Primer caso de la regla de la cadena

Definición 1. *Una curva en* $\mathbb{R}^n$ *es una función* $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$*, donde* I *es un intervalo de* $\mathbb{R}$*.*

Si $n = 3$ *podemos escribir las funciones coordenamdas de la curva como*

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

donde $x(t), y(t), z(t),\ t \in I$*, son funciones con valores reales de una variable (como en cálculo 1).*

Más en general, en dimensión n*,* γ *tiene* n *funciones coordenadas, cada una una función de una variable.*

Decimos que γ *es diferenciable en* t_0 *si todas sus funciones coordenadas son diferenciables en* t_0*. Se define* $\gamma'(t_0)$ *(también llamdado vector velocidad ó vector tangente) como el vector formado por las derivadas de las funciones coordenadas. Por ejemplo, en tres dimensiones*

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Decimos que la curva es de clase C^1 *si todas las derivadas de sus funciones coordenadas son continuas. En tres dimensiones esto quiere decir que* $x'(t), y'(t), z'(t)$ *con continuas para todo* $t \in I$*.*

Ejemplo 1. Calcula el vector tangente a las curvas dadas en el punto dado.

1. $\gamma(t) = (t, t^2, e^t)$ en $t = 0$.
2. $\gamma(t) = e^{-t}(t, t^2, \sqrt{t})$ en $t = 1$.
3. $\gamma(t) = (1, 3t + 1, \operatorname{sen}(t)) + (1, 2, t)$ en $t = \pi/2$.

Solución. Para el primer inciso, derivamos coordenada a coordenada:

$$\gamma'(t) = (\frac{d}{dt}(t), \frac{d}{dt}(t^2), \frac{d}{dt}(e^t)) = (1, 2t, e^t)$$

Luego evaluamos en $t = 0$

$$\gamma'(0) = (1, 2(0), e^0) = (1, 0, 1).$$

Para el segundo inciso: primero multiplicamos el escalar que multiplica el vector.

$$\gamma(t) = (e^{-t}t, e^{-t}t^2, e^{-t}\sqrt{t})$$

luego derivamos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (\frac{d}{dt}(e^{-t}t), \frac{d}{dt}(e^{-t}t^2), \frac{d}{dt}(e^{-t}\sqrt{t}) \\ &= (e^{-t} - e^{-t}t, e^{-t}2t - e^{-t}t^2, -e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}} - e^{-t}\sqrt{t}) \end{aligned}$$

Luego evaluamos en $t = 1$:

$$\gamma'(1) = (0, e^{-1}, -\frac{3}{2}e^{-1})$$

Para el tercer inciso: primero sumamos los vectores.

$$\gamma(t) = (2, 3t + 3, t + \operatorname{sen}(t)).$$

Luego diferenciamos

$$\gamma'(t) = (\frac{d}{dt}(2), \frac{d}{dt}(3t + 3), \frac{d}{dt}(t + \operatorname{sen}(t))) = (0, 3, 1 + \cos(t))$$

Finalmente evaluamos:

$$\gamma'(\pi/2) = (0, 3, 1).$$

□

Teorema 1 (Primer caso de la regla de la cadena)**.** *Sea $I \neq \emptyset$ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, una curva diferenciable en todo punto de I.*

Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto abierto de R^n y $f : U \to \mathbb{R}$ una función clase C^1 en U.

Supongamos que $\gamma(I) \subset U$, para que $f \circ \gamma$ tenga sentido.

Entonces $f \circ \gamma$ (que función de una variable) es diferenciable en todo punto de I y además, para todo t_0

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \langle \nabla_{\gamma(t_0)} f, \gamma'(t_0) \rangle$$

En dimensión $n = 3$, usando la notación de Leibnitz se tiene:

$$\frac{df \circ \gamma}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0))\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0))\frac{dy}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t_0))\frac{dz}{dt}(t_0)$$

y si se omite el punto donde se evaluan también se denota como:

$$\frac{df \circ \gamma}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Ejemplo 2. Para las siguientes funciones f y curvas γ, usa la regla de la cadena para calcular $(f \circ \gamma)'$ en el punto indicado.

