

# 連続関数から微分可能な関数を引く確率を考える

— ベールの範疇定理からのアプローチ —

ほの

2025 年 7 月 23 日

## 概要

本稿では、区間  $[0, 1]$  上の実数値連続関数がなすバナッハ空間  $C[0, 1]$  において、「ほとんどすべて」の関数が全点において微分不可能であることを論じます。直感的には、連続関数は多くの点で微分可能であるように思われがちですが、関数解析的な視点からは、微分可能性はむしろ例外的な性質であることが示されます。本稿では、ベールの範疇定理を主要な道具として用います。まず、少なくとも一点で（右側）微分係数が有限であるような関数の集合を定義し、その集合が  $C[0, 1]$  における第 1 類集合（meager set）であることを厳密に証明します。この証明は、この集合が可算個の全疎（nowhere dense）な閉集合の和集合として特徴づけられることを示すことで達成されます。この結果は、ワイエルシュトラス関数に代表されるような全点微分不可能な連続関数が、病理的な例外ではなく、位相的な意味で「典型的」かつ「一般的」な存在であることを数学的に裏付けるものです。

## 目次

1	緒言	3
1.1	問題提起：連続関数と微分可能性に関する直感との乖離 . . . . .	3
1.2	本稿の目的と構成 . . . . .	3
2	準備	4
2.1	関数空間 $C[0, 1]$ と一様ノルム . . . . .	4
2.2	バナッハ空間の定義 . . . . .	5
2.3	位相的な「大きさ」の概念 . . . . .	6
2.4	ベールの範疇定理 . . . . .	8
2.5	ベールの範疇定理の証明（概要）. . . . .	8
3	主定理とその証明	10
3.1	主定理の提示 . . . . .	10
3.2	証明の戦略 . . . . .	11
3.3	補助集合の導入 . . . . .	11
3.4	補助集合の性質 . . . . .	12
3.5	主定理の証明の完成 . . . . .	14
4	結論と考察	14
4.1	結果の解釈：「ほとんどすべて」の連続関数は全点微分不可能 . . . . .	14
4.2	ワイエルシュトラス関数の再評価 . . . . .	15
4.3	展望 . . . . .	16
5	$C^k$ 級関数のうち、 $C^{k+1}$ 級の関数を引き当てる確率は？	16
A	測度論を用いた場合どうなる？	18

# 1 緒言

## 1.1 問題提起：連続関数と微分可能性に関する直感との乖離

「連続な関数」と聞いて、私たちはどのようなものを思い浮かべるでしょうか。多くの場合、それは手でなめらかに描ける一本の曲線であり、そのグラフ上のほとんどの点では接線が引ける、すなわち微分可能であると直感的に考えます。高校や大学初年級で学ぶ多項式関数、三角関数、指数関数といった身近な連続関数は、確かにこの直感に合致します。

では、この直感を一步進めて、無数に存在するすべての連続関数を一つの巨大な袋に入れ、そこから無作為に一つを取り出すことを想像してみましょう。そのとき、取り出された関数が微分可能である「確率」は、一体どのくらいなのでしょう。私たちの経験則からすれば、その確率は非常に高いように思われます。

しかし、この直感は、関数解析学が明らかにした数学的な真実とは劇的に異なります。実は、連続関数の大海原においては、微分可能性という「なめらかさ」は極めてまれな性質なのです。本稿がこれから示すように、位相的な意味で「ほとんどすべて」の連続関数は、グラフ上のどの点においても接線が引けない、すなわち全点において微分不可能なのです。この驚くべき事実を説明することが、本稿の出発点となります。

## 1.2 本稿の目的と構成

本稿の主目的は、上記の直感との乖離を数学的に厳密な形で説明することです。具体的には、区間  $[0, 1]$  上の連続関数全体のなすバナッハ空間  $C[0, 1]$  を舞台とし、**ベールの範疇定理**という関数解析学の強力な道具を用いて、少なくとも一点で微分可能な関数の集合が位相的に「小さい」集合（第1類集合）であることを証明します。

本稿の構成は以下の通りです。

- **第2節「準備」**では、証明に不可欠な数学的道具、すなわち関数空間  $C[0, 1]$ 、バナッハ空間、そしてベールの範疇定理に関連する位相的な集合の「大きさ」の概念（全疎集合、第1類集合）を定義し、解説します。
- **第3節「主定理とその証明」**では、本稿の核心である「少なくとも一点で微分可能な関数の集合は第1類集合である」という定理を提示し、その証明を詳細に述べます。
- **第4節「結論と考察」**では、主定理がもたらす結論を再確認し、ワイエルシュトラス関数のような存在が病的ではなく典型的であることの意味について考察します。
- **付録**では、本題から発展する2つの興味深いトピックとして、測度論的なアプローチ（ウィーナー測度）や、より一般的な滑らかさの階層（ $C^k$  級関数）に関する問題を取り上げます。

