

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE



ESCOLA DE ENGENHARIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

APLICAÇÃO DE COMPUTADORES EM SISTEMAS ELÉTRICOS II

Fluxo de Carga em Redes Elétricas  
Curso Introdutório

Prof. Carlos Henrique Costa Guimarães, D.Sc.

Janeiro de 2012

# ÍNDICE

1	Introdução.....	3
2	Análise Nodal de uma Rede Elétrica.....	4
3	Formulação do Problema.....	7
3.1	Cálculo do Fluxo de Potência em um Ramo.....	7
3.2	Cálculo do Fluxo de Potência na Rede .....	13
4	Solução do Problema pelo Método de Newton-Raphson.....	17
5	Representação de Linhas de Transmissão .....	24
6	Representação de Transformadores.....	32
7	Representação de Cargas.....	36
8	Exemplo.....	44
9	Referências Bibliográficas .....	49
10	ANEXO .....	50

# 1 Introdução

O fluxo de carga em redes elétricas, também conhecido como fluxo de potência ou *Loadflow*, serve como base para diversos tipos de estudo. Seu objetivo é a solução da rede elétrica trifásica equilibrada, em regime permanente, sob determinadas condições de operação, isto é, sendo conhecidos os parâmetros da rede, as potências ativas geradas nas usinas (despacho de potência ativa) e as cargas (consumo), determina-se as tensões (módulo e ângulo), os fluxos de potência ativa e reativa em cada ramo da rede e as potências reativas geradas nas usinas (despacho de potência reativa). Os fluxos e tensões calculados são referentes a uma fase apenas, pois as das outras fases possuem o mesmo módulo e são defasados de  $\pm 120^\circ$  em relação aos fluxos e tensões da fase utilizada no cálculo.

O fluxo de potência em redes elétricas serve principalmente para os engenheiros de planejamento estudar as diversas alternativas de expansão da rede elétrica, pois, com o aumento da demanda de energia elétrica associada ao seu crescimento vegetativo, ampliações são necessárias ao sistema elétrico, tais como construção de novas linhas de transmissão, usinas, subestações, etc. e devem ter suas obras iniciadas com antecedência suficiente para que as mesmas sejam concluídas em tempo hábil para o atendimento da demanda de energia elétrica.

O fluxo de potência serve também como base para os engenheiros de planejamento da operação encontrar a melhor condição de despacho de potência nas usinas geradoras de energia elétrica para cada caso de contingência, como por exemplo, a minimização das perdas do sistema. Porém este tipo de estudo não será focado aqui, pois para isto é necessário utilizar técnicas da Pesquisa Operacional, portanto fugindo ao escopo deste curso.

O fluxo de potência serve também para determinar as condições iniciais de operação da rede elétrica para estudos de estabilidade de sistemas elétricos de potência, visando encontrar o ponto de operação mais seguro para a operação do sistema tentando evitar os indesejáveis *blackouts*, que são chamados popularmente de apagões.

## 2 Análise Nodal de uma Rede Elétrica

O problema de fluxo de carga em redes elétricas pode ser formulado de várias maneiras, porém a mais utilizada pelos programas computacionais comerciais é a que utiliza a formulação nodal, na qual o equacionamento é feito através da lei de Kirchhoff dos nós, onde o somatório das correntes em um nó é igual a zero. Esta formulação é a mais utilizada por ter inúmeras vantagens sobre as outras; são elas: menor tempo de solução e menores requisitos de memória, pois utiliza a matriz de admitância nodal que normalmente é bastante esparsa e simétrica, sendo necessário o armazenamento apenas dos elementos não nulos acima da diagonal, além dos próprios elementos da diagonal. É importante observarmos que para representação de grandes sistemas elétricos (acima de 1000 barras), só se torna viável a aplicação de métodos que utilizem a matriz de admitância nodal para o cálculo do fluxo de potência, pois a matriz de impedância nodal (inversa da matriz de admitância nodal) é cheia, isto é, sem elementos nulos, e o seu armazenamento fica impraticável. Vamos considerar, por exemplo, um sistema elétrico com 1000 barras. O armazenamento completo da matriz de impedância exige 8.000.000 bytes (1000 x 1000 elementos x 8 bytes requeridos por uma variável complexa em precisão simples), enquanto que o armazenamento da matriz de admitância nodal (esparsa) exige 8.000 bytes para armazenar os elementos da diagonal e mais 16.000 bytes para os elementos não-nulos acima da diagonal (normalmente considera-se de 1.6 a 2 o fator multiplicador do número de barras para determinação do número máximo de elementos não-nulos acima da diagonal) perfazendo um total de 24.000 bytes contra os 8.000.000 bytes da matriz de impedância nodal. Quando muito se pode aproveitar o fato da matriz de impedância ser simétrica, reduzindo a um pouco mais da metade a área requerida para seu armazenamento. Para facilitar a determinação da matriz de admitância nodal, vamos considerar o sistema elétrico representado na Figura 2.1.

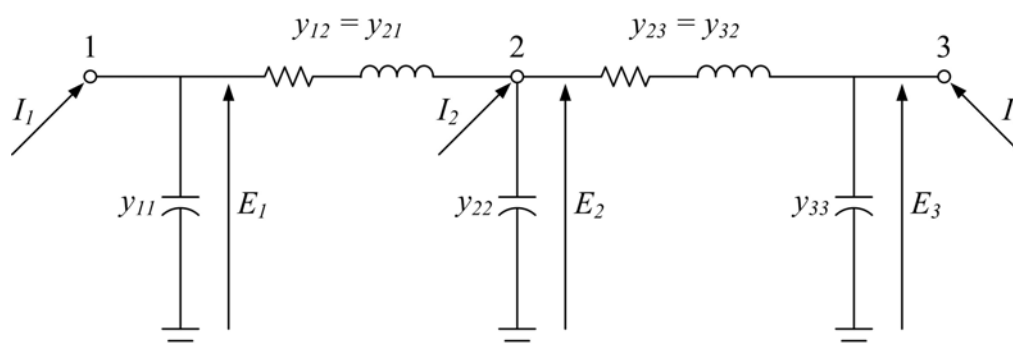


Figura 2.1 – Sistema Exemplo

A matriz de admitância primitiva, que representa a configuração da rede elétrica é:

$$Y_P = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 \\ y_{12} & y_{11} & y_{23} \\ 0 & y_{23} & y_{33} \end{bmatrix}$$

Utilizando as leis de Kirchhoff e Ohm podemos escrever as equações dos somatórios de corrente em cada nó, como segue:

$$I_1 = E_1 y_{11} + (E_1 - E_2) y_{12}$$

$$I_2 = E_2 y_{22} + (E_2 - E_1) y_{12} + (E_2 - E_3) y_{23}$$

$$I_3 = E_3 y_{33} + (E_3 - E_2) y_{23}$$

Reescrevendo as equações dos somatórios de corrente em cada nó temos:

$$I_1 = (y_{11} + y_{12}) E_1 - y_{12} E_2$$

$$I_2 = (y_{22} + y_{12} + y_{23}) E_2 - y_{12} E_1 - y_{23} E_3$$

$$I_3 = (y_{33} + y_{23}) E_3 - y_{23} E_2$$

Em notação matricial as equações das correntes injetadas em cada nó podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} + y_{12} & -y_{12} & 0 \\ -y_{12} & y_{22} + y_{12} + y_{23} & -y_{23} \\ 0 & -y_{23} & y_{33} + y_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

ou:

$$I = Y_{bus} E$$

onde:

$I$  – vetor de correntes injetadas em cada nó

$Y_{bus}$  – matriz de admitâncias nodal

$E$  – vetor de tensões de cada nó

Por inspeção podemos notar que os elementos da diagonal da matriz  $Y_{bus}$  são formados pela soma de todas as admitâncias ligadas a cada nó e os elementos de fora da diagonal são iguais aos respectivos elementos da matriz  $Y_p$  com o sinal trocado.

### 3 Formulação do Problema

Para começarmos a solucionar o problema vamos considerar que os ramos de uma rede elétrica (linha de transmissão ou transformador) sempre podem ser representados por um modelo matemático conhecido como " $\pi$  equivalente", mostrado na Figura 3.1.

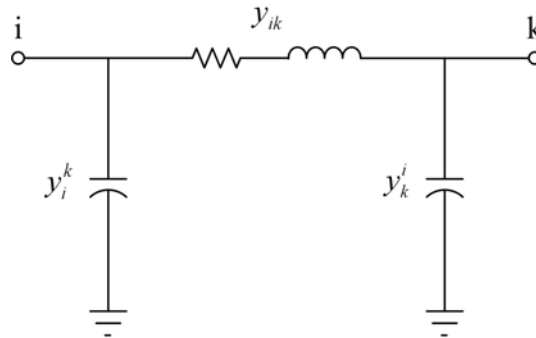


Figura 3.1 – Modelo  $\pi$  equivalente

Na Figura 3.1,  $y_{ik}$  é o parâmetro longitudinal que conecta o nó  $i$  ao nó  $k$ ;  $y_i^k$  e  $y_k^i$  são os parâmetros transversais que conectam os nós  $i$  e  $k$  à terra, respectivamente.

É fácil verificar que para obter a solução da rede é necessário determinar as tensões (módulo e ângulo) de todos os nós da rede, pois desta forma, podemos determinar os fluxos em todos os ramos e conseqüentemente todas as outras variáveis do sistema.

#### 3.1 Cálculo do Fluxo de Potência em um Ramo

As equações a seguir são deduzidas com base na Figura 3.2, que mostra as potências aparentes que fluem em um ramo (linha de transmissão ou transformador). Vamos supor que as tensões  $E_i$  e  $E_k$  dos respectivos nós  $i$  e  $k$  são conhecidas.

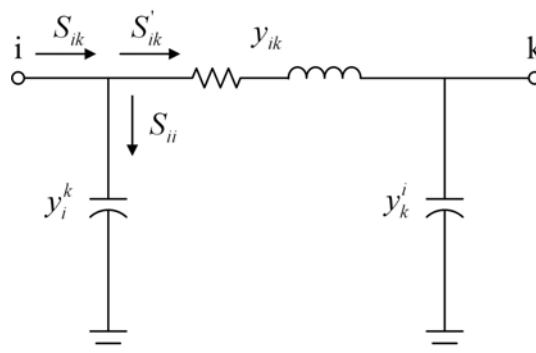


Figura 3.2 – Potências aparentes em um ramo

Pela lei de Kirchhoff, temos:

$$S_{ik} = S'_{ik} + S_{ii}$$

Como  $S = EI^*$ , temos:

$$\begin{aligned} S'_{ik} &= E_i (I'_{ik})^* = E_i [(E_i - E_k) y_{ik}]^* = E_i (E_i - E_k)^* y_{ik}^* = E_i (E_i^* - E_k^*) y_{ik}^* = \\ &= |E_i|^2 y_{ik}^* - E_i E_k^* y_{ik}^* = V_i^2 y_{ik}^* - E_i E_k^* y_{ik}^* \end{aligned}$$

$$S_{ii} = E_i I_{ii}^* = E_i (E_i y_i^k)^* = E_i E_i^* y_i^{k*} = |E_i|^2 y_i^{k*} = V_i^2 y_i^{k*}$$

$$S_{ik} = V_i^2 y_{ik}^* + V_i^2 y_i^{k*} - E_i E_k^* y_{ik}^*, \quad \text{onde } V_i = |E_i|$$

O asterisco no índice superior das variáveis indica o conjugado das mesmas.

Vamos considerar a forma polar para as tensões  $E = V \angle \theta$  e a forma retangular para a potência aparente ( $S = P + jQ$ ) e para as admitâncias ( $y = g + jb$ ).

onde:

$E$  – tensão (variável complexa)

$V$  – módulo da tensão (variável real)

$\theta$  – ângulo da tensão (variável real)

$S$  – potência aparente (variável complexa)

$P$  – potência ativa (variável real)

$Q$  – potência reativa (variável real)

$Y$  – admitância (variável complexa)

$g$  – condutância (variável real)

$b$  – susceptância (variável real)

Com isto a equação de  $S_{ik}$  torna-se:

$$\begin{aligned} S_{ik} &= P_{ik} + jQ_{ik} = V_i^2 (g_{ik} - jb_{ik}) + V_i^2 (g_i^k - jb_i^k) - \\ &\quad (V_i \cos \theta_i + jV_i \sin \theta_i)(V_k \cos \theta_k - jV_k \sin \theta_k)(g_{ik} - jb_{ik}) \end{aligned}$$



Então, a potência ativa que flui no ramo é determinada através da parte real da expressão de  $S_{ik}$ :

$$P_{ik} = V_i^2 g_i^k + V_i^2 g_{ik} - V_i V_k g_{ik} \cos \theta_i \cos \theta_k + V_i V_k b_{ik} \cos \theta_i \sin \theta_k - V_i V_k b_{ik} \sin \theta_i \cos \theta_k - V_i V_k g_{ik} \sin \theta_i \sin \theta_k$$

Sabendo-se que:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

Então:

$$P_{ik} = V_i^2 (g_i^k + g_{ik}) - V_i V_k g_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - V_i V_k b_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)$$

Fazendo-se  $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$  temos:

$$P_{ik} = V_i^2 (g_i^k + g_{ik}) - V_i V_k (g_{ik} \cos \theta_{ik} + b_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad (3.1)$$

O cálculo da perda de potência ativa no ramo é realizado através da soma do fluxo de potência ativa no sentido inverso ( $P_{ki}$ ) com  $P_{ik}$ :

$$P_{ki} = V_k^2 (g_k^i + g_{ki}) - V_k V_i (g_{ki} \cos \theta_{ki} + b_{ki} \sin \theta_{ki})$$

como:

$$\cos \theta_{ik} = \cos \theta_{ki}$$

$$\sin \theta_{ik} = -\sin \theta_{ki}$$

então:

$$P_{ki} = V_k^2 (g_k^i + g_{ki}) - V_k V_i (g_{ki} \cos \theta_{ik} - b_{ki} \sin \theta_{ik})$$

$$P_{ik} + P_{ki} = V_i^2 (g_i^k + g_{ik}) - V_i V_k (g_{ik} \cos \theta_{ik} + b_{ik} \sin \theta_{ik}) + V_k^2 (g_k^i + g_{ki}) - V_k V_i (g_{ki} \cos \theta_{ik} - b_{ki} \sin \theta_{ik})$$

Se o ramo for uma linha de transmissão, temos:

$$g_i^k = g_k^i \approx 0$$

$$g_{ik} = g_{ki}$$

$$b_i^k = b_k^i$$

$$b_{ik} = b_{ki}$$

onde:

$g_i^k$  – representa o efeito das perdas por condutância direta para a terra nas cadeias de isoladores e também as perdas por efeito corona;

$g_{ik}$  – representa a condutância dos cabos utilizados na linha;

$b_i^k$  – representa o efeito capacitivo da linha;

$b_{ik}$  – representa o efeito eletromagnético gerado pela linha.

