Métodos Numéricos II

Tarefa 1.1

Rodrigo Nogueira[473413] e Victor Torres[473741]

10 Abril de 2022

1 Método da expansão de Taylor

Para expandir via Taylor uma função até sua derivada segunda com um erro $O((\Delta x)^4)$, será preciso ir até o termo da derivada sexta. A expansão fica, então,

$$\begin{aligned} f(x_k + \Delta x) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + \tfrac{1}{2!}f''(x_k)(\Delta x)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(x_k)(\Delta x)^3 + \\ \tfrac{1}{4!}f^{(iv)}(x_k)(\Delta x)^4 + \tfrac{1}{5!}f^{(v)}(x_k)(\Delta x)^5 + \tfrac{1}{6!}f^{(vi)}(x_k)(\Delta x)^6 + \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Agora, precisamos eliminar os termos $f'(x_k)$, $f'''(x_k)$ e $f^{(v)}(x_k)$ utilizando a filosofia central, isto é, vamos expandir novas fórmulas de Taylor em pontos à frente e atrás de x_k, o que nos dá

$$\begin{aligned} f(x_k - \Delta x) = f(x_k) - f'(x_k)\Delta x + \tfrac{1}{2!}f''(x_k)(\Delta x)^2 - \tfrac{1}{3!}f'''(x_k)(\Delta x)^3 + \\ \tfrac{1}{4!}f^{(iv)}(x_k)(\Delta x)^4 - \tfrac{1}{5!}f^{(v)}(x_k)(\Delta x)^5 + \tfrac{1}{6!}f^{(vi)}(x_k)(\Delta x)^6 + \dots \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f(x_k + 2\Delta x) = f(x_k) + 2f'(x_k)\Delta x + \tfrac{4}{2!}f''(x_k)(\Delta x)^2 + \tfrac{8}{3!}f'''(x_k)(\Delta x)^3 + \\ \tfrac{16}{4!}f^{(iv)}(x_k)(\Delta x)^4 + \tfrac{32}{5!}f^{(v)}(x_k)(\Delta x)^5 + \tfrac{64}{6!}f^{(vi)}(x_k)(\Delta x)^6 - \dots \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f(x_k - 2\Delta x) = f(x_k) - 2f'(x_k)\Delta x + \tfrac{4}{2!}f''(x_k)(\Delta x)^2 - \tfrac{8}{3!}f'''(x_k)(\Delta x)^3 + \\ \tfrac{16}{4!}f^{(iv)}(x_k)(\Delta x)^4 - \tfrac{32}{5!}f^{(v)}(x_k)(\Delta x)^5 + \tfrac{64}{6!}f^{(vi)}(x_k)(\Delta x)^6 - \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Em seguida, precisamos combinar as equações com coeficientes com o objetivo de anular os termos indesejados. Isto pode ser feito resolvendo um sistema linear onde cada variável é um escalar que será multiplicado por uma equação e os coeficientes numéricos são aqueles que multiplicam os termos a serem removidos. Daí, somaremos (1), (2) multiplicado por α, (3) por β e (4) por γ, o que nos dá

$$\begin{cases} 1 - \alpha + \ \ 2\beta - \ \ 2\gamma = 0 \\ 1 - \alpha + \ \ 8\beta - \ \ 8\gamma = 0 \\ 1 + \alpha + 16\beta + 16\gamma = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

que possui solução $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1/16, -1/16)$. Agora, basta efetuar a soma proposta, segue que

$$\begin{split} \tfrac{15}{8} f(x_k) + \tfrac{3}{4} f''(x_k)(\Delta x)^2 - \tfrac{1}{120} f^{(vi)}(x_k)(\Delta x)^6 \approx f(x_{k+1}) + f(x_{k-1}) - \\ \tfrac{1}{16}(f(x_{k+2}) + f(x-k-2)), \end{split} \tag{6}$$

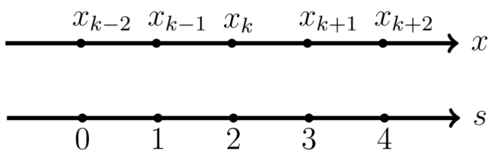
ou seja,

$$\begin{split} f''(x_k) = \frac{1}{3(\Delta x)^2} \big(-\tfrac{1}{4} f(x_{k-2}) + 4 f(x_{k-1}) - \tfrac{15}{2} f(x) + 4 f(x_{k+1}) - \\ \tfrac{1}{4} f(x_{k+2}) \big) + O((\Delta x)^4), \end{split} \tag{7}$$

onde o erro da ordem de $(\Delta x)^4$ é de aproximadamente $f^{(vi)}(x_k)(\Delta x)^4/90$.

2 Método do polinômio de Newton

Assim como no método de Taylor, o método de Newton utilizará 5 pontos. Realizando uma troca de variável de x para s, podemos remapear os pontos utilizados da seguinte forma.



O que nos dá as relações

$$x(s) = x_{k-2} + s\Delta x, \tag{8}$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\Delta x}. \tag{9}$$

Agora, façamos um polinômio $g(s)$ que interpola $f(x(s))$ passando pelos pontos 0, 1, 2, 3 e 4. Temos que

$$g(s) = \sum_{k=0}^{4} \binom{s}{k} \Delta^k f_0, \tag{10}$$

que expandiremos mais à frente. Veja que $f(x(s)) \approx g(s)$ e, por isso, diremos que

$$f''(x(s)) \approx \frac{d}{dx}\frac{dg(s(x))}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}g'(s)\frac{1}{\Delta x} = g''(s)\frac{1}{(\Delta x)^2}. \tag{11}$$

Perceba que ao calcular $g''(s)$, os termos $\binom{s}{0}$ e $\binom{s}{1}$ serão descartados. Daí, temos que

$$g''(s) = \Delta^2 f_0 + (s-1)\Delta^3 f_0 + \frac{6s^2 - 18s + 11}{12}\Delta^4 f_0. \tag{12}$$

Por fim, pela filosofia central, queremos a derivada no ponto x_k que é mapeado no ponto $s = 2$, logo, desejamos $g''(2)$ e

$$g''(2) = \Delta^2 f_0 + \Delta^3 f_0 - \tfrac{1}{12}\Delta^4 f_0 = \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{4}f_0 + 4f_1 - \tfrac{15}{2}f_2 + 4f_3 - \tfrac{1}{4}f_4). \tag{13}$$

Por fim, sabemos que $f''(x_k) = g''(s)/(\Delta x)^2$, e $f_i = f(x_{k-2+i}$, então substituindo isto em (13), segue que

$$f''(x) = \frac{1}{3(\Delta x)^2}\left(-\tfrac{1}{4}f(x_{k-2}) + 4f(x_{k-1}) - \tfrac{15}{2}f(x_k) + 4f(x_{k+1}) - \tfrac{1}{4}f(x_{k+2})\right), \tag{14}$$

que é exatamente o mesmo de (7), como esperávamos. Logo, seu erro também é aproximadamente $f^{(vi)}(x_k)(\Delta x)^4/90$.

3 Derivada segunda e estudo de convergência

Para $f(x) = \sqrt{e^{3x} + 4x^2}$ no ponto $x = 2$, teremos a seguinte tabela.

Δx	$f''(2)$	$e(x)$
0.5	44.904360044112174	∞
0.25	45.063360841620245	3.5×10^{-3}
0.125	45.072914361488380	2.1×10^{-4}
0.0625	45.073505573053050	1.3×10^{-5}
0.03125	45.073542432263220	8.2×10^{-7}

Tabela 1: Estudo de convergência de $f''(x)$ em $x = 2$.