Exercício 1

October 25, 2020

1 Exercício PA2-1

Exercício com data de entrega para 26 de outubro de 2020.

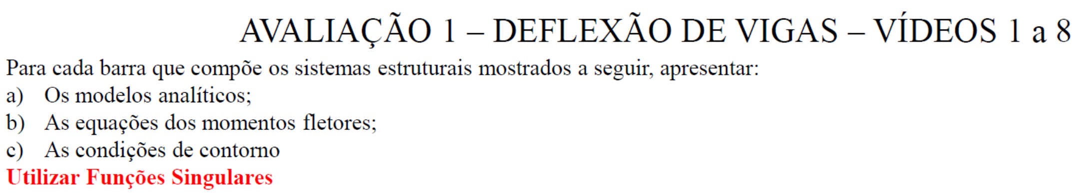
Aluno: Noé de Lima Bezerra

noe_lima@id.uff.br

[1]:
```
import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math, Image
sp.init_printing(use_latex='mathjax',latex_mode='equation*')
```

[2]:
```
Image("Figuras/PA2-1-0.png")
```

[2]:



AVALIAÇÃO 1 – DEFLEXÃO DE VIGAS – VÍDEOS 1 a 8

Para cada barra que compõe os sistemas estruturais mostrados a seguir, apresentar:

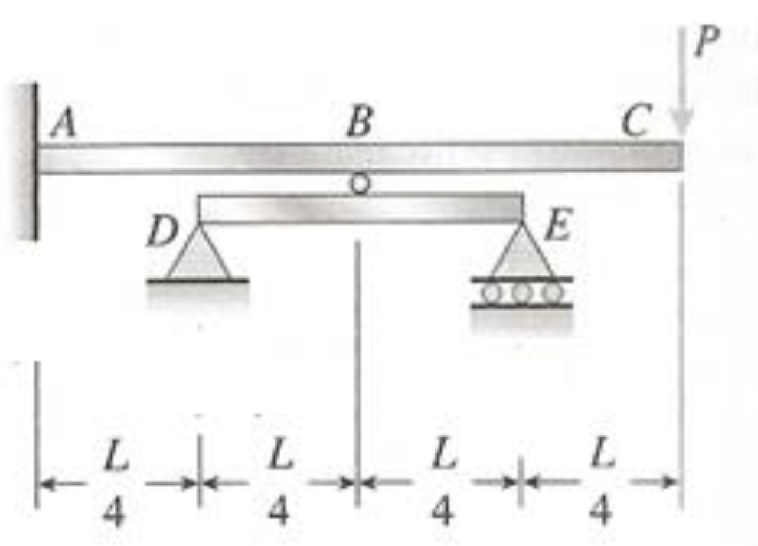
a) Os modelos analíticos;
b) As equações dos momentos fletores;
c) As condições de contorno

Utilizar Funções Singulares

2 Sistema Estrutural 1

[3]:
```
Image("Figuras/PA2-1-1.png")
```

[3]:



Temos, nessa estrutura, as seguintes reações de apoio:

- V_A
- V_D
- V_E
- M_A

E temos, também, em B, uma força vertical transmitida da barra superior para a barra inferior, que chamaremos de F_B. Descartamos as reações horizontais por não haver esforço solicitante nesta direção.

Temos, então, as seguintes equações para a barra superior, que chamaremos de barra 1:

$$\sum F_y = 0 \therefore V_A + F_B - P = 0$$

$$\sum M_z = 0 \therefore M_A + \frac{L}{2}F_B - LP = 0$$

E, na barra inferior, que nominaremos barra 2, temos:

$$\sum F_y = 0 \therefore V_D - F_B + V_E = 0$$

$$\sum M_z = 0 \therefore -\frac{L}{4}F_B + \frac{L}{2}V_E = 0$$

Temos, portanto, quatro equações e cinco variáveis. Resumindo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 & -\frac{L}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_D \\ V_E \\ M_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ LP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esse sistema é indeterminado.

