Exercício 5

December 6, 2020

1 Exercício PA3-5

Exercício com data de entrega para 7 de dezembro de 2020.

Aluno: Noé de Lima Bezerra

noe_lima@id.uff.br

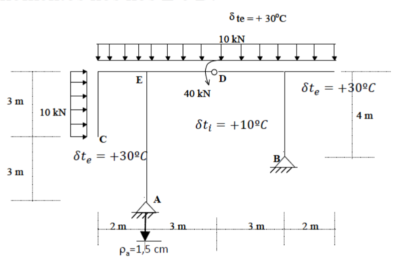
[1]:
```python
import numpy as np
import sympy as sp
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Image, IFrame
from sympy.abc import x, y, z
sp.init_printing(use_latex='mathjax',latex_mode='equation*')
```

[2]:
```python
Image("Figuras/PA3-5.png")
```

[2]:

AVALIAÇÃO 5-PA3 – PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS– EXERCÍCIO 2

A estrutura abaixo é submetida às cargas, variações de temperatura e recalque do apoio A indicados na figura. Todas as barras têm seção retangular de 0,5 m de altura. Calcular o deslocamento horizontal do nó C. EI_c = 10^5 kN.m^2 , $\alpha = 10^{-5}$ /°C.
Observação: apresentar de forma detalhada as equações de equilíbrio para o cálculo das reações de apoio e a obtenção dos momentos nos nós E e D.



2 Formulário

2.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \int \frac{\bar{M}_i M_i}{EI_i} \mathrm{d}x$$

2.2 Temperatura

2.2.1 Barras Com Seção Transversal Constante

$$\delta = \alpha \cdot \delta t_g \cdot A_{\bar{N}} + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{h} A_{\bar{M}}$$

Onde,

- $A_{\bar{N}}$ é a área dos diagramas de esforço normal;
- $A_{\bar{M}}$ é a área dos diagramas de momento fletor;
- δt_g é a variação média de temperatura;
- Δt é a diferença de temperatura $\Delta t = \delta t_i - \delta t_e$ (temperatura interna menos a temperatura externa).

2.2.2 Barras Com Seção Transversal Variável

$$\delta = \alpha \int_l \bar{N} \delta t_g \mathrm{d}s + \alpha \cdot \Delta t \int_l \frac{\bar{M}}{h} \mathrm{d}s$$

2.3 Recalque

$$\delta = -\sum \bar{R} \cdot \rho$$

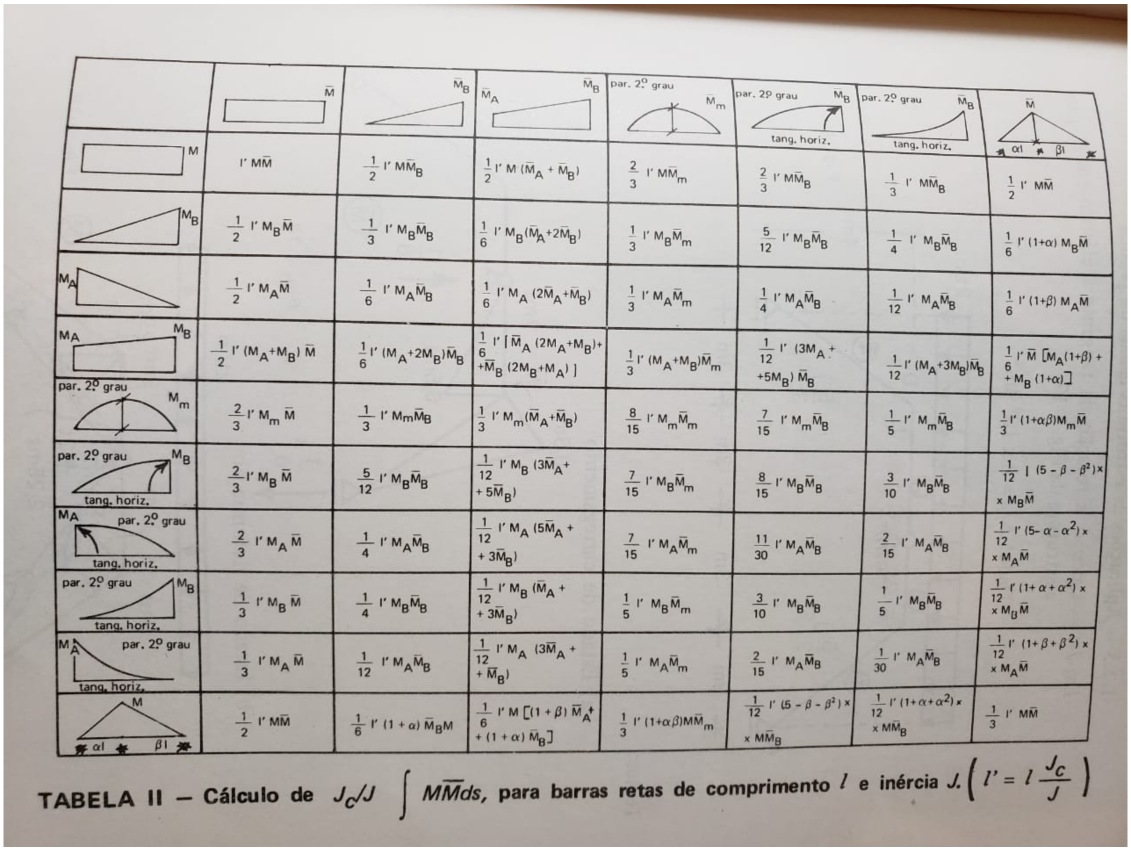
2.4 Utilização

Calcular o deslocamento para os esforços no Estado de Deformação, em seguida, calcular o deslocamento em função da Temperatura e, em seguida, o deslocamento em função dos recalques. Por último, devido à linearidade, utilizar a superposição de efeitos e somar os resultados.

Para fins práticos, temos uma tabela com diversas integrais comuns já calculadas e disponíveis para utilização.

