T1

1. Da un ejemplo que muestra que $\|p+q\| \neq \|p\| + \|q\|$.

2. Este ejercicio muestra que el área del triángulo con vértices $0, u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ es $\frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1|$.

   (a) Prueba que el área del triángulo es $\frac{1}{2}\|u\|(\|v\| \operatorname{sen}(\theta))$, donde $\theta \in [0, \pi]$, es el ángulo entre v y u.

   (b) Prueba que $\operatorname{sen}(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right)^2}$. Sugerencia: usa ecuación $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos(\theta)$.

   (c) Prueba que el área es igual a $\frac{1}{2}\sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - (\langle u, v\rangle)^2}$.

   (d) Finalmente prueba que $\|u\|^2\|v\|^2 - (\langle u, v\rangle)^2 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2$.

3. Encuentra el área del triángulo con vértices en los puntos $(1, 1), (0, 3)$ y $(4, 5)$.

   Definición 1. *Dos vectores $p, q \in \mathbb{R}^n$ se llaman ortogonales si $\langle p, q\rangle = 0$.*

4. (Teorema de Pitágoras)

   Par dos vectores $p, q \in \mathbb{R}^n$, demuestra:

   $\|p + q\|^2 = \|p\|^2 + \|q\|^2$ si y sólo si los vectores son prependiculares.

5. (La otra desigualdad del triángulo)

   Demuestra, para todos los vectores p, q en un espacio con producto interior:

   $$|\|p\| - \|q\|| \leq \|p - q\|.$$

   Sugerencia: empieza con $\|p\|$ suma y resta q y usa la desigualdad del triángulo.

6. Sea A una matriz de 3×3. Supongamos que dos renglones de A son iguales. Demuestra que $\det(A) = 0$. Sugerencia: utiliza la propiedad alternante del determinante.

7. Considera los vectores $v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$.

   Dados escalares α, β construye el vector $u = \alpha v + \beta w$. Demuestra que

   $$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0$$

8. Demuestra

   $$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

   $$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$$

   Usa las fórmulas anteriores para dar un ejemplo de vectores u, v y w que muestren $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$.