Proposición (Regla del producto)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $g, h : U \to \mathbb{R}$ dos funciones. Sea $p_0 \in U$ un punto tal que tanto g como h son diferenciables en p_0. Entonces la función producto $f : U \to \mathbb{R}$, $f(p) = g(p)h(p)$ es diferenciable en p_0 y*

$$\nabla_{p_0} f = g(p_0)\nabla_{p_0} h + h(p_0)\nabla_{p_0} g$$

Demostración. Considera las aproximaciones lineales de g y h alrededor de p_0, es decir

$$g(p) = g(p_0) + \langle \nabla_{p_0} g, p - p_0 \rangle + E_1(p) \tag{1}$$

$$h(p) = h(p_0) + \langle \nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle + E_2(p) \tag{2}$$

donde los errores satisfacen con $\lim_{p \to p_0} \frac{|E_1(p)|}{\|p-p_0\|} = 0$ y $\lim_{p \to p_0} \frac{|E_2(p)|}{\|p-p_0\|} = 0$.

Multiplicando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene que:

$$\begin{aligned} f(p) &= f(p_0) + h(p_0)\langle \nabla_{p_0} g, p - p_0 \rangle + g(p_0)\langle \nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle \\ &+ \langle \nabla_{p_0} g, p - p_0 \rangle \langle \nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle \\ &+ E_1(p)(h(p_0) + \langle \nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle) \\ &+ E_2(p)(g(p_0) + \langle \nabla_{p_0} g, p - p_0 \rangle) \\ &+ E_1(p)E_2(p) \end{aligned}$$

Usando las propiedades del producto interior podemos reescribir la primera linea de la ecuación anterior para obtener

$$\begin{aligned} f(p) &= f(p_0) + \langle h(p_0)\nabla_{p_0} g + g(p_0)\nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle \\ &+ \langle \nabla_{p_0} g, p - p_0 \rangle \langle \nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle \\ &+ E_1(p)(h(p_0) + \langle \nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle) \\ &+ E_2(p)(g(p_0) + \langle \nabla_{p_0} g, p - p_0 \rangle) \\ &+ E_1(p)E_2(p) \end{aligned}$$

Si denotamos

$$\begin{aligned} \tilde{E}(p) &= \langle \nabla_{p_0} g, p - p_0 \rangle \langle \nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle \\ &+ E_1(p)(h(p_0) + \langle \nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle) \\ &+ E_2(p)(g(p_0) + \langle \nabla_{p_0} g, p - p_0 \rangle) \\ &+ E_1(p)E_2(p) \end{aligned}$$

podemos reescribir para llegar a:

$$f(p) = f(x_0, y_0) + \langle h(p_0)\nabla_{p_0} g + g(p_0)\nabla_{p_0} h, p - p_0 \rangle + \tilde{E}(p)$$

Usando la proposición 2 de la notas, para probar que f es diferenciable en p_0 es suficiente probar que $\lim_{p \to p_0} \frac{|\tilde{E}(p)|}{\|p-p_0\|} = 0$. Además, otra usando la proposición 2 también se concluye que el vector $h(p_0)\nabla_{p_0}g + g(p_0)\nabla_{p_0}h$ es el gradiente $\nabla_{p_0}f$.

Así, todo el esfuerzo ahora es para probar

$$\lim_{p\to p_0} \frac{|\tilde{E}(p)|}{\|p-p_0\|} = 0 \tag{3}$$

usando la información de que:

$$\lim_{p\to p_0} \frac{|E_1(p)|}{\|p-p_0\|} = 0, \quad \lim_{p\to p_0} \frac{|E_2(p)|}{\|p-p_0\|} = 0, \tag{4}$$

(la cual viene de las aproximaciones lineales de g y h y lo cual no hemos usado hasta ahora).

Usando la desiguladad del triángulo (para escalares) tenemos

$$\begin{aligned} |\tilde{E}(p)| &\leq |\langle \nabla_{p_0}g, p-p_0\rangle||\langle \nabla_{p_0}h, p-p_0\rangle| \\ &+ |E_1(p)||h(p_0) + \langle \nabla_{p_0}h, p-p_0\rangle| \\ &+ |E_2(p)||g(p_0) + \langle \nabla_{p_0}g, p-p_0\rangle| \\ &+ |E_1(p)||E_2(p)| \end{aligned}$$

Por lo tanto, gracias a la ley del sandwich para límites, es suficiente probar que los siguientes cuatro límites son cero:

$$\lim_{p\to p_0} \tfrac{|\langle \nabla_{p_0}g, p-p_0\rangle||\langle \nabla_{p_0}h, p-p_0\rangle|}{\|p-p_0\|} = 0 \tag{5}$$

$$\lim_{p\to p_0} \tfrac{|E_1(p)||h(p_0)+\langle \nabla_{p_0}h, p-p_0\rangle|}{\|p-p_0\|} = 0 \tag{6}$$

$$\lim_{p\to p_0} \tfrac{|E_2(p)||g(p_0)+\langle \nabla_{p_0}g, p-p_0\rangle|}{\|p-p_0\|} = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{p\to p_0} \tfrac{|E_1(p)||E_2(p)|}{\|p-p_0\|} = 0 \tag{8}$$

La validez de las ecuaciones (6),(7) y (8) se sigue directamente de usar los límites en (4), por ejemplo

$$\begin{aligned} \lim_{p\to p_0} \frac{|E_1(p)||h(p_0) + \langle \nabla_{p_0}h, p-p_0\rangle|}{\|p-p_0\|} &= \left(\lim_{p\to p_0} \frac{|E_1(p)|}{\|p-p_0\|}\right)\left(\lim_{p\to p_0} |h(p_0) + \langle \nabla_{p_0}h, p-p_0\rangle|\right) \\ &= 0(|h(p_0)+0|) = 0 \end{aligned}$$

Para probar (5) usamos la desigualdad de Cacyhy-Schwartz (dos veces) para estimar

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \nabla_{p_0}g, p-p_0\rangle||\langle \nabla_{p_0}h, p-p_0\rangle|}{\|p-p_0\|} &\leq \frac{\|\nabla_{p_0}g\|\|p-p_0\|\|\nabla_{p_0}h\|\|p-p_0\|}{\|p-p_0\|} \\ &= \|\nabla_{p_0}g\|\|\nabla_{p_0}h\|\|p-p_0\| \end{aligned}$$

y para éste último es directo que $\lim_{p\to p_0} \|\nabla_{p_0}g\|\|\nabla_{p_0}h\|\|p-p_0\| = 0$ lo cual implica (5)

$\square$