Então a expressão da perda ativa na linha de transmissão passe a ser:

$$P_{ik} + P_{ki} = V_i^2 (g_i^k + g_{ik}) - V_i V_k (g_{ik} \cos \theta_{ik} + b_{ik} \sin \theta_{ik}) + V_k^2 (g_i^k + g_{ik}) - V_i V_k (g_{ik} \cos \theta_{ik} - b_{ik} \sin \theta_{ik}) = (V_i^2 + V_k^2) (g_i^k + g_{ik}) - 2 V_i V_k g_{ik} \cos \theta_{ik}$$

$$\text{Perda ativa na LT} = (V_i^2 + V_k^2) (g_i^k + g_{ik}) - 2 V_i V_k g_{ik} \cos \theta_{ik}$$

A perda ativa na LT é sempre positiva, pois numa LT há dissipação de energia, representada por sua resistência. Matematicamente podemos demonstrar este fato.

Por hipótese, vamos considerar que a perda de potência ativa na LT é maior que zero e provaremos que isto realmente é verdade.

$$\text{Perda ativa na LT} = (V_i^2 + V_k^2) (g_i^k + g_{ik}) - 2 V_i V_k g_{ik} \cos \theta_{ik} > 0$$

$$(V_i^2 + V_k^2) (g_i^k + g_{ik}) > 2 V_i V_k g_{ik} \cos \theta_{ik}$$

Dividindo por  $g_{ik}$ :

$$(V_i^2 + V_k^2) \left( 1 + \frac{g_i^k}{g_{ik}} \right) > 2 V_i V_k \cos \theta_{ik}$$

Como a parcela  $\left(1 + \frac{g_i^k}{g_{ik}}\right)$  é maior que 1 e o  $\cos \theta_{ik}$  é menor que 1, fazendo-os iguais a 1, estaremos sendo pessimistas, isto é, estaremos piorando a premissa feita anteriormente, pois estamos diminuindo o valor do primeiro membro da inequação e aumentando o valor do segundo.

$$\begin{aligned} V_i^2 + V_k^2 &> 2 V_i V_k \\ V_i^2 + V_k^2 - 2 V_i V_k &> 0 \\ (V_i - V_k)^2 &> 0 \quad \text{como queríamos demonstrar} \end{aligned}$$

A potência reativa que flui no ramo é determinada através da parte imaginária da expressão de  $S_{ik}$ :

$$\begin{aligned} Q_{ik} = & -V_i^2 b_i^k - V_i^2 b_{ik} + V_i V_k b_{ik} \cos \theta_i \cos \theta_k + V_i V_k g_{ik} \cos \theta_i \sin \theta_k - \\ & - V_i V_k g_{ik} \sin \theta_i \cos \theta_k + V_i V_k b_{ik} \sin \theta_i \sin \theta_k \end{aligned}$$

$$Q_{ik} = -V_i^2 (b_i^k + b_{ik}) - V_i V_k g_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + V_i V_k b_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k)$$

$$Q_{ik} = -V_i^2 (b_i^k + b_{ik}) - V_i V_k (g_{ik} \sin \theta_{ik} - b_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad (3.2)$$

Do mesmo modo que calculamos a perda de potência ativa em um ramo, podemos calcular a perda de potência reativa, calculando o fluxo de potência reativa no sentido inverso ( $Q_{ki}$ ) e somando-o com  $Q_{ik}$ :

$$Q_{ki} = -V_k^2 (b_k^i + b_{ki}) - V_k V_i (g_{ki} \sin \theta_{ki} - b_{ki} \cos \theta_{ki})$$

como:

$$\cos \theta_{ik} = \cos \theta_{ki}$$

$$\sin \theta_{ik} = -\sin \theta_{ki}$$

então:

$$Q_{ki} = -V_k^2 (b_k^i + b_{ki}) - V_k V_i (-g_{ki} \sin \theta_{ik} - b_{ki} \cos \theta_{ik})$$

$$Q_{ik} + Q_{ki} = -V_i^2 (b_i^k + b_{ik}) - V_i V_k (g_{ik} \sin \theta_{ik} - b_{ik} \cos \theta_{ik}) - V_k^2 (b_k^i + b_{ki}) - V_k V_i (-g_{ki} \sin \theta_{ik} - b_{ki} \cos \theta_{ik})$$

Se o ramo for uma linha de transmissão, temos:

$$\begin{aligned} Q_{ik} + Q_{ki} = & -V_i^2(b_i^k + b_{ik}) - V_i V_k (g_{ik} \sin \theta_{ik} - b_{ik} \cos \theta_{ik}) - V_k^2(b_i^k + b_{ik}) + \\ & V_i V_k (g_{ik} \sin \theta_{ik} + b_{ik} \cos \theta_{ik}) = -(V_i^2 + V_k^2)(b_i^k + b_{ik}) + 2 V_i V_k b_{ik} \cos \theta_{ik} \end{aligned}$$

$$\text{Perda reativa na LT} = -(V_i^2 + V_k^2)(b_i^k + b_{ik}) + 2 V_i V_k b_{ik} \cos \theta_{ik}$$

A perda de potência reativa na LT pode ser positiva ou negativa, pois numa LT há consumo de potência reativa, representada pela sua indutância (campo eletromagnético gerado nos condutores), mas há também geração de potência reativa, representada por sua capacitância (campo elétrico gerado nos condutores). Portanto, se a potência reativa consumida for maior do que a gerada, na linha há perda de potência reativa. Caso contrário, a linha passa a funcionar como um gerador de potência reativa. Embora não tenha grandes interesses, poderíamos encontrar a relação que dá a perda de potência reativa nula, igualando a zero a sua equação.

$$-(V_i^2 + V_k^2)(b_i^k + b_{ik}) + 2 V_i V_k b_{ik} \cos \theta_{ik} = 0$$

Então:

$$(V_i^2 + V_k^2)(b_i^k + b_{ik}) = 2 V_i V_k b_{ik} \cos \theta_{ik}$$

Dividindo por  $b_{ik}$ :

$$(V_i^2 + V_k^2) \left( 1 + \frac{b_i^k}{b_{ik}} \right) = 2 V_i V_k \cos \theta_{ik}$$

$$\left( 1 + \frac{b_i^k}{b_{ik}} \right) = \frac{2 V_i V_k \cos \theta_{ik}}{V_i^2 + V_k^2}$$

Então, chegamos na seguinte relação:

$$\frac{b_i^k}{b_{ik}} = \frac{2 V_i V_k \cos \theta_{ik}}{V_i^2 + V_k^2} - 1$$

### 3.2 Cálculo do Fluxo de Potência na Rede

Vamos considerar que em um nó podem estar conectados  $n$  ramos (linhas de transmissão e/ou transformadores), um elemento em derivação (admitância), uma fonte geradora e uma carga (potência constante), como mostra a Figura 3.3.

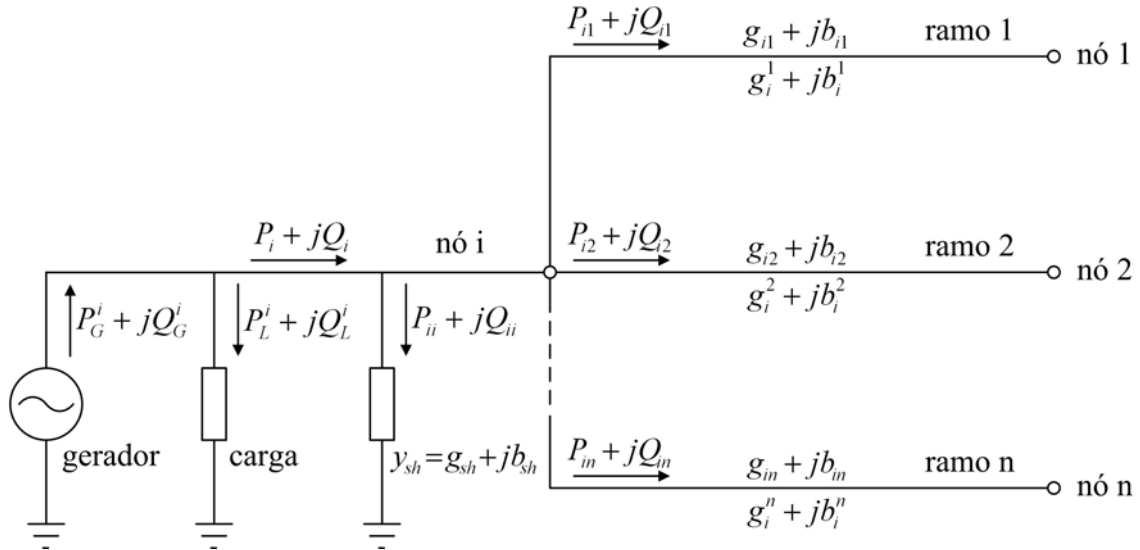


Figura 3.3 – Ligações de um Nó

Sabendo-se que o somatório de potência em um nó tem que ser igual a zero, podemos determinar as expressões das potências ativa e reativa injetada na rede através do nó  $i$ , como segue:

$$P_i = P_G^i - P_L^i = P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{in} + P_{ii}$$

$$Q_i = Q_G^i - Q_L^i = Q_{i1} + Q_{i2} + \dots + Q_{in} + Q_{ii}$$

Utilizando a equação (3.1), a expressão da potência ativa injetada na rede torna-se:

$$P_i = V_i^2(g_i^1 + g_{i1}) - V_i V_1(g_{i1} \cos \theta_{i1} + b_{i1} \sin \theta_{i1}) + V_i^2(g_i^2 + g_{i2}) - V_i V_2(g_{i2} \cos \theta_{i2} + b_{i2} \sin \theta_{i2}) +$$

$$\dots + V_i^2(g_i^n + g_{in}) - V_i V_n(g_{in} \cos \theta_{in} + b_{in} \sin \theta_{in}) + V_i^2 g_{sh}^i =$$

$$= V_i^2(g_{sh}^i + g_i^1 + g_i^2 + \dots + g_i^n + g_{i1} + g_{i2} + \dots + g_{in}) -$$

$$V_i \sum_{k=1}^n V_k (g_{ik} \cos \theta_{ik} + b_{ik} \sin \theta_{ik}); \quad \text{com } i \neq k$$

Vamos considerar:

$$G_{ii} = g_{sh}^i + g_i^1 + g_i^2 + \dots + g_i^n + g_{i1} + g_{i2} + \dots + g_{in}$$

$$B_{ii} = b_{sh}^i + b_i^1 + b_i^2 + \dots + b_i^n + b_{i1} + b_{i2} + \dots + b_{in}$$

$$G_{ik} = -g_{ik}$$

$$B_{ik} = -b_{ik}$$

Estes elementos formam a matriz de admitância nodal, conhecida como  $Y_{bus}$ . Os valores dos elementos da diagonal são dados pela soma das admitâncias de todos os elementos conectados ao nó respectivo, e os valores dos elementos de fora da diagonal são dados pelo valor da admitância que conecta os nós respectivos com o sinal trocado. Sendo a matriz  $Y_p$  aquela que representa a rede elétrica, com os elementos da diagonal dados pela admitância que conecta cada nó à terra e os elementos de fora da diagonal dados pela admitância que conecta os nós correspondentes aos índices do elemento. Podemos dizer também que a matriz  $Y_{bus}$  pode ser obtida a partir da matriz  $Y_p$ , como segue:

$$Y_p = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} + jb_{11} & g_{12} + jb_{12} & \dots & g_{1n} + jb_{1n} \\ g_{21} + jb_{21} & g_{22} + jb_{22} & \dots & g_{2n} + jb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} + jb_{n1} & g_{n2} + jb_{n2} & \dots & g_{nn} + jb_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} G_{11} + jB_{11} & G_{12} + jB_{12} & \dots & G_{1n} + jB_{1n} \\ G_{21} + jB_{21} & G_{22} + jB_{22} & \dots & G_{2n} + jB_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} + jB_{n1} & G_{n2} + jB_{n2} & \dots & G_{nn} + jB_{nn} \end{bmatrix}$$

onde:

$$Y_{bus}^{ii} = \sum_{k=1}^n y_{ik} \quad \text{ou} \quad G_{ii} + jB_{ii} = \sum_{k=1}^n (g_{ik} + jb_{ik})$$

$$Y_{bus}^{ik} = -y_{ik} \quad \text{ou} \quad G_{ik} + jB_{ik} = -g_{ik} - jb_{ik} \quad \text{com } i \neq k$$