## 2 準備

本節では、主定理の証明に必要となる基本的な概念と定理を準備します。これらの道具は関数解析学における基礎であり、私たちの議論の土台を形成します。

### 2.1 関数空間 $C[0, 1]$ と一様ノルム

まず、私たちの議論の舞台となる空間を定義します。

#### 定義 2.1: 関数空間 $C[0, 1]$

区間  $[0, 1]$  上で定義された実数値連続関数全体の集合を  $C[0, 1]$  と表記する。すなわち、

$$C[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$$

この集合を**連続関数空間**と呼ぶ。

$C[0, 1]$  は単なる関数の集まりではありません。2つの連続関数  $f, g \in C[0, 1]$  の和  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  や、実数  $c$  によるスカラー倍  $(cf)(x) = cf(x)$  もまた連続関数となるため、 $C[0, 1]$  はベクトル空間の構造を持っています。

次に、このベクトル空間における関数の「大きさ」や、2つの関数の間の「距離」を測るためのものさしとして、**ノルム**を導入します。

#### 定義 2.2: 一様ノルム

関数  $f \in C[0, 1]$  に対して、その**一様ノルム**（または**スーブノルム**）を次式で定義する。

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

#### 補足 2.1: 最大値の定理の適用

$f$  は閉区間  $[0, 1]$  上の連続関数であるため、最大値・最小値の定理により必ず最大値と最小値を取ります。したがって、上記の上限 (sup) は常に最大値 (max) として達成されます。

この一様ノルムは、関数のグラフが  $x$  軸から最も離れている点の距離を表します。幾何学的には、関数の「最大の振幅」と解釈できます。このノルムを用いると、2つの関数  $f, g \in C[0, 1]$  の間の距離  $d(f, g)$  を次のように自然に定義できます。

$$d(f, g) := \|f - g\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

これは、2つの関数のグラフを重ねたときの、垂直方向の差が最も大きくなる場所の距離に相当します。

### 重要ポイント

このノルムによる収束は、解析学で学ぶ**一様収束**と完全に同値です。すなわち、関数列  $\{f_n\}$  が  $f$  に収束する ( $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ ) ことと、 $f_n$  が  $f$  に一様収束することは同じ意味となります。この性質により、 $C[0, 1]$  は解析的な議論を行うための非常に強力な舞台となります。

## 2.2 バナッハ空間の定義

前節で、関数空間  $C[0, 1]$  に一様ノルムという「ものさし」を導入しました。この「ものさし」が持つ非常に重要で強力な性質が、**完備性 (completeness)** です。これを理解するために、まず**コーシー列**という概念を定義します。

### 定義 2.3: コーシー列 (Cauchy Sequence)

ノルム空間  $V$  内の点の列  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  が**コーシー列**であるとは、次が成り立つことをいう。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall m, n > N, \|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$$

平たく言えば、コーシー列とは「列が進むにつれて、項同士の間隔が限りなくゼロに近づいていく」ような列のことです。収束しそうな列は、必ずこの性質を持っています。

さて、ここで問題になるのが、「収束しそう」な列が、実際に収束する「先」がその空間の中に必ず存在するのか、という点です。例えば、有理数  $\mathbb{Q}$  の世界で  $\pi$  に収束する数列  $3, 3.1, 3.14, 3.141, \dots$  を考えると、これはコーシー列ですが、その極限である  $\pi$  は有理数ではないため、 $\mathbb{Q}$  の中には収束先が存在しません。つまり、有理数の世界には「穴」が開いています。

この「穴」がない、すなわち全てのコーシー列が必ずその空間内のどこかに収束する、という性質を**完備性**と呼びます。

### 定義 2.4: バナッハ空間 (Banach Space)

**完備なノルム空間のことをバナッハ空間と呼ぶ。**

バナッハ空間は、いわば「穴のない」空間であり、極限を扱う解析学にとって非常に都合の良い舞台です。そして、私たちが今扱っている関数空間は、まさにこの性質を持っています。

### 重要ポイント

空間  $C[0, 1]$  は、一様ノルム  $\|\cdot\|_\infty$  に関して**バナッハ空間**となります。これは解析学における基本的な定理であり、「連続関数の列が一様収束するならば、その極限関数もまた連続である」という事実に基づいています。この完備性こそが、次節以降で用いるベールの範疇定理の適用を可能にするのです。

## 2.3 位相的な「大きさ」の概念

私たちの最終目標は、「微分可能な関数はごく少数である」ことを示すことですが、無限に多くの関数が存在する  $C[0,1]$  の中で、集合の「大きさ」や「個数」を比較するにはどうすればよいでしょうか。有限集合ならば個数を数え、ユークリッド空間ならば長さや面積、体積といった「測度」を考えます。しかし、 $C[0,1]$  のような無限次元空間では、そのような都合の良い測度を定義することは困難です。

そこで、私たちは位相的な観点から集合の「大きさ」を評価する、ベールの範疇論のアプローチを採用します。これは、集合が空間内でどれだけ「スカスカ」か、あるいは「ぎっしり詰まっている」かに注目する方法です。