1. $\gamma(t) = (t, t^2, e^t)$, $f(x, y, z) = x + yz$, en $t = 0$.
2. $\gamma(t) = e^{-t}(t, t^2, \sqrt{t})$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, en $t = 1$.
3. $\gamma(t) = (1, 3t + 1, \operatorname{sen}(t)) + (1, 2, t)$, $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, en $t = \pi/2$.

Solución. Vamos a usar la fórmula

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla_{\gamma(t)} f, \gamma'(t) \rangle$$

Ya tenemos γ', del ejemplo anterior, así que se empieza calculando ∇f.
Para el primer inciso:

$$\nabla_{(x,y,z)} f = (\partial_x(x+yz), \partial_y(x+yz), \partial_z(x+yz)) = (1, z, y).$$

por lo que $\nabla_{\gamma(0)} f = \nabla_{(0,0,1)} f = (1,1,0)$.
Aplicando la regla de la cadena, tomando $t = 0$:

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(0) &= \langle \nabla_{\gamma(0)} f, \gamma'(0) \rangle \\ &= \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle \\ &= 1\end{aligned}$$

Para el segundo inciso:

$$\begin{aligned}\nabla_{(x,y,z)} f &= (\partial_x(x^2+y^2+z^2), \partial_y(x^2+y^2+z^2), \partial_z(x^2+y^2+z^2)) \\ &= (2x, 2y, 2z)\end{aligned}$$

por lo que $\nabla_{\gamma(1)} f = \nabla_{(e^{-1},e^{-1},e^{-1})} f = (2e^{-1}, 2e^{-1}, 2e^{-1})$.
Aplicando la regla de la cadena, tomando $t = 1$:

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(1) &= \langle \nabla_{\gamma(1)} f, \gamma'(1) \rangle \\ &= \langle (2e^{-1}, 2e^{-1}, 2e^{-1}), (0, e^{-1}, -\frac{3}{2}e^{-1}) \rangle \\ &= 2e^{-2} - 3e^{-2} = -e^{-2}\end{aligned}$$

Para el tercer inciso:

$$\begin{aligned}\nabla_{(x,y,z)} f &= (\partial_x(xy+yz+zx), \partial_y(xy+yz+zx), \partial_z(xy+yz+zx)) \\ &= (y+z, x+z, y+x)\end{aligned}$$

por lo tanto $\nabla_{\gamma(\pi/2)} = \nabla_{(2,3\pi/2+3,1+\pi/2)} f = (4+2\pi, 3+\pi/2, 5+3\pi/2)$
Aplicando la regla de la cadena, tomando $t = \pi/2$:

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(\pi/2) &= \langle \nabla_{\gamma(\pi/2)} f, \gamma'(\pi/2) \rangle \\ &= \langle (4+2\pi, 3+\pi/2, 5+3\pi/2+), (0,3,1) \rangle \\ &= 9 + 3\pi/2 + 5 + 3\pi/2 = 14 + 3\pi.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2 (Segundo caso de la regla de la cadena, en dimensión 3)**.** *Sea $U \neq \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en U.*

Sea $V \neq \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $G : V \to \mathbb{R}^3$ una función clase C^1 en V. Escribamos las funciones coordenadas de G como

$$G(q) = (u(q), v(q), w(q))$$

donde a la variable independiente la denotamos $q = (x, y, z) \in V$.

Supongamos que $G(V) \subset U$, para que $f \circ G$ esté bien definida.

Entonces $f \circ G$ es de clase C^1 en V y:

$$\begin{aligned}
\partial_x(f \circ G) = \langle \nabla f, (\partial_x u, \partial_x v, \partial_x w) \rangle \\
\partial_y(f \circ G) = \langle \nabla f, (\partial_y u, \partial_y v, \partial_y w) \rangle \\
\partial_z(f \circ G) = \langle \nabla f, (\partial_z u, \partial_z v, \partial_z w) \rangle
\end{aligned}$$

Si usamos la notación de Leibnitz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\
\frac{\partial f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \\
\frac{\partial f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Considera la función $f(u, v, w) = u^2 + v^2 - 2w^2$ y

$$u(x, y, z) = x^2 y, v(x, y, z) = y^2, w(x, y, z) = e^{-xz}$$

Define la función $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$.

