

リー群と表現論

ほの

2025 年 7 月 21 日

概要

本書は、物理学における「対称性」の理解を深めるためにリー群の表現論を基礎から学び、量子力学を中心とした具体的応用例を丁寧に解説する参考書です。まず、コンパクトリー群の半単純性や構造定数、Killing 形式（カルタン計量）といった核心的概念を導入し、次に Cartan 部分代数や根系、Dynkin 図を用いた Lie 代数の分類と解析手法を学びます。さらに、最高ウェイト表現や Young 図による $SU(n)$ 表現の構成、テンソル積の分解といった表現論の基本技法を習得します。第 5 章以降では、 $SU(2) \cdot SO(3)$ の角運動量や球面調和関数、 $SU(3)$ フレーバー対称性、多体量子系への応用例を通して、数学的理論と物理的直観を統合的に身につけます。付録には微分幾何の基礎や主要 Lie 代数の構造定数一覧を収録しています。

物理分野	リー群	リー代数	主な物理現象
量子力学	$SU(2)$	$\mathfrak{su}(2)$	スピン量子化、Clebsch – Gordan 分解、磁気共鳴選択則
	$SO(3)$	$\mathfrak{so}(3)$	軌道角運動量の回転表現、球面調和関数の生成
物性物理	$U(1)$	$\mathfrak{u}(1)$	超伝導の $U(1)$ 自発的対称性破れ、マ イスナー効果
	$SU(2)$	$\mathfrak{su}(2)$	磁性におけるスピン回転対称性、スピ ン波
素粒子論	$SO(3,1)$	$\mathfrak{so}(3,1)$	ローレンツ変換、相対論的場の群論的 基盤
	$SL(2,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	スピノル表現、Dirac 方程式
	$SU(3)$	$\mathfrak{su}(3)$	色対称性、クォークの結合・色閉じ 込め
	$SU(2)$	$\mathfrak{su}(2)$	電弱相互作用の $SU(2)$ 対称性、ヒッ グス機構
	$U(1)$	$\mathfrak{u}(1)$	電磁ゲージ対称性、電弱統一の一部

目次

1	序 論	3
1.1	なぜリー群の表現論を学ぶのか？	3
1.2	物理における対称性と表現論	4
1.3	本書の構成と読み進め方	4
2	コンパクト Lie 群の基礎	6
2.1	Lie 群、Lie 代数の定義	6
2.2	Lie 代数と構造定数	7
2.3	Lie 代数の生成元・基底	9
2.4	コンパクト Lie 群と半単純性	10
2.5	Killing 形式（カルタン計量）	13
2.6	adjoint 表現	15
3	Cartan 理論の柱	21
3.1	Cartan 部分代数とその標準形	22
3.2	根系（ルートベクトル・ルート空間分解）	23
3.3	Cartan-Weyl 基底と正規化	25
3.4	Dynkin 図による分類	27
4	表現論の基本技法	31
4.1	表現の定義と基本例	32
4.2	最高ウェイト表現の構成	34
4.3	Young 図と $\mathfrak{su}(n)$ 表現の分類	36
4.4	テンソル積と Clebsch – Gordan 係数	38
4.5	Weyl の特性公式	40
5	量子力学への応用例	43
5.1	$SU(2)/SO(3)$ と角運動量	43
5.2	球面調和関数と回転群表現	44
5.3	$SU(3)$ フレーバー対称性と八重項	46
5.4	多体量子系における対称性分類	48
5.5	超対称代数・量子群へのイントロダクション	50
	付録	52

1 序 論

物理学の歴史は、自然現象の背後にある「対称性」を探求する旅路そのものであると言っても過言ではありません。ニュートンの運動法則から現代の素粒子標準模型に至るまで、物理学の根幹をなす理論は、例外なく美しい対称性の構造を持っています。この**対称性を記述するための最も強力な数学的言語**、それが本書のテーマである**リー群とその表現論**です。

この序論では、なぜ私たちがこの抽象的にも思える数学を学ぶ必要があるのか、それが物理学の諸分野でどのように使われているのか、そして本書がどのような構成になっているのかを概観します。

1.1 なぜリー群の表現論を学ぶのか？

物理法則が何らかの対称性を持つとき、それは単に「美しい」というだけではありません。20世紀初頭、エミー・ネーターは、連続的な対称性が必ずそれに対応する**保存則**を導くことを明らかにしました（**ネーターの定理**）。例えば、

- 空間並進の対称性 → 運動量保存則
- 時間並進の対称性 → エネルギー保存則
- 空間回転の対称性 → 角運動量保存則

といった対応は、物理学の根幹をなすものです。

これらの例に現れる回転や並進は、discrete（離散的）な操作ではなく、いくらでも「細かく」行うことができる **continuous（連続的）な対称性**です。このような連続的な対称性変換の集まりがなす数学的構造を**リー群 (Lie group)** と呼びます。

定義（リー群の直観的理解）

リー群とは、群の代数的構造と、微分可能な多様体の幾何学的構造を両立させる数学の対象である。簡単に言えば、「滑らかな」**変換操作の集まり**と考えることができる。

しかし、リー群という抽象的な対象をそのまま物理に応用するのは困難です。そこで**表現論 (representation theory)** の出番となります。表現論とは、リー群のような抽象的な群の元を、物理学者が慣れ親しんでいる**ベクトル空間上の線形変換（行列）**として具体的に「表現」する手法です。

量子力学では、系の状態はヒルベルト空間というベクトル空間のベクトル（状態ベクトル）で記述されます。対称性操作は、この状態ベクトルに作用する演算子（ユニタリー演算子）として現れます。したがって、リー群の表現論を学ぶことで、私たちは以下の問いに答えることができるようになります。

- ある対称性を持つ系において、どのような状態が存在しうるのか？（→ **量子数の分類**）
- なぜ、エネルギー準位はしばしば縮退しているのか？（→ **縮退度の決定**）
- ある状態から別の状態への遷移は、どのような条件下で許されるのか？（→ **選択則の導出**）

つまり、リー群の表現論は、物理系の対称性という抽象的な原理から、観測可能で具体的な物理的帰結を引き出すための、不可欠な架け橋なのです。

1.2 物理における対称性と表現論

リー群と表現論は、現代物理学のあらゆる分野でその力を発揮しています。本書の冒頭で掲げた表はほんの一例ですが、ここでは特に重要な応用例をいくつか見てみましょう。

量子力学における最も基本的な例は、**回転群 $SO(3)$** とその表現論です。空間の回転対称性は、原子における電子の**軌道角運動量**の振る舞いを決定づけます。その表現論から、角運動量量子数 l や磁気量子数 m_l が自然に導入され、球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ がその表現基底として現れます。さらに、電子が持つ内部自由度である**スピン**は、 $SO(3)$ と局所的に同じ構造を持つ **$SU(2)$** というリー群で記述されます。 $SU(2)$ の表現を調べることで初めて、半整数のスピン ($s = 1/2$) が数学的に許容される理由が明らかになります。

素粒子物理学は、まさにリー群の応用物理学と呼べる分野です。素粒子の標準模型は、ゲージ対称性と呼ばれる局所的な対称性に基づいています。

- **$U(1)$ 対称性** → 電磁気学 (量子電磁力学, QED)
- **$SU(2)$ 対称性** → 弱い相互作用
- **$SU(3)$ 対称性** → 強い相互作用 (量子色力学, QCD)

これらのリー群の表現によって、クォークやレプトンといった素粒子がどのように分類され、力の粒子 (ゲージボソン) とどのように相互作用するかが完全に決定されます。例えば、クォークが持つ「カラー (色)」という自由度は $SU(3)$ の**基本表現 (3)** に、グルーオンは**随伴表現 (8)** に対応します。

物性物理学においても、対称性の考え方は極めて重要です。超伝導は $U(1)$ ゲージ対称性の**自発的破れ**として理解されますし、磁性体における無数のスピンの揃って向きを変える現象 (スピン波) は $SU(2)$ 回転対称性を用いて記述されます。

このように、リー群と表現論は、ミクロな素粒子の世界からマクロな物質の性質まで、物理学の様々な階層を貫く**統一的な視点**を提供してくれるのです。

1.3 本書の構成と読み進め方

本書は、物理学を学ぶ読者が、リー群と表現論の数学的な基礎を学び、それを具体的な物理問題に応用する力を身につけることを目的としています。そのため、数学的な厳密さに終始するのではなく、各概念の物理的なモチベーションや具体例を豊富に交えながら解説を進めます。

本書の構成は大きく分けて二部構成になっています。

- **第2章～第4章：数学的基礎の構築**

第2章では、リー群と、その無限小変換を記述する**リー代数 (Lie algebra)** の基本的な定義から始めます。リー代数は、非線形なリー群の問題を線形代数の問題に帰着させるための

極めて強力な道具です。続く第 3 章では、**Cartan 理論**、**ルート系**、**Dynkin 図**といった、半単純リー代数を分類・解析するための美しい理論体系を学びます。そして第 4 章で、**最高ウェイト表現**や **Young 図**といった、表現論の具体的な構成法と計算技法を習得します。

- **第 5 章：物理学への応用**

前半で身につけた数学的道具を、いよいよ物理学の舞台で使っていきます。第 5 章では、量子力学における**角運動量理論** ($SU(2)/SO(3)$) や、ハドロンを分類した $SU(3)$ **フレーバー対称性**などを扱い、数学的理論がどのように物理的直観と結びつくかを体感します。

物理的な応用を早く見たい読者は、第 2 章でリー群とリー代数の基本的な関係を理解した後、先に第 5 章の $SU(2)$ の応用例に目を通し、必要に応じて第 3 章や第 4 章の数学的詳細に戻るという読み方も可能です。

本書を通して、読者の皆さんが「対称性」というレンズを通して物理世界をより深く、より美しく捉えられるようになることを願っています。

2 コンパクト Lie 群の基礎

序論では、物理学の根幹にある「対称性」を記述する言語としてリー群と表現論の重要性を概観しました。私たちが扱う回転や時空の並進といった対称性は、滑らかに変化する連続的な変換です。本章では、この「滑らかな連続変換の集まり」という直観的なイメージを、数学的に厳密かつ物理的に扱いやすい対象へと落とし込んでいきます。

そのための最も強力なアイデアが、「無限小」の変換に着目することです。どんなに大きな回転も、微小な回転を無数に繰り返すことで実現できるように、リー群の元（有限の変換）は、その単位元近傍の「種」となるような無限小の変換から生成されると考えられます。この「無限小変換」の集まりこそがリー代数であり、リー群という複雑で非線形な対象を、線形代数の言葉で扱えるベクトル空間へと見事に単純化してくれます。

本章ではまず、リー群とリー代数の形式的な定義を学び、その関係性を明らかにします。続いて、リー代数の構造を特徴づける構造定数や、物理で「生成子」と呼ばれる基底、そしてリー群の性質を調べるための重要な道具である Killing 形式といった、基本的な概念を一つずつ丁寧に導入していきます。ここで学ぶ道具は、後の章で量子力学や素粒子論の具体的な問題に立ち向かうための、必要不可欠な武器となるでしょう。

2.1 Lie 群、Lie 代数の定義

それでは、リー群とリー代数の定義から始めましょう。数学的な厳密さも重要ですが、ここでは物理学徒としてその「心」を掴むことを第一の目標とします。

定義 2.1: リー群

リー群 (Lie group) G とは、以下の二つの構造を併せ持つ集合です。

1. **群 (group) の構造を持つ。** すなわち、元と元の間に積が定義され、結合法則、単位元の存在、逆元の存在という4つの公理を満たします。
2. **微分可能多様体 (differentiable manifold) の構造を持つ。** 直観的には、局所的に見ればユークリッド空間 \mathbb{R}^n と同じように座標を導入でき、微分積分が可能な「滑らかな」空間です。

さらに、この二つの構造は両立しなければなりません。つまり、群の積 $G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ と、逆元を取る操作 $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ が、どちらも滑らかな写像（無限回微分可能な写像）であることが要求されます。

この定義は抽象的に聞こえるかもしれませんが、要するに「パラメータで連続的に指定でき、微分可能な変換操作の集まり」と考えてよいでしょう。次に、リー群の本質を捉えるリー代数を定義します。リー群が「有限の変換」全体を表すのに対し、リー代数はその「無限小変換」を記述します。

定義 2.2: リー代数

リー群 G の単位元 e における接空間 $T_e G$ を、そのリー群に対応するリー代数 (Lie algebra) と呼び、 \mathfrak{g} のようにドイツ文字の小文字で表します。接空間の元 (接ベクトル) は、単位元を通る曲線 $g(t) \in G$ (ただし $g(0) = e$) の $t = 0$ での微分として与えられます。

$$X = \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} \in \mathfrak{g}$$

このベクトル空間 \mathfrak{g} には、リー括弧積 (交換子) $[X, Y] = XY - YX$ が定義され、以下の性質を満たします。

1. 双線形性: $[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$
2. 反対称性: $[X, Y] = -[Y, X]$
3. ヤコビ恒等式: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

物理学では、リー代数の元 X は生成子 (generator) と呼ばれることが多いです。リー群とリー代数は、指数写像 (exponential map) $g = \exp(X)$ によって結びつけられており、これによりリー群の解析をリー代数という線形空間上の問題として扱うことが可能になるのです。

例: $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{su}(2)$ の代数

物理学で最も重要なリー代数である $\mathfrak{so}(3)$ (3次元回転) と $\mathfrak{su}(2)$ (スピン) は、量子力学でお馴染みの角運動量演算子の交換関係でその構造が定義されます。

