

1 Introdução

Estas notas de aula ilustram o procedimento básico para determinar a interseção entre um raio e uma superfície definida por sua equação explícita. Em particular, abordamos a determinação algébrica da interseção entre um raio e uma esfera.

2 Equação implícita de uma curva

No espaço bidimensional (2D), uma *curva* pode ser intuitivamente descrita como um conjunto de pontos desenhados sobre papel sem levantarmos a caneta.

Uma *curva fechada* é formada por um caminho em que o ponto inicial é igual ao ponto final. Normalmente as curvas são representadas por *equações implícitas*, as quais em 2D tem a seguinte forma geral:

$$f(x, y) = 0$$

Por exemplo, a equação do **círculo** centrado na origem é definida como

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

onde (x, y) são as coordenadas de um ponto sobre o círculo e r corresponde ao *radius*¹ do círculo (ver Figura 1).

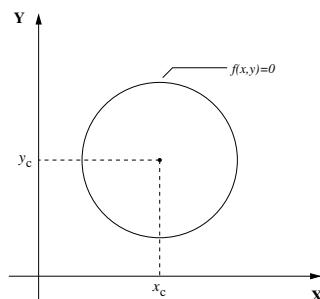


Figura 1: Círculo centrado em $\mathbf{c} = (x_c, y_c)$.

¹No texto vamos usar o termo em Inglês *radius* para representar o raio de círculo ou esfera, de maneira a diferenciar do raio como um segmento de reta orientado.

Se desejarmos um círculo localizado em um centro arbitrário $\mathbf{c} = (x_c, y_c)$, então a nova equação passa a ser

$$f(x, y) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2 \quad (1)$$

Estas equações são chamadas de implícitas porque não produzem pontos na curva diretamente. Elas são usadas para **verificar** se um dado ponto está na curva ou não. Assim, se um ponto $\mathbf{p} = (x, y)$ estiver na curva então $f(\mathbf{p}) = 0$.

3 Notação com vetor para curvas

Podemos representar curvas utilizando *vetores*. Essa representação é mais adequada quando se deseja realizar operações computacionais sobre a curva visto que é possível implementar a representação de vetor e suas operações, por exemplo, em uma classe. Adicionalmente, a notação com vetores é mais compacta e pode ser estendida para três (ou mais) dimensões trivialmente. Outra vantagem é que a equação com vetores normalmente apresenta uma interpretação geométrica que pode ser fácil de entender.

Considere o exemplo do círculo com centro $\mathbf{c} = (x_c, y_c)$, a equação utilizando vetores para pontos \mathbf{p} no círculo seria

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{c}) - r^2 = 0. \quad (2)$$

Se desenvolvermos algebricamente a Equação 2, vamos obter a Equação 1. Note que $(\mathbf{p} - \mathbf{c})$ é um vetor e que o *produto escalar* de um vetor com ele mesmo corresponde a sua magnitude elevada ao quadrado

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| \cos \theta.$$

onde θ é o ângulo entre os vetores. Como se trata do mesmo vetor, o ângulo obviamente é zero. Como $\cos 0 = \cos \pi = 1$, temos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| 1 = \|\mathbf{a}\|^2.$$

Portanto, a partir da Equação 2

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|^2 - r^2 = 0.$$

ou seja, temos que

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| - r = 0.$$

Assim, uma interpretação geométrica seria: “*todos os pontos \mathbf{p} no círculo estão a uma distância r do centro \mathbf{c}* ”, a qual descreve perfeitamente a ideia do círculo.

O mesmo princípio aplicado a curvas pode ser trivialmente estendido para *superfícies* no espaço tridimensional (3D). Portanto, podemos representar uma **esfera** através da mesma Equação 2. A única mudança é que por estarmos descrevendo uma superfície em 3D temos $\mathbf{p} = (x, y, z)$ e $\mathbf{c} = (x_c, y_c, z_c)$.

4 Representação de um raio

Recorde que um raio (segmento de reta orientado) foi definido como sendo

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + t(\vec{d}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + t(\mathbf{d}). \quad (3)$$

A interpretação geométrica desta equação seria “*avancamos a partir de \mathbf{o} na direção \vec{d} a uma distância fracional t para encontrarmos o ponto \mathbf{p}* .” A Figura 2 ilustra esse conceito.

