Aproximación lineal

Nota 1. Todo punto p de la bola abierta $B_r(p_0)$ puede escribirse, de manera única, de la forma $p = p_0 + u$ donde $u \in B_r(0)$.

Así, para definir una función en $B_r(p_0)$ podemos definirla usando la expresión $p_0 + u$

La siguiente proposición es un ejercicio del Marsden.

Proposición 1. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $p_0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en p_0. Prueba que existe $B_r(0)$, y una función $E : B_r(0) \to \mathbb{R}$ tal que*

1. *para toda $u \in B_r(0)$, $f(p_0 + u) = f(p_0) + (D_{p_0} f)u + E(u)$.*
2. $\lim_{u\to 0} \frac{|E(u)|}{\|u\|} = 0$

Nota: a la función E se le puede pensar como el error entre $f(p_0 + u)$ y la aproximación $f(p_0) + (D_{p_0} f)u$.

Demostración. Como U es abierto y $p_0 \in U$, existe un radio $r > 0$, tal que $B_r(p_0) \subset U$. Esta es la bola abierta que tomamos.

La función E la definimos como:

$$E(u) = f(p_0 + u) - f(p_0) - (D_{p_0} f)u, \quad \text{para } u \in B_r(0)$$

Nota: en dos dimensiones tendríamos

$$E(u) = E(u_1, u_2) = f(x_0+u_1, y_0+u_2)-f(x_0, y_0)-\partial_x f(x_0, y_0)u_1-\partial_y f(x_0, y_0)u_2$$

De la definición de E, si despejamos $f(p_0 + u)$, obtenemos

$$f(p_0 + u) = f(p_0) + (D_{p_0} f)u + E(u)$$

que es precisamente el primer inciso.

Para el segundo inciso de la proposición notamos que, con el cambio de variable $p = p_0 + u$ (con lo que $u = p - p_0$)

$$\frac{E(u)}{\|u\|} = \frac{f(p) - f(p_0) - (D_{p_0} f)(p - p_0)}{\|p - p_0\|}$$

el cual es el cociente diferencial de f en p_0. Ya que estamos suponiendo que f es diferenciable en p_0, sabemos que éste cociente diferencial tiende a cero, cuando p tiende a p_0.

Finalmente, si $u = p - p_0$ tiende a cero entonces p tiende a p_0 y por lo tanto

$$\lim_{u\ \to 0} \frac{|E(u)|}{\|u\|} = \lim_{p\to p_0} \frac{|f(p) - f(p_0) - (D_{p_0} f)(p - p_0)|}{\|p - p_0\|} = 0.$$

$\square$

La siguiente proposición puede pensarse como el regreso de la proposición anterior.

Proposición 2. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $p_0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función.*

Supongamos que existe una bola abierta $B_r(0)$, una función $\tilde{E} : B_r(0) \to \mathbb{R}$ y una función lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfacen

(i) *para $u \in B_r(0)$, $f(p_0 + u) = f(p_0) + Tu + \tilde{E}(u)$*

(ii)

$$\lim_{u \to 0} \frac{|\tilde{E}(u)|}{\|u\|} = 0$$

Entonces f es diferenciable en p_0 y $D_{p_0} f = T$.

Demostración. Para simplificar la notación, vamos a hacer el caso $n = 2$. El caso general es similar. Así, tenemos $p_0 = (x_0, y_0)$. Además, como $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es lineal, existen escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $T(x, y) = ax + by$.

Para probar que f es diferenciable en (x_0, y_0) debemos probar

1. las parciales $\partial_x f(x_0, y_0)$ y $\partial_y f(x_0, y_0)$ existen.
2. el cociente diferencial tiende a cero, es decir

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{|f(x, y) - f(x_0, y_0) - (\partial_x f(x_0, y_0))(x - x_0) - (\partial_y f(x_0, y_0))(y - y_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$

Veamos que las parciales existen.

Tomando u de la forma $u = (s, 0)$ (con $s \neq 0$) tenemos, por la suposición (i)

$$f(x_0 + s, y_0) = f(x_0, y_0) + as + E(s, 0)$$

Pasando $f(x_0, y_0)$ del lado izquierdo y dividiendo entre s obtenemos

$$\frac{f(x_0 + s, y_0) - f(x_0, y_0)}{s} = a + \frac{\tilde{E}(s, 0)}{s} \tag{1}$$

Ahora, notamos que

$$\left| \frac{\tilde{E}(s, 0)}{s} \right| = \frac{|\tilde{E}(u)|}{\|u\|}$$

Si s tiende a cero, $u = (s, 0)$ tiende a cero, por lo que

$$\lim_{s \to 0} \left| \frac{\tilde{E}(s, 0)}{s} \right| = \lim_{u \to 0} \frac{|\tilde{E}(u)|}{\|u\|} = 0$$

donde en la última igualdad usamos la suposición (ii).

Finalmente, si en (1) tomamos el límite cuando $s \to 0$ concluimos

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s, y_0) - f(x_0, y_0)}{s} = a + \lim_{s \to 0} \frac{\tilde{E}(s)}{s} = a$$

De manera similar se puede probar que $\partial_y f(x_0, y_0)$ existe y es igual a b.

Note que además tenemos que, para todo punto (x, y)

$$T(x, y) = ax + by = \partial_x f(x_0, y_0)x + \partial_y f(x_0, y_0)y$$

Para terminar debemos probar que el cociente diferencial tiende a cero. El cociente diferencial es

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|}$$

Tomando el cambio $u = (x, y) - (x_0, y_0)$, y tomando (x, y) cercano a (x_0, y_0), para que u sea cercano a cero, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} \\ = \quad & \frac{f((x_0, y_0) + u) - f(x_0, y_0) - Tu}{\|u\|} \end{aligned}$$

nota que se uso $T(x, y) = \partial_x f(x_0, y_0)x + \partial_y f(x_0, y_0)y$ para obtener $\partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) = Tu$.

Ahora, por la suposición (i)

$$\frac{f(x_0, y_0) + u) - f(x_0, y_0) - Tu}{\|u\|} = \frac{\tilde{E}(u)}{\|u\|}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \quad & \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) - \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} \\ = \quad & \lim_{u\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + u) - f(x_0, y_0) - Tu}{\|u\|} \\ = \quad & \lim_{u\to 0} \frac{\tilde{E}(u)}{\|u\|} \\ = \quad & 0 \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó la suposición (ii).

Finalmente, ya que probamos que f es diferenciable en p_0, $D_{p_0} f$ existe y

$$(D_{p_0} f)(x, y) = \partial_x f(x_0, y_0) + \partial_y f(x_0, y_0)y = T(x, y)$$

por lo que $D_{p_0} f = T$. $\square$