Exercício 3

November 25, 2020

1 Exercício PA3-3

Exercício com data de entrega para 25 de novembro de 2020.

Aluno: Noé de Lima Bezerra

noe_lima@id.uff.br

[1]:
```
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Image, IFrame
#from sympy.abc import x, y, z
sp.init_printing(use_latex='mathjax',latex_mode='equation*')
```

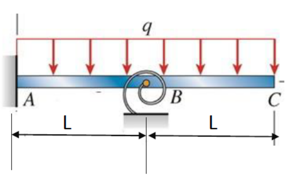
[2]:
```
Image("Figuras/PA3-3.png")
```

[2]:

AVALIAÇÃO 3-PA3 – TEOREMA DE CASTIGLIANO– EXERCÍCIO 2

Uma viga engastada e apoiada, de comprimento 2L. É carregada por uma carga uniformemente distribuída de intensidade q. A viga é apoiada em B por uma mola rotacional elástica linear de rigidez K_R. Sabendo que K_R = EI/2L, traçar os diagramas de esforço cortante e momento fletor da viga

Utilizar o Teorema de Castigliano



2 Introdução

Temos, para cada tipo de esforço, as seguintes equações de energia (para consulta).

2.1 Esforço Normal

$$U_N = \int_0^L \frac{N}{2EA}\mathrm{d}x = \frac{N^2L}{2EA}$$

2.2 Esforço Cortante

$$U_V = \int_0^L \frac{V^2 x^2}{2EI} \mathrm{d}x = \frac{V^2 L^3}{6EI}$$

2.3 Momento Fletor

$$U_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} \mathrm{d}x = \frac{M^2 L}{2EI}$$

2.4 Momento Torsor

$$U_T = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} \mathrm{d}x = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

3 Solução Pelo Teorema de Castigliano

3.1 Variáveis Globais

[3]:
```
EI,L,b,q,k,kN,m = sp.symbols('EI,L,b,q,k,kN,m', positive=True)
```

3.2 Equações de Energia

Equação de Energia:

$$U = \int_0^L \frac{M^2(Q,x)}{2EI} \mathrm{d}x$$

Deformação

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^L \frac{M(Q,x)}{EI} \frac{\partial M(Q,x)}{\partial Q} \mathrm{d}x$$

Onde Q é uma força transversal à viga na direção da deformação procurada.

[4]:
```
x,Q,l = sp.symbols('x,Q,l')
M = sp.symbols('M',cls=sp.Function)
U_M = sp.Integral((M(Q,x)**2)/(2*EI), (x,0,l))
display(U_M,sp.diff(U_M,Q))
```

$$\int\limits_0^l \frac{M^2(Q,x)}{2EI}\, dx$$

$$\int\limits_0^l \frac{M(Q,x)\frac{\partial}{\partial Q}M(Q,x)}{EI}\, dx$$

Das equações de equilíbrio, temos:

$$V_A(\uparrow) = 2qL$$

$$M_A(\circlearrowleft) = 2qL^2 - M_B(\circlearrowleft)$$

Sabemos ainda que, no ponto B, temos a seguinte condição de contorno:

$$M_B(\circlearrowleft) = -K_R\theta_B = -\frac{EI}{2L}\theta_B$$

[5]:
```
K,L,M_B = sp.symbols("K,L,M_B",positive=True)
K_R = EI/(2*L)
V_A = 2*q*L
M_A = 2*q*L**2 - M_B
display(V_A,M_A)
```

$$2Lq$$

$$2L^2q - M_B$$

A energia total U na viga é a soma das energias nos segmentos AB, BC e na mola B.

