T7

1. Considera la función $f(x,y) = xy$. Usando solamente la definición, prueba que para todo punto (x_0, y_0), f es diferenciable en (x_0, y_0)

   Hint: para la parte de la definición que involucra límite, primero prueba

   $$f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0) = (x-x_0)(y-y_0)$$

2. Para cada una de las siguientes funciones calcula el gradiente.

   (a) $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

   (b) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

   (c) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

3. Para cada una de las siguientes superficies encuentra la ecuación del plano tangente en el punto indicado.

   (a) $z = x^2 + y^3$ en $(1,2,9)$.

   (b) $z = e^{x^2+xy}$ en $(0,1,1)$.

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), 1/\sqrt{3})$.

   (d) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en $(1,2,-2)$.

4. Usando la notación $p = (x,y)$ y $p_0 = (x_0,y_0)$, prueba que el límite de la definición de derivada es equivalente a

   $$\lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - T(p-p_0)}{\|p-p_0\|} = 0.$$

   donde T es la función lineal asociada al vector $(\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0))$.

   Definición 1. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : U \to \mathbb{R}^m$ una función. Escribe las funciones coordenadas de F como $F(p) = (f_1(p), \ldots, f_m(p))$, donde cada f_i es una función que toma valores en $\mathbb{R}$. Supon que todas las derivadas parciales de todas la f_i existen. La matriz de derivadas parciales es la matriz de $m \times n$ cuya entrada (i,j) es $\partial_{p_j} f_i$.*

5. Para cada una de las siguientes funciones encuentra la matriz de derivadas parciales

   (a) $F(x,y) = (xe^y, ye^x)$

   (b) $F(x,y) = (xy\cos(x), xy\operatorname{sen}(y))$

   (c) $F(x,y) = (xy + x^2, x^2 + y^2, x^3 + xy + y^3)$

   (d) $F(x,y,z) = (xyz, x^2y^2z^2)$

6. Supongamos que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función lineal. Usando la definición demuestra que, para todo $p_0 \in \mathbb{R}^n$, F es diferenciable en p_0 y $D_{p_0}F = F$.

7. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $p_0 \in U$ y $f, g : U \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables en p_0. Demuestra que

$$\nabla_{p_0}(fg) = f(p_0)\nabla_{p_0} g + g(p_0)\nabla_{p_0} f$$

8. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $p_0 \in U$ y $F : U \to \mathbb{R}^2$ una función. Escribamos las funciones coordenadas

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Supon que las derivadas parciales de f_1 y f_2 existen en (x_0, y_0).

(a) Demuestra que, para $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \frac{|f_i(x,y) - f_i(x_0,y_0) - (\partial_x f_i(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f_i(x_0,y_0))(y-y_0)|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\ \leq\; & \frac{\|F(x,y) - F(x_0,y_0) - T(x-x_0, y-y_0)\|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \end{aligned}$$

donde T es la matriz de darivadas parciales evaluadas en (x_0, y_0).

Hint: primero prueba que, para todo vector (a, b)

$$|a| \leq \|(a, b)\|, \quad |b| \leq \|(a, b)\|$$

(b) Usando el inciso anterior demuestra que, si suponemos que F es diferenciable en (x_0, y_0), entonces f_1 y f_2 son diferenciables en (x_0, y_0).

(c) Demuestra que

$$\begin{aligned} & \frac{\|F(x,y) - F(x_0,y_0) - T(x-x_0, y-y_0)\|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\ \leq\; & \frac{|f_1(x,y) - f_1(x_0,y_0) - (\partial_x f_1(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f_1(x_0,y_0))(y-y_0)|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\ +\; & \frac{|f_2(x,y) - f_2(x_0,y_0) - (\partial_x f_2(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f_2(x_0,y_0))(y-y_0)|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \end{aligned}$$

Hint: primero prueba que, para todo vector (a, b)

$$\|(a, b)\| \leq |a| + |b|.$$

(d) Usando el inciso anterior prueba que, si suponemos que f_1 y f_2 son diferenciables en p_0, entonces F también es diferenciable en p_0.

Nota: este ejercicio prueba que una función, con valores vectoriales, es diferenciable si y sólo si, todas sus funciones coordenadas son diferenciables.