- $\mathfrak{so}(3)$ の生成子 L_i ($i = x, y, z$) は、交換関係 $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$ を満たします。
- $\mathfrak{su}(2)$ の生成子 $J_i = \sigma_i/2$ ($i = x, y, z$) は、交換関係 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ を満たします。

発展: $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{su}(2)$ の関係

リー代数として $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{su}(2)$ は (複素化すれば) 同じ構造を持っています。しかし、対応するリー群 $SO(3)$ と $SU(2)$ は大域的に異なる (専門的には $SU(2)$ は $SO(3)$ の二重被覆群) という、非常に重要な関係にあります。この違いが、整数スピン ($SO(3)$ 表現) と半整数スピン ($SU(2)$ 表現) の違いとして物理に現れるのです。

2.2 Lie 代数と構造定数

前のセクションで、リー代数 \mathfrak{g} が「リー括弧積」という演算を持つベクトル空間であることを学びました。リー代数のすべての性質は、このリー括弧積に集約されています。しかし、抽象的なベクトルの間の演算のままでは、具体的な計算を進めるのが困難です。

そこで、ベクトル空間を扱う際の定石である「基底を導入する」という手法を用います。リー代数 \mathfrak{g} の基底を一つ定め、その基底ベクトル間のリー括弧積を計算することで、リー代数の構造

を完全に決定する一組の数を取り出すことができます。それが**構造定数**です。

定義 2.3: 構造定数 (Structure Constants)

n 次元のリー代数 \mathfrak{g} の基底を $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ とする。これらの基底ベクトルは**生成子**とも呼ばれます。

二つの基底ベクトル T_a, T_b のリー括弧積 $[T_a, T_b]$ もまた \mathfrak{g} の元であるため、同じ基底を用いて展開できます。このときの展開係数を**構造定数**と呼び、 f_{ab}^c で表します。

$$[T_a, T_b] = \sum_{c=1}^n f_{ab}^c T_c$$

構造定数は、どの基底を選ぶかに依存する量ですが、リー代数の本質的な構造をすべて含んでいます。

リー括弧積が満たすべき性質（反対称性とヤコビ恒等式）は、そのまま構造定数が満たすべき条件に翻訳されます。

- **反対称性:** $[T_a, T_b] = -[T_b, T_a]$ より、構造定数は最初の二つの添字について反対称となります。

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c$$

- **ヤコビ恒等式:** $[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0$ に構造定数の定義を代入して整理すると、以下の関係式が得られます。

$$\sum_d (f_{ad}^e f_{bc}^d + f_{bd}^e f_{ca}^d + f_{cd}^e f_{ab}^d) = 0$$

このヤコビ恒等式は、リー代数と他の代数（例えばただの交換子多元環）とを区別する、極めて重要な条件です。

注意：物理における慣例

物理学の文献、特に量子力学や場の量子論では、エルミートな生成子 T_a を用いて、交換関係に虚数単位 i を含めることが慣例となっています。

$$[T_a, T_b] = i \sum_{c=1}^n f_{ab}^c T_c$$

この場合、構造定数 f_{ab}^c は実数となります。この教科書では、物理学の慣例に従い、エルミートな生成子と、交換関係に i を含んだ定義を主として用いていきます。文脈に応じてどちらの定義が使われているか意識することが、数学書と物理学の文献を行き来する上で重要です。

例：so(3) と su(2) の構造定数

角運動量代数を例に取りましょう。物理の慣例に従い、 $[T_a, T_b] = if_{ab}{}^c T_c$ と比較します。

- su(2): 生成子を $J_a = \sigma_a/2$ ($a = 1, 2, 3$) とすると、交換関係は $[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c$ でした。これを定義式と比較することで、su(2) の構造定数がレビ・チビタ記号そのものであることがわかります。

$$f_{ab}{}^c = \epsilon_{abc}$$

- so(3): 数学的な定義 $[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c$ に従うと、生成子 L_a ($a = x, y, z$) の交換関係 $[L_a, L_b] = \epsilon_{abc} L_c$ から、構造定数は同じく $f_{ab}{}^c = \epsilon_{abc}$ となります。

どちらのリー代数も、同じ構造定数 ϵ_{abc} によって特徴づけられることがわかります。

2.3 Lie 代数の生成元・基底

前節では、リー代数 \mathfrak{g} の構造を具体的に計算するために、基底 $\{T_a\}$ を導入し、構造定数 $f_{ab}{}^c$ を定義しました。本節では、この「基底」そのものに焦点を当て、その物理的な意味と性質について掘り下げていきます。

物理学の世界では、リー代数の基底ベクトルのことを特に**生成子 (generator)** と呼びます。これは単なる言い換えではありません。指数写像 $g(t) = \exp(tT_a)$ を考えると、基底ベクトル T_a は、パラメータ t を動かすことでリー群の元（連続的な変換）を「生成」する役割を担っているからです。例えば、so(3) の生成子 L_z は z 軸周りの回転という変換を生成します。このように、生成子とは「特定の種類の無限小変換そのもの」と捉えるのが物理的に最も直観的な理解です。

リー代数はベクトル空間ですから、その基底の選び方には自由度があります。ある基底 $\{T_a\}$ を選べば構造定数 $\{f_{ab}{}^c\}$ が決まりますが、別の基底 $\{T'_a\}$ を選べば、それに対応して別の構造定数 $\{f'_{ab}{}^c\}$ が得られます。

アナロジー：ベクトルの成分と基底

この状況は、3次元空間のベクトルを考えるのと似ています。ベクトル \vec{v} という存在そのものは、座標系の取り方によらず不変です。しかし、デカルト座標系 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ を選べばベクトルの成分は (v_x, v_y, v_z) となり、別の回転した座標系 $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ を選べば成分は (v'_x, v'_y, v'_z) と変化します。

同様に、リー代数の構造（リー括弧積という演算規則）そのものは基底の選び方によらず不変ですが、その「成分」である構造定数は、どの基底（生成子）で見るかによって変わります。

基底を自由に選べるのであれば、計算に便利な「良い」基底を選びたいと思うのは自然なことです。多くの場合、生成子間に特定の**正規直交関係**が成り立つように基底を選びます。そのためには、リー代数上に「内積」を定義する必要があります。幸いなことに、半単純リー代数には「キ

リング形式 (Killing form)」という自然な内積が定義できます (詳細は §2.5 で学びます)。物理学の現場では、この内積 (あるいはそれに比例するトレース) を用いて、次のような正規化条件を課することが一般的です。

$$\text{Tr}(T_a T_b) = C \delta_{ab}$$

ここで C は正規化定数、 δ_{ab} はクロネッカーのデルタです。このような正規直交基底を選ぶと、添字の上げ下げなどが定義でき、計算が大幅に簡略化されます。

基底の選び方が物理的な見通しをどう変えるか、最も重要な例で見てみましょう。

例：su(2) の異なる基底

su(2) 代数 (角運動量代数) には、目的に応じて主に二種類の基底が使われます。

1. デカルト基底 (エルミート基底)

これまでも使ってきた、パウリ行列で定義される生成子 $\{J_1, J_2, J_3\}$ です。これらは物理的なオブザーバブルである x, y, z 方向のスピン成分に対応し、エルミート演算子となっています。交換関係は以下の通りです。

$$[J_1, J_2] = iJ_3 \quad (\text{cyclic permutations})$$

2. 球基底 (昇降演算子)

量子力学で状態のエネルギー固有値を求める際にお馴染みの、昇降演算子を用いる基底です。デカルト基底から次のように定義されます。

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2, \quad J_z = J_3$$

この基底 $\{J_+, J_-, J_z\}$ での交換関係を計算すると、全く違う見た目になります。

$$\begin{aligned} [J_z, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm} \\ [J_+, J_-] &= 2J_z \end{aligned}$$

この基底は、表現論において極めて強力です。 J_z の固有状態 (磁気量子数 m の状態) に J_+ を作用させると m が 1 だけ増加した状態に、 J_- を作用させると m が 1 だけ減少した状態に「昇降」させることができます。このように、**物理的な目的に合わせて最適な基底を選ぶ**ことで、代数の構造が持つ意味がより鮮明になるのです。

2.4 コンパクト Lie 群と半単純性

これまで、リー代数の内部構造を調べる道具として構造定数や生成子 (基底) を導入してきました。本節では、リー群・リー代数そのものを、より大域的な視点から分類する極めて重要な性質、「コンパクト性」と「半単純性」について学びます。

物理学、特に量子力学や素粒子標準模型に現れる対称性の多くは、「コンパクトなリー群」によって記述されます。これから見ていくように、この幾何学的な性質は、対応するリー代数が「半

単純」であるという強力な代数的性質と密接に結びついています。この関係を理解することは、物理理論の対称性の構造を根本から理解する鍵となります。

定義 2.4: コンパクト性 (Compactness)

リー群 G がコンパクトであるとは、 G をパラメータで表示したとき、そのパラメータが動く範囲（多様体）が位相的な意味でコンパクトであること（有限かつ閉じていること）を言います。

直観的には、群の元が「無限の彼方に発散しない」ような、有限の領域に収まっているイメージです。

例：コンパクト群と非コンパクト群

- コンパクト群の例:

- $\mathrm{SO}(n)$: n 次元空間の回転群。回転角は有限の範囲 $[0, 2\pi)$ や $[0, \pi]$ に収まっています。
- $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{U}(n)$: n 次元複素空間のユニタリ変換群。これらは量子力学の対称性として中心的な役割を果たします。ユニタリ行列の成分は絶対値が 1 以下に抑えられており、発散しません。

- 非コンパクト群の例:

- 並進群 \mathbb{R}^n : 空間の並進操作。いくらでも遠くに移動でき、パラメータは無限の範囲を動きます。
- ローレンツ群 $\mathrm{SO}(3,1)$: 特殊相対性理論の時空の対称性。ブースト（速度変換）のパラメータは無限に大きくなれます。

量子力学のユニタリ表現論では、コンパクト群の表現は非常に美しい性質（既約表現への完全可約性など）を持つため、特に重要です。

次に、リー代数の代数的な構造に着目した分類を導入します。これは、代数を「素因数分解」するような考え方に基づいています。

定義 2.5: 単純性と半単純性 (Simplicity and Semisimplicity)

- **イデアル（不変部分代数）**: リー代数 \mathfrak{g} の部分代数 \mathfrak{h} がイデアルであるとは、 \mathfrak{g} の任意の元 X と \mathfrak{h} の任意の元 Y に対して、その交換子 $[X, Y]$ が常に \mathfrak{h} の中に留まること ($[X, Y] \in \mathfrak{h}$) を言います。
- **単純 (Simple) リー代数**: 自分自身と $\{0\}$ 以外に、自明でないイデアルを持たないリー代数。これ以上分解できない「素数」のような基本ブロックです。例: $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{so}(n > 4)$, $\mathfrak{sp}(n)$ など。
- **半単純 (Semisimple) リー代数**: 可換な (abel 多様体に対応する Abelian な) イデアルを $\{0\}$ 以外に持たないリー代数。構造定理により、半単純リー代数は、複数の

単純リー代数の直和に分解できることが知られています。

$$\mathfrak{g}_{\text{semisimple}} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k \quad (\text{各 } \mathfrak{g}_i \text{ は単純リー代数})$$

これら二つの異なる概念、幾何学的な「コンパクト性」と代数的な「半単純性」は、実は深く結びついています。

定理：コンパクトリー代数の分解

任意のコンパクトリー代数 \mathfrak{g} は、ある半単純リー代数 \mathfrak{g}_{ss} と、いくつかの $\mathfrak{u}(1)$ 代数（1次元の可換な代数）の直和として一意に分解できます。

$$\mathfrak{g}_{\text{compact}} \cong \mathfrak{g}_{\text{ss}} \oplus \underbrace{\mathfrak{u}(1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}(1)}_{m \text{ 個}}$$

これは、物理に現れるコンパクトな対称性が、根本的には「単純な非可換対称性（ \mathfrak{g}_{ss} の部分）」と「可換な $\text{U}(1)$ 対称性」の組み合わせで出来ていることを意味します。素粒子標準模型のゲージ代数 $\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ は、この定理の最も美しい物理的な実現例です。

この定理を具体的に理解するために、ユニタリ群 $\text{U}(n)$ を見てみましょう。

例： $\mathfrak{u}(n)$ の分解

ユニタリ群 $\text{U}(n)$ はコンパクトなリー群です。そのリー代数 $\mathfrak{u}(n)$ は、 $n \times n$ の反エルミート行列の集合です。

任意の反エルミート行列 $X \in \mathfrak{u}(n)$ は、トレースがゼロの「無トレース部分」と、トレースに比例する「トレース部分」に一意に分解できます。

$$X = \underbrace{\left(X - \frac{1}{n} \text{Tr}(X) \cdot I \right)}_{\text{トレースゼロ}} + \underbrace{\left(\frac{1}{n} \text{Tr}(X) \cdot I \right)}_{\text{トレース部分}}$$

ここで、 I は $n \times n$ の単位行列です。

- **無トレース部分:** この部分は、特殊ユニタリ群 $\text{SU}(n)$ のリー代数 $\mathfrak{su}(n)$ を構成します。 $\mathfrak{su}(n)$ は単純リー代数です。
- **トレース部分:** この部分は単位行列 I の定数倍であり、 $\mathfrak{u}(n)$ の他のすべての元と可換です ($[X, cI] = 0$)。これは1次元の可換なイデアルを形成し、 $\mathfrak{u}(1)$ と同型です。

