# Métodos Numéricos II

Tarefa 4

Rodrigo Nogueira[473413] e Victor Torres[473741]

21 de Maio de 2022

## 1 Integração via Polinômios de Hermite

Temos que o Polinômio de Hermite de grau $n$ é dado por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

logo, para $n = 4$ temos

$$H_4(x) = (-1)^4 e^{x^2} \frac{d^4}{dx^4} e^{-x^2} = 4e^{x^2} e^{-x^2}(4x^4 - 12x^2 + 3) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Agora, para encontrar as raízes de $H_4(x)$, basta fazer a substituição de variável $y = x^2$ e resolver a equação $16y^2 - 48y + 12 = 0$, que possui raízes

$$y' = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad y'' = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}},$$

então, as raízes de $H_4(x)$ são

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}},$$
$$x_3 = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}}, \qquad x_4 = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}}.$$

Após isso, precisamos encontrar os pesos referentes às raízes do polinômio, segundo a relação

$$w_{i,n} = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 (H_{n-1}(x_i))^2},$$

onde $i$ é o índice da raiz analisada ($x_i$). Logo, precisamos encontrar $H_3(x)$, que é dado pela fórmula

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

Daí, obtemos

$$w_1 = w_3 = 0.804914, \qquad w_2 = w_4 = 0.0813128.$$

# 2 Integração via Polinômios de Laguerre

O Polinômio de Laguerre de grau $n$ é dado pela relação

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n),$$

então, para $n = 4$, temos

$$L_4(x) = \frac{e^x}{4!}\frac{d^4}{dx^4}(e^{-x}x^4) = \frac{e^x}{24}e^{-x}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1.$$

Cujas raízes são aproximadamente

$$x_1 \approx 0.322547689619392, \qquad x_2 \approx 1.74576110115835,$$
$$x_3 \approx 4.53662029692113, \qquad x_4 \approx 9.39507091230113.$$

Por fim, para cada raiz $x_i$, seu peso $w_{i,n}$ associado é

$$w_{i,n} = \frac{x_i}{(n+1)^2(L_{n+1}(x_i))^2},$$

o que implica que precisamos de $L_5(x)$, que é dado por

$$L_5(x) = \frac{1}{120}(x^5 - 25x^4 + 200x^3 - 600x^2 + 600x - 120).$$

Logo, temos que

$$w_1 \approx 0.08821472957275, \qquad w_2 \approx -0.1579832459579,$$
$$w_3 \approx 0.0840046844108, \qquad w_4 \approx -0.01423616802567.$$

# 3 Integração via Polinômios de Chebyshev

O Polinômio de Chebyshev de grau $n$ é dado pela relação

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-1/2},$$

então, para $n = 4$, temos

$$T_4(x) = \frac{16 \cdot 24}{40320}\sqrt{1-x^2}\frac{d^4}{dx^4}(1-x^2)^{3.5} = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Agora, as raízes são facilmente encontradas utilizando novamente a substituição de variável $y = x^2$, que nos dá

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad y'' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4},$$

ou seja,

$$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}, \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}},$$
$$x_3 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}, \qquad x_4 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}.$$

Por fim, temos que à cada raiz $x_i$ do polinômio está associado um peso dado por

$$w_{i,n} = \frac{\pi}{n},$$

isto é, todos os pesos serão iguais a $\pi/4$.

A tabela na página a seguir resume os resultados obtidos.

| | $H_4(x)$ | $L_4(x)$ | $T_4(x)$ |
|---|---|---|---|
| Raízes | $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}}$<br>$x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}}$<br>$x_3 = +\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}}$<br>$x_4 = +\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}}$ | $x_1 \approx 0.32254768961939$<br>$x_2 \approx 1.74576110115835$<br>$x_3 \approx 4.53662029692113$<br>$x_4 \approx 9.39507091230113$ | $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}$<br>$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$<br>$x_3 = +\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}$<br>$x_4 = +\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$ |
| Pesos | $w_1 = 0.8049140$<br>$w_2 = 0.0813128$<br>$w_3 = 0.8049140$<br>$w_4 = 0.0813128$ | $w_1 \approx +0.0882147295727$<br>$w_2 \approx -0.1579832459579$<br>$w_3 \approx +0.0840046844108$<br>$w_4 \approx -0.0142361680256$ | $w_1 = \pi/4$<br>$w_2 = \pi/4$<br>$w_3 = \pi/4$<br>$w_4 = \pi/4$ |