MEFPY

June 28, 2020

1 Método dos Elementos Finitos

Universidade Federal Fluminense

Disciplina ministrada pelo Prof. Marco Ferro

marco.ferro@uol.com.br

Anotações do Aluno Noé de Lima

noe_lima@id.uff.br

Primeiro semestre de 2020

Esta célula serve para apresentar as equações SageMath no formato LaTeXe configurar bibliotecas

[1]:
```
%display latex
from numpy import array,linspace,zeros
from scipy.interpolate import interp1d
from scipy.linalg import solve
from sage.misc.latex import MathJax,latex_extra_preamble,png
latex.add_to_preamble('\\usepackage[english,brazil]{babel}')
!uname -a
```

```
Linux DESKTOP-ORNGOTO 4.19.104-microsoft-standard #1 SMP Wed Feb 19 06:37:35 UTC
2020 x86_64 x86_64 x86_64 GNU/Linux
```

Contents

2 Introdução

2.1 Histórico

- Início na década de 50 pelos engenheiros aeronáuticos Turner, Argyris e Associados
- Análise Matricial de Estruturas, PTV
- Anos 60, MEF entendido como um caso particular do Método de Rayleigh-Ritz, logo idealizado a partir de funcionais. Logo o MEF pôde ser aplicado a problemas de fluidos, meios porosos, termodinâmica, eletromagnetismo, dentre outros.
- No final dos anos 60, foi comprovado que o MEF pode também ser considerado como um caso particular do Método de Galerkin, dispensando a necessidade de um funcional.
- Nos anos 70 o MEF foi identificado como um caso particular do MRP - Método dos Resíduos Ponderados. Expansão do MEF com computadores mais modernos e o advento de linguagens de baixo nível (FORTRAN e BASIC). O FORTRAN foi criado no meio da década de 1950, mas começou a crescer com o FORTRAN IV (1962), tendo um grande avanço com o FORTRAN 77.
- Nos anos 80 houve a disponibilidade e a explosão dos "microcomputadores" e vários grupos de pesquisa e desenvolvimento do MEF foram criados ao redor do planeta.
- Dos anos 90 até os dias atuais, vários programas comerciais foram disponibilizados, alguns considerando pré e pós processamento e a computação paralela.
- Para o dimensionamento de estruturas, no Brasil, os mais usados são o TQS e o EBERICK.
- Além disso, diversas linguagens são usadas para programação do MEF, como FORTRAN, C++, Matlab, dentre outras e, mais recentemente, Python.

3 Método Numéricos

(FAZER DIAGRAMA E INCLUIR AQUI)

Segue abaixo a importação das bibliotecas que serão utilizadas.

3.1 Exemplo

Considere a seguinte equação diferencial e suas condições de contorno:

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{d^2u}{dx^2} - u = 0; & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u\left(0\right) = 0 & u\left(1\right) = 1 \end{array}\right. \tag{1}$$

O código em SageMath a seguir coloca esta equação em uma variável:

[2]:
```
(x) = var('x') # Cria a variável independente x
u = function('u')(x) # Cria a variável dependente u(x)
eqn = diff(u,x,2) - u == 0; # Equação Diferencial $\frac{d^{2}u}{dx^{2}}-u=0$
```

[3]:
```
html(MathJax().eval(latex(eqn))) # Mostra a equação inline
```

[3]:
```
<html><script type="math/tex;
mode=display">\newcommand{\Bold}[1]{\mathbf{#1}}-u\left(x\right) +
\frac{\partial^{2}}{(\partial x)^{2}}u\left(x\right) = 0</script></html>
```

O código a seguir encontra a solução analítica:

```
[4]: analitc = desolve(eqn,u,[0,0,1,1]).full_simplify() # Resolve a equação para a variável u(x), passando pelos pontos (0,0) e (1,1), e simplifica
```

```
[5]: html(MathJax().eval(latex(analitc))) # Apresenta a solução inline
```

```
[5]: <html><script type="math/tex; mode=display">\newcommand{\Bold}[1]{\mathbf{#1}}-\frac{{\left(e - e^{\left(2 \, x + 1\right)}\right)} e^{\left(-x\right)}}{e^{2} - 1}</script></html>
```

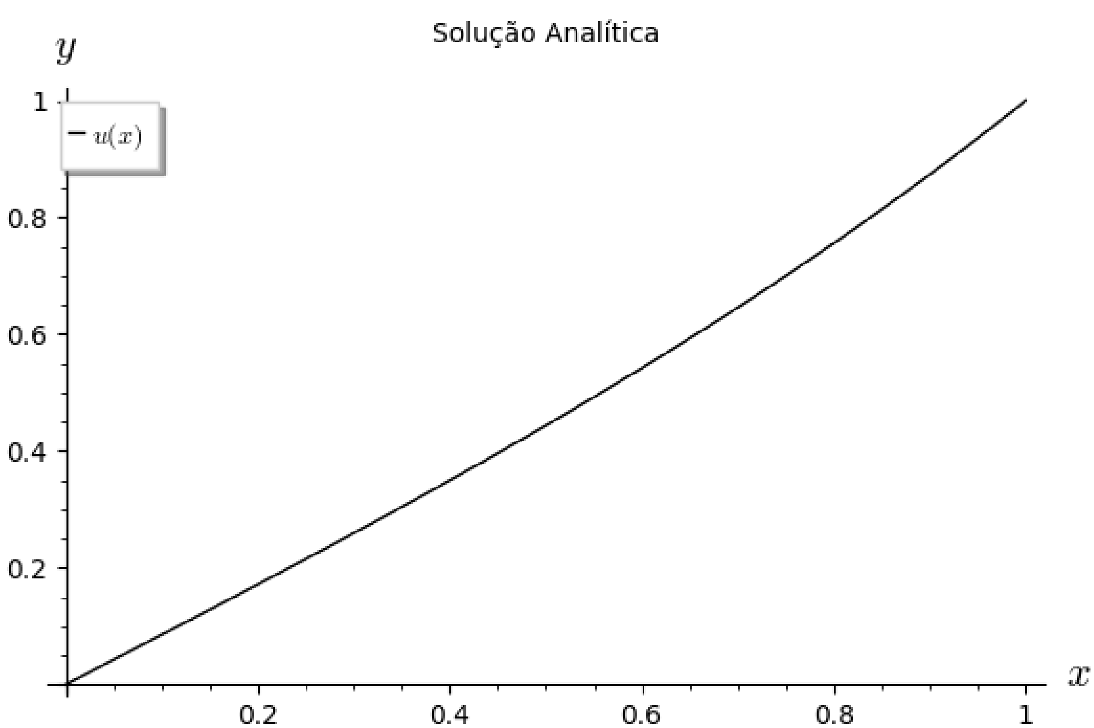
Rearrumando, a solução pode ser reescrita na forma:

$$u\left(x\right) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e - e^{-1}} \tag{2}$$

Este exemplo será utilizado nas seções a seguir.

