Tarea 11

1. Supon que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y que $\gamma, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ son curvas diferenciables.

   (a) Demuestra
   $$\frac{d}{dt}\langle \beta(t), \gamma(t)\rangle = \langle \beta(t), \gamma'(t)\rangle + \langle \beta'(t), \gamma(t)\rangle$$

   (b) Ahora supon que la imagen de γ está contenida en una esfera centrada en el origen. Usa el inciso anterior para demostrar que, para toda t, $\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$, es decir el vector posición y el vector velocidad son ortogonales.

2. Usa la regla de la cadena para escribir las derivadas parciales que se piden en las siguientes funciones:

   (a) $\frac{\partial f}{\partial y}(A(x,y), B(x,y), C(x,y))$,

   (b) $\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1(x_1,x_2,x_3), p_2(x_1,x_2,x_3))$

   (c) $\frac{\partial f}{\partial x_5}(X_1(x_1,\ldots,x_{10}),\ldots,X_7(x_1,\ldots,x_{10}))$

3. Sea $U \neq \emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^2$, $g : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $x, y : I \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 (con I un intervalo abierto). Encuentra $h'(t)$, la derivada de h (función de una variable), para las siguientes funciones:

   (a) $h(t) = (g(x(t), y(t)))^2$,

   (b) $h(t) = e^{g(x(t),y(t))}$,

   (c) $h(t) = \operatorname{sen}(g(x(t), y(t)))$.

4. Se dice que una función f tiene rendimientos de escala constante, o que es homogenea de grado 1, si satisface
   $$f(cx, cy) = cf(x, y) \tag{1}$$
   para toda $c > 0$. El nombre viene porque, por ejemplo, si se duplica x y y, también se duplica f.

   (a) Prueba que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $x, y > 0$, tienen rendimientos de escala constante.

   (b) Demuestra que si f es clase C^1 y tiene rendimientos de escala constante entonces f satisface:
   $$x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = f(x,y) \tag{2}$$
   Sugerencia: usa la regla de la cadena para diferenciar la ecuación (1) con respecto a c y luego evalua en $c = 1$.

(c) Demuestra directamente que $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $f(x,y) = \sqrt{xy}$ satisfacen la ecuacion (2).

(d) Encuentra un ejemplo de una función de rendimiento de escala constante diferente a las dadas en el ejercicio.

5. Un alambre tiene forma circular, de radio r y supongamos que está colocado con su centro en el origen. Supongamos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función que da la temperatura en el punto (x,y) del plano. Para las siguientes funciones temperatura, encuentra las temperaturas máximas y mínimas que sufre el alambre.

   (a) $T(x,y) = 2x + 3y$,

   (b) $T(x,y) = 2xy$,

   (c) $T(x,y) = x^2 + y^2$.

   Sugerencia: empieza dando γ, una parametrización del alambre, luego encuentra el máximo y el mínimo de $T \circ \gamma$.

6. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama par si satisface $f(-p) = f(p)$, para todo punto p. Supon que f es clase C^1 y demuestra que $\nabla_{(0,\ldots,0)} f = (0,\ldots,0)$.

   Sugerencia: aplica la regla de la cadena a $f(p) = f(-p)$.

7. Sea $y(x)$ una función definida implícitamente por $G(x, y(x)) = 0$, donde G es una función de clase C^1 definida en $\mathbb{R}^2$. Prueba que si y es de clase C^1 y $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$ entonces
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y},$$

8. Prueba los siguientes pasos para demostrar la fórmula:
$$\frac{d}{dt}\int_{y_1(t)}^{y_2(t)} g(x,t)dx = \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} \frac{\partial g(x,t)}{\partial t}dx + g(y_2(t),t)y_2'(t) - g(y_1(t),t)y_1'(t) \tag{3}$$
   donde $g(x,t)$ es una función clase C^1 en un abierto U y y_1, y_2 funciones de clase C^1 de una variable.

   (a) Define $f(u,v,w) = \int_u^v g(x,w)dx$. Usa el Teorema fundamental del cálculo para probar que
$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) = -g(u,w), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) = g(v,w).$$

   (b) Usa la regla de la cadena para probar
$$\frac{d}{dt} f(y_1(t), y_2(t), t) = \frac{\partial f}{\partial u} y_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial v} y_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial w}$$

(c) Se puede probar, no lo demuestres, que se puede diferencial dentro de la integral para obtener:

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \int_u^v \frac{\partial g}{\partial w}(x, w)dx.$$

Finalmente, usa ésta fórmula y los incisos anteriores para demostrar la ecuación (3).