

Exercício 3

November 25, 2020

1 Exercício PA3-3

Exercício com data de entrega para 25 de novembro de 2020.

Aluno: Noé de Lima Bezerra

noe_lima@id.uff.br

```
[1]: import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Image, IFrame
#from sympy.abc import x, y, z
sp.init_printing(use_latex='mathjax', latex_mode='equation*')
```

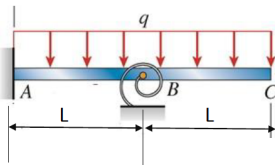
```
[2]: Image("Figuras/PA3-3.png")
```

[2]:

AVALIAÇÃO 3-PA3 – TEOREMA DE CASTIGLIANO– EXERCÍCIO 2

Uma viga engastada e apoiada, de comprimento $2L$. É carregada por uma carga uniformemente distribuída de intensidade q . A viga é apoiada em B por uma mola rotacional elástica linear de rigidez K_R . Sabendo que $K_R = EI/2L$, traçar os diagramas de esforço cortante e momento fletor da viga

Utilizar o Teorema de Castigliano



2 Introdução

Temos, para cada tipo de esforço, as seguintes equações de energia (para consulta).

2.1 Esforço Normal

$$U_N = \int_0^L \frac{N}{2EA} dx = \frac{N^2 L}{2EA}$$

2.2 Esforço Cortante

$$U_V = \int_0^L \frac{V^2 x^2}{2EI} dx = \frac{V^2 L^3}{6EI}$$

2.3 Momento Fletor

$$U_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{M^2 L}{2EI}$$

2.4 Momento Torsor

$$U_T = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

3 Solução Pelo Teorema de Castigliano

3.1 Variáveis Globais

```
[3]: EI,L,b,q,k,kN,m = sp.symbols('EI,L,b,q,k,kN,m', positive=True)
```

3.2 Equações de Energia

Equação de Energia:

$$U = \int_0^L \frac{M^2(Q, x)}{2EI} dx$$

Deformação

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^L \frac{M(Q, x)}{EI} \frac{\partial M(Q, x)}{\partial Q} dx$$

Onde Q é uma força transversal à viga na direção da deformação procurada.

```
[4]: x,Q,l = sp.symbols('x,Q,l')
M = sp.symbols('M', cls=sp.Function)
U_M = sp.Integral((M(Q,x)**2)/(2*EI), (x,0,l))
display(U_M, sp.diff(U_M, Q))
```

$$\int_0^l \frac{M^2(Q, x)}{2EI} dx$$

$$\int_0^l \frac{M(Q, x) \frac{\partial}{\partial Q} M(Q, x)}{EI} dx$$

Das equações de equilíbrio, temos:

$$V_A(\uparrow) = 2qL$$

$$M_A(\odot) = 2qL^2 - M_B(\odot)$$

Sabemos ainda que, no ponto B , temos a seguinte condição de contorno:

$$M_B(\odot) = -K_R\theta_B = -\frac{EI}{2L}\theta_B$$

```
[5]: K,L,M_B = sp.symbols("K,L,M_B",positive=True)
      K_R = EI/(2*L)
      V_A = 2*q*L
      M_A = 2*q*L**2 - M_B
      display(V_A,M_A)
```

$$2Lq$$

$$2L^2q - M_B$$

A energia total U na viga é a soma das energias nos segmentos AB , BC e na mola B .

3.3 Energia em AB

$$M(x) = -M_A + V_Ax - \frac{qx^2}{2}$$

$$U_{AB} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{\left(-M_A + V_Ax - \frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{\left[-(2qL^2 - M_B) + V_Ax - \frac{qx^2}{2}\right]^2}{2EI} dx$$

```
[6]: U_AB = U_M.replace(M(Q,x),-M_A+V_A*x-q*(x**2)/2).subs(1,L)
      display(U_AB)
```

$$\int_0^L \frac{\left(-2L^2q + 2Lqx + M_B - \frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI} dx$$

3.4 Energia da Mola B

$$U_B = \frac{M_B^2}{K_R} = \frac{2LM_B^2}{EI}$$

```
[7]: U_B = (M_B**2)/K
display(U_B)
```

$$\frac{M_B^2}{K}$$

3.5 Energia em BC

Da direita para a esquerda, temos:

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

$$U_{BC} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI} dx$$

```
[8]: U_BC = U_M.replace(M(Q,x),-q*(x**2)/2).subs(1,L)
display(U_BC)
```

$$\int_0^L \frac{q^2 x^4}{8EI} dx$$

3.6 Energia total

$$U = U_{AB} + U_B + U_{BC} = \int_0^L \frac{\left[-(2qL^2 - M_B) - \frac{qx^2}{2}\right]^2}{2EI} dx + \frac{M_B^2}{K_R} + \int_0^L \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI} dx$$

```
[9]: U = U_AB + U_B + U_BC
display(U)
```

$$\int_0^L \frac{\left(-2L^2q + 2Lqx + M_B - \frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{q^2 x^4}{8EI} dx + \frac{M_B^2}{K}$$

Assim, temos a seguinte rotação θ_B :

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = -\frac{M_B}{K_R}$$

```
[10]: display(U.diff(M_B))
eq = sp.Eq(U.diff(M_B).doit().subs(K,K_R), -M_B/K_R).simplify()
display(eq)
```

$$\int_0^L \frac{-4L^2q + 4Lqx + 2M_B - qx^2}{2EI} dx + \frac{2M_B}{K}$$

$$\frac{2LM_B}{EI} = -\frac{L(-7L^2q + 30M_B)}{6EI}$$

Resolvendo a equação acima para M_B , temos:

```
[11]: M_calc = sp.solve(eq,M_B)[0]
      display(M_calc,M_A,M_A.subs(M_B,M_calc))
```

$$\frac{L^2q}{6}$$

$$2L^2q - M_B$$

$$\frac{11L^2q}{6}$$

Ou seja:

$$V_A(\uparrow) = 2qL$$

$$M_A(\odot) = \frac{1}{6}qL^2$$

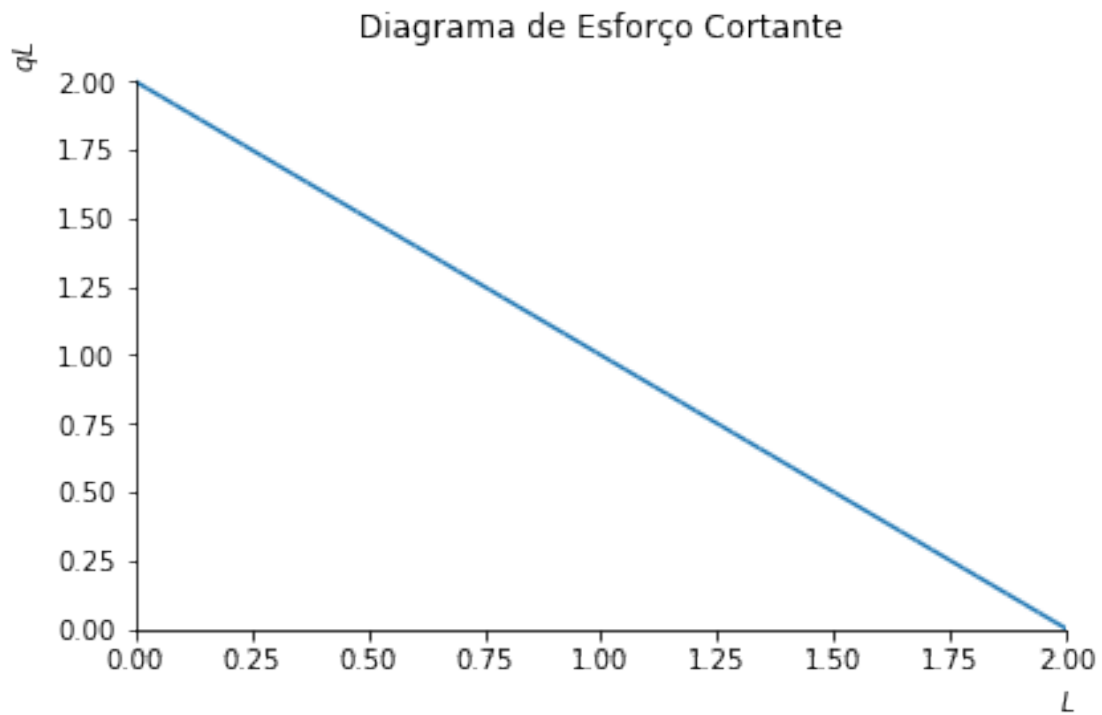
$$M_B(\odot) = \frac{11}{6}qL^2$$

```
[12]: M = - M_A.subs(M_B,M_calc) + V_A*x - q*(x**2)/2 - M_calc*sp.
      ↳SingularityFunction(x,L,0)
      display(M)
```