Com isto, podemos obter a seguinte expressão para o somatório de potência ativa no nó  $i$ :

$$\Delta P_i = P_i - V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) = 0 \quad (3.3)$$

Utilizando a equação (3.2) a expressão da potência reativa injetada no nó  $i$  torna-se:

$$\begin{aligned} Q_i &= -V_i^2(b_i^1 + b_{i1}) - V_i V_1(g_{i1} \sin \theta_{i1} - b_{i1} \cos \theta_{i1}) - V_i^2(b_i^2 + b_{i2}) - V_i V_2(g_{i2} \sin \theta_{i2} - b_{i2} \cos \theta_{i2}) - \\ &\quad \dots - V_i^2(b_i^n + b_{in}) - V_i V_n(g_{in} \sin \theta_{in} - b_{in} \cos \theta_{in}) - V_i^2 b_{sh}^i = \\ &= -V_i^2(b_{sh}^i + b_i^1 + b_i^2 + \dots + b_i^n + b_{i1} + b_{i2} + \dots + b_{in}) - \\ &\quad V_i \sum_{k=1}^n V_k (g_{ik} \sin \theta_{ik} - b_{ik} \cos \theta_{ik}); \end{aligned} \quad \text{com } i \neq k$$

Portanto o somatório de potência reativa no nó  $i$  é obtido pela expressão:

$$\Delta Q_i = Q_i - V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) = 0 \quad (3.4)$$

As equações (3.3) e (3.4) formam o sistema não-linear a ser resolvido. Mostraremos como resolvê-lo pelo método de Newton-Raphson. Como já dissemos anteriormente, o sistema estará resolvido quando determinarmos todas as tensões (módulo e ângulo) de todos os nós (barras). E por este motivo que os módulos e ângulos das tensões são chamados de variáveis de estado, pois elas definem o estado do sistema. Se observarmos o sistema, podemos verificar que para cada barra temos quatro variáveis: potência ativa injetada, potência reativa injetada, módulo da tensão e ângulo da tensão, e, no entanto, só podemos escrever duas equações por barra: somatório de potência ativa e somatório de potência reativa. O sistema seria indeterminado se não fosse possível, na prática, especificar duas das quatro variáveis de cada barra. Dependendo das variáveis que são especificadas podemos obter os seguintes tipos de barra:

- a) barra tipo PV – onde são especificadas a potência ativa injetada e o módulo da tensão. Também conhecida como barra de geração, pois o despacho de potência ativa e a tensão terminal podem ser controlados através de reguladores de velocidade que atuam no torque da turbina para despachar mais ou menos potência elétrica e através de reguladores de tensão que atuam na corrente de campo do gerador para aumentar ou diminuir o valor da tensão terminal.
- b) barra tipo PQ – onde são especificadas as potências ativa e reativa injetadas. Também conhecida como barra de carga, pois as potências ativa e reativa injetadas são conhecidas, sendo iguais às potências ativa e reativa da carga com sinal trocado.

c) barra tipo  $V\theta$  – onde são especificados o módulo e o ângulo da tensão. Também conhecida como barra *slack ou swing*. Normalmente se arbitra como barra *slack* uma das barras de geração, sendo a candidata a de maior capacidade instalada. A escolha desta barra deve atender também ao critério de proximidade do centro elétrico do sistema. O ângulo da tensão desta barra é que serve como referência para o ângulo da tensão das outras.

É claro que, para obtermos a solução do sistema, temos que arbitrar o despacho de potência ativa nas barras tipo PV, ficando sem saber se, para este despacho de potência ativa, temos a melhor solução do sistema, isto é, se as perdas do sistema são mínimas, por exemplo. Podemos imaginar que existem infinitas soluções para a rede elétrica, e que uma delas é a solução ótima. Porém a determinação desta solução ótima é outro problema, que não analisaremos neste curso, onde são utilizadas técnicas da Pesquisa Operacional.

Portanto se temos um sistema com  $n$  barras, podemos afirmar que as variáveis de estado são os módulos das tensões das barras do tipo PQ e os ângulos das barras dos tipos PV e PQ. As equações que podemos escrever para solucionar o sistema são os somatórios de potências ativas das barras tipos PV e PQ e os somatórios das potências reativas das barras tipo PQ. Desta forma, a dimensão do sistema não-linear a ser resolvido é dada pelo número de equações escritas ou pelo número de variáveis de estado do sistema, pois os dois têm que ser iguais para que a solução do sistema seja possível de ser determinada.

O número de equações é dado por:

$$N = 2NBPQ + NBPV \quad (3.5)$$

onde:

$N$  – dimensão do sistema

$NBPQ$  – número de barras tipo PQ

$NBPV$  – número de barras tipo PV

O número de variáveis de estado do sistema também é dado pela mesma equação (3.5), pois para as barras do tipo PQ tem-se duas variáveis de estado (módulo da tensão e ângulo da tensão) e para as barras do tipo PV tem-se apenas uma variável de estado (ângulo da tensão).



## 4 Solução do Problema pelo Método de Newton-Raphson

Vamos resolver o sistema pelo método de Newton-Raphson, que é mostrado com mais detalhes no anexo. Este método consiste em linearizar o sistema de equações não-lineares, como segue:

$$J \Delta x = -f$$

onde:

$J$  - Jacobiano do sistema não-linear

$\Delta x$  - correções a serem feitas nas variáveis de estado (vetor de desvios)

$f$  - funções que formam o sistema

A partir daí basta determinar a solução do sistema linearizado formado anteriormente. Normalmente se utiliza o método da triangularização (eliminação de Gauss) para resolver este sistema.

Com as correções determinadas, calcula-se:  $x = x + \Delta x$ , para corrigir o vetor de variáveis de estado. A partir daí, deve-se formar novamente o sistema linearizado, resolvê-lo e corrigir o vetor de variáveis de estado, e assim sucessivamente, até que se obtenha a solução do sistema, dentro de uma dada tolerância. O teste de convergência deve ser feito com os módulos dos valores relativos dos erros  $\Delta x$ , isto é, enquanto existir pelo menos um valor  $\left| \frac{\Delta x}{x} \right|$  maior que a tolerância, deve-se repetir o processo iterativo.

Por questão de organização, vamos escrever primeiro todas as equações do somatório de potência ativa das barras dos tipos PV e PQ e depois todas as equações do somatório de potência reativa das barras do tipo PQ. Também por questão de organização, vamos ordenar as variáveis de estado, isto é, primeiro todos os ângulos das tensões das barras dos tipos PV e PQ e depois todos os módulos das tensões das barras do tipo PQ. Portanto, podemos escrever o sistema linearizado, em notação matricial, como segue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} & \vdots & \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \theta} & \vdots & \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \dots \\ \Delta V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta P \\ \dots \\ \Delta Q \end{bmatrix}$$

onde:

$\Delta P$  – somatório de potência ativa na barra (*mismatch*)

$\Delta Q$  – somatório de potência reativa na barra (*mismatch*)

Podemos observar que a matriz Jacobiano fica dividida em quatro submatrizes. Para facilitar os cálculos, como veremos mais adiante, são feitas algumas modificações no sistema linearizado, sem que este seja alterado. Com as modificações, o sistema passa a ser:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} & \vdots & -V \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \dots & \vdots & \dots \\ -\frac{\partial \Delta Q}{\partial \theta} & \vdots & -V \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \dots \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \dots \\ \Delta Q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H & \vdots & N \\ \dots & \vdots & \dots \\ J & \vdots & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \dots \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \dots \\ \Delta Q \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} H_{ii} &= -\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_i} & \text{e} & \quad H_{ik} = -\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_k} \\ N_{ii} &= -V_i \frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_i} & \text{e} & \quad N_{ik} = -V_k \frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_k} \\ J_{ii} &= -\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_i} & \text{e} & \quad J_{ik} = -\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \theta_k} \\ L_{ii} &= -V_i \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_i} & \text{e} & \quad L_{ik} = -V_k \frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_k} \end{aligned}$$

A submatriz  $H$  é uma matriz quadrada com o número de linhas igual ao número de colunas e igual a  $NBPV+NBPQ$ .

A submatriz  $N$  é uma matriz com o número de linhas igual a  $NBPV+NBPQ$  e o número de colunas igual a  $NBPQ$ .

A submatriz  $J$  é uma matriz com o número de linhas igual a  $NBPQ$  e o número de colunas igual a  $NBPV+NBPQ$ .

A submatriz  $L$  é uma matriz quadrada com o número de linhas igual ao número de colunas e igual a  $NBPQ$ .

Vamos demonstrar a seguir as equações para o cálculo dos elementos do Jacobiano, dividindo-se em dois grupos: o dos elementos que são derivados das equações de um nó  $i$  em relação a variável do mesmo nó  $i$ , e o dos elementos que são derivados das equações de um nó  $i$  em relação a variável de um nó  $k$ , diferente de  $i$ .

Portanto:

$$\begin{aligned}
 H_{ii} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_i} [P_i - V_i V_1 G_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - V_i V_1 B_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) - \\
 &\quad - V_i V_2 G_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - V_i V_2 B_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) - \dots - V_i^2 G_{ii} - \dots - \\
 &\quad - V_i V_k G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - V_i V_k B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
 &\quad - V_i V_n G_{in} \cos(\theta_i - \theta_n) - V_i V_n B_{in} \sin(\theta_i - \theta_n)] = \\
 &= -V_i V_1 G_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) + V_i V_1 B_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - \\
 &\quad - V_i V_2 G_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) + V_i V_2 B_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - \dots + 0 - \dots - \\
 &\quad - V_i V_k G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + V_i V_k B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
 &\quad - V_i V_n G_{in} \sin(\theta_i - \theta_n) + V_i V_n B_{in} \cos(\theta_i - \theta_n) = \\
 &= -V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad \text{com } i \neq k
 \end{aligned}$$

Pois, para  $i = k$ , a derivada é nula e na equação anterior, quando  $i = k$ , o resultado é igual a  $V_i^2 B_{ii}$ . Portanto, podemos retirar a restrição subtraindo a parcela  $V_i^2 B_{ii}$  da equação de  $H_{ii}$ :

$$H_{ii} = -V_i^2 B_{ii} - \underbrace{V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik})}_{Q_i}$$

$$H_{ii} = -V_i^2 B_{ii} - Q_i \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
 H_{ik} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_k} [P_i - V_i V_1 G_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - V_i V_1 B_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) - \\
 &\quad - V_i V_2 G_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - V_i V_2 B_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) - \dots - V_i^2 G_{ii} - \dots - \\
 &\quad - V_i V_k G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - V_i V_k B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
 &\quad - V_i V_n G_{in} \cos(\theta_i - \theta_n) - V_i V_n B_{in} \sin(\theta_i - \theta_n)] = \\
 &= V_i V_k G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_1) - V_i V_k B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_1)
 \end{aligned}$$

$$H_{ik} = V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
N_{ii} &= -V_i \frac{\partial}{\partial V_i} [P_i - V_i V_1 G_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - V_i V_1 B_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) - \\
&\quad - V_i V_2 G_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - V_i V_2 B_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) - \dots - V_i^2 G_{ii} - \dots - \\
&\quad - V_i V_k G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - V_i V_k B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
&\quad - V_i V_n G_{in} \cos(\theta_i - \theta_n) - V_i V_n B_{in} \sin(\theta_i - \theta_n)] = \\
&= V_i V_1 G_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) + V_i V_1 B_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) + \\
&\quad + V_i V_2 G_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) + V_i V_2 B_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) + \dots + 2 V_i^2 G_{ii} + \dots + \\
&\quad + V_i V_k G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + V_i V_k B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + \dots + \\
&\quad + V_i V_n G_{in} \cos(\theta_i - \theta_n) + V_i V_n B_{in} \sin(\theta_i - \theta_n) = \\
&= V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad \text{com } i \neq k
\end{aligned}$$