したがって、 $\mathfrak{u}(n)$ は単純リー代数 $\mathfrak{su}(n)$ と可換なリー代数 $\mathfrak{u}(1)$ の直和に分解されます。

$$\mathfrak{u}(n) \cong \mathfrak{su}(n) \oplus \mathfrak{u}(1)$$

これはまさに、コンパクトリー代数の分解定理を体現する例となっています。

2.5 Killing 形式（カルタン計量）

これまでの節で、リー代数の構造は構造定数に集約されること、そしてリー代数は単純なブロックに分解できることを学びました。しかし、「あるリー代数が半単純かどうか」を、イデアルの定義に立ち返って毎回調べるのは大変です。

本節では、リー代数が半単純であるか否かを判定する、極めて強力な道具である**キリング形式（Killing form）**を導入します。これはリー代数上に自然に定義される「内積」のようなもので、別名**カルタン計量（Cartan metric）**とも呼ばれます。この計量テンソルが縮退しているか（行列式がゼロか否か）を調べるだけで、半単純性が判定できてしまうのです。

キリング形式を定義するために、まず「随伴表現」という考え方を使います。リー代数 \mathfrak{g} の任意の元 X に対して、 \mathfrak{g} 自身に作用する線形写像 $\text{ad}(X)$ を次のように定義します。

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y] \quad (\text{for any } Y \in \mathfrak{g})$$

基底 $\{T_a\}$ を使って行列表示すれば、 $\text{ad}(T_a)$ の (c, b) 成分は $(\text{ad}(T_a))^c_b = f_{ab}^c$ となります。

定義 2.6: キリング形式 (Killing Form)

リー代数 \mathfrak{g} 上の**キリング形式** $\kappa(X, Y)$ とは、二つの元 $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して、対応する随伴表現の行列の積のトレース（対角和）として定義される対称な双線形形式です。

$$\kappa(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$$

特に、基底 $\{T_a\}$ を用いて成分表示したものを**カルタン計量テンソル**と呼び、 g_{ab} で表します。構造定数 f_{ab}^c を使うと、次のように計算できます。

$$g_{ab} = \kappa(T_a, T_b) = \sum_{c,d=1}^n f_{ad}^c f_{bc}^d$$

この一見複雑な定義がなぜそれほど重要なのでしょうか。それは、フランスの数学者エリ・カルタンが証明した、次の驚くべき判定法に理由があります。

定理：カルタンの半単純性判定法

リー代数 \mathfrak{g} が半単純であるための必要十分条件は、そのキリング形式が**非縮退（non-degenerate）**であることです。

これは、カルタン計量テンソル g_{ab} を行列とみなしたときに、その行列式がゼロでないこと（ $\det(g) \neq 0$ ）と同値です。

さらに、 \mathfrak{g} が**コンパクトな半単純リー代数**に対応する場合、そのキリング形式は**負定値（negative-definite）**となります。すなわち、適切な基底を選ぶことで $g_{ab} = \text{diag}(-\lambda_1, -\lambda_2, \dots)$ と対角化できます。

この定理は、リー代数の代数的な構造（半単純性）と、計量テンソルの解析的な性質（非縮退性）という、異なる世界の概念を直接結びつける強力な橋渡しです。

例： $\mathfrak{so}(3)$ のキリング形式

我々の最も身近な例である $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$ のキリング形式を計算してみましょう。 $\mathfrak{so}(3)$ の生成子 $\{L_1, L_2, L_3\}$ の構造定数は、 $f_{ab}{}^c = \epsilon_{abc}$ でした（数学の慣例 $[L_a, L_b] = f_{ab}{}^c L_c$ を使用）。

カルタン計量 g_{ab} を計算します。

$$g_{ab} = \sum_{c,d=1}^3 f_{ad}{}^c f_{bc}{}^d = \sum_{c,d=1}^3 \epsilon_{adc} \epsilon_{bcd}$$

ここで、レビ・チビタ記号の縮約公式 $\sum_c \epsilon_{adc} \epsilon_{bcd} = \sum_c \epsilon_{cad} \epsilon_{cbd} = \delta_{ab} \delta_{dd} - \delta_{ad} \delta_{db}$ を使いたいところですが、少し注意が必要です。より安全な公式 $\sum_c \epsilon_{pqc} \epsilon_{rsc} = \delta_{pr} \delta_{qs} - \delta_{ps} \delta_{qr}$ を使って計算します。

$$g_{ab} = \sum_{c,d} \epsilon_{adc} \epsilon_{bcd} = \sum_{c,d} (-\epsilon_{acd})(-\epsilon_{bdc}) = \sum_{c,d} \epsilon_{acd} \epsilon_{bdc}$$

この計算は少し大変なので、具体的に成分を計算してみます。

$$\begin{aligned} g_{11} &= \sum_{c,d} \epsilon_{1d}{}^c \epsilon_{1c}{}^d = \sum_{c,d} \epsilon_{1dc} \epsilon_{1cd} \\ &= (\epsilon_{123} \epsilon_{132}) + (\epsilon_{132} \epsilon_{123}) = (1)(-1) + (-1)(1) = -2 \\ g_{12} &= \sum_{c,d} \epsilon_{1d}{}^c \epsilon_{2c}{}^d = \sum_{c,d} \epsilon_{1dc} \epsilon_{2cd} \\ &= (\epsilon_{13c} \epsilon_{2c3}) \text{ for } d=3, c=1, 2 \rightarrow (\epsilon_{131} \epsilon_{213}) + (\epsilon_{132} \epsilon_{223}) = 0 \end{aligned}$$

同様に計算すると、非対角成分はすべてゼロになり、 $g_{22} = g_{33} = -2$ となります。よって、カルタン計量は次のようになります。

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\delta_{ab}$$

この結果から、

1. $\det(g) = -8 \neq 0$ なので、キリング形式は非縮退です。したがって、カルタンの判定法により $\mathfrak{so}(3)$ は半単純であることが確認できました（ $\mathfrak{so}(3)$ は単純なので、これは正しいです）。
2. 計量是对角成分がすべて負なので、**負定値**です。これは、 $\mathfrak{so}(3)$ がコンパクトなリー群 $SO(3)$ のリー代数であることと整合しています。

2.6 adjoint 表現

リー代数を学ぶ上で、その「表現」を考えることは中心的な役割を果たします。表現とは、抽象的なリー代数の元を、具体的なベクトル空間に作用する行列（線形変換）として対応付けることで、代数の構造を可視化する手法です。

これまでの節でも、 $\mathfrak{so}(3)$ を 3×3 の反対称行列として、 $\mathfrak{su}(2)$ を 2×2 の反エルミート・トレースゼロ行列として扱ってきました。これらはそれぞれ、3次元ベクトル空間 \mathbb{R}^3 や2次元複素ベクトル空間 \mathbb{C}^2 に作用する「表現」であり、特に**定義表現 (defining representation)** や**基本表現 (fundamental representation)** と呼ばれます。

本節では、どんなリー代数にも必ず存在する、極めて自然で重要な表現、**随伴表現 (adjoint representation)** について学びます。

定義 2.7: 随伴表現 (Adjoint Representation)

リー代数 \mathfrak{g} の随伴表現とは、ベクトル空間としてリー代数 \mathfrak{g} 自身を選び、 \mathfrak{g} の元 X が同じく \mathfrak{g} の元 Y に次のように作用すると定めた表現のことです。

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$$

この写像 $\mathrm{ad}(X)$ は、 Y に対して線形であり、 \mathfrak{g} 上の線形変換とみなせます。

リー代数の元 X を、線形変換 $\mathrm{ad}(X)$ に対応させる写像 $\mathrm{ad} : X \mapsto \mathrm{ad}(X)$ が、リー代数の交換関係を保つ（すなわち、 $\mathrm{ad}([X, Y]) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)]$ ）ため、これは正しく表現の定義を満たします。

補足：ヤコビ恒等式の真の意味

随伴表現が、きちんと表現の条件（交換関係を保つこと）を満たすことは、ヤコビ恒等式そのものによって保証されています。ヤコビ恒等式

$$[X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] - [[X, Y], Z] = 0$$

を随伴表現の言葉で書き直すと、

$$\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)(Z) - \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(X)(Z) - \mathrm{ad}([X, Y])(Z) = 0$$

となり、これはまさしく $[\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)] = \mathrm{ad}([X, Y])$ を意味します。このように、ヤコビ恒等式は随伴表現が存在するための整合性条件と見なすことができます。

随伴表現を行列で具体的に書き下してみましょう。リー代数 \mathfrak{g} の基底を $\{T_a\}$ とします。随伴表現における生成子 T_a の表現行列を $(\mathcal{T}_a)_{\mathrm{adj}}$ と書くと、その行列成分は構造定数によって与えられます。

$$(\mathcal{T}_a)_{\mathrm{adj}}(T_c) = [T_a, T_c] = f_{ac}{}^b T_b$$

これは、行列 $(\mathcal{T}_a)_{\text{adj}}$ の (b, c) 成分が $f_{ac}{}^b$ であることを意味します。

$$((\mathcal{T}_a)_{\text{adj}})^b{}_c = f_{ac}{}^b$$

つまり、随伴表現行列の正体は、構造定数そのもののなのです。この表現の次元は、リー代数自身の次元（生成子の数）に等しくなります。

例：so(3) と素粒子物理学への応用

- **so(3) の随伴表現**

$\mathfrak{so}(3)$ の次元は 3 です。したがって、その随伴表現は 3 次元の表現となります。生成子 $\{L_1, L_2, L_3\}$ の構造定数は $f_{ab}{}^c = \epsilon_{abc}$ でした。随伴表現行列 $(\mathcal{L}_a)_{\text{adj}}$ の (c, b) 成分は、 $(\mathcal{L}_a)_{\text{adj}}{}^c{}_b = f_{ab}{}^c = \epsilon_{abc}$ となります。

例えば、 $a = 1$ の行列 $(\mathcal{L}_1)_{\text{adj}}$ を計算すると、

$$(\mathcal{L}_1)_{\text{adj}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、これは驚くべきことに、 $\mathfrak{so}(3)$ の定義表現における生成子 L_1 そのものと一致します。同様に、 L_2, L_3 についても一致します。このように、 $\mathfrak{so}(3)$ に限っては、随伴表現と定義表現は同じもの（同型な表現）になります。

- **素粒子物理学への応用**

随伴表現は、現代物理学において極めて重要な役割を果たします。素粒子の標準模型において、力を媒介するゲージ粒子は、対応するゲージ対称性のリー代数の随伴表現に属します。

- **強い力 (QCD):** ゲージ群は $SU(3)$ です。 $\mathfrak{su}(3)$ の次元は 8 なので、随伴表現は 8 次元です。力を媒介する 8 種類のグルーオンは、この随伴表現（オクテットまたは八重項と呼ばれる）に属します。一方で、物質粒子であるクォークは、3 次元の基本表現（トリプレットまたは三重項）に属します。
- **弱い力:** ゲージ群は $SU(2)$ です。 $\mathfrak{su}(2)$ の次元は 3 なので、力を媒介する W^+, W^-, Z^0 ボソンは、3 次元の随伴表現（トリプレットまたは三重項）を形成します。

おまけ：電子のスピンが 3/2 だったら？

本章では、スピン 1/2 を持つ電子を記述する $\mathfrak{su}(2)$ を例に、リー代数の様々な性質を見てきました。では、もしある日、電子とそっくりだがスピンが 3/2 である新しい基本粒子が発見されたらと想像してみましょう。この「スピン 3/2 電子」の世界では、リー代数、構造定数、キリング形式、随伴表現はどう変わるのでしょうか？

思考実験：スピン 3/2 の世界

驚くべきことに、その答えは「何も変わらない」です。

リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ は、回転やスピンといった角運動量という物理概念の根底にある「演算規則 (文法)」そのものを定義します。それは、発見される粒子の種類 (どの表現に属するか) には依存しない、不変の構造なのです。

粒子のスピン値 s が変わるというのは、その粒子が住んでいる「表現空間」が変わることを意味します。

- **スピン 1/2 (電子など)**: 粒子は $2s + 1 = 2$ 次元の表現空間に属します。生成子 J_a は 2×2 行列 (パウリ行列) で表現されます。
- **スピン 1 (W ボソンなど)**: 粒子は $2s + 1 = 3$ 次元の表現空間に属します。生成子 J_a は 3×3 行列で表現されます。
- **スピン 3/2 (仮説上の粒子)**: 粒子は $2s + 1 = 4$ 次元の表現空間に属します。生成子 J_a は 4×4 行列で表現されることになります。

重要なのは、どの次元の行列で表現されても、それらが満たすべき基本的な交換関係は常に同じだということです。

この事実を、本章で学んだ概念に沿って確認してみましょう。

■1. **リー代数** スピンの代数は、どんなスピン値であっても角運動量代数そのものです。したがって、代数は変わらず $\mathfrak{su}(2)$ のままであり、その定義は交換関係 $[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c$ によって与えられます。

■2. **構造定数** 構造定数は、リー代数の交換関係から直接決まる量でした。交換関係が変わらないので、構造定数も $f_{ab}^c = \epsilon_{abc}$ のままです。

■3. **Killing 形式** キリング形式 (カルタン計量) g_{ab} は、構造定数のみを使って $g_{ab} = \sum_{c,d} f_{ad}^c f_{bc}^d$ と計算されました。構造定数が不変であるため、キリング形式も $g_{ab} = -2\delta_{ab}$ のままであり、非縮退かつ負定値という性質も変わりません。

