T 3

1. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$, dos vectores distintos de cero y linealmente independientes.

   (a) Demuestra que el conjunto $\{u, v, u \times v\}$ es linealmente independiente.

   (b) Es un hecho, no lo demuestres, que un conjunto linealmente independiente de tres vectores genera $\mathbb{R}^3$. Usando lo anterior muestra que, si p es perpendicular a $u \times v$, entonces existen $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $p = su + tv$ (es decir, p está en el plano generado por u y v).

2. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ dos vectores unitarios y perpendiculares y sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la proyección ortogonal al plano generado por u y v, es decir

$$P(p) = \langle u, p\rangle u + \langle v, p\rangle v.$$

   (a) Toma $w = u \times v$ y denota P_w la proyección ortogonal a la recta generada por w. Demuestra que para todo punto $p \in \mathbb{R}^3$, $P(p) = p - P_w(p)$.
   Sugerencia: empieza probando que $p - P_w(p)$ es ortogonal a w por lo tanto, usando el ejercicio 1, $p - P_w(p)$ está en el plano generado por u y v.

   (b) Concluye que, para todo $p \in \mathbb{R}^3$, se cumple

$$p = \langle p, u\rangle u + \langle p, v\rangle v + \langle p, w\rangle w.$$

3. Para las siguientes funciones, describe los conjuntos de nivel para los valores dados.

   (a) $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$, $c = -2, 0, 2$.

   (b) $f(x, y) = 5x + 7y$, $c = -5, 0, 7$.

   (c) $f(x, y) = (2x - y)^2$, $c = -1, 0, 2$.

   (d) $f(x, y) = y + 3e^x$, $c = -2, 0, 2$.

4. Para las siguientes funciones, describe los conjuntos de nivel para los valores dados.

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $c = -1, 0, 1$.

   (b) $f(x, y, z) = xyz$, $c = -4, 0, 4$.

   (c) $f(x, y, z) = e^{x^2} e^{y^3} e^{z^2}$, $c = -5, 0, 5$.

   (d) $f(x, y, z) = 2x - y + 3z$, $c = -1, 0, 1$.

5. Usa coordenadas polares para describir las curvas de nivel de la función dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

6. Construye una función $f(x, y)$, tal que el conjunto de nivel para $c = 0$ consiste en una cantidad infinita de partes.

7. Para cada una de las siguientes trayectorias, da un bosquejo de su traza (pueden usar matlab u otro software).

   (a) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.