

PRAKTIKUM 4

ATOME, MOLEKÜLE, KONDENSIERTE MATERIE

Versuch 401: Elektronische Übergänge in Atomen

Gruppe A202

PARTH GADHAVI NOEMI RUPPERT ARIEH THILL

Versuchsdurchführung: 12. / 13. Mai 2025

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Der Photoeffekt	2
2.1. Aufbau	2
2.2. Durchführung	2
2.2.1. Energiebilanz der Photoelektronen	3
2.3. Abschätzung des Plankschen Wirkungsquantums und der Austrittsarbeit	5
2.3.1. Bestimmung der Grenzspannung U_0	5
2.3.2. Bestimmung des Plankschen Wirkungsquantums h	5
2.3.3. Bestimmung der Austrittsarbeit WA	6
2.3.4. Vergleich der Lambda-Kennlinie für unterschiedliche Intensitäten	6
3. Die Balmer-Serie	9
3.1. Aufbau	9
3.2. Durchführung	10
3.3. Bestimmung der Gitterkonstanten	11
3.4. Bestimmung der Balmerlinien	12
3.4.1. Bestimmung der Isotopieaufspaltung	12
3.4.2. Bestimmung der Rydberg-Konstante und des Plankschen Wirkungsquantum .	14
3.5. Weitergehende Überlegungen	15
3.5.1. Möglicher Ursprung der anderen auftrennen Spektrallinien	15
3.5.2. Doppler-Verbreitung	16
3.5.3. Auflösevermögen des Gitters	17
4. Fazit	18
5. Formeln: To be deleted at the end	19
Abbildungsverzeichnis	22
Tabellenverzeichnis	24
A. Anhang	25
A.1. Abbildungen	25
A.2. Tabellen	33

1. Einleitung

Ein zentraler Versuch zur Bestätigung des Zusammenhangs zwischen der Quantelung von Energien und Emissions -und Absorptionslinien ist die Untersuchung des Photoeffekts. Die Spektroskopie ermöglicht die Untersuchung des Atomaufbaus, insbesondere durch die Analyse von Spektrallinien, welche einen Ausdruck der Quantelung von Energie sind und in direktem Zusammenhang mit Lichtfrequenzen stehen.

Im ersten Versuchsteil beobachtet man die Energieabhängigkeit des Photoeffekts und es werden das Planksche Wirkungsquantum, sowie die Austrittsarbeit abgeschätzt.

Im zweiten Versuchsteil wird durch Ausmessung der Balmer-Linien das Planksche Wirkungsquantum erneut bestimmt und mit dem Ergebnis aus dem ersten Versuchsteil verglichen.

2. Der Photoeffekt

2.1. Aufbau

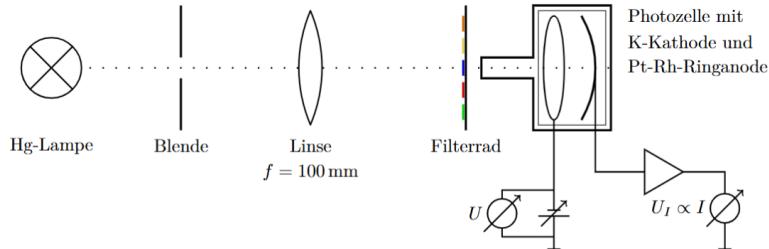


Abbildung 2.1.: Aufbau für die Messung des Photoeffektes [1]

Links ist die Hg-Lampe zu sehen, in der Mitte Optik-Elemente zum Fokussieren und Filtern des Lichtes und rechts ist die Photozelle mit Gegenspannung und Strommessung.

Die Quecksilber-Spektrallampe und die Photozelle werden gemäß Abbildung 2.1 gegenüberliegend auf dem Reiter angeordnet. Eine Irisblende vor der Lampe ermöglicht die Regulierung der Lichtintensität. Eine Linse mit einer Brennweite von $f=100 \text{ mm}$ wird in diesem Abstand vor die Blende positioniert, sodass sie das Licht parallel auf den nachfolgenden Interferenzfilter mit fünf Filtern sowie eine zusätzliche Blende lenkt.

2.2. Durchführung

Eine Abschirmvorrichtung mit einem röhrenförmigen Element verhindert Streulicht. Ein Lichtfleck wird gezielt auf die Kathode projiziert, ohne, dass die Anode beleuchtet wird.

Wenn Photonen aus der Hg-Lampe auf die Photokathode treffen, interagieren sie mit den Elektronen in dieser und überträgt dabei seine gesamte Energie $E = h\nu$ auf eines der Elektronen. Falls die übertragene Energie größer als die Austrittsarbeit W_A ist, dann kann sich das Elektron aus der Kathode lösen und zur Ringanode gelangen. Dadurch entsteht ein Stromfluss: der Photostrom I_{ph} . Durch den Einsatz der Gegenfeldmethode wird die maximale kinetische Energie, die die Elektronen beim verlassen der Kathode besitzen, bestimmt.

Bei dieser Methode wird eine Gegenspannung U_G zwischen Kathode und Anode angelegt, wodurch die Kathode im Vergleich zur Anode ein positives Potential erhält. Das dadurch erzeugte elektrische Feld verlangsamt die emittierten Elektronen auf ihrem Weg zur Anode, wodurch der Photostrom reduziert wird. Sobald die Grenzspannung U_0 erreicht ist, kommt der Photostrom vollständig zum Erliegen. Dies bedeutet, dass selbst die energiereichsten Elektronen die Anode nicht mehr erreichen können. In diesem Fall gilt die Beziehung: $E_{kin,max} = eU_0$.

Man lässt das Gegenfeld mit Hilfe einer variablen Spannungsquelle, welche sich zwischen der Kathode und der Anode befindet, ansteigen. Man erweitert die Schaltung mit Hilfe eines Spannungsteilers (Abbildung 2.2) aus einem 330Ω und 100Ω Widerstandes um den Messbereich zu skalieren und genauere Messungen durchzuführen.

V402: Quantelung von Energie

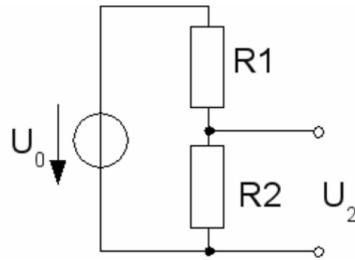


Abbildung 2.2.: Spannungsteiler [2]

Die verwendete Spannungsquelle kann Spannungen von 0 V bis 12 V bereitstellen. Der Photostrom erreicht jedoch bereits bei deutlich geringeren Gegenspannungen seinen Nullpunkt, typischerweise im Bereich von wenigen Volt. Für die Messung der Grenzspannung U_0 genügt daher ein kleiner Teil des gesamten Spannungsbereichs. Die feine Justierung der Gegenspannung ist entscheidend, um den Punkt zu bestimmen, an dem der Photostrom gerade verschwindet.

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen der abgefangenen Spannung U_2 , den Widerständen $R_1 = 330\Omega$, $R_2 = 100\Omega$ und U_0 :

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0. \quad (2.1)$$

Somit wird der Spannungsbereich auf $[0; 2,8]$ V skaliert.

Der Anodenstrom wird über einen Messverstärker erfasst, wobei eine zum Strom proportionale Spannung mit einem Digitalmultimeter (DMM) gemessen wird. Die Gegenspannung stammt aus einem 12V-Gleichspannungsnetzteil, wobei der negative Pol mit der Anode verbunden ist, um die Elektronen abzubremsen. Diese Spannung wird mit einem weiteren DMM gemessen.

Dieser Vorgang wird für je eine unterschiedliche Wellenlänge λ des Lichtes zwei mal wiederholt (zum Ausgleich der Schwankungen), wobei die Wellenlängen mit Hilfe von Interferenzfiltern einstellbar sind.

2.2.1. Energiebilanz der Photoelektronen

Ein Elektron, dass sich in der Kathode befindet, absorbiert ein Photon mit der Energie $E = h\nu$ und verlässt die Kathode, wenn die Energie des Photons größer ist als eine bestimmte Potentialdifferenz sein: die Austrittsarbeit W_K . In Abbildung 2.3, 2.4 und 2.5 sind die Austrittsarbeit W_K der Kathode und die Austrittsarbeit W_A der Anode für unterschiedliche elektrische Anordnungen dargestellt.

V402: Quantelung von Energie

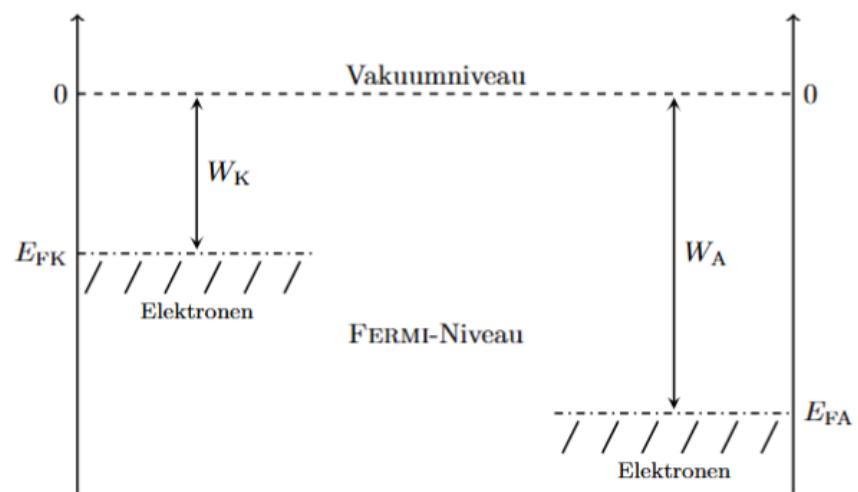


Abbildung 2.3.: Ferminiveaus von Kathode und Anode mit Austrittsarbeit W_A [1]

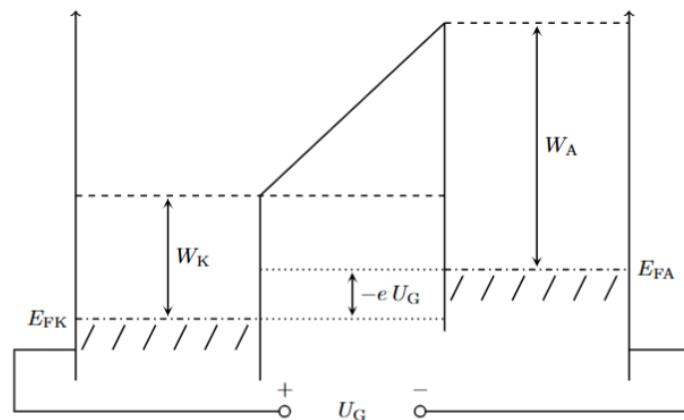


Abbildung 2.4.: Kontaktpotential $-eU_{KA}$ [1]

V402: Quantelung von Energie

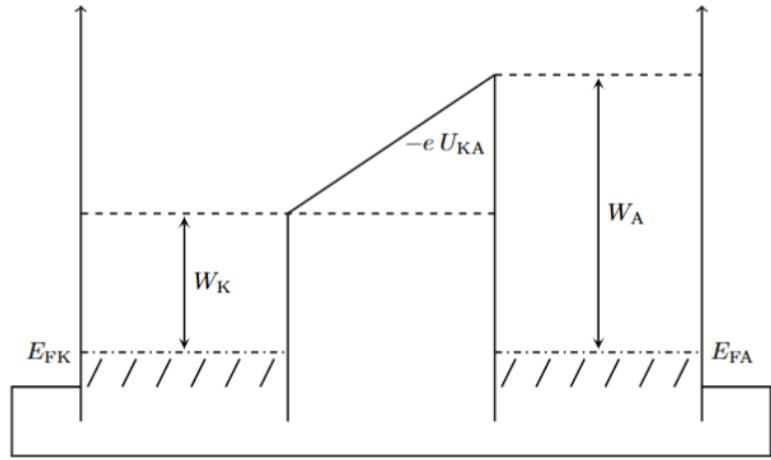


Abbildung 2.5.: Potential dass von der Gegenspannung $-eU_G$ induziert wird[1]

Laut der Abbildung der Ferminiveaus 2.3 gilt für die Energiebilanz:

$$E = h\nu = W_K + eU_{KA} + eU_{G,0} = W_K + W_A - W_K + eU_{G,0} = W_A + eU_{G,0}. \quad (2.2)$$

Aus der Frequenz des Lichtes können schließlich die Austrittsarbeits der Anode W_A und das Planck'sche Wirkungsquantum h bestimmt werden:

$$eU_{G,0} = h\nu - W_A. \quad (2.3)$$

2.3. Abschätzung des Plankschen Wirkungsquantums und der Austrittsarbeits

2.3.1. Bestimmung der Grenzspannung U_0

2.3.2. Bestimmung des Plankschen Wirkungsquantums h

λ [nm]	ν [Hz]	$\overline{U_0}$ [mV]	$\Delta\overline{U_0}$ [mV]
365,00 nm	$8,21 \times 10^{14}$	2124,19	45,39
405,00 nm	$7,40 \times 10^{14}$	1605,23	47,04
463,00 nm	$6,47 \times 10^{14}$	1341,51	57,42
546,00 nm	$5,49 \times 10^{14}$	638,22	59,13
578,00 nm	$5,19 \times 10^{14}$	458,70	24,80

Tabelle 2.1.: Gemittelte Abremsspannungen $\overline{U_0}$ und deren Unsicherheiten gegen die jeweiligen Frequenzen.

V402: Quantelung von Energie

Parameter	Wert
Steigung m [mV Hz $^{-1}$]	$5,457 \times 10^{-12} \pm 2,953 \times 10^{-13}$
Achsenabschnitt b [mV]	$-2,360 \times 10^3 \pm 1,842 \times 10^2$
χ^2	11,56
Freiheitsgrade (dof)	3
χ^2/dof	3,85

Tabelle 2.2.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits von $\overline{U_0}$ gegen ν .

$$h = (8,743 \pm 0,473) \times 10^{-34} \text{ J s}$$

2.3.3. Bestimmung der Austrittsarbeit W_A

$$W_A = (3,781 \pm 0,295) \times 10^{-19} \text{ J } ((2,360 \pm 0,184) \text{ eV})$$

2.3.4. Vergleich der Lambda-Kennlinie für unterschiedliche Intensitäten

Einsteins photoelektrische Gleichung stellt eine direkte, quantitative Beziehung zwischen der Energie einfallender Photonen und der kinetischen Energie der von einer Metalloberfläche emittierten Elektronen her. Sie kann geschrieben werden als:

$$h\nu = eU_0 + W_A, \quad (2.4)$$

wobei h das Plancksche Wirkungsquantum ist, ν die Lichtfrequenz, U_0 die Gegenspannung (zur Unterdrückung des Photostroms bis Null), e die Elementarladung (!!!!!!!WERT UND QUELLE HIER EINFÜGEN!!!!!!) und W_A die Austrittsarbeit des Anodenmaterials darstellt. In dieser Formulierung setzt jedes Photon der Energie $h\nu$ ein Elektron frei, das die Bindungsenergie W_A des Materials überwinden muss; jede überschüssige Energie erscheint als kinetische Energie, die elektrisch als eU_0 gemessen wird. Diese Gleichung bestätigte nicht nur die Quantennatur des Lichts, indem sie zeigte, dass der Elektronenaustritt von der Frequenz und nicht der Intensität abhängt, sondern liefert auch eine präzise Methode zur Bestimmung von h und W_A anhand experimenteller Messungen von U_0 in Abhängigkeit von ν .