■4. **Adjoint 表現** 随伴表現は、リー代数が「自分自身の上」に作用する、自己参照的な表現でした。その次元はリー代数自身の次元 ($\mathfrak{su}(2)$ の場合は 3) であり、表現行列は構造定数から作られます。したがって、たとえスピン 3/2 の粒子を考えていたとしても、 $\mathfrak{su}(2)$ の随伴表現は常に 3 次元 (スピン 1 の状態に相当) のままです。

では、一体何が変わるのか？

変わるのは、その粒子が属する特定の表現空間における、生成子の具体的な行列表示です。スピン 3/2 の世界では、 z 方向のスピンを表す生成子 J_z は、もはやパウリ行列ではなく、

次のような 4×4 の対角行列で表現されます ($\hbar = 1$ とする)。

$$(J_z)_{s=3/2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

この行列は、スピンの z 成分の固有値 $m_s = +3/2, +1/2, -1/2, -3/2$ を対角成分に持ちます。同様に、 J_x, J_y も今までとは異なる 4×4 行列になりますが、それら 3 つの行列は、きちんと $\mathfrak{su}(2)$ の交換関係 $[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c$ を満たしているのです。

この思考実験は、物理学における「**抽象的な対称性の規則 (リー代数)**」と、その規則が個々の物理系に「**どう現れるか (表現)**」とを区別することの重要性を教えてください。

発展：半単純性の厳密な判定法

これまでの節で、半単純リー代数を「可換なイデアルを持たないもの」として直観的に導入し、その判定にキリング形式が有効であることを見てきました。本節では、この概念をより厳密に定義し、どんなリー代数に対しても半単純性を判定できる、明確な手順を確立します。

厳密な定義：可解イデアルと根基

リー代数 \mathfrak{g} の「素因数分解」を考える上で、最も“単純”で構造を乱す要素は、可換な部分です。この「可換っぽさ」を一般化した概念が**可解性 (solvability)**です。

リー代数 \mathfrak{h} の導来列を $\mathfrak{h}^{(0)} = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^{(1)} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, $\mathfrak{h}^{(2)} = [\mathfrak{h}^{(1)}, \mathfrak{h}^{(1)}], \dots$ と定義します。この列が有限回で $\{0\}$ に至る場合、 \mathfrak{h} は**可解 (solvable)**であると言います。可換代数は、 $\mathfrak{h}^{(1)} = 0$ となるため、最も簡単な可解代数です。

リー代数 \mathfrak{g} に含まれる全ての可解イデアルを合算して作られる、最大の可解イデアルを \mathfrak{g} の**根基 (radical)**と呼び、 $\text{Rad}(\mathfrak{g})$ と書きます。

定義 2.8: 半単純性の厳密な定義

リー代数 \mathfrak{g} が**半単純**であるとは、その根基が自明なもの、すなわち $\text{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ となることである。

この定義は、「リー代数から、考えうる限りの“単純”で“つまらない”部分 (可解な部分) を全て取り除いても、何も残らない」ということを意味しており、純粋に非可換な構造だけを持つ、という半単純性のイメージと合致しています。

判定手順：キリング形式による判定

根基を直接見つけるのは困難ですが、幸いなことにカルタンの判定法が、この厳密な定義とキリング形式の非縮退性とを同値であると保証してくれます。これにより、我々は以下の機械的な手順で半単純性を判定できます。

【半単純性の判定手順】

1. **基底の選択:** 対象とするリー代数 \mathfrak{g} の基底 (生成子) $\{T_a\}$ を選びます。
2. **構造定数の計算:** 交換関係 $[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$ を計算し、構造定数 f_{ab}^c を全て求めます。(物理の慣例 $[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c$ を使う場合は、最後までその慣例で統一します。)
3. **キリング形式 (カルタン計量) の計算:** 成分 $g_{ab} = \sum_{c,d} f_{ad}^c f_{bc}^d$ を計算し、行列 $g = (g_{ab})$ を構成します。
4. **行列式の計算:** 行列 g の行列式 $\det(g)$ を計算します。
5. **判定:**
 - $\det(g) \neq 0$ の場合: キリング形式は非縮退です。よって、リー代数 \mathfrak{g} は**半単純**です。
 - $\det(g) = 0$ の場合: キリング形式は縮退しています。よって、リー代数 \mathfrak{g} は**半単純ではありません**。

判定例: $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{u}(2)$ の比較

この手順を使って、よく似た二つのリー代数を比較してみましょう。

例: $\mathfrak{su}(2)$ の判定

1. **基底:** $\{L_1, L_2, L_3\}$ ($\mathfrak{so}(3)$ と同型なのでこちらの基底で計算)
2. **構造定数:** $[L_a, L_b] = \epsilon_{abc} L_c$ より、 $f_{ab}^c = \epsilon_{abc}$
3. **キリング形式:** 前節の計算より、 $g_{ab} = -2\delta_{ab}$
4. **行列式:** $\det(g) = (-2)^3 = -8$
5. **判定:** $\det(g) \neq 0$ なので、 $\mathfrak{su}(2)$ は**半単純**です。(さらに、これ以上分解できないので単純でもあります。)

例: $\mathfrak{u}(2)$ の判定

$\mathfrak{u}(2)$ は 2×2 の反エルミート行列全体のリー代数です。

1. **基底:** $\mathfrak{su}(2)$ の生成子 $\{T_1, T_2, T_3\}$ (パウリ行列で構成) に加え、単位行列に比例する生成子 $T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ を加えた 4 つが基底となります。
2. **構造定数:**
 - $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ の間では、 $\mathfrak{su}(2)$ と同じく $f_{ab}^c = \epsilon_{abc}$ です。
 - T_0 は単位行列に比例するため、他の全ての生成子と可換です。 $[T_0, T_a] = 0$ 。
 - これにより、添字に '0' を含む構造定数は全てゼロになります: $f_{0a}^c = f_{a0}^c = 0$ 。

3. **キリング形式:** 計量テンソル g_{ab} の成分を計算します。特に g_{00} を見てみましょう。

$$g_{00} = \sum_{c,d=0}^3 f_{0d}^c f_{0c}^d$$

f_{0k}^l が常にゼロなので、この和は明らかに $g_{00} = 0$ となります。同様に、 $g_{0a} = g_{a0} = 0$ も示せます。

4. **行列式:** 計量行列 g の第 0 列と第 0 行は全てゼロの成分を持ちます。

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & (\mathfrak{su}(2)\text{の計量}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

ある行（または列）の成分が全てゼロの行列の行列式は、必ずゼロになります。よって $\det(g) = 0$ です。

5. **判定:** $\det(g) = 0$ なので、 $\mathfrak{u}(2)$ は**半単純ではありません**。これは、 $\mathfrak{u}(2) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ と分解でき、可換なイデアル $\mathfrak{u}(1)$ （根基に相当）を持つことと整合しています。

このように、本手順を用いることで、どんなリー代数もその構造を明確に分類することができるのです。

3 Cartan 理論の柱

第2章では、リー群とその無限小変換であるリー代数の基本的な定義を学び、構造定数やキリング形式といった解析の道具を手に入れました。そして、物理的に重要なコンパクトな対称性の多くは、「半単純」という美しい代数的性質を持つ単純なリー代数のブロックから構成されていることを見ました。

この結果は、我々を自然に次なる問いへと導きます。「その『単純リー代数』なる基本ブロックには、一体どのような種類があるのだろうか?」「素粒子がクォークとレプトンに分類されるように、あるいは元素が周期表に並ぶように、全ての単純リー代数を体系的に分類し、その構造を完全に理解することは可能なのだろうか?」

この問いに完璧な答えを与えたのが、フランスの偉大な数学者 Élie Cartan です。本章で学ぶのは、彼の名を冠した「Cartan 理論」であり、半単純リー代数の構造を解き明かし、その完全分類を成し遂げるための、驚くほど美しく強力な理論体系です。

Cartan の戦略の核心は、一見複雑な非可換代数の中に「最大の可換部分代数」を見つけ出し、それを“見通しを良くするための座標軸”として利用することにあります。この特別な部分代数を **Cartan 部分代数 (Cartan Subalgebra, CSA)** と呼びます。これは、角運動量代数 $\mathfrak{su}(2)$ において、まず J_z を選んでその固有状態を考える操作を一般化したものです。

Cartan 部分代数という「座標軸」を定めると、残りの生成子たちは、あたかも $\mathfrak{su}(2)$ の昇降演算子 J_{\pm} のように振る舞うことがわかります。それらは、Cartan 部分代数の同時固有状態の間を移り変わる「シフト演算子」として機能するのです。このときの固有値ベクトルを **ルート (root, 根)** と呼びます。

驚くべきことに、全てのルートベクトルを集めてできる **ルート系 (root system)** は、高次元空間に浮かぶ、極めて対称性の高い“結晶”のような幾何学模様を形成します。そして、リー代数の全ての構造（交換関係や表現など）は、このルート系の幾何学的な性質から完全に再構成できてしまうのです。最終的に、この幾何学的構造は **Dynkin 図 (Dynkin diagram)** というシンプルな図形に集約され、可能な全ての単純リー代数の「周期表」が完成します。

本章では、以下の「Cartan 理論の柱」を一本ずつ打ち立てていきます。

1. **Cartan 部分代数**: 代数を整理するための「座標軸」の導入
2. **ルート系**: 代数の構造を可視化する「結晶構造」の発見
3. **Cartan-Weyl 基底**: 物理的な昇降演算子の一般化
4. **Dynkin 図**: 全ての単純リー代数を分類する「周期表」の完成

この美しい理論の頂を目指し、一步一步進んでいきましょう。

3.1 Cartan 部分代数とその標準形

Cartan 理論の第一の柱は、リー代数という複雑な構造物の中に、解析の出発点となる「特別な座標軸」を見つけ出すことです。この座標軸の役割を果たすのが **Cartan 部分代数 (Cartan Subalgebra, CSA)** です。

その基本的な考え方は、量子力学で角運動量を扱う際の操作と全く同じです。多数の演算子の中から、まず互いに可換な（同時測定可能な）演算子を見つけ出し、その同時固有状態を考えることで、系の状態を分類しました。例えば、 $\mathfrak{su}(2)$ では、まず J_z を選んでその固有値 m で状態をラベル付けし、残りの演算子 J_{\pm} は m の値を変化させる昇降演算子と見なしました。

Cartan 部分代数とは、この手続きを任意の半単純リー代数に対して一般化したものです。

定義 3.1: Cartan 部分代数 (CSA)

半単純リー代数 \mathfrak{g} の部分代数 \mathfrak{h} が **Cartan 部分代数** であるとは、以下の二つの条件を満たすものを言います。

1. 極大な可換部分代数である:

- \mathfrak{h} の中の任意の二つの元 H_1, H_2 は互いに可換です。 $[H_1, H_2] = 0$ 。
- \mathfrak{h} に属さない元 $X \notin \mathfrak{h}$ を一つでも加えると、その集合は可換でなくなります。
(これ以上大きくできない、最大の可換部分代数)

2. 元が同時対角化可能である:

- \mathfrak{h} の任意の元 H の随伴表現 $\text{ad}(H)$ は対角化可能です。

Cartan 部分代数の次元（含まれる線形独立な生成子の数）を、そのリー代数の **ランク (階数)** と呼びます。これは代数の最も基本的な特性値です。

物理的には、Cartan 部分代数は「同時に測定可能な物理量の最大セット」に対応します。ランクが r の代数で記述される物理系は、 r 個の量子数によってその状態が指定されることになります。

では、実際に与えられたリー代数からどうやって Cartan 部分代数を見つければよいのでしょうか。物理で重要な $\mathfrak{su}(n)$ や $\mathfrak{so}(n)$ などの行列で書けるリー代数では、その **標準形** として、**対角行列の形をした生成子全体** を選ぶのが一般的です。

例: $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(3)$ の Cartan 部分代数

• $\mathfrak{su}(2)$ の場合 (ランク 1)

$\mathfrak{su}(2)$ は、 2×2 のトレースゼロの反エルミート行列の集合です。この中で対角行列の形をしているものは、

$$H = \begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{pmatrix} = 2a \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

の形のものしかありません。これは、ただ一つの生成子 $J_z \propto \sigma_z$ で張られる 1 次元のベクトル空間です。したがって、 $\mathfrak{su}(2)$ のランクは 1 です。

- $\mathfrak{su}(3)$ の場合 (ランク 2)

$\mathfrak{su}(3)$ は、 3×3 のトレースゼロの反エルミート行列の集合です。この中で対角行列の形をしているものは、

$$H = \begin{pmatrix} ia & 0 & 0 \\ 0 & ib & 0 \\ 0 & 0 & ic \end{pmatrix} \quad \text{ただし } a + b + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

の条件を満たします。これは、2 つの独立なパラメータで指定できるため、2 次元のベクトル空間をなします。したがって、 $\mathfrak{su}(3)$ のランクは 2 です。

物理学では、この 2 つの基底として、Gell-Mann 行列 λ_3, λ_8 を用いるのが標準的です。(規格化された) 生成子は以下ようになります。

$$H_1 = \frac{1}{2}\lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{su}(3)$ フレーバー対称性におけるクォークやハドロンの状態は、この H_1 の固有値 (アイソスピンの第 3 成分 I_3) と H_2 の固有値 (ハイパーチャージ Y) という、二つの量子数によって平面上にプロットされ、美しい六角形や三角形のパターン (ウェイト図) を描きます。これは、Cartan 部分代数が物理系の分類に極めて有効であることを示す、象徴的な例です。