Encuntra las parciales de h de dos formas: (1) calculando la regla de correspondencia de h y calculando las parciales directamente; (2) usando la regla de la cadena.

Solución. Primero encontramos la fórmula h haciendo la composición:

$$h(x, y, z) = (x^2 y)^2 + (y^2)^2 - 2(e^{-xz})^2 = x^4 y^2 + y^4 - 2e^{-2xz}$$

Parcial con respecto a x

De manera directa:

$$\partial_x h \quad = \quad 4x^3 y^2 + 4ze^{-2xz}$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\
&= 2u(2xy) + 2v(0) - 4w(-ze^{-xz}) \\
&= 2(x^2 y)(2xy) - 4(e^{-xz})(-ze^{-xz}) \\
&= 4x^3 y^2 + 4ze^{-2xz}
\end{aligned}$$

Parcial con respecto a y
De manera directa:

$$\partial_y h \;=\; 2x^4 y + 4y^3$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} & \\ &= 2u(x^2) + 2v(2y) - 4w(0) \\ &= 2(x^2 y)(x^2) + 2(y^2)(2y) \\ &= 2x^4 y + 4y^3\end{aligned}$$

Parcial con respecto a z
De manera directa:

$$\partial_z h = 4xe^{-2xz}$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} & \\ &= 2u(0) + 2v(0) - 4w((-x)e^{-xz}) \\ &= 4(e^{-xz})(xe^{-xz}) \\ &= 4xe^{-2xz}\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3 (Segundo caso de la regla de la cadena, en dimensión general)**.** *Sea $U \neq \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en U.*

Sea $V \neq \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $G : V \to \mathbb{R}^n$ una función clase C^1 en V. Escribamos las funciones coordenadas de G como

$$G(q) = (g_1(q), \ldots, g_n(q))$$

donde a la variable independiente la denotamos $q = (q_1, \ldots, q_m) \in V$.

Supongamos que $G(V) \subset U$, para que $f \circ G$ esté bien definida.

Entonces $f \circ G$ es de clase C^1 en V y para toda $j = 1, \ldots, m$:

$$\partial_{q_j}(f \circ G) = \langle \nabla f, (\partial_{q_j} g_1, \cdots, \partial_{q_j} g_n) \rangle$$

o si usamos la notación de Leibnitz:

$$\frac{\partial f}{\partial q_j}(g_1(q_1, \ldots, q_m), \ldots, g_n(q_1, \ldots, q_m)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_i}\frac{\partial g_i}{\partial q_j}$$

donde abusamos la notación y a las variables independientes de f las denotamos $f(g_1, \ldots, g_n)$

Ejemplo 4. Tomar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $f(g_1, \ldots, g_n) = \sum_{k=1}^n g_k^3$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, la coordenada g_i depende de las coordenadas $q = (q_1, \ldots, q_n)$ de la siguiente forma:

$$g_i(q_!, \ldots, q_n) = q_i q_{i+1}$$

donde hacemos la convención de que $q_{n+1} = q_1$.

Si $h = f(g_1(q_1, \ldots, q_n), \ldots, g_n(q_1, \ldots, q_n))$ encuentra $\partial_{q_j} h$.

Primero calculamos $\frac{\partial f}{\partial g_s}$:

$$\frac{\partial f}{\partial g_i} = \partial_{g_i}\left(\sum_{k=1}^n g_k^3\right) = 3g_i^2.$$

Ahora calculamos $\frac{\partial g_i}{\partial q_j}$:

$$\frac{\partial g_i}{\partial q_j} = \partial_{q_j}(g_i) = \partial_{q_j}(q_i q_{i+1}) \begin{cases} 0 & j \neq i, i+1 \\ q_{i+1} & j = i \\ q_i & j = i+1 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \partial_{q_j} h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_i}\frac{\partial g_i}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^n 3g_i^2 \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \\ &= 3(g_{j-1}^2)(q_i) + 3(g_j^2)(q_{i+1}) \\ &= 3(q_{j-1}q_j)^2(q_j) + 3(q_j q_{j+1})^2(q_{j+1}) \\ &= 3q_{j-1}^2 q_j^3 + 3q_j^2 q_{j+1}^3 \end{aligned}$$