[3]:
```
Image("Figuras/tabela integrais.jpg")
```

[3]:



	$\bar{M}$	$\bar{M}_B$	$\bar{M}_A$ $\bar{M}_B$	par. 2º grau $\bar{M}_m$	par. 2º grau $\bar{M}_B$ tang. horiz.	par. 2º grau $\bar{M}_B$ tang. horiz.	$\bar{M}$ αl βl
M	$l' M\bar{M}$	$\frac{1}{2} l' M\bar{M}_B$	$\frac{1}{2} l' M(\bar{M}_A+\bar{M}_B)$	$\frac{2}{3} l' M\bar{M}_m$	$\frac{2}{3} l' M\bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M\bar{M}_B$	$\frac{1}{2} l' M\bar{M}$
M_B	$\frac{1}{2} l' M_B\bar{M}$	$\frac{1}{3} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' M_B(\bar{M}_A+2\bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} l' M_B\bar{M}_m$	$\frac{5}{12} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{4} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' (1+\alpha) M_B\bar{M}$
M_A	$\frac{1}{2} l' M_A\bar{M}$	$\frac{1}{6} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' M_A(2\bar{M}_A+\bar{M}_B)$	$\frac{1}{3} l' M_A\bar{M}_m$	$\frac{1}{4} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' (1+\beta) M_A\bar{M}$
M_A M_B	$\frac{1}{2} l' (M_A+M_B)\bar{M}$	$\frac{1}{6} l' (M_A+2M_B)\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' [\bar{M}_A(2M_A+M_B)+\bar{M}_B(2M_B+M_A)]$	$\frac{1}{3} l' (M_A+M_B)\bar{M}_m$	$\frac{1}{12} l' (3M_A+5M_B)\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (M_A+3M_B)\bar{M}_B$	$\frac{1}{6} l' \bar{M}[M_A(1+\beta)+M_B(1+\alpha)]$
par. 2º grau M_m	$\frac{2}{3} l' M_m\bar{M}$	$\frac{1}{3} l' M_m\bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M_m(\bar{M}_A+\bar{M}_B)$	$\frac{8}{15} l' M_m\bar{M}_m$	$\frac{7}{15} l' M_m\bar{M}_B$	$\frac{1}{5} l' M_m\bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' (1+\alpha\beta) M_m\bar{M}$
par. 2º grau M_B tang. horiz.	$\frac{2}{3} l' M_B\bar{M}$	$\frac{5}{12} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_B(3\bar{M}_A+5\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} l' M_B\bar{M}_m$	$\frac{8}{15} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{3}{10} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l (5-\beta-\beta^2)\times M_B\bar{M}$
M_A par. 2º grau tang. horiz.	$\frac{2}{3} l' M_A\bar{M}$	$\frac{1}{4} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A(5\bar{M}_A+3\bar{M}_B)$	$\frac{7}{15} l' M_A\bar{M}_m$	$\frac{11}{30} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{2}{15} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (5-\alpha-\alpha^2)\times M_A\bar{M}$
par. 2º grau M_B tang. horiz.	$\frac{1}{3} l' M_B\bar{M}$	$\frac{1}{4} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_B(\bar{M}_A+3\bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} l' M_B\bar{M}_m$	$\frac{3}{10} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{5} l' M_B\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1+\alpha+\alpha^2)\times M_B\bar{M}$
M_A par. 2º grau tang. horiz.	$\frac{1}{3} l' M_A\bar{M}$	$\frac{1}{12} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' M_A(3\bar{M}_A+\bar{M}_B)$	$\frac{1}{5} l' M_A\bar{M}_m$	$\frac{2}{15} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{30} l' M_A\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1+\beta+\beta^2)\times M_A\bar{M}$
M αl βl	$\frac{1}{2} l' M\bar{M}$	$\frac{1}{6} l' (1+\alpha)\bar{M}_B M$	$\frac{1}{6} l' M[(1+\beta)\bar{M}_A+(1+\alpha)\bar{M}_B]$	$\frac{1}{3} l' (1+\alpha\beta)M\bar{M}_m$	$\frac{1}{12} l' (5-\beta-\beta^2)\times M\bar{M}_B$	$\frac{1}{12} l' (1+\alpha+\alpha^2)\times M\bar{M}_B$	$\frac{1}{3} l' M\bar{M}$

TABELA II – Cálculo de $J_c/J \int M\bar{M}ds$, **para barras retas de comprimento** l **e inércia** J. $\left(l' = l\,\frac{J_c}{J}\right)$

3 Solução

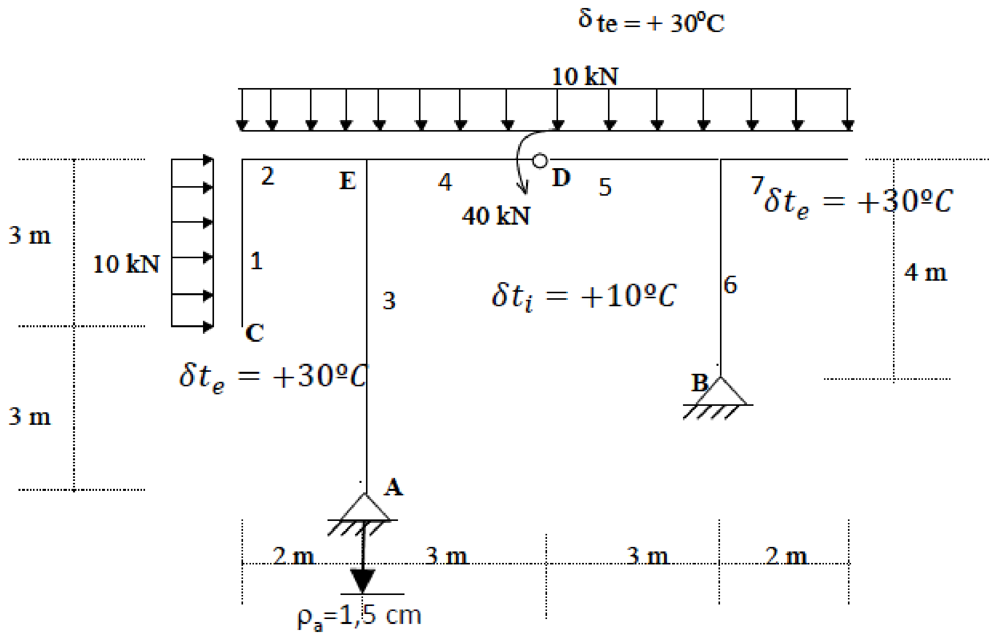
[4]:
```python
kN,m,C = sp.symbols('kN,m,C',positive=True)
M,M_b = sp.symbols('M,M_b',cls=sp.Function)
EI,l = sp.symbols('EI,l',positive=True)
delta_i = sp.Integral(M(x)*M_b(x)/EI,(x,0,l))
display(delta_i)
```

$$\int_0^l \frac{M(x)\,\mathrm{M_b}(x)}{EI}\,dx$$

Para integrar os momentos fletores, as barras seguirão a numeração da figura abaixo:

[5]:
```python
Image("Figuras/PA3-5-0.png")
```

[5]:



3.1 Estado de Deformação

Vamos utilizar as equações de equilíbrio para obter as reações de apoio. Assim, temos:

$$\sum_{F_x} = 0 \therefore$$

$$10 \times 3 + H_A + H_B = 0 \therefore$$

$$H_A + H_B = -30 \;\; kN$$

$$\sum_{F_y} = 0 \therefore$$

$$-10 \times 10 + V_A + V_B = 0 \therefore$$

$$V_A + V_B = 100 \;\; kN$$

$$\sum_{M_A} = 0 \therefore$$

$$-10 \times 3 \times \left(3 + \frac{3}{2}\right) - 10 \times 10 \times 3 - H_B \times 2 + V_B \times 6 + 40 = 0 \therefore$$

$$-2H_B + 6V_B = 395 \;\; kN \cdot m$$

$$\sum_{M_{D+}} = 0 \therefore$$

$$-10 \times 5 \times \frac{5}{2} + H_B \times 4 + V_B \times 3 = 0 \therefore$$

$$4H_B + 3V_B = 125 \;\; kN \cdot m$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_B \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 100 \\ 395 \\ 125 \end{bmatrix}$$

[6]:
```
K = sp.Matrix([[1,0,1,0],[0,1,0,1],[0,0,-2,6],[0,0,4,3]])
f = sp.Matrix([[-30],[100],[395],[125]])
display(K.solve(f))
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{31}{2} \\ 39 \\ -\frac{29}{2} \\ 61 \end{bmatrix}$$

Assim, as reações de apoio são:

- $H_A = -\frac{31}{2} \;\; kN = -15,5 \;\; kN$
- $V_A = 39 \;\; kN$
- $H_B = -\frac{29}{2} \;\; kN = 14,5 \;\; kN$
- $V_B = 61 \;\; kN$

3.2 Estado de Carregamento

Como estamos interessados no deslocamento horizontal no nó C, vamos inserir uma carga virtual $P = 1$, na direção positiva de x, no nó C.

Vamos utilizar as mesmas equações de equilíbrio do Estado de Deformação para obter as reações de apoio.

$$\sum_{F_x} = 0 \therefore$$

$$1 + H_A + H_B = 0 \therefore$$

$$H_A + H_B = -1$$

$$\sum_{F_y} = 0 \therefore$$

$$V_A + V_B = 0$$

$$\sum_{M_A} = 0 \therefore$$

$$-1 \times 3 - H_B \times 2 + V_B \times 6 = 0 \therefore$$

$$-2H_B + 6V_B = 3$$

$$\sum_{M_{D+}} = 0 \therefore$$

$$4H_B + 3V_B = 0$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_B \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[7]:
```
K = sp.Matrix([[1,0,1,0],[0,1,0,1],[0,0,-2,6],[0,0,4,3]])
f = sp.Matrix([[-1],[0],[3],[0]])
display(K.solve(f))
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{7}{10} \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Assim, as reações de apoio são:

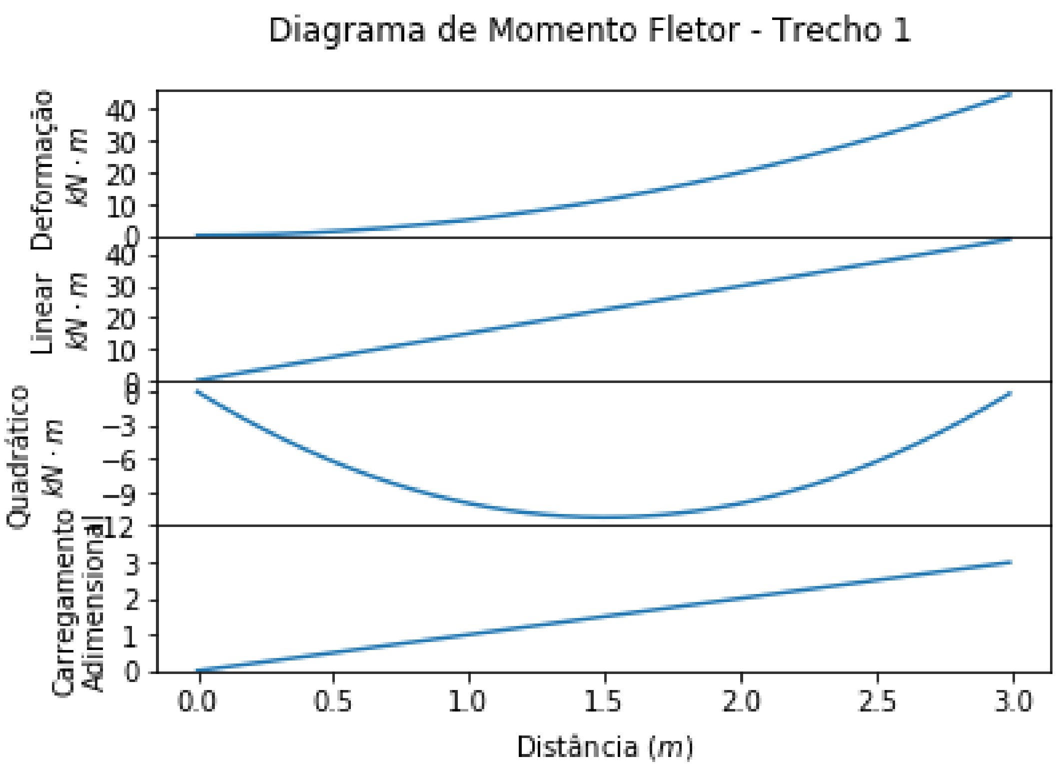
- $H_A = -\frac{7}{10}\ \ kN = -0,7\ \ kN$
- $V_A = -\frac{2}{5}\ \ kN = -0,4\ \ kN$
- $H_B = -\frac{3}{10}\ \ kN = -0,3\ \ kN$
- $V_B = \frac{2}{5}\ \ kN = 0,4\ \ kN$