3.2 根系 (ルートベクトル・ルート空間分解)

前節では、半単純リー代数の中に「座標軸」として機能する Cartan 部分代数 (CSA) \mathfrak{h} を見つけ出しました。これは代数全体の構造を解明するための、最初の、そして最も重要なステップです。

次なる問いは、「残りの生成子たち、すなわち Cartan 部分代数に属さない元は、この座標軸とどのような関係にあるのか？」です。答えを先に言ってしまうと、それらは $\mathfrak{su}(2)$ の昇降演算子 J_{\pm} を一般化した存在として、極めて美しい構造をなしています。この構造をあぶり出すのが、**ルート空間分解**です。

この操作は、Cartan 部分代数 \mathfrak{h} を構成する全ての生成子 $\{H_i\}$ と、残りの生成子 E との交換関係を調べることに他なりません。これは、演算子 $\{\text{ad}(H_i)\}$ の同時固有ベクトル E を探す問題と等価です。

$$\text{ad}(H)(E) = [H, E] = \alpha(H)E \quad (\text{for all } H \in \mathfrak{h})$$

この式を満たす固有ベクトル E が見つかったとします。固有値 $\alpha(H)$ は、 \mathfrak{h} の元 H を一つ与えるごとに決まる数であり、線形性から H についての線形写像 (線形汎関数) となります。この、Cartan 部分代数 \mathfrak{h} 上の線形汎関数 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ こそが、**ルート (root, 根)** または**ルートベクトル**と呼ばれるものです。

定義 3.2: ルートとルート空間分解

半単純リー代数 \mathfrak{g} とその Cartan 部分代数 \mathfrak{h} を考える。

- **ルート (Root):** ゼロでない線形汎関数 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ で、全ての $H \in \mathfrak{h}$ に対して $[H, E] = \alpha(H)E$ を満たすような、ゼロでない元 $E \in \mathfrak{g}$ が存在するとき、 α を \mathfrak{g} のルートと呼びます。
- **ルート空間 (Root Space):** 一つのルート α に対応する固有ベクトルたち（とゼロベクトル）が張るベクトル空間を、ルート空間 \mathfrak{g}_α と呼びます。
- **ルート空間分解:** リー代数 \mathfrak{g} は、Cartan 部分代数 \mathfrak{h} と、全てのルート空間 \mathfrak{g}_α の直和として分解できます。これをルート空間分解と呼びます。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \right)$$

ここで Δ は、ゼロでない全てのルートの集合であり、**ルート系 (root system)** と呼ばれます。半単純リー代数では、各ルート空間 \mathfrak{g}_α の次元は1であることが知られています。

この分解の物理的な意味は絶大です。

- **Cartan 部分代数 \mathfrak{h} :** 互いに可換な物理量 (J_z やアイソスピン、ハイパーチャージなど) の生成子。
- **ルート α :** それらの物理量の測定によって得られる「量子数」の組 (ベクトル)。
- **ルート空間の生成子 E_α :** その量子数を、ベクトル α の分だけ変化させる「昇降演算子 (ラダー演算子)」。

例: $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(3)$ のルート

• $\mathfrak{su}(2)$ の場合 (ランク 1)

Cartan 部分代数 \mathfrak{h} は J_z で張られる 1 次元空間です。残りの生成子は J_\pm です。

$$[J_z, J_+] = (+1) \cdot J_+, \quad [J_z, J_-] = (-1) \cdot J_-$$

この交換関係は、固有値方程式そのものです。 $H = J_z$ とすると、

$$- E = J_+ \text{ に対応するルートは } \alpha(J_z) = +1$$

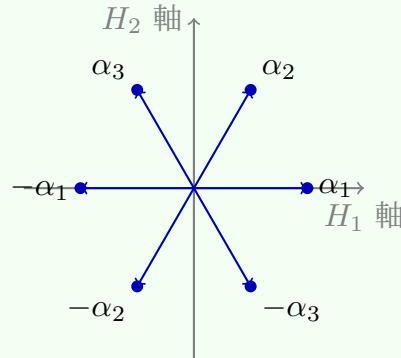
$$- E = J_- \text{ に対応するルートは } \beta(J_z) = -1$$

となります。ルートは 1 次元のベクトル (スカラー) なので、 $\mathfrak{su}(2)$ のルート系 Δ は、数直線上の二つの点 $\{+1, -1\}$ からなります。

• $\mathfrak{su}(3)$ の場合 (ランク 2)

Cartan 部分代数 \mathfrak{h} は H_1, H_2 で張られる 2 次元空間です。ルート α は、2 つの数 α_1, α_2 の組、すなわち 2 次元のベクトル $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ で表されます。ここで、 $\alpha_1 = \alpha(H_1), \alpha_2 = \alpha(H_2)$ です。

$\mathfrak{su}(3)$ の 8 つの生成子のうち、 \mathfrak{h} に属さない 6 つの生成子について交換関係を計算すると、6 つのゼロでないルートベクトルが得られます。これらを H_1, H_2 の固有値を軸とする 2 次元平面にプロットすると、驚くべきことに、原点を中心とする**正六角形の頂点**を綺麗に形成します。



この六角形こそが $\mathfrak{su}(3)$ のルート系であり、この幾何学的な形に $\mathfrak{su}(3)$ の全ての代数構造が凝縮されています。次の節からは、このルートが持つ驚くべき性質について、さらに深く探求していきます。

3.3 Cartan-Weyl 基底と正規化

前節では、リー代数 \mathfrak{g} が Cartan 部分代数 \mathfrak{h} とルート空間 \mathfrak{g}_α の直和に分解できることを見ました。 \mathfrak{h} の基底を $\{H_i\}$ 、 α に対応するルート空間 \mathfrak{g}_α の基底を E_α とすると、これらの全体 $\{H_i, E_\alpha\}$ は \mathfrak{g} の新しい基底を構成します。

この基底は、Cartan 部分代数を基準に代数全体を整理した、極めて見通しの良い基底です。これを **Cartan-Weyl 基底** と呼びます。本節の目標は、この基底における交換関係を完全に取り書き下し、基底のスケールを「正規化」によって定めることです。

定義 3.3: Cartan-Weyl 基底における交換関係

Cartan-Weyl 基底 $\{H_i, E_\alpha\}$ は、以下の交換関係を満たします。ここで、 i, j は Cartan 部分代数の次元 (ランク)、 α, β はルート系 Δ の元 (ルートベクトル) を表します。

1. $[H_i, H_j] = 0$
2. $[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha$
3. $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$
4. $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta} \quad (\text{if } \alpha + \beta \in \Delta)$
5. $[E_\alpha, E_\beta] = 0 \quad (\text{if } \alpha + \beta \notin \Delta \text{ and } \beta \neq -\alpha)$

これらの式が、Cartan-Weyl 基底におけるリー代数の「構造」を完全に記述します。

これらの交換関係について、いくつか重要な点を補足します。

- 式 (1) と (2) は、それぞれ Cartan 部分代数とルートの定義そのものです。 α_i は、ルートベクトル α の第 i 成分です。
- 式 (3) は最も重要です。二つの「昇降演算子」 E_α と $E_{-\alpha}$ の交換子は、Cartan 部分代数 \mathfrak{h} の中に戻ってきます。 H_α はルート α に対応して決まる \mathfrak{h} の元であり、キリング形式を通じて α と結びついています (H_α は α の「双対ベクトル」と呼ばれます)。この $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha\}$ の三つ組は、閉じた小さなリー代数を構成し、これは常に $\mathfrak{su}(2)$ と同型になります。つまり、**どんな半単純リー代数の中にも、無数の $\mathfrak{su}(2)$ が部分代数として潜んでいるのです。**
- 式 (4) の係数 $N_{\alpha,\beta}$ は、構造定数の一種です。 E_α のスケール (ベクトルの長さの決め方) には任意性があるため、この係数の値はその任意性に依存します。そこで、計算の見通しを良くするために、うまくスケールを選んで係数を綺麗な値に固定する操作が**正規化**です。

正規化について

Cartan-Weyl 基底の正規化とは、 E_α のスケールをうまく調整することで、交換関係の係数を標準的な値に固定する手続きです。一般的に、以下の条件が課されます。

1. キリング形式を用いて、 $\kappa(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ となるように E_α と $E_{-\alpha}$ の積のスケールを定めます。
2. この条件の下で、式 (3) の H_α が一意に定まります。
3. 係数 $N_{\alpha,\beta}$ の値も、ルート系の幾何学的な情報 (ルートベクトル間の角度や長さの比) だけで決まる、実数の定数となります。

この正規化により、リー代数の構造が、基底の取り方という曖昧さを含まない、普遍的な形で記述されるのです。

例： $\mathfrak{su}(2)$ を Cartan-Weyl 基底で見る

角運動量代数 $\mathfrak{su}(2)$ が、この一般的な構造の最も簡単な具体例となっていることを見ましょう。

- **基底の対応:**
 - Cartan 部分代数の基底: $H_1 = J_z$
 - ルートベクトルと昇降演算子: ルート $\alpha = 1$ に $E_1 = J_+$ を、ルート $-\alpha = -1$ に $E_{-1} = J_-$ を対応させます。
- **交換関係の確認:**
 1. $[J_z, J_z] = 0$
 2. $[J_z, J_+] = (+1) \cdot J_+$ (ルートの値 $\alpha = 1$ が現れる)
 3. $[J_+, J_-] = 2J_z$ (これは $H_\alpha = 2J_z$ に対応する)
 4. $[J_+, J_+] = 0$ ($\alpha + \alpha = 2$ はルートではないため)

このように、 $\mathfrak{su}(2)$ の交換関係は、Cartan-Weyl 基底の一般的な交換関係の、ランク 1 の場合として完璧に再現されていることがわかります。Cartan 理論とは、この $\mathfrak{su}(2)$ の美しい構造を、より高次の代数へ拡張するための、壮大な一般化理論なのです。

3.4 Dynkin 図による分類

我々はついに、Cartan 理論の最終目的地にたどり着きました。これまでの旅路で、我々は半単純リー代数という複雑な構造物から、その本質を捉えた幾何学的な対象「ルート系」を抽出することに成功しました。ルート系は、代数の全ての情報を保持する、いわば代数の「設計図」です。

しかし、高次元空間に広がるルート系でさえ、まだ情報として複雑です。その構造の最も重要な情報、すなわちルートベクトル間の角度と長さの比だけを抜き出して、究極にシンプルな図形にエンコードしたものが **Dynkin 図 (Dynkin diagram)** です。

この驚くべき事実は、ルート系の中から**単純ルート (simple roots)** と呼ばれる特別な基底を選び出すことで可能になります。単純ルートとは、ルート系の「北東の象限」にあるような基底ベクトルで、全てのルートが、単純ルートの整数係数線形結合で、係数が全て非負か全て非正のどちらかになるように選べます。

Dynkin 図は、この単純ルートたちの関係性だけを図にしたものです。

定義 3.4: Dynkin 図の構成規則

単純リー代数の Dynkin 図は、以下の規則に従って構成されるグラフです。

1. **ノード (点)** : 各**単純ルート** α_i を、一つの点 (丸 'o') で表します。代数のランクが r ならば、図には r 個の点が存在します。
2. **リンク (線)** : 二つの単純ルート α_i, α_j の間の**角度** θ_{ij} に応じて、対応する二つの点を結ぶ線の本数を決めます。
 - 90° : 線なし
 - 120° : 1 本線 (o-o)
 - 135° : 2 本線 (o=o)
 - 150° : 3 本線 (o \equiv o)
3. **アロー (矢印)** : 二つの単純ルートの**長さ**が異なる場合 (2 本線または 3 本線の場合のみ)、長い方のルートに対応する点から、短い方のルートに対応する点へ向かって矢印を描きます。

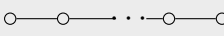
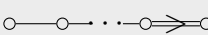

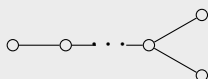
たったこれだけの規則で、リー代数の全ての情報がこの図の中に凝縮されてしまうのです。

そして、数学が我々に見せてくれる最も深遠な風景がここにあります。この規則で描くことが許される連結な Dynkin 図は、無限に存在するわけではなく、数えるほどしか存在しないのです。


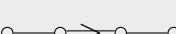
定理：単純リー代数の完全分類

全ての（複素）単純リー代数は、以下に示すいずれかの Dynkin 図と一対一に対応する。このリストが、数学的に可能な全ての根源的な対称性の「周期表」である。

古典系列（無限系列）

- $A_r (\mathfrak{su}(r+1))$: 
- $B_r (\mathfrak{so}(2r+1))$: 
- $C_r (\mathfrak{sp}(2r))$: 
- $D_r (\mathfrak{so}(2r))$: 

例外系列

- E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 という 5 つの例外的な代数が存在する。
- G_2 :  F_4 : 

例： $\mathfrak{su}(3)$ の Dynkin 図

$\mathfrak{su}(3)$ (ランク 2) のルート系が正六角形をなすことを見ました。このルート系から、隣り合う二つのルートベクトル α_1, α_2 を単純ルートとして選ぶことができます。

- **角度**: 正六角形の隣り合う頂点へのベクトルがなす角は 120° です。
- **長さ**: 全てのルートは同じ長さです。

これを Dynkin 図の規則に当てはめてみましょう。

1. ランク 2 なので、ノードは 2 つです。 (o, o)
2. 角度が 120° なので、2 つのノードを 1 本線で結びます。 (o-o)
3. ルートの長さが同じなので、矢印は不要です。