Temos, na barra 1, a seguinte equação para o esforço cortante:

$$V_1\left(x\right) = V_A + F_B\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^0$$

Que resulta em:

$$M_1\left(x\right) = EI\frac{d^2y}{dx^2} = V_A \cdot x + F_B\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle + M_A$$

$$EI \cdot \theta\left(x\right) = EI\frac{dy}{dx} = \frac{V_A}{2} \cdot x^2 + \frac{F_B}{2}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2 + M_A \cdot x + C_1$$

$$EI \cdot y\left(x\right) = \frac{V_A}{6} \cdot x^3 + \frac{F_B}{6}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + \frac{M_A}{2} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

Já na barra 2, temos:

$$V_2\left(x\right) = V_D - F_B\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^0$$

Que implica em:

$$M_2\left(x\right) = EI\frac{d^2y}{dx^2} = V_D \cdot x - F_B\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle$$

$$EI \cdot \theta\left(x\right) = EI\frac{dy}{dx} = \frac{V_D}{2} \cdot x^2 - \frac{F_B}{2}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^2 + C_3$$

$$EI \cdot y\left(x\right) = \frac{V_D}{6} \cdot x^3 - \frac{F_B}{6}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^3 + C_3 \cdot x + C_4$$

Temos, portanto, quatro constantes de integração não determinadas.

As restrições impostas pelos apoios, impõem, na barra 1:

- $y(0) = 0$
- $\theta(0) = 0$

E, na barra 2:

- $y(0) = 0$
- $y(\frac{L}{2}) = 0$

Bem como, na interligação:

- $y_1(\frac{L}{2}) = y_2(\frac{L}{4})$

Portanto, a partir de $\theta_1(0) = 0$, temos $C_1 = 0$. Em seguida, de $y_1(0) = 0$, também temos que $C_2 = 0$. Logo:

$$EI \cdot y_1(x) = \frac{V_A}{6} \cdot x^3 + \frac{F_B}{6} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^3 + \frac{M_A}{2} \cdot x^2$$

Da mesma forma, considerando $y_2(0) = 0$, temos $C_4 = 0$ e, a partir de $y_2(\frac{L}{2}) = 0$, temos:

$$\frac{V_D}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{F_B}{6} \left\langle \frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right\rangle^3 + C_3 \frac{L}{2} = 0 \therefore -\frac{V_D}{6} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{F_B}{6} \left(\frac{L}{4}\right)^3 = C_3 \frac{L}{2}$$

Logo,

$$C_3 = \left[\frac{F_B}{192} - \frac{V_D}{24}\right] L^2$$

Portanto,

$$EI \cdot y_2(x) = \frac{V_D}{6} \cdot x^3 - \frac{F_B}{6} \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^3 + \left[\frac{F_B}{192} - \frac{V_D}{24}\right] L^2 \cdot x$$

Tendo resolvido as constantes de integração, a última condição de contorno nos fornece $y_1(\frac{L}{2}) = y_2(\frac{L}{4})$, que implica em:

$$EI \cdot y_1 \left(\frac{L}{2}\right) = EI \cdot y_2 \left(\frac{L}{4}\right) \therefore$$

$$\frac{V_A}{6} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{F_B}{6} \left\langle \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \right\rangle^3 + \frac{M_A}{2} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{V_D}{6} \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^3 - \frac{F_B}{6} \left\langle \frac{L}{4} - \frac{L}{4} \right\rangle^3 + \left[\frac{F_B}{192} - \frac{V_D}{24}\right] L^2 \frac{L}{4}$$

$$\frac{V_A}{6} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{M_A}{2} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{V_D}{6} \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^3 + \left[\frac{F_B}{192} - \frac{V_D}{24}\right] L^2 \frac{L}{4}$$

$$\frac{V_A}{48} L^3 + \frac{M_A}{8} L^2 = \frac{V_D}{384} L^3 + \frac{F_B}{768} L^3 - \frac{V_D}{96} L^3$$

$$\frac{V_A}{48}L + \frac{M_A}{8} = \frac{V_D}{384}L + \frac{F_B}{768}L - \frac{V_D}{96}L$$

Rearrumando, temos:

$$\frac{V_A}{48}L + \frac{M_A}{8} - \frac{V_D}{384}L - \frac{F_B}{768}L + \frac{V_D}{96}L = 0$$