Abaixo, temos o gráfico desta solução dentro do domínio $0 \leqslant x \leqslant 1$.

```
[6]: exata = plot(analitc,(x,0,1),color='black',legend_label='$u(x)$',axes_labels=['$x$','$y$'],title='Solução Analítica') # Plota a solução u(x) no intervalo (0 < x < 1)
exata.show()
```



3.1.1 Vetor x (Definição do Domínio)

Este código define o domínio x para o exemplo, e será utilizado como entrada nos demais códigos.

Neste exemplo, o domínio é $0 \leqslant x \leqslant 1$, discretizado em intervalos de $0,1$.

[7]:
```
xd = linspace(0.,1.,11)
```

3.2 MRP - Método dos Resíduos Ponderados

Considere uma equação diferencial em $u(x)$ como mostrado a seguir, e suas condições de contorno.

$$\begin{bmatrix} L\left[u\left(x\right)\right]=f\left(x\right); & a\leqslant x\leqslant b \\ u\left(a\right)=u_a; & u\left(b\right)=u_b \end{bmatrix} \tag{3}$$

(1)

A solução aproximada de $u(x)$ é $\bar{u}(x)$ e possui a seguinte forma:

$$\bar{u}\left(x\right)=\phi_0\left(x\right)+\sum_{i=1}^{n}a_i\phi_i\left(x\right) \tag{4}$$

Onde ϕ_i são as funções de aproximação (a princípio arbitrárias) e a_i são coeficientes.

Substituindo $\bar{u}$ em (1), tem-se:

$$L\left[\bar{u}\left(x\right)\right]-f\left(x\right)=R \tag{5}$$

Onde R é denominado Resíduo.

O MRP consiste em ponderar o Resíduo, de modo que a integral ao longo do domínio seja nula. Logo,

$$\int_D W_i R dv = 0 \tag{6}$$

(SRP - Sentença de Resíduos Ponderados)

Sendo,

- $W_i \rightarrow$ as funções de ponderação;
- $D \rightarrow$ o domínio e;
- $dv \rightarrow$ os diferenciais relativos ao domínio considerado.

3.2.1 Analogia

É como se houvesse uma compensação de áreas situadas entre y e $\bar{y}$, com ponderação.

(INCLUIR GRÁFICO)

3.3 Subdomínio (MVF - Método dos Volumes Finitos)

3.3.1 Função de Ponderação

$$W_i\left(x\right)=\begin{bmatrix} 1 & x\in D \\ 0 & x\notin D \end{bmatrix} \tag{7}$$

3.3.2 Exemplo

Considere a seguinte equação diferencial e suas condições de contorno para a qual obtivemos a Solução Exata.

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{d^2u}{dx^2} - u = 0; & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u\left(0\right) = 0 & u\left(1\right) = 1 \end{array}\right.$$

A função de aproximação escolhida por simplicidade é um polinômio da forma x^i. Logo,

$$\bar{u}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n+1} C_i x^i \tag{8}$$

Para que as condições de contorno sejam atendidas, temos:

$$\bar{u}\left(0\right) = \sum_{i=0}^{n+1} C_i x^i = 0 = \sum_{i=0}^{n+1} C_i 0^i$$

Mas,

$$0^i = \left[\begin{array}{ll} 1 & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{array}\right.$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{n+1} C_i 0^i = C_0 0^0 + \sum_{i=1}^{n+1} C_i 0^i = C_0 + \sum_{i=1}^{n+1} C_i 0 = 0 \therefore C_0 = 0$$

Bem como,

$$\bar{u}\left(1\right) = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} C_i 1^i = \sum_{i=1}^{n+1} C_i 1 = 1 \therefore \sum_{i=1}^{n+1} C_i = 1$$

Logo,

$$\bar{u}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n+1} C_i x^i$$

Utilizando $n = 1$,

$$\bar{u}\left(x\right) = C_1 x + C_2 x^2$$

Com $C_1 + C_2 = 1$.

Assim, tem-se:

$$R = \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \bar{u} = 2C_2 - C_1 x - C_2 x^2$$

Utilizando o fator de ponderação $W_i = 1$, tem-se:

$$\int_0^1 1\left[2C_2 - C_1 x - C_2 x^2\right] dx = \left[2C_2 x - C_1 \frac{x^2}{2} - C_2 \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2C_2 - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}C_1 + \frac{5}{3}C_2 & = & 0 \\ C_1 + C_2 & = & 1 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema é:

$$\begin{bmatrix} C_1 & = & \frac{10}{13} \\ C_2 & = & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

Logo, tem-se

$$\bar{u}\left(x\right) = \frac{10}{13}x + \frac{3}{13}x^2$$

Somando-se e subtraindo-se $\frac{3}{13}x$, obtém-se

$$\bar{u}\left(x\right) = x + \frac{3}{13}\left(x^2 - x\right) \tag{9}$$

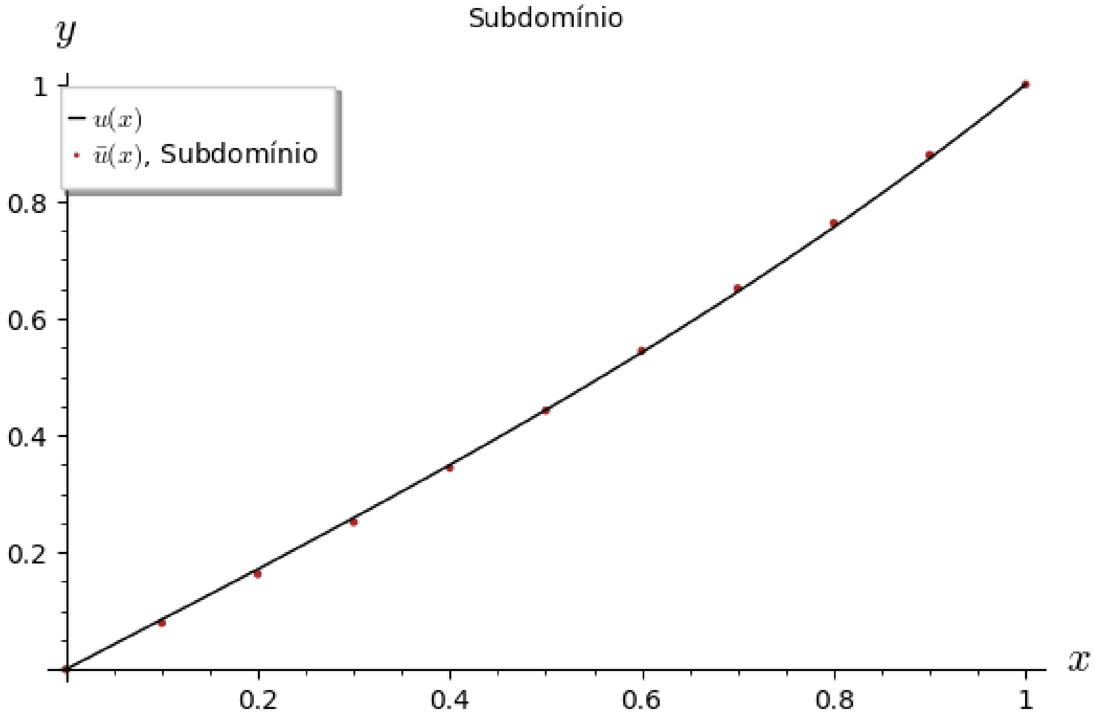
3.3.3 Implementação do Subdomínio

Abaixo, temos a implementação do MVF e o gráfico comparando com a solução exata.

