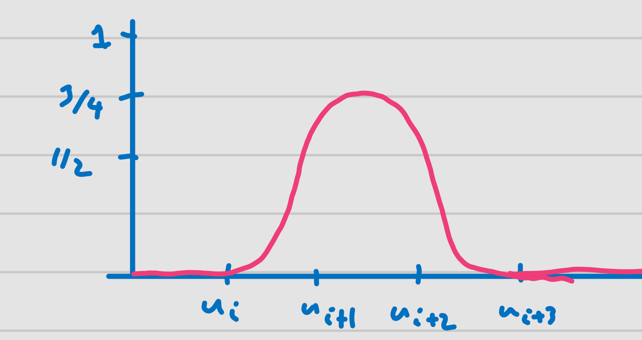
- ordre k de la B.spline
- degré $m = k-1$ ← Continuité minimale C^{k-2}
- $n+1$ pts de contrôle
- vecteur nodal de $(k+n+1)$ noeuds

définition récursive de $N_i^k(u)$:

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \forall u \in [u_i, u_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_i^k(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k-1} - u_i} N_i^{k-1}(u) + \frac{u_{i+k} - u}{u_{i+k} - u_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(u)$$

Ex $k = 3$, $n+1 = 6$ vecteur nodal $[u_0 \cdots u_8]$, intervalle de def $u[u_2 \cdots u_6]$



- u fixé

Params pour def une Bspline
- $P_0 \cdots P_n$: les $n+1$ pts de ctrl
- k : ordre de la Bspline (deg $m = k-1$)
- $U = (U_0 \cdots U_{k+n})$: vecteur nodal

Floraison: pour tout polynome p de deg m et a une seule variable, il existe une floraison f polynome de degré 1 à m variables.

propriétés de f :

1. f est symétrique $f(x_0, \cdots, x_m) = f(x_m, \cdots, x_0)$
2. $f(u, u, \cdots, u) = p(u)$
3. f appliquée à des valeurs successives du vec nodal

   $P_0 = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$
   $P_1 = f(u_2, u_3, \cdots, u_{m+1})$
   $P_n = f(u_{n+1}, \cdots, u_{m+n})$
4. f est muti-affine : $\alpha_0 f(x_{00}, x_1, \cdots, x_m) + \alpha_1 f(x_{01}, x_1, \cdots, x_m) = f(\alpha_0 x_{00} + \alpha_1 x_{01}, x_1, \cdots, x_m)$

$k = 3$, $n+1 = 6$, vec nodal uniforme avec $(u_0 = 0,\ u_{i+1} - u_i = 1)$

$P_0\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $P_1\begin{pmatrix}0\\24\end{pmatrix}$ $P_2\begin{pmatrix}24\\24\end{pmatrix}$ $P_3\begin{pmatrix}24\\0\end{pmatrix}$ $P_4\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $P_5\begin{pmatrix}0\\24\end{pmatrix}$

Calculer $p(4,5)$

Etape 1 : trouver dec