In unserem Experiment beginnt jeder Messpunkt mit zwei Rohspannungen: der Gegenspannung U_G , die direkt an dem 100Ω -Zweig des Spannungsteilers in Millivolt abgelesen wird, und der Photospaltung U_{ph} , die der Ausgang des Verstärkers ist und proportional zum Photostrom, ebenfalls in Millivolt. Um die tatsächliche Gegenspannung U zu erhalten, die auf die Elektronen wirkt, wird U_G mit $(100 + 330)/100$ multipliziert, um den Spannungsteiler ($100\Omega:330\Omega$) zu korrigieren. Die Photospaltung wird wie folgt in einen Strom umgerechnet: zunächst wird U_{ph} mit 10^{-3} in Volt umgerechnet, dann durch die Verstärkung G (in V/A) geteilt, um I in Ampere zu erhalten, und schließlich mit 10^{12} multipliziert, um den Strom in Pikoampere auszudrücken:

$$U = U_G \frac{100 + 330}{100}, \quad I = \frac{U_{\text{ph}} \times 10^{-3}}{G} \times 10^{12} \text{ (pA)}. \quad (2.5)$$

Durch Anwendung dieser einfachen Einheiten- und Teilerkorrekturen auf jedes $(U_G, , U_{\text{ph}})$ -Paar erhalten wir die physikalisch sinnvollen $(U, , I)$ -Daten, die die Grundlage für die anschließende Linearisierung und Ausgleichsrechnung bilden.

Zur Bestimmung des Sättigungsstroms I_0 betrachten wir jede Photostromkurve $I(U)$ und bestimmen den Stromwert bei der größten angelegten Gegenspannung $U_{G,\text{max}}$. Physikalisch entspricht dies dem Fall, in dem das Gegenfeld so stark ist, dass dennoch alle emittierten Elektronen zur Anode

V402: Quantelung von Energie

gelangen – es bildet sich ein Plateau im I - U -Diagramm. Praktisch bestimmen wir den Index i , bei dem U_G maximal ist, und definieren:

$$I_0 = I(U = U_{G,\max}) \quad (\text{in pA}). \quad (2.6)$$

Dieser Einzelwert I_0 dient dann als Basiswert für die Linearisierung.

Um nun die Gegenspannung U_0 aus den Messdaten zu extrahieren, bilden wir die transformierte Variable

$$y = \sqrt{\max\{0, I(U) - I_0\}} \quad (2.7)$$

für jeden Punkt der I - U -Kurve. Wird y gegen die korrigierte Gegenspannung U aufgetragen, ergibt sich im Bereich kurz unterhalb von U_0 eine nahezu lineare Beziehung, denn theoretisch gilt:

$$I - I_0 \propto (U - U_0)^2. \quad (2.8)$$

Es wird dann eine gewichtete lineare Regression durchgeführt:

$$y = m \cdot U + b \quad (2.9)$$

unter Verwendung der propagierten Unsicherheiten in y als Gewichte. Die Ausgleichsrechnung liefert die Steigung m und den Achsenabschnitt b mit ihren Standardabweichungen. Der Stoppwert ergibt sich aus der Bedingung $y = 0$:

$$0 = m U_0 + b \implies U_0 = -\frac{b}{m}. \quad (2.10)$$

Durch Fehlerfortpflanzung, einschließlich Kovarianz von m und b (sofern verfügbar), wird ein präziser Wert $U_0 \pm \sigma_{U_0}$ für jede Wellenlänge bestimmt. Diese Gegenspannungen sind die zentralen Größen für das finale Diagramm U_0 gegen Photonfrequenz, aus dem h und W_A extrahiert werden.

!!!!!!!!!!!!!!FOTO DER 365NM U-I-KURVE UND FITPARAMETER IN DER BILDUNTER-SCHRIFT HINZUFÜGEN!!!!!!!!!!

Da die Photonenergie E direkt proportional zur Frequenz ist über $E = h\nu$, muss jede zentrale Filterwellenlänge λ in die entsprechende Frequenz ν umgerechnet werden. Im Vakuum gilt:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad (2.11)$$

!!!!!!!!!!!!!!HIER WERT VON C UND QUELLE EINTRAGEN!!!!!!!!!! wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist ($\approx 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$) und λ in Metern angegeben wird.

In unserem Versuch wurde jede Wellenlänge zweimal gemessen, was zwei Stopppspannungen $U_{0,1}$ und $U_{0,2}$ ergibt. Deren gewichteter Mittelwert ist:

$$\begin{aligned} \text{inv_var}_1 &= \frac{1}{\sigma_1^2}, & \text{inv_var}_2 &= \frac{1}{\sigma_2^2}, \\ U_{0,\text{avg}} &= \frac{U_{0,1} \text{inv_var}_1 + U_{0,2} \text{inv_var}_2}{\text{inv_var}_1 + \text{inv_var}_2}, \\ \sigma_{0,\text{avg}} &= \sqrt{\frac{1}{\text{inv_var}_1 + \text{inv_var}_2}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die so gemittelten Stopppspannungen $U_{0,\text{avg}}$ (in Millivolt) werden gegen die entsprechenden Frequenzen ν (in Hertz) aufgetragen, um Einsteins Vorhersage zu überprüfen:

$$e U_0 = h \nu - W_A. \quad (2.13)$$

V402: Quantelung von Energie

Umgeschrieben nach U_0 ergibt sich die lineare Form:

$$U_0 = \frac{h}{e} \nu - \frac{W_A}{e}. \quad (2.14)$$

!!!!!!!!!!!!GRAFIK UND TABELLE FÜR ν VS U HIER EINBINDEN!!!!!!!!!!!!!!

Ein linearer Fit von $U_{0,\text{avg}}(\nu)$ hat also die Steigung $m = h/e$ und den y-Achsenabschnitt $b = -W_A/e$. Daraus ergibt sich:

$$h = m e, \quad (2.15)$$

sowie die Austrittsarbeit der Anode:

$$W_A = -b e, \quad (2.16)$$

die durch Division durch e in Elektronenvolt umgerechnet wird. Numerisch ergibt sich:

$$\begin{aligned} h &= (5.457 \times 10^{-12} \text{ mV/Hz}) \times \frac{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}}{10^3} \\ &\implies 6.60 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \pm 4.73 \times 10^{-35} \text{ J} \cdot \text{s} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} W_A &= -(-2.360 \times 10^3) \times \frac{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}}{10^3} \\ &\implies 3.78 \times 10^{-19} \text{ J} \implies 2.36 \text{ eV} \pm 0.18 \text{ eV} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Diese experimentell bestimmten Werte für h und W_A werden abschließend mit dem NIST-Wert $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}$. !!!!!!!HIER WERT VON h UND QUELLE EINTRAGEN!!!!!!

3. Die Balmer-Serie

Das Bohrsche Atommodell beschreibt ein Atom als einen Kern, mit Elektronen die sich auf bestimmte Kreisbahnen/Energieniveaus um den Kern Bewegen. Durch hinzufügen von Energie , sowie Photonenabsorption oder durch andere äußere Kräfte, können diese Elektronen angeregt werden, welche nun ein höheres Energieniveau haben. Um auf ein niedrigeres Energieniveau zurückzukehren muss dieses Elektron Energie in der Form eines Photonen abgeben. Diese Energie entspricht der Differenz zwischen dem angeregten Niveau m und Endniveau n , wobei $m > n$. Es gibt für jeden Übergang einen bestimmten Namen, zum Beispiel die Lyman-Serie, Balmer-Serie und Paschen-Serie.

Diese Serien sind aber nicht alle sichtbar, die Lyman-Serie strahlt nähmlich im ultravioletten Bereich, und ab der Paschen-Serie sind die Emissionslinien im infraroten Bereich. Dazwischen liegt die Balmer-Serien, die ihre Emissionslinien im sichtbaren Bereich hat. In diesem Versuchsteil sollen die Emissionslinien der Balmer-Serien untersucht werden. Hier wird zuerst die Gitterkonstante des benutzten Reflexionsgitter experimentell bestimmt und anschließend sollen die Rydberg-Konstante und das Planksche-Wirkungsquantum anhand von einem Wasserstoffatom bestimmt werden. Zusätzlich sollen die Emissionslinien von der Deuterium-Lampe untersucht werden und die Genauigkeit der Ergebnisse mit Litteraturwerten verglichen werden.

3.1. Aufbau

Es wurde fogender Versuchsaufbau von Abb. 3.1 verwendet.

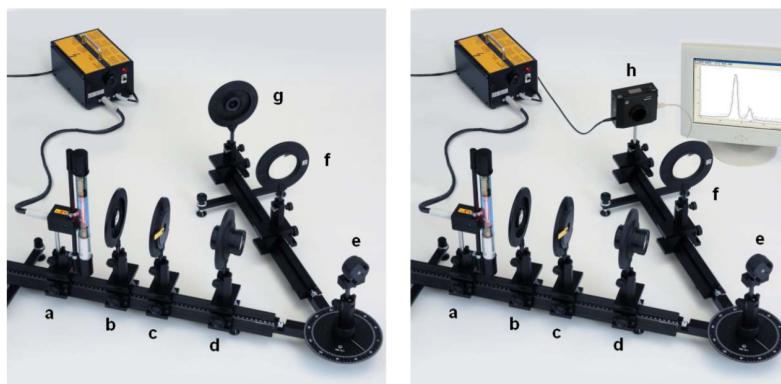


Abbildung 3.1.: Versuchsaufbau mit Okular(links) und CCD-Kamera(rechts) [1]

Diese ist wie folgt aufgebaut:

Es befindet sich eine Deuterium-Lampe (**a**), dessen Licht durch eine Sammellinse (**b**) mit Brennweite $f = 50\text{mm}$ auf ein verstellbareren Spalt (**c**) abgebildet wird, damit der einfallende Lichtstrahl begrenzt wird. Hinter dem Spalt befindet sich ein Projektionsobjektiv (**d**), mit Brennweite $f = 150\text{mm}$. Dieses soll genau im Abstand seiner Brennweite zum Spalt stehen, damit der Lichtstrahl parallel zum holographischen Gitter (**e**) einfällt. Dieses holographische Gitter ist ein Reflextrionsgitter welches sich auf der drehbaren Säule des Drehgelenk befindet und genutzt wird, um die Spektrallinien der Lampe aufzuspalten. Das reflektierte Licht wird anschliesend mit einer Sammellinse (**f**) der Brennweite $f = 300\text{mm}$ auf einem Okular (**g**) abgebildet. Das Okular kann alternativ mit einer CCD-Kamera (**h**) für genauere Messungen ersetzt werden.

3.2. Durchführung

Justierung Um die Gitterkonstante zu bestimmen, muss von einem bekannten Element die Spektrallinien untersucht werden. Dazu wird die Deutrium lampe (Balmer-Lampe) mit einer Quecksilber Lampe (Hg-Lampe) ersetzt. Hierzu muss darauf geachtet werden das alle Bauteile des Aufbaus auf der gleichen Höhe bleiben, damit es keine Veränderungen der optischen Achse mit der Balmer-Lampe geben würde. Es wird nun die Linse **b** so justiert, dass es einen scharfen Lichtfleck von der Lampe auf der Platte abgebildet wird. Das Projektionsobjektive **d** wird auf ungefähre Brennweite hinter den Spalt positioniert. Es wird nun das Drehgelenk des Gitters (**e**) auf die 0° Position gebracht und das Projektionobjektiv so verschoben, dass ein scharfes Bild des Spaltes auf dem Spalt erkennbar ist, so wird der Spalt im unendlichen abgebildet. Zuletzt wird die Linse **f** so justiert, dass im Okular ein scharfes Bild, im Spektrum, zu erkennen ist. Dieses Bild soll eine beliebige Spektrallinie der ersten Ordnung sein. Nun soll, für den folgenden Versuchsteil, die Winkel des optischen Banks (ω_B) und das Winkel des Gitters (ω_G) abgelesen werden. Damit diese Werte benutzt werden können, müssen diese in die relevanten Winkel für das Gitter umgerechnet werden, siehe Gl. (3.2). Mit Hilfe von Gl. (3.2) können

$$\alpha = \omega_G \quad (3.1)$$

$$\beta = \omega_B + \omega_G - 180^\circ \quad (3.2)$$

Dieses soll nach dem Zurücktausch der Hg-Lampe und der Balmer-Lampe wiederholt werden.

Bestimmung der Gitterkonstante <<<< HEAD ===== <<<< HEAD =====>>>> 068157510707739f27696c762eece109a9f399eb

>>>> abt Die Gitterkonstante wird mithilfe der Hg-Lampe bestimmt. Es wird nach dem ersten Spektralband gesucht, bis dies gefunden ist. Hierzu wird die Häufigkeit der Spektrallinie über die Spalt aufgedreht, wenn diese nicht sichtbar sind und dann auf etwa 1 Skalen Teil (0,1mm) eingestellt, aber dass die nicht verschwindet. Um zu vergleichen welche Wellenlänge gesehen werden konnte für die Auswertung wurde die Hg-Linien von dem Anhang Tab. A.29 zu nutzen. Es werden nun ω_B und ω_G abgelesen und mit Tab. A.29 zugeordnet.

Untersuchung der Balmer-Linien Nach dem Tauschen der Lampen wird erstmal die Justierung wiederholt. Nach der Justierung werden für jede Spektrallinie wiederum die Winkel ω_B und ω_G gemessen und der Abstand der Aufspaltung d , der Spektrallinien, abgeschätzt.

Ersätzen Okular mit CCD-Kamera Es wird nun das Okular mit einer CCD-Kamera ersetzt, damit eine genauere Bestimmung der Spektrallinien stattfinden kann. Es wird ein Programm genutzt, welches die Intensität und Pixelkoordinate (Position der Intensität) aufnimmt und gegen einander aufträgt. Falls die Intensität zu klein ist, kann im Programm die Schaltfläche vergrößert werden. Das Programm gibt aber einen Winkel aus, den Ausfallswinkel, welches es aus den Pixelkoordinaten entnimmt, mit

$$\beta = \arctan\left(\frac{(1024 - p) \cdot 0,014\text{mm}}{f}\right) \quad (3.3)$$

wobei, p die Pixelkoordinate und f die Brennweite der abbildenden Sammellinse sind. Diese Linse wird noch verschoben, bis die Darstellung des Programms scharf dargestellt werden kann (die Peaks sollen so dünn wie möglich sein). Da die Intensität sehr sensitive ist, wird mit Hilfe des Programms eine Mittelwertsbildung der Intensität gemacht. Diese Werte werden gespeichert und die Winkel des Gitters aufgenommen. Es wird der gleiche Vorgang für die weiteren Balmer-Linien verhandelt.

3.3. Bestimmung der Gitterkonstanten

Um die Gitterkonstante zu berechnen wird die Gitter gleichung für ein Reflexionsgitter

$$g(\sin \alpha + \sin \beta) = m \lambda \implies g = \frac{m \lambda}{\sin \alpha + \sin \beta} \quad (3.4)$$

genutzt, mit m die Ordnung, λ die Wellenlänge, α der Einfall Winkel und β der Ausfalls Winkel, mit fehler

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \Delta \alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \Delta \beta\right)^2}. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_m} = \frac{m \lambda \cos \theta_m}{(\sin \theta_m + \sin \beta)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} = \frac{m \lambda \cos \beta}{(\sin \theta_m + \sin \beta)^2}. \quad (3.6)$$

$$\implies \Delta g = \sqrt{\left(\frac{m \lambda \cos \alpha}{(\sin \alpha + \sin \beta)^2} \Delta \alpha\right)^2 + \left(\frac{m \lambda \cos \beta}{(\sin \alpha + \sin \beta)^2} \Delta \beta\right)^2} \quad (3.7)$$

Es wird $m = 1$ gesetzt, da dies die ordnung ist, die untersucht wird.

