Solutions cnoïdales de l'équation KdV

On regarde quelles sont les solutions ***autres que solitons*** *de l'équation de Korteweg–de Vries (KdV) dans le cas général, sur l'axe réel et dans le cas des ondes se propageant vers la droite. On s'intéressera ensuite au cas du tore $\mathbb{T}^1$, en cherchant les ondes cnoïdales ayant pour période spatiale $T^\xi = 2\pi/n$.*

Rappels

Intégrales elliptiques $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{K}$

On définit les intégrales elliptiques de 1re et de 2e espèce, incomplètes ou complètes comme

$$\mathrm{E}(\phi|m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{E}(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\mathrm{F}(\phi|m) = \int_0^\phi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - m\sin^2 x}}, \qquad \mathrm{K}(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - m\sin^2 x}}. \tag{2}$$

et l'on rappelle les développements limités ou asymptotiques suivants des intégrales complètes :

$$\mathrm{E}(m) \underset{m\to 0^+}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}m + \mathscr{O}(m^2) \tag{3}$$

$$\mathrm{K}(m) \underset{m\to 0^+}{=} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}m + \mathscr{O}(m^2) \tag{4}$$

$$\mathrm{E}(m = 1-\mu) \underset{m\to 1^-}{=} 1 + \frac{\mu}{4}\left[-\log(\mu) - 1 + 4\log(2)\right] + \mathscr{O}\left(\mu^2\right) \tag{5}$$

$$\mathrm{K}(m = 1-\mu) \underset{m\to 1^-}{=} \left[2\log(2) - \frac{\log(\mu)}{2}\right] + \frac{\mu}{8}[-\log(\mu) - 2 + 4\log(2)] + \mathscr{O}\left(\mu^2\right) \tag{6}$$

Fonctions $\mathbf{cn}, \mathbf{sn}, \mathbf{dn}, \mathbf{am}$

On fixe m. Si l'on a $u = \mathrm{F}(\varphi|m)$ qui est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de φ, strictement croissante, alors on définit les fonctions elliptiques de Jacobi comme

$$\mathrm{am}(u|m) \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi = \mathrm{F}^{-1}(u|m), \tag{7}$$

$$\mathrm{cn}(u|m) \overset{\mathrm{def}}{=} \cos\varphi = \cos[\mathrm{am}(u|m)], \tag{8}$$

$$\mathrm{sn}(u|m) \overset{\mathrm{def}}{=} \sin\varphi = \sin[\mathrm{am}(u|m)], \tag{9}$$

$$\mathrm{dn}(u|m) \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{1 - m\sin^2\varphi} = \sqrt{1 - m\sin^2[\mathrm{am}(u|m)]}. \tag{10}$$

1 Propriétés de l'équation KdV en domaine infini (sur $\mathbb{R}$)

On part de l'équation de Korteweg–de Vries pour des ondes se propageant vers la droite, écrite sous la forme

$$\eta_t + c_0\left[(1 + B\eta)\eta_x + D\eta_{xxx}\right] = 0. \tag{11}$$

En matière de dimension, on a $[B] = L^{-1}$ et $[D] = L^2$.

Régime linéaire : On a $\eta_t + c_0\left[\eta_x + D\eta_{xxx}\right] = 0$. On pose $\eta(x,t) = \varepsilon\exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)]$ et l'on retrouve la relation de dispersion

$$\omega = c_0\left[k - Dk^3\right]. \tag{12}$$

Quand D est négatif, on est en régime capillaire (relation de dispersion convexe). Quand D est positif, on est en régime gravitaire (relation de dispersion non convexe).

Symétries : Pour $t \mapsto -t$ (renversement du temps), l'équation devient

$$\eta_t - c_0 \left[(1 + B\eta)\eta_x + D\eta_{xxx}\right] = 0. \tag{13}$$

et l'on s'occupe alors de solutions se propageant vers la gauche. Elles sont les mêmes que vers la droite sous la transformation $t \mapsto -t$ et $x \mapsto -x$.

2 Recherche des solutions cnoïdales

Les calculs suivants sont tirés du chapitre 5 (p. 529) de la thèse de M. W. Dingemans (1994) [1], plus spécifiquement de la section 5.4, *Periodic Waves*, p. 546.

On cherche des solutions en translation uniforme qui s'écrivent

$$\eta(x,t) = \eta(\xi(x,t)) \qquad \text{avec } \xi(x,t) = x - vc_0 t \tag{14}$$

et telles qu'elles soient spatialement périodiques si bien que (11) donne

$$c_0 \left[(1 - v + B\eta)\eta_\xi + D\eta_{\xi\xi\xi}\right] = 0. \tag{15}$$

ce qui donne, en intégrant sur ξ

$$c_0 \left[(1-v)\eta + \frac{B}{2}\eta^2 + D\eta_{\xi\xi}\right] = -c_0 C_1. \tag{16}$$

avec C_1 donné par les conditions aux limites d'intégration, donc donné intrinsèquement par les solutions à trouver elles-mêmes pour être auto-cohérent. On obtient alors une équation de Newton

$$\eta_{\xi\xi} = -\frac{1}{D}\left[C_1 + (1-v)\eta + \frac{B}{2}\eta^2\right] = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\eta}. \tag{17}$$

avec le potentiel $W(\eta)$ qui s'écrit (à une constante près)

$$\boxed{W(\eta) = \frac{1}{D}\left[C_1\eta + \frac{1}{2}(1-v)\eta^2 + \frac{B}{6}\eta^3\right]}. \tag{18}$$

On a donc, par quadrature, en multipliant par η_ξ puis en intégrant sur ξ

$$\frac{1}{2}\eta_\xi^2 + W(\eta) = \mathcal{E}_0 = \mathcal{H}(q,p). \tag{19}$$

avec $\mathcal{H}$ le hamiltonien de variable conjuguées « cartésiennes » $(q,p) \equiv (\eta, \eta_\xi)$ d'une particule de masse unité dans un potentiel $W(\eta)$. Comparé au cas soliton KdV, une partie linéaire a été ajoutée ($C_1 \neq 0$), correspondant au fait qu'on ne cherche plus de solutions localisées, mais des solutions périodiques. Cela a pour conséquence que $\eta = 0$ ne sera plus racine double du problème $W(\eta) = \mathcal{E}_0$.

La question sera de savoir si en passant en coordonnée azimutale, on peut avoir des solutions périodiques avec une période spatiale $T^\xi = 2\pi$ (sans qu'il s'agisse de « la » période, i.e. la plus petite des périodes).