[8]:
```
def ysubdominio(x):
    return x+3/13*x*(x-1)
```

[9]:
```
subdominio = points(zip(xd,ysubdominio(xd)),legend_label='$\\bar{u}(x)$,␣
↪Subdomínio',color='brown',axes_labels=['$x$', '$y$'],title='Subdomínio') #␣
↪Plota a solução u(x) no intervalo (0 < x < 1)
exata + subdominio
```

[9]:



3.4 Galerkin

No Método de Galerkin, a Função de Ponderação é igual a Função de Aproximação. Logo,

$$W_i\left(x\right) = \phi_i\left(x\right) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{10}$$

E a SRP - Sentença de Resíduos Ponderados, torna-se:

$$\int_D \phi_i R dv = 0 \tag{11}$$

3.4.1 Exemplo

Considere a mesma equação diferencial e as mesmas condições de contorno do exemplo anterior.

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2u}{dx^2} - u = 0; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u\left(0\right) = 0 \qquad u\left(1\right) = 1 \end{bmatrix}$$

Adota-se $W_i\left(x\right) = \phi_i\left(x\right) = x(x-1)$, com $n = 1$.

A SRP torna-se

$$\int_0^1 W_i R dx = \int_0^1 W_i \left(\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \bar{u}\right) dx =$$

$$\left[W_i\frac{d\bar{u}}{dx}\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{dW_i}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx}\right)dx-\int_0^1 W_i\bar{u}dx=0$$

Lembrando que o resultado acima sai a partir da integração por partes, onde,

$$\int udv=uv-\int vdu \tag{12}$$

E, portanto,

$$\int W_i\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}dx=\left[W_i\frac{d\bar{u}}{dx}\right]-\int\left(\frac{dW_i}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx}\right)dx$$

Porém,

$$\left[W_i\frac{d\bar{u}}{dx}\right]_0^1=0$$

Pois $W=x(x-1)=0$ para $x=0$ e $x=1$. Logo,

$$\begin{gathered}
-\int_0^1\left(\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx}\right)dx-\int_0^1\phi_i\bar{u}dx=0\\
-\int_0^1(2x-1)\left(C_1+2C_2x\right)dx-\int_0^1\left(x^2-x\right)\left(C_1x+C_2x^2\right)dx=0\\
\int_0^1\left(2C_1x+4C_2x^2-C_1-2C_2x\right)dx+\\
\int_0^1\left(C_1x^3+C_2x^4-C_1x^2-C_2x^3\right)dx=0\\
\left[\frac{2}{2}C_1x^2+\frac{4}{3}C_2x^3-C_1x-\frac{2}{2}C_2x^2\right]_0^1+\\
\left[\frac{1}{4}C_1x^4+\frac{1}{5}C_2x^5-\frac{1}{3}C_1x^3-\frac{1}{4}C_2x^4\right]_0^1=0
\end{gathered}$$

Logo, simplificando,

$$\begin{gathered}
\cancel{C_1}+\frac{4}{3}C_2-\cancel{C_1}-C_2+\frac{1}{4}C_1+\frac{1}{5}C_2-\frac{1}{3}C_1-\frac{1}{4}C_2=\\
\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)C_1+\left(\frac{4}{3}-1+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)C_2=0\\
\left(\frac{3-4}{12}\right)C_1+\left(\frac{80-60+12-15}{60}\right)C_2=0\\
-\frac{1}{12}C_1\left(\frac{5}{5}\right)+\frac{17}{60}C_2=0
\end{gathered}$$

Portanto,

$$\left[\begin{array}{cccc} -5C_1 & + & 17C_2 & = & 0\\ C_1 & + & C_2 & = & 0\end{array}\right.$$

A solução desse sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc} C_1 & = & \frac{17}{22}\\ C_2 & = & \frac{5}{22}\end{array}\right.$$

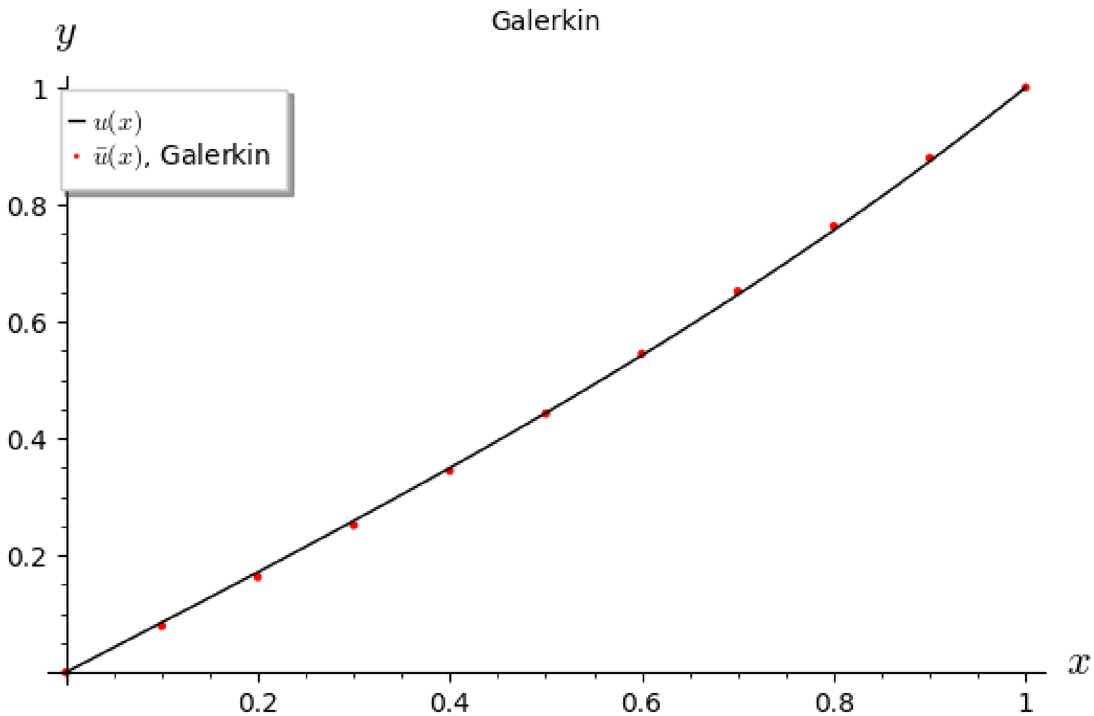
Assim,

$$\bar{u}(x)=x+\frac{5}{22}x(x-1) \tag{13}$$

[10]:
```python
def ygalerkin(x):
    return x+5/22*x*(x-1)
```

[11]:
```
galerkin = points(zip(xd,ysubdominio(xd)),legend_label='$\\bar{u}(x)$,␣
↪Galerkin',color='red',axes_labels=['$x$', '$y$'],title='Galerkin') # Plota a␣
↪solução u(x) no intervalo (0 < x < 1)
exata + galerkin
```

[11]:



3.5 Rayleigh-Ritz

É utilizado quando existe um Funcinoal equivalente à uma equação diferencial.