Dies ausgerechneten Werte befinden sich in Tab. 3.1 mit den Entsprächenden abhängigen werte und dessen fehler. für grün, die zwei gelben und die erste rot Emissionslinien wurden doppelt

Farbe	λ / nm	$\alpha / {}^\circ$	$\beta / {}^\circ$	g / nm
violett	404,656	$48,0 \pm 0,5$	$13,0 \pm 0,7$	$417,991 \pm 8,757$
violett	407,783	$49,0 \pm 0,5$	$14,0 \pm 0,7$	$409,161 \pm 8,240$
violett	410,805	$49,5 \pm 0,5$	$14,5 \pm 0,7$	$406,421 \pm 8,026$
violett	433,922	$50,5 \pm 0,5$	$15,5 \pm 0,7$	$417,689 \pm 7,937$
violett	434,749	$51,0 \pm 0,5$	$16,0 \pm 0,7$	$412,952 \pm 7,699$
blau	435,833	$51,0 \pm 0,5$	$16,0 \pm 0,7$	$413,981 \pm 7,718$
türkis	491,607	$55,5 \pm 0,5$	$20,5 \pm 0,7$	$418,626 \pm 6,612$
grün	546,074	$64,5 \pm 0,3$	$24,5 \pm 0,5$	$415,067 \pm 3,681$
gelb	576,960	$67,5 \pm 0,3$	$27,5 \pm 0,5$	$416,952 \pm 3,330$
gelb	579,066	$68,0 \pm 0,3$	$28,0 \pm 0,5$	$415,176 \pm 3,258$
rot	623,440	$65,0 \pm 0,3$	$35,0 \pm 0,5$	$421,428 \pm 3,077$
rot	671,643	$61,5 \pm 0,5$	$36,5 \pm 0,7$	$455,771 \pm 4,890$
rot	690,752	$62,5 \pm 0,5$	$37,5 \pm 0,7$	$461,803 \pm 4,782$

Tabelle 3.1.: Berechnete Gitterkonstante und dessen Fehler

gemessen, damit es ganauer für die restlichen roten Emissionslinien zu berchnen. Es ist zu bemerken, dass für die roten Spektrallinien für $\omega_B = 145^\circ$ nicht sichtbar waren wurde diese geändert und zur Überprüfung, schon gemessene Spektrallinien nochmals ausgenommen. Zu beachten, ist dass diese Werte nicht genau übereinstimmen, was mit schlechtem abschätzen zu tun haben könnte, da zum Beispiel $61,2^\circ$ und $61,0^\circ$ kaum zu unterscheiden waren. Mit der Annahme dieses Fehlers sind die Werte angemessen. Zusätzlich waren manche Linien so blass, das diese kaum erkannt wurden und mehr Linien gesehen wurden. Diese wurden aber nicht genommen, da diese sehr schlecht zu sehen waren. Um einen festen Wert zu haben um für die Balmer-Linien zu berechnen, wurde der mittelwert von den ausgerechneten Gitterkonstanten genommen mit

$$\bar{g} = \frac{\sum_{i=1}^N (g_i / \Delta g_i)}{\sum_{i=1}^N (1 / \Delta g_i)}, \quad \Delta \bar{g} = \sqrt{\frac{N}{\sum_{i=1}^N 1 / (\Delta g_i)^2}}. \quad (3.8)$$

V402: Quantelung von Energie

Es ergibt sich nun die Gitterkonstante mit:

$$\bar{g} = (420.76 \pm 1.51) \text{ nm}. \quad (3.9)$$

Dieser Wert passt nicht zu allen g-Werte, aber mit mehr als 2/3 und ist somit ein sinnvoller Wert.

3.4. Bestimmung der Balmerlinien

Mit der Gitterkonstante kann nun die Wellenlängen der Balmer-Lampe berechnet werden. Dies kann durch die Gittergleichung 3.4 mit der Ersten Ordnung berechnet werden. Die dazu gehörige Wellenlängen ist zwischen 388nm und 656nm sichtbar ([Uni Ulm]) und mit den Messungen zuzuordnen. Die Emissionslinien sind dabei die Übergänge von Energieniveau $n > 2 \rightarrow n = 2$. Die Photonen die den Übergang beschreiben, kann durch die Rydberg-Formel ([3], S.100)

$$\frac{1}{\lambda} = Ry \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (3.10)$$

gezeigt werden. Diese wird noch im Abschnitt 3.4.2 bestimmt. Es wird nochmals die Winkel für die bestimmten Emissionslinien aufgenommen werden und die ausgerechneten Werte in Tab. 3.2, so wie deren Literaturwert aufgelistet.

Während des Versuches wurden nur 3 Emissionslinien gesichtet, dies könnte an dem Fehlenden Abschirmung der Lampe liegen könnte welches durch Reflexion an der Linse vor dem Okular, die schwer zu sehenden Emissionslinien, überleuchtet hat. Dieses könnte zu H_α , H_β und H_γ zugeordnet werden und mit der Gitterkonstante (Gl. (3.9)) und gemessenen Winkel α und β (Tab. A.30) die Wellenlängen berechnet werden.

Linie	d / Skt	$\Delta\beta / 10^{-2}$ rad	$\Delta\lambda / \text{nm}$
H_α	$0,5 \pm 0,1$	$46,36 \pm 3,33$	$156,82 \pm 54,97$
H_β	$1,0 \pm 0,1$	$32,17 \pm 3,33$	$126,81 \pm 20,14$
H_γ	$1,5 \pm 0,1$	$16,51 \pm 3,33$	$66,80 \pm 13,85$

Tabelle 3.2.: Gesehenes Deuterium

Die dicke war sehr schwer abzuschätzen, da die Emissionslinien sehr blass waren und nur schwer zu erkennen waren. Zusätzlich konnte nicht gut die Skala und die Linien gemeinsam gesehen werden, dass die Ablesung der Skala sehr schwer war.

Es ist zu sehen, dass die berechneten Wellenlängen nicht mit den Literaturwert übereinstimmen. Dies könnte an der Näherung der Winkel liegen, da diese zum Beispiel als $55,3^\circ \approx 55,5^\circ$. Zusätzlich hätten die Fehler auch zu klein geschetzt werden können. Obwohl die Werte nicht mit den Fehler mit den Literaturwerten übereinstimmen, sind die Werte genau genug, um die Werte zuzuordnen.

3.4.1. Bestimmung der Isotopiaufspaltung

Bei der Untersuchung der Emissionslinien der Balmer-Linien, wurde gesehen, dass die Emissionslinien eine zweite Emissionslinie existiert. Der Grund hierfür ist an der Balmer-Lampe. «««< HEAD Da diese nicht rein aus Deuterium, sondern auch Wasserstoff besteht, im Verhältnis von $\approx 1 : 2$ ([Praktikum]). ===== «««< HEAD Da diese nicht rein aus Deuterium, sondern auch Wasserstoff besteht, im Verhältnis von $\approx 1 : 2$ ([Praktikum]). ===== Da diese nicht rein aus Deuterium, sondern auch Wasserstoff besteht, im Verhältnis von $\approx 1 : 2$ (praktikum). »»»> abt »»»> 068157510707739f27696c762eece109a9f399eb Dies weist darauf hin, dass die Kernmasse einen Einfluss auf die Energieniveaus hat. Aus der Quantenmechanik kann die Rydberg-konstante zusätzlich

V402: Quantelung von Energie

mit

$$R_y = \frac{\mu e^4}{8c \epsilon_0^2 h^3} \quad (3.11)$$

beschrieben werden([3], S.101). Dabei ist zu beachten, dass dieser Wert von der Reduzierten Masse abhängt. Durch

$$\mu = \frac{m_e \cdot m_K}{m_e + m_K} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{m_K}} \quad (3.12)$$

mit m_e die Elektronen Masse und die Kernmasse m_K . Somit kann ein fester Rydbergkonstante (R_{y_∞}) bestimmt werden:

$$Ry = \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_K}} \cdot \frac{\mu m_e e^4}{8c \epsilon_0^2 h^3} = \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_K}} \cdot R_{y_\infty} \quad (3.13)$$

Da das Deuterium einen extra Neutron hat ist dieses schwächer, somit ist die Ry kleiner und so auch proportional die Wellenlänge. Dieses wurde auch für größere Wellenlänge deutlicher sichtbar. Diese Aufspaltung wird als Isotopieaufspaltung bezeichnet, wobei es sich in diesem Fall über ein Masseneffekt der Isotopieaufspaltung handelt.

Mit der Skala in dem Okular kann die Größe d der Isotopieaufspaltung für die Emissionslinien geschätzt werden. Diese befinden sich in Tab. A.30.

Dies kann durch die Gl. (3.4)

$$\lambda = g (\sin \alpha + \sin \beta), \quad \frac{\Delta \lambda}{\Delta \beta} \approx \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = g \cos \beta, \quad \Delta \beta \approx \frac{d}{f}, \quad (3.14)$$

und mit der Brennweite der Abbildungslinse kann sich der Winkel $\Delta \beta$ durch

$$\Delta \beta = \arctan \left(\frac{d}{f} \right) \approx \frac{d}{f} \quad \text{für } d \ll f \quad (3.15)$$

berechnen lassen.

Diese Werte sind aber nicht genau, da diese aufspaltung sehr schwer zu sehen war und nur mit Mühe versucht abzuschätzen.

Die CCD-Kamera hat dieses Problem aber nicht und kann genauer die Isotopieaufspaltung messen.

Die Gemessenen Intensitäten Bilden Peaks die in Abb. A.1, Abb. A.2 und Abb. 3.2 dargestellt sind.

V402: Quantelung von Energie

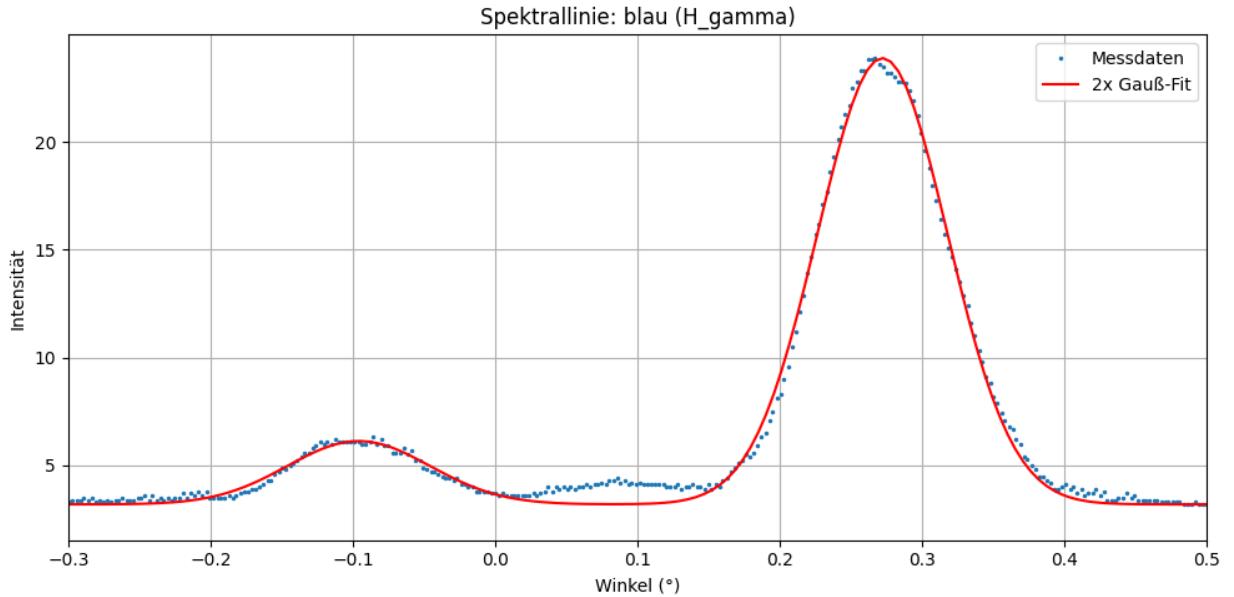


Abbildung 3.2.: Isotopieaufspaltung von der H_γ mit $\chi_{red} = 0.09$

Hierbei sind mehrere Peaks zu erkennen und können durch folgende Gauß-Peak Funktion

$$I(\beta) = \sum_i^2 A_i \cdot \exp\left(-\frac{\beta - \mu_i}{2\sigma_i}\right) + b \quad (3.16)$$

berechnet werden, mit b , dem Offset und dem Winkel β .

Die Berechneten werte sind in Tab. A.31 zu sehen. Die Isotopieaufspaltung dessen, kann durch $\Delta\beta = |\mu_2 - \mu_1|$ beschrieben werden. Diese sind in Tab. 3.3 zu sehen. Obwohl nur 3 Emissionslinien

Linie	$\alpha / {}^\circ$	$\beta / {}^\circ$	$\Delta\beta / {}^\circ$	$\Delta\lambda / \text{nm}$
H_α	62,0	37,0	$0,167 \pm 0,003$	$0,980 \pm 0,739$
H_β	55,5	20,5	$0,047 \pm 0,003$	$0,322 \pm 0,122$
H_γ	51,5	16,5	$0,368 \pm 0,001$	$2,587 \pm 0,766$
H_δ	49,0	14,0	$1,694 \pm 0,085$	$12,052 \pm 3,066$

Tabelle 3.3.: Isotopieaufspaltung der Balmer-Lampe anhand der CCD-Kamera

gesehen wurden, hat die CCD- Kamera noch eine zusätzlich aufgenommen, welches als H_δ vermutet wird. Die Berechneten Werte weichen aber trotzdem signifikant ab. H_α und H_β sind aber, mit doppletem Fehler, sehr nah an dem Literaturwert ([4]) von der Isotopieaufspaltung. Dies lag vermutlich daran, dass die Balmer-Lampe nicht abgeschirmt war und somit die Auswertung beeinträchtigt. Es kann aber trotzdem gesehen werden, was es eine Aufspaltung gibt und somit das Ziel der Untersuchung erreicht.

3.4.2. Bestimmung der Rydberg-Konstante und des Plankschen Wirkungsquantum

Rydberg-Konstante Wie schon in abschnitt 3.4 erwähnt kann die Rydberg-konstante über die wellen länge bestimmt werden. Dafür ist eine folgende umrechnung nötig:

$$Ry = \frac{1/\lambda}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}, \quad \Delta Ry = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}. \quad (3.17)$$

V402: Quantelung von Energie

Mit den Berechneten Werten in Tab. 3.4 kann gesehen werden, dass die Werte miteinander Übereinstimmen, haben aber nicht den gleichen wert.

Linie	λ / nm	n	Rydberg-Konstante / 10^7 m
H_α	$620,049 \pm 4,091$	5	$1,161 \pm 0,008$
H_β	$494,113 \pm 4,393$	4	$1,079 \pm 0,010$
H_γ	$442,969 \pm 4,508$	3	$1,075 \pm 0,011$

Tabelle 3.4.: Berechneten Rydbergkonstanten für die berechentn Wellenlängen

Um einen Wert zu berechen wird das gleiche verfehren benutzt wie bei der Gitterkonstante:

$$\bar{g} = \frac{\sum_{i=1}^N (g_i / \Delta g_i)}{\sum_{i=1}^N (1 / \Delta g_i)}, \quad \Delta \bar{g} = \sqrt{\frac{N}{\sum_{i=1}^N 1 / (\Delta g_i)^2}}. \quad (3.18)$$

Dies liefert einen Wert von

$$Ry = (1,105 \pm 0,006) \cdot 10^7 \frac{1}{m}. \quad (3.19)$$

Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem Literatur Wert ([3], S.101) von der Rydbergkonstante welches

$$Ry_{lit} = 1,097 \frac{1}{m}, \quad (3.20)$$

obwohl es nicht in dem Fehler liegt, da dieser sehr klein ist, liegt der Literaturwert innerhalb von dem doppelten fehler, was für einen kleinen Fehler, von $>1\%$, sehr gut ist. Mir könnte auch einen Fehler in der Fehlerrechnung vorgekommen sein.

