T14

1. Para las funciones dadas, encuentra los puntos críticos y determina si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

   (a) $f(x, y) = y + x \operatorname{sen}(y)$,

   (b) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$,

   (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

2. Hallar el punto en el plano $2x - y + 2z = 20$ más cercano al origen.

3. Hallar los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x, y) = ax^2 + by^2 - 1$, definida en $ax^2 + by^2 \leq 1$, (donde a y b son constantes positivas).

4. Considera la función $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

   (a) Prueba que, para cada línea por el origen $y = mx$, la función alcanza un mínimo sobre dicha línea.

   (b) Prueba que no existe un mínimo local en $(0, 0)$.

   (c) Haz un bosquejo de los puntos (x, y) en el plano para los cuales $f(x, y) > 0$ y para los cuales $f(x, y) < 0$.

5. Determina los máximos, mínimos relativos y absolutos, así como los puntos silla de la función $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

6. (Método de mínimos cuadrados)

   Dados n números distintos, $x_1, \ldots, x_n$ y otros n números $y_1, \ldots y_n$ (no necesariamente distintos), por lo general no es posible encontrar una función de la forma $f(x) = ax + b$, que satisfaga $f(x_i) = y_i$, para toda i. Sin embargo se puede tratar de encontrar una función que minimize el error cuadrado

   $$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

   Determinar los valores de a y b que hagan esto.

7. Encuentra $c > 0$ tal que la función $f(x, y) = x^2 + xy + cy^2$ tiene un punto silla en $(0, 0)$.

8. Halla los valores máximos y mínimos absolutos para $f(x, y) = \operatorname{sen}(x) + \cos(y)$, en el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

9. Sean $z_1, \ldots, z_k$, k puntos distintos en $\mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ define

   $$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \|x - z_k\|^2$$

Prueba que f alcanza su mínimo en el punto $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} z_j$ (conocido como el centroide de los puntos $z_1, \ldots, z_k$).