したがって、 $\mathfrak{su}(3)$ の Dynkin 図は 'o-o' となり、これは分類表の A_2 に対応します。

これで、我々はリー代数の分類という、壮大な理論の山頂に到達しました。どんな複雑に見える対称性も、この「周期表」に載っている基本ブロックの組み合わせでできているのです。この強力な分類法は、物理学者が新しい理論を構築する際の、信頼できる道標となっています。

おまけ：主要なリー群とリー代数の性質一覧

本教科書で学んだ様々な概念を整理し、今後の学習や研究の参照用として役立てるため、物理学で頻出する主要なリー群と、それに対応するリー代数の性質を一覧表にまとめました。

この表を見れば、群の名称から、その次元、ランク（同時測定可能な物理量の数）、コンパクト性や単純性といった代数の構造、そしてそれらを一意に特徴づける Dynkin 図まで、一目で確認

することができます。

表 1: 主要な（複素）単純リー代数の分類と性質

系列	Lie 群 (G)	Lie 代数 (\mathfrak{g})	次元	ランク	コンパクト性	単純性	Dynkin 図
A_r	$SU(r+1)$	$\mathfrak{su}(r+1)$	$r(r+2)$	r	ある	単純	
	$SL(r+1, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C})$	$2r(r+2)$	r	なし	単純	
B_r	$SO(2r+1)$	$\mathfrak{so}(2r+1)$	$r(2r+1)$	r	ある	単純	
C_r	$Sp(2r)$	$\mathfrak{sp}(2r)$	$r(2r+1)$	r	ある	単純	
D_r	$SO(2r)$	$\mathfrak{so}(2r)$	$r(2r-1)$	r	ある	単純	
例外群	G_2	\mathfrak{g}_2	14	2	ある	単純	
	F_4	\mathfrak{f}_4	52	4	ある	単純	
	E_6	\mathfrak{e}_6	78	6	ある	単純	
	E_7	\mathfrak{e}_7	133	7	ある	単純	
	E_8	\mathfrak{e}_8	248	8	ある	単純	
その他	$U(n)$	$\mathfrak{u}(n)$	n^2	n	ある	なし	N/A
	$GL(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$	n^2	n	なし	なし	

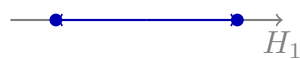
おまけ：主要なルート図一覧

Cartan 理論の最も美しい帰結の一つは、リー代数の複雑な代数構造が、ルートベクトルがなす幾何学的な「結晶構造（ルート系）」に置き換えられることでした。ここでは、物理学で頻出する低ランクのリー代数について、そのルート系を 2 次元平面に描画した「ルート図」を一覧で示します。

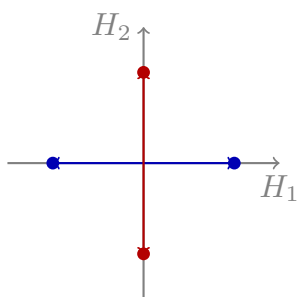
代数の種類によって、ルートがどのように配置され、どのような対称性を持つのかを視覚的に比較してみてください。



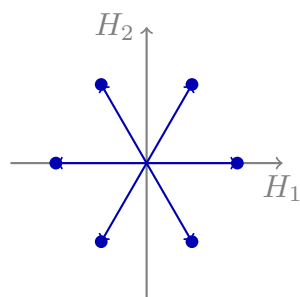
(a) $\mathfrak{u}(1)$ のルート系



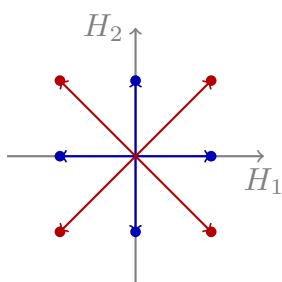
(b) $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ のルート系 ($A_1 \cong B_1$)



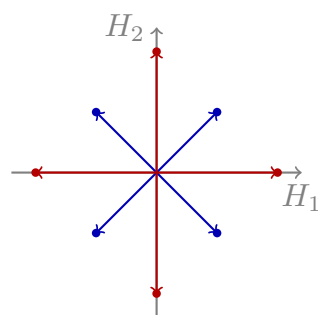
(c) $\mathfrak{so}(4)$ のルート系 ($D_2 \cong A_1 \oplus A_1$)



(d) $\mathfrak{su}(3)$ のルート系 (A_2)



(e) $\mathfrak{so}(5)$ のルート系 (B_2)



(f) $\mathfrak{sp}(4)$ のルート系 (C_2)

The Periodic Table Of Finite Simple Groups

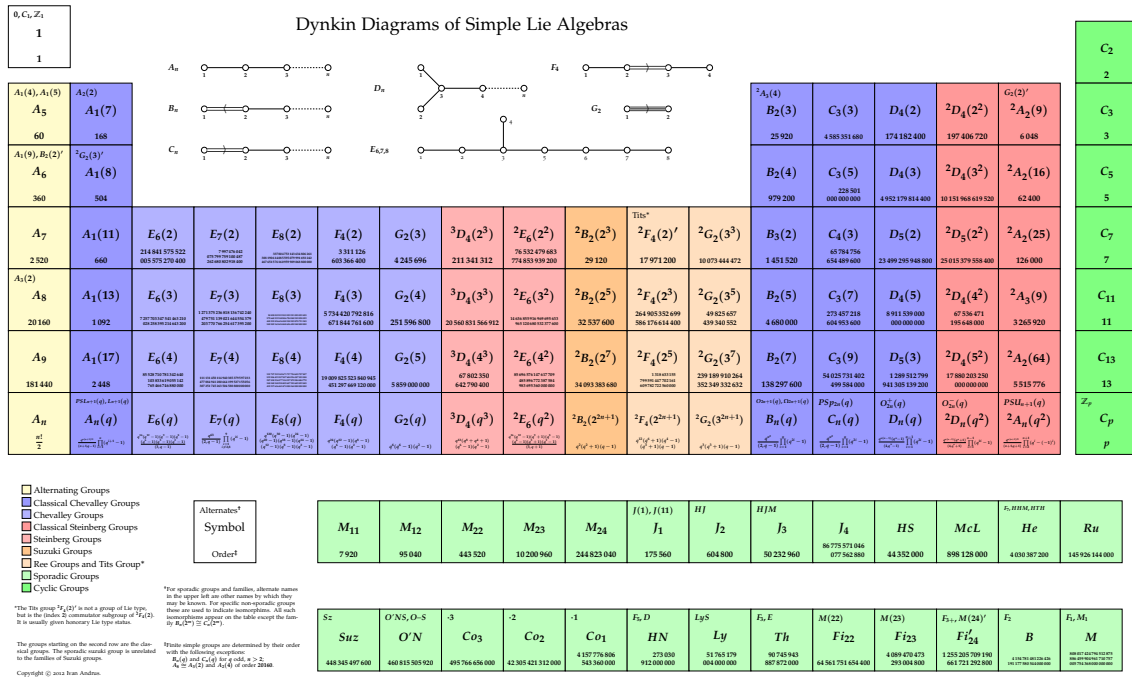


図 2: 有限単純群の周期表

4 表現論の基本技法

第 2 章では、対称性を記述する数学の言語としてリー群とリー代数を導入しました。続く第 3 章では、Cartan 理論という強力なコンパスを手に、リー代数の広大な海を探検し、その果てに「単純リー代数の完全分類」という、全ての基本対称性の地図 (Dynkin 図) を完成させました。

我々はその地図を手に、数学的に可能な全ての根源的対称性のリストを知っています。しかし、物理学者にとっての真の関心は、その次の問いにあります。「これらの抽象的な対称性は、我々が観測する量子状態や粒子といった、具体的な物理系の上でどのように作用 (実現) するのだろうか?」

この問いに答えるための理論が、**表現論 (Representation Theory)** です。リー代数という抽象的な「規則」を、ヒルベルト空間上の具体的な「行列 (演算子)」として対応付ける手法の総称であり、その目的は、与えられた対称性を持つ系に、どのような状態が存在しうるかを完全に明らかにすることにあります。

本章では、任意の半単純リー代数に対して、その既約表現 (これ以上分解できない基本となる表現) を体系的に構成し、解析するための基本的な技法を学びます。これは、 $\mathfrak{su}(2)$ の全ての既約表現がスピン $s = 0, 1/2, 1, \dots$ で尽くされることを見出したプロセスを、一般のリー代数へ拡張する試みです。

本章で扱う主な技法は以下の通りです。

1. **最高ウェイト表現の構成:** $\mathfrak{su}(2)$ の表現を、昇降演算子で「昇りきった」状態 $(J_+ |s, s) = 0$ から出発して構成したように、一般の代数でも「最高ウェイト状態」を定義し、そこから全ての状態をシステマティックに生成する、最も強力な表現構成法を学びます。最高ウェイトベクトルが、既約表現を完全にラベル付けする「量子数」の組となります。
2. **Young 図と $SU(n)$ 表現:** 特に、物理学で重要な $\mathfrak{su}(n)$ 型の対称性に対して、その既約表現を「箱の並び方」で直観的に表現する、Young 図（ヤング図）という美しい道具を導入します。これにより、表現の次元やテンソル積の分解といった複雑な計算が、驚くほど簡単な組み合わせの問題に帰着します。
3. **テンソル積と Clebsch-Gordan 係数:** 「スピン $1/2$ の粒子 2 つを合成すると、スピン 1 とスピン 0 の状態が得られる」といった、系の合成（角運動量の合成）を一般化します。これは表現のテンソル積を既約分解する問題であり、その際の係数である Clebsch-Gordan 係数の一般論を扱います。
4. **Weyl の特性公式:** 最高ウェイトの情報だけから、表現の次元などの重要な特性量を計算する、Weyl の強力な公式を紹介します。

これらの技法を身につけることで、我々は Dynkin 図で与えられた任意の対称性に対し、それが支配する物理系にどのような粒子や状態が存在し、それらがどのように相互作用するのかを、具体的に予言する力を手に入れることができるのです。

4.1 表現の定義と基本例

いよいよ、本章の核心である「表現」そのものを、数学的に定式化していきます。直観的に言えば、表現とは、リー代数という抽象的な演算規則を、物理学者が慣れ親しんだベクトル空間に作用する「行列」の集まりとして具体的に実現 (represent) することです。

定義 4.1: リー代数の表現

Lie 代数 \mathfrak{g} のベクトル空間 V 上の**表現 (representation)** とは、 \mathfrak{g} から V 上の線形変換の集合 $\text{End}(V)$ への、Lie 括弧積の構造を保つ写像 (準同型写像) D のことです。

$$D : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$$

ここで、 V を**表現空間**、その次元 $\dim V$ を**表現の次元**と呼びます。

Lie 括弧積を保つという条件は、 \mathfrak{g} の任意の元 X, Y に対して、次の式が成り立つことを意味します。

$$D([X, Y]) = [D(X), D(Y)]$$

左辺の括弧積は \mathfrak{g} における抽象的な演算、右辺の括弧積は具体的な行列 (線形変換) としての**交換子** $D(X)D(Y) - D(Y)D(X)$ であることに注意してください。

物理学の目標は、可能な表現を全て見つけ出すことですが、実際には、より基本的な表現の「組み合わせ」で書ける表現も存在します。そこで、表現をその構造によって分類します。

- **部分空間**: 表現空間 V の部分ベクトル空間 $W \subset V$ が**不変部分空間**であるとは、 W の任意の元 $|w\rangle$ と \mathfrak{g} の任意の元 X に対して、 $D(X)|w\rangle$ が再び W の中に留まる ($D(X)|w\rangle \in W$) ことを言います。
- **可約表現**: V と $\{0\}$ 以外に、自明でない不変部分空間を持つ表現を**可約 (reducible)** であると言います。
- **既約表現 (irrep)**: V と $\{0\}$ 以外に不変部分空間を持たない表現を**既約 (irreducible)** であると言います。これは、表現における「素数」のようなものであり、我々が探し求めるべき基本的な構成要素です。
- **完全可約表現**: 既約表現の直和として分解できる表現を**完全可約 (completely reducible)** と言います。コンパクト Lie 群の有限次元ユニタリ表現は、常に完全可約となることが保証されています。

これらの定義に慣れるため、全ての Lie 代数が持つ、最も基本的な表現の例を見てみましょう。

例：3つの基本的な表現

1. 自明な表現 (Trivial Representation)

- **表現空間**: 1次元ベクトル空間 $V = \mathbb{C}$
- **写像**: 全ての $X \in \mathfrak{g}$ に対して、 $D(X) = 0$ (ゼロ行列) と定めます。
- これは明らかに交換関係 $D([X, Y]) = 0, [D(X), D(Y)] = [0, 0] = 0$ を満たします。物理学では、スピン 0 の状態 (シングレット) に対応する、最も単純な表現です。

2. 定義表現 / 基本表現 (Defining / Fundamental Representation)

- **対象**: $\mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n)$ のような、行列として定義される Lie 代数。
- **表現空間**: その行列が作用する本来のベクトル空間。例えば $\mathfrak{su}(n)$ なら $V = \mathbb{C}^n$ です。
- **写像**: リー代数の元 X (行列) を、その行列自身に対応させます: $D(X) = X$ 。
- 交換関係 $D([X, Y]) = [X, Y]$ と $[D(X), D(Y)] = [X, Y]$ は自明に満たされます。 $\mathfrak{su}(2)$ では 2次元 (スピン 1/2) 表現、 $\mathfrak{su}(3)$ では 3次元 (クォーク) 表現に対応し、最も基本的なため**基本表現**とも呼ばれます。