Ou,

$$\frac{L}{48}V_A + \frac{L}{128}V_D + \frac{1}{8}M_A - \frac{L}{768}F_B = 0$$

Que, multiplicando a equação por 768, resulta em:

$$16LV_A + 6LV_D + 96M_A - LF_B = 0$$

Através das equações do modelo estático, ao combinar à esta equação de deformação, após as devidas aplicações das condições de contorno, obtemos um sistema que pode ser determinado, composto por cinco equações e cinco incógnitas, apresentado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2} & 0 & -\frac{L}{4} \\ 16L & 6L & 0 & 96 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_D \\ V_E \\ M_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ LP \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema permite obter todas as reações de apoio, bem como a força transmitida na interligação entre as barras.

[4]:
```
L,P = sp.symbols('L,P')
```

[5]:
```
K = sp.Matrix([[1,0,0,0,1],[0,0,0,1,L/2],[0,1,1,0,-1],[0,0,L/2,0,-L/
↪4],[16*L,6*L,0,96,-L]])
f = sp.Matrix([[P],[L*P],[0],[0],[0]])
x = K.solve(f)
display(x)
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{25P}{31} \\ \frac{28P}{31} \\ \frac{28P}{31} \\ \frac{3LP}{31} \\ \frac{56P}{31} \end{bmatrix}$$

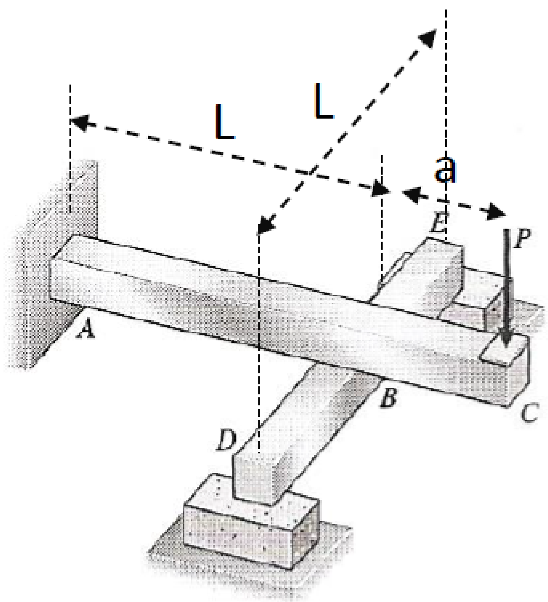
A solução do sistema é:

$$\begin{cases} V_A &= -\frac{25}{31}P \\ V_D &= \frac{28}{31}P \\ V_E &= \frac{28}{31}P \\ M_A &= \frac{3}{31}LP \\ F_B &= \frac{56}{31}P \end{cases}$$

3 Sistema Estrutural 2

[6]:
```
Image("Figuras/PA2-1-2.png")
```

[6]:



Temos, nessa estrutura, tal como na anterior, as seguintes reações de apoio:

- V_A
- V_D
- V_E
- M_A

E temos, novamente, em B, uma força vertical transmitida da barra superior para a barra inferior, que chamaremos de F_B. Descartamos as reações horizontais por não haver esforço solicitante nesta direção.

Temos, então, as seguintes equações para a barra superior, que chamaremos de barra 1:

$$\sum F_y = 0 \therefore V_A + F_B - P = 0$$

$$\sum M_z = 0 \therefore M_A + LF_B - (L+a)\,P = 0$$

E, na barra inferior, que nominaremos barra 2, temos:

$$\sum F_y = 0 \therefore V_D - F_B + V_E = 0$$

$$\sum M_z = 0 \therefore -\frac{L}{2}F_B + LV_E = 0$$

Temos, portanto, quatro equações e cinco variáveis. Resumindo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & L & 0 & -\frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_D \\ V_E \\ M_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ (L+a)\,P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esse sistema é indeterminado.

Temos, na barra 1, a seguinte equação para o esforço cortante:

$$V_1\,(x) = V_A + F_B\,\langle x - L\rangle^0$$

Que resulta em:

$$M_1\,(x) = EI\frac{d^2y}{dx^2} = V_A \cdot x + F_B\,\langle x - L\rangle + M_A$$

$$EI \cdot \theta\,(x) = EI\frac{dy}{dx} = \frac{V_A}{2} \cdot x^2 + \frac{F_B}{2}\,\langle x - L\rangle^2 + M_A \cdot x + C_1$$

$$EI \cdot y\,(x) = \frac{V_A}{6} \cdot x^3 + \frac{F_B}{6}\,\langle x - L\rangle^3 + \frac{M_A}{2} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

Já na barra 2, temos:

$$V_2\,(x) = V_D - F_B\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^0$$

Que implica em:

$$M_2\,(x) = EI\frac{d^2y}{dx^2} = V_D \cdot x - F_B\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle$$

$$EI \cdot \theta\,(x) = EI\frac{dy}{dx} = \frac{V_D}{2} \cdot x^2 - \frac{F_B}{2}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2 + C_3$$

$$EI \cdot y\,(x) = \frac{V_D}{6} \cdot x^3 - \frac{F_B}{6}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + C_3 \cdot x + C_4$$

