T16

1. Mostrar que $xy+z+3xz^5 = 4$ es soluble para z como función de x, y cerca de $(1, 0, 1)$. Además:

   (a) calcular $\partial_x z(1, 0)$ y $\partial_y z(1, 0)$.

   (b) usando una aproximación lineal, estimar el valor de z cuando $x = 1.1$ y $y = 0.5$.

2. Considera la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$2y^2z^2 - 2x = 0$$

   (a) Encuentra dos simetrias de la superficie.

   (b) Usar el teorema de la función implícita para verificar que, para cualquier punto en la curva, podemos despejar x en terminos de y y z y usando también el teorema de la función implícita calcula $\partial_y x$ y $\partial_z x$

   (c) de manera directa despeja x y usa este despeja para calcular $\partial_y x$ y $\partial_z x$.

   (d) Usando el teorema de la función implícita, prueba que cerca de los punto $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$ podemos despejar a y, en términos de las otras dos variables. Además calcula $\partial_x y(1, 1)$, $\partial_z y(1, 1)$. Nota: las parciales dependen si estás en el punto $(1, 1, 1)$ o $(1, -1, 1)$.

   (e) Trata de despejar de manera directa y en $2y^2z^2 - 2x = 0$ para encontrar una fórmula para y cerca de $(1, 1, 1)$ y para y cerca de $(1, -1, 1)$.

3. Analiza la solubilidad del sistema

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y + z^2 + u + v^2 & = & 0 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 & = & 0 \\ x + z + w + u^2 + 2 & = & 0 \end{array}$$

   para u, v y w en términos de x, y y z cerca de $x = y = z = 0$, $u = v = 0$ y $w = -2$.

4. Investiga si el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcl} u(x, y, z) & = & x + yxz \\ v(z, y, z) & = & y + xy \\ w(x, y, z) & = & z + 2x + 3z^2 \end{array}$$

   puede resolverse para x, y, z (despejar x, y y z) en términos de u, v y w, cerca del punto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

5. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

En este caso recuerda que $D_0 f$ es simplemente $f'(0)$ y que la condición de que $D_0 f$ sea inyectiva simplemente se traduce a $f'(0) \neq 0$.

Prueba que $f'(0)$ existe, es distinta de cero, pero sin embargo, f no es invertible cerca de $x = 0$.

¿Contradice esto el teorema de la función inversa?