Pois, para  $i = k$ , a derivada é  $2 V_i^2 G_{ii}$  e na equação anterior, quando  $i = k$ , o resultado é igual a  $V_i^2 G_{ii}$ . Portanto, podemos retirar a restrição adicionando a parcela  $V_i^2 G_{ii}$  na equação de  $N_{ii}$ :

$$N_{ii} = V_i^2 G_{ii} + \underbrace{V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik})}_{P_i}$$

$$N_{ii} = V_i^2 G_{ii} + P_i \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
N_{ik} &= -V_k \frac{\partial}{\partial V_k} [P_i - V_i V_1 G_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - V_i V_1 B_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) - \\
&\quad - V_i V_2 G_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - V_i V_2 B_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) - \dots - V_i^2 G_{ii} - \dots - \\
&\quad - V_i V_k G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - V_i V_k B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
&\quad - V_i V_n G_{in} \cos(\theta_i - \theta_n) - V_i V_n B_{in} \sin(\theta_i - \theta_n)] = \\
&= V_i V_k G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + V_i V_1 B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_1)
\end{aligned}$$

$$N_{ik} = V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
J_{ii} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_i} [Q_i - V_i V_1 G_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) + V_i V_1 B_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - \\
&\quad - V_i V_2 G_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) + V_i V_2 B_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - \dots + V_i^2 B_{ii} - \dots - \\
&\quad - V_i V_k G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + V_i V_k B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
&\quad - V_i V_n G_{in} \sin(\theta_i - \theta_n) + V_i V_n B_{in} \cos(\theta_i - \theta_n)] = \\
&= V_i V_1 G_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) + V_i V_1 B_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) + \\
&\quad + V_i V_2 G_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) + V_i V_2 B_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) + \dots - 0 + \dots + \\
&\quad + V_i V_k G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + V_i V_k B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + \dots + \\
&\quad + V_i V_n G_{in} \cos(\theta_i - \theta_n) + V_i V_n B_{in} \sin(\theta_i - \theta_n) = \\
&= V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad \text{com } i \neq k
\end{aligned}$$

Pois, para  $i = k$ , a derivada é nula e na equação anterior, quando  $i = k$ , o resultado é igual a  $V_i^2 G_{ii}$ . Portanto, podemos retirar a restrição subtraindo a parcela  $V_i^2 G_{ii}$  da equação de  $J_{ii}$ :

$$J_{ii} = -V_i^2 G_{ii} + \underbrace{V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik})}_{P_i}$$

$$J_{ii} = -V_i^2 G_{ii} + P_i \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
J_{ik} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_k} [Q_i - V_i V_1 G_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) + V_i V_1 B_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - \\
&\quad - V_i V_2 G_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) + V_i V_2 B_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - \dots + V_i^2 B_{ii} - \dots - \\
&\quad - V_i V_k G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + V_i V_k B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
&\quad - V_i V_n G_{in} \sin(\theta_i - \theta_n) + V_i V_n B_{in} \cos(\theta_i - \theta_n)] = \\
&= -V_i V_k G_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - V_i V_k B_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k)
\end{aligned}$$

$$J_{ik} = -V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
L_{ii} &= -V_i \frac{\partial}{\partial V_i} [Q_i - V_i V_1 G_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) + V_i V_1 B_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - \\
&\quad - V_i V_2 G_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) + V_i V_2 B_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - \dots + V_i^2 B_{ii} - \dots - \\
&\quad - V_i V_k G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + V_i V_k B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
&\quad - V_i V_n G_{in} \sin(\theta_i - \theta_n) + V_i V_n B_{in} \cos(\theta_i - \theta_n)] = \\
&= V_i V_1 G_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) - V_i V_1 B_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) + \\
&\quad + V_i V_2 G_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) - V_i V_2 B_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) + \dots - 2 V_i^2 B_{ii} + \dots + \\
&\quad + V_i V_k G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - V_i V_k B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) + \dots + \\
&\quad + V_i V_n G_{in} \sin(\theta_i - \theta_n) - V_i V_n B_{in} \cos(\theta_i - \theta_n) = \\
&= V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad \text{com } i \neq k
\end{aligned}$$

Pois, para  $i = k$ , a derivada é  $-2 V_i^2 B_{ii}$  e na equação anterior, quando  $i = k$ , o resultado é igual a  $-V_i^2 B_{ii}$ . Portanto, podemos retirar a restrição subtraindo a parcela  $V_i^2 B_{ii}$  na equação de  $L_{ii}$ :

$$L_{ii} = -V_i^2 B_{ii} + \underbrace{V_i \sum_{k=1}^n V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik})}_{Q_i}$$

$$L_{ii} = -V_i^2 B_{ii} + Q_i \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
L_{ik} &= -V_k \frac{\partial}{\partial V_k} [Q_i - V_i V_1 G_{i1} \sin(\theta_i - \theta_1) + V_i V_1 B_{i1} \cos(\theta_i - \theta_1) - \\
&\quad - V_i V_2 G_{i2} \sin(\theta_i - \theta_2) + V_i V_2 B_{i2} \cos(\theta_i - \theta_2) - \dots + V_i^2 B_{ii} - \dots - \\
&\quad - V_i V_k G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) + V_i V_k B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k) - \dots - \\
&\quad - V_i V_n G_{in} \sin(\theta_i - \theta_n) + V_i V_n B_{in} \cos(\theta_i - \theta_n)] = \\
&= V_i V_k G_{ik} \sin(\theta_i - \theta_k) - V_i V_k B_{ik} \cos(\theta_i - \theta_k)
\end{aligned}$$

$$L_{ik} = V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \quad (4.8)$$

Resumindo:

Para  $i \neq k$

$$\begin{aligned} H_{ik} &= L_{ik} = V_i V_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}) \\ N_{ik} &= -J_{ik} = V_i V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \end{aligned}$$

Para  $i = k$

$$\begin{aligned} H_{ii} &= -V_i^2 B_{ii} - Q_i \\ N_{ii} &= +V_i^2 G_{ii} + P_i \\ J_{ii} &= -V_i^2 G_{ii} + P_i \\ L_{ii} &= -V_i^2 B_{ii} + Q_i \end{aligned}$$

Com a demonstração das fórmulas de cálculo dos elementos do Jacobiano, podemos verificar que as modificações feitas no sistema simplificam bastante os cálculos de todos os seus elementos.

O Jacobiano é tão esparsa quanto as matrizes  $Y_P$  e  $Y_{bus}$ , pois quando não existe ligação entre dois nós, não existem os elementos respectivos nas matrizes  $Y_P$  e  $Y_{bus}$ , bem como também não existem os elementos  $H_{ik}$ ,  $N_{ik}$ ,  $J_{ik}$  e  $L_{ik}$  do Jacobiano.

Normalmente as matrizes  $Y_P$  e  $Y_{bus}$  são simétricas em estrutura e em valor, e neste caso basta armazenar os elementos da diagonal e os não nulos da parte acima da diagonal. O único caso em que estas matrizes não são simétricas em valor é quando existem transformadores defasadores no sistema elétrico, porém neste caso existem técnicas para manter a simetria em valor destas matrizes, com a relação de transformação e o defasamento sendo considerado através de injeções de corrente nas barras em que os transformadores defasadores estão conectados, como será mostrado no capítulo 6.

O Jacobiano é simétrico apenas em estrutura e, portanto é necessário armazenar todos os elementos não nulos desta matriz. Este só é simétrico em valor quando são desprezadas todas as resistências do sistema elétrico, como será mostrado no exemplo do capítulo 8.

## 5 Representação de Linhas de Transmissão

Uma linha de transmissão serve para transportar energia elétrica dos grandes centros produtores (usinas geradoras) para os grandes centros de consumo (cidades). A linha é representada por uma impedância longitudinal ( $R+jX$ ), que representa os efeitos das perdas por efeito Joule ( $R$ ) e do campo eletromagnético ( $X$ ), quando seus cabos condutores são percorridos por uma corrente elétrica, e por uma admitância transversal ( $G+jB$ ), que representa os efeitos da corrente de fuga através das cadeias de isoladores e perdas por efeito corona ( $G$ ) e do campo elétrico gerado entre os cabos e a terra ( $B$ ). Estes efeitos são distribuídos ao longo de todo o comprimento da linha e por isso os seus parâmetros são normalmente dados em  $\Omega/\text{km}$  para a impedância longitudinal e em  $\text{S}/\text{km}$  para a admitância transversal, como mostra a Figura 5.1.

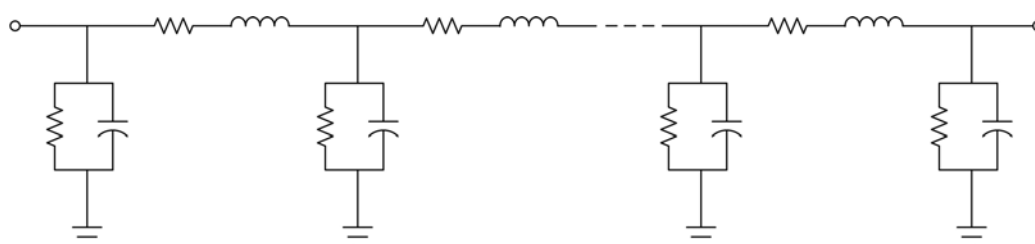


Figura 5.1 – Modelo Distribuído de uma Linha de Transmissão

Normalmente o efeito da condutância  $G$  é muito pequeno e pode ser desprezado para estudos de fluxo de carga. O que se pretende calcular é o modelo equivalente da linha de transmissão, isto é, os parâmetros concentrados da LT, com os parâmetros distribuídos  $z$  (impedância longitudinal em  $\Omega/\text{km}$ ) e  $y$  (admitância transversal em  $\text{S}/\text{km}$ ) conhecidos. Para isto vamos considerar o modelo elementar da linha de transmissão mostrado na Figura 5.2.

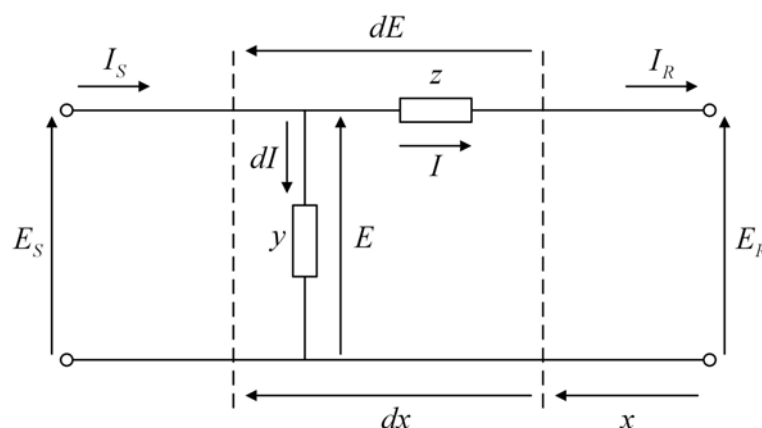


Figura 5.2 – Modelo Elementar Distribuído de uma Linha de Transmissão



onde:

$E_S$  – tensão no terminal transmissor

$E$  – tensão num ponto qualquer da LT

$E_R$  – tensão no terminal receptor

$dE$  – diferencial da tensão num ponto qualquer da LT

$x$  – distância ao terminal receptor

$dx$  – diferencial da distância

$I_S$  – corrente no terminal transmissor

$I$  – corrente num ponto qualquer da LT

$I_R$  – corrente no terminal receptor

$dI$  – diferencial da corrente desviada para a terra

Um cálculo aproximado é feito quando para obtermos os parâmetros concentrados, multiplicamos os parâmetros distribuídos pelo comprimento da LT. É claro que este cálculo só seria exato se não houvesse desvio de corrente para a terra, isto é, se  $I_S = I = I_R$  e se não houvesse diferença de potencial ao longo da LT, isto é, se  $E_S = E = E_R$ . Então quanto maior for o valor de  $y$ , maior será o erro cometido neste cálculo aproximado.

Vamos mostrar a seguir como se faz o cálculo exato dos parâmetros concentrados.

Pela Figura 5.2 podemos observar que:

$$dE = I z dx \quad (5.1)$$

$$dI = E y dx \quad (5.2)$$

ou:

$$\frac{dE}{dx} = I z \quad (5.3)$$

$$\frac{dI}{dx} = E y \quad (5.4)$$

Derivando as equações (5.3) e (5.4) em relação à  $x$ , temos:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = z \frac{dI}{dx} \quad (5.5)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = y \frac{dE}{dx} \quad (5.6)$$

Agora as equações diferenciais (5.5) e (5.6) devem ser resolvidas em relação a  $x$ . Para isto vamos utilizar a transformada de Laplace, sabendo que para  $x = 0$ ,  $I = I_R$  e  $E = E_R$  (condições iniciais).