Étude du potentiel W

C'est une fonction polynomiale cubique, elle sera soit monotone, soit possèdera un minimum local et un maximum local, que l'on notera $\eta_\pm$ et qui vérifient l'équation $W'(\eta_\pm) = 0$, i.e.

$$C_1 + (1-v)\eta_\pm + \frac{B}{2}\eta_\pm^2 = 0. \tag{20}$$

On doit pour cela avoir un discriminant positif strictement, soit

$$\Delta = (1-v)^2 - 2BC_1 > 0. \tag{21}$$

1. M. W. Dingemans, *Water wave propagation over uneven bottoms* (1994), disponible à l'adresse : http://resolver.tudelft.nl/uuid:67580088-62af-4c6f-b32e-b3940584e5d2

Si la condition est satisfaite, on a alors

$$\eta_\pm = \frac{(v-1) \pm \sqrt{(v-1)^2 - 2BC_1}}{B}. \tag{22}$$

La convexité en ces points sera donnée par le signe de $W''(\eta_\pm)$ et vaut

$$W''(\eta_\pm) = \frac{1}{D}\left[(1-v) + B\eta_\pm\right] = \pm\frac{1}{D}\sqrt{(v-1)^2 - 2BC_1}. \tag{23}$$

Sachant que par hypothèse, le terme sous la racine carrée est positif, le fait d'être un maximum local en $\eta_{\max}$ (l'un des deux cas où $W''(\eta_\pm) < 0$) ou un minimum local en $\eta_{\min}$ (l'un des deux cas où $W''(\eta_\pm) > 0$) sera donné par le signe de D.

On notera $\mathcal{E}_{\min} = W(\eta_{\min})$ et $\mathcal{E}_{\max} = W(\eta_{\max})$. Vu l'allure du potentiel $W(\eta)$, on doit donc osciller en fond de potentiel, autour du minimum local $\eta_{\min}$.

Pour des excursions proches du minimum, on a des solutions très proches des sinusoïdes, celles pour qui $\mathcal{E}_0 \gtrsim \mathcal{E}_{\min}$. Pour $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max}$, on est sur une séparatrice homocline et la période tend vers l'infini. Entre les deux, on aura des solutions spatialement périodiques. On passe des orbites sinusoïdales à des orbites de période « infinie ». L'ensemble de ces orbites correspondant aux ondes cnoïdales.

Question : Peut-on avoir une période qui soit de la forme $2\pi/n$?

Rappel : Pour un hamiltonien qui vaut

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 q^2, \tag{24}$$

on a un oscillateur harmonique dont la pulsation vaut Ω^2. Sa période vaut ainsi $T = 2\pi/\Omega$. Au voisinage de $\eta_{\min}$, la période spatiale vaut ainsi

$$T^\xi = \frac{2\pi}{\sqrt{W''(\eta_{\min})}} = \frac{2\pi|D|^{1/2}}{\left[(v-1)^2 - 2BC_1\right]^{1/4}} = \frac{2\pi|D|^{1/2}}{[\Delta]^{1/4}}. \tag{25}$$

Cette quantité donne une borne inférieure de la période spatiale. Si elle est supérieure ou égale à 2π, cela interdit des solutions périodiques.

Remarque : D peut être petit, mais Δ aussi. En revanche, Δ peut être arbitrairement grand pourvu que l'on ait $-BC_1 \gg 1$, donc dans le cas $B > 0$, pourvu que l'on ait $C_1 \ll -1/B$.

Contraintes sur les solutions : dans la mesure où notre supposée équation de KdV périodique concerne des perturbations de la surface libre, il faudra s'assurer que sur une période T^ξ, les variations d'élévation ont pour valeur moyenne zéro, i.e.

$$\int_0^{T^\xi} \eta(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{26}$$

Cela implique implicitement que l'on oscille entre les valeurs $\eta_1 \leq \eta(\xi) \leq \eta_2$ avec $\eta_1 < 0$ et $\eta_2 > 0$, sachant que ces deux valeurs vérifient $W(\eta_1) = W(\eta_2) = \mathcal{E}_0$, les creux ou bosses marqués des cnoïdales correspondant à $\eta_{\min}$. On sera proche de l'homocline et l'on passera donc beaucoup de « temps » ξ près de $\eta_{\max}$.

2.1 Cas standard ($B > 0,\ D > 0$) et élévations (a priori supersoniques)

On suppose le cas KdV standard où ($B > 0,\ D > 0$) et pour lequel, on a $v > 1$ pour les solitons en élévation (supersoniques).

Cas à éliminer (a priori) : $C_1 > 0$ Dans le cas où $C_1 > 0$, on a

$$\eta_{\max} = \eta_- > 0, \tag{27}$$
$$\eta_{\min} = \eta_+ > \eta_- > 0. \tag{28}$$

On oscillera donc entre des valeurs de η positives (cf. Fig. 1 (a)). Ce n'est pas ce que nous recherchons comme solution. On a écrit en tête de paragraphe qu'on éliminait ce cas a priori. En fait, on pourra le garder dans le cas $v - 1 < 0$ (cf. conclusions).

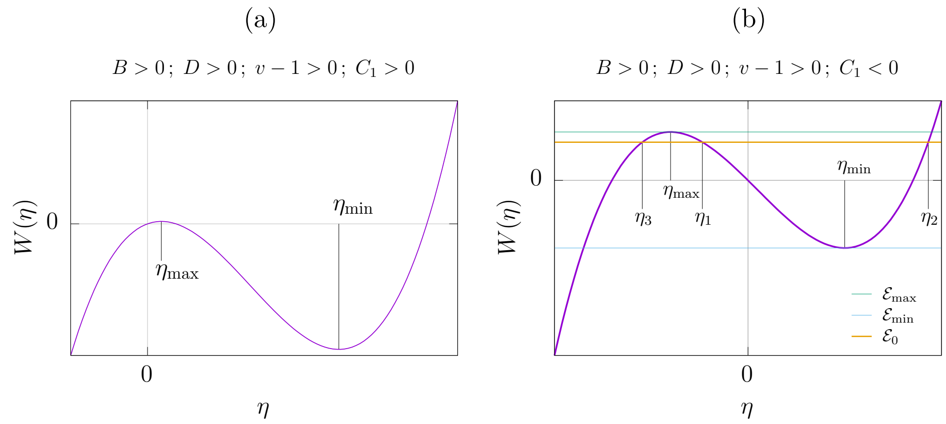

FIGURE 1 – Notations et allure des potentiels dans le cas $D > 0$ et $B > 0$, pour (a) $C_1 > 0$ et (b) $C_1 < 0$.