3.3 Barra 1

[8]:
```
t = np.arange(0.0, 3.0, 0.01)

s1 = 10*(t**2)/2
s2 = 45*t/3
s3 = (10/2)*(t**2 - 3*t)
s4 = t

fig, axs = plt.subplots(4, 1, sharex=True)
# Remove horizontal space between axes
fig.subplots_adjust(hspace=0)
fig.suptitle('Diagrama de Momento Fletor - Trecho 1')


# Plot each graph, and manually set the y tick values
axs[0].plot(t, s1)
axs[0].set_yticks(np.arange(0., 46.0, 10))
axs[0].set_ylim(0, 46)
axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')

axs[1].plot(t, s2)
axs[1].set_yticks(np.arange(0., 46.0, 10))
axs[1].set_ylim(0, 46)
axs[1].set_ylabel('Linear\n$kN\cdot m$')

axs[2].plot(t, s3)
axs[2].set_yticks(np.arange(-12., 1., 3))
axs[2].set_ylim(-12, 1)
axs[2].set_ylabel('Quadrático\n$kN\cdot m$')

axs[3].plot(t, s4)
axs[3].set_yticks(np.arange(0., 4.0, 1))
axs[3].set_ylim(0, 4)
axs[3].set_ylabel('Carregamento\nAdimensional')
axs[3].set_xlabel('Distância ($m$)')

plt.show()
```

```
<>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
```

```
<>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<ipython-input-8-89e0935ca60b>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')
<ipython-input-8-89e0935ca60b>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[1].set_ylabel('Linear\n$kN\cdot m$')
<ipython-input-8-89e0935ca60b>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[2].set_ylabel('Quadrático\n$kN\cdot m$')
```



Temos, portanto, duas componentes a integrar separadamente e somar por superposição. Uma componente linear, e outra quadrática.

Temos as seguintes equações:

3.3.1 Linear

$$\frac{1}{3}l' M_B \bar{M}_B$$

3.3.2 Parábola

$$\frac{1}{3}l' M_m \bar{M}_B$$

Onde $l' = l\frac{J_C}{J} = \frac{l}{EI}$

[9]:
```
delta_1 = (3/EI)*((1/3)*45*3 + (1/3)*(10*(3**2)/8)*3)
display(delta_1)
```

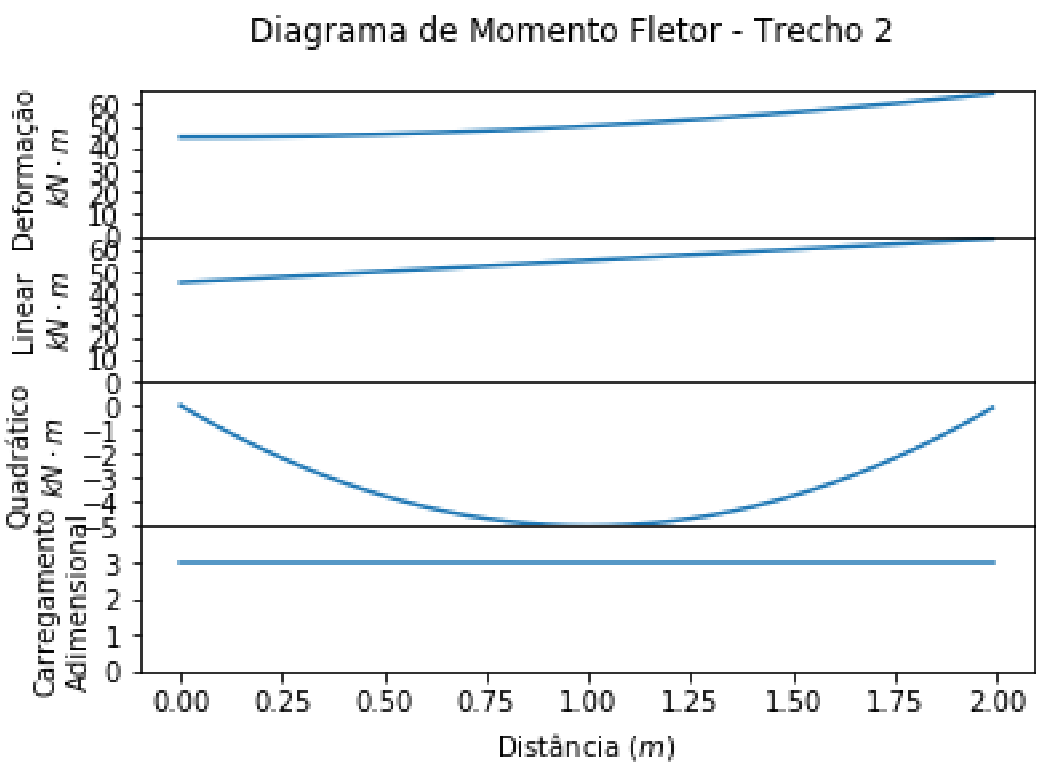
$$\frac{168.75}{EI}$$

3.4 Barra 2

[10]:
```
t = np.arange(0.0, 2.0, 0.01)

s1 = 45 + 10*(t**2)/2
s2 = (65-45)*t/2 + 45
s3 = (10/2)*(t**2 - 2*t)
s4 = 0*t+3

fig, axs = plt.subplots(4, 1, sharex=True)
# Remove horizontal space between axes
fig.subplots_adjust(hspace=0)
fig.suptitle('Diagrama de Momento Fletor - Trecho 2')


# Plot each graph, and manually set the y tick values
axs[0].plot(t, s1)
axs[0].set_yticks(np.arange(0., 66.0, 10))
axs[0].set_ylim(0, 66)
axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')

axs[1].plot(t, s2)
axs[1].set_yticks(np.arange(0., 66.0, 10))
axs[1].set_ylim(0, 66)
axs[1].set_ylabel('Linear\n$kN\cdot m$')

axs[2].plot(t, s3)
axs[2].set_yticks(np.arange(-5., 1., 1))
axs[2].set_ylim(-5, 1)
axs[2].set_ylabel('Quadrático\n$kN\cdot m$')

axs[3].plot(t, s4)
axs[3].set_yticks(np.arange(0., 4.0, 1))
axs[3].set_ylim(0, 4)
axs[3].set_ylabel('Carregamento\nAdimensional')
axs[3].set_xlabel('Distância ($m$)')
```

```python
plt.show()
```

```
<>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<ipython-input-10-7179bbc18474>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')
<ipython-input-10-7179bbc18474>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[1].set_ylabel('Linear\n$kN\cdot m$')
<ipython-input-10-7179bbc18474>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[2].set_ylabel('Quadrático\n$kN\cdot m$')
```



