# Teo del Valor Medio, para derivadas

**Teorema 1** (Teorema del Valor Medio)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$ *y diferenciable en* $(a, b)$*. Bajo estas condiciones, existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

*o equivalentemente*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

*Por comodidad, vamos a denotar a éste teorema como T.V.M.*

Para la demostración vamos a seguie el esquema:

$$\text{Teo. máx/mín.} \Rightarrow \text{Teo. de Fermat} \Rightarrow \text{Teo. de Rolle} \Rightarrow \text{T.V.M.}$$

donde el primer teorema lo damos por dado, es decir, no vamos a dar demostración de éste.

## Teorema máx./mín.

**Teorema 2** (Máx/mín. de funciones continuas)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, una función continua en todo punto de* $[a, b]$*. Entonces* $f$ *alcanza su máximo y mínimo absolutos en* $[a, b]$*. Es decir, existen al menos dos puntos* $x_*, x^* \in [a, b]$ *tales que, para toda* $x \in [a, b]$

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$$

Este teorema lo damos por dado. No daremos demostración.

## Teoremas de Fermat y Rolle

En ésta sección veremos la pruebas del Teorema de Fermat y el de Rolle, pero antes una defınción.

**Definición 1.** *Sea* $D$ *un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$ *y sea* $f : D \to \mathbb{R}$ *una función.*

1. *Decimos que* $f$ *tiene un máximo relativo en el punto* $x^* \in D$ *si existe* $I \subset D$*, un intervalo abierto centrado en* $x^*$ *tal que*

$$f(x) \leq f(x^*), \quad \textit{para todo } x \in I$$

2. *Decimos que* $f$ *tiene un mínimo relativo en el punto* $x_* \in D$ *si existe* $I \subset D$*, un intervalo abierto centrado* $x_*$ *tal que*

$$f(x_*) \leq f(x), \quad \textit{para todo } x \in I$$

3. *Decimos que* $f$ *tiene un extremo local en* $x_0$ *si* $f$ *tiene un máximo o mínimo local en* $x_0$*.*

**Teorema 3** (Teo. de Fermat para mín/máx locales)**.** *Sea $D$ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$.*

*Supon que $f$ tienen un extremo local en $x_0 \in D$.*

*Demuestra que si $f$ es diferenciable en $x_0$ entonces $f'(x_0) = 0$.*

La demostración se hace siguiendo los siguientes pasos.

(i) Supón que $f$ tiene un máximo local en $x_0$ y sea $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ una vecindad de $x_0$ tal que

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \text{para todo } x \in I$$

Demuestra:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{para } x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

y

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{para } x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

(ii) Tomando límite cuando $x \to x_0$ en el cociente diferencial demuestra $f'(x_0) = 0$.

**Teorema 4** (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función tal que*

1. *$f$ es continua en $[a, b]$;*
2. *$f$ es diferenciable en $(a, b)$.*

*Si $f(a) = f(b)$ entonces existe almenos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

La demostración se hace mediante los siguientes pasos.

(i) Sea $x_*$ y $x^*$ puntos en $[a, b]$ donde $f$ alcanza su mínimo y máximo, respectivamente (aquí es donde se usa el Teorema máx/mín.).

(ii) Caso 1: $x_*$ o $x^*$ están en el intervalo abierto $(a, b)$. Usa el Teorema de Fermat. Nota que en este caso la $c$ del teorema de Rolle es $c = x_*$ o $c = x^*$.

(iii) Caso 2: $x_*$ y $x_*$ no están en el intervalo abierto. En este caso prueba que $f$ es constante. Nota que en este caso $c$ puede ser cualquier punto en $[a, b]$.

Para enterder el Teorema de Rolle, haz un diujo de éste.

## Demostración del Teorema del Valor Medio

Sugerencia: considera la función $L(x) = m(x - a) + f(a)$ donde $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Aplica el Teorema de Rolle a la función $f(x) - L(x)$.