Temos, portanto, quatro constantes de integração não determinadas.

As restrições impostas pelos apoios, impõem, na barra 1:

- $y(0) = 0$
- $\theta(0) = 0$

E, na barra 2:

- $y(0) = 0$
- $y(L) = 0$

Bem como, na interligação:

- $y_1(L) = y_2(\frac{L}{2})$

Portanto, a partir de $\theta_1(0) = 0$, temos $C_1 = 0$. Em seguida, de $y_1(0) = 0$, também temos que $C_2 = 0$. Logo:

$$EI \cdot y_1\,(x) = \frac{V_A}{6} \cdot x^3 + \frac{F_B}{6}\langle x - L\rangle^3 + \frac{M_A}{2} \cdot x^2$$

Da mesma forma, considerando $y_2(0) = 0$, temos $C_4 = 0$ e, a partir de $y_2(L) = 0$, temos:

$$\frac{V_D}{6}L^3 - \frac{F_B}{6}\left\langle L - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + C_3 L = 0 \therefore -\frac{V_D}{6}L^3 + \frac{F_B}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = C_3 L$$

Logo,

$$C_3 = \left[\frac{F_B}{48} - \frac{V_D}{6}\right]L^2$$

Portanto,

$$EI \cdot y_2\,(x) = \frac{V_D}{6} \cdot x^3 - \frac{F_B}{6}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + \left[\frac{F_B}{48} - \frac{V_D}{6}\right]L^2 \cdot x$$

Tendo resolvido as constantes de integração, a última condição de contorno nos fornece $y_1(L) = y_2(\frac{L}{2})$, que implica em:

$$EI \cdot y_1\,(L) = EI \cdot y_2\left(\frac{L}{2}\right) \therefore$$

$$\frac{V_A}{6}L^3 + \frac{F_B}{6}\langle L - L\rangle^3 + \frac{M_A}{2}L^2 = \frac{V_D}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{F_B}{6}\left\langle \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\right\rangle^3 + \left[\frac{F_B}{48} - \frac{V_D}{6}\right]L^2\frac{L}{2}$$

$$\frac{V_A}{6}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 = \frac{V_D}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \left[\frac{F_B}{96} - \frac{V_D}{12}\right]L^3$$

$$\frac{V_A}{6}L^3 + \frac{M_A}{2}L^2 = \frac{V_D}{48}L^3 + \frac{F_B}{96}L^3 - \frac{V_D}{12}L^3$$

$$\frac{V_A}{6}L + \frac{M_A}{2} = \frac{V_D}{48}L + \frac{F_B}{96}L - \frac{V_D}{12}L$$

Rearrumando, temos:

$$\frac{V_A}{6}L + \frac{M_A}{2} - \frac{V_D}{48}L - \frac{F_B}{96}L + \frac{V_D}{12}L = 0$$

Ou,

$$\frac{L}{6}V_A + \frac{L}{16}V_D + \frac{1}{2}M_A - \frac{L}{96}F_B = 0$$

Que, multiplicando a equação por 96, resulta em:

$$16LV_A + 6LV_D + 48M_A - LF_B = 0$$

Através das equações do modelo estático, ao combinar à esta equação de deformação, após as devidas aplicações das condições de contorno, obtemos um sistema que pode ser determinado, composto por cinco equações e cinco incógnitas, apresentado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & L & 0 & -\frac{L}{2} \\ 16L & 6L & 0 & 48 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_D \\ V_E \\ M_A \\ F_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ (L+a)\,P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema permite obter todas as reações de apoio, bem como a força transmitida na interligação entre as barras.

[7]:
```
a,b = sp.symbols('a,b')
```

[8]:
```
K = sp.Matrix([[1,0,0,0,1],[0,0,0,1,L],[0,1,1,0,-1],[0,0,L,0,-L/
↪2],[16*L,6*L,0,48,-L]])
f = sp.Matrix([[P],[(L+a)*P],[0],[0],[0]])
x = K.solve(f)
display(x)
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{-46L^2P+48LP(L+a)}{62L^2} \\ -\frac{-16L^2P-48LP(L+a)}{124L^2} \\ -\frac{-16L^2P-48LP(L+a)}{124L^2} \\ -\frac{-62L^2P(L+a)-L\left(-16L^2P-48LP(L+a)\right)}{62L^2} \\ -\frac{-16L^2P-48LP(L+a)}{62L^2} \end{bmatrix}$$