### 2.3.1 全疎集合 (Nowhere Dense Set)

まず、最も基本的な「小さい」集合の概念を定義します。

#### 定義 2.5: 全疎集合 (Nowhere Dense Set)

ノルム空間  $V$  の部分集合  $A$  が**全疎集合**（または**疎集合**）であるとは、 $A$  の閉包  $\bar{A}$  が内部を持たないことをいう。すなわち、 $\bar{A}$  はどんな開球（中心と半径がゼロでない球）も含まない。

これは、集合が空間の中で非常に「スカスカ」であることを意味します。例えば、実数直線  $\mathbb{R}$  における整数の集合  $\mathbb{Z}$  を考えてみましょう。 $\mathbb{Z}$  は閉集合であり ( $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ )、どんなに小さな開区間を取っても、その中に整数しか含まないようにすることはできません。つまり、どこを切り取っても「隙間」だらけです。全疎集合とは、このような「スカスカ」さを一般化した概念です。

### 2.3.2 第1類集合 (Meager Set) と第2類集合

次に、全疎集合を部品として、私たちが「小さい」と見なす集合を定義します。

#### 定義 2.6: 第1類集合・第2類集合

- **第1類集合 (Meager Set / Set of the First Category):** 可算個（自然数で番号付けできる個数）の全疎集合の和集合として表される集合。
- **第2類集合 (Set of the Second Category):** 第1類集合ではない集合。

全疎集合が「一本の糸」だとすれば、第1類集合は「ただか可算本の糸を束ねたもの」に例えられます。たとえ無限に集めても、可算個である限りはまだ「細い」束であり、空間全体を埋め尽くすには至らない、というイメージです。これらは位相的に「小さい」「無視できる」集合と見なされます。

一方で、第2類集合はこれらの「小さい」集合の集まりでは決して表現できない、いわば「大き

い」「太った」集合です。

#### 重要ポイント

この位相的な「大きさ」の言葉を使うと、本稿の目標は次のように言い換えられます。

**目標：** $C[0, 1]$ において、微分可能な関数の集合が**第1類集合**であることを示す。

これが証明できれば、微分可能な関数は位相的な意味で「小さい」集まりであると言えるのです。

### 2.3.3 全疎集合 (Nowhere Dense Set)

まず、最も基本的な「小さい」集合の概念を定義します。

#### 定義 2.7: 全疎集合 (Nowhere Dense Set)

ノルム空間  $V$  の部分集合  $A$  が**全疎集合**（または**疎集合**）であるとは、 $A$  の閉包  $\bar{A}$  が内部を持たないことをいう。すなわち、 $\bar{A}$  はどんな開球（中心と半径がゼロでない球）も含まない。

これは、集合が空間の中で非常に「スカスカ」であることを意味します。例えば、実数直線  $\mathbb{R}$  における整数の集合  $\mathbb{Z}$  を考えてみましょう。 $\mathbb{Z}$  は閉集合であり ( $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ )、どんなに小さな开区間を取っても、その中に整数しか含まないようにすることはできません。つまり、どこを切り取っても「隙間」だらけです。全疎集合とは、このような「スカスカ」さを一般化した概念です。

### 2.3.4 第1類集合 (Meager Set) と第2類集合

次に、全疎集合を部品として、私たちが「小さい」と見なす集合を定義します。

#### 定義 2.8: 第1類集合・第2類集合

- **第1類集合 (Meager Set / Set of the First Category):** 可算個（自然数で番号付けできる個数）の全疎集合の和集合として表される集合。
- **第2類集合 (Set of the Second Category):** 第1類集合ではない集合。

全疎集合が「一本の糸」だとすれば、第1類集合は「たかだか可算本の糸を束ねたもの」に例えられます。たとえ無限に集めても、可算個である限りはまだ「細い」束であり、空間全体を埋め尽くすには至らない、というイメージです。これらは位相的に「小さい」「無視できる」集合と見なされます。

一方で、第2類集合はこれらの「小さい」集合の集まりでは決して表現できない、いわば「大きい」「太った」集合です。

## 2.4 ベールの範疇定理

これまでに準備した「完備性」と「集合の大きさ」の概念が、ここで一つの強力な定理として結実します。

### 定理 2.1: ベールの範疇定理 (Baire Category Theorem)

完備な距離空間は、第 2 類集合である。

この定理が意味するところを、これまでの比喻を用いて解説します。「完備な空間」とは、有理数のような「穴」がなく、ぎっしりと詰まった空間のことでした。一方で、「第 1 類集合」とは、「スカスカ」な全疎集合を可算個集めてきた「細い糸の束」のようなものでした。

ベールの範疇定理は、この 2 つの概念を結びつけ、「ぎっしりと詰まった空間（完備空間）は、細い糸の束（第 1 類集合）だけで作ることはできない」と主張しているのです。空間はそれ自身、あまりにも「大きい」ため、スカスカな部分集合を可算個寄せ集めただけでは、その全体を覆い尽くすことはできない、というわけです。