Planksche Wirkungsquantum Da die Rydberg-Konstante ausgerechet wurde, kann hierraus das Planksche wirkungsquantum bestimmt werden:

$$Ry = \frac{\mu e^4}{8c\epsilon_0^2 h^3} \quad (3.21)$$

$$\Leftrightarrow h = \left(\frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 c Ry} \right)^{1/3}, \quad \Delta h = \frac{1}{3} \left(\frac{m_e e^4}{8 \epsilon_0^2 c} \right)^{1/3} Ry^{-4/3} \Delta Ry. \quad (3.22)$$

Somit Wurde das Planksche Wirkungsquantum als

$$h = (6.61 \pm 0.11) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdots \quad (3.23)$$

berechent was mit dem Literaturwert ([3], S.75) von

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (3.24)$$

sehr gut über ein stimmt. Die sitmmmt nicht mit dem Wert von dem Photoeffekt überein, was daran liegen könnte, dass der Wert von dem Photoeffekt zu groß ist. Mögliche fehlerquellen wurden im Photoeffekt besprochen.

3.5. Weitergehende Überlegungen

3.5.1. Möglicher Ursprung der anderen auftrennen Spektrallinien

In dem Versuchsteil gibt es aber nicht nur die Balmer-Linien die beobachtet werden kann. Durch einfallendes Licht von anderen Quellen, vor allem Elektronische Geräte die Benutzt werden um

V402: Quantelung von Energie

die Messung aufzunehmen, gibt es die Möglichkeit das diese Aufgenommen werden könnte. Sehr wichtig ist, dass der Effekt des Streulichtes berücksichtigt wird, was die Bamler-lampe abgibt, da dieses anders reflektiert werden kann, als wenn es mittig auf dem Gitter trifft. Wenn die Linsen nicht in Ordnung gehalten worden wären, aber auch durch die Zeit, würden zusätzlich Linsenfehler oder Aberrationen auftreten und muss somit auch berücksichtigt werden. Zusätzlich muss beachtet werden, dass es mehr als eine Ordnung gibt und somit die letzten beobachtbaren Linien der Ordnung mit Linien einer höheren Ordnung überschrieben kann.

3.5.2. Doppler-Verbreitung

Wegen der thermischen Bewegung der Atome relative zu einem ruhenden Betrachter, entsteht eine Doppler-Verschiebung des emittierten Photonen. Dies führt zu einer Verbreiterung der Spektrallinien über ihre natürliche Breite hinaus, welche mit der Formel ([3], S.230)

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_0}{c} \cdot \sqrt{\frac{8k_B T \cdot \ln 2}{m}} \quad (3.25)$$

beschrieben werden kann. Dabei ist $\delta\lambda$ die Halbwertsbreite, die Temperatur $T \approx 1000K$ ([praktikum]) und m die Masse des Atomes ($2m_H \approx m_D$). Diese Werte werden in Tab. 3.5

Linie	Literaturwert λ in nm	$\delta\lambda$ für 1H in nm	$\delta\lambda$ für 2H in nm
H_α	656,28	0,015	0,011
H_β	486,13	0,011	0,008
H_γ	434,05	0,010	0,007

Tabelle 3.5.: (Theoretische) Doppler-Verbreitung von Wasserstoff und Deuterium

Um die natürliche Linienbreite $\delta\nu$ zu berechnen, wird die Formel

$$\delta\nu = \frac{1}{2\pi \cdot \tau} \quad (3.26)$$

genutzt ([3], S.228f), mit τ die Lebensdauer. Diese Formel nicht von fremden Einflüssen abhängt und kann auch von der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation herleiten. Da die Lebensdauer von Atomen liegt in der Größenordnung von $10^{-8}s$. Dies führt dazu, dass $\delta\nu$ in der Größenordnung von $16MHz$ ist und durch $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ mit $\nu = \frac{c}{\lambda}$ führt dazu, dass die Linienbreite in der Größenordnung von $10^{-14}nm$ ist und somit vernachlässigbar groß gegenüber der Doppler-Verbreitung ist. So ist es sinnvoller die Doppler-Verbreitung mit den Halbwertsbreiten der berechneten Gaußkurven zu vergleichen. Dieser kann durch

$$\delta\beta = 2\sqrt{\ln 2} \cdot \sigma \quad (3.27)$$

wobei σ die Halbwertsbreite ist. Hierdurch kann mit Gl. (3.14) die Wellenlängendifferenz berechnen. Die daraus bekannten Werte sind in Tab. 3.6.

Linie	$\delta\lambda$ für 1H in nm	$\delta\lambda$ für 2H in nm
H_α	0.848 ± 0.006	0.586 ± 0.049 nm
H_β	2.258 ± 0.051 nm	0.609 ± 0.003
H_γ	0.831 ± 0.021 nm	0.758 ± 0.004 nm

Tabelle 3.6.: Gemessene Halbwertsbreite für bekannte Spektrallinien

Es ist deutlich zu sehen, dass die Halbwertsbreiten sehr groß sind. Die Fehler sind auch sehr klein, dies kann an einer falschen Abschätzung einiger Gaußplots, zum Beispiel bei H_β konnte die

V402: Quantelung von Energie

Gauß Kurve nicht gut zu dem zeiten Peak angepasst werde. Zusätzlich könnte wölmöglich auch die Linienbreite besser eingeengt werden, da der Aufbau möglicher weise nicht richtig justiert wurde, sodass die Spalt breite zu groß gewählt wurde und nicht vollständig ausgeleuchtet war oder das Streulicht hat die Basis Intensität so sehr angehoben, durch fehlender abschirmung, das die Peaks einbischen ertränkt werden.

3.5.3. Auflösevermögen des Gitters

Anschliessend Wird das Auflösungsvermögen des Gitters abgeschätzt. Dies wird mit der Formel

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot N \quad (3.28)$$

gemacht, wobei m die Ordnungs Zahl ist und N die Anzahl der Beleuchteten Spalten. Das geommt Gitter Beträgt eine 25 mm x 25 mm fläche:

$$\Rightarrow N = \frac{d}{g}, d = 25mm \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow A = \frac{25mm}{420,76nm} = (5,94 \pm 0,02) \cdot 10^4 \quad (3.30)$$

So wäre es möglich alle Aufspaltungen zu messen, da das Auflösungsvermögen von dem Gitter so groß ist. Dies ist würde aber bedeuten, dass das ganze Gitter beleuchtet werden müsste, welches aber mit der untersuchung der Isotopieaufspaltung stören würde, da dies nicht mehr sichtbar wäre. Um dieses wiederum zu messen zu können müsste der Spalt verringert werden und so mit das licht was auf dem Gitter fallen sollte.

4. Fazit

5. Formeln: To be deleted at the end

Spannungsteiler

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{\text{ges}} \quad (5.1)$$

mit U als Spannung am Widerstand R_2 , R_1 und R_2 als Widerstände und U_{ges} als Gesamtspannung.

Energieerhaltung

$$h f = E_{\text{kin}} + W_A, \quad E_{\text{kin}} = e U_G \quad (5.2)$$

mit h dem Planckschen Wirkungsquantum, f der Photonfrequenz, e der Elementarladung, U_G der Gegenspannung und W_A der Austrittsarbeit.

Fehlerfortpflanzung I

$$\Delta(\sqrt{I - I_0}) = \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{2\sqrt{I - I_0}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I_0}{2\sqrt{I - I_0}}\right)^2}. \quad (5.3)$$

Beugungsgitter

$$g(\sin \theta_m + \sin \beta) = m \lambda \implies g = \frac{m \lambda}{\sin \theta_m + \sin \beta} \quad (5.4)$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \theta_m} \Delta \theta_m\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \beta} \Delta \beta\right)^2}. \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_m} = \frac{m \lambda \cos \theta_m}{(\sin \theta_m + \sin \beta)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial \beta} = \frac{m \lambda \cos \beta}{(\sin \theta_m + \sin \beta)^2}. \quad (5.6)$$

Mittelwert der Gitterkonstante

$$\bar{g} = \frac{\sum_{i=1}^N (g_i / \Delta g_i)}{\sum_{i=1}^N (1 / \Delta g_i)}, \quad \Delta \bar{g} = \sqrt{\frac{N}{\sum_{i=1}^N 1 / (\Delta g_i)^2}}. \quad (5.7)$$

Isotopenverhältnis

$$\lambda = g(\sin \theta_m + \sin \beta), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = g \cos \beta, \quad \Delta \beta \approx \frac{d}{f}. \quad (5.8)$$

Fehlerfortpflanzung II

$$\Delta \lambda = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{g} \Delta g\right)^2 + \left(g \cos \alpha \Delta \alpha\right)^2 + \left(g \cos \beta \Delta \beta\right)^2}. \quad (5.9)$$

$$\Delta(\Delta \lambda) = \sqrt{\left(\frac{d \cos \beta}{f} \Delta g\right)^2 + \left(\frac{-d \sin \beta}{f g} \Delta \beta\right)^2 + \left(\frac{g \cos \beta}{f} \Delta d\right)^2}. \quad (5.10)$$

V402: Quantelung von Energie

Balmer-Formel

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (5.11)$$

$$R_H = \frac{1/\lambda}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}, \quad \Delta R_H = \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)}. \quad (5.12)$$

Plancksches Wirkungsquantum

$$h = \left(\frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 c R_H} \right)^{1/3}, \quad \Delta h = \frac{1}{3} \left(\frac{m_e e^4}{8 \varepsilon_0^2 c} \right)^{1/3} R_H^{-4/3} \Delta R_H. \quad (5.13)$$

$$U_0 = - \frac{b}{m} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial b} = - \frac{1}{m}, \quad \frac{\partial U_0}{\partial m} = \frac{b}{m^2}. \quad (5.15)$$

$$\text{Var}(U_0) = \left(\frac{\partial U_0}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial U_0}{\partial m} \right)^2 \sigma_m^2 + 2 \frac{\partial U_0}{\partial b} \frac{\partial U_0}{\partial m} \text{Cov}(b, m). \quad (5.16)$$

$$\sigma_{U_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{m} \right)^2 + \left(\frac{b \sigma_m}{m^2} \right)^2 - 2 \frac{b}{m^3} \text{Cov}(m, b)}. \quad (5.17)$$

$$y = m U + b$$

Literatur

- [1] *Physikalisches Praktikum Teil IV: Atome, Moleküle, Festkörper.* 15. Apr. 2025. Uni Bonn.
- [2] „Spannungsteiler“. In: (). URL: https://www.homofaciens.de/technics-base-circuits-voltage-divider_ge.htm.
- [3] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3.* Berlin: Springer, 2016. ISBN: 978-3-662-49093-8.
- [4] Universität Ulm. *Balmer-Serie von Wasserstoff und Deuterium.* Zugriff am 18. Mai 2025. 2005. URL: <https://vorsam.uni-ulm.de/vs/Versuche/AT/PDF/AT036F00.PDF>.

Abbildungsverzeichnis

2.1. Aufbau für die Messung des Photoeffektes [1]	2
2.2. Spannungsteiler [2]	3
2.3. Ferminiveaus von Kathode und Anode mit Austrittsarbeit W_A [1]	4
2.4. Kontaktpotential $-eU_{KA}$ [1]	4
2.5. Potential dass von der Gegenspannung $-eU_G$ induziert wird[1]	5
3.1. Versuchsaufbau mit Okular(links) und CCD-Kamera(rechts) [1]	9
3.2. Isotopieaufspaltung von der H_γ mit $\chi_{red} = 0.09$	14
A.1. Gaußfit für H_α mit $\chi_{red} = 0.06$	25
A.2. Gaußfit für H_β mit $\chi_{red} = 0.06$	25
A.3. Gaußfit für die Vermutete Linie H_δ mit $\chi_{red} = 0.03$	26
A.4. Messung 1 bei $\lambda = 365$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.5.	27
A.5. Messung 2 bei $\lambda = 365$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.7.	27
A.6. Messung bei 50% Intensität und $\lambda = 365$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.9.	28
A.7. Messung bei maximaler Intensität und $\lambda = 365$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.11.	28
A.8. Messung 1 bei $\lambda = 405$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.13.	29
A.9. Messung 2 bei $\lambda = 405$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.15.	29
A.10. Messung 1 bei $\lambda = 463$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.17.	30
A.11. Messung 2 bei $\lambda = 463$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.19.	30
A.12. Messung 1 bei $\lambda = 546$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.21.	31
A.13. Messung 2 bei $\lambda = 546$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.23.	31
A.14. Messung 1 bei $\lambda = 578$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.25.	32
A.15. Messung 2 bei $\lambda = 578$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tabelle A.27.	32

Tabellenverzeichnis

2.1. Gemittelte Abbremsspannungen $\overline{U_0}$ und deren Unsicherheiten gegen die jeweiligen Frequenzen.	5
2.2. Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits von $\overline{U_0}$ gegen ν	6
3.1. Berechnete Gitterkonstante und dessen Fehler	11
3.2. Gesehenes Deuterium	12
3.3. Isotopiaufspaltung der Balmer-Lampe anhand der CCD-Kamera	14
3.4. Berechneten Rydbergkonstanten für die berechentn Wellenlängen	15
3.5. (Theoretische) Doppler-Verbreitung von Wasserstoff und Deuterium	16
3.6. Gemessene Halbwertsbreite für bekannte Spektrallinien	16
A.1. Messwerte der Photospannung U_{ph} bei Gegenspannung U_G für $\lambda = 365 \text{ nm}$ und $\lambda = 405 \text{ nm}$, wobei $\Delta U_{ph} = 0.1 \cdot U_{ph} + 10 \text{ mV}$, $\Delta U_G = 10 \text{ mV}$	33
A.2. Messwerte der Photospannung U_{ph} bei Gegenspannung U_G für $\lambda = 463 \text{ nm}$, mit $\Delta U_{ph} = 0.1 \cdot U_{ph} + 10 \text{ mV}$ und $\Delta U_G = 10 \text{ mV}$	33
A.3. Messwerte der Photospannung U_{ph} bei Gegenspannung U_G für $\lambda = 546 \text{ nm}$ und $\lambda = 578 \text{ nm}$, wobei $\Delta U_{ph} = 0.1 \cdot U_{ph} + 10 \text{ mV}$ und $\Delta U_G = 10 \text{ mV}$	34
A.4. Messwerte der Photospannung U_{ph} bei Gegenspannung U_G für $\lambda = 365 \text{ nm}$ (Maximalwerte und 50%-Punkt), wobei $\Delta U_{ph} = 0.1 \cdot U_{ph} + 10 \text{ mV}$ und $\Delta U_G = 10 \text{ mV}$	34
A.5. Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 517,00 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (1,10 \pm 10,11) \text{ pA}$	35
A.6. Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.5.	35
A.7. Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 516,00 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (1,40 \pm 10,14) \text{ pA}$	36
A.8. Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die zweite Messung bei $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.7.	36
A.9. Gemessenen Werte für die Messung bei 50 % Intensität und $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 510,00 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (10,00 \pm 11,00) \text{ pA}$	37
A.10. Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die Messung bei $\lambda = 365 \text{ nm}$ mit 50% Intensität. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.9.	37
A.11. Gemessenen Werte für die Messung bei maximaler Intensität und $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 1020,00 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (1,50 \pm 10,15) \text{ pA}$	37
A.12. Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die Messung bei $\lambda = 365 \text{ nm}$ mit maximaler Intensität. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.11.	38
A.13. Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 405 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 410,00 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (1,10 \pm 10,11) \text{ pA}$	38
A.14. Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 405 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.13.	38
A.15. Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 405 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 405,00 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (1,10 \pm 10,11) \text{ pA}$	39
A.16. Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die zweite Messung bei $\lambda = 405 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.15.	39