3.3 Energia em AB

$$M(x) = -M_A - \frac{qx^2}{2}$$

$$U_{AB} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x = \int_0^L \frac{\left(-M_A - \frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI}\mathrm{d}x = \int_0^L \frac{\left[-\left(2qL^2 - M_B\right) - \frac{qx^2}{2}\right]^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

[6]:
```
U_AB = U_M.replace(M(Q,x),-M_A-q*(x**2)/2).subs(l,L)
display(U_AB)
```

$$\int\limits_0^L \frac{\left(-2L^2q + M_B - \frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI}\,dx$$

3.4 Energia da Mola B

$$U_B = \frac{M_B^2}{K_R} = \frac{2LM_B^2}{EI}$$

```
[7]: U_B = (M_B**2)/K
display(U_B)
```

$$\frac{M_B^2}{K}$$

3.5 Energia em BC

Da direita para a esquerda, temos:

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

$$U_{BC} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x = \int_0^L \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

```
[8]: U_BC = U_M.replace(M(Q,x),-q*(x**2)/2).subs(l,L)
display(U_BC)
```

$$\int\limits_0^L \frac{q^2x^4}{8EI}\,dx$$

3.6 Energia total

$$U = U_{AB} + U_B + U_{BC} = \int_0^L \frac{\left[-\left(2qL^2 - M_B\right) - \frac{qx^2}{2}\right]^2}{2EI}\mathrm{d}x + \frac{M_B^2}{K_R} + \int_0^L \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

```
[9]: U = U_AB + U_B + U_BC
display(U)
```

$$\int\limits_0^L \frac{\left(-2L^2q + M_B - \frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI}\,dx + \int\limits_0^L \frac{q^2x^4}{8EI}\,dx + \frac{M_B^2}{K}$$

Assim, temos a seguinte rotação θ_B:

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = -\frac{M_B}{K_R}$$

```
[10]: display(U.diff(M_B))
eq = sp.Eq(U.diff(M_B).doit().subs(K,K_R), -M_B/K_R).simplify()
display(eq)
```

$$\int_0^L \frac{-4L^2q + 2M_B - qx^2}{2EI}\,dx + \frac{2M_B}{K}$$

$$\frac{2LM_B}{EI} = -\frac{L\left(-13L^2q + 30M_B\right)}{6EI}$$

Resolvendo a equação acima para M_B, temos:

[11]:
```
M_calc = sp.solve(eq,M_B)[0]
display(M_calc,M_A,M_A.subs(M_B,M_calc))
```

$$\frac{13L^2q}{42}$$

$$2L^2q - M_B$$

$$\frac{71L^2q}{42}$$

Ou seja:

$$V_A(\uparrow) = 2qL$$

$$M_A(\circlearrowleft) = \frac{71}{42}qL^2$$

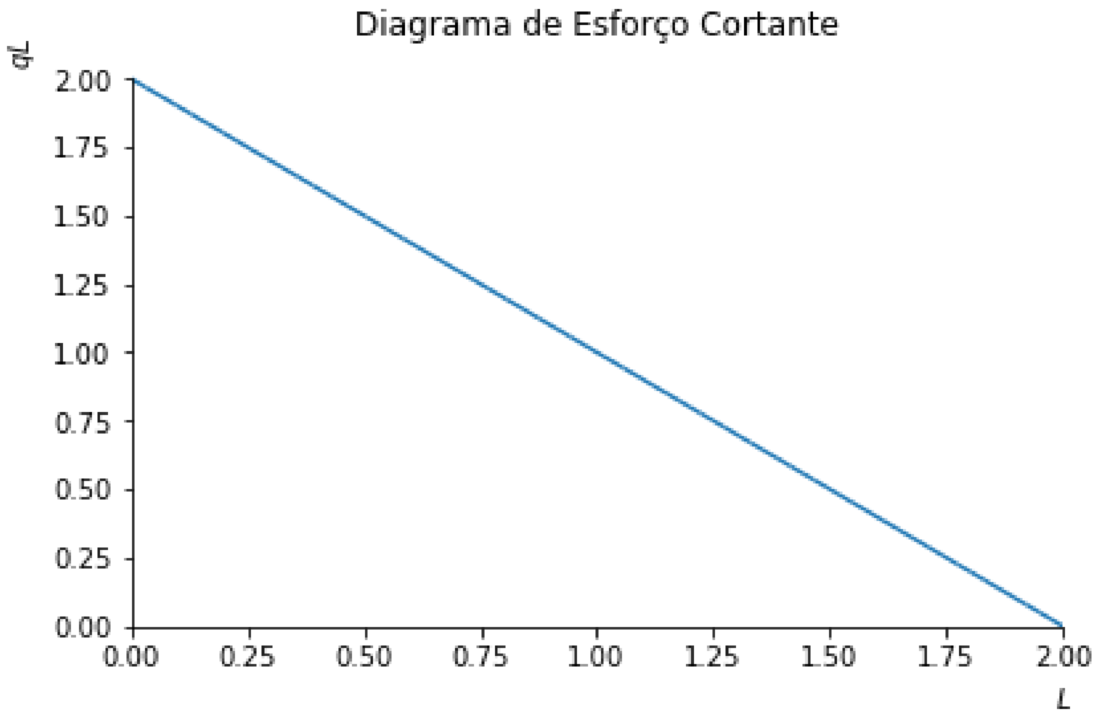
$$M_B(\circlearrowleft) = \frac{13}{42}qL^2$$

