T8

1. Sea $U \neq \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $p_0 \in U$, $f, g : U \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en p_0 y $c \in \mathbb{R}$.

   Usando la proposición 2 de las notas, demuestra que $cf+g$ es diferenciable en p_0 y que:
   $$\nabla_{p_0}(cf+g) = c\nabla_{p_0}f + \nabla_{p_0}g.$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^n$ ¿Tiene sentido la fórmula
   $$\nabla_{p_0+p_0'}f = \nabla_{p_0}f + \nabla_{p_0'}f?$$

   Demuestra o da un contraejemplo.

3. Encuentra la aproximación lineal de la función indicada, alrededor de un punto adecuado para estimar las siguientes cantidades

   (a) $\sqrt{(9.1)(15.9)}$,

   (b) $\sqrt{(4.1)^2 + (3.95)^2 + (2.01)^2}$,

   (c) $(2.01)^3 + (1.99)^3 - 5(2.01)(1.99)$.

4. Este ejercicio muestra que todo polinomio en dos variables es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Dados naturales $n, m \geq 0$ considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^n y^m$. Demuestra que f es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Sugerencia: usa el ejercicio 2 de aproximación lineal (el del video).

   (b) Un polinomio en dos variables en una función de la forma
   $$p(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x^{n_i} y^{m_i}$$
   donde, para $i = 1, \ldots, N$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $n_i, m_i \geq 0$ son naturales.
   Demuestra que p es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.
   Nota: también se puede probar que todo polinomio en n-variables es diferenciable.

   (c) Considera el polinomio en dos variables
   $$p(x,y) = a + bx + cy + \sum_{i=1}^{N} x^i y^{i+1}$$
   donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $N \geq 1$ es un natural.
   Encuentra su aproximación lineal de p cerca del $(0,0)$.
   Sugerencia: primero prueba que, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^n y^m|}{\|(x,y)\|} = 0$ si $n, m \geq 0$ son naturales con $n + m \geq 2$ y después usa la proposición 2 de las notas.

5. Considera la función $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $r(x, y, z) = \|(x, y, z)\|$. Durante este ejercicio vamos a suponer que r es difeferenciable en todo punto $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$.

   Por simplicidad vamos a denotar: $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

   (a) Demuestra que $\nabla_{p_0} r$ es el vector unitario, en la misma dirección que p_0.

   (b) Demuestra que $\nabla_{p_0}(r^n) = [nr^{(n-2)}(x_0)]p_0$, donde $n \geq 1$ es un natural.

   (c) La fórmula del inciso anterio ¿es válida si n es un entero negativo?

6. Sea q_0 un vector fijo en $\mathbb{R}^n$ y define $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $f(p) = \langle q_0, p\rangle$. Demuestra que f es continua en todo punto $p \in \mathbb{R}^n$.

7. Sea $U \neq \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $p_0 \in U$ y $g : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en p_0.

   (a) Demuestra que existe una bola $B_r(p_0)$, una función $F : B_r(p_0) \to \mathbb{R}$ tal que

      i. para toda $p \in B_r(p_0)$, $g(p) = g(p_0)+\langle\nabla_{p_0} g, p-p_0\rangle+\|p-p_0\|F(p)$,

      ii. $\lim_{p\to p_0} F(p) = 0$,

   Sugerencia: si E es la función error de la aproximación de g en p_0 define:

$$F(p) = \begin{cases} \frac{E(p)}{\|p-p_0\|} & p \neq p_0 \\ 0 & p = p_0. \end{cases}$$

   (b) Demuestra que existe una bola $B_s(p_0)$ tal que para toda $p \in B_s(p_0)$, $\|F(p)\| \leq 1/2$.

   Sugerencia: en la definición ε, δ del límite $\lim_{p\to p_0} F(p) = 0$ toma $\varepsilon = 1/2$.

   (c) Demuestra que para toda $p \in B_s(p_0)$

$$|g(p) - g(p_0)| \leq \|p - p_0\|(\|\nabla_{p_0} g\| + 1/2).$$

   Sugerencia: usa el inciso anterior y la desigualdad de Cacuchy-Schwartz.

8. Considera la función $t \mapsto 1/t$, definida para $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

   (a) Prueba que, dado $t_0 \neq 0$ fijo y arbitrario, existe $s > 0$ tal que para toda $t \in B_s(t_0)$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_0^2}(t - t_0) + |t - t_0|F_1(t)$$

   donde $\lim_{t\to t_0} |F_1(t)| = 0$.

   (b) Sean $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que $a + b = 10$. Usa el inciso anterior para probar que el inverso multiplicativo de $1.a$ es aproximadamente $0.b$.