#### 重要ポイント

この定理は、私たちの証明戦略の根幹をなします。

1. 私たちの舞台である  $C[0, 1]$  は、バナッハ空間なので**完備**です。
2. よって、ベールの範疇定理から  $C[0, 1]$  は**第 2 類集合**（「大きい」集合）であることが保証されます。
3. もし私たちが、次の第 3 節で「微分可能な関数の集合」が**第 1 類集合**（「小さい」集合）であることを証明できたならば…
4. …その補集合である「**全点で微分不可能な関数の集合**」は、決して第 1 類集合ではありません。つまり、それは「大きい」第 2 類集合でなければならないのです。

これが、「ほとんどすべての連続関数は全点微分不可能である」という結論に至るための論理的な道筋です。

## 2.5 ベールの範疇定理の証明（概要）

ベールの範疇定理は、なぜ「穴のない」空間が「スカスカな」集合の可算個の集まりにならないのかを巧みに示します。その証明は、まるで逃げ場所を次々と見つけていくかのような、巧妙な構成に基づいています。



## 定理 2.2: ベールの範疇定理

完備な距離空間は、第 2 類集合である。

### 証明のスケッチ

証明は背理法によります。

#### 1. 仮定

ある完備距離空間  $X$  が、第 1 類集合（つまり「小さい」集合）であると仮定します。これは、 $X$  が可算個の全疎（「スカスカ」な）集合  $A_1, A_2, A_3, \dots$  の和集合で完全に覆いつくされることを意味します。

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (\text{各 } A_n \text{ は全疎})$$

私たちの目標は、この状況設定から矛盾を導くことです。具体的には、 $X$  の中に、どの  $A_n$  にも属さない点  $x^*$  が一つでも存在することを示します。そんな点が見つければ、「 $X$  が完全に覆いつくされる」という最初の仮定が崩れるわけです。

#### 2. 逃げ場所の確保（入れ子構造の構築）

各  $A_n$  は全疎なので、空間のどこにも「ぎっしり詰まった」部分がありません。この性質を利用して、“避難場所”となる閉じたボール（球）を次々と見つけていきます。

- まず、 $A_1$  は全疎なので、 $A_1$  とは交わらない小さな閉ボール  $B_1$  を見つけることができます。
- 次に、今見つけた  $B_1$  の内部を考えます。 $A_2$  も全疎なので、 $B_1$  の中に、 $A_2$  とは交わらない、さらに小さな閉ボール  $B_2$  を見つけることができます。
- この操作を無限に繰り返します。 $n$  番目のステップでは、 $B_{n-1}$  の内部に、 $A_n$  とは交わらない、さらに小さな閉ボール  $B_n$  を構築します。

こうして、どんどん小さくなる閉ボールの入れ子構造  $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$  が出来上がります。それぞれのボール  $B_n$  は、 $A_n$  という「障害物」を避けるように選ばれています。

#### 3. 完備性の力（収束点の存在）

このボール列の中心点の列  $\{x_n\}$  を考えると、ボールの半径がどんどんゼロに近づくため、この列はコーシー列になります。ここで、空間  $X$  が完備であるという最初の設定が決定的な役割を果たします。完備なので、このコーシー列は必ず  $X$  の中のある一点  $x^*$  に収束します。

#### 4. 矛盾の発見

この極限点  $x^*$  は、入れ子になった全ての閉ボール  $B_n$  の中に存在します。そして、各  $B_n$  は  $A_n$  と交わらないように作られていました。したがって、点  $x^*$  は、どの  $A_n$  の中にも存在しない点ということになります。

これは、「 $X$  は  $\bigcup A_n$  によって完全に覆われる」という最初の仮定と矛盾します。よって、

仮定が誤りであり、完備距離空間  $X$  は第 1 類集合ではありません。すなわち、 $X$  は第 2 類集合です。

### 3 主定理とその証明

これまでの節で、私たちは議論の舞台となるバナッハ空間  $C[0, 1]$  と、そこで集合の「大きさ」を測るための位相的な概念、そして空間の「大きさを」保証するベールの範疇定理を準備しました。これらの道具を手には、本稿の核心である主定理の証明に臨みます。

#### 3.1 主定理の提示

私たちが証明する主定理は、以下の通りです。

##### 定理 3.1: 主定理

関数空間  $C[0, 1]$  において、少なくとも一点で（有限な）微分係数を持つような関数全体の集合は、**第 1 類集合**である。

##### 補足 3.1: 微分可能性の扱いについて

証明を厳密かつ簡潔にするため、実際には「少なくとも一点で有限な**右側微分係数**を持つ」関数の集合を考えます。この集合が第 1 類集合であることが示されれば、同様に左側微分係数を持つ関数の集合も第 1 類集合であり、それらの和集合である「微分可能な」関数の集合もまた第 1 類集合となります。