V402: Quantelung von Energie

A.17.Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 463 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 1487,37 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (0,60 \pm 10,06) \text{ pA}$	40
A.18.Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 463 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.17.	40
A.19.Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 463 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 1502,42 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (0,01 \pm 10,00) \text{ pA}$	40
A.20.Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die zweite Messung bei $\lambda = 463 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.19.	41
A.21.Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 546 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 698,32 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (0,06 \pm 0,11) \text{ pA}$	41
A.22.Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 546 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.21.	41
A.23.Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 546 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 682,41 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (0,00 \pm 0,10) \text{ pA}$	42
A.24.Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die zweite Messung bei $\lambda = 546 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.23.	42
A.25.Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 578 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 515,14 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (0,00 \pm 0,10) \text{ pA}$	42
A.26.Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 578 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.25.	43
A.27.Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 578 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 501,38 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (0,02 \pm 0,10) \text{ pA}$	43
A.28.Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.27.	43
A.29.Spektrallinien der Hg-Dampflampe 1. Ordnung, gemessen an den Winkelpositionen und beobachteter Farbe. Hierbei ist d die Dicke der Spektrallinien (in Strichpunkten), ω_B der Winkel der optischen Bank und ω_G der Winkel des Gitters.	44
A.30.Spektrallinien der H/Deuterium-Lampe in erster Ordnung. Hierbei ist d die Dicke der Spektrallinien (in Strichpunkten), ω_B der Winkel der Blende und ω_G der Beugungswinkel.	45
A.31.Fitparameter für die Gauß-Peaks der Balmer-Serie.	45

A. Anhang

A.1. Abbildungen

Photoeffekt

Balmer Serie

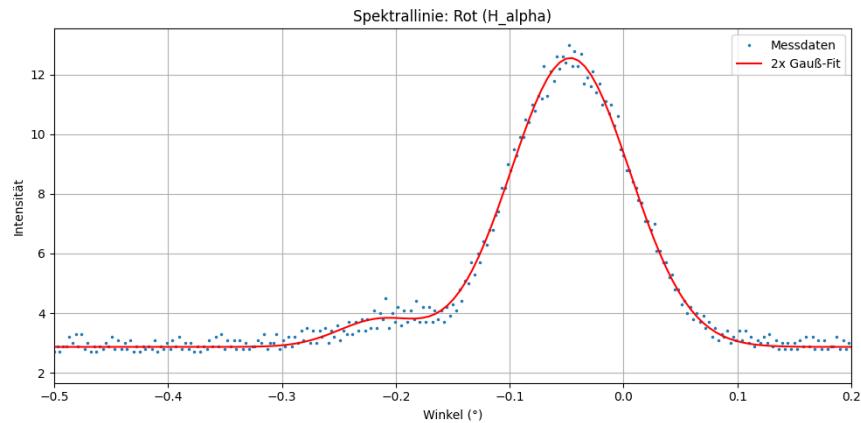


Abbildung A.1.: Gaußfit für H_{α} mit $\chi_{red} = 0.06$

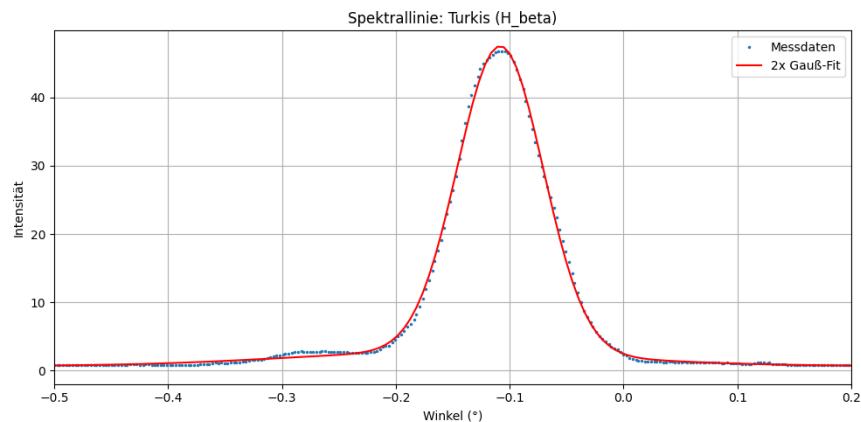


Abbildung A.2.: Gaußfit für H_{β} mit $\chi_{red} = 0.06$

V402: Quantelung von Energie

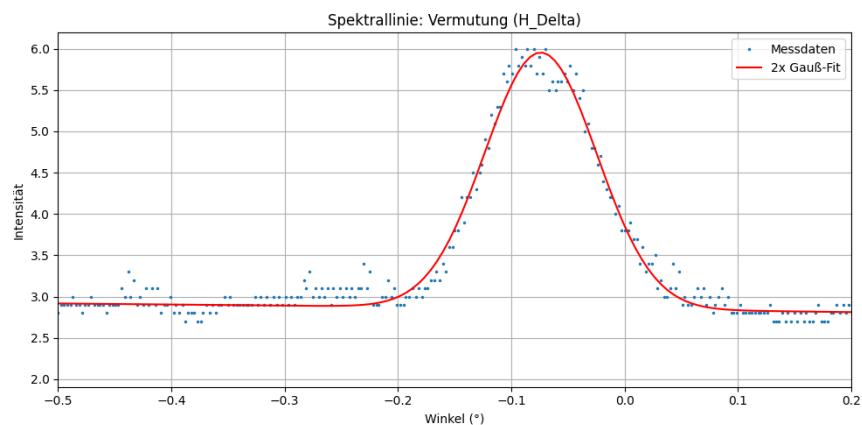


Abbildung A.3.: Gaußfit für die Vermutete Linie H_{δ} mit $\chi_{red} = 0.03$

V402: Quantelung von Energie

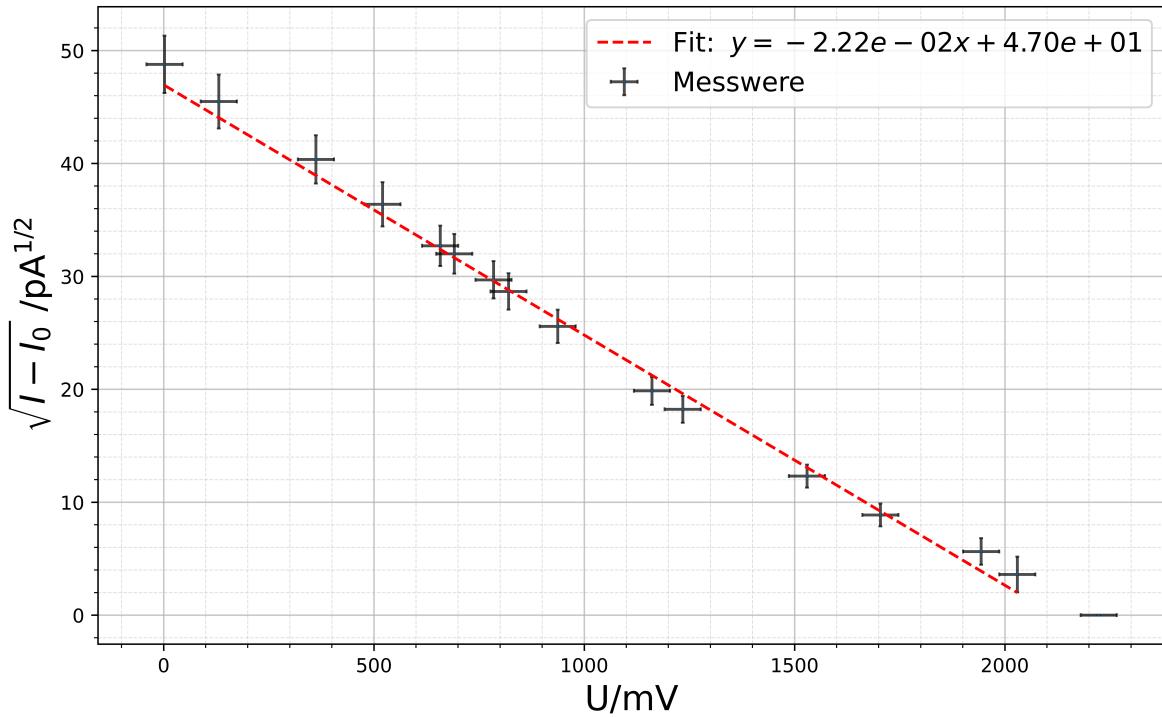


Abbildung A.4.: Messung 1 bei $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.5.

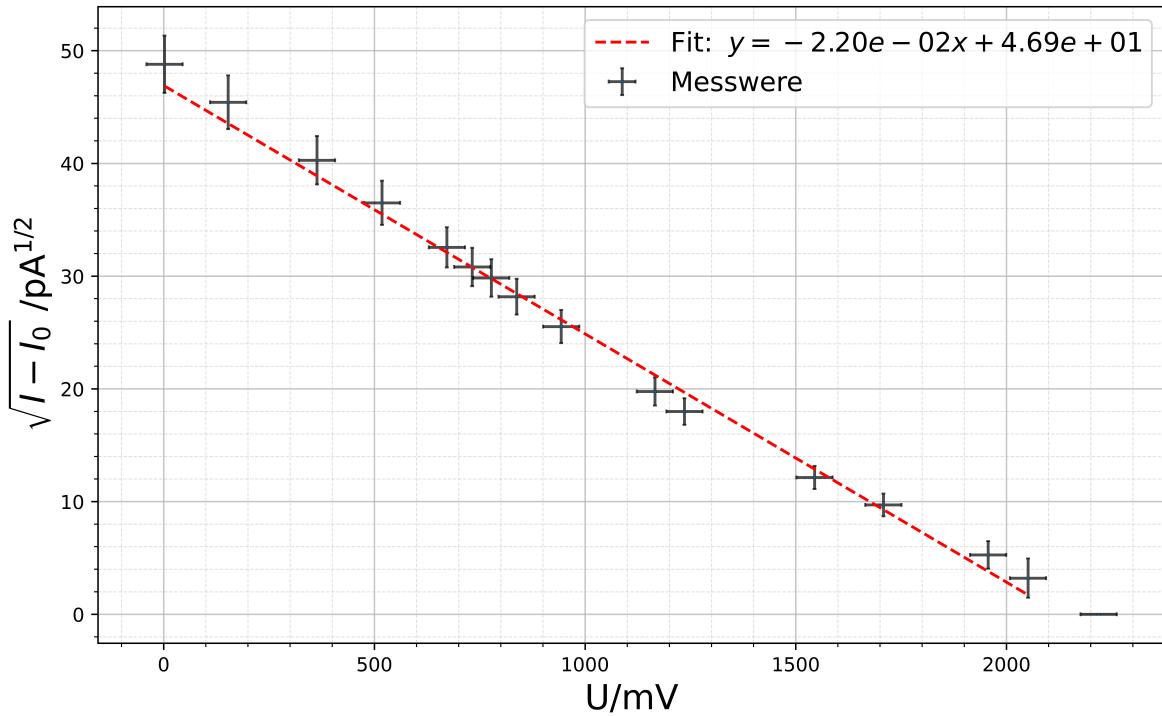


Abbildung A.5.: Messung 2 bei $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.7.

V402: Quantelung von Energie

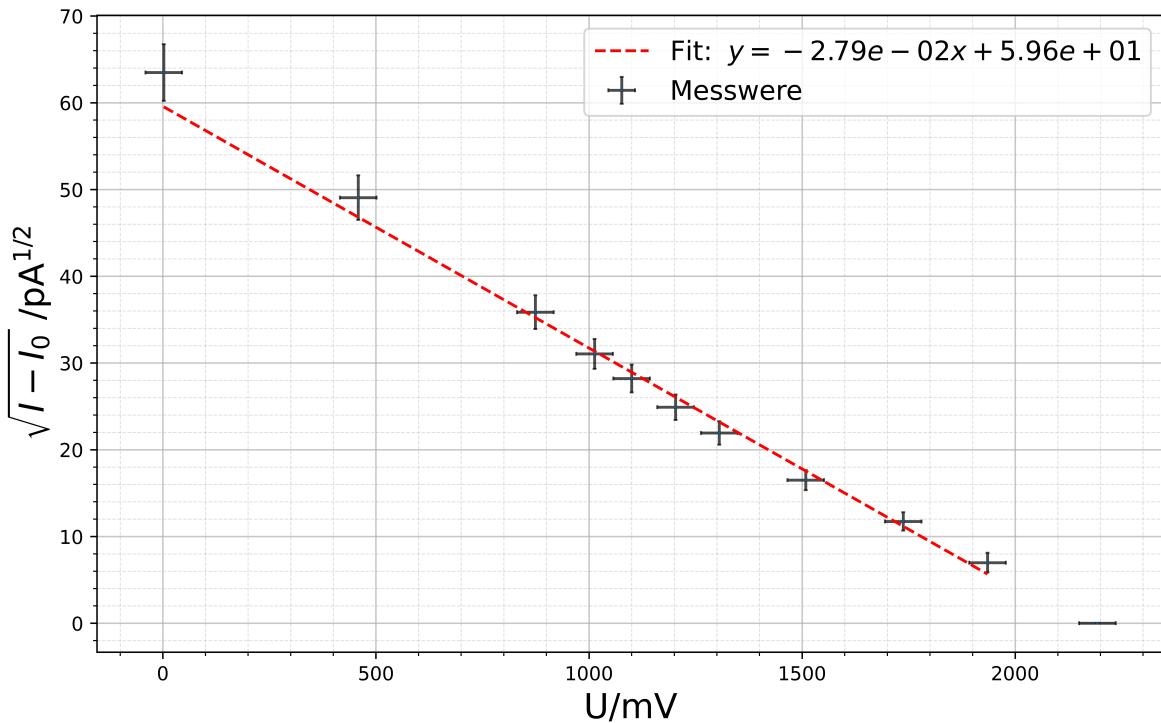


Abbildung A.6.: Messung bei 50% Intensität und $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.9.

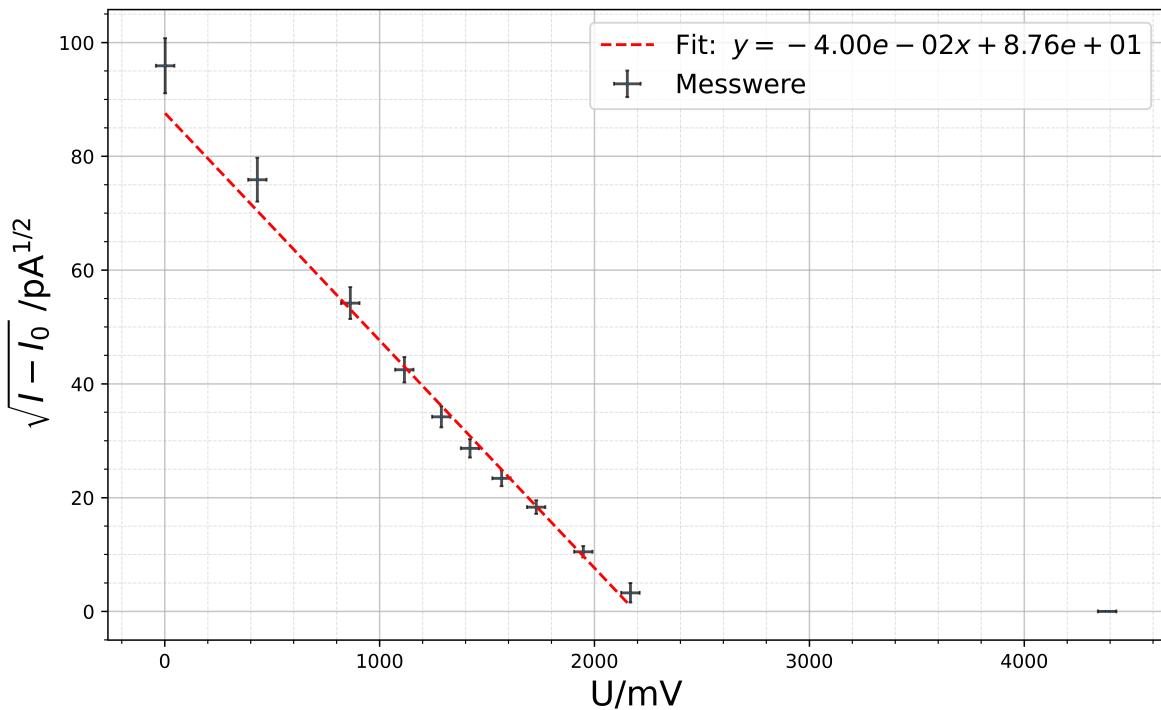


Abbildung A.7.: Messung bei maximaler Intensität und $\lambda = 365 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.11.