On va donc supposer dorénavant que $\boxed{C_1 < 0}$. Sous ces conditions, on a

$$\eta_{\max} = \eta_- < 0, \tag{29}$$
$$\eta_{\min} = \eta_+ > 0. \tag{30}$$

On va choisir $\mathcal{E}_0$ dans l'intervalle $]\mathcal{E}_{\min}, \mathcal{E}_{\max}[$. L'équation $W(\eta) = \mathcal{E}_0$ possède trois solutions $\eta_3 < \eta_1 < \eta_2$ et l'orbite recherchée sera telle que $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$. L'un des présupposés concernant η_1 sera tel que $\eta_1 < 0$ (cf. Fig. 1 (b)). Sachant que $W(0) = 0$, cela implique donc $0 < \mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_{\max}$. On doit maintenant résoudre l'équation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \mathcal{E}_0 - W(\eta) \equiv -\frac{B}{6D}(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_3). \tag{31}$$

Notons qu'en tant que polynome d'ordre 3, on a, par identification du terme de degré 2

$$+\frac{B}{6D}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) = \frac{1}{2D}(1 - v) \tag{32}$$

soit la relation sur la vitesse

$$v = 1 + \frac{B}{3}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3). \tag{33}$$

De plus, on a

$$\lim_{\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_{\max}^-} \eta_1 = \eta_{\max}, \tag{34}$$
$$\lim_{\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_{\max}^-} \eta_3 = \eta_{\max}. \tag{35}$$

et de manière symétrique (mais ce cas sera à exclure, car η_1 doit rester négatif)

$$\lim_{\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_{\min}^+} \eta_1 = \eta_{\min}, \tag{36}$$
$$\lim_{\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_{\min}^+} \eta_2 = \eta_{\min}. \tag{37}$$

Par la suite, nous poserons

$$\eta(\xi) = \eta_2 \cos^2\Psi(\xi) + \eta_1 \sin^2\Psi(\xi) \qquad (= \eta_2 + (\eta_1 - \eta_2)\sin^2\Psi = \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1)\cos^2\Psi), \tag{38}$$

et l'on a alors

$$\eta(\xi) - \eta_1 = (\eta_2 - \eta_1)\cos^2\Psi(\xi), \tag{39}$$
$$\eta(\xi) - \eta_2 = (\eta_1 - \eta_2)\sin^2\Psi(\xi), \tag{40}$$
$$\eta(\xi) - \eta_3 = (\eta_2 - \eta_3) - (\eta_2 - \eta_1)\sin^2\Psi(\xi). \tag{41}$$

De fait, on a les deux expressions suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = 2(\eta_2 - \eta_1)\cos\Psi\sin\Psi\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}, \tag{42}$$
$$-\frac{B}{6D}(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_3) = \frac{B}{6D}(\eta_2 - \eta_1)^2\cos^2\Psi\sin^2\Psi\left[(\eta_2 - \eta_3) - (\eta_2 - \eta_1)\sin^2\Psi\right], \tag{43}$$

et (31) donne ainsi

$$2\left\{(\eta_2 - \eta_1)^2\cos^2\Psi\sin^2\Psi\right\}\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \frac{B(\eta_2 - \eta_3)}{6D}\left\{\cos^2\Psi\sin^2\Psi(\eta_2 - \eta_1)^2\right\}\left[1 - m\sin^2\Psi\right] \tag{44}$$

avec

$$\boxed{m = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 - \eta_3} = \frac{H}{\eta_2 - \eta_3} \in \,]0, 1[}, \tag{45}$$

ce qui donne après simplification

$$2\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \frac{B(\eta_2 - \eta_3)}{6D}\left[1 - m\sin^2\Psi\right], \tag{46}$$

soit

$$\mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{12D}{B(\eta_2 - \eta_3)}} \times \frac{\mathrm{d}\Psi}{\sqrt{1 - m\sin^2\Psi}}, \tag{47}$$

soit

$$\xi(\Psi) = \sqrt{\frac{12D}{B(\eta_2 - \eta_3)}}\int_0^\Psi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - m\sin^2\psi}} = \sqrt{\frac{12D}{B(\eta_2 - \eta_3)}}\,\mathrm{F}(\Psi|m), \tag{48}$$

avec F la fonction elliptique incomplète de première espèce. Les fonction cnoïdales se définissent alors comme

$$\cos\Psi(\xi) = \mathrm{cn}\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right), \qquad \sin\Psi(\xi) = \mathrm{sn}\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right). \tag{49}$$

avec

$$\Lambda = 2\sqrt{\frac{3D}{B(\eta_2 - \eta_3)}}. \tag{50}$$

On obtient in fine

$$\eta(\xi) = \eta_1 + (\eta_2 - \eta_1)\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right). \tag{51}$$

Période spatiale : La période spatiale T^ξ est telle que

$$T^\xi = 2\Lambda F\left(\Psi = \frac{\pi}{2}\middle| m\right) = 2\Lambda\,\mathrm{K}(m) = 4\sqrt{\frac{3D}{B(\eta_2-\eta_3)}}\,\mathrm{K}(m), \tag{52}$$

où $\mathrm{K}(m)$ désigne la fonction elliptique complète de première espèce. Pour mémoire, on a

$$K(m = 1-\mu) \underset{\mu\to 0}{=} 2\log 2 - \frac{1}{2}\log\mu + \mathscr{O}(\mu). \tag{53}$$

Enfin, la condition (26) de moyenne nulle s'écrit (par symétrie)

$$0 = \int_0^{\frac{1}{2}T^\xi}\left[\eta_1 + (\eta_2-\eta_1)\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right)\right]\mathrm{d}\xi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\eta_1 + (\eta_2-\eta_1)\cos^2\Psi\right]\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\Psi}\right)\mathrm{d}\Psi \tag{54}$$

$$= \Lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta_1 + (\eta_2-\eta_1)\cos^2\Psi}{\sqrt{1-m\sin^2\Psi}}\,\mathrm{d}\Psi \tag{55}$$

Enfin, on a

$$\eta_1 + (\eta_2-\eta_1)\cos^2\Psi = \eta_2 - (\eta_2-\eta_1)\sin^2\Psi = \eta_2 + (\eta_2-\eta_3)(1-m\sin^2\Psi - 1) \tag{56}$$

$$= \eta_3 + (\eta_2-\eta_3)(1-m\sin^2\Psi) = \eta_3 + \frac{\eta_2-\eta_1}{m}(1-m\sin^2\Psi) \tag{57}$$

d'où la condition (26) de moyenne nulle qui devient

$$0 = \Lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta_3 + \frac{\eta_2-\eta_1}{m}(1-m\sin^2\Psi)}{\sqrt{1-m\sin^2\Psi}}\,\mathrm{d}\Psi \tag{58}$$

soit la relation

$$\frac{\eta_2-\eta_1}{m}\,\mathrm{E}(m) = -\eta_3\,\mathrm{K}(m), \tag{59}$$

ce qui est cohérent dans la mesure où par hypothèse, on a : $\eta_2-\eta_1 > 0 \quad \text{et} \quad \eta_3 < 0$.