- PTV - Princípio dos Trabalhos Virtuais
- EPM - Energia Potencial Mínima

Considere $\Pi(u)$ o funcional equivalente à equação diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$$

O MRR - Método de Rayleigh-Ritz considera que a solução aproximada $\bar{u}(x)$ é uma combinação linear de funções de aproximação $\phi_i(x)$, ou seja,

$$\bar{u}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i\left(x\right) \tag{14}$$

Sendo $a_i, (i = 1.2. \ldots, n)$ coeficientes arbitrários e $\phi_i(x)$ devem ser escolhidos para atenderem as condições de contorno:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(a) & = & u_a \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(b) & = & u_b \end{bmatrix}$$

A solução aproximada $\bar{y}$ deve tornar o Funcional ``estacionário'' em relação às constantes a_i, ou seja, nulo. Logo,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0; \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

O Funcional Π da equação diferencial $\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$ vale

$$\Pi(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 \right] dx$$

Supondo $\bar{u} = x + ax(x+1)$,

$$\Pi(\bar{u}) = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} \left(1 + a(2x-1)\right)^2 + \tfrac{1}{2} \left(x + a\left(x^2 - x\right)\right)^2 \right] dx$$
$$\Pi(\bar{u}) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{a}{12} + \tfrac{a^2}{3}$$

Como

$$\frac{\partial \Pi(\bar{u})}{\partial a} = 0 \therefore -\tfrac{1}{12} + \tfrac{2}{3} a = 0$$
$$a = \tfrac{1}{8}$$

Portanto,

$$\bar{u}(x) = x + \frac{1}{8} x (x-1) \tag{15}$$

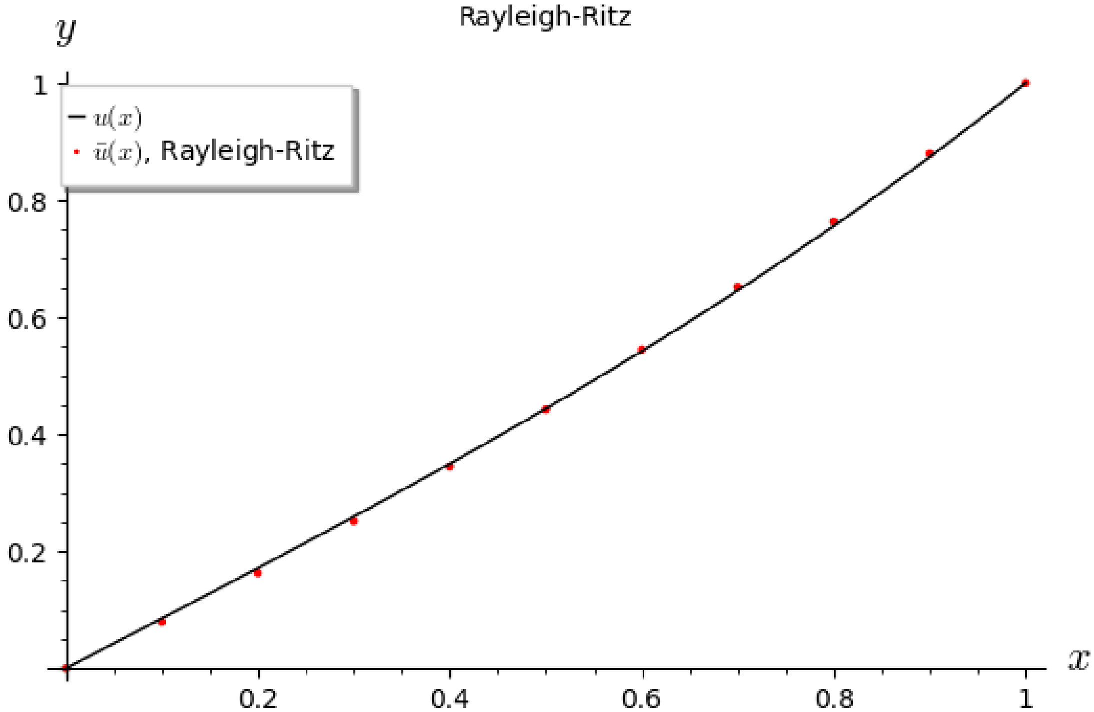
3.5.1 Implementação do Método de Rayleigh-Ritz

A seguir, a implementação do Método de Rayleigh-Ritz, bem como o gráfico de comparação com a solução exata.

[12]:
```
def yRR (x):
    return x+1/8*x*(x-1)
```

[13]:
```
RR = points(zip(xd,ysubdominio(xd)),legend_label='$\\bar{u}(x)$,␣
↪Rayleigh-Ritz',color='red',axes_labels=['$x$', '$y$'],title='Rayleigh-Ritz')␣
↪# Plota a solução u(x) no intervalo (0 < x < 1)
exata + RR
```

[13]:



4 MEF - Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos pode ser entendido como derivado do Método de Galerkin, onde, na SRP (Sentença de Resíduos Ponderados), $W_i = \phi_i$, considera-se o domínio $1 - D$ (unidimensional) dividido em segmentos ou elementos, sendo os seus pontos extremos denominados nós.

(INSERIR IMAGEM)

Tem-se que:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n+1} u_i N_i\left(x\right) \tag{16}$$

No segmento e, temos:

$$h_e = x_e^{(2)} - x_e^{(1)} \tag{17}$$

E, tem-se que

$$\bar{u}\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i N_i\left(x\right) \tag{18}$$

Assim, localmente,

$$N_1\left(e\right) = \frac{x_e^{(2)} - x}{x_e^{(2)} - x_e^{(1)}} = \frac{x_e^{(2)} - x_e^{(1)} - x_e}{x_e^{(2)} - x_e^{(1)}}$$

$$N_1(e) = \tfrac{h_e - x_e}{h_e} \quad \begin{bmatrix} N_1(x_e) = 1 \\ N_1(h_e) = 0 \end{bmatrix}$$

$$N_2(e) = \frac{x - x_e^{(1)}}{x_e^{(2)} - x_e^{(1)}}$$

$$N_1(e) = \tfrac{x_e}{h_e} \quad \begin{bmatrix} N_2(x_e) = 0 \\ N_2(h_e) = 1 \end{bmatrix}$$

`Usando o Método de Galerkin na SRP, temos:`

$$\int_0^1 N_i R dx = 0 \tag{19}$$

`Ou,`

$$\begin{gathered} \textstyle\int_0^1 N_i \left(\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} - \bar{u}\right) dx = \\ \left[N_i \frac{d\bar{u}}{dx}\right]_0^1 - \textstyle\int_0^1 \left(\frac{dN_i}{dx}\frac{d\bar{u}}{dx} + N_i \bar{u}\right) dx = 0 \end{gathered}$$

`Logo, lembrando que`

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i N_i(x)$$

`Obtém-se`

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \int_0^1 \left[\left(\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\right) u_j + (N_i N_j) u_j\right] dx - \left[N_i \frac{d\bar{u}}{dx}\right]_0^1 = 0 \\ \therefore \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx} + N_i N_j\right) u_j dx - \left[N_i \frac{d\bar{u}}{dx}\right]_0^1 = 0 \end{gathered}$$

`A partir da equação acima, define-se a Matriz de Rigidez` K.