Neste caso, a figura é composta, como no anterior, mas não mais por um triângulo, mas sim por um trapézio. Assim, para esta configuração, temos:

3.4.1 Linear

$$\frac{1}{2}l'\left(M_A+M_B\right)\bar{M}$$

3.4.2 Parábola

$$\frac{2}{3}l'M_m\bar{M}$$

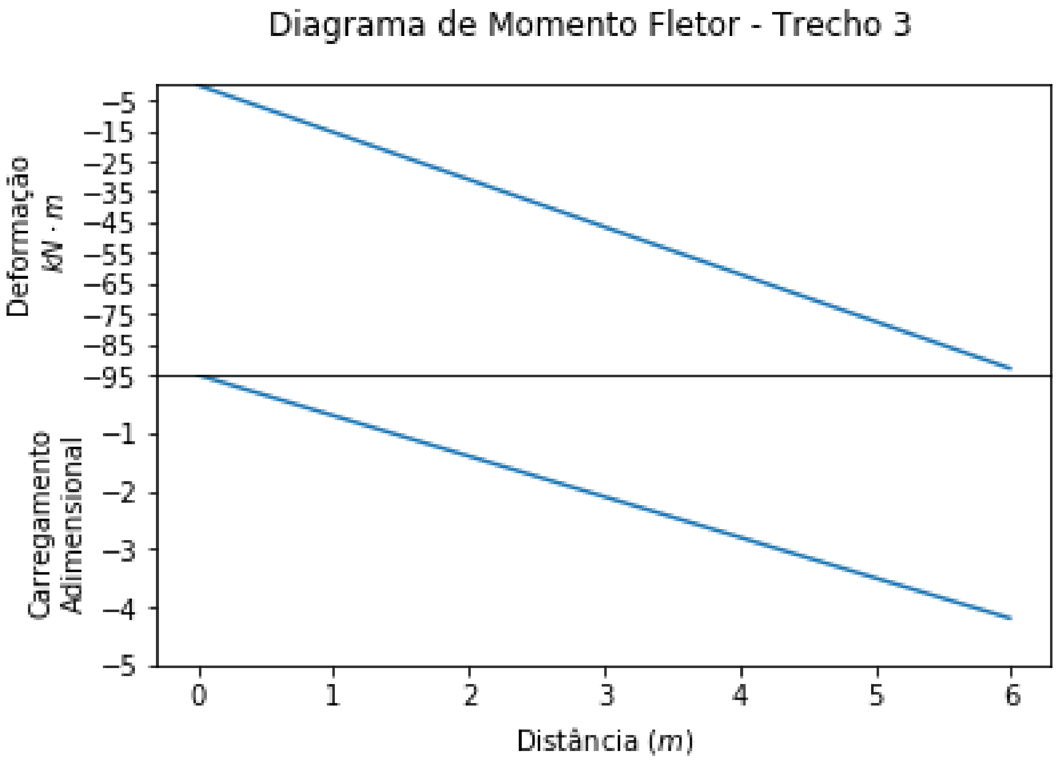
[11]:
```
delta_2 = (2/EI)*(((45 + 65)/2)*3 + (2/3)*(-10*(2**2)/8)*3)
display(delta_2)
```

$$\frac{310.0}{EI}$$

3.5 Barra 3

[12]:
```
t = np.arange(0.0, 6.0, 0.01)

s1 = -15.5*t
s2 = -0.7*t

fig, axs = plt.subplots(2, 1, sharex=True)
# Remove horizontal space between axes
fig.subplots_adjust(hspace=0)
fig.suptitle('Diagrama de Momento Fletor - Trecho 3')


# Plot each graph, and manually set the y tick values
axs[0].plot(t, s1)
axs[0].set_yticks(np.arange(-95., 0., 10))
axs[0].set_ylim(-95, 0)
axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')

axs[1].plot(t, s2)
axs[1].set_yticks(np.arange(-5., 0., 1))
axs[1].set_ylim(-5, 0)
axs[1].set_ylabel('Carregamento\nAdimensional')
axs[1].set_xlabel('Distância ($m$)')

plt.show()
```

```
<>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<ipython-input-12-57526c8f0323>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')
```



Este trecho apresenta apenas área triangular, em ambos os estados, sendo as duas no mesmo sentido. Assim, a equação para este caso fica:

$$\frac{1}{3} l' M_B \bar{M}_B$$

[13]:
```
delta_3 = (6/EI)*((1/3)*93*4.2)
display(delta_3)
```

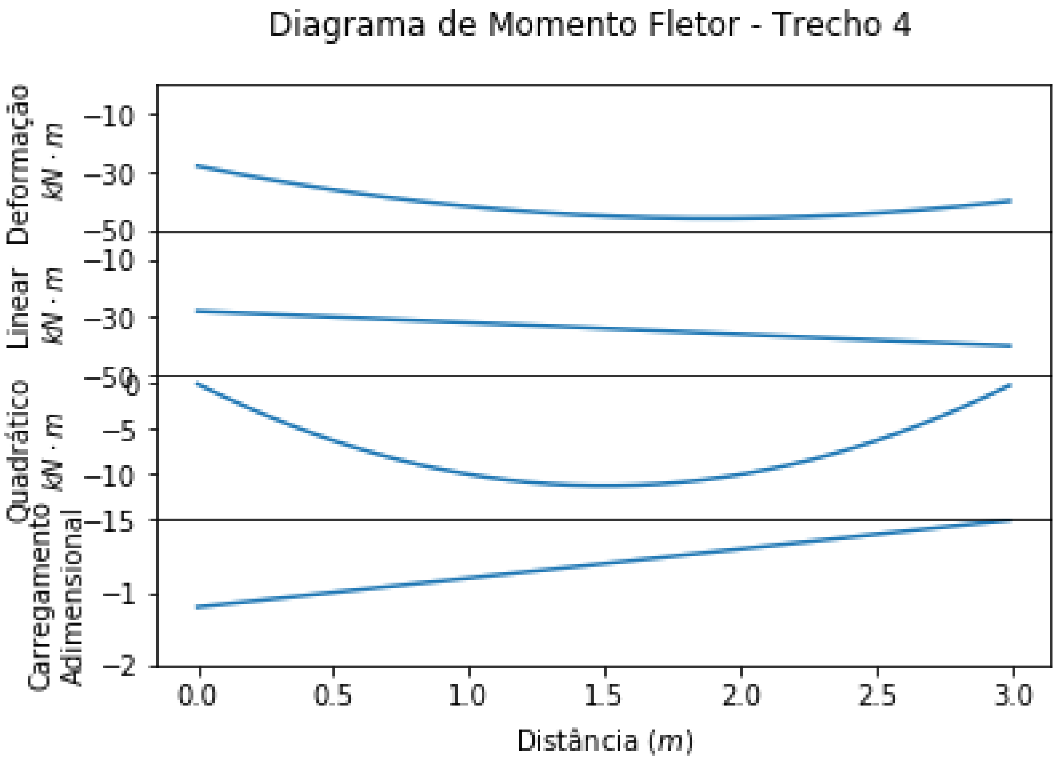
$$\frac{781.2}{EI}$$

3.6 Barra 4

[14]:
```
t = np.arange(0.0, 3.0, 0.01)

s1 = 65 - 93 - (39-10*2)*t + 10*(t**2)/2
s2 = (28-40)*t/3 -28
s3 = (10/2)*(t**2 - 3*t)
s4 = 3 - 4.2 + 0.4*t

fig, axs = plt.subplots(4, 1, sharex=True)
```

```python
# Remove horizontal space between axes
fig.subplots_adjust(hspace=0)
fig.suptitle('Diagrama de Momento Fletor - Trecho 4')


# Plot each graph, and manually set the y tick values
axs[0].plot(t, s1)
axs[0].set_yticks(np.arange(-50., 0., 20))
axs[0].set_ylim(-50, 0)
axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')

axs[1].plot(t, s2)
axs[1].set_yticks(np.arange(-50., 0., 20))
axs[1].set_ylim(-50, 0)
axs[1].set_ylabel('Linear\n$kN\cdot m$')

axs[2].plot(t, s3)
axs[2].set_yticks(np.arange(-15., 1., 5))
axs[2].set_ylim(-15, 1)
axs[2].set_ylabel('Quadrático\n$kN\cdot m$')

axs[3].plot(t, s4)
axs[3].set_yticks(np.arange(-2., 0., 1))
axs[3].set_ylim(-2, 0)
axs[3].set_ylabel('Carregamento\nAdimensional')
axs[3].set_xlabel('Distância ($m$)')

plt.show()
```

```
<>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<ipython-input-14-bb7ad519dece>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')
<ipython-input-14-bb7ad519dece>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[1].set_ylabel('Linear\n$kN\cdot m$')
<ipython-input-14-bb7ad519dece>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[2].set_ylabel('Quadrático\n$kN\cdot m$')
```



Este caso, a figura é semelhante à Barra 2, porém com um triângulo no estado de carregamento. Assim, para esta configuração, temos:

3.6.1 Linear

$$\frac{1}{6} l' \bar{M}_A \left(2 M_A + M_B\right)$$

3.6.2 Parábola

$$\frac{1}{3} l' \bar{M}_A M_m$$

[15]:
```
delta_4 = (3/EI)*((1/6)*1.2*(2*28+40) + (1/3)*1.2*(10*(3**2)/8))
display(delta_4)
```