2.1.1 Relations entre paramètres

Comme pour la solution soliton de KdV, nous allons regarder les relations entre les paramètre physiques que sont

— la hauteur $H = \eta_2 - \eta_1$;
— la période T^ξ ;
— la vitesse v ;

et les autres paramètres introduits dans le problème (B, D, m, Λ).

Pour rappel, on a les relations suivantes, données respectivement par (33, 45, 50, 52, 59)

$$v = 1 + \frac{B}{3}(\eta_1+\eta_2+\eta_3) \tag{60}$$

$$m = \frac{H}{\eta_2-\eta_3} \tag{61}$$

$$\Lambda = 2\sqrt{\frac{3Dm}{BH}} \tag{62}$$

$$T^\xi = 4\sqrt{\frac{3Dm}{BH}}\,\mathrm{K}(m) \tag{63}$$

$$\eta_3 = -\frac{H}{m}\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)} \tag{64}$$

$$H = \eta_2 - \eta_1 \tag{65}$$

De (61) et (64), on tire les expressions suivantes

$$\eta_2 = \eta_3 + \frac{H}{m} = \frac{H}{m}\left[1 - \frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right], \tag{66}$$

$$\eta_1 = \eta_2 - H = \frac{H}{m}\left[1 - m - \frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right]. \tag{67}$$

Sur la figure 2 sont tracées les allures de η_1 et η_2 en fonction du paramètre m, ainsi que la vitesse v sous la forme de la quantité $3m(v-1)/(2BH)$. On voit qu'on peut être subsonique pour de petits m.

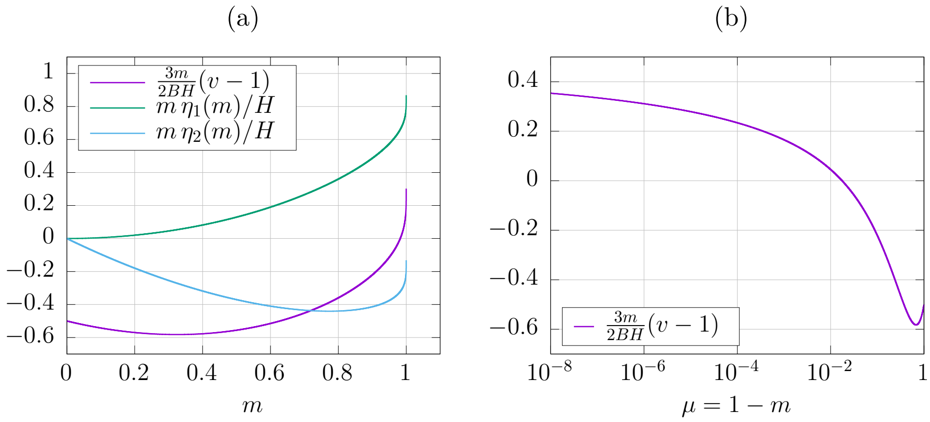

FIGURE 2 – En fonction de m, allure de $\eta_1(m)$ et $\eta_2(m)$ adimensionnés ainsi avec (a) en échelle linéaire et (b) en échelle log–lin en fonction de $\mu = 1 - m$, allure de $3m(v-1)/(2BH)$.

2.1.2 Synthèse $D > 0$

En pratique, on mesure la hauteur H et la période T^ξ ce qui nous permet d'en déduire un certain paramètre m et l'on a alors les relations suivantes

$$T^\xi = 4\sqrt{\frac{3Dm}{BH}}\,\mathrm{K}(m), \tag{68}$$

$$v = 1 + \frac{2BH}{3m}\left[1 - \frac{m}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right]. \tag{69}$$

et le signal est donné par

$$\eta(\xi) = \eta_1 + H\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right), \tag{70}$$

$$H = \eta_2 - \eta_1 > 0, \tag{71}$$

$$\eta_1 = \frac{H}{m}\left[1 - m - \frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right], \tag{72}$$

$$\eta_2 = \frac{H}{m}\left[1 - \frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right], \tag{73}$$

$$\eta_3 = -\frac{H}{m}\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}, \tag{74}$$

$$\Lambda = 2\sqrt{\frac{3Dm}{BH}}. \tag{75}$$

Le système autorise bien des solutions subsoniques, pour de petits m. On voit en fait en matière de potentiel effectif W que l'on peut bien avoir des solutions de type cnoïdales dans le cas $(1-v) < 0$, il suffit de prendre $C_1 > 0$ proche de zéro pour s'en convaincre graphiquement.

2.2 Dispersion négative ($B > 0,\ D < 0$) (dépressions a priori subsoniques)

On se place désormais dans le cas ($B > 0,\ D < 0$) pour lequel on a $v < 1$ pour les solitons en dépression (subsoniques).