V402: Quantelung von Energie

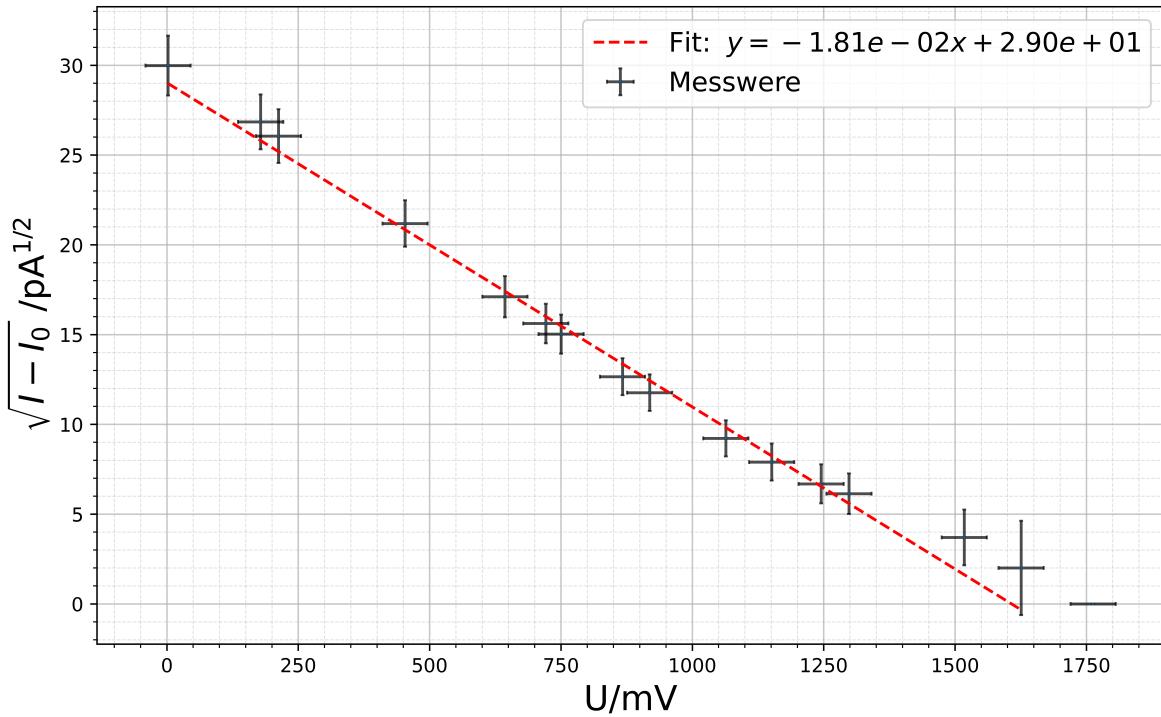


Abbildung A.8.: Messung 1 bei $\lambda = 405 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.13.

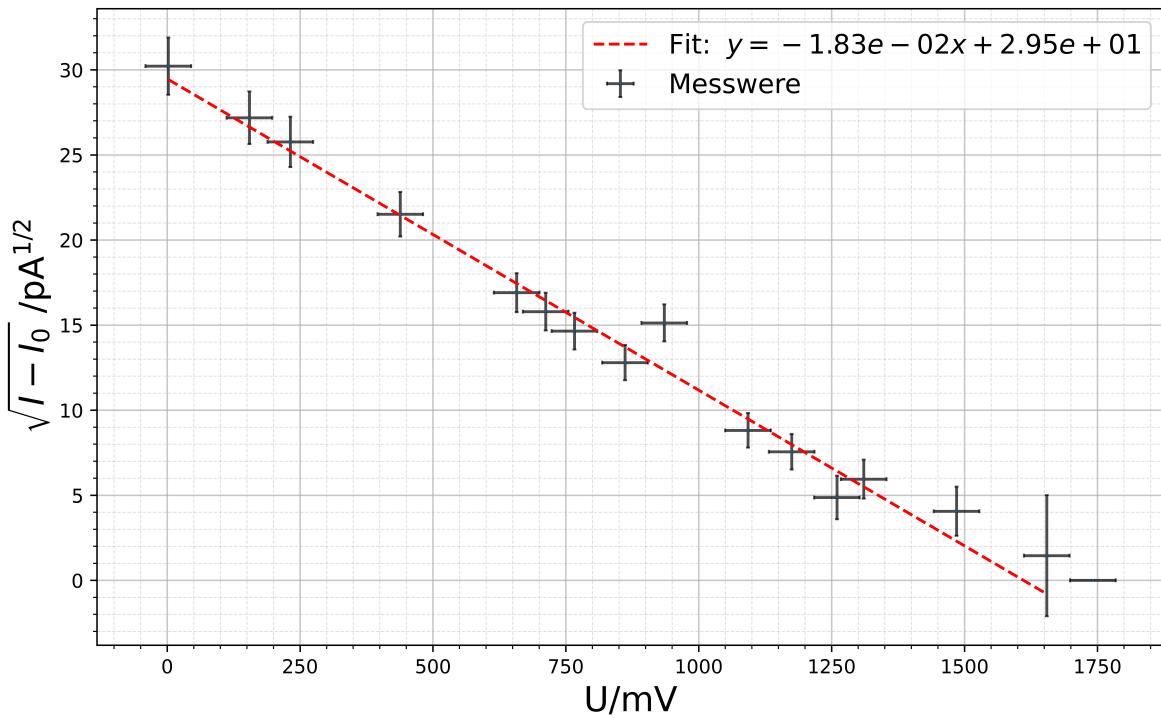


Abbildung A.9.: Messung 2 bei $\lambda = 405 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.15.

V402: Quantelung von Energie

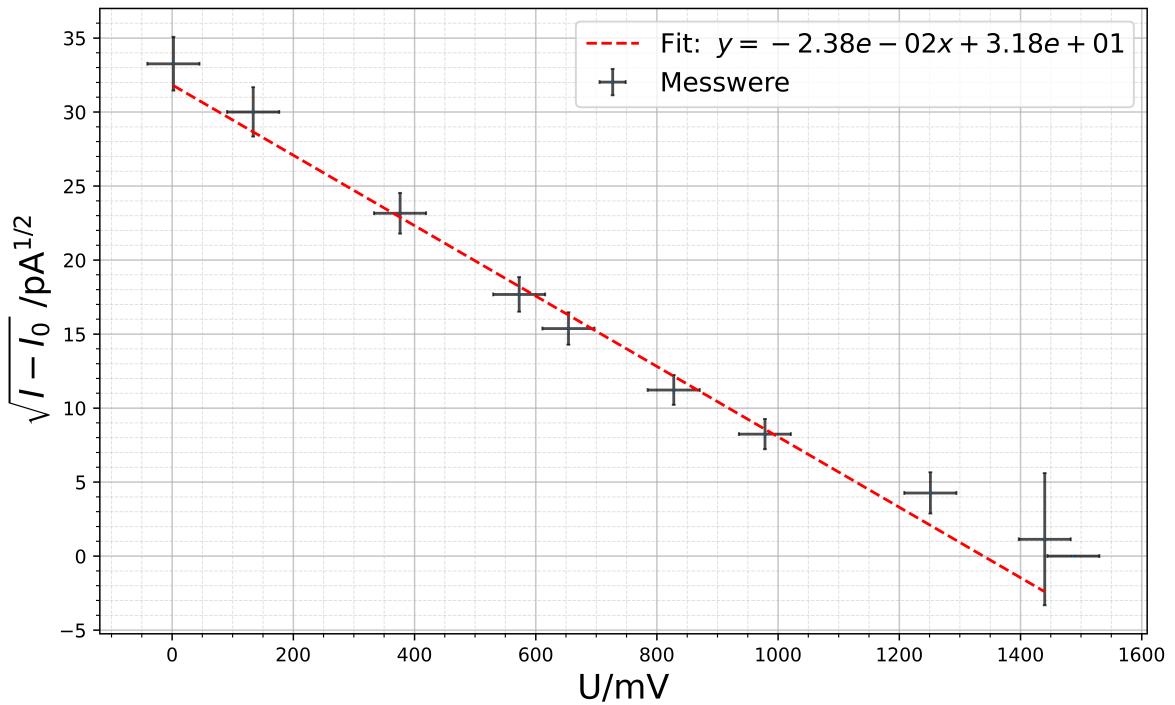


Abbildung A.10.: Messung 1 bei $\lambda = 463$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.17.

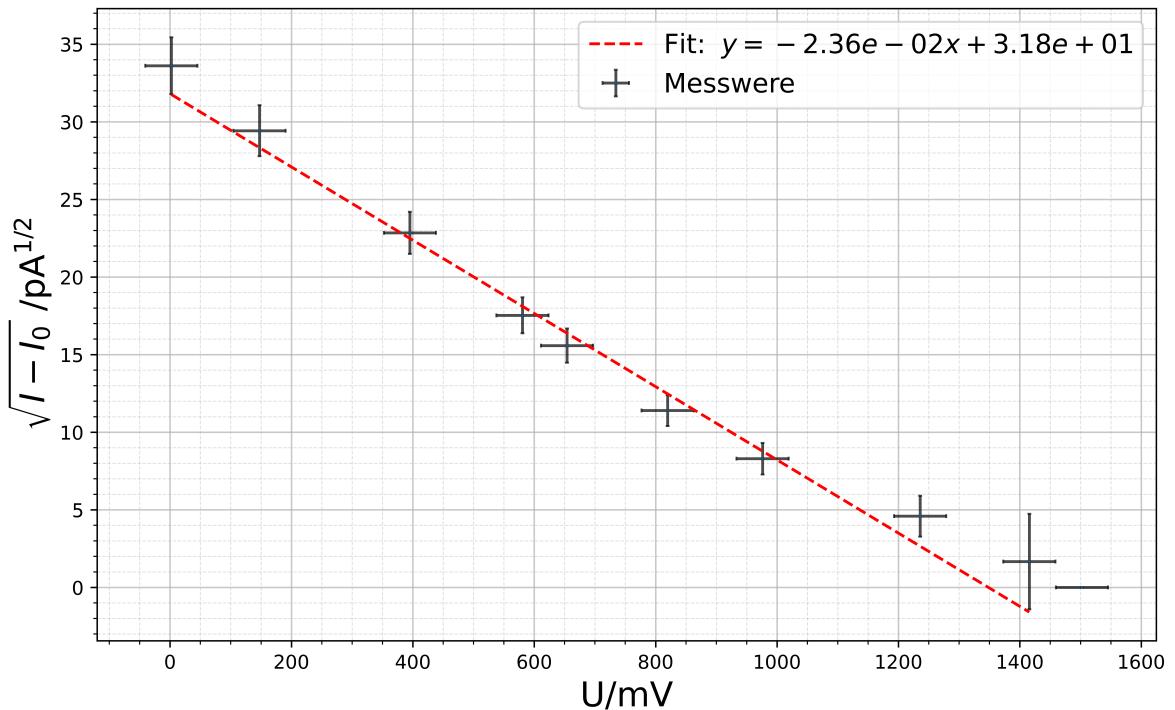


Abbildung A.11.: Messung 2 bei $\lambda = 463$ nm. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.19.

V402: Quantelung von Energie

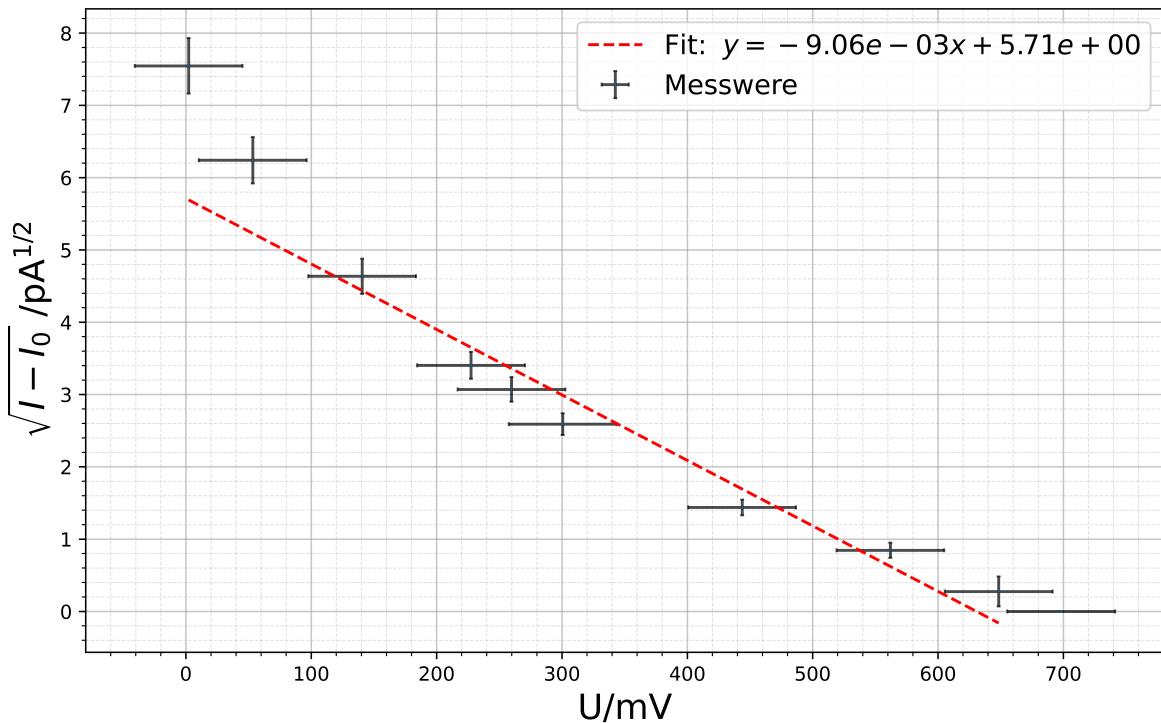


Abbildung A.12.: Messung 1 bei $\lambda = 546 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.21.