この定理が持つ意味は、極めて衝撃的です。

##### 重要ポイント

主定理の帰結：

ベールの範疇定理によれば、空間  $C[0, 1]$  それ自体は「大きい」第 2 類集合でした。一方で、主定理は「微分可能な点を持つ」という、なめらかな性質を持つ関数の集まりが、実は「小さい」第 1 類集合に過ぎないことを主張しています。

これは、その補集合、すなわち**全ての点において微分不可能な関数の集合**が、「大きい」第 2 類集合であることを意味します。

私たちの直感では「病的」な例外に思える、ワイエルシュトラス関数のような至る所でギザギザな関数こそが、実は位相的な意味での「ありふれた」「典型的な」連続関数の姿だったのです。微分可能な美しい曲線の方が、むしろ大海の一滴のような例外的な存在である、という驚くべき結論が導かれます。

### 3.2 証明の戦略

主定理を証明するには、どうすればよいでしょうか。私たちの目標は、「少なくとも一点で微分可能な関数」の集合（以下、 $\mathcal{D}$  と書く）が、**第 1 類集合**であることを示すことです。

第 1 類集合の定義は「可算個の全疎集合の和集合」でした。この定義が、そのまま私たちの証明の設計図となります。

#### 証明の戦略

証明は、以下の 3 つのステップから構成されます。

**ステップ 1：集合の分解（分割統治）**「少なくとも一点で微分可能」という性質は、そのままでは非常に扱いにくいです。そこで、この性質をより具体的な条件に分解し、集合  $\mathcal{D}$  を、より単純な部分集合の**可算個**の和集合で覆い尽くします。具体的には、自然数  $n, k$  を用いて「ある点から右側  $1/k$  の区間で、傾きが  $n$  以下に抑えられる」という条件を持つ関数の集合  $F_{n,k}$  を定義し、

$$\mathcal{D} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}$$

という包含関係を示します。

**ステップ 2：部品の解析（各個撃破）**次に、ステップ 1 で定義した各部品  $F_{n,k}$  が、それぞれ**全疎集合**であることを証明します。これは、以下の 2 つの補題を示すことで達成されます。

- **補題 A**：各  $F_{n,k}$  は**閉集合**である。
- **補題 B**：各  $F_{n,k}$  は**内部が空**である。

閉集合かつ内部が空であれば、定義により全疎集合となります。

**ステップ 3：結論**ステップ 1 と 2 が証明できれば、集合  $\mathcal{D}$  は「可算個の全疎集合の和集合」の部分集合ということになります。第 1 類集合の部分集合はまた第 1 類集合なので、これをもって  $\mathcal{D}$  が第 1 類集合であることが証明されます。

以降の節で、この戦略に沿って各ステップを厳密に実行していきます。

### 3.3 補助集合の導入

証明戦略のステップ 1 に従い、まずは「少なくとも一点で微分可能」という性質を、扱いやすい部品に分解します。そのために、以下の補助的な集合を導入します。

### 定義 3.1: 補助集合 $F_{n,k}$

正の整数  $n, k \in \mathbb{N}$  の各ペアに対して、 $\mathcal{C}[0, 1]$  の部分集合  $F_{n,k}$  を次のように定義する。

$$F_{n,k} := \left\{ f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right] \text{ s.t. } \forall y \in \left(x, x + \frac{1}{k}\right], |f(y) - f(x)| \leq n|y - x| \right\}$$

この定義を直感的に解釈してみましょう。条件  $|f(y) - f(x)| \leq n|y - x|$  は、点  $(x, f(x))$  から出発する関数のグラフが、傾き  $\pm n$  の 2 本の直線が作る「円錐」の内部に収まっていることを意味します。

したがって、 $F_{n,k}$  は、「ある点  $x$  が存在し、そこから右に少なくとも  $1/k$  という区間の間、グラフが傾き  $n$  の円錐内に収まる」という、ある種の「おとなしい」振る舞いをする関数の集合です。整数  $n$  は傾きの最大値を、整数  $k$  はその振る舞いが続く最短の長さをコントロールしています。

### 重要ポイント

この補助集合を導入した最大の理由は、これらの集合の可算個の和集合が、微分可能な点を持つ全ての関数を覆い尽くすからです。

$\mathcal{D}^+$  を、少なくとも一点で有限な右側微分係数を持つ関数の集合とします。このとき、次の包含関係が成り立ちます。

$$\mathcal{D}^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}$$

(なぜなら) もし関数  $f$  が点  $x_0$  で右側微分係数  $L$  を持つならば、極限の定義から、どんな整数  $n > |L|$  に対しても、ある  $\delta > 0$  が存在して、区間  $(x_0, x_0 + \delta)$  では平均変化率が  $n$  で抑えられます。そこで、 $1/k < \delta$  となるように十分に大きな整数  $k$  を選べば、この関数  $f$  は定義により  $F_{n,k}$  の要素となります。