Ls choses sont en fait symétriques, on a juste pris l'opposé du cas précédent à cause du signe de D qui devient négatif. Les extrêma locaux sont donc inversés et l'on a

Cas $C_1 > 0$ à éliminer a priori : On doit avoir $0 < C_1 < \dfrac{(v-1)^2}{2B}$ et l'on a

$$\eta_{\max} = \eta_+ < 0, \tag{76}$$

$$\eta_{\min} = \eta_- < \eta_+ < 0. \tag{77}$$

On pourra osciller entre des valeurs négatives (cf. Fig. 3 (a)). Ce n'est pas ce que nous recherchons comme solution. En fait ce cas pourra se traiter pour $v - 1 > 0$ (cf. conclusions)

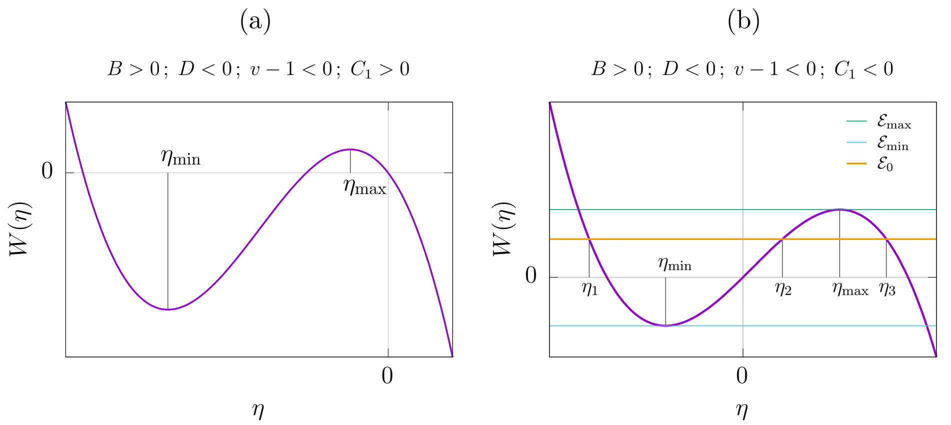

FIGURE 3 – Notations et allure des potentiels dans le cas $D < 0$ et $B > 0$, pour (a) $C_1 > 0$ et (b) $C_1 < 0$.

On va donc dorénavant supposer $\boxed{C_1 < 0}$. Sous ces conditions, on a

$$\eta_{\max} = \eta_+ > 0, \tag{78}$$

$$\eta_{\min} = \eta_- < 0. \tag{79}$$

On va choisir $\mathcal{E}_0$ dans l'intervalle $]\mathcal{E}_{\min}, \mathcal{E}_{\max}[$. L'équation $W(\eta) = \mathcal{E}_0$ possède trois solutions $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ et l'orbite recherchée sera telle que $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$. On doit résoudre l'équation donnée par la quadrature :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = \mathcal{E}_0 - W(\eta) \equiv -\frac{B}{6D}(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)(\eta-\eta_3). \tag{80}$$

Par la suite, nous poserons $H = \eta_2 - \eta_1$ et le paramétrage elliptique

$$\eta(\xi) = \eta_1 \cos^2\Psi(\xi) + \eta_2 \sin^2\Psi(\xi) \qquad (= \eta_2 - H\cos^2\Psi = \eta_1 + H\sin^2\Psi), \tag{81}$$

si bien que l'on a (80) qui devient

$$2H^2 \sin^2\Psi \cos^2\Psi \left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = +\frac{B}{6D}H^2\cos^2\Psi\sin^2\Psi(\eta_3 - \eta_1 - H\sin^2\Psi). \tag{82}$$

qui se simplifie en

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = -\frac{B}{12D}(\eta_3-\eta_1)(1 - m\sin^2\Psi), \tag{83}$$

en posant

$$\boxed{m = \frac{H}{\eta_3-\eta_1} = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_3-\eta_1} \quad \in]0,1[}. \tag{84}$$

ce qui donne

$$\xi(\Psi) = \sqrt{\frac{12D}{B(\eta_1 - \eta_3)}} \int_0^{\Psi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1 - m\sin^2\psi}} = \sqrt{\frac{12D}{B(\eta_1 - \eta_3)}}\, \mathrm{F}(\Psi|m), \tag{85}$$

avec F la fonction elliptique incomplète de première espèce. Les fonction cnoïdales se définissent alors comme

$$\cos\Psi(\xi) = \mathrm{cn}\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right), \qquad \sin\Psi(\xi) = \mathrm{sn}\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right). \tag{86}$$

avec

$$\Lambda = 2\sqrt{\frac{3D}{B(\eta_1 - \eta_3)}}. \tag{87}$$

On obtient in fine

$$\eta(\xi) = \eta_2 - H\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right). \tag{88}$$

Période spatiale : La période spatiale T^{ξ} est telle que

$$T^{\xi} = 2\Lambda F\left(\Psi = \frac{\pi}{2}\middle| m\right) = 2\Lambda\,\mathrm{K}(m) = 4\sqrt{\frac{3D}{B(\eta_1 - \eta_3)}}\,\mathrm{K}(m), \tag{89}$$

où $\mathrm{K}(m)$ désigne la fonction elliptique complète de première espèce.

Condition de moyenne nulle : On doit avoir encore (sur une demi-période par symétrie)

$$\int_0^{\frac{1}{2}T^{\xi}} \eta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 = \int_0^{\frac{1}{2}T^{\xi}} \left[\eta_2 - H\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right)\right] \mathrm{d}\xi = \int_0^{\pi/2} \left[\eta_2 - H\cos^2\Psi\right]\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\Psi}\right)\mathrm{d}\Psi \tag{90}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\eta_3 - \frac{H}{m}(1 - m\sin^2\Psi)}{\sqrt{1 - m\sin^2\Psi}}\right) \mathrm{d}\Psi = \eta_3\,\mathrm{K}(m) - \frac{H}{m}\,\mathrm{E}(m). \tag{91}$$

Synthèse $D < 0$

$$\eta_3 = \frac{H}{m}\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}, \tag{92}$$

$$\eta_1 = \eta_3 - \frac{H}{m} = \frac{H}{m}\left[\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)} - 1\right], \tag{93}$$

$$\eta_2 = H + \eta_1 = \frac{H}{m}\left[m - 1 + \frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right]. \tag{94}$$

et l'on a donc

$$T^{\xi} = 4\sqrt{\frac{-3Dm}{BH}}\,\mathrm{K}(m), \tag{95}$$

$$v = 1 - \frac{2BH}{3m}\left[1 - \frac{m}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right], \tag{96}$$

$$\Lambda = 2\sqrt{\frac{3|D|m}{BH}} \tag{97}$$

$$\eta(\xi) = \eta_2 - H\,\mathrm{cn}^2\left(\frac{\xi}{\Lambda}\middle| m\right). \tag{98}$$

Ces relations sont analogues au cas $D > 0$, à ceci près que le rapport $3m(v-1)/(2BH)$ est de signe opposé. On a bien des dépressions subsoniques pour $m \to 1$, en revanche, pour m petit, on peut avoir des dépressions supersoniques (cf. Fig. 4)

Enfin, en figure 5, on montre une solution sur 2 périodes spatiales Λ.