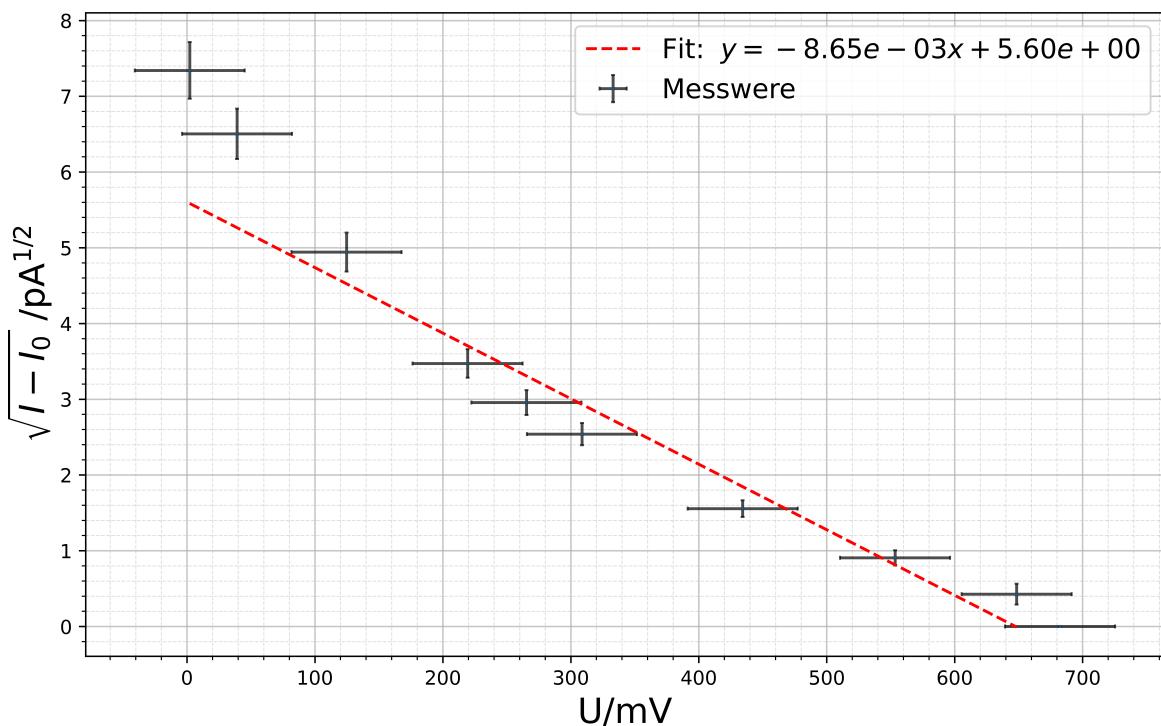


Abbildung A.13.: Messung 2 bei $\lambda = 546 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.23.

V402: Quantelung von Energie

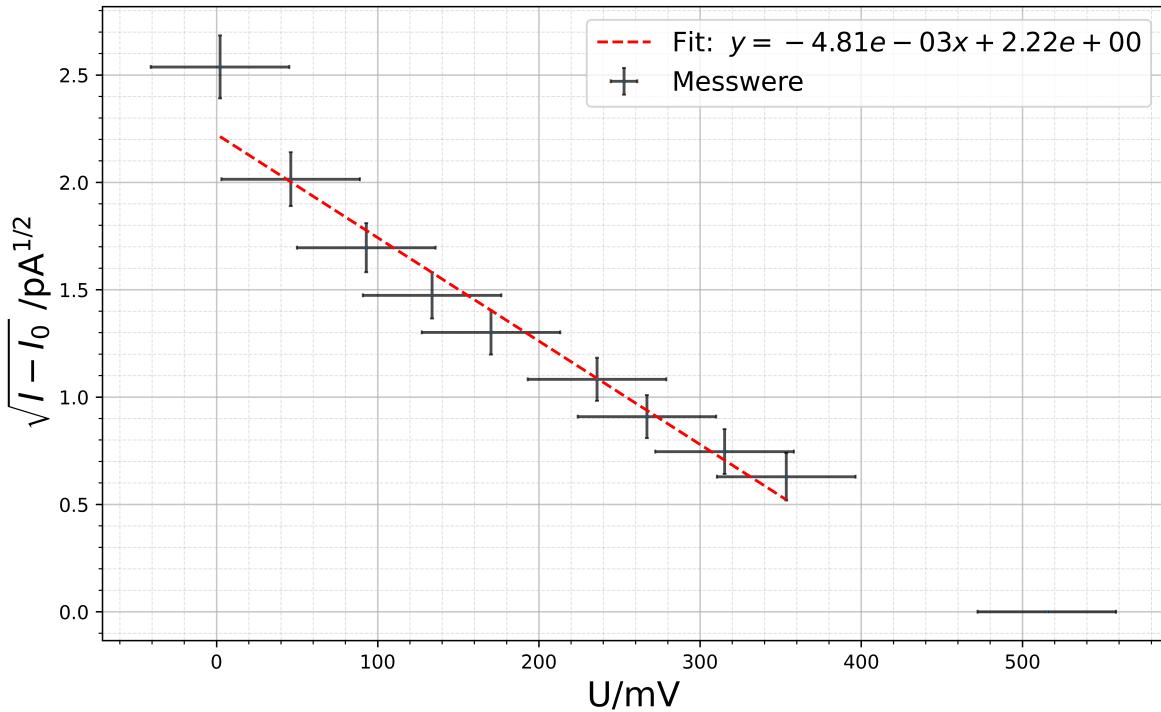


Abbildung A.14.: Messung 1 bei $\lambda = 578 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.25.

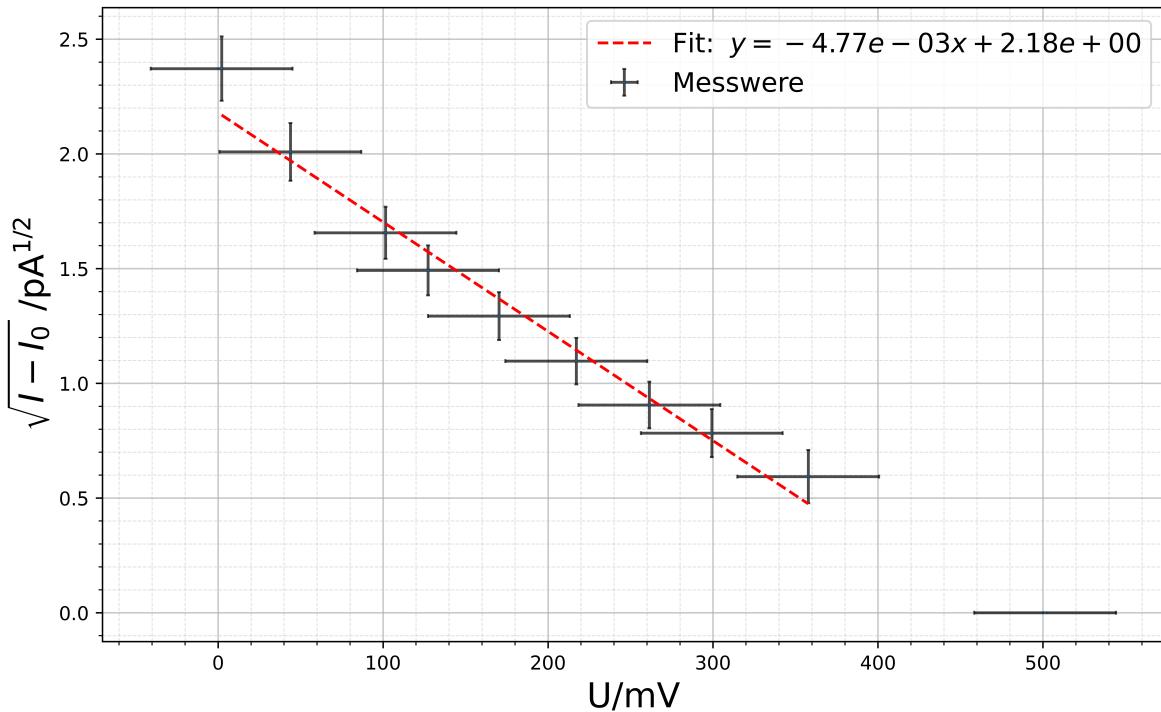


Abbildung A.15.: Messung 2 bei $\lambda = 578 \text{ nm}$. Die Werte und Unsicherheiten sind in Tab. A.27.

V402: Quantelung von Energie

Balmer Serie

A.2. Tabellen

Photoeffekt

$\lambda = 365 \text{ nm}$				$\lambda = 405 \text{ nm}$			
Messung 1		Messung 2		Messung 1		Messung 2	
$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$	$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$	$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$	$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$
0,5	2380,0	0,5	2382,0	0,5	900,0	0,5	914,0
30,5	2070,0	35,6	2065,0	41,5	722,0	36,0	740,0
84,2	1630,0	84,6	1624,0	49,4	680,0	53,9	665,0
121,0	1325,0	120,5	1334,0	105,4	450,0	102,0	464,0
152,9	1071,0	156,3	1061,0	149,6	293,8	152,9	286,9,0
160,7	1025,0	170,3	951,0	167,7	245,0	165,6	250,5
182,4	883,0	180,8	892,0	174,5	226,9	178,2	215,6
190,7	823,0	194,8	795,0	201,7	161,2	200,3	164,8
217,9	655,0	219,4	653,0	213,7	139,5	217,5	230,0
270,0	396,0	271,1	392,0	247,4	86,1	254,1	78,8
287,0	333,3	287,4	325,0	267,7	63,5	273,2	58,2
355,7	152,7	359,2	148,8	289,6	45,8	293,0	24,8
396,3	79,9	397,2	95,6	301,9	38,8	304,7	36,5
452,0	32,9	455,0	29,2	352,9	14,8	345,3	17,6
472,0	14,1	477,0	11,7	378,1	5,1	384,8	3,2
517,0	1,1	516,0	1,4	410,0	1,1	405,0	1,1

Tabelle A.1.: Messwerte der Photospannung U_{ph} bei Gegenspannung U_G für $\lambda = 365 \text{ nm}$ und $\lambda = 405 \text{ nm}$, wobei $\Delta U_{ph} = 0.1 \cdot U_{ph} + 10 \text{ mV}$, $\Delta U_G = 10 \text{ mV}$

$\lambda = 463 \text{ nm}$			
Messung 1		Messung 2	
$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$	$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$
0,5	1107,0	0,5	1130,0
31,1	901,0	34,3	866,0
87,5	537,0	91,9	522,0
133,2	313,1	135,0	307,4
152,1	236,9	152,1	242,8
192,5	126,6	190,6	130,0
227,5	68,5	227,0	68,8
291,0	18,8	287,4	21,1
334,9	1,9	329,2	2,8
345,9	0,6	349,4	0,0

Tabelle A.2.: Messwerte der Photospannung U_{ph} bei Gegenspannung U_G für $\lambda = 463 \text{ nm}$, mit $\Delta U_{ph} = 0.1 \cdot U_{ph} + 10 \text{ mV}$ und $\Delta U_G = 10 \text{ mV}$.

V402: Quantelung von Energie

$\lambda = 546 \text{ nm}$				$\lambda = 578 \text{ nm}$			
Messung 1		Messung 2		Messung 1		Messung 2	
$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$	$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$	$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$	$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$
0,5	5700,0	0,5	5390,0	0,5	644,0	0,5	565,0
32,7	2155,0	29,0	2444,0	10,7	406,0	10,2	406,0
12,4	3900,0	9,1	4230,0	21,6	287,5	23,6	276,8
52,9	1165,0	51,0	1206,0	31,1	217,2	29,6	225,1
69,9	677,0	61,7	874,0	39,6	169,3	39,6	169,6
60,4	949,0	71,8	645,0	54,9	117,2	50,5	122,7
103,2	212,9	101,0	242,1	62,1	82,6	60,8	84,4
130,7	77,7	128,7	82,2	73,3	55,7	69,6	63,7
150,8	13,8	150,8	18,3	82,2	39,6	83,2	37,6
162,4	6,2	158,7	0,1	119,8	0,0	116,6	2,4

Tabelle A.3.: Messwerte der Photospannung U_{ph} bei Gegenspannung U_G für $\lambda = 546 \text{ nm}$ und $\lambda = 578 \text{ nm}$, wobei $\Delta U_{ph} = 0,1 \cdot U_{ph} + 10 \text{ mV}$ und $\Delta U_G = 10 \text{ mV}$.

$\lambda = 365 \text{ nm}$			
Messung max		Messung 50%	
$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$	$U_G [\text{mV}]$	$U_{ph} [\text{mV}]$
0,4	9200,0	0,5	4040,0
100,2	5760,0	106,6	2417,0
200,8	2939,0	203,3	1296,0
259,3	1806,0	235,6	974,0
299,3	1172,0	255,8	806,0
330,4	823,0	279,8	630,0
364,5	549,0	303,6	491,0
402,0	337,6	350,8	282,4
453,0	111,6	404,0	147,8
504,0	12,2	450,0	58,8
1020,0	1,5	510,0	10,0

Tabelle A.4.: Messwerte der Photospannung U_{ph} bei Gegenspannung U_G für $\lambda = 365 \text{ nm}$ (Maximalwerte und 50%-Punkt), wobei $\Delta U_{ph} = 0,1 \cdot U_{ph} + 10 \text{ mV}$ und $\Delta U_G = 10 \text{ mV}$.

V402: Quantelung von Energie

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	2380.00	248.00	48.77	2.54
131.15	43.00	2070.00	217.00	45.49	2.39
362.06	43.00	1630.00	173.00	40.36	2.14
520.30	43.00	1325.00	142.50	36.39	1.96
657.47	43.00	1071.00	117.10	32.71	1.79
691.01	43.00	1025.00	112.50	32.00	1.76
784.32	43.00	883.00	98.30	29.70	1.66
820.01	43.00	823.00	92.30	28.67	1.61
936.97	43.00	655.00	75.50	25.57	1.48
1161.00	43.00	396.00	49.60	19.87	1.25
1234.10	43.00	333.30	43.33	18.23	1.19
1529.51	43.00	152.70	25.27	12.31	1.03
1704.09	43.00	79.90	17.99	8.88	1.01
1943.60	43.00	32.90	13.29	5.64	1.18
2029.60	43.00	14.10	11.41	3.61	1.58
2223.10	43.00	1.10	10.11	0.00	0.00

Tabelle A.5.: Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 365$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 517,00$ mV, daraus folgt $I_0 = (1,10 \pm 10,11)$ pA.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-2,22 \times 10^{-2} \pm 5,58 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$4,70 \times 10^1 \pm 7,48 \times 10^{-1}$
χ^2	8,28
Freiheitsgrade (dof)	13
χ^2/dof	0,637
Abbremsspannung U_0 [mV]	$2117,12 \pm 62,98$

Tabelle A.6.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 365$ nm. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.5.

V402: Quantelung von Energie

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	2382.00	248.20	48.79	2.54
153.08	43.00	2065.00	216.50	45.43	2.38
363.78	43.00	1624.00	172.40	40.28	2.14
518.15	43.00	1334.00	143.40	36.50	1.96
672.09	43.00	1061.00	116.10	32.55	1.78
732.29	43.00	951.00	105.10	30.82	1.71
777.44	43.00	892.00	99.20	29.84	1.66
837.64	43.00	795.00	89.50	28.17	1.59
943.42	43.00	653.00	75.30	25.53	1.47
1165.73	43.00	392.00	49.20	19.76	1.24
1235.82	43.00	325.00	42.50	17.99	1.18
1544.56	43.00	148.80	24.88	12.14	1.02
1707.96	43.00	95.60	19.56	9.71	1.01
1956.50	43.00	29.20	12.92	5.27	1.23
2051.10	43.00	11.70	11.17	3.21	1.74
2218.80	43.00	1.40	10.14	0.00	0.00

Tabelle A.7.: Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 365$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 516,00$ mV, daraus folgt $I_0 = (1,40 \pm 10,14)$ pA.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-2,20 \times 10^{-2} \pm 5,73 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$4,69 \times 10^1 \pm 7,63 \times 10^{-1}$
χ^2	8,45
Freiheitsgrade (dof)	13
χ^2/dof	0,650
Abbremsspannung U_0 [mV]	$2131,82 \pm 65,47$

Tabelle A.8.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die zweite Messung bei $\lambda = 365$ nm. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.7.