これにより、証明戦略のステップ 1 が達成されました。私たちの残りの仕事は、部品である各  $F_{n,k}$  が全疎集合であることを示すことです。

## 3.4 補助集合の性質

ここでは、証明戦略のステップ 2 を実行します。すなわち、前節で導入した補助集合  $F_{n,k}$  が、私たちの空間  $\mathcal{C}[0, 1]$  の中で「小さい」存在、つまり**全疎集合**であることを示します。そのためには、 $F_{n,k}$  が「閉集合」であり、かつ「内部が空」であることを証明すれば十分です。

### 補題 3.1: 閉集合性

各  $F_{n,k}$  は、 $\mathcal{C}[0, 1]$  における**閉集合**である。

### 証明スケッチ

閉集合であることを示すには、「 $F_{n,k}$  の元の列  $f_j$  が関数  $f$  に一様収束するならば、その極限  $f$  もまた  $F_{n,k}$  に属する」ことを言えばよいです。

1. 各  $f_j \in F_{n,k}$  に対して、定義を満たす点  $x_j$  が存在します。この点の列  $\{x_j\}$  は有界閉区間  $[0, 1 - 1/k]$  内にあるため、ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理により、ある点  $x_0$  に収束する部分列  $\{x_{j_m}\}$  を取り出すことができます。
2.  $f_{j_m}$  が  $f$  に一様収束し、 $x_{j_m}$  が  $x_0$  に収束することから、各  $f_{j_m}$  が満たしていた不等式  $|f_{j_m}(y) - f_{j_m}(x_{j_m})| \leq n|y - x_{j_m}|$  において極限を取ることができます。
3. 極限操作の結果、極限関数  $f$  と極限点  $x_0$  が、不等式  $|f(y) - f(x_0)| \leq n|y - x_0|$  を満たすことがわかります。これは、まさに  $f$  が  $F_{n,k}$  に属することを意味します。

したがって、 $F_{n,k}$  は閉集合です。

### 補題 3.2: 全疎性

各  $F_{n,k}$  は、内部が空である。

### 証明スケッチ

内部が空であることを示すには、「どんな関数  $g$  を持ってきても、それにいくらでも近い（距離  $\epsilon$  未満の）場所に、 $F_{n,k}$  には属さない関数  $h$  が必ず存在する」ことを言えばよいです。

1. 任意の関数  $g \in \mathcal{C}[0, 1]$  と、任意の小さな正数  $\epsilon > 0$  を考えます。
2. ここで、非常に振幅が小さく（ $\epsilon$  未満）、かつ非常に傾きが急（絶対値が常に  $n$  より大きい）な、ギザギザの「のこぎり波関数」 $s(x)$  を作ります。これは、十分高い周波数を持つ三角波のような関数を想像すると分かりやすいです。
3. 目的の関数  $h$  を、 $h(x) = g(x) + s(x)$  として構成します。 $s(x)$  の振幅は  $\epsilon$  より小さいので、 $h$  は  $g$  のすぐ近くにいます（ $\|h - g\|_\infty < \epsilon$ ）。
4. しかし、 $g$  がどんなにおとなしい関数であっても、傾きが非常に急な  $s(x)$  を加えたことにより、 $h$  は区間  $[0, 1]$  の全ての点において、局所的に非常に大きな傾きを持つようになります。
5. その結果、関数  $h$  は、どの点  $x$  においても  $F_{n,k}$  の定義にある不等式  $|h(y) - h(x)| \leq n|y - x|$  を満たすことができなくなります。よって、 $h \notin F_{n,k}$  です。

これは、 $F_{n,k}$  の周りはいつでも  $F_{n,k}$  に属さない関数で満ちていることを意味し、したがって  $F_{n,k}$  は内部を持ちません。

以上の2つの補題から、 $F_{n,k}$  は閉集合であり、かつ内部が空であるため、定義により全疎集合であることが結論付けられました。これで、証明戦略のステップ2が完了です。

### 3.5 主定理の証明の完成

これまでの議論で、主定理を証明するための全ての部品が揃いました。ここでは、それらを組み立てて、証明を完成させます。

#### 証明完了

議論を振り返りましょう。

1. **(集合の分解)** 「少なくとも一点で右側微分可能な関数」の集合  $\mathcal{D}^+$  は、補助集合  $F_{n,k}$  の可算個の和集合によって、以下のように覆われるのです。

$$\mathcal{D}^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}$$

2. **(部品の解析)** そして、各部品である集合  $F_{n,k}$  は、それぞれが**全疎集合**であることを証明しました。
3. **(結論)** 第1類集合の定義によれば、「可算個の全疎集合の和集合」は第1類集合です。したがって、集合  $\bigcup_{n,k} F_{n,k}$  は**第1類集合**です。
4. 第1類集合の部分集合もまた第1類集合である、という性質から、 $\mathcal{D}^+$  もまた**第1類集合**となります。

同様の議論は「左側微分可能」な関数の集合にも適用でき、それもまた第1類集合です。そして、2つの第1類集合の和集合もまた第1類集合であるため、最終的に「少なくとも一点で（左右どちらかで）微分可能な関数」全体の集合は、第1類集合であると結論付けられます。

