

# Exercício 1

November 18, 2020

## 1 Exercício PA3-1

Exercício com data de entrega para 18 de novembro de 2020.

Aluno: Noé de Lima Bezerra

noe\_lima@id.uff.br

```
[1]: import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Image, IFrame
#from sympy.abc import x, y, z
sp.init_printing(use_latex='mathjax', latex_mode='equation*')
```

```
[2]: Image("Figuras/PA3-1-0.png")
```

[2]:

### AVALIAÇÃO 1-PA3 – TEOREMA DE CASTIGLIANO– VÍDEOS 1 a 6

Para cada uma das estruturas hiperestáticas mostradas a seguir, apresentar:

- O sistema principal adotado para sua resolução;
- As condições de compatibilidade de deformação para resolver o sistema principal apresentado no item a;
- Utilizando o Teorema de Castigliano apresentar as expressões para atender as condições de compatibilidade de deformação do item b.

## 2 Introdução

Temos, para cada tipo de esforço, as seguintes equações de energia (para consulta).

### 2.1 Esforço Normal

$$U_N = \int_0^L \frac{N}{2EA} dx = \frac{N^2 L}{2EA}$$

### 2.2 Esforço Cortante

$$U_V = \int_0^L \frac{V^2 x^2}{2EI} dx = \frac{V^2 L^3}{6EI}$$

### 2.3 Momento Fletor

$$U_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{M^2 L}{2EI}$$

### 2.4 Momento Torsor

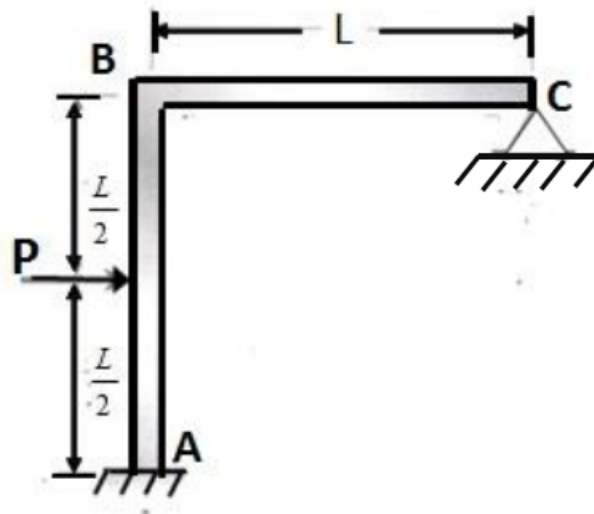
$$U_T = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

## 3 Estrutura 1

[3]: Image("Figuras/PA3-1-1.png")

[3]:

### 1) ESTRUTURA 1



#### a) Sistema Principal

Para resolver este sistema, vamos desconsiderar  $C$  como um apoio, e inserir em seu lugar duas cargas que são, respectivamente, as reações de apoio  $V_C(\uparrow)$  e  $H_C(\rightarrow)$ .

#### b) Condições de Compatibilidade de Deformação

Da mesma forma, vamos considerar as duas restrições de movimento  $\delta_{Cx} = \delta_{Cy} = 0$ .

#### c) Equações do Teorema de Castigliano

$$\delta_{Cx} = \frac{\partial U}{\partial H_C} = 0$$

$$\delta_{Cy} = \frac{\partial U}{\partial V_C} = 0$$

As equações de equilíbrio fornecem:

$$\sum_{F_x} = 0 \therefore H_A + H_C = -P \therefore H_A = -P - H_C$$

$$\sum_{F_y} = 0 \therefore V_A + V_C = 0 \therefore V_A = -V_C$$

$$\sum_{M_z} = 0 \therefore -LH_C + LV_C + M_A = \frac{PL}{2} \therefore M_A = \frac{PL}{2} + LH_C - LV_C$$

Onde temos cinco variáveis ( $H_A$ ,  $V_A$ ,  $M_A$ ,  $H_B$ ,  $V_B$ ), e apenas três equações. Para resolver o sistema, necessitamos das duas equações dadas pelo teorema de Castigliano citadas acima.