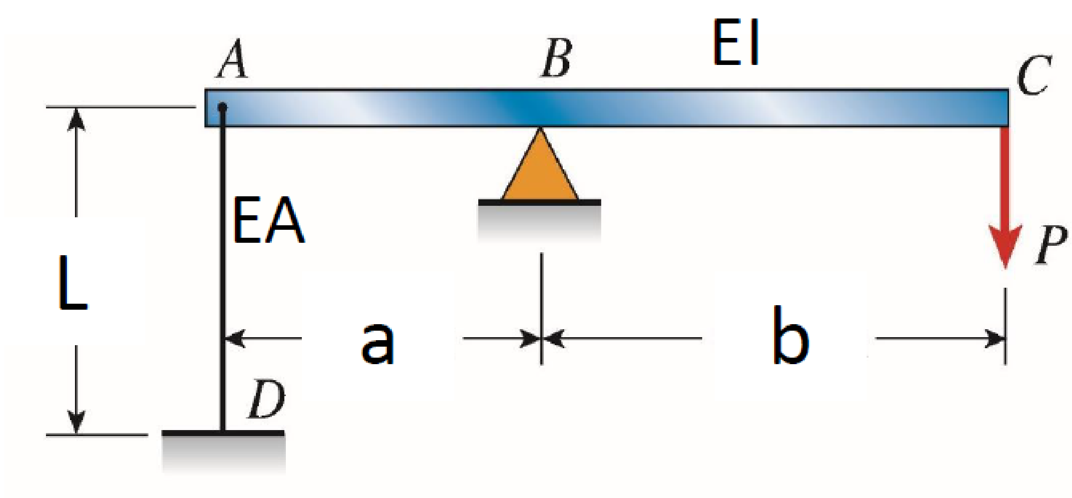
A solução do sistema é:

$$\begin{cases} V_A &= & -\frac{P}{31L}\left(L+24a\right) \\ V_D &= & \frac{P}{31L}\left(16L+12a\right) \\ V_E &= & \frac{P}{31L}\left(16L+12a\right) \\ M_A &= & -\frac{P}{31L}\left(7La-L^2\right) \\ F_B &= & \frac{P}{31L}32L+24a \end{cases}$$

4 Sistema Estrutural 3

[9]:
```
Image("Figuras/PA2-1-3.png")
```

[9]:



Esta estrutura tem uma particularidade, a saber: o deslocamento δy em A é igual à deformação no tirante AD.

Temos, nesta estrutura as seguintes reações de apoio:

- V_A = V_D
- V_B

Como não há atuação de forças no sentido horizontal, podemos concluir que $H_B = 0$. Temos ainda, que $y(0) = -\frac{L}{EA}V_D = -\frac{L}{EA}V_A$.

