T15

1. Encuentra el mínimo de $f(x, y) = xy$ sujeto a la restricción $x + y = 1$. ¿Con las mismas condiciones, existe el máximo ? Explica.

2. Encuentra los máximos y mínimos de la función $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3. Encuentra las distancias máximas y mínimas desde el origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

   Sugerencia: es más sencillo minimizar la distancias al cuadrado.

4. Encuentra el mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$ con la restricción $x + y + z = 0$ y $x - z = 1$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f(t) = mt + c$, donde m y c son constantes. Demuestra que el máximo y mínimo de f, restringida al intervalo $[a, b]$ se alcanzan en los extremos del intervalo.

6. Para las siguientes funciones armónicas, encuentra el máximo y mínimo absolutos sobre la región dada.

   (a) $f(x, y) = \log(x^2+y^2)$, sobre el anillo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

   (b) $f(x, y) = e^y \cos(x)$, sobre el triángulo (relleno) con vértices $(0, \log(5))$, $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$.

   (c) $f(x, y, z) = x^2-y^2+z$, sobre la esfera $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

7. Un canal de riego tiene lados y fondo de concreto con sección transversal trapezoidal de área $A = y(x+y\tan(\theta))$ y perímetro húmedo $P = x+\frac{2y}{\cos(\theta)}$, donde x es el ancho del fondo, y la profundidad del agua y θ la inclinación lateral, medida a partir de la vertical. El mejor diseño para una inclinación fija θ se halla resolviendo $P =$ mínimo sujeto a la condición $A =$ constante. Mostrar que $y^2 = \frac{A\cos(\theta)}{2-\cos(\theta)}$.

8. Considera la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, en el disco unitario $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Usa multiplicadores de Lagrange para maximizar f en el circulo unitario $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Usa lo anterior para encontrar los máximos y mínimos absolutos de f en D.

9. Minimiza la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ con la restricción $x + y \geq 4$.

10. Maximiza la función $f(x, y, z) = 2x + 3y + 5z$ sujeto a las restricciones $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ y $x + y + z \leq 1$.

11. (a) Encuentra máximo de la función $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \cdots x_n)^2$, sujeta a la restricción $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

(b) Usando el inciso anterior demuestra la desigualdad aritmético geométrica, es decir, para escalares mayores o iguales a cero, $a_1, \ldots, a_n$, se cumple

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Sugerencia: considera $x_i = \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{a_1 + \cdots + a_n}}$, $i = 1, \ldots, n$.

12. (a) Sean $p > 1, q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Demuestra que el mínimo de la función

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

sujeta a la restricción $xy = 1$ es 1.

(b) Usando el inciso anterior, prueba que si a y b son reales mayores o iguales a cero, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

(c) Sean $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, numeros reales mayores o iguales a cero, demuestra la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q \right)^{1/q}$$

Sugerencia: sean $A = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p \right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q \right)^{1/q}$, aplica la desigualdad del inciso anterior a $a = a_j/A$, $b = b_j/B$.