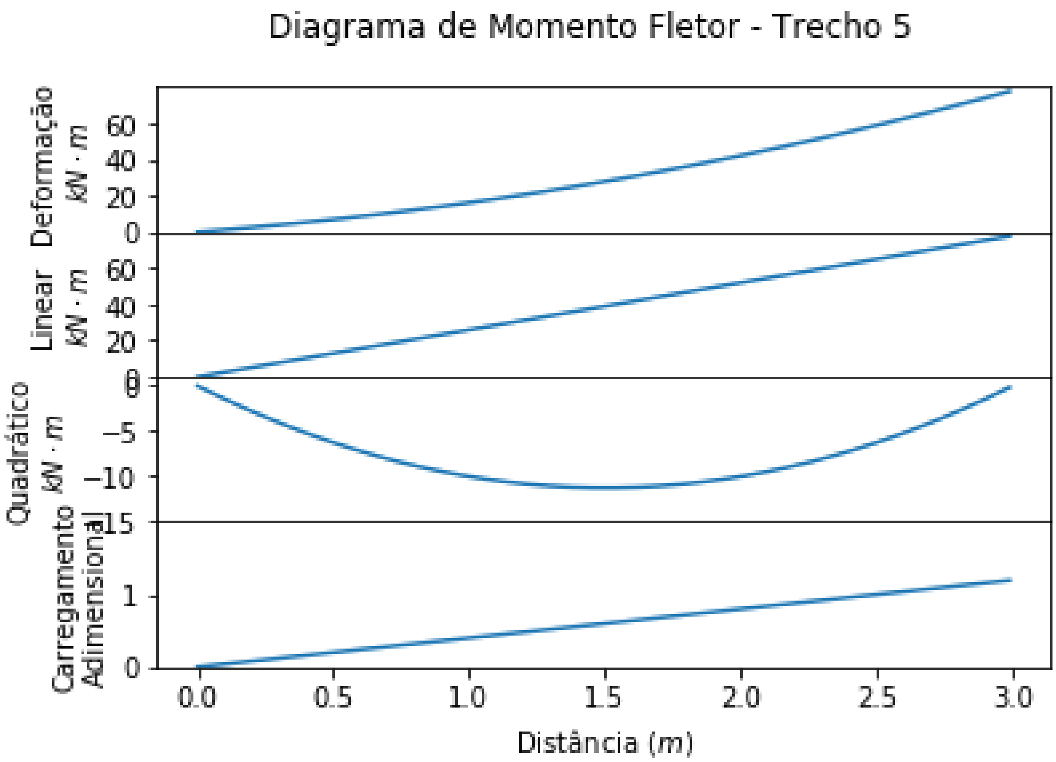
$$\frac{71.1}{EI}$$

3.7 Barra 5

[16]:
```
t = np.arange(0.0, 3.0, 0.01)

s1 = (10*5-39)*t + 10*(t**2)/2
s2 = (78/3)*t
s3 = (10/2)*(t**2 - 3*t)
s4 = 0.4*t

fig, axs = plt.subplots(4, 1, sharex=True)
# Remove horizontal space between axes
fig.subplots_adjust(hspace=0)
fig.suptitle('Diagrama de Momento Fletor - Trecho 5')


# Plot each graph, and manually set the y tick values
axs[0].plot(t, s1)
axs[0].set_yticks(np.arange(0., 80., 20))
axs[0].set_ylim(0, 80)
axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')

axs[1].plot(t, s2)
axs[1].set_yticks(np.arange(0., 80., 20))
axs[1].set_ylim(0, 80)
axs[1].set_ylabel('Linear\n$kN\cdot m$')

axs[2].plot(t, s3)
axs[2].set_yticks(np.arange(-15., 1., 5))
axs[2].set_ylim(-15, 1)
axs[2].set_ylabel('Quadrático\n$kN\cdot m$')

axs[3].plot(t, s4)
axs[3].set_yticks(np.arange(0., 2., 1))
axs[3].set_ylim(0, 2)
axs[3].set_ylabel('Carregamento\nAdimensional')
axs[3].set_xlabel('Distância ($m$)')

plt.show()
```

```
<>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<ipython-input-16-9dd3be6a69a2>:18: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')
```

```
<ipython-input-16-9dd3be6a69a2>:23: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[1].set_ylabel('Linear\n$kN\cdot m$')
<ipython-input-16-9dd3be6a69a2>:28: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[2].set_ylabel('Quadrático\n$kN\cdot m$')
```



Nesta configuração, temos as seguintes equações, semelhantes à Barra 1:

3.7.1 Linear

$$\frac{1}{3}l' M_B \bar{M}_B$$

3.7.2 Parábola

$$\frac{1}{3}l' M_m \bar{M}_B$$

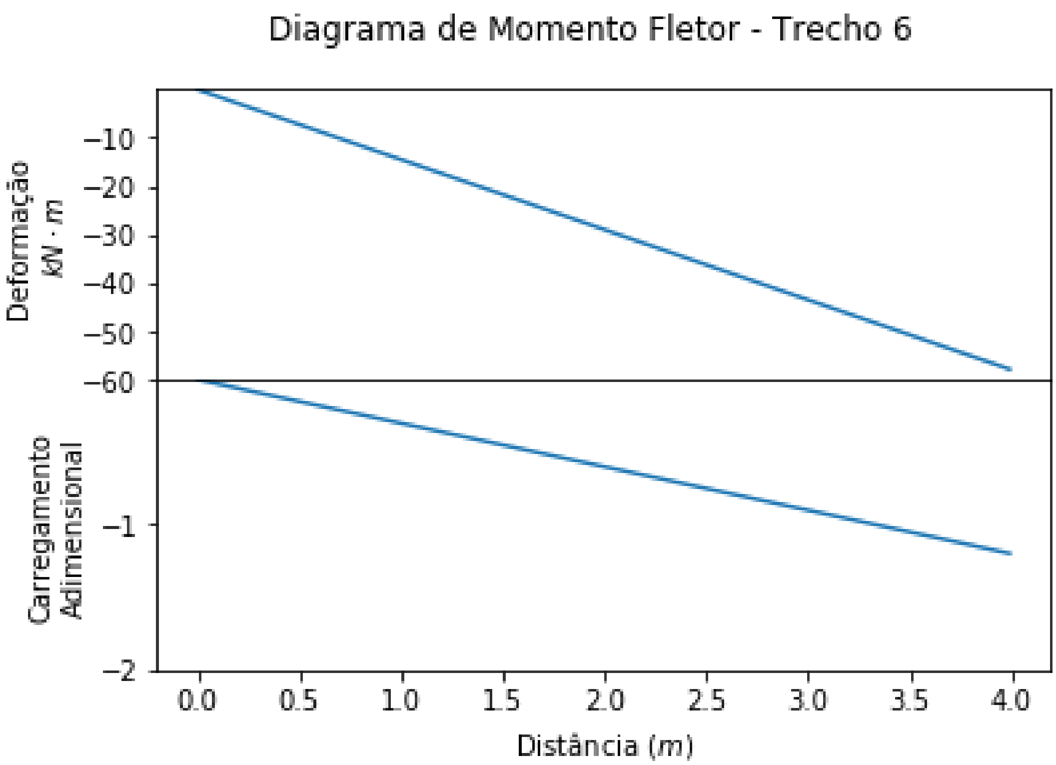
[17]:
```
delta_5 = (3/EI)*((1/3)*78*1.2 + (1/3)*(10*(3**2)/8)*1.2)
display(delta_5)
```

$$\frac{107.1}{EI}$$

3.8 Barra 6

[18]:
```
t = np.arange(0.0, 4.0, 0.01)

s1 = -14.5*t
s2 = -0.3*t

fig, axs = plt.subplots(2, 1, sharex=True)
# Remove horizontal space between axes
fig.subplots_adjust(hspace=0)
fig.suptitle('Diagrama de Momento Fletor - Trecho 6')


# Plot each graph, and manually set the y tick values
axs[0].plot(t, s1)
axs[0].set_yticks(np.arange(-60., 0., 10))
axs[0].set_ylim(-60, 0)
axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')

axs[1].plot(t, s2)
axs[1].set_yticks(np.arange(-2., 0., 1))
axs[1].set_ylim(-2, 0)
axs[1].set_ylabel('Carregamento\nAdimensional')
axs[1].set_xlabel('Distância ($m$)')

plt.show()
```

```
<>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<ipython-input-18-82bdccdd8a06>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')
```