3. 随伴表現 (Adjoint Representation)

- **表現空間**: Lie 代数 \mathfrak{g} 自身をベクトル空間とみなします ($V = \mathfrak{g}$)。
- **写像**: $D(X) = \text{ad}(X)$ 、すなわち、作用を受ける元 $Y \in \mathfrak{g}$ に対して $D(X)(Y) = [X, Y]$ と定めます。
- この表現が括弧積を保つことは、ヤコビ恒等式そのものでした。表現の次元は、代数自身の次元に等しくなります。 $\mathfrak{su}(3)$ では 8次元表現となり、グルーオンの状態を記述します。

4.2 最高ウェイト表現の構成

前節では、表現の基本的な定義と、自明・定義・随伴といった具体例を見ました。しかし、与えられた Lie 代数に対し、その全ての既約表現を抜け漏れなく、かつシステムティックに見つけ出すにはどうすれば良いのでしょうか。その問いに対する、現代の表現論の標準的な回答が、本節で学ぶ**最高ウェイト表現 (highest weight representation)** の理論です。

この手法のアイデアは、我々が最もよく知る $\mathfrak{su}(2)$ (角運動量) の表現を構成したときの手順を、そっくりそのまま一般の半単純 Lie 代数に拡張したものです。角運動量の量子状態を思い出すと、

1. まず、 z 成分を表す J_z (Cartan 部分代数) に着目しました。
2. 次に、昇降演算子 J_+ で「これ以上上がれない」状態、すなわち $J_+ |j, m = j\rangle = 0$ となる**最高ウェイト状態**を見つけました。
3. そして、その状態に J_- を繰り返し作用させることで、表現に属する全ての状態 $|j, m\rangle$ を生成しました。
4. この表現全体は、ただ一つの量子数、最高ウェイト j によって完全に特徴づけられました。

この 4 ステップを一般化することで、任意の半単純 Lie 代数の既約表現を構成することができます。

ウェイトとウェイト図

まず、表現空間のベクトルをラベル付けする「量子数」を一般化します。表現 D の表現空間 V に属するベクトル $|v\rangle$ が、Cartan 部分代数 \mathfrak{h} の全ての元 H_i の同時固有ベクトルであるとき、

$$D(H_i) |v\rangle = \mu_i |v\rangle \quad (i = 1, \dots, r)$$

この固有値の組 (r 次元のベクトル) $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ を、その状態の**ウェイト (weight)** と呼びます。ルートが代数の構造を記述するベクトルであったのに対し、ウェイトは表現空間の状態を記述するベクトルです。

ある表現に現れる全てのウェイトをプロットしたものを**ウェイト図 (weight diagram)** と呼びます。 $\mathfrak{su}(3)$ のフレーバー対称性でクォークやハドロンを六角形や三角形に配置した図は、まさにこのウェイト図の一例です。

定義 4.2: 最高ウェイト (Highest Weight)

ある既約表現に現れる全てのウェイトの中で、定められた順序 (辞書式順序など) に従って「最も高い」ウェイトのことを、その表現の**最高ウェイト**と呼び、 Λ で表します。

最高ウェイト Λ を持つ状態ベクトル $|\Lambda\rangle$ は**最高ウェイト状態**と呼ばれ、以下の極めて重要な性質を持ちます。

$$D(E_\alpha) |\Lambda\rangle = 0 \quad (\text{for all positive roots } \alpha)$$

すなわち、最高ウェイト状態は、全ての「上昇演算子」 E_α によって消滅します。これは

$J_+ |j, j\rangle = 0$ の完全な一般化です。

この最高ウェイトという概念が、表現論における羅針盤となります。

定理：最高ウェイトの定理

任意の（有限次元）既約表現は、以下の性質を持つ。

1. **一意性**: 既約表現は、ただ一つの最高ウェイトを持つ。
2. **非縮退性**: 最高ウェイトに対応する状態（ウェイト空間）は、常に 1 次元である。
3. **同値性**: 二つの既約表現が同値である（行列の基底変換で移り合える）ための必要十分条件は、それらの最高ウェイトが等しいことである。

この定理は、「**最高ウェイトを一つ指定すれば、既約表現が一つに決まる**」という、表現の分類における最も重要な原理を確立します。つまり、最高ウェイトが既約表現のユニークな「識別番号」の役割を果たすのです。

既約表現の構成法

以上のことから、既約表現の構成は以下のアルゴリズムで実行されます。

1. 許される最高ウェイト Λ を一つ選ぶ。
2. 最高ウェイト状態 $|\Lambda\rangle$ を用意する。
3. 全ての「下降演算子」 $D(E_{-\alpha})$ を $|\Lambda\rangle$ に繰り返し作用させることで、表現空間に属する他の全ての状態ベクトルを生成する。

この手続きで生成された状態全体が、最高ウェイト Λ に対応する既約表現空間 $V(\Lambda)$ をなします。

では、「許される最高ウェイト」とは何でしょうか。実は、任意のベクトルが最高ウェイトになれるわけではなく、ルートとの間に特定の整数性を満たすものだけに限られます。そのようなベクトルは、**基本ウェイト** ω_i と呼ばれる r 個の特別なベクトルを基底として、

$$\Lambda = \sum_{i=1}^r k_i \omega_i \quad (k_i \text{ は非負整数})$$

と書けることが証明されています。この整数の組 (k_1, k_2, \dots, k_r) は **Dynkin ラベル** と呼ばれ、既約表現を完全に指定します。

例： $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{su}(3)$ の Dynkin ラベル

- $\mathfrak{su}(2)$ (A_1): ランク 1 なので、基本ウェイトは ω_1 の一つだけです。Dynkin ラベルは非負整数 k_1 のみです。最高ウェイトはスピンの大きさ j に対応し、 $j = k_1/2$ の関係があります。
– $(k_1 = 0) \rightarrow j = 0$ (1 次元、自明な表現)

- $(k_1 = 1) \rightarrow j = 1/2$ (2 次元、基本表現)
- $(k_1 = 2) \rightarrow j = 1$ (3 次元、随伴表現)
- $\mathfrak{su}(3)$ (A_2): ランク 2 なので、基本ウェイトは ω_1, ω_2 の二つ。既約表現は二つの非負整数 (k_1, k_2) で指定されます。
 - $(1, 0)$: クォークが属する 3 次元の**基本表現 3**。最高ウェイトは $\Lambda = \omega_1$ 。
 - $(0, 1)$: 反クォークが属する 3 次元の**反基本表現 $\bar{3}$** 。最高ウェイトは $\Lambda = \omega_2$ 。
 - $(1, 1)$: グルーオンが属する 8 次元の**随伴表現 8**。最高ウェイトは $\Lambda = \omega_1 + \omega_2$ 。
 - $(2, 0)$: 6 次元表現 **6**、 $(0, 2)$: $\bar{6}$ 、 $(3, 0)$: 10 次元表現 **10** など、無限に続きます。

このように、Dynkin ラベルという少数の整数によって、複雑な表現が明快に整理・分類されるのです。

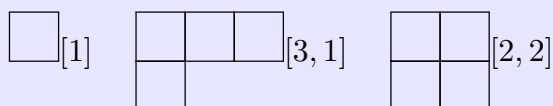
4.3 Young 図と $\mathfrak{su}(n)$ 表現の分類

最高ウェイト理論は、任意の半単純 Lie 代数の既約表現を分類する、普遍的で強力な手法です。しかし、物理学で特によく使われる $\mathfrak{su}(n)$ 系列の代数 (Dynkin 図 A_{n-1}) については、その表現を遥かに直観的かつ視覚的に扱うことができる、驚くべきツールが存在します。それが **Young 図 (Young diagram)** です。

Young 図を用いると、 $\mathfrak{su}(n)$ の既約表現の指定、その次元の計算、さらには表現の合成 (テンソル積) の分解といった複雑な操作が、まるでパズルのように、箱を並べたり数を数えたりする簡単な組み合わせの問題に帰着します。これは、特に素粒子物理学において、クォークモデルなどを扱う際に絶大な威力を発揮します。

定義 4.3: Young 図 (Young Diagram)

Young 図とは、複数の箱 (セル) を左揃え・上揃えに並べた図形のことで、下の行の箱の数は、その上の行の箱の数以下でなければなりません。



$\mathfrak{su}(n)$ の全ての有限次元既約表現は、ただ一つの Young 図と一対一に対応します。この対応は、粒子の波動関数の対称性と深く結びついています。

- **横一列の図**: k 個の箱が横に並んだ図は、 k 階の**完全対称テンソル**に対応します。
- **縦一列の図**: k 個の箱が縦に並んだ図は、 k 階の**完全反対称テンソル**に対応します。
- **一般的な図**: 様々な形の図は、より複雑な混合対称性を持つテンソルに対応します。

Young 図による表現の次元計算

Young 図の最も実用的な応用の一つが、対応する既約表現の次元を簡単に計算できることです。これは「フック長の公式」として知られています。

$\mathfrak{su}(n)$ 表現の次元公式

Young 図の各箱 (i, j) (i 行 j 列目) について、


- **フック長** $h(i, j)$: その箱自身 (1) + 真下にある箱の数 + 右隣にある箱の数。
- **因子** $f(i, j)$: $n + j - i$ 。

を計算する。このとき、表現の次元 d は、全ての箱についての因子の積を、全ての箱についてのフック長の積で割ることで与えられます。

$$d = \frac{\prod_{\text{all boxes}} f(i, j)}{\prod_{\text{all boxes}} h(i, j)}$$

例: $\text{SU}(3)$ の表現の次元

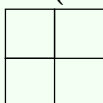
- **基本表現 3 (クォーク)**

– 図: 

– 箱 (1,1): 因子 $3 + 1 - 1 = 3$ 。フック長 1。

– 次元 $d = \frac{3}{1} = 3$ 。

- **随伴表現 8 (グルーオン)**

– 図: 

– 箱 (1,1): 因子 $3 + 1 - 1 = 3$ 。フック長 3。

– 箱 (1,2): 因子 $3 + 2 - 1 = 4$ 。フック長 1。

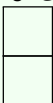
– 箱 (2,1): 因子 $3 + 1 - 2 = 2$ 。フック長 1。

– 次元 $d = \frac{3 \times 4 \times 2}{3 \times 1 \times 1} = 8$ 。

テンソル積の分解

Young 図は、表現の合成（テンソル積）を既約分解する際にも威力を発揮します。これは、「一つの図形に、もう一つの図形の箱を、特定のルールに従って付け加えていく」という、純粹に組み合わせ的な操作で実行できます。

例：su(3) における $3 \otimes \bar{3}$

クォーク (3) と反クォーク ($\bar{3}$) を合成するとどうなるか見てみましょう。反クォークに対応する $\bar{3}$ は、su(3) では縦 2 つの箱で表される図  に対応します。この積の分解は、組み合わせ論的な計算により、次のようになります。

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

右辺の二つの図の次元を計算すると、それぞれ次元 8 (随伴表現) と次元 1 (自明な表現) となります。これは、物理的に「クォークと反クォークを合成すると、中間子 (メソン) であるグルーオン (8 次元) と、シングレット状態 (1 次元) が作られる」という、素粒子物理学の基本的事実を見事に再現しています。

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

このように、Young 図は抽象的な代数の問題を、具体的で直観的な図形の操作へと翻訳してくれる、物理学者にとっての強力な味方なのです。

4.4 テンソル積と Clebsch – Gordan 係数

これまでの節では、個々の既約表現を分類し、構成する方法を学んできました。しかし、物理学ではしばしば複数の系 (粒子) を組み合わせた、より複雑な複合系を扱います。例えば、水素原子は陽子と電子という二つのスピン 1/2 粒子から構成されています。

このような複合系の状態は、量子力学の原理に従い、個々の系の状態空間のテンソル積で記述されます。では、個々の系が持つ対称性は、複合系全体ではどのように実現されるのでしょうか。これが、表現のテンソル積という問題です。

定義 4.4: 表現のテンソル積

Lie 代数 \mathfrak{g} の二つの表現 D_1, D_2 が、それぞれ表現空間 V_1, V_2 上で作用しているとする。このとき、二つの表現のテンソル積表現 $D = D_1 \otimes D_2$ は、テンソル積空間 $V = V_1 \otimes V_2$ 上に、次のように作用する表現として定義されます。

$$D(X) = D_1(X) \otimes I_2 + I_1 \otimes D_2(X)$$

ここで、 $X \in \mathfrak{g}$ は代数の生成子、 I_1, I_2 はそれぞれ V_1, V_2 上の恒等演算子です。

この演算規則は、積の微分法則 $d(fg) = (df)g + f(dg)$ と同じ形をしており、生成子 (無限小変換) が系の第一成分か第二成分のどちらかに作用する、という考えに対応しています。重要なのは、たとえ D_1, D_2 が既約表現であっても、そのテンソル積 $D_1 \otimes D_2$ は一般に可約表現となることです。したがって、物理的に重要なのは、このテンソル積表現を既約表現

の直和に分解する**既約分解**です。

$$D_1 \otimes D_2 = \bigoplus_k D_k \quad (D_k \text{ は既約表現})$$

この既約分解は、物理的には「角運動量の合成則」としてよく知られています。

Clebsch-Gordan 係数：基底の架け橋

テンソル積の既約分解は、表現空間における基底の取り換えに対応します。

- **積基底（古い基底）**：個々の系の状態が明確な基底。例えば、二つのスピン系の状態を $|s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle$ のように個別の量子数で指定する。
- **総和基底（新しい基底）**：複合系全体の量子数が明確な基底。例えば、合成された全角運動量の量子数 $|S, M\rangle$ で状態を指定する。