4.0.1 Matriz de Rigidez e Matriz de Força (ou Carregamento) Nodal

$$K_{ij} \equiv \int_0^1 \left(\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx} + N_i N_j\right) dx \tag{20}$$

`Onde` $(i,j) \geqslant 1$;

$$f_i \equiv \left[N_i \frac{d\bar{u}}{dx}\right]_0^1 \tag{21}$$

`Onde` $i \leqslant n+1$

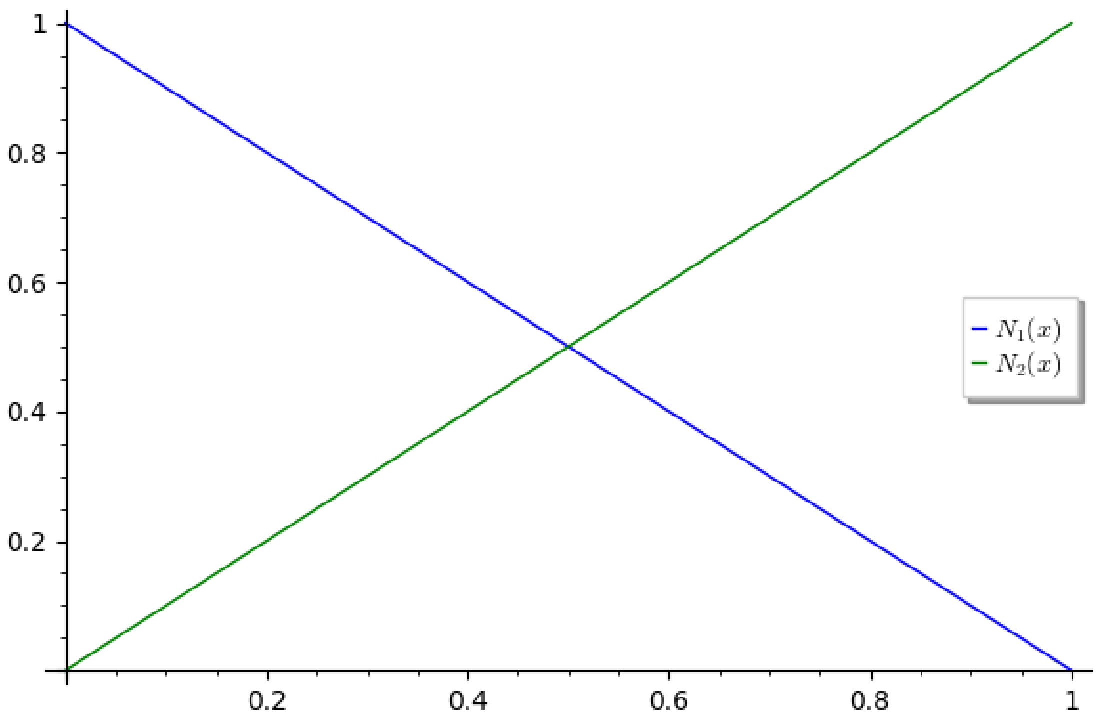
4.1 MEF com 1 Elemento

Aplicando o MEF ao exemplo utilizado até aqui:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$$

Subdividindo o domínio em um segmento (ou seja, sen divisão interna), temos:

[14]:
```
fig = plot(1-x,(0,1),legend_label='$N_1(x)$') +
 ↪plot(x,(0,1),color='green',legend_label='$N_2(x)$')
fig.show()
```



Onde,

- $N_1\left(x\right) = \frac{1-x}{1} = 1 - x$
- $N_2\left(x\right) = \frac{x}{1} = x$

Logo,

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx} + N_i N_j dx$$

Se $i = j$,

$$K_{11} = K_{22} = \int_0^1 \left[(-1)\times(-1) + (1-x)^2\right]dx =$$
$$\int_0^1 \left(1 + 1 - 2x + x^2\right)dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 2\right)dx =$$
$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 2 = \frac{4}{3}$$

Ou, alternativamente,

$$K_{11} = K_{22} = \int_0^1 \left[(1)\times(1) + (x)^2\right] dx = \int_0^1 (1+x)^2 dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Para $i \neq j$, temos:

$$K_{12} = K_{21} = \int_0^1 \left[(-1)\times(1) + (1-x)\,x\right] dx = \int_0^1 \left(-1 + x - x^2\right) dx = \left[-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-6+3-2}{6} = -\frac{5}{6}$$

Portanto, temos:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Tem-se, também, que $\mathbf{K}\bar{u} = \vec{f}$, Ou,

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{u}(0)}{dx} \\ -\frac{d\bar{u}(1)}{dx} \end{bmatrix}$$

Sabe-se, ainda, que:

$$\begin{bmatrix} u_1(0) = 0 \\ u_1(1) = 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{u}(0)}{dx} \\ -\frac{d\bar{u}(1)}{dx} \end{bmatrix}$$

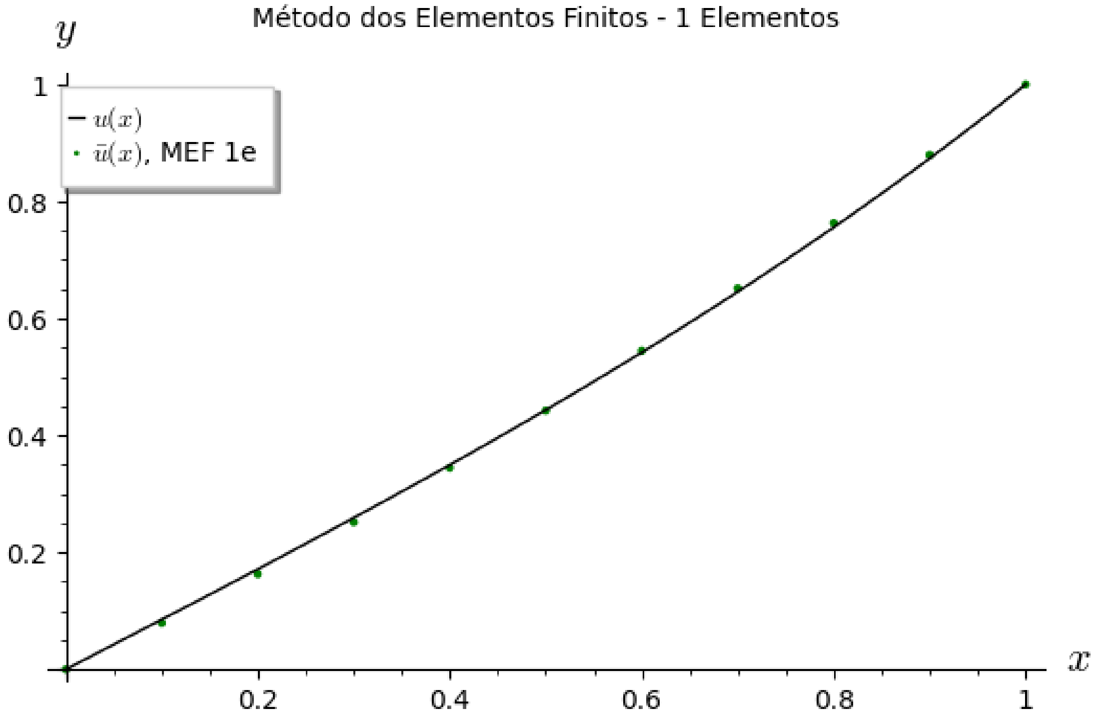
Resolvendo este sistema, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\bar{u}(0)}{dx} & = & \frac{5}{6} \\ \frac{d\bar{u}(1)}{dx} & = & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