As equações de equilíbrio estático nos fornecem as sequintes relações:

$$\sum_{F_y} = 0 \therefore V_A + V_B - P = 0$$

$$\sum_{M_z} = 0 \therefore V_B \cdot a - P \cdot (a+b) = 0$$

Temos, portanto, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ (a+b) \end{bmatrix}$$

[10]:
```
K = sp.Matrix([[1,1],[0,a]])
f = sp.Matrix([[1],[a+b]])*P
x = K.solve(f)
display(x)
```

$$\begin{bmatrix} \frac{Pa-P(a+b)}{a} \\ \frac{P(a+b)}{a} \end{bmatrix}$$

Este sistema tem solução e resulta em:

$$\begin{cases} V_A & = & \frac{a+b}{a} P \\ V_B & = & -\frac{b}{a} P \end{cases}$$

As equações de deformação para a viga AC são, para o esforço cortante:

$$V\left(x\right) = V_A + V_B \left\langle x - a \right\rangle^0$$

Que resulta em:

$$M\left(x\right) = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = V_A \cdot x + V_B \left\langle x - a \right\rangle$$

Esta equação dispensa constante de integração por não haver momento aplicado (nem nas reações de apoio).

$$EI \cdot \theta\left(x\right) = EI \frac{dy}{dx} = \frac{V_A}{2} \cdot x^2 + \frac{V_B}{2} \left\langle x - a \right\rangle^2 + C_1$$

$$EI \cdot y\left(x\right) = \frac{V_A}{6} \cdot x^3 + \frac{V_B}{6} \left\langle x - a \right\rangle^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

As condições de contorno são:

- $y(0) = -\frac{L}{EA}V_A$
- $y(a) = 0$

Temos, portanto, $C_2 = -\frac{LI}{A}V_A$, e

$$\frac{V_A}{6} \cdot a^3 + \frac{V_B}{6}\left\langle a - a\right\rangle^3 + C_1 \cdot a - \frac{LI}{A}V_A = 0 \therefore \frac{V_A}{6}a^3 + C_1 a - \frac{LI}{A}V_A = 0$$

Logo,

$$C_1 a = \frac{LI}{A}V_A - \frac{a^3}{6}V_A \therefore$$

$$C_1 = \frac{1}{a}\left[\frac{LI}{A} - \frac{a^3}{6}\right]V_A = \frac{6LI - Aa^3}{6Aa}V_A$$

Portanto, as equações de deformação são:

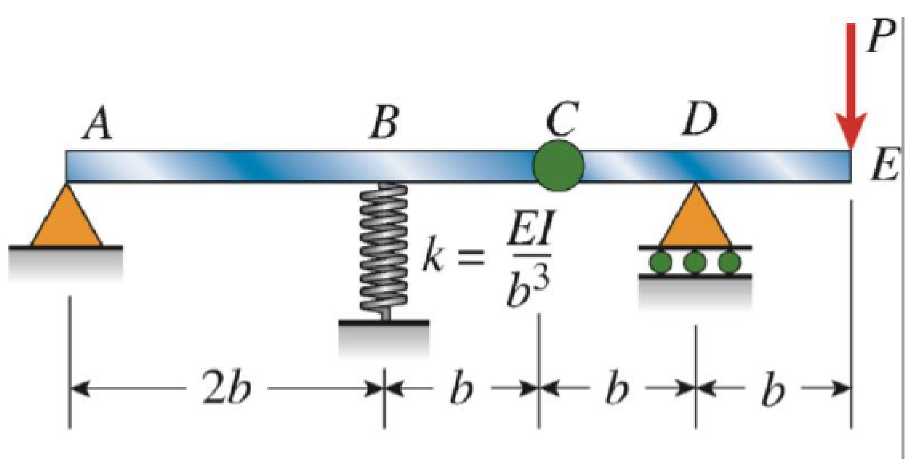
$$EI \cdot \theta\left(x\right) = EI\frac{dy}{dx} = \frac{V_A}{2} \cdot x^2 + \frac{V_B}{2}\left\langle x - a\right\rangle^2 + \frac{6LI - Aa^3}{6Aa}V_A$$

$$EI \cdot y\left(x\right) = \frac{V_A}{6} \cdot x^3 + \frac{V_B}{6}\left\langle x - a\right\rangle^3 + \frac{6LI - Aa^3}{6Aa}V_A \cdot x - \frac{LI}{A}V_A$$

