T2

1. Supon que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es lineal y que $f(0,1) = 3, f(1,1) = -1$. Calcula

   (a) $f(0,5)$,

   (b) $f(2,2)$,

   (c) $f(-1,0)$.

2. Sea σ una permutación del conjunto $\{1,2,3\}$. Define $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $F(p_1,p_2,p_3) = (p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)})$. Prueba que F es una función lineal.

3. Todas las expresiones que siguen, excepto una, dan funciones lineales, por lo que se pueden escribir de la forma Ap, donde A es una matriz y p un vector. Encuentra la expresión que no es lineal y para las otras escribelas de la forma Ap.

   (a)
   $$\begin{bmatrix} p_1 + p_2 \\ p_1 - p_2 \end{bmatrix}$$
   para $p \in \mathbb{R}^2$.

   (b) $2p_1 + p_3$, para $p \in \mathbb{R}^3$.

   (c) $2p_1 + p_3$, para $p \in \mathbb{R}^4$.

   (d)
   $$\begin{bmatrix} p_1 - 2p_2 \\ p_3 + 4p_4 p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \end{bmatrix}$$
   para $p \in \mathbb{R}^4$.

   (e)
   $$\begin{bmatrix} 0 \\ p_1 - 2p_2 \\ p_3 \\ p_3 - p_1 \end{bmatrix}$$
   con $p \in \mathbb{R}^3$.

4. Sean A, B dos matrices de $m \times n$. Demuestra que si $A\mathbf{p} = B\mathbf{p}$, para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, entonces $A = B$.

   Sugerencia: ve tomando $\mathbf{p} = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$.

5. Considera $\theta \in [0, 2\pi)$ y la matriz
   $$M = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

(a) Tome el vector en el circulo unitario $u = (\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi))$. Demuestra que

$$Mu = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta + \varphi) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz M representa la transformación que es rotar el plano un ángulo θ (asi que las rotaciones son funciones lineales).

(b) Dado cualquier vector $u \in \mathbb{R}^2$, usa coordenadas polares para escribir $u = (r\cos(\varphi), r\operatorname{sen}(\varphi))$, con $r \geq 0$ y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Demuestra que si $Mu = 0$ entonces $u = 0$.

6. Considera la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (x - y + 2z, y - 2z, 4z)$. Resuelve el sistema de ecuaciones, para x, y, z

$$\begin{aligned} u &= x - y + 2z \\ v &= y - 2z \\ w &= 4z \end{aligned}$$

para encontrar la función inversa de F.

7. Verifica que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix}$$

Concluye que una matriz de 2×2 es invertible sii su determinante es distinto de cero y

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

8. Con ayuda del ejercicio encuentra las inversas de las siguientes funciones.

(a) $F(x, y) = (2x - y, x + 5y)$

(b) $F(x, y) = (x + y, x - y)$

(c) $F(x, y) = (5x + 7y, y)$

9. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ tres puntos en el circulo unitario tal que lo dividen en tres arcos de circunferencia cada uno de la misma longitud.

(a) Prueba que la transformación que rota a el plano un ángulo $2\pi/3$ (en cualquier dirección) deja al vector $u + v + w$ fijo. De lo anterior concluye que $u + v + w = 0$.

(b) Usando el inciso anterior prueba que, para todo ángulo θ

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta + 2\pi/3) + \operatorname{sen}(\theta + 4\pi/3) &= 0, \\ \cos(\theta) + \cos(\theta + 2\pi/3) + \cos(\theta + 4\pi/3) &= 0. \end{aligned}$$

(c) Generaliza el inciso anterior para demostrar

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(\theta + 2\pi k/n) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(\theta + 2\pi k/n) = 0.$$