[15]:
```
def yFEM1E (x):
    return x
```

[16]:
```
MEF1 = points(zip(xd,ysubdominio(xd)),legend_label='$\\bar{u}(x)$, MEF␣
↪1e',color='green',axes_labels=['$x$', '$y$'],title='Método dos Elementos␣
↪Finitos - 1 Elementos') # Plota a solução u(x) no intervalo (0 < x < 1)
exata + MEF1
```

[16]:



4.2 MEF com 2 Elementos

DESENVOLVER...

4.3 MEF com 3 Elementos

Agora veremos o mesmo exemplo aplicando o MEF com 3 Elementos.

$$\bar{u}\,(x) = \sum_{i=1}^{4} u_i N_i$$

Dividindo o domínio em 3 segmentos, temos 4 nós igualmente espaçados. São eles: $N_1 \rightarrow (x = 0)$, $N_2 \rightarrow (x = \frac{1}{3})$, $N_3 \rightarrow (x = \frac{2}{3})$ e $N_4 \rightarrow (x = 1)$.

Localmente (no elemento), temos:

$$\begin{cases} N_1^e &= \frac{h_e - x}{h_e} \\ N_2^e &= \frac{x}{h_e} \end{cases}$$

Onde $h_e = \frac{1}{3}$.

Portanto,

$$\begin{cases} N_1^e &= \frac{\frac{1}{3} - x}{\frac{1}{3}} &= 1 - 3x \\ N_2^e &= \frac{x}{\frac{1}{3}} &= 3x \end{cases}$$

Assim,

$$K_{ij} = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} \right) + N_i N_j \right] dx$$

$$f_i = \left[N_i \frac{d\bar{u}}{dx} \right] \therefore \vec{f} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{u}(0)}{dx} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{d\bar{u}(1)}{dx} \end{bmatrix}$$

Ressaltando que só existe f_i em N_1 e N_4.

Assim,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix}$$

Considerar que o nó N_2 é influenciado pelos elementos N_1 e N_2 e o nó N_3 pelos elementos N_2 e N_3.

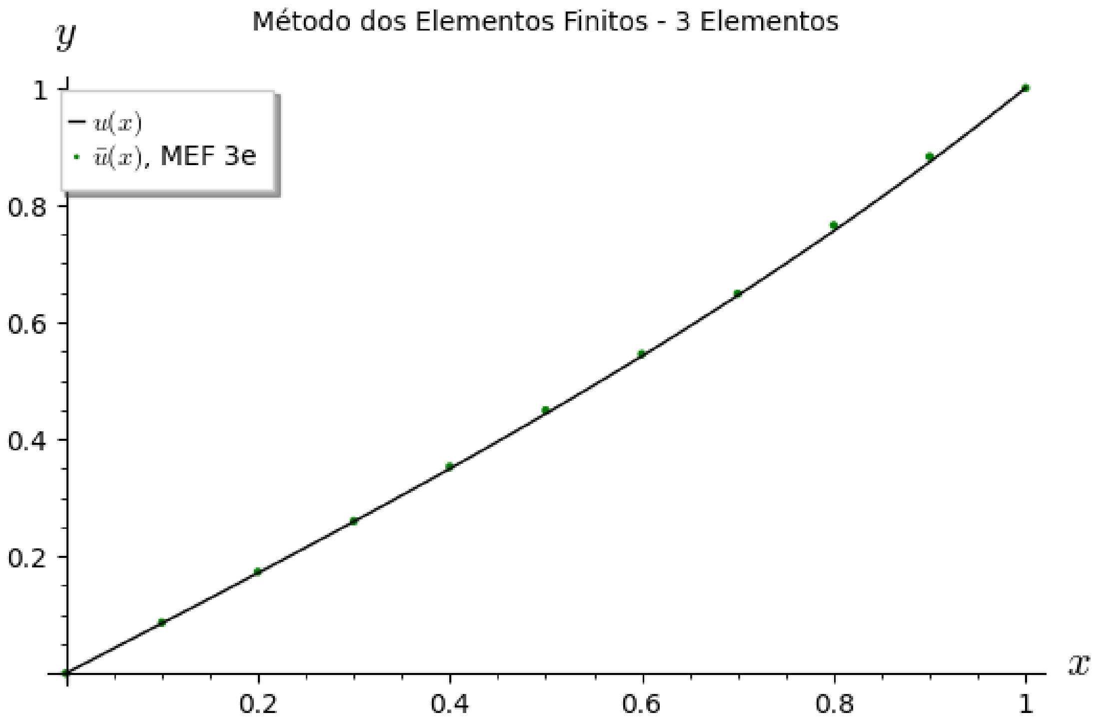
As condições de contorno de Dirichlet DEVEM ser atendidas, ou seja, $u_1 = 0$ e $u_4 = 1$. Logo, as incógnitas serão:

$$\frac{du(0)}{dx}, \quad u_2, \quad u_3, \quad \frac{du(1)}{dx}$$

[17]:
```
xfemtres=[0.,0.333,0.667,1.]
yfemtres=[0.,0.2885,0.6098,1.]
ylin=interp1d(xfemtres,yfemtres,kind='linear')(xd)
```

[18]:
```
MEF3 = points(zip(xd,ylin),legend_label='$\\bar{u}(x)$, MEF␣
↪3e',color='green',axes_labels=['$x$', '$y$'],title='Método dos Elementos␣
↪Finitos - 3 Elementos') # Plota a solução u(x) no intervalo (0 < x < 1)
exata + MEF3
```

[18]:



4.4 MEF com n Elementos

DESENVOLVER

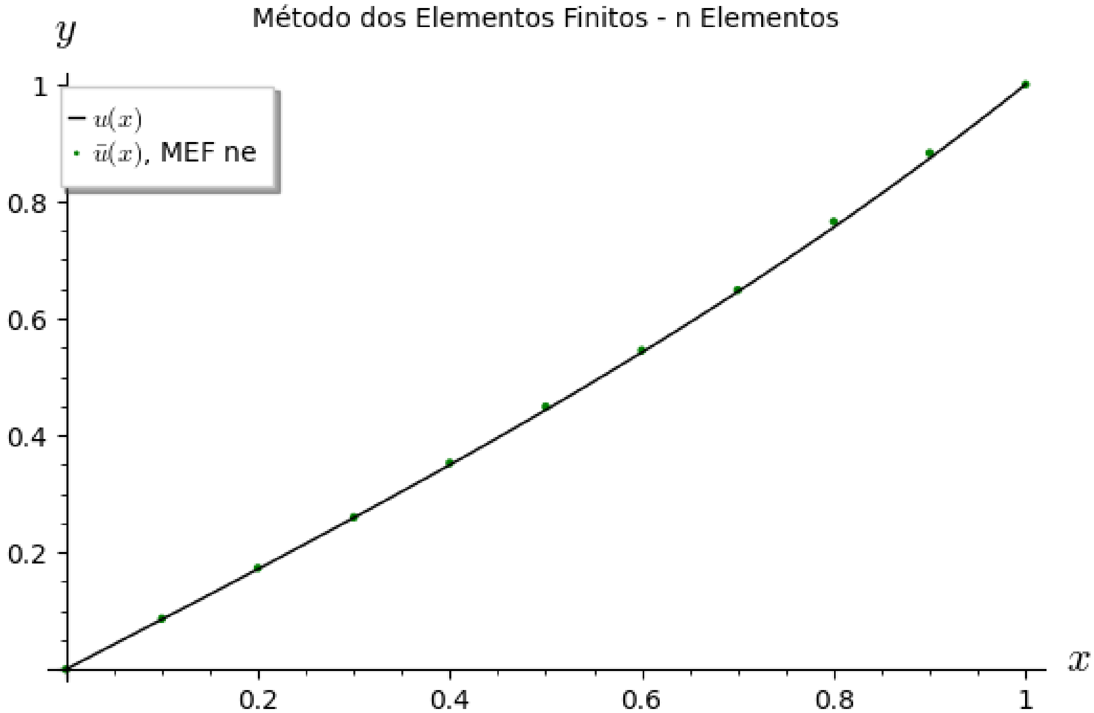
4.5 Implementação do MEF com n Elementos

[19]:
```
def mefn(a, b, ua, ub, n):
    x = array(linspace(a,b,n+1)) # Domínio
    # f = array([linspace(0,0,n+1)]).transpose() # Vetor de força nodal (matriz␣
 ↪coluna de zeros)
    K = zeros([(n+1),(n+1)]) # Matriz de Rigidez Global
    he = (b-a)/n # Subdomínio
    for i in range(n): # Montagem da Matriz de Rigidez Global
        K[i,i] += (1/he)+(he/3)
        K[i,i+1] += (-1/he)+(he/6)
        K[i+1,i] += (-1/he)+(he/6)
        K[i+1,i+1] += (1/he)+(he/3)
    # Rearranjo do Sistema
    # f -= ua*K[:,0] + ub*K[:,n] # Implementação alternativa com inicialização␣
 ↪de f
    f = - ua*K[:,0] - ub*K[:,n]
    K[:,0] *= 0
    K[:,n] *= 0
```

```
    K[0,0] = 1.
    K[n,n] = -1.
    # Solução do Sistema
    u = solve(K,f) # Vetor de solução
    u[0],u[n] = ua,ub # Substituição de du(a)/dx e du(b)/dx por u(a) e u(b)
    return x, u
out = mefn(0.,1.,0.,1.,100)
ymefn=interp1d(out[0],out[1],kind='linear')(xd)
```

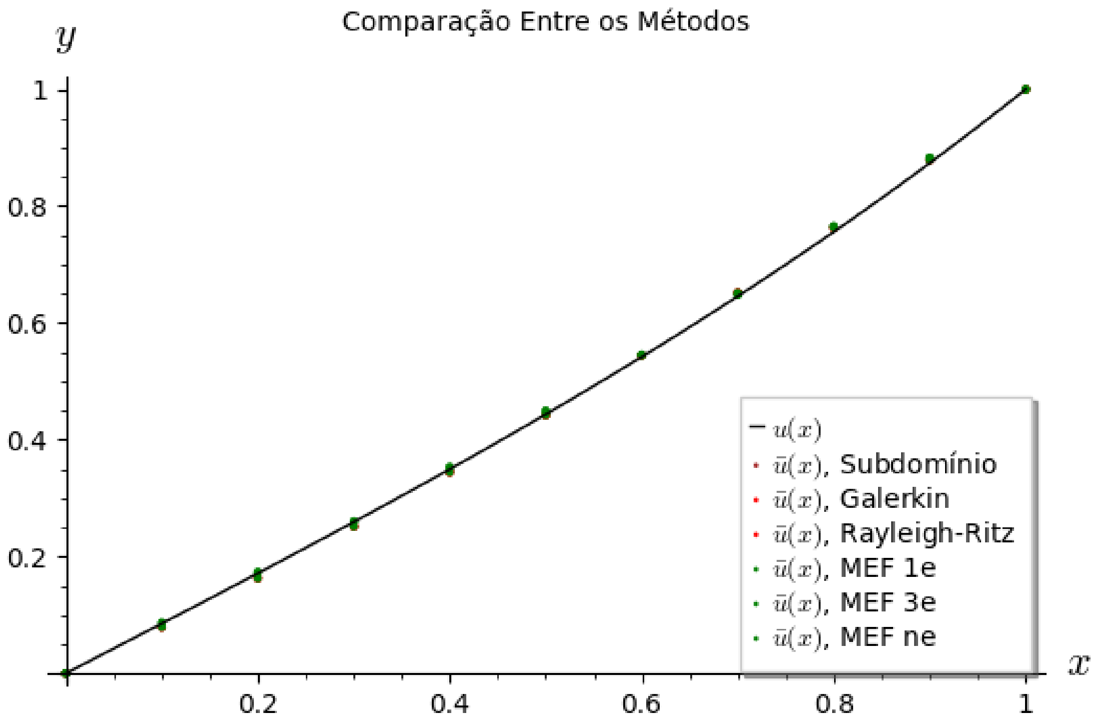
[20]:
```
MEFn = points(zip(xd,ylin),legend_label='$\\bar{u}(x)$, MEF␣
↪ne',color='green',axes_labels=['$x$', '$y$'],title='Método dos Elementos␣
↪Finitos - n Elementos') # Plota a solução u(x) no intervalo (0 < x < 1)
exata + MEFn
```

[20]:



5 Comparação das Soluções

[21]:
```
compara = subdominio + galerkin + RR + MEF1 + MEF3 + MEFn + exata
compara.show(title='Comparação Entre os Métodos', legend_loc="lower right")
```



6 PTV - Princípio dos Trabalhos Virtuais

Considere a barra de treliça sujeita a uma força de tração f, com área de seção transversal A, comprimento l e Módulo de Elasticidade E.