これにより、主定理は完全に証明されました。 ■

## 4 結論と考察

主定理の証明が完了し、私たちは「少なくとも一点で微分可能な関数」の集合が、位相的な意味で「小さい」第1類集合であることを確認しました。この最終節では、この数学的な事実が持つ深い意味と、それが私たちの関数に対する見方にどのような影響を与えるのかを考察します。

### 4.1 結果の解釈：「ほとんどすべて」の連続関数は全点微分不可能

本稿の結論を一言で述べるならば、それは「**ほとんどすべての連続関数は、全ての点において微分不可能である**」となります。

ここで言う「ほとんどすべて」という言葉は、日常的な感覚や確率論の測度とは異なる、バール

の範疇論に基づいた位相的な表現である点に注意が必要です。主定理の結論は、より正確には以下のように述べられます。

#### 重要ポイント

「全点で微分不可能な関数」の集合は、 $C[0, 1]$  において**残差的 (residual)** である。  
残差的集合とは、第 1 類集合の補集合のことであり、第 2 類集合（「大きい」集合）であるだけでなく、空間内で**稠密 (dense)** でもあるという、非常に強い性質を持ちます。

この「稠密性」が意味するところは、極めて強力です。これは、あなたが想像できる**どんなに滑らかな連続関数**（例えば、 $y = x^2$  や  $y = \sin x$  のような無限回微分可能な関数）を一つ思い浮かべたとして、その関数にいくらでも近い場所に、**全点微分不可能なギザギザの関数が必ず存在する**、ということを意味します。

まるで、有理数が実数の中に稠密に存在するように（どんな 2 つの実数の間にも有理数が存在する）、なめらかな関数は、全点微分不可能な関数の「海」の中に稠密に取り囲まれているのです。どんなに小さな「泡」でなめらかな関数を囲おうとしても、その泡の中には必ず微分不可能な関数が含まれてしまいます。

この事実は、私たちの直感を根底から覆します。初等的な解析学で慣れ親しんだ「行儀の良い」微分可能な関数たちは、実は連続関数の世界全体から見れば、大海の一滴にも満たない例外的な存在だったのです。関数解析学の視点に立てば、むしろ、至る所で微分できないカオス的な関数こそが、ごくありふれた「標準的」な連続関数の姿である、という新しい世界観が立ち現れてくるのです。

## 4.2 ワイエルシュトラス関数の再評価

19 世紀、カール・ワイエルシュトラスは、連続でありながら至る所で微分不可能な関数の具体的な式を初めて提示しました。コサイン関数を組み合わせたその関数は、当時の数学者たちに大きな衝撃を与えました。連続ならばほとんどの点で微分可能であるという、当時の幾何学的な直感に真っ向から反していたからです。アンリ・ポアンカレは、このような関数を「病理的」あるいは「怪物」と呼び、数学の自然な探求対象から逸脱したものと見なしました。



#### 補足 4.1: 「怪物」から「典型」へ

ワイエルシュトラス関数は、当時の直感からすれば確かに奇怪な怪物に見えたことでしょう。しかし、本稿で展開したベールの範疇論の視点から見れば、その評価は完全に逆転します。

ワイエルシュトラス関数は、決して病理的な例外などではありませんでした。むしろ、それは「全点で微分不可能な関数」という、 $C[0,1]$  における圧倒的多数派（残差的集合）に属する、ごくありふれた一員だったのです。

怪物だったのは関数の方ではなく、多項式関数のような非常に特殊な例によって形作られていた、私たち自身の不完全な直感の方だった、と関数解析学は教えてくれます。

### 4.3 展望

本稿で用いたベールの範疇定理は、極めて一般的で強力なツールであり、その応用範囲は本稿のテーマに留まりません。ある性質を持つ対象が存在することを示す「存在証明」や、ある性質が「一般的」であることを示すために、関数解析学や関連分野の至る所で活用されています。

例えば、類似の議論を用いることで、以下のような事実も示すことができます。

- 「典型的な」連続関数のフーリエ級数は、多くの点で収束しない。
- 力学系やカオス理論において、「カオス的」な振る舞いを示す状態が、決して特殊なものではなく、むしろ一般的な現象である。

また、バナッハ空間における基本的な定理である「一様有界性原理」や「開写像定理」の証明も、ベールの範疇定理に深く依存しています。

このように、一見すると抽象的に思える位相的な道具立てが、具体的でしばしば直観に反するような数学的事実を、次々と明らかにしてくれます。私たちの直感が及ばない無限の構造を、厳密な論理の力で解き明かすことこそ、現代数学の醍醐味と言えるでしょう。

## 5 $C^k$ 級関数のうち、 $C^{k+1}$ 級の関数を引き当てる確率は？

本稿では、連続関数 ( $C^0$  級) の中から微分可能な関数 ( $C^1$  級) を見つけることが、いかに絶望的であるかを見てきました。では、この話は一度微分できれば終わりなののでしょうか。つまり、より滑らかな関数の世界ではどうなっているのでしょうか。

