Métodos Numéricos II

Tarefa 8

Rodrigo Nogueira[473413] e Victor Torres[473741]

01 de Junho de 2022

1 Mudança de Variável Para Coordenadas Polares

Temos que a integral da função $f(x, y) = 0.4(x^2 - y^2)$ será calculada sobre a superfície $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1600\}$, que representa uma circunferência centrada em $(0, 0)$ de raio 40. Como os limites de y dependem do valor de x (ou vice-versa) na integral, podemos trocar as variáveis cartesianas por variáveis em coordenadas polares para obter limites fixos, fazendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 40\cos\beta \\ 40\,\mathrm{sen}\,\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40\alpha\cos\beta \\ 40\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta \end{pmatrix}.$$

Daí, podemos calcular o jacobiano da seguinte maneira

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40\cos\beta & -40\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta \\ 40\,\mathrm{sen}\,\beta & 40\alpha\cos\beta \end{vmatrix} = 1600\alpha.$$

Agora, sendo $z = f(x, y)$, temos que

$$\begin{aligned} A &= \iint_S dS \\ &= \iint_U \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \\ &= \iint_U \sqrt{(0.4x)^2 + (0.4y)^2 + 1}\, dA \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_\Omega \sqrt{0.16 \cdot 1600\alpha^2 + 1} \cdot 1600\alpha \, d\Omega \\
&= 1600 \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{256\alpha^2 + 1} \cdot \alpha \, d\alpha \, d\beta.
\end{aligned}
$$

2 Mudança de Variável Para Aplicação do Método de Gauss–Legendre

Precisamos que os limites de integração estejam entre -1 e 1, então basta aplicar uma simples mudança de variável, que nos dá

$$
\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2}\gamma \\ \frac{0+2\pi}{2} + \frac{2\pi-0}{2}\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma \\ \pi + \pi\delta \end{pmatrix}.
$$

Agora, o novo jacobiano será

$$
|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial \gamma} & \dfrac{\partial \alpha}{\partial \delta} \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial \gamma} & \dfrac{\partial \beta}{\partial \delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \pi \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\pi.
$$

3 Aproximação da Integral Final Pelo Método de Gauss–Legendre

Por fim, podemos substituir a integral original por uma com limites entre -1 e 1 para poder aplicarmos a integração aproximada. Daí, temos

$$
\begin{aligned}
A &= 1600 \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \sqrt{256(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma)^2 + 1} \cdot (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma) \cdot \tfrac{1}{2}\pi \, d\gamma \, d\delta \\
&= 400\pi \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \sqrt{64(1 + 2\gamma + \gamma^2)}\,(1+\gamma) \, d\gamma \, d\delta \\
&\approx 400\pi \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} w_i w_j \sqrt{64(1 + 2\gamma_i + \gamma_i^2)}\,(1+\gamma_i) \\
&= 400\pi \sum_{i=1}^{3} \left(w_i \sqrt{64(1 + 2\gamma_i + \gamma_i^2)}\,(1+\gamma_i) \sum_{j=1}^{3} w_j \right) \\
&= 800\pi \sum_{i=1}^{3} w_i \sqrt{64(1 + 2\gamma_i + \gamma_i^2)}\,(1+\gamma_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\approx 800\pi(1.353 + 7.166 + 14.489) \\
&\approx 57\,825.411\,\mathrm{m}^2.
\end{aligned}
$$