Derivadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$

Definición 1. *Sea U un abierto en $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$. Decimos que f es diferenciable en (x_0, y_0) si:*

1. *las parciales $\partial_x f(x_0, y_0)$ y $\partial_y f(x_0, y_0)$ existen*
2. *además*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

Escribimos $D_{(x_0,y_0)}f$ o $Df(x_0,y_0)$, para la matriz renglón

$$[\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0)]$$

y ésta se llama la derivada de f en (x_0, y_0).

Lo más importante que hay que notar es que ahora la derivada es un vector, NO un número.

Notas 1.

1. Cuando escribimos $D_{(x_0,y_0)}f$ es importante notar que podemos pensarla como una función lineal que al ser evaluada en un punto (x, y) da como resultado

$$(D_{(x_0,y_0)}f)(x,y) = (\partial_x f(x_0,y_0))x + (\partial_y f(x_0,y_0))y$$

2. También se pueden encontrar con la notación $Df(x_0, y_0)$, para indicar la defivada de f en el punto (x_0, y_0). Con esta notación, el evaluar la derivada en el punto (x, y) se denota como $Df(x_0, y_0)(x, y)$.
3. El cociente

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|}$$

se llama cociente diferencial.

4. Es equivalente pedir

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

o

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)|}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

(notar el valor absoluto en el numerador).

Ejemplo 1. Toda función constante es diferenciable con derivada el vector cero.

Solución. Sea f una función constante, digamos que $f(x, y) = c$, para todo (x, y). Entonces es claro que $\partial_x f = 0$ y $\partial_y f = 0$. Por lo que ambas parciales existen en todo punto (x_0, y_0).

Para probar que f es diferenciable hay que probar que el cociente diferencial se va a cero,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

Pero

$$\begin{aligned} & \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\ = & \frac{c - c - 0(x-x_0) - 0(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0\|)} \\ = & \frac{0}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función lineal. Demuestra que f es diferenciable en todo punto (x_0, y_0). Es más, demuestra que $D_{(x_0,y_0)} f = f$.

Solución. Fijemos (x_0, y_0). Debemos probar que f es diferenciable en (x_0, y_0).

Ya que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es lineal, sabemos que existen escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = ax + by.$$

Por lo tanto $\partial_x f(x_0, y_0) = a$ y $\partial_y f(x_0, y_0) = b$.

Para probar que f sea diferenciable debemos probar que el cociente diferencial se va a cero

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

pero

$$\begin{aligned} & \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\partial_x f(x_0,y_0))(x-x_0) - (\partial_y f(x_0,y_0))(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\ = & \frac{ax + by - ax_0 - by_0 - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\|(x-x_0, y-y_0)} \\ = & \frac{ax + by - ax_0 - by_0 - ax + ax_0 - by + by_0}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

Además

$$(D_{(x_0,y_0)}f)(x,y) = (\partial_x f(x_0,y_0))x + (\partial_y f(x_0,y_0))y = ax + by = f(x,y)$$

por lo que, si pensamos a $D_{(x_0,y_0)}f$ como una función, $D_{(x,0,y_0)}f = f$.

$\square$

Definición 2. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $p_0 \in U$ y $F : U \to \mathbb{R}^m$ una función. Escribimos las funciones coordenadas de F como $F(p) = (f_1(p), \ldots, f_m(p))$. Decimos que F es diferenciable en p_0 si:*

1. *todas las derivadas parciales $\partial_{p_j} f_i(p_0)$ existen.*

2. *además*
$$\lim_{p \to p_0} \frac{\|f(p) - f(p_0) - T(p - p_0)\|}{\|p - p_0\|} = 0$$
donde T es la función lineal asociada a la matriz de derivadas parciales, valuada en p_0.