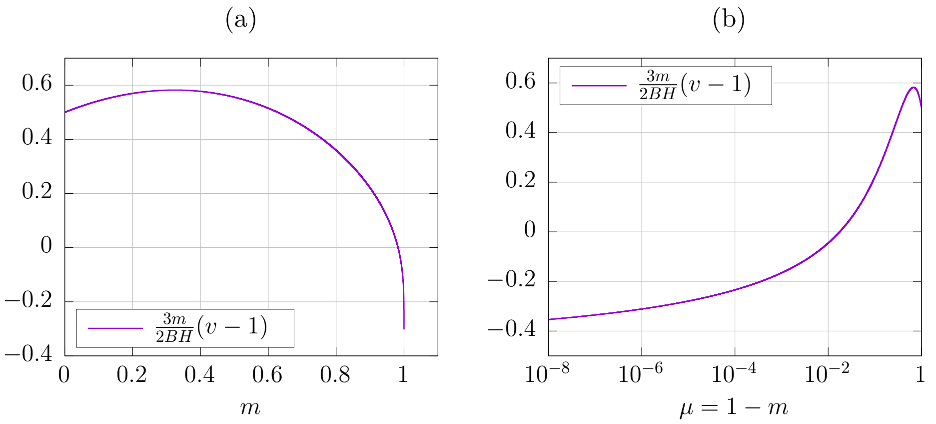

FIGURE 4 – En fonction de m ou $\mu = 1 - m$, allure de $3m(v-1)/(2BH)$: (a) en échelle linéaire et (b) en échelle log–lin.

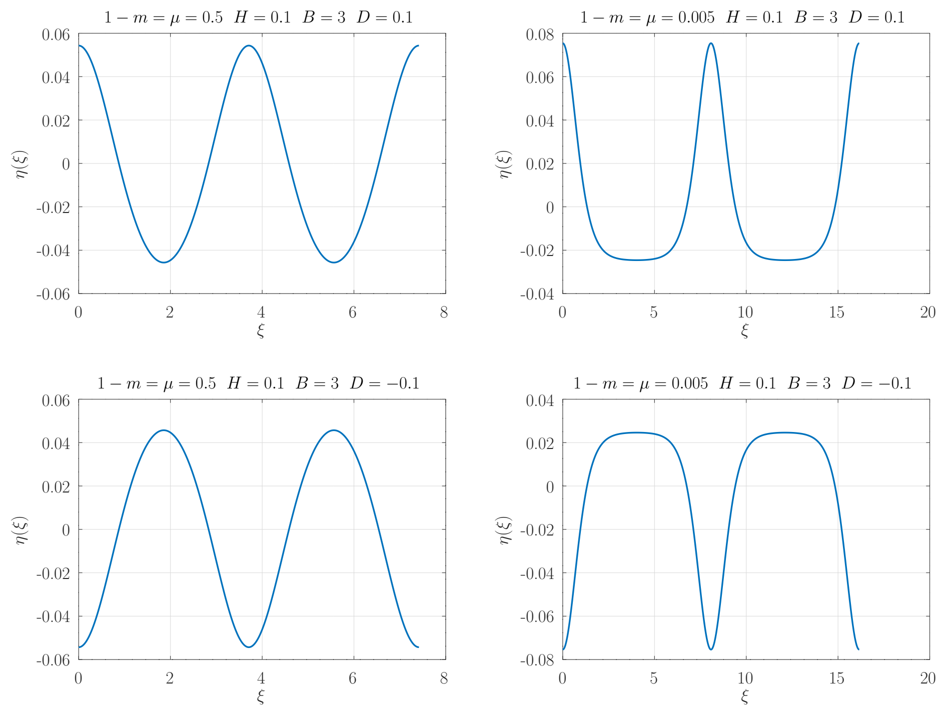

FIGURE 5 – Allures de solutions cnoidales pour différents $\mu = 1 - m$ et des D positifs ou négatifs, sur 2 **périodes** Λ. **[Attention, ici ξ vaut ξ/Λ !]**

3 Cas périodique, équation KdV en angle θ

Dans le cas périodique, dans le tore $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'équation de Korteweg–de Vries pour des ondes se propageant dans le sens direct, sera écrite sous la forme, en variable azimutale

$$\eta_t + \Omega_0 \left[(1 + B\eta)\eta_\theta + D\eta_{\theta\theta\theta} \right] = 0. \tag{99}$$

En matière de dimension, on a $[B] = L^{-1}$ et $[D] = 1$, D ici est donc **sans dimension**. La période T^θ devra donc valoir $2\pi/N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Pour une solution à **1 onde solitaire** de hauteur $H > 0$ (que ce soit en élévation ou en dépression), on a alors

$$T^\theta = \frac{2\pi}{N_\theta} = 4\sqrt{\frac{3|D|m}{BH}}\,\mathrm{K}(m), \qquad \text{avec } N_\theta = 1 \tag{100}$$

$$v = 1 + \mathrm{sign}(D)\frac{2BH}{3m}\left[1 - \frac{m}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)}\right], \tag{101}$$

où v désigne ici une pulsation angulaire renormalisée par Ω_0.

Question : Que doivent valoir BH et m pour avoir la relation (100) dans nos expériences ? À D donné, on doit avoir BH « pas trop petit » et $\sqrt{m}\,\mathrm{K}(m)$ « pas trop grand », sachant que la quantité $\sqrt{m}\,\mathrm{K}(m)$ diverge lorsque $m \to 1$ et dont l'allure est donnée en figure 6.

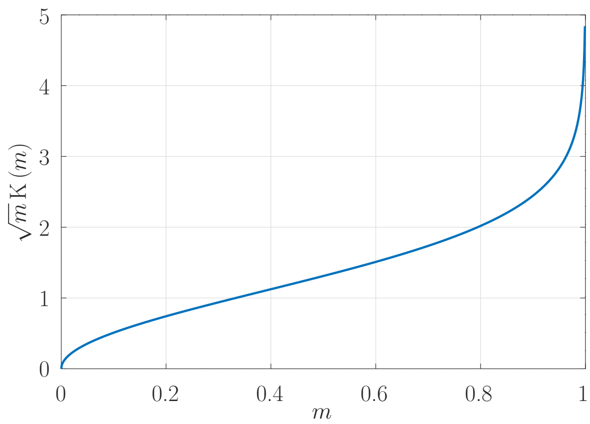

FIGURE 6 – Allure de la fonction $\sqrt{m}\ \mathrm{K}(m)$.

