T9

1. Utiliza el Teorema de Valor Medio para probar las siguientes desigualdades:
   (a) $|\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b)| \leq |a - b|$,
   (b) $|\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(x)| \leq |x|$.

2. Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, continuas en $[a, \infty)$ y diferenciables en (a, ∞) con $f(a) \leq g(a)$.
   (a) Si $f'(x) < g'(x)$, para todo $x > a$, usa el T.V.M. para demostrar que $f(x) < g(x)$, para toda $x > a$.
   (b) Usar el inciso anterior para probar que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$ para todo $x > 0$.

3. Sea $f : B_r(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo punto (x, y), con $(x, y) \in B_r(x_0, y_0)$. Demuestra que, para todos x_1, x_2 con $|x_1 - x_0| < r$, $|x_2 - x_0| < r$, se tiene que existe c entre x_1 y x_2 tal que
$$|f(x_1, y_0) - f(x_2, y_0)| = |\partial_x f(c, y_0)||x_1 - x_2|.$$

4. Para las siguientes funciones, usa el criterio de las derivadas parciales para encontrar un dominio para el cual la función sea diferencible en todo punto del dominio.
   (a) $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   (b) $f(x, y) = \log(e^{\sqrt[4]{(x-1)^2+(y-2)^2}} + e^{\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   (c) $f(x, y) = \log(1 + \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Usa el teorema de la igualdad de derivadas parciales mixtas para dos variables para probar que si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^3, entonces
$$\partial^3_{xyz} f = \partial^3_{yzx} f$$

6. Para cada una de las siguientes funciones calcula $\partial_x \partial_y f(x, y)$ y $\partial_y \partial_x f(x, y)$. ¿Qué notas ?
   (a) $f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^3$
   (b) $f(x, y) = \log(x^2 + y^4)$
   (c) $f(x, y) = e^{3x+2xy+y^2}$

7. Considera la función $g(x, t) = 2 + e^{-t} \operatorname{sen}(x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Demuestra que g satiface la ecuación del calor:
$$\partial_t g = \partial^2_x g.$$
   Aquí $g(x, t)$, representa la temperatura de una varilla de metal en la posición x al tiempo t.

(b) Esbozar la gráfica de g, para $t \geq 0$.

(c) ¿Qué sucede con $g(x,t)$ cuando $t \to \infty$? Interpreta éste límite en términos del comportamiento del calor en la varilla.

Definición 1. *Una función $f : U \to \mathbb{R}$, definida en un abierto, se llama armónica en U si las derivadas parciales de segundo orden $\partial_x^2 f$ y $\partial_y^2 f$, existen en todo punto de U, son continuas en todo U y*

$$\partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) = 0$$

para todo $(x,y) \in U$.

8. Para las siguientes funciones, determina cuales son funciones armónicas.

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) $f(x,y) = e^y \cos(x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (c) $f(x,y) = e^y \operatorname{sen}(x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (d) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0.0)$;

   (e) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y - 3yx^3 + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

9. Demuestra que toda función lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica.

10. Considera la función $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son parámetros. Encuentra los valores de a, b y c para los cuales

    (a) $\partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) > 0$, para todo (x,y),

    (b) $\partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) = 0$, para todo (x,y),

    (c) $\partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) < 0$, para todo (x,y).

11. (Vogel) Este ejercicio da un ejemplo donde las parciales mixtas no son iguales.

    Considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    Prueba

    (a)
$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2+y^2} - \frac{2x(xy^3 - x^3y)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    (b)
$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy^2 - x^3}{x^2+y^2} - \frac{2y(xy^3 - x^3y)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    (c) $\partial_x \partial_y f(0,0) = -1$ y $\partial_y \partial_x f(0,0) = 1$