Substituindo a equação (5.4) na equação (5.5), temos:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} - zyE(x) = 0 \quad (5.7)$$

Sabendo-se que:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(x_0) - s^{n-2} \frac{df(x_0)}{dx} - \dots - s \frac{d^{n-2}f(x_0)}{dx^{n-2}} - \frac{d^{n-1}f(x_0)}{dx^{n-1}}$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação (5.7), temos:

$$s^2 E(s) - sE(x_0) - E'(x_0) - zyE(s) = 0 \quad (5.8)$$

onde:

$$x_0 = 0$$

$$E(x_0) = E_R$$

$$E'(x_0) = \left. \frac{dE}{dx} \right|_{x=x_0} = I \left. z \right|_{x=x_0} = I_R z \quad (5.9)$$

Substituindo o resultado da equação (5.9) na equação (5.8), temos:

$$s^2 E(s) - s E_R - I_R z - zyE(s) = 0$$

ou:

$$(s^2 - zy) E(s) = s E_R + z I_R$$

então:

$$E(s) = \frac{s E_R + z I_R}{s^2 - zy} = E_R \frac{s}{s^2 - zy} + z I_R \frac{1}{s^2 - zy}$$

Sabendo-se que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 - a^2} \right] = \cosh(ax)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 - a^2} \right] = \frac{1}{a} \sinh(ax)$$

temos:

$$E(x) = E_R \cosh(\sqrt{zy} x) + z I_R \frac{1}{\sqrt{zy}} \sinh(\sqrt{zy} x)$$

ou:

$$E(x) = E_R \cosh(\sqrt{zy} x) + I_R \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh(\sqrt{zy} x) \quad (5.10)$$

Substituindo a equação (5.3) na equação (5.6), temos:

$$\frac{d^2 I(x)}{dx^2} - zyI(x) = 0 \quad (5.11)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação (5.11), temos:

$$s^2 I(s) - sI(x_0) - I'(x_0) - zyI(s) = 0 \quad (5.12)$$

onde:

$$x_0 = 0$$

$$I(x_0) = I_R$$

$$I'(x_0) = \left. \frac{dI}{dx} \right|_{x=x_0} = E y \Big|_{x=x_0} = E_R y \quad (5.13)$$

Substituindo o resultado da equação (5.13) na equação (5.12), temos:

$$s^2 I(s) - s I_R - E_R y - zy I(s) = 0$$

ou:

$$(s^2 - zy) I(s) = s I_R + y E_R$$

então:

$$I(s) = \frac{s I_R + y E_R}{s^2 - zy} = I_R \frac{s}{s^2 - zy} + y E_R \frac{1}{s^2 - zy}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, temos:

$$I(x) = I_R \cosh(\sqrt{zy} x) + y E_R \frac{1}{\sqrt{zy}} \sinh(\sqrt{zy} x)$$

ou:

$$I(x) = I_R \cosh(\sqrt{zy} x) + E_R \sqrt{\frac{y}{z}} \sinh(\sqrt{zy} x) \quad (5.14)$$

Quando  $x = \ell$  (comprimento da LT), temos:

$$E(\ell) = E_S = E_R \cosh(\sqrt{zy} \ell) + I_R \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh(\sqrt{zy} \ell)$$

$$I(\ell) = I_S = I_R \cosh(\sqrt{zy} \ell) + E_R \sqrt{\frac{y}{z}} \sinh(\sqrt{zy} \ell)$$

Em notação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{zy} \ell) & \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh(\sqrt{zy} \ell) \\ \sqrt{\frac{y}{z}} \sinh(\sqrt{zy} \ell) & \cosh(\sqrt{zy} \ell) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

Agora vamos considerar o modelo  $\pi$  equivalente mostrado na Figura 5.3.

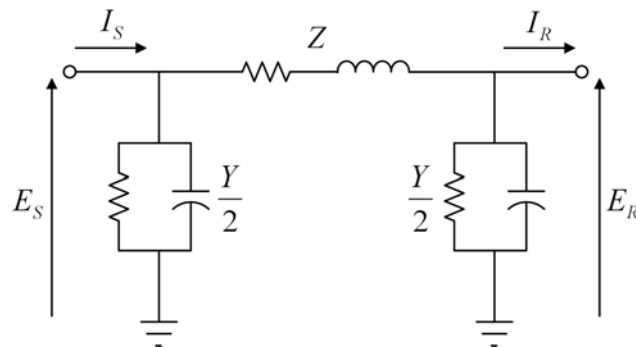


Figura 5.3 – Modelo  $\pi$  equivalente de uma LT

Podemos escrever as equações  $I_S$  e  $I_R$  fazendo o somatório das correntes nos terminais transmissor e receptor, como segue:

$$I_S = \frac{E_S - E_R}{Z} + E_S \frac{Y}{2} = E_S \left( \frac{1}{Z} + \frac{Y}{2} \right) - \frac{E_R}{Z} \quad (5.16)$$

$$-I_R = \frac{E_R - E_S}{Z} + E_R \frac{Y}{2} = E_R \left( \frac{1}{Z} + \frac{Y}{2} \right) - \frac{E_S}{Z} \quad (5.17)$$

Explicitando o valor de  $E_S$  na equação (5.17), temos:

$$E_S = E_R \left( \frac{1}{Z} + \frac{Y}{2} \right) Z + I_R Z$$

$$E_S = E_R \left( 1 + \frac{ZY}{2} \right) Z + I_R Z \quad (5.18)$$

Somando as equações (5.16) e (5.17), temos:

$$I_S - I_R = E_S \frac{Y}{2} + E_R \frac{Y}{2}$$

então:

$$I_S = (E_S + E_R) \frac{Y}{2} + I_R \quad (5.19)$$

Substituindo a equação (5.18) na equação (5.19), obtemos:

$$I_S = \left[ E_R \left( 1 + \frac{ZY}{2} \right) + I_R Z + E_R \right] \frac{Y}{2} + I_R = E_R \left( 2 + \frac{ZY}{2} \right) \frac{Y}{2} + I_R \frac{ZY}{2} + I_R$$

$$I_S = E_R \left( Y + \frac{ZY^2}{4} \right) + I_R \left( 1 + \frac{ZY}{2} \right) \quad (5.20)$$

Em notação matricial, as equações (5.18) e (5.20) ficam:

$$\begin{bmatrix} E_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ZY}{2} & Z \\ Y + \frac{ZY^2}{4} & 1 + \frac{ZY}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Comparando as equações (5.15) e (5.21), obtemos:

$$Z = \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh(\sqrt{zy} \ell) \quad (5.22)$$

$$1 + \frac{ZY}{2} = \cosh(\sqrt{zy} \ell)$$

então:

$$\frac{Y}{2} = \frac{\cosh(\sqrt{zy} \ell) - 1}{\sqrt{\frac{z}{y}} \sinh(\sqrt{zy} \ell)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cosh a - 1}{\sinh a} &= \frac{\frac{e^a + e^{-a}}{2} - 1}{\frac{e^a - e^{-a}}{2}} = \frac{e^a + e^{-a} - 2e^{a/2}e^{-a/2}}{e^a - e^{-a}} = \frac{(e^{a/2} - e^{-a/2})^2}{(e^{a/2} - e^{-a/2})(e^{a/2} + e^{-a/2})} = \\ &= \frac{(e^{a/2} - e^{-a/2})/2}{(e^{a/2} + e^{-a/2})/2} = \frac{\sinh(a/2)}{\cosh(a/2)} = \tanh(a/2) \end{aligned}$$

então:

$$\frac{Y}{2} = \sqrt{\frac{y}{z}} \tanh\left(\frac{\sqrt{zy} \ell}{2}\right) \quad (5.23)$$

Algumas constantes são definidas, como segue:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{z}{y}} \quad \text{impedância característica}$$

$$\gamma = \sqrt{zy} = \alpha + j\beta \quad \text{constante de propagação}$$

$$\alpha \quad \text{constante de atenuação}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{comprimento de onda}$$

$$v = \lambda f \quad \text{velocidade de propagação}$$

Então para determinarmos o circuito  $\pi$  equivalente de uma linha de transmissão, sendo dados os parâmetros distribuídos ( $z$ , em  $\Omega/\text{km}$  e  $y$ , em  $\text{S}/\text{km}$ ) e o comprimento da linha ( $\ell$ , em  $\text{km}$ ), basta aplicar as equações (5.22) e (5.23).

## 6 Representação de Transformadores

Para representar um transformador vamos considerá-lo como um transformador ideal com uma relação de transformação  $a$  (complexa) e conectado a este uma admitância em série, como mostra a Figura 6.1. Este modelo matemático despreza os efeitos da corrente de magnetização e das perdas no núcleo (histerese e correntes de Foucault), que para estudos de fluxo de carga pode ser feito sem perda significativa nos resultados dos cálculos.

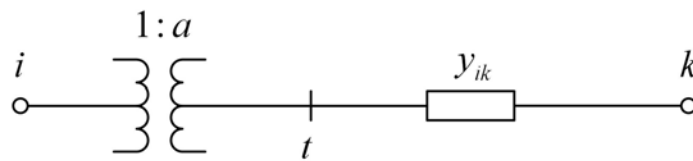


Figura 6.1 – Modelo de Transformador

Vamos considerar um nó intermediário  $t$  para facilitar a dedução das fórmulas.

A relação de transformação  $a$  é a razão entre a tensão do nó  $t$  e a tensão do nó  $i$ , isto é:

$$a = \frac{E_t}{E_i} \quad \text{ou} \quad E_t = a E_i$$

Como no transformador ideal a potência de entrada é igual à potência de saída, então:

$$S_{ik} = -S_{ti}$$

$$E_i I_{ik}^* = -E_t I_{ki}^* \quad \text{pois} \quad I_{ti} = I_{ki}$$

Substituindo  $E_t$ , temos:

$$E_i I_{ik}^* = -a E_i I_{ki}^*$$

$$I_{ik} = -a^* I_{ki}$$

$$I_{ki} = y_{ik} (E_k - E_t) = y_{ik} (E_k - a E_i) = -a y_{ik} E_i + y_{ik} E_k$$

$$I_{ik} = -a^* (-a y_{ik} E_i + y_{ik} E_k) = |a|^2 y_{ik} E_i - a^* y_{ik} E_k$$



Em notação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} I_{ik} \\ I_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a|^2 y_{ik} & -a^* y_{ik} \\ -a y_{ik} & y_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ E_k \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Podemos notar que, com a relação de transformação complexa, que caracteriza um transformador defasador (com ligação do tipo  $\Delta Y$  ou  $Y\Delta$ ), não podemos representá-lo por um modelo  $\pi$  equivalente, pois o elemento que liga o nó  $i$  ao nó  $k$  é diferente do elemento que liga o nó  $k$  ao nó  $i$ ; isto significa que as matrizes  $Y_p$  e  $Y_{bus}$  não são simétricas em valor, sendo apenas em estrutura. Neste caso temos apenas a representação matemática do modelo, isto é, na matriz  $Y_{bus}$  devemos adicionar o valor  $|a|^2 y_{ik}$  ao elemento  $Y_{bus}^{ii}$  e o valor  $y_{ik}$  ao elemento  $Y_{bus}^{kk}$ ; e devemos fazer  $Y_{bus}^{ik} = -a^* y_{ik}$  e  $Y_{bus}^{ki} = -a y_{ik}$ .

Quando a relação de transformação é um número real, representando um transformador cujo primário/secundário estão em fase (com ligação do tipo  $\Delta\Delta$  ou  $YY$ ), temos:

$$\begin{bmatrix} I_{ik} \\ I_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 y_{ik} & -a y_{ik} \\ -a y_{ik} & y_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i \\ E_k \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Neste caso podemos representá-lo pelo modelo  $\pi$  equivalente da Figura 6.2, cujos parâmetros são determinados como segue:

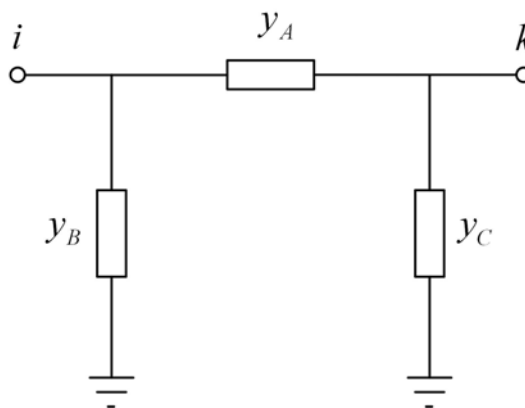


Figura 6.2 – Modelo  $\pi$  equivalente

Portanto:

$$y_A + y_B = a^2 y_{ik}$$

$$y_A = a y_{ik}$$

$$y_A + y_C = y_{ik}$$

então:

$$y_A = a y_{ik}$$

$$y_B = a(a-1)y_{ik}$$

$$y_C = (1-a)y_{ik}$$

O modelo  $\pi$  equivalente do transformador em função de  $y_{ik}$  e  $a$  é mostrado na Figura 6.3.

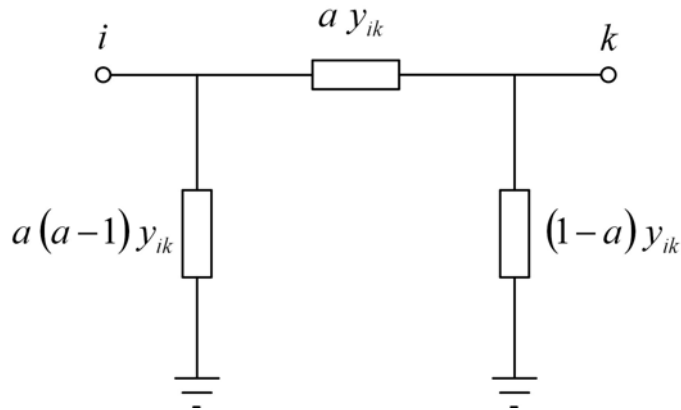


Figura 6.3 – Modelo  $\pi$  equivalente em função de  $y_{ik}$  e  $a$

Para contornar o problema da matriz  $Y_{bus}$  que perde a simetria nos nós onde existem transformadores defasadores, podemos considerar o modelo matemático mostrado na Figura 6.4 com uma injeção de corrente em cada uma das barras em que estes transformadores estão conectados, de forma a não considerar a defasagem e o tap fora do valor nominal. O valor destas injeções é determinado pela diferença do valor exato das correntes que fluem entre os nós envolvidos e o valor "errado" considerado nas seguintes equações:

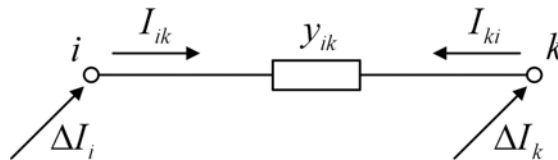


Figura 6.4 – Modelo de transformador defasador

$$I_{ik} = (E_i - E_k) y_{ik} = E_i y_{ik} - E_k y_{ik}$$

$$I_{ki} = (E_k - E_i) y_{ik} = E_k y_{ik} - E_i y_{ik}$$

Neste caso  $I_{ik} = -I_{ki}$

Comparando com os valores da equação matricial (6.1), temos:

$$\Delta I_i = |a|^2 y_{ik} E_i - a^* y_{ik} E_k - (E_i y_{ik} - E_k y_{ik})$$

$$\Delta I_i = (|a|^2 - 1) y_{ik} E_i - (a^* - 1) y_{ik} E_k \quad (6.3)$$

$$\Delta I_k = -a y_{ik} E_i + y_{ik} E_k - (E_k y_{ik} - E_i y_{ik})$$

$$\Delta I_k = -(a - 1) y_{ik} E_i \quad (6.4)$$

Durante a solução do sistema,  $\Delta I_i$  e  $\Delta I_k$  são calculados a cada iteração e os seus valores tendem ao valor correto quando o processo iterativo estiver convergido.

