Exercício 6

November 16, 2020

1 Exercício PA2-6

Exercício com data de entrega para 16 de novembro de 2020.

Aluno: Noé de Lima Bezerra

noe_lima@id.uff.br

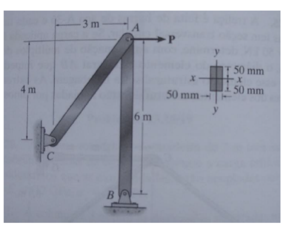
[1]:
```
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Image, IFrame
#from sympy.abc import x, y, z
sp.init_printing(use_latex='mathjax',latex_mode='equation*')
```

[2]:
```
Image("Figuras/PA2-6.png")
```

[2]:

AVALIAÇÃO 6 – FLAMBAGEM – CARGA CENTRADA– EXERCÍCIO 2

Determine a carga máxima P que a estrutura pode suportar sem perder sua estabilidade. Considere que as barras da estrutura são feitas de aço (E=200 GPa, σ_E =360MPa) e que suas extremidades estão presas por pinos para flambagem no eixo y-y e engastadas em ambas as extremidades para flambagem no eixo x-x.



2 Introdução

O índice de esbeltez de uma coluna é definido por $\frac{L_e}{r}$, onde:

- L_e é o comprimento efetivo, definido em funcão do tipo de apoio (condições de contorno);
- r é o raio de giração, definido por $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$, sendo I o menor momento de inércia da seção transversal e A a área desta seção.

Para colunas de aço, temos:

- Colunas extra longas, $200 < \frac{L_e}{r}$, não é recomendado para colunas de aço;
- Colunas longas, $C_C \leq \frac{L_e}{r} \leq 200$, fórmula de Euler utilizando Coeficiente de Segurança $C.S. = 1,92$. Ou seja:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{Cr}}{C.S.} = \frac{\pi^2 E}{1,92\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

- Colunas curtas ou intermediárias, $\frac{L_e}{r} \leq C_{Cr}$, fórmula empírica:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{Cr}}{C.S.} = \frac{\sigma_E}{C.S.}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{L_e}{r}}{C_{Cr}}\right)^2\right]$$

Para o coeficiente de segurança calculado conforme equação abaixo:

$$C.S. = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{\frac{L_e}{r}}{C_{Cr}} - \frac{1}{8}\left(\frac{\frac{L_e}{r}}{C_{Cr}}\right)^3$$

Onde:

$$C_{Cr}^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_E}$$

3 Solução

Abaixo, temos a definição simbólica para as unidades que serão utilizadas na solução: mm, MPa e kN.

[3]:
```
mm,MPa,kN = sp.symbols("mm,MPa,kN", positive=True)
```

A seguir, a atribuição das constantes dadas $E = 200\ GPa$ e $\sigma_E = 360\ MPa$, bem como o cálculo da área da seção transversal. Em seguida uma função que calcula o momento de inércia para uma seção retangular e, por fim, uma função para calcular o raio de giração em função do momento de inércia e da área.

[4]:
```
E = 200*1000*MPa
sigma_E = 360*MPa
A = 50*mm*100*mm
def I_rect(b,h):
    return b*(h**3)/12
```

```
def r_g(I,A):
    return sp.sqrt(I/A)
```

A função abaixo calcula a tensão admissível σ_{adm} para uma coluna de aço em função de L_e, r, σ_E e E.

[5]:
```
def sigma_aco(L_e,r,sigma_E,E):
    esb = L_e/r
    C_C = sp.sqrt(2*(sp.pi**2)*E/sigma_E)
    if esb > 200:
        return
    if esb > C_C:
        CS = 5/3 + (3/8)*(esb/C_C) - (1/8)*(esb/C_C)**3
        return (sigma_E/CS)*(1 - (1/2)*(esb/C_C)**2)
    else:
        CS = 192/100
        return (E/CS)*(sp.pi/esb)**2
def sigma_adm(L_e,r,sigma_E,E):
    esb = L_e/r
    return E*(sp.pi/esb)**2
```

As relações de equilíbrio nos fornecem:

- $\sum_{F_x} = 0 \therefore R_{Cx} + R_{Bx} + P = 0$
- $\sum_{F_y} = 0 \therefore R_{Cy} + R_{By} = 0$
- $\sum_{MA} = 0 \therefore -R_{Cy} \times 3 + R_{Cx} \times 4 = 0$
- $\sum_{MA} = 0 \therefore R_{Bx} \times 6 = 0$

[6]:
```
P = sp.symbols('P')
K = sp.Matrix([[1,0,1,0],[0,1,0,1],[0,0,4,-3],[6,0,0,0]])
f = sp.Matrix([[-P],[0],[0],[0]])
display(K.solve(f))
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4P}{3} \\ -P \\ -\frac{4P}{3} \end{bmatrix}$$

Ou seja:

- $R_{Ax} = 0$
- $R_{Ay} = \frac{4}{3}P$
- $R_{Cx} = -P$
- $R_{Cy} = -\frac{4}{3}P$

Considerando $P > 0$, temos que considerar a flambagem apenas na coluna AB, já que, neste caso, a barra AC sofre tração.

Temos, pelas relações de equilíbrio, $P_{AB} = \frac{4}{3}P$. Logo, $P_{max} = \frac{3}{4}A\sigma_{adm}$

[7]:
```
r_x = r_g(I_rect(50*mm,100*mm),A)
r_y = r_g(I_rect(100*mm,50*mm),A)
display(r_x,r_y)
```

$$\frac{50\sqrt{3}mm}{3}$$

$$\frac{25\sqrt{3}mm}{3}$$

O comprimento efetivo L_e será o comprimento L da coluna na direção yy, pois neste caso ela será bi-articulada, e $\frac{L}{2}$ na direção xx, onde temos um duplo engaste.

3.1 Coluna AB

Neste caso, temos $L = 6\ m = 6.000\ mm$. Portanto:

- $L_{ex} = 3.000\ mm$
- $L_{ey} = 6.000\ mm$

Os coeficientes de esbeltez nas direções x e y são, respectivamente:

[8]:
```
L_ex = 3000*mm
L_ey = 6000*mm
display(L_ex/r_x,L_ey/r_y)
```

$$60\sqrt{3}$$

$$240\sqrt{3}$$

Portanto, o índice de esbeltez de maior valor é a flambagem em torno de yy:

$$\frac{L_{ey}}{r_y} = 240\sqrt{3} \approx 415,7 > 200$$

Neste caso, não é recomendado este projeto de coluna em aço.

Entretanto, caso este limite seja ignorado, temos a seguinte tensão admissível, calculada pelo método de Euler:

[9]:
```
sigma = sigma_adm(L_ey,r_y,sigma_E,E)
display(sigma)
```

$$\frac{125\pi^2 MPa}{108}$$

Assim, este valor leva a um $P_{max} = \frac{3}{4}A\sigma_{adm}$ tal que:

[10]:
```
P_max = (3/4)*A*sigma
display(float(P_max.subs(MPa*mm**2,1))*kN/1000)
```

$$42.8368246575059kN$$

Ou seja,

$$P = 42,8 \ \ kN$$

[11]:
```
display(P_max.subs(sp.pi,np.pi)/A)
```

$$8.56736493150118MPa$$

Este valor causa uma tensão normal de $8,57 \ MPa$, que está dentro do limite do material.