Preliminares para el Teorema de la Función Inversa

Proposición 1. *Sea* $g : B_r(\mathbf{0}) \subseteq R^n \to R^n$ *clase* C^1 *tal que*

1. $g(0) = 0$
2. *existe* $L : R^n \to R^n$ *lineal, biyectiva tal que*

$$\|g(w) - g(v) - L(v - w)\| \leq \frac{1}{2m}\|v - w\|$$

para todo $v, w \in B_r(\mathbf{0})$*, donde* $m = \|L^{-1}\|$.

Entonces, para todo $\mathbf{q} \in B_{r/2m}(\mathbf{0})$ *existe* $\mathbf{p} \in B_r(\mathbf{0})$ *tal que* $g(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$.

Proof. Vamos a definir $p_0 = 0$ y $q_0 = q$.

Por recursión vamos a definir

$B_r(\mathbf{0})$	$B_{1/2m}(\mathbf{0})$
$p_1 := L^{-1}(q_0) + p_0$	$q_1 := q_0 + g(p_0) - g(p_1)$
$p_2 := L^{-1}(q_1) + p_1$	$q_2 := q_1 + g(p_1) - g(p_2)$
$\vdots$	$\vdots$
$p_n := L^{-1}(q_{n-1}) + p_{n-1}$	$q_n = q_{n-1} + g(p_{n-1}) - g(p_n)$
$p_{n+1} = L^{-1}(q_n) + p_n$	$q_{n+1} = q_n + g(p_n) - g(p_{n+1})$

Para que las sucesiones estén bien definidas debemos de probar que $p_n \in B_r(\mathbf{0})$ y $q_n \in B_{1/2m}(\mathbf{0})$. Para esto se va a probar

1. $\|p_k - p_{k-1}\| \leq \frac{m}{2^{k-1}}\|\|q\|$;
2. $\|q_k\| \leq \frac{1}{2^k}\|q\|$

Lo anterior se prueba por inducción.

Caso $k = 1$.

Para el primero debemos de probar $\|p_1 - p_0\| \leq m\|q\|$. Pero

$$\|p_1 - p_0\| = \|p_1\| = \|L^{-1}(q_0) + p_0\| = \|L^{-1}(q)\| \leq m\|q\|.$$

Para el segundo tenemos, por la hipótesis

$$\begin{aligned}
\|q_1\| &= \|q_0 + g(p_0) - g(p_1)\| \\
&= \|L(p_1 - p_0) + g(p_0) - g(p_1)\| \\
&\leq \frac{1}{2m}\|p_1 - p_0\| \\
&= \frac{1}{2m}\|p_1\| \\
&\leq \frac{m\|q\|}{2m} \\
&= \frac{\|q\|}{2}
\end{aligned}$$

Caso $k+1$. Suponemos para k y probamos para $k+1$.
Para la primer parte

$$\|p_{k+1}-p_k\| = \|L^{-1}(q_k)\| \leq m\|q_k\| \leq m\frac{\|q\|}{2^k}$$

Para la segunda parte

$$\begin{aligned}
\|q_{k+1}\| &= \|q_k + g(p_k) - g(p_{k+1})\| \\
&= \|L^{-1}(p_{k+1}-p_k) + g(p_k - g(p_{k+1}))\| \\
&\leq \frac{1}{2m}\|p_{k+1}-p_k\| \\
&\leq \frac{1}{2m}\frac{m\|q\|}{2^k} = \frac{\|q\|}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

Esto acaba la inducción.
La condición sobre las q_k implica que para toda k, $q_k \in B_{1/2m}(\mathbf{0})$.
De la condición para las p_k se tiene que

$$\begin{aligned}
\|p_k\| &= \|p_k - p_0\| \leq \|p_k - p_{k-1}\| + \|p_{k-1}-p_{k-2}\| + \cdots + \|p_1 - p_0\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1}\frac{m\|q\|}{2^j} \\
&< m\|q\|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j} = 2m\|q\| < 2m(\frac{r}{2m}) = r
\end{aligned}$$

Como $p_k \in Br(\mathbf{0})$, para toda k, por Bolzano-Weirestrass exsite una sunsucesión $(p_{k_n})_{n\geq 1}$ y $p \in R^n$ tal que $\lim_n p_{k_n} = p$. Notar que $\|p_k\| \leq 2m\|q\|$ al tomar límite se tiene $\|p\| \leq 2m\|q\| < r$, por lo que $p \in B_r(\mathbf{0})$.
También de la relaciones es claro que $\lim_n q_n = 0$.
Ahora, si sumamos el lado derecho de la columnas tenemos que

$$q_n = q_0 - g(p_n)$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ se concluye que $0 = q - g(p)$.

$\square$

Teorema 1 (Solubilidad local)**.** *Sea $F : U \subseteq R^n \to R^n$, clase C^1 en U y $\mathbf{p}_0 \in U$ tal que $D_{\mathbf{p}_0}F$ sea invertible. Existen $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tal que:*
para todo $q \in B_\beta(F(\mathbf{p}_0))$ existe $p \in B_\alpha(\mathbf{p_0})$ tal que $F(p) = q$.

Proof. Sea $L = D_{\mathbf{p}_0}F$ y $m := \|L^{-1}\|$. Por una proposición anterior, para $\varepsilon = \frac{1}{2m}$ existe $\alpha > 0$ tal que, para $v, w \in B_\alpha(\mathbf{0})$

$$\|F(p_0+v) - F(p_0+w) - D_{p_0}F(v-w)\| \leq \frac{1}{2m}\|v-w\|$$

Definimos $g : B_\alpha(\mathbf{0}) \to R^n$ por $g(v) = F(p_0+v) - F(p_0)$.
Entonces

1. g es de clase C^1
2. $g(0) = 0$
3. $\|g(v) - g(w) - L(v - w)\| \leq \frac{1}{2m}\|v - w\|$

Para $w = q - F(p_0) \in B_{1/2m}(\mathbf{0})$, exsite $v \in B_\alpha(0)$ tal que $g(v) = w$, es decir $F(p_0 + v) - F(p_0) = q - F(p_0)$ por lo que $F(p_0 + v) = q$. Se toma $p = p_0 + v$.

□

Teorema 2 (Teorema del mapeo abierto)**.** *Sea $F : U \subseteq R^n \to R^n$ tal que D_pF es invertible para todo $p \in U$. Entonces $F(U) \subseteq R^n$ es abierto en R^n.*

Proof. Sea $F(p_0) \in F(U)$. Por el teorema de solubilidad local, existe $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tal que, para todo $q \in B_\beta(F(p_0))$ existe $p \in B_\alpha(p_0)$ tal que $F(p) = q$. Esto quiere decir que $B_\beta(F(p_0)) \subseteq F(U)$.

□