Teorema de la función implícita

Antes de enunciar el teorema usamos la siguiente convención: usamos letras negritas $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ para denotar vectores y letras normales, x, z para denotar escalares.

Teorema 1. *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ que contenga al punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ y sea $F : U \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 en U. Nota: a los puntos de primer $\mathbb{R}^n$ los vamos a denotar $\mathbf{x}$ y a los puntos del segundo $\mathbf{R}^m$ los vamos a denotar $\mathbf{z}$.*

Supongamos que $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = 0$ y que la función lineal dada por

$$L(\mathbf{z}) = D_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)} F(0, \mathbf{z}), \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$$

es una función inyectiva, de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^m$.

Entonces existe una vecindad de $\mathbf{x}_0$ en $\mathbb{R}^n$, denotada W y una función de clase C^1, $G : W \to \mathbb{R}^m$ tal que $G(\mathbf{x}_0) = \mathbf{z}_0$ y, para toda $\mathbf{x} \in W$, $F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x})) = 0$.

Notas

1. Este enunciado generaliza el Teorema del Marsden. En el caso del Marsden $m = 1$ en para este caso la función L es simplemente multiplicar por $\partial_z F(\mathbf{x}_0, z_0)$, la cual es inyectiva si $\partial_z F(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0$.

2. La condición de que la transformación lineal $L(\mathbf{z}) = D_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)} F(0, \mathbf{z})$ sea inyectiva se puede reescribir usando un determinante, pero se necesita algo de notación.

   Para $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ escribimos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y a los puntos $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$ los escribimos $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$. A las funciones coordenadas de F las escribimos $F = (f_1, \ldots, f_m)$, así que cada función f_i se valua en $f_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m)$.

   La condición de que L sea inyectiva es equivalente a pedir que el determinante de la siguiente matriz sea distinto de cero

$$\begin{bmatrix} \partial_{z_1} f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) & \cdots & \partial_{z_m} f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{z_1} f_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) & \cdots & \partial_{z_m} f_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix}$$

3. El teorema de la función implícita se puede leer de la siguiente forma. Sean $f_1, \cdots, f_m$ funciones clase C^1, definidas en un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y supongamos que tenemos escalares $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_1(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}) &= 0 \\ f_2(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)}) &= 0 \end{aligned}$$

   Denotemos $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ y $\mathbf{z}_0 = (z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)})$. Entonces, si

$$\det \begin{bmatrix} \partial_{z_1} f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) & \cdots & \partial_{z_m} f_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{z_1} f_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) & \cdots & \partial_{z_m} f_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

entonces podemos resolver el siguiente sistema, de manera única, para las $z's$ en términos de las $x's$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \end{aligned}$$

para cuando las $(x_1, \ldots, x_n)$ están cerca de $\mathbf{x}_0$.