5 Sistema Estrutural 4

[11]:
```
Image("Figuras/PA2-1-4.png")
```

[11]:



Esta estrutura assemelha-se à anterior, sendo, a partir da equação da mola, $\vec{F} = -k \cdot x$, $V_B = -ky(2b) = -\frac{EI}{b^3}y(2b)$. portanto,

$$y\left(2b\right) = -\frac{b^3}{EI}V_B$$

As reações de apoio são:

- V_A
- V_B
- V_D

As equações de equilíbrio, dispensando as equações de forças horizontais, são:

$$\sum_{F_y} = 0 \therefore V_A + V_B + V_D - P = 0$$

$$\sum_{M_{CA_z}} = 0 \therefore -V_A \cdot 3b - V_B \cdot b = 0$$

$$\sum_{M_{CE_z}} = 0 \therefore V_D \cdot b - P \cdot 2b = 0$$

Temos, assim, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3b & -b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_D \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2b \end{bmatrix}$$

Este sistema tem solução analítica.

[12]:
```
K = sp.Matrix([[1,1,1],[-3*b,-b,0],[0,0,b]])
f = sp.Matrix([[1],[0],[2*b]])*P
x = K.solve(f)
display(x)
```

$$\begin{bmatrix} \frac{P}{2} \\ -\frac{3P}{2} \\ 2P \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{cases} V_A & = & \frac{1}{2}P \\ V_B & = & -\frac{3}{2}P \\ V_D & = & 2P \end{cases}$$

As equações de deformação para a viga AE são, para o esforço cortante:

$$V\left(x\right) = V_A + V_B\left\langle x - 2b\right\rangle^0 + V_D\left\langle x - 4b\right\rangle^0$$

Que resulta em:

$$M\left(x\right)=EI\frac{d^2y}{dx^2}=V_A\cdot x+V_B\left\langle x-2b\right\rangle+V_D\left\langle x-4b\right\rangle+C_0$$

Onde $M\left(3b\right)=0$. Logo,

$$3V_A\cdot b+V_B\left\langle 3b-2b\right\rangle+V_D\left\langle 3b-4b\right\rangle+C_0=0\therefore 3V_A\cdot b+V_Bb+C_0=0$$

Ou,

$$C_0=-3V_A\cdot b-V_Bb$$

Porém, outra condição de contorno fornece $M\left(0\right)=0$, que implica em $C_0=0$. Assim, a equação acima torna-se:

$$3V_A+V_B=0$$

Esta relação pode ser verificada através da solução obtida nas equações de equilíbrio.

As equações de deformação são:

$$EI\cdot\theta\left(x\right)=EI\frac{dy}{dx}=\frac{V_A}{2}\cdot x^2+\frac{V_B}{2}\left\langle x-2b\right\rangle^2+\frac{V_D}{2}\left\langle x-4b\right\rangle^2+C_1$$

$$EI\cdot y\left(x\right)=\frac{V_A}{6}\cdot x^3+\frac{V_B}{6}\left\langle x-2b\right\rangle^3+\frac{V_D}{6}\left\langle x-4b\right\rangle^3+C_1\cdot x+C_2$$

As condições de contorno são:

- $y(0)=0$
- $y(2b)=-\frac{b^3}{EI}V_B\therefore EI\cdot y(2b)=-b^3V_B$
- $M(3b)=0$ (condição já utilizada)
- $y(4b)=0$

5.1 Para $x<3b$

$$EI\cdot y\left(x\right)=\frac{V_A}{6}\cdot x^3+\frac{V_B}{6}\left\langle x-2b\right\rangle^3+C_1\cdot x+C_2$$

De $y(0)=0$, temos $C_2=0$. De $EI\cdot y(2b)=-b^3\cdot V_B$, temos:

$$\frac{V_A}{6}\cdot\left(2b\right)^3+\frac{V_B}{6}\left\langle 2b-2b\right\rangle^3+C_1\cdot 2b=-b^3V_B\therefore$$

$$\frac{4}{3}V_A b^3 + 2C_1 b = -b^3 V_B$$

Portanto,

$$C_1 = -\frac{b^2}{3}\left[2V_A + \frac{3}{2}V_B\right]$$

Logo,

$$EI \cdot y\left(x\right) = \frac{V_A}{6} \cdot x^3 + \frac{V_B}{6}\left\langle x - 2b\right\rangle^3 - \frac{b^2}{3}\left[2V_A + \frac{3}{2}V_B\right] \cdot x$$

