Métodos Numéricos II

Tarefa 9

Rodrigo Nogueira[473413] e Victor Torres[473741]

04 de Junho de 2022

1 Mudança de Variável Para Coordenadas Polares

Temos que a integral da função $f(x,y) = 0.4(x^2 - y^2)$ será calculada sobre a superfície $U = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{400} \leq 1\}$, que representa uma circunferência centrada em $(0,0)$ de raio 40. Como os limites de y dependem do valor de x (ou vice-versa) na integral, podemos trocar as variáveis cartesianas por variáveis em coordenadas polares para obter limites fixos, fazendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 40\cos\beta \\ 20\operatorname{sen}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40\alpha\cos\beta \\ 20\alpha\operatorname{sen}\beta \end{pmatrix}.$$

Daí, podemos calcular o jacobiano da seguinte maneira

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40\cos\beta & -40\alpha\operatorname{sen}\beta \\ 20\operatorname{sen}\beta & 20\alpha\cos\beta \end{vmatrix} = 800\alpha.$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dV \\ &= \iint_U f(x,y)\,dA \\ &= \iint_U 0.2(x^2 - y^2)\,dx\,dy \\ &= \iint_\Omega 0.2(1600\alpha^2\cos^2\beta - 400\alpha^2\operatorname{sen}^2\beta)800\alpha\,d\alpha\,d\beta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 64000 \iint_{\Omega} (4\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta)\alpha^3 \, d\alpha \, d\beta \\
&= 64000 \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta)\alpha^3 \, d\alpha \, d\beta.
\end{aligned}
$$

2 Mudança de Variável Para Aplicação do Método de Gauss–Legendre

Precisamos que os limites de integração estejam entre -1 e 1, então basta aplicar uma simples mudança de variável, que nos dá

$$
\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2}\gamma \\ \frac{0+2\pi}{2} + \frac{2\pi-0}{2}\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma \\ \pi + \pi\delta \end{pmatrix}.
$$

Agora, o novo jacobiano será

$$
|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\alpha}{\partial\gamma} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial\delta} \\ \dfrac{\partial\beta}{\partial\gamma} & \dfrac{\partial\beta}{\partial\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \pi \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\pi.
$$

3 Aproximação da Integral Final Pelo Método de Gauss–Legendre

Por fim, podemos substituir a integral original por uma com limites entre -1 e 1 para poder aplicarmos a integração aproximada. Daí, temos

$$
\begin{aligned}
V &= 64000 \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (4\cos^2(\pi+\pi\delta) - \operatorname{sen}^2(\pi+\pi\delta))(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma)^3 \tfrac{1}{2}\pi \, d\gamma \, d\delta \\
&\approx 32000\pi \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} w_i w_j (4\cos^2(\pi+\pi\delta_i) - \operatorname{sen}^2(\pi+\pi\delta_i))\tfrac{1}{2^3}(1+\gamma_j)^3 \\
&= 4000\pi \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} w_i w_j (4\cos^2(\pi+\pi\delta_i) - \operatorname{sen}^2(\pi+\pi\delta_i))(1+\gamma_j)^3 \\
&\approx 6\,417\,963.767\,\mathrm{m}^2.
\end{aligned}
$$