Pour rappel, nous avons dans le cas en V, la relation de dispersion suivante

$$\omega^2(k) = \left[g_{\text{eff}}\frac{k}{R} + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho R^3}k^3\right]\Psi\left[Ak\right] \tag{102}$$

avec $A = WR/(2R_c)$, ce qui donne à l'ordre k^4

$$\omega^2(k) = \Omega_0^2 k^2\left[1 + \left(\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho g_{\text{eff}} R^2} - \frac{|\Psi'''(0)|A^2}{6}\right)k^2\right] + \mathscr{O}(k^6). \tag{103}$$

avec $\Omega_0^2 = g_{\text{eff}} A/R$. On va maintenant s'intéresser à l'équation KdV en θ suivante

$$0 = \partial_t \eta + \Omega_0\left[(1 + B\eta_\theta)\eta_\theta + D\eta_{\theta\theta\theta}\right]. \tag{104}$$

avec

$$D = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_{\text{eff}}}{\rho g_{\text{eff}} R^2} - \frac{|\Psi'''(0)|}{6}A^2\right). \tag{105}$$

et l'on posera $B = \lambda/W$ (W est la longueur naturelle à utiliser ici, et $[B] = L^{-1}$).

Ordres de grandeur : $g_{\text{eff}} = 9.81 \times \sin(4.5°) \simeq 0.77$, $R_c = 0.075$, $\sigma_{\text{eff}} \simeq 0.055$, $R = R_c + W/2$. On considère $\Psi \equiv \tanh$ et donc $|\psi'''(0)| = 2$. Pour $W = 0.02$, on a $D \simeq -2.1 \times 10^{-3}$ et pour $W = 0.03$, on a $D \simeq +2.8 \times 10^{-3}$.

3.1 Exemple de mode 1

On va commencer par $T^\xi = 2\pi$. On va choisir m proche de 1 pour être certain d'avoir quelque chose de très creusé. On va considérer qu'on est dans une configuration anti-flaque et que $D < 0$. Une illustration est donnée en figure 7.

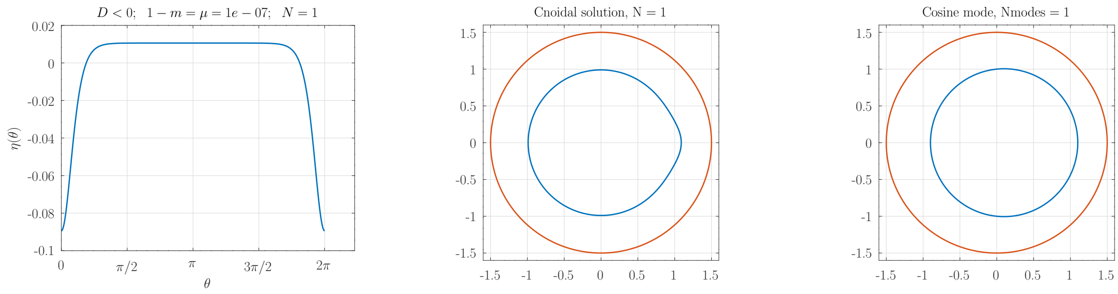

FIGURE 7 – Pour $N_\theta = 1$, tracé de la cnoïdale et représentation dans l'espace physique. La solution sinusoïdale (à droite) est montrée à titre de comparaison.

3.2 Exemple de mode polygonal

On va maintenant prendre $N > 1$ et considérer $T^\xi = 2\pi/N$. Une illustration est donnée en figure 8 pour $N = 5$.

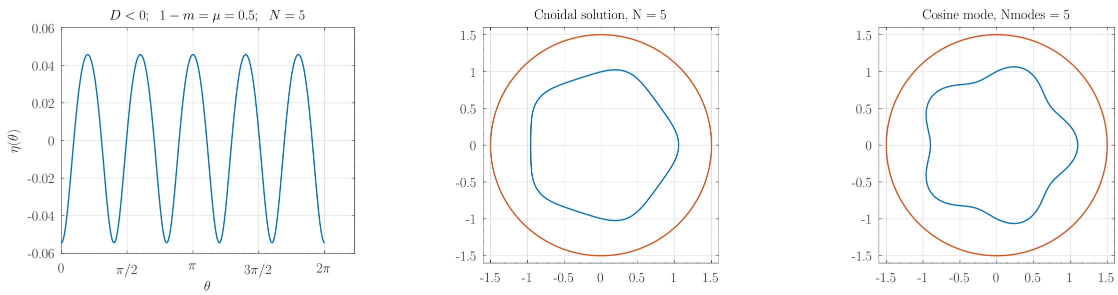

FIGURE 8 – Pour $N_\theta = 5$, tracé de la cnoïdale et représentation dans l'espace physique. La solution sinusoïdale (à droite) est montrée à titre de comparaison.

3.3 Commentaires sur les vitesses obtenues

On obtient alors (cf. fichier Octave associé : des vitesses qui peuvent être très variables, positives et négatives `prefacteur_vitesse.m` et `abaques_vitesses.m`). Pour cela, on part de D et B donnés, on fait varier m. On en déduit H et $1 - v$ via (100) et (101) [2].

Une illustration de cela se trouve en figure 9. On voit que pour $D > 0$, on peut avoir des solutions supersonique en élévation (m petit) mais aussi des solutions subsoniques en élévation ($\mu = 1 - m$ petit, i.e. m proche de 1). On aura l'inverse pour $D > 0$.

2. **Remarque :** Il faudra reprendre les calculs de Ludu [A. Ludu, A. Raghavendra, *Appl. Num. Math.*, **141**, 167–184 (2019)] et estimer les coefficients B pour voir si l'on peut ou non avoir de telles solutions.

