Teorema de la función Inversa

Teorema 1. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U (también llamada un campo vectorial).*

Sea $\mathbf{p}_0 \in U$ y supongamos que la derivada de F en $\mathbf{p}_0$, denotada $D_{\mathbf{p}_0}F$, es una biyección de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ (es decir, inyectiva y supreyectiva).

Entonces existe W, una vecindad de $\mathbf{p}_0$, tal que $F(W)$ es una vecindad de $F(\mathbf{p}_0)$ donde se cunple:

1. *denotando $V := F(W)$, F es una biyección de W a V (es decir, inyectiva en W y suprayectiva a V);*
2. *$G : V \to W$, la función inversa de F, es continua en V;*
3. *además, G es de clase C^1 en V y si $\mathbf{q} \in V$ y $\mathbf{p} = G(\mathbf{q})$ entonces $D_{\mathbf{q}}G$ es la inversa de $D_{\mathbf{p}}F$.*

Notas

1. una vecindad de un punto $\mathbf{p}$ es simplemente un abierto que contiene a p.
2. recuerda que $D_{\mathbf{p}_0}F$ es una transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica, es la matrix de derivadas parciales $\partial_{p_i} f_j(\mathbf{p}_0)$, donde $F = (f_1, \dots f_n)$.
3. $D_{\mathbf{p}_0}F$ es inyectiva sii, vista como matriz, $\det(D_{\mathbf{p}_0}F) \neq 0$.
4. $D_{\mathbf{p}_0}F$ es suprayectiva sii su rango es n.
5. Existe un teorema de álgebra lineal que dice que, dada una matriz de $n \times n$, la transformación lineal (que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$) inducida por la matriz es inyectiva si y sólo si es suprayectiva. Por lo tanto, para aplicar el Teorema de la Función Inversa, es suficiente checar que $\det(D_{\mathbf{p}_0}F) \neq 0$.