[12]:
```
M = - M_A.subs(M_B,M_calc) + V_A*x - q*(x**2)/2 - M_calc*sp.
↪SingularityFunction(x,L,0)
display(M)
```

$$-\frac{13L^2q\langle -L+x\rangle^0}{42} - \frac{71L^2q}{42} + 2Lqx - \frac{qx^2}{2}$$

3.7 Diagrama de Esforço Cortante

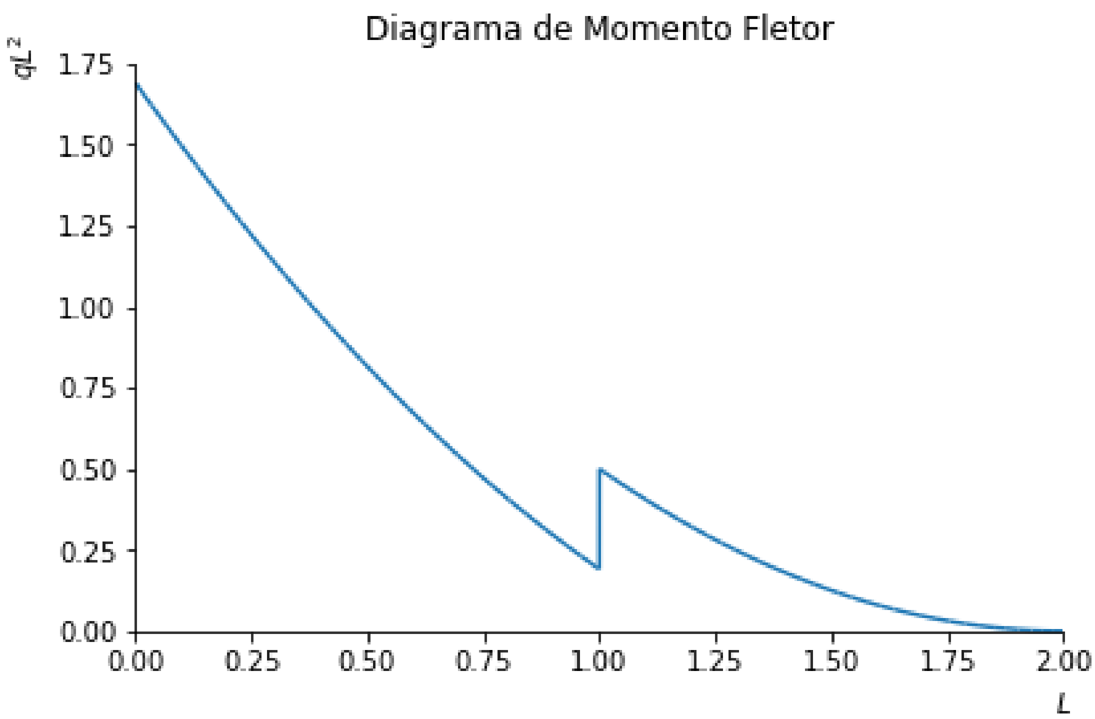
[13]:
```
sp.plot((M.diff(x)).subs(L,1).subs(q,1), (x,0,2), xlabel="$L$", ylabel="$qL$",␣
↪title="Diagrama de Esforço Cortante")
```



[13]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f909a12edf0>

3.8 Diagrama de momento Fletor

[14]:
```
sp.plot(-M.subs(L,1).subs(q,1), (x,0,2), xlabel="$L$", ylabel="$qL^{2}$",␣
↪title="Diagrama de Momento Fletor")
```



[14]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f909ba74100>