Exercício 3

October 29, 2020

1 Exercício PA2-3

Exercício com data de entrega para 29 de outubro de 2020.

Aluno: Noé de Lima Bezerra

noe_lima@id.uff.br

[1]:
```python
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Image
sp.init_printing(use_latex='mathjax',latex_mode='equation*')
```

[2]:
```python
Image("Figuras/PA2-3-0.png")
```

[2]:

AVALIAÇÃO 2 – EXERCÍCIO PA2-2

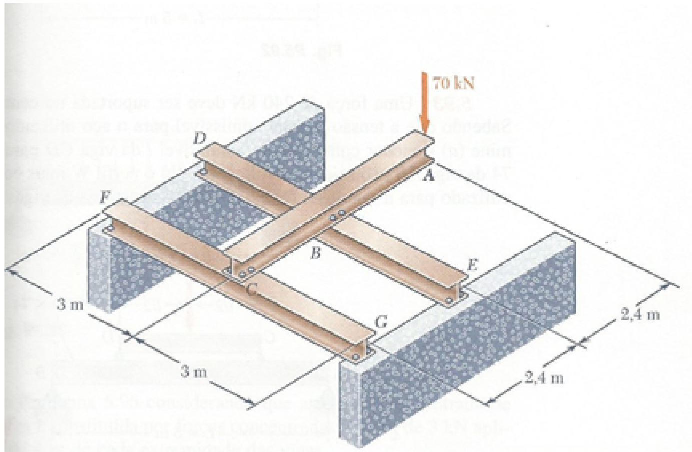
A viga ABC é rebitada nas vigas DBE e FCG, Sabendo que todas vigas são constituídas de um perfil laminado W460x52 (I_x=212x10^6mm^4) de aço com módulo de elasticidade E=200GPa, determinar :

a) A equação das rotações;
b) A equação da linha elástica;
c) A rotação da seção A;
d) A flecha da seção A.

Utilizar Funções Singulares

[3]:
```python
Image("Figuras/PA2-3-1.png")
```

[3]:



2 Viga ABC

A partir das equações de equilíbrio, temos:

$$\sum_{M_z} = 0 \therefore V_B \times 2,4m - 70kN \times 4,8m = 0$$

Logo,

$$V_B = 140kN$$

E,

$$\sum_{F_y} = 0 \therefore V_C + V_B - 70kN = 0$$

Portanto,

$$V_C = -70kN$$

Orientando o eixo x com origem em C, no sentido de A, temos:

$$V\left(x\right) = V_C + V_B \left\langle x - 2,4 \right\rangle^0$$

$$M\left(x\right) = \frac{d^2 y\left(x\right)}{dx^2} = V_C \cdot x + V_B \left\langle x - 2,4 \right\rangle$$

Neste caso não há constante de integração por não haver momento aplicado (ou reações de momento).

$$EI \cdot \theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{V_C}{2} \cdot x^2 + \frac{V_B}{2} \langle x - 2,4 \rangle^2 + C_1$$

$$EI \cdot y(x) = \frac{V_C}{6} \cdot x^3 + \frac{V_B}{6} \langle x - 2,4 \rangle^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

As condições de contorno nesta viga são:

- $EI \cdot y(0) = EI \cdot y_C$
- $EI \cdot y(2,4) = EI \cdot y_B$

Portanto, $C_2 = EI \cdot y_C$, e:

$$EI \cdot y(2,4) = \frac{V_C}{6} \cdot (2,4)^3 + \frac{V_B}{6} \langle 2,4 - 2,4 \rangle^3 + C_1 \cdot 2,4 + EI \cdot y_C = EI \cdot y_B$$

[4]:

```
EI,x,V_B,V_C,C,y_B,y_C = sp.symbols("EI,x,V_B,V_C,C,y_B,y_C")
y = (1/EI)*((V_C/6)*sp.SingularityFunction(x,0,3) + (V_B/6)*sp.
↪SingularityFunction(x,2.4,3) + C*x + EI*y_C)
display(sp.Eq(EI*y.subs(x,2.4),EI*y_B))
display("C_1 =")
display(sp.solve(sp.Eq(EI*y.subs(x,2.4),EI*y_B),C)[0])
```

$$2.4C + EIy_C + 2.304V_C = EIy_B$$

'C_1 ='

$$0.416666666666667EIy_B - 0.416666666666667EIy_C - 0.96V_C$$

$$2,304 \cdot V_C + 2,4 \cdot C_1 + EI \cdot y_C = EI \cdot y_B \therefore$$

$$C_1 = \frac{5}{12}\ EI \cdot y_B - \frac{5}{12}\ EI \cdot y_C - \frac{72}{75}\ V_C$$

Assim,

$$EI \cdot \theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{70}{2} \cdot x^2 + \frac{140}{2} \langle x - 2,4 \rangle^2 + \frac{5}{12}\ EI \cdot y_B - \frac{5}{12}\ EI \cdot y_C + \frac{336}{5}$$

E,

$$EI \cdot y(x) = -\frac{35}{3} \cdot x^3 + \frac{70}{3} \langle x - 2,4 \rangle^3 + \left[\frac{5}{12}\ EI \cdot y_B - \frac{5}{12}\ EI \cdot y_C + \frac{336}{5}\right] \cdot x + EI \cdot y_C$$

3 Viga DBE

Pelas equações de equilíbrio, bem como por simetria,

$$V_D = V_E = \frac{V_B}{2} = 70kN$$

Portanto, orientando o eixo x com origem em D, no sentido de E, temos:

$$V(x) = V_D - V_B \langle x - 3 \rangle^0$$

$$M(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = V_D \cdot x - V_B \langle x - 3 \rangle$$

