T12

1. Considera las funciones $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$F(x, y, z) = (x^2+y+z, 2x+y+z^2), \quad G(u, v, w) = (2uv^2w^2, w^2 \operatorname{sen}(v), u^2e^v)$$

   (a) Encuentra la matriz de derivadas parciales $D_{(x,y,z)}F$ y $D_{(u,v,w)}G$.

   (b) Define $H = F \circ G$. Usa la regla de la cadena para calcular la matriz derivada parciales $D_{(u,0,w)}H$.

2. Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies dadas en los puntos indicados.

   (a) $x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$ en $(1, 2, 1/3)$,

   (b) $y^2 - x^2 = 3$ en $(1, 2, 8)$,

   (c) $xyz = 1$ en $(1, 1, 1)$.

3. Recuerda que, para una superficie de nivel $S \subset \mathbb{R}^3$, de la función $g(x, y, z)$, la ecuación del plano tangente es

$$\langle \nabla_{(x_0,y_0,z_0)} g, (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\rangle = 0$$

   donde $(x_0, y_0 z_0)$ es un punto en la superficie S.

   Demuestra que, como caso especial, la fórmula del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y)$, se puede obtener de la ecuación anterior si se considera a la gráfica como una superficie de nivel de $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

4. Considera la función $f(x, y) = -(1 - x^2 - y^2)^{1/2}$, definida para los puntos (x, y) con $x^2 + y^2 < 1$. Prueba que el plano tangente a la gráfica de f, en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

5. Usa la regla de la cadena para probar que, si $g : U \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en U, con U un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\nabla_p(1/g) = -\frac{1}{g(p)^2}\nabla_p g$$

   donde suponemos que $g(p) \neq 0$, para toda $p \in U$.

6. Sean $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^m$, con funciones coordenadas $G(q) = (g_1(q), \dots, g_n(q))$ y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^n$ y sea $h = f \circ G$. Usa la regla de la cadena para demostrar que el gradiente de h es una combinación lineal de los gradientes de las g_k, en específico:

$$\nabla_{q_0} h = \sum_{k=1}^{n} \partial_{p_k} f(G(q_0))\nabla_{q_0} g_k$$

   nota que $\partial_{p_k} f(g(q_0))$ es escalar y $\nabla_{q_0} g_k$ es vector.

7. Encuentra el conjunto de puntos (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$, para los cuales las dos esferas: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 1$ y $x^2+y^2+z^2 = 1$, se intersectan ortogonalmente.

   Nota: Dos superficies se intersectan ortogonalmente si, para todo punto en su intersección, los planos tangentes son ortogonales.

   Sugerencia: ve las esferas como superficies de nivel y utiliza gradientes.

8. (a) Considera la función $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $I(x, y, z) = (x, y, z)$. Demuestra que

$$D_{(x,y,z)}I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) Encuentra todas las funciones diferenciables en $\mathbb{R}^3$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, para las cuales

$$D_{(x,y,z)}F = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

   (c) Sean $p, q, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Encuentra todas la funciones diferenciables en $\mathbb{R}^3$, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, para las cuales

$$D_{(x,y,z)}G = \begin{bmatrix} p(x) & 0 & 0 \\ 0 & q(y) & 0 \\ 0 & 0 & r(z) \end{bmatrix}$$