Recuerda que, dado un vector $u \neq 0$, la derivada direccional, a lo largo de u, de f en el punto p se define como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+hu) - f(p)}{h}$$

Se denota $\partial_u f(p)$ o, en las notas en pdf que se subieron como $D_u f(p)$. La fórmula para calcularlo es

$$\partial_u f(p) = \langle \nabla_p f, u \rangle$$

T10

1. Para las funciones dadas, calcula: (1o) $\nabla_{(x,y)} f$; (2o) $\langle \nabla_{(x,y)} f, u \rangle$; (3o) $\partial_u f(p)$.
   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $u = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, $p = (1,0)$.
   (b) $f(x,y) = e^x \cos(y)$, $u = (0,1)$, $p = (0, \pi/2)$.
   (c) $f(x,y) = y^{10}$, $u = (0,-1)$, $p = (1,-1)$.
   (d) $f(x,y) =$ distancia de (x,y) a $(0,3)$, $u = (1,0)$, $p = (1,1)$.

2. Para las siguientes funciones calcula $\nabla_{(x,y,z)} f$ y además haz un bosquejo del campo vectorial $(x,y,z) \mapsto \nabla_{(x,y,z)} f$.
   (a) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, (fuente saliendo del origen).
   (b) $f(x,y,z) = \log(x^2+y^2)$, (fuente axial sobre el eje z).
   (c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}}$, (dipolo).

3. Para $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$, encuentra la dirección (vector unitario) en la cual la gráfica de la función está más empinada y en la cual se mantiene nivelada, si estas parada en el punto $(1,2)$.

4. ¿Cual es el gradiente de f, una función de una variable? ¿Cuál son las dos posibles direcciones de u al calcular la derivada direccional de f a lo largo de u ?

5. Encuentra la dirección u ($\|u\| = 1$) para la cual f crece más rápidamente si estás parado en $(1,2)$.
   (a) $f(x,y) = e^{x-y}$,
   (b) $f(x,y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ (cuidado!!!) ,
   (c) $f(x,y) = ax + by$.

6. Asume que $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones, clase C^1, tal que $\nabla_{(x,y)} f$ es perpendicular a $(3,2)$ con su longitud igual a 1 y $\nabla_{(x,y)} g$ es paralelo a $(3,2)$ con su longitud igual a 5. Encuentra $\nabla_{(x,y)} f$, $\nabla_{(x,y)} g$, f y g.

7. Si $f(0,1) = 0, f(1,0) = 1$ y $f(2,1) = 2$, encuentra $\nabla_{(x,y)} f$ suponiendo que $f(x,y) = Ax + By + C$.

8. ¿Qué funciones tienen los siguientes gradientes?

   (a) $(2x + y, x)$,

   (b) $(e^{x-y}, -e^{x-y})$,

   (c) $(y, -x)$.

9. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama par si $f(-p) = f(p)$, para toda $p \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par, de una variable y diferenciable en el origen. Demuestra que $f'(0) = 0$.

   (b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función par, diferenciable en el origen. Demuestra que $\nabla_0 f = 0$.

   Sugerencia: usa el inciso anterior.

   (c) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el origen. Supón que existen dos vectores ortonormales (es decir, unitarios y ortogonales) u,v, tales que

   $$g(tu) = g(-tu), \quad g(tv) = g(-tv), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Demuestra que $\nabla_{(0,0)} g = 0$.

   Sugerencia: comienza probando que $\partial_u g(0,0) = 0$ y $\partial_v g(0,0) = 0$.

v