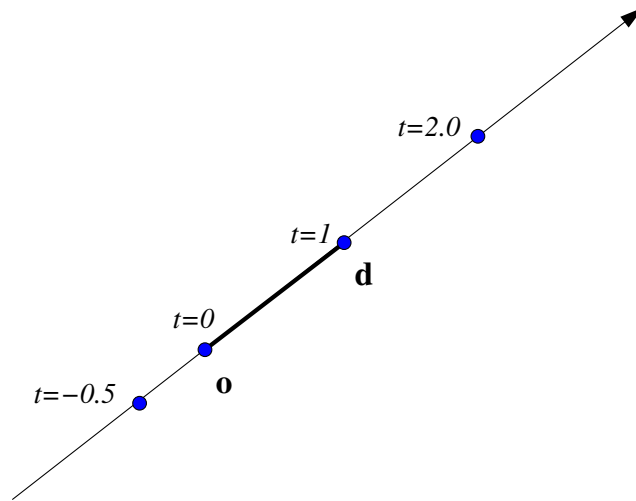


Figura 2: Raio $\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$, com origem \mathbf{o} e direção \mathbf{d} , com alguns valores para t .

5 Interseção raio-esfera

No estágio atual de desenvolvimento do *ray tracer* já é possível determinar cada raio associado ao centro dos *pixels* da imagem para uma câmera em perspectiva simples.

Lembre que o *frame* ortonormal da câmera é especificado por (1) uma origem, e (2) os vetores unitários ortogonais entre si \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} . A distância do

screen window (ou *view plane*) para a origem da câmera é a *distância focal* da nossa câmera.

Para cada raio associado a um *pixel*, é necessário verificar se o raio intersecta com algum objeto presente no mundo virtual à frente da câmera. Neste momento inicial estamos interessados em incluir **esferas** na cena que desejamos renderizar.

Portanto, precisamos determinar, para cada raio, se há interseção com as esferas que fazem parte da cena. A determinação é feita verificando se alguns dos pontos $\mathbf{p}(t)$ do raio estão sobre a superfície da esfera, representada pela Equação 2. Quando disparamos um raio na direção de uma esfera, existem apenas 3 possibilidades: (a) raio não toca a esfera, (b) raio toca a esfera tangencialmente em apenas um ponto, e (c) raio atravessa a esfera em dois pontos (entrada e saída). A Figura 3 demonstra os 3 casos visualmente.

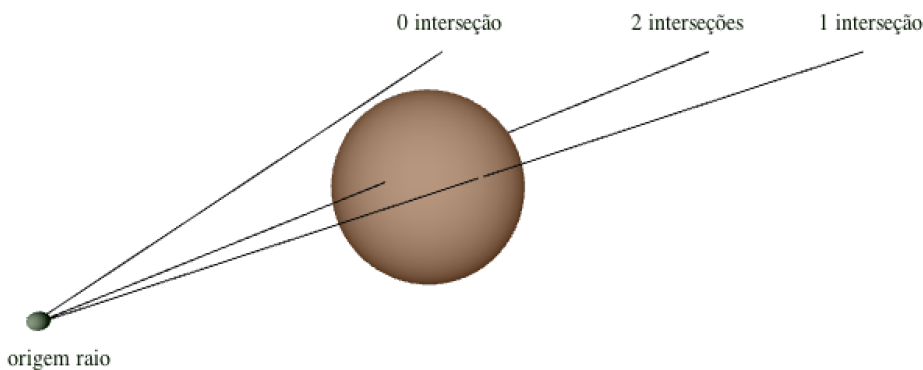


Figura 3: Três possibilidades de um raio intersectar uma esfera.

Precisamos desenvolver a função `bool hit_sphere(Sphere s, Ray r)` que recebe um raio e uma esfera e retorna verdadeiro se o raio tocou na esfera (i.e. casos (b) e (c)), ou falso, caso contrário. Este valor booleano será usado para decidirmos se devemos colorir ou não o *pixel* com a cor da esfera. Note que a entrada do algoritmo consiste nas informações sobre a esfera que desejamos testar (centro \mathbf{c} e *radius* r) e o raio (origem \mathbf{o} e direção \mathbf{d}).