## 7 Representação de Cargas

A carga é provavelmente um dos elementos que mais influenciam os resultados da simulação dinâmica de um sistema elétrico, uma vez que este é bastante afetado pelo comportamento dinâmico da carga, principalmente no que diz respeito a sua variação com a tensão. Sob o ponto de vista de modelagem, as cargas podem ser divididas em:

**Cargas estáticas** – são aquelas que podem ser analisadas considerando-se apenas o seu comportamento para variações de tensão traduzidas por equações puramente algébricas. A representação adotada inclui uma combinação de parcelas do tipo potência constante, corrente constante e impedância constante que é dada por uma função do tipo polinômio de segundo grau, tradicionalmente denominada por modelo ZIP. Este modelo de carga é muito utilizado em estudos de fluxo de potência.

**Cargas dinâmicas** – são principalmente aquelas que requerem a modelagem do seu comportamento dinâmico. Nesta categoria encontram-se, por exemplo, os motores de indução e os motores síncronos. Os motores de indução requerem uma modelagem detalhada quando a sua tensão terminal fica abaixo de 0.9 pu, quando há um grande aumento da corrente drenada, com possibilidade de ocorrer o bloqueio do rotor e atuação da proteção, provocando o seu desligamento.

**Cargas termoestáticas** – são aquelas que possuem sistema de controle para manter a temperatura em determinado valor constante. Quando a tensão cai, a potência consumida também diminui, mas é restabelecida através do seu sistema de controle.

Neste capítulo daremos ênfase às cargas estáticas representadas pelo modelo **ZIP**. Cabe ressaltar a grande variação da carga no decorrer do dia, cujo comportamento típico depende do tipo de dia, isto é, se é dia útil, sábado, domingo ou feriado. A Figura 7.1 ilustra a curva de variação da carga do Sistema Interligado Nacional (SIN), no dia 10/04/2001, uma terça-feira, dia útil, quando foi registrado o máximo histórico até o ano de 2004. No horário entre 17:43 h e 18:42 h podemos notar um rampeamento da carga que em apenas 1 hora passa de 48.677 MW para 55.236 MW, com uma taxa de crescimento de 6.559 MW/h.

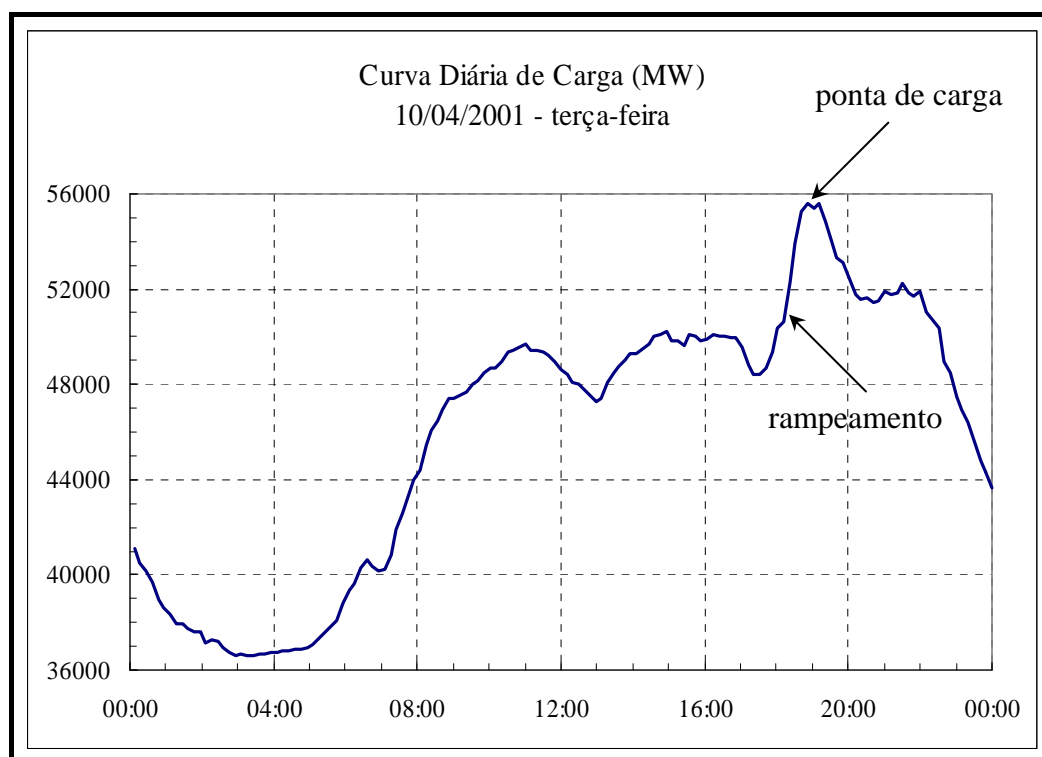


Figura 7.1 – Curva de Carga do Dia 10/04/2001

É comum em estudos de fluxo de potência em redes elétricas se considerar 3 níveis de carregamento do sistema elétrico, correspondentes às cargas pesada (ponta de carga), média (15h e 23h) e leve (madrugada). Em alguns casos ainda se estuda o sistema com o seu carregamento mínimo, que normalmente ocorre aos domingos. Pode parecer um paradoxo, mas o sistema fica mais vulnerável a colapsos nestes momentos, pois as máquinas geradoras trabalham na região de operação subexcitada, absorvendo a potência reativa gerada pelas linhas de transmissão em extra-alta tensão. Nestes instantes é recomendado que se desliguem algumas dessas linhas para evitar prováveis problemas de estabilidade eletromecânica, bem como para diminuir os investimentos em reatores dispostos em derivação, cuja função é absorver os reativos gerados pelas LT em EAT.

Como já falamos anteriormente o modelo ZIP adota uma combinação de parcelas do tipo potência constante, corrente constante e impedância constante caracterizada por uma parábola. A Figura 7.2 mostra o gráfico representativo deste modelo, mostrando como a carga varia com a tensão para cada tipo de comportamento.

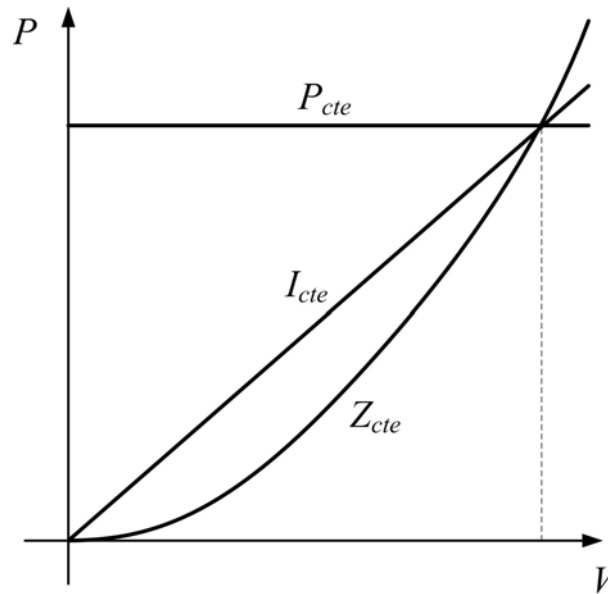


Figura 7.2 – Modelo ZIP de Carga

Como o modelo ZIP é formado por uma combinação destas parcelas, a sua equação é dada por:

$$P = AV^2 + BV + C \quad (7.1)$$

onde:

$A$  – parcela ativa da carga tipo Z constante

$B$  – parcela ativa da carga tipo I constante

$C$  – parcela ativa da carga tipo P constante

É comum modificar equação (7.1) acrescentando um parâmetro que fornece o valor da carga ativa para a tensão nominal.

$$P = P_0[(1 - \alpha - \beta) + \alpha V + \beta V^2] \quad (7.2)$$

onde:

$P_0$  – valor da carga ativa para tensão nominal (1 pu)

$\alpha$  – parcela ativa da carga tipo I constante, em pu

$\beta$  – parcela ativa da carga tipo Z constante, em pu

Comparando as equações (7.1) e (7.2) podemos obter:

$$A = P_0 \beta$$

$$B = P_0 \alpha$$

$$C = P_0 (1 - \alpha - \beta)$$

ou, conhecendo-se os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , determina-se:

$$P_0 = A + B + C$$

$$\alpha = \frac{B}{P_0}$$

$$\beta = \frac{A}{P_0}$$

Os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser determinados através de regressão de segundo grau, utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados.

Como em algumas situações o valor da carga ativa é conhecida para um valor de tensão diferente do valor nominal (1 pu), a seguinte modificação deve ser feita na sua equação:

$$P = P_0 \left[ (1 - \alpha - \beta) + \alpha \left( \frac{V}{V_0} \right) + \beta \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right] \quad (7.3)$$

Podemos notar pela equação (7.3) que agora  $P_0$  é o valor da carga ativa para tensão igual a  $V_0$ .

O comportamento da carga ativa tipo potência constante ou corrente constante não é adequado para tensões muito baixas, ou a partir de um determinado nível, sendo o modelo tipo impedância constante o que melhor representa a carga nesta situação. Com isso, a equação (7.3) é modificada para os casos em que a tensão fique abaixo de um determinado valor  $V_f$ .

$$P = P_0 \left[ (1 - \alpha - \beta) \left( \frac{V}{V_f} \right)^2 + \alpha \left( \frac{V^2}{V_f V_0} \right) + \beta \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right] \quad (7.4)$$

Pelas equações (7.3) e (7.4) podemos verificar que no momento da transição do valor da tensão em torno de  $V_f$  o valor da carga ativa não sofre descontinuidade, o que é desejável. Pela equação (7.3), para a tensão igual a  $V_f$ , temos o seguinte valor para a carga ativa:

$$P = P_0 \left[ (1 - \alpha - \beta) + \alpha \left( \frac{V_f}{V_0} \right) + \beta \left( \frac{V_f}{V_0} \right)^2 \right]$$

E pela equação (7.4), para a tensão igual a  $V_f$ , temos o seguinte valor para a carga ativa:

$$P = P_0 \left[ (1 - \alpha - \beta) \left( \frac{V_f}{V_f} \right)^2 + \alpha \left( \frac{V_f^2}{V_f V_0} \right) + \beta \left( \frac{V_f}{V_0} \right)^2 \right] = P_0 \left[ (1 - \alpha - \beta) + \alpha \left( \frac{V_f}{V_0} \right) + \beta \left( \frac{V_f}{V_0} \right)^2 \right]$$

A carga possui comportamento bastante distinto com a tensão no que se refere às suas componentes ativa e reativa. Com isto, devemos separar na sua modelagem as partes real e imaginária, ajustando adequadamente os parâmetros do modelo. O procedimento é similar ao que foi feito para a componente ativa da carga, como segue:

$$Q = D V^2 + E V + F \quad (7.5)$$

onde:

$D$  – parcela reativa da carga tipo Z constante

$E$  – parcela reativa da carga tipo I constante

$F$  – parcela reativa da carga tipo P constante



Também se modifica equação (7.5) acrescentando um parâmetro que fornece o valor da carga reativa para a tensão nominal.

$$Q = Q_0[(1 - \gamma - \delta) + \gamma V + \delta V^2] \quad (7.6)$$

onde:

$Q_0$  – valor da carga reativa para tensão nominal (1 pu)

$\gamma$  – parcela reativa da carga tipo I constante, em pu

$\delta$  – parcela reativa da carga tipo Z constante, em pu

Comparando as equações (7.5) e (7.6) podemos obter:

$$D = Q_0 \delta$$

$$E = Q_0 \gamma$$

$$F = Q_0(1 - \gamma - \delta)$$

ou, conhecendo-se os valores de  $D$ ,  $E$  e  $F$ , determina-se:

$$Q_0 = D + E + F$$

$$\gamma = \frac{E}{Q_0}$$

$$\delta = \frac{D}{Q_0}$$

Os valores de  $D$ ,  $E$  e  $F$  podem ser determinados através de regressão de segundo grau, utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados.