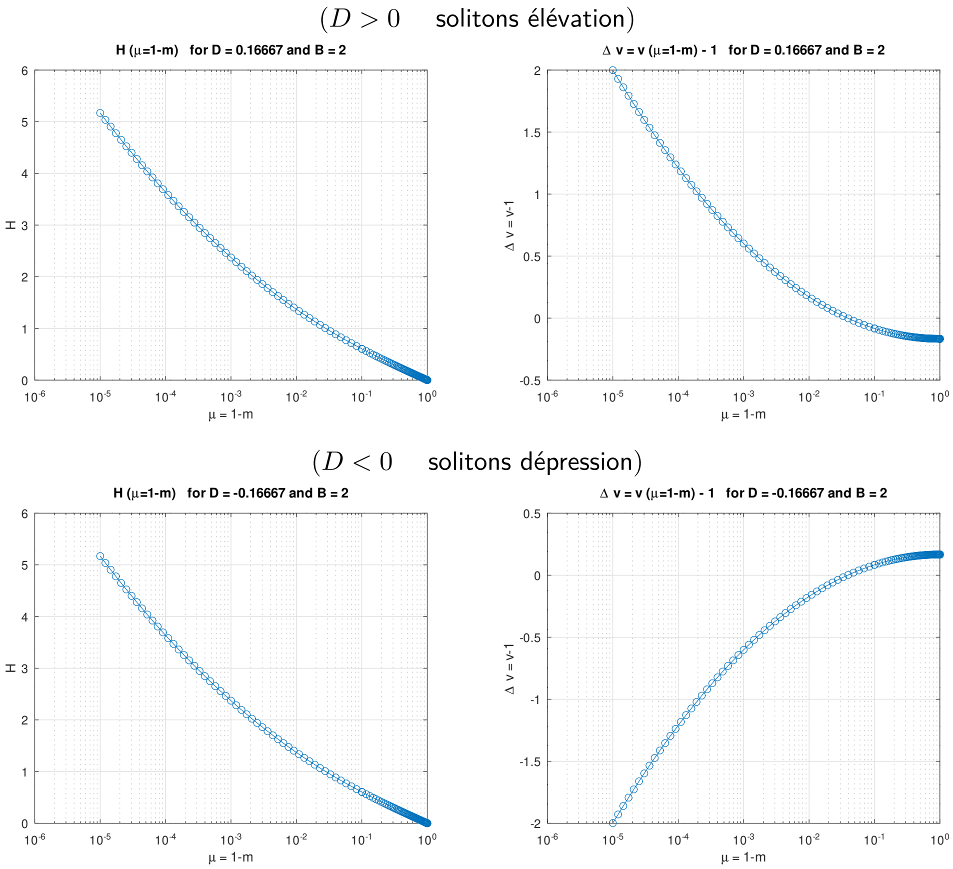

FIGURE 9 – (haut) Pour $D = +1/6, B = 2, N_\theta = 1$, tracé de la hauteur H et de $\Delta v = v - 1$. (bas) Pour $D = -1/6, B = 2, N_\theta = 1$, idem, en changeant le signe de la dispersion D. Concernant $\Delta v = v - 1$, le fait de changer le signe de la dispersion D reviendra à changer le signe de $\Delta v = v - 1$.

3.4 Comparaisons avec les expériences

Pour un système physique donné (i.e. une plaque donnée et un volume de liquide donné), on se retrouve avec certaines valeurs de D et B donnés.

Ce qu'il faut faire, c'est : pour une série de solitons, mesurer H ainsi que leur profil et leur vitesse qui doivent vérifier

$$\eta(\theta) = \mathrm{sign}(D) H \,\mathrm{cn}^2 \left(\sqrt{\frac{BH}{12Dm}}\,\theta \,\middle|\, m \right) + \text{constante}, \tag{106}$$

$$v \equiv \frac{\Omega}{\Omega_0} = 1 + \mathrm{sign}(D) \frac{2BH}{3m} \left[1 - \frac{m}{2} - \frac{3}{2} \frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)} \right], \tag{107}$$

$$2\pi = 4\sqrt{\frac{3|D|m}{BH}}\,\mathrm{K}(m), \tag{108}$$

sachant que Ω_0 et D sont directement donnés par la relation de dispersion azimutale des ondes variqueuses. De (108), on déduit la relation

$$BH = \frac{12}{\pi^2} |D| m \left[\mathrm{K}(m)\right]^2, \tag{109}$$

ce qui entraîne, via (107), que

$$\Delta v(m) \equiv v - 1 = \mathrm{sign}(D) \frac{2}{3m} \frac{12}{\pi^2} |D| m \,\mathrm{K}^2(m) \left[1 - \frac{m}{2} - \frac{3}{2} \frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)} \right] \tag{110}$$

$$= \frac{8D}{\pi^2} \mathrm{K}^2(m) \left[1 - \frac{m}{2} - \frac{3}{2} \frac{\mathrm{E}(m)}{\mathrm{K}(m)} \right] \equiv \frac{8D}{\pi^2} \Phi(m). \tag{111}$$

La figure 10 donne l'allure de la fonction $\Phi(m)$ qui est une fonction monotone donc bijective.

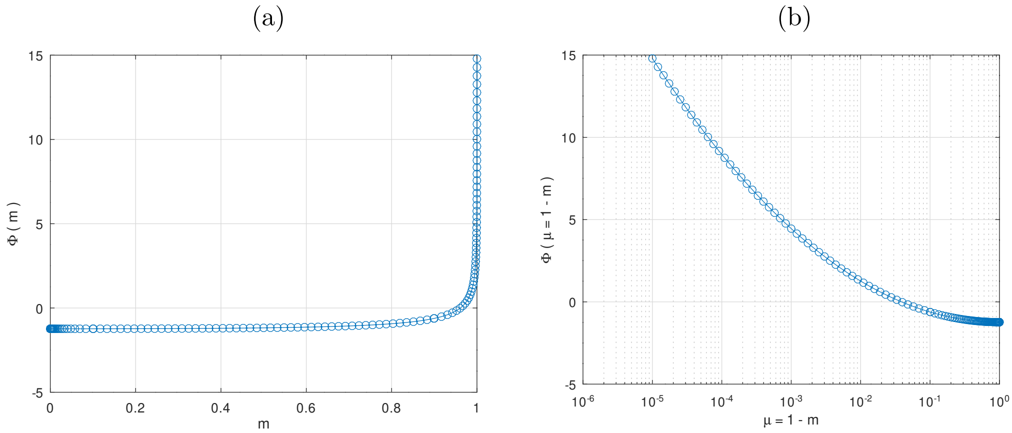

FIGURE 10 – Allure de la fonction $\Phi(m)$ en échelle (a) lin–lin (avec m en abscisse) et (b) log–lin (avec, ici, $\mu = 1 - m$ en abscisse).

À comparer maintenant aux expériences :

Méthodologiquement, a priori, ce qu'on doit faire est la chose suivante :

1. Mesurer les rapports de vitesse $v = \Omega/\Omega_0$ et en déduire expérimentalement les valeurs de m via (111) correspondantes.
2. Mesurer les hauteurs $H[v(m)]$ correspondantes (en prenant le maximum moins le minimum des profils reconstruits) et en déduire le coefficient B, via (109).
3. Bien s'assurer que B est constant pour un tore donné.

Table des matières