De acordo com o que foi apresentado na Seção 2, desejamos resolver $f(x, y, z) = 0$ ou $f(\mathbf{p}(t)) = 0$, onde f representa a equação da esfera e $\mathbf{p}(t)$ são os pontos produzidos pelo raio. Podemos interpretar $f(\mathbf{p}(t)) = 0$ como sendo “*quais os pontos do raio, se é que existe algum, que estão na superfície da esfera?*”

A resposta natural a esta pergunta seria o valor de t , a nossa *incógnita*, que poderia ser $t = \infty$ (raio não toca na esfera), um único valor de $t > 0$

(raio toca tangencialmente a esfera em 1 ponto) ou dois valores t_1 e t_2 , com $0 < t_1 < t_2$ (raio atravessa a esfera em 2 pontos). No último caso, estaríamos apenas interessados em t_1 , o **menor** entre os dois ts , visto que este representa o ponto de entrada do raio na esfera, i.e. o ponto mais próximo da origem do raio (e da câmera) e, portanto, visível.

Solução algébrica

Para determinar algebricamente os valores de t , precisamos substituir a Equação 3 que representa o raio na Equação 2 que representa a esfera, ambas com notação vetorial

$$(\mathbf{p}(t) - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p}(t) - \mathbf{c}) - r^2 = 0. \quad (4)$$

Para resolver a Equação 4 vamos utilizar as propriedades associativas e distributivas do produto escalar. Observe que t é a incógnita da equação e, portanto, o valor que precisamos determinar (todas as outras variáveis são conhecidas).

Começamos substituindo o lado direito da Equação 3 na Equação 4

$$((\mathbf{o} + \mathbf{d}t) - \mathbf{c}) \cdot ((\mathbf{o} + \mathbf{d}t) - \mathbf{c}) - r^2 = 0$$

reorganizando o termos

$$((\mathbf{o} - \mathbf{c}) + \mathbf{d}t) \cdot ((\mathbf{o} - \mathbf{c}) + \mathbf{d}t) - r^2 = 0$$

aplicado a propriedade distributiva do produto escalar, obtemos

$$(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) + (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}t + (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}t + \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}t^2 - r^2 = 0$$

perceba que $(\mathbf{o} - \mathbf{c})$ é um vetor, assim como \mathbf{d} e que t é a variável que precisamos determinar. Podemos reorganizar os termos assim

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}t^2 + 2(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}t + (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - r^2 = 0 \quad (5)$$

o que corresponde a uma equação do segundo grau em t

$$At^2 + Bt + C = 0 \quad \text{onde} \quad \begin{cases} A = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \\ B = 2(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \\ C = (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - r^2. \end{cases}$$

A solução da Equação 5 pode apresentar nenhuma raiz real, 1 raiz real ou 2 raízes reais, o que é compatível com as possibilidades de interseção entre raio e esfera, descritos anteriormente.

A solução para a Equação 5 seria

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad \Delta = B^2 - 4AC. \quad (6)$$

Como a função, `sphere_hit` em sua versão inicial deseja apenas saber se o raio toca ou não na esfera, basta verificarmos se a Equação 5 tem solução real, ou seja, $\Delta \geq 0$.

Eventualmente, contudo, precisaremos achar as raízes da equação. Substituindo a Equação 5 com os valores corretos ficaria

$$t = \frac{-2(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \pm \sqrt{(2(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d})^2 - 4(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - r^2)}}{2\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}$$

$$t = \frac{-2(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \pm \sqrt{4((\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d})^2 - 4(\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - r^2)}}{2\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}$$

$$t = \frac{-2(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \pm \sqrt{((\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d})^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - r^2)}}{2\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}$$

levando a equação final

$$t = \frac{-(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \pm \sqrt{((\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d})^2 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - r^2)}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}.$$

6 Considerações finais

Apresentamos o mecanismo geral para determinação de interseção de raio-esfera para permitir sua programação na forma de uma função que deve retornar o parâmetro t do raio mais próximo da câmera, caso haja interseção.

O mesmo procedimento deve ser utilizado para determinar interseção, por exemplo, com triângulos. Neste caso, a equação explícita para o triângulo poderia ser

$$\mathbf{t}(u, v) = (1 - u - v)\mathbf{v}_0 + u\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_2.$$

onde (u, v) são as *coordenadas baricêntricas*, com $u \geq 0$ e $v \geq 0$, e $u + v \leq 1$, e os \mathbf{v}_i são os vértices do triângulo.

◁ FIM ▷