この問題を考えるため、まず舞台を整えます。



### 定義 5.1: $C^k$ 級関数空間

正の整数  $k$  に対して、 $C^k[0, 1]$  を、区間  $[0, 1]$  上で  $k$  回連続的微分可能な関数全体の集合とする。この空間には、次のノルムを導入することで、バナッハ空間と見なすことができる。

$$\|f\|_{C^k} := \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \cdots + \|f^{(k)}\|_{\infty}$$

ここで、 $f^{(i)}$  は  $f$  の  $i$  階導関数を表す。

さて、私たちの問いはこうです。「バナッハ空間  $C^k[0, 1]$  の中からランダムに元  $f$  を取り出したとき、それが  $C^{k+1}[0, 1]$  に属する、つまり  $k+1$  回微分可能である確率はいくつか？」

結論から言うと、本稿で展開した議論が全く同じように適用でき、その「確率」はまたしても 0 となります。

### 重要ポイント

滑らかさの階層における結論

任意の  $k \geq 0$  に対して、空間  $C^k[0, 1]$  において、その部分集合である  $C^{k+1}[0, 1]$  は**第 1 類集合** (Meager Set) である。

(なぜなら) ある関数  $f$  が  $C^k$  級であるとき、それが  $C^{k+1}$  級であるための条件は、その  $k$  階導関数  $f^{(k)}$  が (ただの連続関数ではなく) 微分可能であることです。

ここで、写像  $T: C^k[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  を  $T(f) = f^{(k)}$  と定義します。すると私たちの問題は、「連続関数の空間  $C[0, 1]$  の中で、微分可能な関数の集合はどれくらいあるか？」という、まさに本稿の主定理が扱った問題そのものに帰着します。

主定理が示したように、 $C[0, 1]$  の中で微分可能な関数の集合は第 1 類集合でした。したがって、その「逆像」である  $C^{k+1}[0, 1]$  もまた、 $C^k[0, 1]$  の中で第 1 類集合となるのです。

この事実は、数学における「滑らかさ」が、極めて希少価値の高い性質の階層 (ヒエラルキー) を成していることを示唆しています。

- $C^1$  級は、 $C^0$  級 (連続) の関数の中でごく僅か。
- $C^2$  級は、 $C^1$  級の関数の中でごく僅か。
- $C^3$  級は、 $C^2$  級の関数の中でごく僅か。
- ...
- 無限回微分可能な  $C^\infty$  級関数ですら、各  $C^k$  級の世界では極めて例外的な存在なのです。

私たちが「なめらか」と感じる性質は、より広い視野に立てば、砂漠の中のオアシスを見つけるような、奇跡的なバランスの上に成り立っていると言えるのかもしれない。

## A 測度論を用いた場合どうなる？

本稿では、ベールの範疇論という「位相的」なアプローチで、微分可能な関数が「小さい」集合であることを論じてきました。しかし、読者の中には、より直接的に「確率」を計算する方法はないのか、と疑問に思う方もいるかもしれません。つまり、測度論的なアプローチです。

### 補足 A.1: 無限次元空間とルベグ測度

結論から言うと、 $C[0, 1]$  のような無限次元のバナッハ空間上には、私たちがユークリッド空間で慣れ親しんでいるルベグ測度の自然なアナロジーとなるような、「意味のある」測度を構成することはできません。

具体的には、空間内の平行移動で不変であり、かつ空でない有界な開集合の測度が正の有限値になる、といった都合の良い性質を全て満たす測度は存在しないことが知られています。これが、私たちが範疇論という別の道具を使わなければならなかった理由の一つです。

しかし、これは「いかなる測度も存在しない」という意味ではありません。平行移動不変性のような条件を諦めれば、別の非常に興味深い測度を考えることができます。その代表例がウィーナー測度 (Wiener measure) です。

ウィーナー測度は、物理学におけるブラウン運動（水面に浮いた花粉などの微粒子が示す、不規則なランダムな動き）を数学的に記述する確率測度です。この測度を用いて  $C[0, 1]$  からランダムに一つの関数を選ぶことは、ランダムなブラウン運動の軌跡を一つ選ぶことに対応します。

### 重要ポイント

ウィーナー測度による結論

$C[0, 1]$  上のウィーナー測度を考えた場合、「少なくとも一点で微分可能な関数の集合」の測度は 0 となります。

言い換えれば、ブラウン運動の軌跡を一つ選んだとき、その軌跡がどこか一点でもなめらかな接線を持つ確率は 0 です。確率 1 で、その軌跡は至る所で微分不可能なギザギザの関数となります。

驚くべきことに、全く異なるアプローチである「位相論（ベールの範疇論）」と「確率論（ウィーナー測度）」が、奇しくも同じ結論を示唆しているのです。どちらの視点に立っても、「典型的な連続関数は、全点において微分不可能である」という結論が、揺るぎない事実として浮かび上がってきます。