Esta configuração é semelhante à da Barra 3. Assim, temos:

$$\frac{1}{3}l'M_B\bar{M}_B$$

[19]:
```
delta_6 = (4/EI)*((1/3)*58*1.2)
display(delta_6)
```

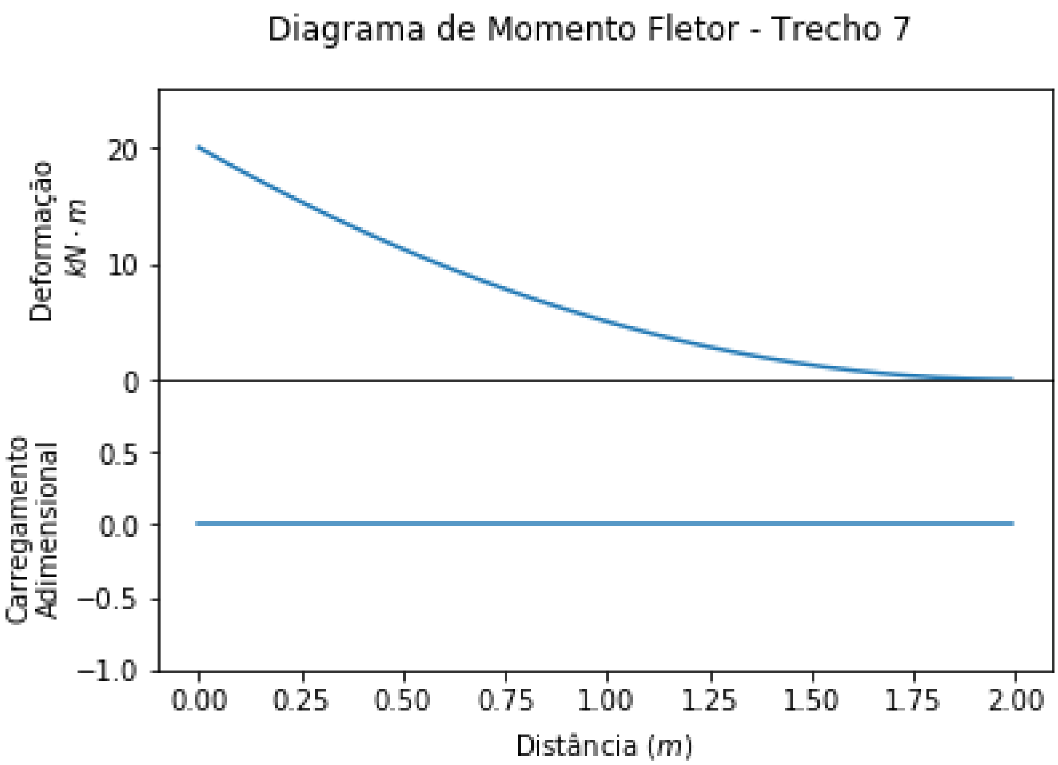
$$\frac{92.8}{EI}$$

3.9 Barra 7

[20]:
```
t = np.arange(0.0, 2.0, 0.01)

s1 = 20 - 10*t + 5*(t**2 - 2*t)
s2 = 0*t

fig, axs = plt.subplots(2, 1, sharex=True)
# Remove horizontal space between axes
fig.subplots_adjust(hspace=0)
fig.suptitle('Diagrama de Momento Fletor - Trecho 7')
```

```
# Plot each graph, and manually set the y tick values
axs[0].plot(t, s1)
axs[0].set_yticks(np.arange(0., 25., 10))
axs[0].set_ylim(0, 25)
axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')

axs[1].plot(t, s2)
axs[1].set_yticks(np.arange(-1., 1., 0.5))
axs[1].set_ylim(-1, 1)
axs[1].set_ylabel('Carregamento\nAdimensional')
axs[1].set_xlabel('Distância ($m$)')

plt.show()
```

```
<>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence \c
<ipython-input-20-20159fb9951f>:16: DeprecationWarning: invalid escape sequence
\c
  axs[0].set_ylabel('Deformação\n$kN\cdot m$')
```



Neste caso, o momento no estado de carregamento é nulo e, portanto, a integral também é nula.

3.10 Somatório das Integrais

[21]:
```
delta_C = (delta_1 + delta_2 + delta_3 + delta_4 + delta_5 + delta_6).
 ↪subs(EI,(10**5)*kN*m**2)*kN*m**3
display(delta_C)
```

$$0.0153095m$$

Assim, devido apenas ao efeito das cargas, temos:

$$\delta_{xC} = 15,31 \ \ mm$$

3.11 Efeito da Temperatura

$$\delta = \alpha \cdot \delta t_g \cdot A_{\bar{N}} + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{h} A_{\bar{M}}$$

OBS: Para o cálculo do A_M, serão considerados apenas os momentos das barras 3 a 6, já que as demais estão sob a mesma temperatura em ambos os lados ($\Delta T = 0$).

[22]:
```
A_N = -1*2 + 0.4*6 - (1-0.7)*3 - (1-0.7)*3 - 0.4*4
A_M = 6*4.2/2 + 3*1.2/2 + 3*1.2/2 - 4*1.2/2
alpha = 1e-5
t_e = 30
t_i = 10
t_g = ((t_e+t_i)/2)
Delta_T = t_e - t_i
h = 0.5
```

[23]:
```
delta_T = (alpha*t_g*A_N + alpha*Delta_T*A_M/h)*m
display(delta_T)
```

$$0.00492m$$

Assim, temos:

$$\delta_{xT} = 4,92 \ \ mm$$

3.12 Efeito do Recalque

$$\delta = -\sum \bar{R} \cdot \rho$$

[24]:
```
delta_R = 0.4*0.015*m
display(delta_R)
```

$$0.006m$$

Portanto:

$$\delta_{xR} = 6 \ \ mm$$

3.13 Deslocamento Total

[25]:
```
delta = delta_C + delta_T + delta_R
display(delta)
```

$$0.0262295m$$

Portanto,

$$\delta_x = 26,23 \ \ mm$$