Exercício 2

November 22, 2020

1 Exercício PA3-2

Exercício com data de entrega para 23 de novembro de 2020.

Aluno: Noé de Lima Bezerra

noe_lima@id.uff.br

[1]:
```python
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Image, IFrame
#from sympy.abc import x, y, z
sp.init_printing(use_latex='mathjax',latex_mode='equation*')
```

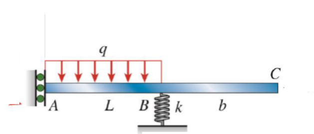
[2]:
```python
Image("Figuras/PA3-2.png")
```

[2]:

AVALIAÇÃO 2-PA3 – TEOREMA DE CASTIGLIANO– EXERCÍCIO 1

Uma viga em balanço ABC, com rigidez à flexão EI=45 kN.m2, é suportada por um apoio guiado em A e por uma mola de rigidez K no ponto B, como mostra a figura. O vão AB tem comprimento L=0,75 m e suporta uma carga uniforme. O balanço BC tem comprimento b=375 mm. Para qual rigidez K da mola o carregamento uniforme não produzirá deflexão na extremidade livre C?

Utilizar o Teorema de Castigliano



2 Introdução

Temos, para cada tipo de esforço, as seguintes equações de energia (para consulta).

2.1 Esforço Normal

$$U_N = \int_0^L \frac{N}{2EA}\mathrm{d}x = \frac{N^2 L}{2EA}$$

2.2 Esforço Cortante

$$U_V = \int_0^L \frac{V^2x^2}{2EI}\mathrm{d}x = \frac{V^2L^3}{6EI}$$

2.3 Momento Fletor

$$U_M = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x = \frac{M^2L}{2EI}$$

2.4 Momento Torsor

$$U_T = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\mathrm{d}x = \frac{T^2L}{2GJ}$$

3 Solução Pelo Teorema de Castigliano

3.1 Variáveis Globais

[3]:
```
EI,L,b,q,k,kN,m = sp.symbols('EI,L,b,q,k,kN,m', positive=True)
```

3.2 Equações de Energia

Equação de Energia:

$$U = \int_0^L \frac{M^2\left(Q,x\right)}{2EI}\mathrm{d}x$$

Deformação

$$\delta y = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^L \frac{M\left(Q,x\right)}{EI}\frac{\partial M\left(Q,x\right)}{\partial Q}\mathrm{d}x$$

Onde Q é uma força transversal à viga na direção da deformação procurada.

[4]:
```
x,Q,l = sp.symbols('x,Q,l')
M = sp.symbols('M',cls=sp.Function)
U_M = sp.Integral((M(Q,x)**2)/(2*EI), (x,0,l))
display(U_M,sp.diff(U_M,Q))
```

$$\int\limits_0^l \frac{M^2(Q,x)}{2EI}\,dx$$

$$\int\limits_0^l \frac{M(Q,x)\frac{\partial}{\partial Q}M(Q,x)}{EI}\,dx$$

3.3 Deflexão em C

Na presente questão, estamos interessados em uma deformação nula no ponto C. Para tanto, vamos considerar $Q(\uparrow)$ uma carga pontual aplicada no ponto C, a fim de calcular a deflexão resultante.

Temos que a deflexão em B é dada por $V_B = -k\delta_B$. Temos, ainda, que a única reação de apoio vertical é $V_B(\uparrow)$, já que a reação de apoio em A é apenas $M_A(\circlearrowright)$. Portanto, a partir de $q(\downarrow)$, temos:

$$V_B = -k\delta_B = qL - Q$$

A reação M_A pode ser calculada por:

$$M_A\left(\circlearrowright\right) = -\frac{qL^2}{2} + V_B L + Q\left(L+b\right)$$

Substituindo $V_B = qL$, temos

$$M_A\left(\circlearrowright\right) = -\frac{qL^2}{2} + qL^2 - QL + Q\left(L+b\right) = \frac{qL^2}{2} + Qb$$

[5]:
```
V_B = q*L - Q
M_A = q*(L**2)/2 + Q*b
```

Agora, vamos dividir a viga em dois segmentos, AB e BC, a fim de obtermos a energia em cada trecho. O segmento AB será integrado da esquerda para a direita, onde:

$$M_{AB}\left(Q,x\right) = M_A - \frac{qx^2}{2} = \frac{q\left(L^2-x^2\right)}{2} + Qb$$

E o segmento BC será integrado da direita para a esquerda, sendo:

$$M_{BC}\left(Q,x\right) = Qx$$

[6]:
```
U_AB = U_M.replace(M(Q,x),(M_A-q*(x**2)/2)).subs(l,L)
U_BC = U_M.replace(M(Q,x),Q*x).subs(l,b)
U = U_AB+U_BC
display(U,U.diff(Q).subs(Q,0))
```

$$\int\limits_0^L \frac{\left(\frac{L^2q}{2} + Qb - \frac{qx^2}{2}\right)^2}{2EI}\,dx + \int\limits_0^b \frac{Q^2x^2}{2EI}\,dx$$

$$\int_0^b 0\,dx + \int_0^L \frac{b\left(\frac{L^2q}{2} - \frac{qx^2}{2}\right)}{EI}\,dx$$

A solução desta segunda integral, que fornece a deflexão δ_C (fazendo-se $Q(\uparrow) = 0$), é:

[7]:
```
delta_C = U.diff(Q).doit().subs(Q,0).simplify() - q*L/k
display(delta_C)
```

$$-\frac{Lq}{k} + \frac{L^3bq}{3EI}$$

Lembrando que a direção da deflexão δ_C é a mesma da força nula $Q(\uparrow)$. Esta deflexão também deve ter acrescida a parcela relativa ao deslocamento $\delta_B = -\frac{qL}{k}$, que resulta, portanto, em:

$$\delta_C = \left(\frac{L^2b}{3EI} - \frac{1}{k}\right)qL = 0 \therefore$$

$$\frac{L^2b}{3EI} = \frac{1}{k}$$

[8]:
```
eq = sp.Eq(delta_C, 0)
sol = (sp.solve(eq,k)[0]).simplify()
display(eq,sol)
```

$$-\frac{Lq}{k} + \frac{L^3bq}{3EI} = 0$$

$$\frac{3EI}{L^2b}$$

Portanto, ou $q = 0$, já que uma carga nula resulta em uma deflexão nula, ou:

$$k = \frac{3EI}{L^2b}$$

Substituindo os valores, temos:

[9]:
```
display(sol.subs(EI,45*kN*m**2).subs(L,0.75*m).subs(b,0.375*m).simplify())
```

$$\frac{640.0kN}{m}$$

Portanto,

$$k = 640 \ \ kN/m$$

Isto resulta na seguinte deflexão no ponto B:

[10]:
```
delta_B = -q*L/k
display(delta_B.subs(L,0.75*m).subs(k,sol.subs(EI,45*kN*m**2).subs(L,0.75*m).
 ↪subs(b,0.375*m).simplify()))
```

$$-\frac{0.001171875m^2q}{kN}$$

$$\delta_B = -1,171875 \times q \ \ mm$$

Para $q(\downarrow)$ em kN/m.

4 Solução Por Integração

O mesmo resultado pode ser obtido utilizando as integrais de momento fletor, as funções de singularidade e as condições de contorno dadas. Para fins de curiosidade, segue a solução através deste método.

A viga da questão tem a seguinte equação de momento fletor, utilizando funções de singularidade:

$$M\left(x\right) = M_A + \frac{q}{2}x^2 - \frac{q}{2}\left\langle x - L\right\rangle^2 + V_B\left\langle x - L\right\rangle$$

E as condições de contorno são:

- $\theta\left(0\right) = 0$
- $\delta\left(L\right) = -\frac{V_B}{k}$

[11]:
```
M_t = M_A.subs(Q,0) + (q/2)*sp.SingularityFunction(x,0,2) - (q/2)*sp.
 ↪SingularityFunction(x,L,2) + V_B.subs(Q,0)*sp.SingularityFunction(x,L,1)
display(M_t)
```

$$\frac{L^2q}{2} + Lq\langle -L + x\rangle^1 + \frac{q\langle x\rangle^2}{2} - \frac{q\langle -L + x\rangle^2}{2}$$

[12]:
```
theta,delta = sp.symbols('theta,delta',cls=sp.Function)
eqTheta = sp.Eq(sp.diff(EI*theta(x),x),M_t)
eqDelta = sp.Eq(sp.diff(EI*delta(x),x,x),M_t)
display(eqTheta,eqDelta)
```

$$EI\frac{d}{dx}\theta(x) = \frac{L^2q}{2} + Lq\langle -L+x\rangle^1 + \frac{q\langle x\rangle^2}{2} - \frac{q\langle -L+x\rangle^2}{2}$$

$$EI\frac{d^2}{dx^2}\delta(x) = \frac{L^2q}{2} + Lq\langle -L+x\rangle^1 + \frac{q\langle x\rangle^2}{2} - \frac{q\langle -L+x\rangle^2}{2}$$

[13]:
```
display(sp.dsolve(eqTheta,ics={theta(0):0}))
eqsol = sp.dsolve(eqDelta,ics={delta(x).diff(x,1).subs(x,L):0,delta(L):-V_B.
 ↪subs(Q,0)/k})
display(eqsol)
```

$$\theta(x) = \frac{q\left(L^2x + L\langle -L+x\rangle^2 + \frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{\langle -L+x\rangle^3}{3}\right)}{2EI}$$

$$\delta(x) = -\frac{Lq}{k} + \frac{3L^4q}{8EI} + \frac{-\frac{2L^3qx}{3} + \frac{q\left(\frac{3L^2x^2}{2} + L\langle -L+x\rangle^3 + \frac{\langle x\rangle^4}{4} - \frac{\langle -L+x\rangle^4}{4}\right)}{6}}{EI}$$

Assim, fazendo-se $\delta(L+b) = 0$ e resolvendo para k, temos:

[14]:
```
k_new = sp.solve(sp.Eq(sp.solve(eqsol,delta(x))[0],0),k)[0].subs(x,L+b).
 ↪simplify()
display(k_new)
```

$$\frac{6EI}{b^2\left(3L+2b\right)}$$

Ou seja,

$$k = \frac{6EI}{b^2\left(3L+2b\right)}$$

[15]:
```
k_new.subs(EI,45*kN*m**2).subs(L,0.75*m).subs(b,0.375*m)
```

[15]:

$$\frac{640.0kN}{m}$$

Que resulta em:

$$k = \frac{6EI}{b^2\left(3L+2b\right)} = 640 \;\; kN/m$$

Conferindo os valores de δ_B e δ_C, temos:

[16]:
```
sp.solve(eqsol,delta(x))[0].subs(x,L).subs(EI,45*kN*m**2).subs(L,0.75*m).
↪subs(k,640*kN/m)
```

[16]:

$$-\frac{0.001171875m^2q}{kN}$$

[17]:
```
sp.solve(eqsol,delta(x))[0].subs(x,L+b).subs(EI,45*kN*m**2).subs(L,0.75*m).
↪subs(b,0.375*m).subs(k,640*kN/m)
```

[17]:

$$0$$

Ou seja, $\delta_B = -1,171875 \times q\ \ mm$, para $q(\downarrow)$ em kN/m, e $\delta_C = 0$, independente de q.