Como em algumas situações o valor da carga reativa é conhecida para um valor de tensão diferente do valor nominal (1 pu), a seguinte modificação deve ser feita na sua equação:

$$Q = Q_0 \left[ (1 - \gamma - \delta) + \gamma \left( \frac{V}{V_0} \right) + \delta \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right] \quad (7.7)$$

Podemos notar pela equação (7.7) que agora  $Q_0$  é o valor da carga reativa para tensão igual a  $V_0$ .

O comportamento da carga ativa tipo potência constante ou corrente constante não é adequado para tensões muito baixas, ou a partir de um determinado nível, sendo o modelo tipo impedância constante o que melhor representa a carga nesta situação. Com isso, a equação (7.7) é modificada para os casos em que a tensão fique abaixo de um determinado valor  $V_f$ .

$$Q = Q_0 \left[ (1 - \gamma - \delta) \left( \frac{V}{V_f} \right)^2 + \gamma \left( \frac{V^2}{V_f V_0} \right) + \delta \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right] \quad (7.8)$$

Pelas equações (7.7) e (7.8) podemos verificar que no momento da transição do valor da tensão em torno de  $V_f$  o valor da carga reativa não sofre descontinuidade, o que é desejável. Pela equação (7.7), para a tensão igual a  $V_f$ , temos o seguinte valor para a carga:

$$Q = Q_0 \left[ (1 - \gamma - \delta) + \gamma \left( \frac{V_f}{V_0} \right) + \delta \left( \frac{V_f}{V_0} \right)^2 \right]$$

E pela equação (7.8), para a tensão igual a  $V_f$ , temos o seguinte valor para a carga reativa:

$$Q = Q_0 \left[ (1 - \gamma - \delta) \left( \frac{V_f}{V_f} \right)^2 + \gamma \left( \frac{V_f^2}{V_f V_0} \right) + \delta \left( \frac{V_f}{V_0} \right)^2 \right] = Q_0 \left[ (1 - \gamma - \delta) + \gamma \left( \frac{V_f}{V_0} \right) + \delta \left( \frac{V_f}{V_0} \right)^2 \right]$$

Resumindo:

$$P = \begin{cases} P_0 \left[ (1 - \alpha - \beta) + \alpha \left( \frac{V}{V_0} \right) + \beta \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right] & \text{para } V \geq V_f \\ P_0 \left[ (1 - \alpha - \beta) \left( \frac{V}{V_f} \right)^2 + \alpha \left( \frac{V^2}{V_f V_0} \right) + \beta \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right] & \text{para } V < V_f \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} Q_0 \left[ (1 - \gamma - \delta) + \gamma \left( \frac{V}{V_0} \right) + \delta \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right] & \text{para } V \geq V_f \\ Q_0 \left[ (1 - \gamma - \delta) \left( \frac{V}{V_f} \right)^2 + \gamma \left( \frac{V^2}{V_f V_0} \right) + \delta \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right] & \text{para } V < V_f \end{cases}$$

A representação gráfica do modelo de carga para os tipos potência constante, corrente constante e impedância constante pode ser visto na Figura 7.3.

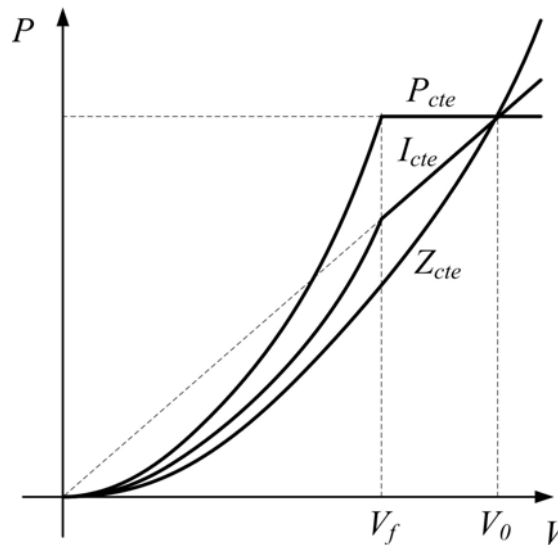


Figura 7.3 – Modelo ZIP Modificado de Carga

O comportamento com a tensão do modelo ZIP combinado para a carga ativa e reativa é mostrada na Figura 7.4.

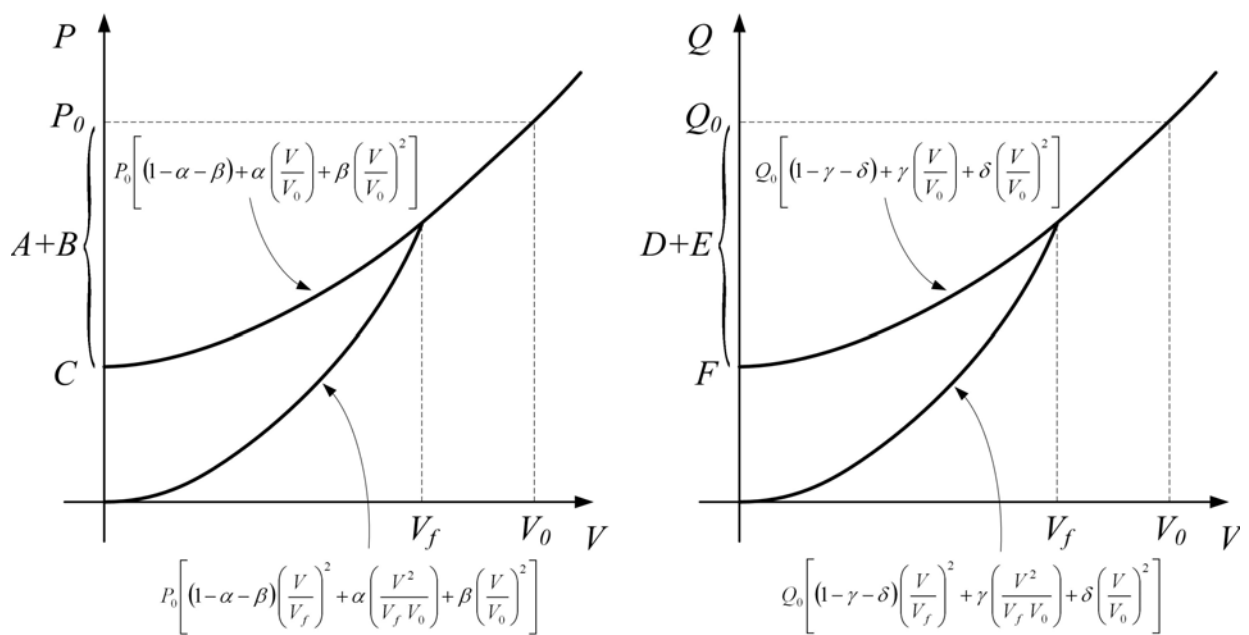


Figura 7.4 – Modelo ZIP Combinado para a Carga Ativa e Reativa

## 8 Exemplo

Vamos considerar o sistema elétrico mostrado na Figura 8.1:

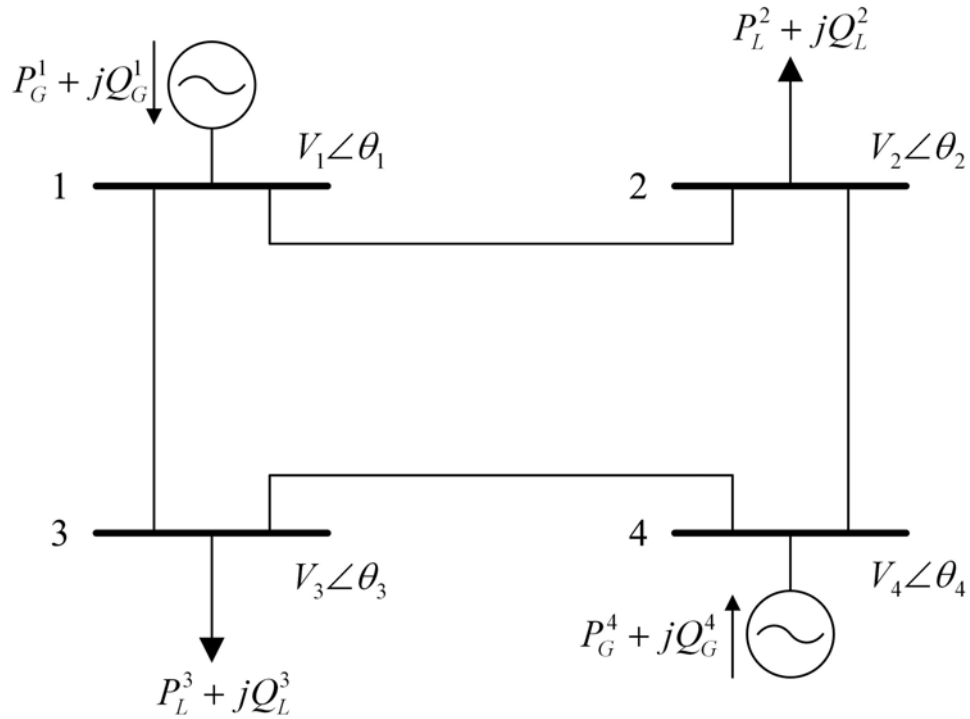


Figura 8.1 – Sistema Elétrico Exemplo

A matriz de admitância primitiva é:

$$Y_p = \begin{bmatrix} y_1^2 + y_1^3 & y_{12} & y_{13} & 0 \\ y_{21} & y_2^1 + y_2^4 & 0 & y_{24} \\ y_{31} & 0 & y_3^1 + y_3^4 & y_{34} \\ 0 & y_{42} & y_{43} & y_4^2 + y_4^3 \end{bmatrix}$$

A matriz de admitância nodal é:

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} y_1^2 + y_1^3 + y_{12} + y_{13} & -y_{12} & -y_{13} & 0 \\ -y_{21} & y_2^1 + y_2^4 + y_{21} + y_{24} & 0 & -y_{24} \\ -y_{31} & 0 & y_3^1 + y_3^4 + y_{31} + y_{34} & -y_{34} \\ 0 & -y_{42} & -y_{43} & y_4^2 + y_4^3 + y_{42} + y_{43} \end{bmatrix}$$

Supondo que os tipos das barras são:

barra	tipo	variáveis especificadas	variáveis calculadas
1	V $\theta$	V <sub>1</sub> e $\theta_1$	P <sub>1</sub> e Q <sub>1</sub>
2	PQ	P <sub>2</sub> e Q <sub>2</sub>	V <sub>2</sub> e $\theta_2$
3	PQ	P <sub>3</sub> e Q <sub>3</sub>	V <sub>3</sub> e $\theta_3$
4	PV	P <sub>4</sub> e V <sub>4</sub>	Q <sub>4</sub> e $\theta_4$

O sistema linearizado fica:

$$\begin{bmatrix} H_{22} & 0 & H_{24} & \vdots & N_{22} & 0 \\ 0 & H_{33} & H_{34} & \vdots & 0 & N_{33} \\ H_{42} & H_{43} & H_{44} & \vdots & N_{42} & N_{43} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{22} & 0 & J_{24} & \vdots & L_{22} & 0 \\ 0 & J_{33} & J_{34} & \vdots & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \\ \dots \\ \Delta V_2/V_2 \\ \Delta V_3/V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta P_4 \\ \dots \\ \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix}$$

onde:

$$H_{22} = -V_2^2 B_{22} - Q_2 \quad \text{onde } Q_2 = -Q_L^2$$

$$H_{33} = -V_3^2 B_{33} - Q_3 \quad \text{onde } Q_3 = -Q_L^3$$

$$H_{44} = -V_4^2 B_{44} - Q_4 \quad \text{onde } Q_4 = V_4 \sum_{k=1}^4 V_k (G_{4k} \sin \theta_{4k} - B_{4k} \cos \theta_{4k})$$

$$H_{24} = V_2 V_4 (G_{24} \sin \theta_{24} - B_{24} \cos \theta_{24})$$

$$H_{42} = V_4 V_2 (G_{42} \sin \theta_{42} - B_{42} \cos \theta_{42}) = V_2 V_4 (-G_{24} \sin \theta_{24} - B_{24} \cos \theta_{24}) \therefore H_{24} = H_{42} + 2V_2 V_4 G_{24} \sin \theta_{24}$$

$$H_{24} \neq H_{42} \quad \text{se } G_{24} = 0 \quad \text{então } H_{24} = H_{42}$$

$$H_{34} = V_3 V_4 (G_{34} \sin \theta_{34} - B_{34} \cos \theta_{34})$$

$$H_{43} = V_4 V_3 (G_{43} \sin \theta_{43} - B_{43} \cos \theta_{43}) = V_3 V_4 (-G_{34} \sin \theta_{34} - B_{34} \cos \theta_{34}) \therefore H_{34} = H_{43} + 2V_3 V_4 G_{34} \sin \theta_{34}$$

$$H_{34} \neq H_{43} \quad \text{se } G_{34} = 0 \quad \text{então } H_{34} = H_{43}$$

$$J_{22} = -V_2^2 G_{22} + P_2 \quad \text{onde } P_2 = -P_L^2$$

$$N_{22} = V_2^2 G_{22} + P_2 \therefore J_{22} = N_{22} - 2V_2^2 G_{22}$$

$$J_{22} \neq N_{22} \quad \text{se } G_{22} = 0 \quad \text{então } J_{22} = N_{22}$$