Neste caso também não há constante de integração por não haver momento aplicado (ou reações de momento).

$$EI \cdot \theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{V_D}{2} \cdot x^2 - \frac{V_B}{2} \langle x - 3 \rangle^2 + C_1$$

$$EI \cdot y(x) = \frac{V_D}{6} \cdot x^3 - \frac{V_B}{6} \langle x - 3 \rangle^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

As condições de contorno nesta viga são:

- $EI \cdot y(0) = 0$
- $EI \cdot \theta(3) = 0$
- $EI \cdot y(6) = 0$

Portanto, $C_2 = 0$

$$EI \cdot \theta(3) = \frac{70}{2} \cdot 3^2 + C_1 = 0 \therefore$$

$$C_1 = -315$$

Temos, então, que:

$$EI \cdot y_B = EI \cdot y(3) = \frac{V_D}{6} \cdot 3^3 - 315 \cdot 3 = \frac{70 \times 3^3}{6} - 315 \times 3 = -630$$

4 Viga FCG

A viga FCG é semelhante à viga DBE, com a diferença da carga $V_C = -70kN$ em lugar de V_B. Portanto,

$$V_F = V_G = \frac{V_C}{2} = -35kN$$

Portanto, orientando o eixo x com origem em F, no sentido de G, temos:

$$V(x) = V_F - V_C \langle x-3 \rangle^0$$

$$M(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2} = V_F \cdot x - V_C \langle x-3 \rangle$$

Neste caso também não há constante de integração por não haver momento aplicado (ou reações de momento).

$$EI \cdot \theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{V_F}{2} \cdot x^2 - \frac{V_C}{2} \langle x-3 \rangle^2 + C_1$$

$$EI \cdot y(x) = \frac{V_F}{6} \cdot x^3 - \frac{V_C}{6} \langle x-3 \rangle^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

As condições de contorno nesta viga são:

- $EI \cdot y(0) = 0$
- $EI \cdot \theta(3) = 0$
- $EI \cdot y(6) = 0$

Portanto, $C_2 = 0$

$$EI \cdot \theta(3) = -\frac{35}{2} \cdot 3^2 + C_1 = 0 \therefore$$

$$C_1 = -\frac{315}{2}$$

Temos, então, que:

$$EI \cdot y_C = EI \cdot y(3) = \frac{V_F}{6} \cdot 3^3 = -\frac{35 \times 3^3}{6} + \frac{315 \times 3}{2} = 315$$

5 De Volta À Viga ABC

As equações para a Viga ABC:

$$EI \cdot \theta\left(x\right) = \frac{dy\left(x\right)}{dx} = -\frac{70}{2} \cdot x^2 + \frac{140}{2}\left\langle x - 2,4\right\rangle^2 + \frac{5}{12}\ EI \cdot y_B - \frac{5}{12}\ EI \cdot y_C + \frac{336}{5}$$

E,

$$EI \cdot y\left(x\right) = -\frac{35}{3} \cdot x^3 + \frac{70}{3}\left\langle x - 2,4\right\rangle^3 + \left[\frac{5}{12}\ EI \cdot y_B - \frac{5}{12}\ EI \cdot y_C + \frac{336}{5}\right] \cdot x + EI \cdot y_C$$

Onde:

- $EI \cdot y_B = -630$
- $EI \cdot y_C = 315$

Ficam, portanto,

$$EI \cdot \theta\left(x\right) = \frac{dy\left(x\right)}{dx} = -35 \cdot x^2 + 70\left\langle x - 2,4\right\rangle^2 - \frac{5}{12} \times 630 - \frac{5}{12} \times 315 + \frac{336}{5} \therefore$$

$$EI \cdot \theta\left(x\right) = -35 \cdot x^2 + 70\left\langle x - 2,4\right\rangle^2 - \frac{6531}{20}$$

E,

$$EI \cdot y\left(x\right) = -\frac{35}{3} \cdot x^3 + \frac{70}{3}\left\langle x - 2,4\right\rangle^3 + \left[-\frac{5}{12} \times 630 - \frac{5}{12} \times 315 + \frac{336}{5}\right] \cdot x + 315 \therefore$$

$$EI \cdot y\left(x\right) = -\frac{35}{3} \cdot x^3 + \frac{70}{3}\left\langle x - 2,4\right\rangle^3 - \frac{6531}{20} \cdot x + 315$$

6 Soluções

6.1 a)

$$EI \cdot \theta\left(x\right) = -35 \cdot x^2 + 70\left\langle x - 2,4\right\rangle^2 - \frac{6531}{20}$$

6.2 b)

$$EI \cdot y\left(x\right) = -\frac{35}{3} \cdot x^3 + \frac{70}{3}\left\langle x - 2,4\right\rangle^3 - \frac{6531}{20} \cdot x + 315$$

6.3 c)

$$EI \cdot \theta\left(4,8\right) = -273,525 \therefore$$

$$\theta_A = -17,21 \times 10^{-3} rad$$

6.4 d)

$$EI \cdot y\,(4,8) = -502,74 \therefore$$

$$y_A = -56,08\mu m$$

[5]:
```
(-35*(4.8**2) + 70*((4.8-2.4)**2) - 6531/20)/(212*200)
```

[5]:

$$-0.017211084905660378$$

[6]:
```
(-(35/3)*(4.8**3) + (70/3)*((4.8-2.4)**3) - (6531/20)*4.8 + 315/2)/(212*200)
```

[6]:

$$-0.056075943396226416$$