### 3.0.1 Equação de Energia

Utilizando apenas a energia de momento fletor (desprezando-se a energia relativa ao esforço cortante), temos:

$$U_1 = \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{(H_A x)^2}{2EI} + \frac{M_A^2}{2EI} \right] dx = \frac{1}{2EI} \int_0^{\frac{L}{2}} [H_A^2 x^2 + M_A^2] dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{H_A^2}{3} x^3 + M_A^2 x \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{H_A^2}{24} L^3 + \frac{M_A^2}{2} L \right]$$

$$U_2 = \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{(H_C x)^2}{2EI} + \frac{(V_C L)^2}{2EI} \right] dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{H_C^2}{3} x^3 + V_C^2 L^2 x \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{H_C^2}{24} L^3 + \frac{V_C^2}{2} L^3 \right]$$

$$U_3 = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{(V_C x)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{V_C^2}{3} x^3 \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{V_C^2}{24} L^3 \right]$$

Logo,

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{H_A^2}{24} L^3 + \frac{M_A^2}{2} L + \frac{H_C^2}{24} L^3 + \frac{V_C^2}{2} L^3 + \frac{V_C^2}{24} L^3 \right] \therefore$$

$$U = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{(-P - H_C)^2}{24} L^3 + \frac{\left(\frac{PL}{2} + LH_C - LV_C\right)^2}{2} L + \frac{H_C^2}{24} L^3 + \frac{V_C^2}{2} L^3 + \frac{V_C^2}{24} L^3 \right] \therefore$$

$$U = \frac{L^3}{48EI} \left[ (-P - H_C)^2 + 12 \left( \frac{P}{2} + H_C - V_C \right)^2 + H_C^2 + 13V_C^2 \right]$$

Para resolver o sistemas, basta derivar  $U$  em relação a  $H_C$  e  $V_C$  e igualar ambas as expressões a zero para obter as equações pendentes que tornam o sistema solucionável.

```
[4]: L,EI,P = sp.symbols('L,EI,P', positive=True)
H_C,V_C = sp.symbols('H_C,V_C')
U = ((L**3)/(48*EI))*((-P-H_C)**2 + 12*(P/2+H_C-V_C)**2 + H_C**2 + 13*V_C**2)
display(U,sp.diff(U,H_C),sp.diff(U,V_C))
```

$$\frac{L^3 \left( H_C^2 + 13V_C^2 + (-H_C - P)^2 + 12 \left( H_C + \frac{P}{2} - V_C \right)^2 \right)}{48EI}$$

$$\frac{L^3 (28H_C + 14P - 24V_C)}{48EI}$$

$$\frac{L^3 (-24H_C - 12P + 50V_C)}{48EI}$$

Logo, Temos,

$$\frac{L^3}{24EI} (14H_C + 7P - 12V_C) = 0 \therefore$$

$$14H_C + 7P - 12V_C = 0$$

E

$$\frac{L^3}{24EI} (-12H_C - 6P + 25V_C) = 0 \therefore$$

$$-12H_C - 6P + 25V_C = 0$$

Este conjunto de equações permite resolver  $H_C$  e  $V_C$  que, por sua vez, permitem resolver  $H_A$ ,  $V_A$  e  $M_A$ .

```
[5]: K = sp.Matrix([[14,-12],[-12,25]])
f = sp.Matrix([[-7*P],[6*P]])
K.solve(f)
```

[5]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{P}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

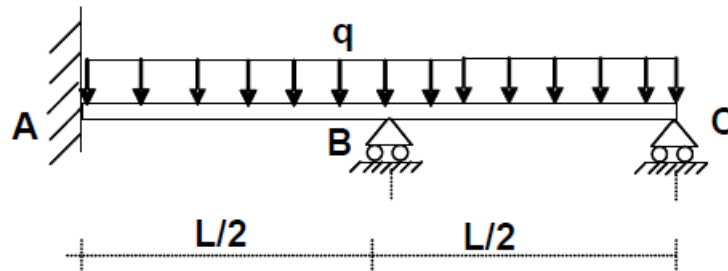
Portanto,  $H_C = -\frac{P}{2}$  e  $V_C = 0$ . Logo,  $H_A = H_C = -\frac{P}{2}$ ,  $V_A = V_C = 0$  e  $M_A = 0$ .