5.2 Para $x = 3b$

5.2.1 Pela Esquerda:

$$EI \cdot y\left(3b\right) = \frac{V_A}{6} \cdot \left(3b\right)^3 + \frac{V_B}{6}\left\langle 3b - 2b\right\rangle^3 + \frac{V_D}{6}\left\langle 3b - 4b\right\rangle^3 - \frac{b^2}{3}\left[2V_A + \frac{3}{2}V_B\right] \cdot 3b =$$

$$\frac{9}{2}V_A b^3 + \frac{1}{6}V_B b^3 - b^3\left[2V_A + \frac{3}{2}V_B\right] =$$

$$\left[\frac{9}{2}V_A \quad + \frac{1}{6}V_B - 2V_A - \frac{3}{2}V_B\right] b^3 \therefore$$

$$EI \cdot y\left(3b\right) = \left[\frac{5}{2}V_A \quad - \frac{8}{6}V_B\right] b^3$$

5.3 Para $x > 3b$

$$EI \cdot y\left(x\right) = \frac{V_A + V_B}{6}\left\langle x - 3b\right\rangle^3 + \frac{V_D}{6}\left\langle x - 4b\right\rangle^3 + C_1 \cdot x + C_2$$

Temos também, de $y(4b) = 0$, que:

$$\frac{V_A + V_B}{6} \cdot \left\langle 4b - 3b\right\rangle^3 + \frac{V_D}{6}\left\langle 4b - 4b\right\rangle^3 + 4C_1 \cdot b + C_2 = 0 \therefore$$

$$4C_1 \cdot b + C_2 = -\frac{V_A + V_B}{6}b^3$$

Mas, para $y = 3b$, as equações se igualam. Logo,

$$EI \cdot y\left(3b\right) = \frac{V_A + V_B}{6} \cdot \left\langle 3b - 3b\right\rangle^3 + \frac{V_D}{6}\left\langle 3b - 4b\right\rangle^3 + 3C_1 \cdot b + C_2 = \left[\frac{5}{2}V_A \quad - \frac{8}{6}V_B\right] b^3$$

Ou seja,

$$3C_1b + C_2 = \left[\frac{5}{2}V_A \quad - \frac{8}{6}V_B\right] b^3$$

Subtraindo as equações, temos:

$$C_1 = \left\{\left[-\frac{1}{6} - \frac{5}{2}\right] V_A + \left[-\frac{1}{6} + \frac{8}{6}\right] V_B\right\} b^2 = \left[-\frac{8}{3}V_A + \frac{7}{6}V_B\right] b^2$$

Portanto,

$$C_2 = \left[\frac{5}{2}V_A \quad - \frac{8}{6}V_B\right] b^3 - 3\left[-\frac{8}{3}V_A + \frac{7}{6}V_B\right] b^3 \therefore$$

$$C_2 = \left\{\left[\frac{5}{2}V_A - \frac{8}{6}V_B\right] + \left[8V_A - \frac{7}{2}V_B\right]\right\} b^3 \therefore$$

$$C_2 = \left\{\left[\frac{5}{2} + 8\right] V_A + \left[-\frac{8}{6} - \frac{7}{6}\right] V_B\right\} b^3 \therefore$$

Logo,

$$C_2 = \left[\frac{21}{2}V_A - \frac{15}{6}V_B\right] b^3$$

$$C_2 = \left[\frac{21}{2}V_A - \frac{15}{6}V_B\right] b^3$$

Temos, portanto, no trecho onde $x > 3b$, a seguinte equação para a deformação em y:

$$EI \cdot y\left(x\right) = \frac{V_A + V_B}{6}\left\langle x - 3b\right\rangle^3 + \frac{V_D}{6}\left\langle x - 4b\right\rangle^3 + \left[-\frac{8}{3}V_A + \frac{7}{6}V_B\right] b^2 \cdot x + \left[\frac{21}{2}V_A - \frac{15}{6}V_B\right] b^3$$