T6

1. Para cada una de las siguientes funciones encuentra la derivada parcial en los puntos indicados.

   (a) $f(x, y) = xy + x^2$ en $(1, 0)$ y en $(0, 1)$.

   (b) $f(x, y) = \log(\sqrt{1 + x^2y^2})$ en $(1, 0)$ y en $(1, 1)$.

   (c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2+y^2}$ en $(1, 1)$ y en $(2, 2)$.

   (d) $f(x, y) = xy\cos(2x + y)$ en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y en $(0, \frac{\pi}{2})$.

2. Para cada una de las siguientes funciones $f(x, y)$, encuentra el dominio de definición de las funciones $\partial_x f(x, y)$ y $\partial_y f(x, y)$.

   (a) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$.

   (b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   (c) $f(x, y) = y\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

   (d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

3. Sea $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional.} \\ 0, & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

   Define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^2 D(x)$.

   (a) Demuestra que, para todo puntos (x_0, y_0), $\partial_y f(x_0, y_0)$ siempre existe y calcula su valor.

   (b) Además, prueba que si $y_0 \neq 0$, $\partial_x f(x_0, y_0)$ no existe y que para todo x_0, $\partial_y f(x_0, 0) = 0$.

4. Considera la función $f(x, y) = |x + y| - |x - y|$.

   (a) Demuestra que, para todos $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$\partial_x f(x_0, 0) = 0, \quad \partial_y f(0, y_0) = 0.$$

   (b) Demuestra que $\partial_x f(1, 1)$ no existe.

5. Para cada una de las siguientes funciones calcula $\partial_x \left(\int_0^x f(s, y)ds\right)$. ¿Encuentras algún patron?:

   (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$,

   (b) $f(x, y) = e^{xy}$,

   (c) $f(x, y) = \cos(x + 2y)$.

6. Para cada una de las siguientes funciones calcula, $\int_0^x(\partial_s f(s,y))ds$. ¿Encuentras algún patron?

   (a) $f(x,y) = x^3y^2 + xy + x^2y$

   (b) $f(x,y) = e^{x^2+y}$

   (c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$

7. Este ejercicio generaliza al ejercicio 6. Usa el Teorema Fundamental para probar que $\int_0^x(\partial_x f(x,y))dx = f(x,y) - f(0,y)$.

8. Considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Calcula $\partial_x f(0,0)$ y $\partial_y f(0,0)$.

   (b) Considera la gŕfica 2-dimensional que se obtiene al cortar la gráfica de f con el plano $y = 0$. Para ésta gráfica encuentra los puntos (x,z), para los cuales la recta tangente en dicho punto es horizontal.

9. Para cada una de las siguientes funciones encuentra la derivada parcial con respecto a la variable indicada.

   (a) $f(p) = \sum_{i=1}^n p_i^2$. Calcular $\partial_{p_j} f(p)$.

   (b) $f(x) = \langle x, y\rangle$, donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ es un vector fijo. Calcular $\partial_{x_j} f(x)$. ¿La notación $\partial_{y_j} f(x)$ tiene sentido en este ejemplo?

   (c) $f(z) = \left(\sum_{i=1}^n \log(z_i^2+1)\right)^2$, donde $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Calcular $\partial_{z_j} f(z)$.

   (d) $f(x,y,z) = 100x^{1/2}y^{1/4}z^{1/5}$. Calcular $\partial_x f(x,y,z)$, $\partial_y f(x,y,z)$ y $\partial_z f(x,y,z)$.