$$-\frac{L^2q(-L+x)^0}{6} - \frac{11L^2q}{6} + 2Lqx - \frac{qx^2}{2}$$

3.7 Diagrama de Esforço Cortante

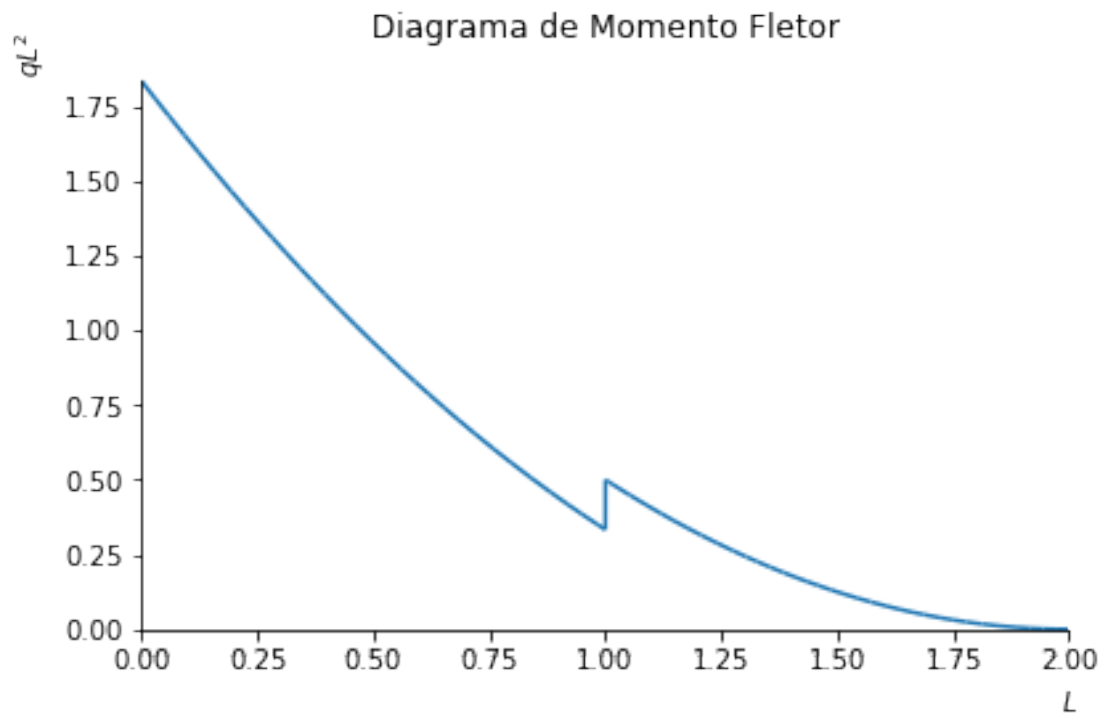
```
[13]: sp.plot((M.diff(x)).subs(L,1).subs(q,1), (x,0,2), xlabel="$L$", ylabel="$qL$",
      ↳title="Diagrama de Esforço Cortante")
```



[13]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f8d3dc8e280>

3.8 Diagrama de momento Fletor

```
[14]: sp.plot(-M.subs(L,1).subs(q,1), (x,0,2), xlabel="$L$", ylabel="$qL^{\{2\}}$",
        ↪title="Diagrama de Momento Fletor")
```



[14]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f8d3f5ce0a0>