(INSERIR FIGURA)

A medida que a treliça está sendo carregada, ocorre um alongamento até a posição de equilíbrio.

A curva Tensão $\times$ Deformação é mostrada a seguir:

(INSERIR FIGURA)

(INSERIR DETALHE)

No detalhe, temos:

$$\Delta U_{0m} = Area_{\square_{ABDE}} + Area_{curva-AB}$$

Assim,

$$\Delta U_{0m} = \underbrace{\sigma_m \delta\epsilon_m}_{\delta U_{0m}^{(1)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\delta\sigma_m\delta\epsilon_m}_{\delta U_{0m}^{(2)}} + erro_{U_{0m}} \tag{22}$$

$$\Delta U_{0m} = \delta U_{0m}^{(1)} + \delta U_{0m}^{(2)} + erro \tag{23}$$

6.1 Incremento do Trabalho Interno (Energia de Deformação)

$$\Delta U_m = \int_0^{U_m} \Delta U_{0m} dU_m \tag{24}$$

$$\Delta U_m = \int_0^{U_m} \sigma_m \delta\epsilon_m dU_m + \int_0^{U_m} \frac{1}{2}\delta\sigma_m \delta\epsilon_m dU_m + \int_0^{U_m} erro \;\, dU_m$$

$$\delta U_m^{(1)} = \int_0^{U_m} \sigma_m \delta\epsilon_m dU_m$$

$$\delta U_m^{(2)} = \int_0^{U_m} \frac{1}{2}\delta\sigma_m \delta\epsilon_m dU_m$$

Para o caso de n_e barras,

$$\delta U^{(1)} = \sum_{n=i}^{n_e} \int_0^{U_m^{(i)}} \sigma_m^{(i)} \delta\epsilon_m^{(i)} dU_m^{(i)} \tag{25}$$

$$\delta U^{(2)} = \sum_{n=i}^{n_e} \int_0^{U_m^{(i)}} \frac{1}{2}\delta\sigma_m^{(i)} \delta\epsilon_m^{(i)} dU_m^{(i)} \tag{26}$$

Sendo,

- $\sigma_m^i =$ Tensão na barra i;
- $\delta\sigma_m^i =$ incremento de Tensão na barra i;
- $\delta\epsilon_m^i =$ incremento de Deformação na barra i.

A força externa atuando na treliça relaciona-se com o deslocamento de acordo com o gráfico:

(INSERIR GRÁFICO)

(INSERIR DETALHE)

6.2 Incremento do Trabalho Externo

$$\Delta W_i \;=\; \underbrace{f_i \delta d_i}_{\delta W_i^{(1)}} \;+\; \underbrace{\frac{1}{2}\delta f_i \delta d_i}_{\delta W_i^{(2)}} \;+\; erro_{W_i} \tag{27}$$

Considerando-se n_e elementos de treliça,

$$dW^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_e} f_i \delta d_i$$

$$dW^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_e} \frac{1}{2}\delta f_i \delta d_i$$

Ou, na forma vetorial,

$$dW^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_e} \vec{f} \cdot \delta\vec{d}$$

$$dW^{(2)} = \sum_{i=1}^{n_e} \frac{1}{2}\delta\vec{f} \cdot \delta\vec{d}$$

Sendo:

- $\vec{f} \rightarrow$ vetor de forças nas barras da treliça;
- $\delta\vec{f} \rightarrow$ incremento de $\vec{f}$; e
- $\delta\vec{d} \rightarrow$ incremento dos deslocamentos das barras da treliça.

7 PDV - Princípio dos Deslocamentos Virtuais

Nesse caso, equivale ao PTV.

Obs: Existe também o Princípio das Forças Virtuais, mas não será tratado neste contexto.

PDV: Em um sistema Estrutural em equilíbrio, o incremento de 1^a ordem da energia de deformação é igual ao incremento de 1^a ordem do trabalho externo.

Logo, $\delta U' = \delta W'$, ou

$$\sum_{n=1}^{n_e} \int_0^{U_m^{(i)}} \sigma_m^{(i)} \delta\epsilon_m^{(i)} dU_m^{(i)} = \vec{f} \cdot \delta\vec{d} \tag{28}$$

$\sigma_m^{(i)}$ e $\vec{f}$ são grandezas reais e em equilíbrio, enquanto $\delta\epsilon_m^i$ e $\delta\vec{d}$ são grandezas virtuais.

8 Energia Potencial Total do Sistema

$$\Pi = U + W \therefore \Pi(d) = U(d) + W(d) \tag{29}$$

U é a energia (interna) que volta a estrutura para a configuração inicial se houver o descarregamento total.

W é o trabalho que será realizado caso a estrutura voltasse para a configuração inicial, mantido o carregamento.

Π é a energia total necessária para a estrutura voltar à condição inicial, mantido o carregamento. Ou seja, para voltar a condição inicial, a estrutura precisa ``vencer'' o carregamento e a deformação sofridos.

Tem-se que

$$W(d) = -\vec{f} \cdot \vec{d} \tag{30}$$

9 Princípio da Energia Potencial Total Mínima

Um sistema estrutural carregado sofrerá deformação de modo a gastar o mínimo de Energia Potencial Mínima.

Logo, no equilíbrio,

$$\frac{\partial \Pi\left(d\right)}{\partial d} = 0 \tag{31}$$

$\Pi\left(d\right)$ é denominado Energia Potencial Total do Sistema, ou FUNCIONAL DO SISTEMA.

Logo, a equação $\Pi\left(d\right) = U\left(d\right) + W\left(d\right)$ equivale às Equações de Equilíbrio do Sistema.

9.1 Exemplo

Considere a equação

$$\tfrac{d^2u}{dx^2} - u = 0; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Prove que o Funcional da EDO anterior vale:

$$\Pi\left(u\right) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}u^2\right] dx \tag{32}$$

9.1.1 Solução

Tem-se que

$$\delta\Pi\left(u\right) = \int_0^1 \left[\frac{du}{dx}\delta\left(\frac{du}{dx}\right) + u\delta u\right] dx$$

Obs:

$$v = \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \times v \times dv = vdv = \frac{du}{dx} d\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$d\left(\frac{1}{2}u^2\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} \times u \times du = udu$$

$d\Pi$ pode ser reescrito como

$$\delta\Pi = \int_0^1 \left[\frac{du}{dx} d\left(\frac{du}{dx}\right) + udu\right] dx$$

Integrando por partes,

$$\int_0^1 \left(\frac{du}{dx} d\left(\frac{du}{dx}\right) + udu\right) dx = \left[\frac{du}{dx}du\right]_0^1 - \int_0^1 \left[\frac{d}{dx}\frac{du}{dx}du - udu\right] dx$$

As condições de contorno de Dirichlet devem ser atendidas:

$$du = 0 \quad se \quad \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\left[\frac{du}{dx}du\right] = 0$$

$$d\Pi = -\int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} - u\right) dudx$$

Condição de ``Estacionariedade'' $\delta\Pi = 0$; logo,

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx} - u\right) dudx = 0$$

Logo,

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$$