V402: Quantelung von Energie

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	4040.00	414.00	63.48	3.26
458.38	43.00	2417.00	251.70	49.06	2.57
874.19	43.00	1296.00	139.60	35.86	1.95
1013.08	43.00	974.00	107.40	31.05	1.73
1099.94	43.00	806.00	90.60	28.21	1.61
1203.14	43.00	630.00	73.00	24.90	1.47
1305.48	43.00	491.00	59.10	21.93	1.35
1508.44	43.00	282.40	38.24	16.50	1.16
1737.20	43.00	147.80	24.78	11.74	1.06
1935.00	43.00	58.80	15.88	6.99	1.14
2193.00	43.00	10.00	11.00	0.00	0.00

Tabelle A.9.: Gemessenen Werte für die Messung bei 50 % Intensität und $\lambda = 365$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 510,00$ mV, daraus folgt $I_0 = (10,00 \pm 11,00)$ pA.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-2,79 \times 10^{-2} \pm 9,92 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$5,96 \times 10^1 \pm 1,45$
χ^2	6,55
Freiheitsgrade (dof)	8
χ^2/dof	0,819
Abbremsspannung U_0 [mV]	$2136,20 \pm 92,03$

Tabelle A.10.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die Messung bei $\lambda = 365$ nm mit 50% Intensität. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.9.

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
1.72	43.00	9200.00	930.00	95.91	4.85
430.86	43.00	5760.00	586.00	75.88	3.86
863.44	43.00	2939.00	303.90	54.20	2.80
1114.99	43.00	1806.00	190.60	42.48	2.24
1286.99	43.00	1172.00	127.20	34.21	1.86
1420.72	43.00	823.00	92.30	28.66	1.61
1567.35	43.00	549.00	64.90	23.40	1.39
1728.60	43.00	337.60	43.76	18.33	1.19
1947.90	43.00	111.60	21.16	10.49	1.01
2167.20	43.00	12.20	11.22	3.27	1.72
4386.00	43.00	1.50	10.15	0.00	0.00

Tabelle A.11.: Gemessenen Werte für die Messung bei maximaler Intensität und $\lambda = 365$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 1020,00$ mV, daraus folgt $I_0 = (1,50 \pm 10,15)$ pA.

V402: Quantelung von Energie

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-4,00 \times 10^{-2} \pm 1,57 \times 10^{-3}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$8,76 \times 10^1 \pm 2,64$
χ^2	11,74
Freiheitsgrade (dof)	8
χ^2/dof	1,467
Abbremsspannung U_0 [mV]	$2190,00 \pm 108,37$

Tabelle A.12.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die Messung bei $\lambda = 365 \text{ nm}$ mit maximaler Intensität. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.11.

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	900.00	100.00	29.98	1.67
178.45	43.00	722.00	82.20	26.85	1.53
212.42	43.00	680.00	78.00	26.06	1.50
453.22	43.00	450.00	55.00	21.19	1.30
643.28	43.00	293.80	39.38	17.11	1.15
721.11	43.00	245.00	34.50	15.62	1.10
750.35	43.00	226.90	32.69	15.03	1.09
867.31	43.00	161.20	26.12	12.65	1.03
918.91	43.00	139.50	23.95	11.76	1.02
1063.82	43.00	86.10	18.61	9.22	1.01
1151.11	43.00	63.50	16.35	7.90	1.03
1245.28	43.00	45.80	14.58	6.69	1.09
1298.17	43.00	38.80	13.88	6.14	1.13
1517.47	43.00	14.80	11.48	3.70	1.55
1625.83	43.00	5.10	10.51	2.00	2.63
1763.00	43.00	1.10	10.11	0.00	0.00

Tabelle A.13.: Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 405 \text{ nm}$. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 410,00 \text{ mV}$, daraus folgt $I_0 = (1,10 \pm 10,11) \text{ pA}$.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-1,81 \times 10^{-2} \pm 5,50 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$2,90 \times 10^1 \pm 5,21 \times 10^{-1}$
χ^2	5,80
Freiheitsgrade (dof)	13
χ^2/dof	0,446
Abbremsspannung U_0 [mV]	$1602,21 \pm 56,56$

Tabelle A.14.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 405 \text{ nm}$. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.13.

V402: Quantelung von Energie

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	914.00	101.40	30.21	1.68
154.80	43.00	740.00	84.00	27.18	1.55
231.77	43.00	665.00	76.50	25.77	1.48
438.60	43.00	464.00	56.40	21.52	1.31
657.47	43.00	286.90	38.69	16.91	1.14
712.08	43.00	250.50	35.05	15.79	1.11
766.26	43.00	215.60	31.56	14.65	1.08
861.29	43.00	164.80	26.48	12.79	1.03
935.25	43.00	230.00	33.00	15.13	1.09
1092.63	43.00	78.80	17.88	8.81	1.01
1174.76	43.00	58.20	15.82	7.56	1.05
1259.90	43.00	24.80	12.48	4.87	1.28
1310.21	43.00	36.50	13.65	5.95	1.15
1484.79	43.00	17.60	11.76	4.06	1.45
1654.64	43.00	3.20	10.32	1.45	3.56
1741.50	43.00	1.10	10.11	0.00	0.00

Tabelle A.15.: Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 405$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 405,00$ mV, daraus folgt $I_0 = (1,10 \pm 10,11)$ pA.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-1,83 \times 10^{-2} \pm 8,30 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$2,95 \times 10^1 \pm 7,84 \times 10^{-1}$
χ^2	12,92
Freiheitsgrade (dof)	13
χ^2/dof	0,994
Abbremsspannung U_0 [mV]	$1612,02 \pm 84,74$

Tabelle A.16.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die zweite Messung bei $\lambda = 405$ nm. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.15.

V402: Quantelung von Energie

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	1107.00	120.70	33.26	1.81
133.73	43.00	901.00	100.10	30.01	1.67
376.25	43.00	537.00	63.70	23.16	1.38
572.76	43.00	313.10	41.31	17.68	1.17
654.03	43.00	236.90	33.69	15.37	1.10
827.75	43.00	126.60	22.66	11.22	1.01
978.25	43.00	68.50	16.85	8.24	1.02
1251.30	43.00	18.80	11.88	4.27	1.39
1440.07	43.00	1.90	10.19	1.14	4.47
1487.37	43.00	0.60	10.06	0.00	0.00

Tabelle A.17.: Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 463$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 1487,37$ mV, daraus folgt $I_0 = (0,60 \pm 10,06)$ pA.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-2,38 \times 10^{-2} \pm 1,22 \times 10^{-3}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$3,18 \times 10^1 \pm 9,47 \times 10^{-1}$
χ^2	6,31
Freiheitsgrade (dof)	7
χ^2/dof	0,901
Abbremsspannung U_0 [mV]	$1336,13 \pm 79,21$

Tabelle A.18.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 463$ nm. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.17.

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	1130.00	123.00	33.62	1.83
147.49	43.00	866.00	96.60	29.43	1.64
395.17	43.00	522.00	62.20	22.85	1.36
580.50	43.00	307.40	40.74	17.53	1.16
654.03	43.00	242.80	34.28	15.58	1.10
819.58	43.00	130.00	23.00	11.40	1.01
976.10	43.00	68.80	16.88	8.29	1.02
1235.82	43.00	21.10	12.11	4.59	1.32
1415.56	43.00	2.80	10.28	1.67	3.08
1502.42	43.00	0.01	10.00	0.00	0.00

Tabelle A.19.: Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 463$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 1502,42$ mV, daraus folgt $I_0 = (0,01 \pm 10,00)$ pA.

V402: Quantelung von Energie

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-2,36 \times 10^{-2} \pm 1,26 \times 10^{-3}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$3,18 \times 10^1 \pm 9,94 \times 10^{-1}$
χ^2	6,97
Freiheitsgrade (dof)	7
χ^2/dof	0,995
Abbremsspannung U_0 [mV]	$1347,46 \pm 83,36$

Tabelle A.20.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die zweite Messung bei $\lambda = 463$ nm. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.19.

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	57.00	5.80	7.55	0.38
140.61	43.00	21.55	2.25	4.64	0.24
53.32	43.00	39.00	4.00	6.24	0.32
227.47	43.00	11.65	1.26	3.40	0.19
300.57	43.00	6.77	0.78	2.59	0.15
259.72	43.00	9.49	1.05	3.07	0.17
443.76	43.00	2.13	0.31	1.44	0.11
562.01	43.00	0.78	0.18	0.85	0.11
648.44	43.00	0.14	0.11	0.28	0.21
698.32	43.00	0.06	0.11	0.00	0.00

Tabelle A.21.: Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 546$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 698,32$ mV, daraus folgt $I_0 = (0,06 \pm 0,11)$ pA.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-9,06 \times 10^{-3} \pm 9,59 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$5,71 \pm 4,14 \times 10^{-1}$
χ^2	60,11
Freiheitsgrade (dof)	7
χ^2/dof	8,587
Abbremsspannung U_0 [mV]	$630,24 \pm 80,86$

Tabelle A.22.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 546$ nm. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.21.

V402: Quantelung von Energie

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	53.90	5.49	7.34	0.37
124.70	43.00	24.44	2.54	4.94	0.26
39.13	43.00	42.30	4.33	6.50	0.33
219.30	43.00	12.06	1.31	3.47	0.19
265.31	43.00	8.74	0.97	2.96	0.16
308.74	43.00	6.45	0.74	2.54	0.15
434.30	43.00	2.42	0.34	1.56	0.11
553.41	43.00	0.82	0.18	0.91	0.10
648.44	43.00	0.18	0.12	0.43	0.14
682.41	43.00	0.00	0.10	0.00	0.00

Tabelle A.23.: Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 546$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 682,41$ mV, daraus folgt $I_0 = (0,00 \pm 0,10)$ pA.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-8,65 \times 10^{-3} \pm 9,51 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$5,60 \pm 4,28 \times 10^{-1}$
χ^2	69,41
Freiheitsgrade (dof)	7
χ^2/dof	9,915
Abbremsspannung U_0 [mV]	$647,40 \pm 86,69$

Tabelle A.24.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die zweite Messung bei $\lambda = 546$ nm. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.23.

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	6.44	0.74	2.54	0.15
46.01	43.00	4.06	0.51	2.01	0.13
92.88	43.00	2.88	0.39	1.70	0.11
133.73	43.00	2.17	0.32	1.47	0.11
170.28	43.00	1.69	0.27	1.30	0.10
236.07	43.00	1.17	0.22	1.08	0.10
267.03	43.00	0.83	0.18	0.91	0.10
315.19	43.00	0.56	0.16	0.75	0.10
353.46	43.00	0.40	0.14	0.63	0.11
515.14	43.00	0.00	0.10	0.00	0.00

Tabelle A.25.: Gemessenen Werte für die erste Messung bei $\lambda = 578$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 515,14$ mV, daraus folgt $I_0 = (0,00 \pm 0,10)$ pA.

V402: Quantelung von Energie

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-4,81 \times 10^{-3} \pm 3,82 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$2,22 \pm 8,54 \times 10^{-2}$
χ^2	8,54
Freiheitsgrade (dof)	7
χ^2/dof	1,219
Abbremsspannung U_0 [mV]	$461,54 \pm 40,73$

Tabelle A.26.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung für die erste Messung bei $\lambda = 578$ nm. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.25.

U [mV]	ΔU [mV]	I [pA]	ΔI [pA]	$\sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]	$\Delta \sqrt{I - I_0}$ [$\sqrt{\text{pA}}$]
2.15	43.00	5.65	0.67	2.37	0.14
43.86	43.00	4.06	0.51	2.01	0.13
101.48	43.00	2.77	0.38	1.66	0.11
127.28	43.00	2.25	0.33	1.49	0.11
170.28	43.00	1.70	0.27	1.29	0.10
217.15	43.00	1.23	0.22	1.10	0.10
261.44	43.00	0.84	0.18	0.91	0.10
299.28	43.00	0.64	0.16	0.78	0.10
357.76	43.00	0.38	0.14	0.59	0.12
501.38	43.00	0.02	0.10	0.00	0.00

Tabelle A.27.: Gemessenen Werte für die zweite Messung bei $\lambda = 578$ nm. Die Sättigungsspannung liegt bei $U_G = 501,38$ mV, daraus folgt $I_0 = (0,02 \pm 0,10)$ pA.

Parameter	Wert
Steigung m [$\sqrt{\text{pA}}/\text{mV}$]	$-4,77 \times 10^{-3} \pm 2,95 \times 10^{-4}$
Achsenabschnitt b [$\sqrt{\text{pA}}$]	$2,18 \pm 6,37 \times 10^{-2}$
χ^2	4,80
Freiheitsgrade (dof)	7
χ^2/dof	0,685
Abbremsspannung U_0 [mV]	$457,02 \pm 31,26$

Tabelle A.28.: Ergebnisse des gewichteten linearen χ^2 -Fits zur Bestimmung der Abbremsspannung. Die hier gezeigten Werte stammen aus Tabelle A.27.

V402: Quantelung von Energie

Balmer-Serie

Spektrallinie Hg				
ω_B [°]	$\Delta\omega_B$ [°]	ω_G [°]	$\Delta\omega_G$ [°]	Farbe
145,0	0,5	48,0	0,5	violett
145,0	0,5	49,0	0,5	violett
145,0	0,5	49,5	0,5	violett
145,0	0,5	50,5	0,5	violett/blau
145,0	0,5	51,0	0,5	violett/blau
145,0	0,5	51,0	0,5	blau
145,0	0,5	55,5	0,5	türkis
145,0	0,5	61,0	0,5	grün
145,0	0,5	64,0	0,5	gelb
145,0	0,5	64,5	0,5	gelb
145,0	0,5	69,0	0,5	rot
135,0	0,5	68,0	0,5	grün
135,0	0,5	71,0	0,5	gelb
135,0	0,5	71,5	0,5	gelb
155,0	0,5	61,0	0,5	rot
155,0	0,5	61,5	0,5	rot
155,0	0,5	62,5	0,5	rot

Tabelle A.29.: Spektrallinien der Hg-Dampflampe 1. Ordnung, gemessen an den Winkelpositionen und beobachteter Farbe. Hierbei ist d die Dicke der Spektrallinien (in Strichpunkten), ω_B der Winkel der optischen Bank und ω_G der Winkel des Gitters.

V402: Quantelung von Energie

Spektrallinie H/Deuterium						
ω_B [°]	$\Delta\omega_B$ [°]	ω_G [°]	$\Delta\omega_G$ [°]	Farbe	d [Skt]	Δd [Skt]
145,0	0,5	51,0	0,5	violett	0,5	0,1
145,0	0,5	55,5	0,5	türkis	1	0,1
155,0	0,5	61,5	0,5	rot	1,5	1

Tabelle A.30.: Spektrallinien der H/Deuterium-Lampe in erster Ordnung. Hierbei ist d die Dicke der Spektrallinien (in Strichpunkten), ω_B der Winkel der Blende und ω_G der Beugungswinkel.

Tabelle A.31.: Fitparameter für die Gauß-Peaks der Balmer-Serie.

Parameter	Fitparameter für die Balmer-Serie			
	H_α	H_β	H_γ	Vermutetes H_δ
I_1	$9,691 \pm 0,050$	$44,905 \pm 0,081$	$2,937 \pm 0,063$	$3,099 \pm 0,035$
μ_1	$-0,047 \pm 0,001$	$-0,108 \pm 0,000$	$-0,096 \pm 0,001$	$-0,074 \pm 0,001$
σ_1	$0,052 \pm 0,000$	$0,038 \pm 0,000$	$0,050 \pm 0,001$	$0,049 \pm 0,001$
I_2	$0,905 \pm 0,059$	$2,050 \pm 0,068$	$20,686 \pm 0,066$	$1,000 \pm 0,108$
μ_2	$-0,214 \pm 0,003$	$-0,155 \pm 0,003$	$0,272 \pm 0,000$	$-1,768 \pm 0,085$
σ_2	$0,036 \pm 0,003$	$0,139 \pm 0,003$	$0,046 \pm 0,000$	$3,050 \pm 0,300$
Offset	$2,868 \pm 0,006$	$0,666 \pm 0,006$	$3,192 \pm 0,007$	$1,999 \pm 0,110$