## 4 Estrutura 2

[6]: Image("Figuras/PA3-1-2.png")

[6]:

### 2) ESTRUTURA 2



a) Sistema Principal

Para resolver este sistema, vamos desconsiderar  $B$  e  $C$  como apoios, e inserir em seu lugar duas cargas que são, respectivamente, as reações de apoio  $V_B(\uparrow)$  e  $V_C(\uparrow)$ .

b) Condições de Compatibilidade de Deformação

Da mesma forma, vamos considerar as duas restrições de movimento  $\delta_{By} = \delta_{Cy} = 0$ .

c) Equações do Teorema de Castigliano

$$\delta_{By} = \frac{\partial U}{\partial V_B} = 0$$

$$\delta_{Cy} = \frac{\partial U}{\partial V_C} = 0$$

#### 4.0.1 Equação de Energia

Utilizando apenas a energia de momento fletor (desprezando-se a energia relativa ao esforço cortante), temos:

$$U_1 = \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{(V_A x)^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI} \right] dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{V_A^2}{3} x^3 + \frac{q^2}{20} x^5 \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{V_A^2}{24} L^3 + \frac{q^2}{640} L^5 \right]$$

$$U_2 = \int_0^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{(V_C x)^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI} \right] dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{V_C^2}{3} x^3 + \frac{q^2}{20} x^5 \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{V_C^2}{24} L^3 + \frac{q^2}{640} L^5 \right]$$

Logo,

$$U = \sum_{i=1}^2 U_i = \frac{L^3}{2EI} \left[ \frac{V_A^2}{24} + \frac{q^2}{640} L^2 + \frac{V_C^2}{24} + \frac{q^2}{640} L^2 \right]$$

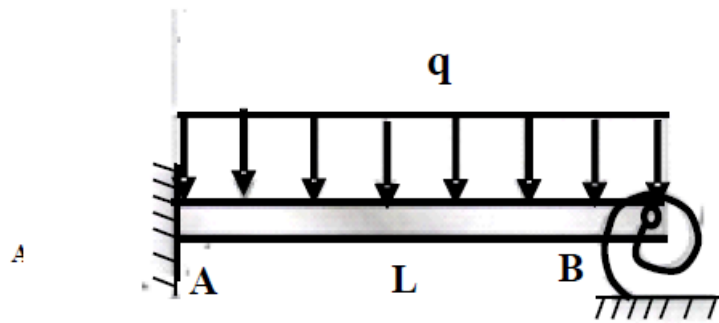
Utilizando esta equação para obter as derivadas das equações de Castigliano é possível resolver o sistema.

## 5 Estrutura 3

[7]: `Image("Figuras/PA3-1-3.png")`

[7]:

### 3) ESTRUTURA 3



#### a) Sistema Principal

Para resolver este sistema, vamos desconsiderar  $B$  como apoio, e inserir em seu lugar três cargas que são, respectivamente, as reações de apoio  $H_B(\rightarrow)$ ,  $V_B(\uparrow)$  e  $M_B(\downarrow\uparrow)$ .

#### b) Condições de Compatibilidade de Deformação

Da mesma forma, vamos considerar as duas restrições de movimento  $\delta_{Bx} = \delta_{By} = 0$ , bem como a restrição  $\theta_B = KM_B$ .

c) Equações do Teorema de Castigliano

$$\delta_{Bx} = \frac{\partial U}{\partial H_B} = 0$$

$$\delta_{By} = \frac{\partial U}{\partial V_B} = 0$$

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = KM_B$$

### 5.0.1 Equação de Energia

Utilizando apenas a energia de momento fletor (desprezando-se a energia relativa ao esforço cortante), temos:

$$U = \int_0^L \left[ \frac{(V_A x)^2}{2EI} + \frac{M_A^2}{2EI} + \frac{\left(\frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI} \right] dx = \frac{1}{2EI} \left[ \frac{V_A^2}{3} x^3 + M_A^2 x + \frac{q^2}{20} x^5 \right]_0^L = \frac{L}{2EI} \left[ \frac{V_A^2}{3} L^2 + M_A^2 + \frac{q^2}{20} L^4 \right]$$

Derivando conforme equações indicadas acima, as demais equações podem ser obtidas para tornar o sistema solucionável.