$$J_{33} = -V_3^2 G_{33} + P_3 \quad \text{onde } P_3 = -P_L^3$$

$$N_{33} = V_3^2 G_{33} + P_3 \therefore J_{33} = N_{33} - 2V_3^2 G_{33}$$

$$J_{33} \neq N_{33} \quad \text{se } G_{33} = 0 \quad \text{então } J_{33} = N_{33}$$

$$\begin{aligned}
J_{24} &= -V_2 V_4 (G_{24} \cos \theta_{24} + B_{24} \sin \theta_{24}) \\
N_{42} &= V_4 V_2 (G_{42} \cos \theta_{42} + B_{42} \sin \theta_{42}) = V_2 V_4 (G_{24} \cos \theta_{24} - B_{24} \sin \theta_{24}) \therefore J_{24} = N_{42} - 2V_2 V_4 G_{24} \cos \theta_{24} \\
J_{24} &\neq N_{42} \text{ se } G_{24} = 0 \text{ então } J_{24} = N_{42} \\
J_{34} &= -V_3 V_4 (G_{34} \cos \theta_{34} + B_{34} \sin \theta_{34}) \\
N_{43} &= V_4 V_3 (G_{43} \cos \theta_{43} + B_{43} \sin \theta_{43}) = V_3 V_4 (G_{34} \cos \theta_{34} - B_{34} \sin \theta_{34}) \therefore J_{34} = N_{43} - 2V_3 V_4 G_{34} \cos \theta_{34} \\
J_{34} &\neq N_{43} \text{ se } G_{34} = 0 \text{ então } J_{34} = N_{43} \\
L_{22} &= -V_2^2 B_{22} + Q_2 \text{ onde } Q_2 = -Q_L^2 \\
L_{33} &= -V_3^2 B_{33} + Q_3 \text{ onde } Q_3 = -Q_L^3
\end{aligned}$$

$$\Delta P_2 = P_2 - V_2 \sum_{k=1}^4 V_k (G_{2k} \cos \theta_{2k} + B_{2k} \sin \theta_{2k}) \text{ onde } P_2 = -P_L^2$$

$$\Delta P_3 = P_3 - V_3 \sum_{k=1}^4 V_k (G_{3k} \cos \theta_{3k} + B_{3k} \sin \theta_{3k}) \text{ onde } P_3 = -P_L^3$$

$$\Delta P_4 = P_4 - V_4 \sum_{k=1}^4 V_k (G_{4k} \cos \theta_{4k} + B_{4k} \sin \theta_{4k}) \text{ onde } P_4 = P_G^4$$

$$\Delta Q_2 = Q_2 - V_2 \sum_{k=1}^4 V_k (G_{2k} \sin \theta_{2k} - B_{2k} \cos \theta_{2k}) \text{ onde } Q_2 = -Q_L^2$$

$$\Delta Q_3 = Q_3 - V_3 \sum_{k=1}^4 V_k (G_{3k} \sin \theta_{3k} - B_{3k} \cos \theta_{3k}) \text{ onde } Q_3 = -Q_L^3$$

De acordo com o que foi exposto anteriormente, podemos afirmar que o Jacobiano só é simétrico em valor quando todas as resistências do sistema elétrico representado são nulas, e, portanto só há necessidade de se armazenar os elementos não nulos acima da diagonal, além dos elementos da diagonal.

Com o sistema linearizado resolvido, podemos atualizar os valores das variáveis de estado, sabendo-se que normalmente é considerado para os valores iniciais dos ângulos das tensões das barras 2, 3 e 4 iguais ao ângulo da tensão da barra 1 (*slack*), que serve de referência, e com o valor 1 para o módulo das tensões das barras 2 e 3. Esta inicialização das variáveis de estado é conhecida como “*Flat Start*”. A atualização das variáveis de estado é feita como segue:

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \theta_2 + \Delta \theta_2 \\
\theta_3 &= \theta_3 + \Delta \theta_3 \\
\theta_4 &= \theta_4 + \Delta \theta_4 \\
V_2 &= V_2 \left( 1 + \frac{\Delta V_2}{V_2} \right) \\
V_3 &= V_3 \left( 1 + \frac{\Delta V_3}{V_3} \right)
\end{aligned}$$

Com o sistema convergido, podemos calcular:

a) Fluxos nas linhas, utilizando as equações (3.1) e (3.2)

$$P_{12} = V_1^2(g_1^2 + g_{12}) - V_1V_2(g_{12} \cos \theta_{12} + b_{12} \sin \theta_{12})$$

$$Q_{12} = -V_1^2(b_1^2 + b_{12}) - V_1V_2(g_{12} \sin \theta_{12} - b_{12} \cos \theta_{12})$$

$$P_{21} = V_2^2(g_2^1 + g_{21}) - V_1V_2(g_{21} \cos \theta_{21} + b_{21} \sin \theta_{21})$$

$$Q_{21} = -V_2^2(b_2^1 + b_{21}) - V_1V_2(g_{21} \sin \theta_{21} - b_{21} \cos \theta_{21})$$

$$P_{13} = V_1^2(g_1^3 + g_{13}) - V_1V_3(g_{13} \cos \theta_{13} + b_{13} \sin \theta_{13})$$

$$Q_{13} = -V_1^2(b_1^3 + b_{13}) - V_1V_3(g_{13} \sin \theta_{13} - b_{13} \cos \theta_{13})$$

$$P_{31} = V_3^2(g_3^1 + g_{31}) - V_1V_3(g_{31} \cos \theta_{31} + b_{31} \sin \theta_{31})$$

$$Q_{31} = -V_3^2(b_3^1 + b_{31}) - V_1V_3(g_{31} \sin \theta_{31} - b_{31} \cos \theta_{31})$$

$$P_{24} = V_2^2(g_2^4 + g_{24}) - V_2V_4(g_{24} \cos \theta_{24} + b_{24} \sin \theta_{24})$$

$$Q_{24} = -V_2^2(b_2^4 + b_{24}) - V_2V_4(g_{24} \sin \theta_{24} - b_{24} \cos \theta_{24})$$

$$P_{42} = V_4^2(g_4^2 + g_{42}) - V_2V_4(g_{42} \cos \theta_{42} + b_{42} \sin \theta_{42})$$

$$Q_{42} = -V_4^2(b_4^2 + b_{42}) - V_2V_4(g_{42} \sin \theta_{42} - b_{42} \cos \theta_{42})$$

$$P_{34} = V_3^2(g_3^4 + g_{34}) - V_3V_4(g_{34} \cos \theta_{34} + b_{34} \sin \theta_{34})$$

$$Q_{34} = -V_3^2(b_3^4 + b_{34}) - V_3V_4(g_{34} \sin \theta_{34} - b_{34} \cos \theta_{34})$$

$$P_{43} = V_4^2(g_4^3 + g_{43}) - V_3V_4(g_{43} \cos \theta_{43} + b_{43} \sin \theta_{43})$$

$$Q_{43} = -V_4^2(b_4^3 + b_{43}) - V_3V_4(g_{43} \sin \theta_{43} - b_{43} \cos \theta_{43})$$

b) Potências ativa e reativa geradas na barra 1

$$P_G^1 = P_{13} + P_{12}$$

$$Q_G^1 = Q_{13} + Q_{12}$$

c) Potência reativa gerada na barra 4

$$Q_G^4 = Q_{42} + Q_{43}$$

d) Perdas ativa e reativa do sistema

$$\text{perda ativa} = P_G^1 + P_G^4 - P_L^2 - P_L^3$$

$$\text{perda reativa} = Q_G^1 + Q_G^4 - Q_L^2 - Q_L^3$$

No problema real, existem restrições para o valor da potência reativa gerada nas barras tipo PV, pois os geradores têm capacidade de geração de potência reativa limitada de acordo com o sistema de excitação. Assim sendo, ao se calcular o valor da potência reativa nas barras do tipo PV, deve-se verificar se este valor está compreendido entre os limites mínimo e máximo de geração de potência reativa. Caso tenha sido violado algum dos limites, o valor calculado da potência reativa deve ser substituído pelo valor do limite violado, e o tipo da barra deve ser trocado de PV para PQ, pois agora os valores de potência ativa e reativa injetada na barra são especificados e o valor do módulo da tensão que antes era especificado, passe a ser calculado. Com isto é importante que a cada iteração todas as variáveis sejam calculadas e não apenas as variáveis de estado.

É claro que, com a troca de tipos de barras PV e PQ durante a solução do problema, a estrutura do Jacobiano muda, pois novos elementos são incluídos quando a troca é de PV para PQ ou são excluídos quando a troca é de PQ para PV, para as barras que originalmente eram do tipo PV.



## 9 Referências Bibliográficas

- [1] Stott, B. – *Power System Load Flow Calculation*, Comissão de Publicações da COPPE/UFRJ PDD 16/78, 1978
- [2] Stagg, G. W. and El-Abiad, A. H. – *Computer Methods in Power System Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1968
- [3] Monticelli, A. J. – *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*, Editora Edgard Blücher Ltda., 1983
- [4] Stott, B. – *Review of Load Flow Calculation Methods*, Proceedings of the IEEE, Volume 62, No.7, pp.916-929, July, 1974
- [5] Stevenson Jr., W. D. – *Elements of Power System Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1962
- [6] Elgerd, O. I. – *Electric Energy Systems Theory: An Introduction*, McGraw-Hill Book Company, 1971
- [7] Neuenswander, J. R. – *Modern Power Systems*, International Textbook Company, 1971
- [8] Close, C. M. – *The Analysis of Linear Circuits*, Harcourt Brace and World Inc., 1966
- [9] Cheng, D.K. – *Analysis of Linear Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Third Edition, 1972
- [10] Kundur, P. – *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, New York, NY, USA, 1994
- [11] Guimarães, C. H. C. – *Simulação Dinâmica de Sistemas Elétricos de Potência Considerando os Fenômenos de Longa Duração*, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2003
- [12] CEPEL – *Manual do Usuário do Programa de Análise de Redes Elétricas - ANAREDE*, Rio de Janeiro, RJ, 2011
- [13] CEPEL – *Manual do Usuário do Programa de Análise de de Transitórios Eletromecânicos – ANATEM*, Rio de Janeiro, RJ, 2011

## 10 ANEXO

Vamos considerar o seguinte sistema não-linear a ser resolvido pelo método de Newton-Raphson:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Se todas as funções forem contínuas e deriváveis em todo o domínio, podemos desenvolvê-las em série de Taylor em torno de uma vizinhança  $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ , da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \\ \quad \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n + \\ \quad \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = 0 \\ f_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \\ \quad \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n + \\ \quad \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \\ \quad \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n + \\ \quad \phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = 0 \end{array} \right.$$

onde:

$(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  – vizinhança em torno do ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  – função das vizinhanças  $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  e das derivadas parciais de ordem superior a 1 da função  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em relação às variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$\phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  – função das vizinhanças  $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  e das derivadas parciais de ordem superior a 1 da função  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em relação às variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$\phi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  – função das vizinhanças  $(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  e das derivadas parciais de ordem superior a 1 da função  $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em relação às variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

A linearização do sistema de equações consiste em desprezarmos as derivadas parciais de ordem superior a 1, isto é, fazemos  $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n$ . Com isto podemos calcular, aproximadamente, os desvios  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  do sistema linear formado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

ou:  $J \Delta x = -f$

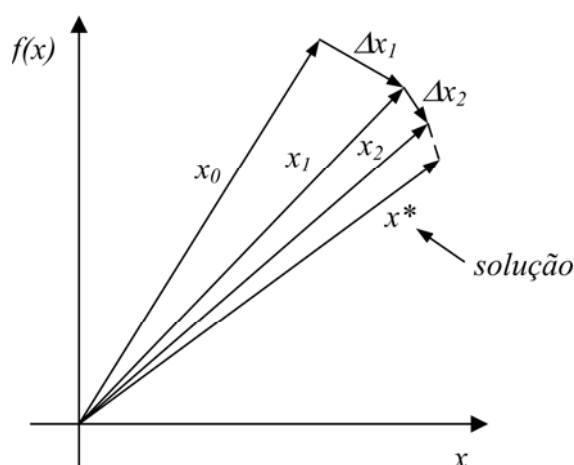
onde:

$J$  –Matriz Jacobiano do sistema de equações não-lineares

$\Delta x$  –Vetor de desvios das variáveis  $x_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$

$f$  –Vetor de funções que formam o sistema

Com o desenvolvimento de uma função em série de Taylor transforma-se esta em um polinômio de infinitos termos e a medida que o grau do termo vai aumentando o seu coeficiente vai diminuindo. A linearização é feita para tornar fácil a determinação do vetor de desvios  $\Delta x$ , pois se esta não fosse feita estaríamos modificando um sistema não-linear qualquer para um outro sistema não-linear de forma polinomial.



Pelo fato de fazermos a linearização do sistema de equações, a solução encontrada para o vetor  $x$  não é correta, porém espera-se que a atualização dos valores de  $x$ , fazendo  $x = x + \Delta x$ , fará com que os valores atuais de  $x$  estejam mais próximos da solução que os anteriores. Com os novos valores de  $x$  podemos formar o novo sistema linearizado no novo ponto estabelecido. Este processo é repetitivo e a cada iteração devemos testar os erros relativos referentes a cada valor de  $x$ . A solução será dada quando estes erros forem menores que uma tolerância, escolhida de forma adequada para satisfazer as condições de precisão desejada.