この二つの異なる物理的描像を結びつける変換係数が、**Clebsch-Gordan 係数**です。

$$|S, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{s_1, m_1; s_2, m_2}^{S, M} |s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle$$

Clebsch-Gordan 係数は、与えられた二つの既約表現から、特定の既約表現を作り出す際の「レシピ」であり、その値は代数の構造によって完全に決まります。

例：スピン 1/2 × スピン 1/2 の合成 ($\mathfrak{su}(2)$)

物理学で最も有名な例を見てみましょう。二つのスピン 1/2 粒子（表現 **2**）を合成します。

- **テンソル積**: $2 \otimes 2$ 。表現空間は $2 \times 2 = 4$ 次元です。
- **既約分解**: 角運動量の合成則より、全スピンは $S = 1$ （三重項）と $S = 0$ （一重項）が可能となります。

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$$

- **積基底**: $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ の 4 状態。
- **総和基底と CG 係数**: 全スピンが確定した状態は、積基底を用いて以下のように書けます。

$$\begin{aligned} |S=1, M=1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ |S=1, M=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |S=1, M=-1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \\ |S=0, M=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

このときの係数 1 や $\pm 1/\sqrt{2}$ が、この場合に現れる Clebsch-Gordan 係数です。

$\mathfrak{su}(3)$ におけるクォークと反クォークの合成 ($3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$) など、より複雑な代数にお

いても、この Clebsch-Gordan 係数を計算することで、複合粒子の具体的な状態を構成することができるのです。

4.5 Weyl の特性公式

本章では、最高ウェイト理論や Young 図といった、既約表現を構成し、分類するための強力な技法を学んできました。これらは、いわば一つ一つの表現を「手作り」するための具体的な手法でした。

本節では、それらとは少し趣向を変え、与えられた既約表現の性質、特にその「次元」を、最高ウェイトの情報だけから直接計算できる、驚くほど強力な「マスター・フォーミュラ」を紹介します。それが、ヘルマン・ワイルによって導かれた **Weyl の特性公式 (Weyl character formula)** と、その応用である **Weyl の次元公式 (Weyl dimension formula)** です。

表現の指標 (Character)

次元よりもさらに豊富な情報を持つ量として、表現の**指標 (character)** があります。これは、表現行列のトレース (対角和) として定義されます。

定義 4.5: 表現の指標 (Character)

リー群 G の表現 D に対して、その指標 χ_D は、群の元 $g \in G$ の関数として、以下で定義されます。

$$\chi_D(g) = \text{Tr}(D(g))$$

指標は、表現行列の基底の取り方によらないため、表現そのものを特徴づける「指紋」のような役割を果たします。特に、指標を見れば、ある表現がどの既約表現をいくつ含んでいるかという、既約分解の構造が完全にわかります。

Weyl の特性公式は、任意の半単純 Lie 代数において、最高ウェイト Λ で指定される既約表現 $V(\Lambda)$ の指標を与える、完全な公式です。その数式は、ルート系の対称性 (ワイル群) を使った美しい形をしていますが、ここではその物理的に最も重要な応用である、次元を計算する公式に焦点を当てます。

Weyl の次元公式

指標の定義で、 g を単位元に近づける極限を取ることで、表現の次元 $\dim V = \text{Tr}(D(e))$ を計算することができます。この計算を実行した結果が、Weyl の次元公式です。

Weyl の次元公式

最高ウェイト Λ を持つ既約表現 $V(\Lambda)$ の次元は、以下の公式で与えられます。

$$\dim V(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{\langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle}$$

ここで、

- Δ^+ は、全ての正ルート（昇降演算子に対応するルート）の集合です。
- ρ は Weyl ベクトルと呼ばれ、全ての正ルートの和の半分で定義されます ($\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$)。
- $\langle \mu, \nu \rangle$ は、ウェイト空間上の内積（キリング形式から誘導される）です。

この公式は、「最高ウェイトとルート系の情報さえあれば、どんな複雑な表現の次元でも計算できる」ことを保証します。

この公式の威力を、我々がよく知る例で確かめてみましょう。

例：su(3) の随伴表現の次元

su(3) (ランク 2) の随伴表現（グルーオン、8）の次元を計算してみます。

- **最高ウェイト**: 随伴表現の最高ウェイトは、最も高いルートに等しく、 $\Lambda = \alpha_1 + \alpha_2$ です。
- **正ルート**: $\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ の 3 つです。
- **Weyl ベクトル**: $\rho = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)) = \alpha_1 + \alpha_2$ となります。
- **内積**: 単純ルートの内積を $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = A_{ij}$ (Cartan 行列) と正規化すると、 $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2, \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 2, \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$ となります。

これらを使って、公式の積の各項を計算します。

1. $\alpha = \alpha_1$ の項:

$$\begin{aligned} \frac{\langle (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2), \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \rangle} &= \frac{\langle 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \rangle} \\ &= \frac{2\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle} \\ &= \frac{2(2) + 2(-1)}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

2. $\alpha = \alpha_2$ の項: (対称性から同様に)

$$\frac{\langle 2\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = \frac{2(-1) + 2(2)}{-1 + 2} = \frac{2}{1} = 2$$

3. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ の項:

$$\frac{\langle 2(\alpha_1 + \alpha_2), \alpha_1 + \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 \rangle} = 2$$

全ての項の積をとると、次元は $2 \times 2 \times 2 = 8$ となり、Young 図や随伴表現の次元の定義から得られた結果と、見事に一致しました。

このように、Weyl の公式は、表現論の様々な側面を結びつけ、その構造を深く理解するための強力な理論的支柱となっているのです。

5 量子力学への応用例

これまでの章で、我々はリー群とリー代数のための強力な数学的道具一式を揃えてきました。第2章で基本言語を学び、第3章では Cartan 理論を用いて可能な限りの対称性の「周期表」(Dynkin 図)を完成させ、第4章ではそれらの対称性がどのように実現されるか(表現論)の技法を習得しました。

本章は、いわばその「収穫の章」です。抽象的な数学の道具箱を開け、それを現代物理学の根幹である量子力学の世界に持ち込みます。これまで学んできた最高ウェイトやルートベクトル、Young 図といった概念が、スピン、角運動量、フレーバー量子数、粒子多重項といった、観測可能で具体的な物理現象と、いかに見事に結びつくかを目の当たりにするでしょう。

まず、量子力学における最も基本的な対称性である空間回転を取り上げ、 $\mathfrak{su}(2)/\mathfrak{so}(3)$ 代数が角運動量の理論そのものであることを確認します。次に、球面調和関数が回転群の表現論から自然に現れることを見ます。そして、対称性の概念を内部空間にまで拡張し、 $\mathfrak{su}(3)$ フレーバー対称性がクォークモデルにおけるハドロンの「八重項」を预言する様を追体験します。

本章を通して、抽象的な数学的理論が、物理現象を分類し、预言するための、いかに実践的で強力なツールであるかを体感することが目標です。理論と現実が交差する、物理学の醍醐味を味わっていきましょう。

5.1 $SU(2)/SO(3)$ と角運動量

量子力学における最も身近で基本的な連続的対称性は、我々が住む3次元空間の**回転対称性**です。孤立した原子や素粒子が従う物理法則は、我々がどちらの方向を向いて実験しても変わらないはずです。この直観的な要請の帰結として、角運動量保存則が導かれます。

空間回転の操作全体のなす群は、行列式が1の3x3直交行列の集合、**特殊直交群 $SO(3)$** です。その Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ の生成子 L_i ($i = x, y, z$) が満たす交換関係は、

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \quad (\hbar = 1)$$

でした(物理学の慣例に従い、エルミートな生成子を用い、構造定数から i を括り出しています)。この式こそが、量子力学の講義で学ぶ**角運動量演算子の定義**そのものです。つまり、角運動量理論とは、回転対称性の帰結を代数的に表現したものに他なりません。

ここで、話はもう少し面白くなります。第2章で触れたように、 $\mathfrak{so}(3)$ と全く同じ Lie 代数を持つ、もう一つの重要な Lie 群が存在します。それが、行列式が1の2x2ユニタリ行列の集合、**特殊ユニタリ群 $SU(2)$** です。 $\mathfrak{su}(2)$ の生成子 $J_i = \sigma_i/2$ もまた、全く同じ交換関係を満たします。

代数レベルでは $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ ですが、群レベルではこの二つは異なります。 $SU(2)$ は $SO(3)$ の**二重被覆群 (double cover)** と呼ばれる関係にあり、簡単に言えば「より大きな」群です。 $SO(3)$ の元(3次元空間の回転)一つに対して、 $SU(2)$ の元がちょうど二つ(符号が違っただけの行列 U と $-U$) 対応します。

スピンの起源：なぜ世界は $SU(2)$ で記述されるのか？

この群構造の違いは、単なる数学的な詳細ではありません。それは、自然界におけるスピン $1/2$ 粒子（フェルミオン）の存在を説明する、根源的な理由となります。

- **$SO(3)$ の既約表現**を構成すると、軌道角運動量と同様の**整数**量子数 ($j = 0, 1, 2, \dots$) に対応する表現しか現れません。
- **$SU(2)$ の既約表現**を構成すると、整数表現に加えて、**半整数**量子数 ($j = 1/2, 3/2, \dots$) に対応する表現が許されます。

電子のようなスピン $1/2$ 粒子は、空間を 360° (2π) 回転させると、その波動関数の位相が逆転します ($\psi \rightarrow -\psi$)。これは、その状態が $SO(3)$ ではなく、より大きな $SU(2)$ の表現に属していることの直接的な証拠です。 720° (4π) 回転させることで、ようやく元の状態に戻ります。自然は、より根源的な対称性として $SU(2)$ を採用しているのです。

角運動量理論の再訪

我々が開発した表現論の道具で、角運動量理論を改めて見てみましょう。

- **Lie 代数:** $\mathfrak{su}(2)$ は、Dynkin 図 A_1 に対応する、最も単純な半単純 Lie 代数です。
- **ランク:** ランクは 1 です。これは、Cartan 部分代数がただ一つの生成子 J_z で張られることに対応します。
- **表現のラベル:** 既約表現は、一つの非負整数である Dynkin ラベル k で指定されます。
- **最高ウェイト:** 物理で使う角運動量量子数（スピン） j は、最高ウェイトに対応し、 $j = k/2$ の関係にあります。 $k = 0, 1, 2, \dots$ なので、 $j = 0, 1/2, 1, \dots$ となり、整数スピンと半整数スピンの両方が自然に現れます。
- **次元:** 表現の次元（状態の縮退度）は $d = 2j + 1 = k + 1$ となります。

このように、量子力学の角運動量に関する全ての性質（量子数の種類、縮退度など）は、 $\mathfrak{su}(2)$ の表現論から、数学的な必然として導出されるのです。

5.2 球面調和関数と回転群表現

前節では、角運動量代数 $\mathfrak{so}(3)$ とその二重被覆である $\mathfrak{su}(2)$ の表現論が、角運動量の量子化（整数および半整数スピン）を数学的に説明することを見ました。そこでは、状態を $|l, m\rangle$ のような抽象的なベクトルとして扱いました。

本節では、この抽象的な状態が、我々の 3 次元空間の波動関数として、どのように具体的に記述されるかを探求します。そして、量子力学の講義で中心ポテンシャル問題を解いた際に現れた**球面調和関数** $Y_{lm}(\theta, \phi)$ が、実は回転群 $SO(3)$ の表現論における自然な構成要素そのものであることを明らかにします。

関数空間上の表現

まず、回転という操作が、個々の点の座標だけでなく、空間全体に定義された関数（場や波動関数）にどのように作用するかを考えます。ある関数 $\psi(\vec{x})$ と、座標を $\vec{x}' = R\vec{x}$ へと変換する回転操作 R を考えましょう。

回転後の新しい関数 $\psi'(\vec{x})$ は、回転前の関数の値を引き継ぐはずで、すなわち、回転後の点 \vec{x}' での値は、回転前の点 \vec{x} での値と同じでなければなりません。

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(\vec{x})$$

ここで $\vec{x} = R^{-1}\vec{x}'$ なので、これを代入すると、

$$\psi'(\vec{x}') = \psi(R^{-1}\vec{x}')$$

となります。これは、回転操作 R に対応する関数空間上の演算子 $D(R)$ の作用が、 $D(R)\psi(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\vec{x})$ と定義されることを意味します（ R^{-1} が現れるのは、関数自体を能動的に回転させるためです）。

この演算子 $D(R)$ の集まりは、関数空間上に実現された $SO(3)$ の（無限次元の）表現をなします。この表現は、様々な角運動量を持つ状態が混ざり合った、一般に**可約**な表現です。物理学の定石に従い、この巨大な表現空間を、基本的な構成要素である**既約表現**へと分解していきましょう。

球面調和関数と既約分解

関数空間を、球面上の二乗可積分関数の空間 $L^2(S^2)$ に限定します。この関数空間は、 $SO(3)$ の表現として、以下のように既約表現の直和に分解できることが知られています。

$$L^2(S^2) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} V_l$$

ここで、 V_l は角運動量量子数 l に対応する、 $SO(3)$ の $(2l+1)$ 次元の既約表現空間です。そして、この既約部分空間 V_l の正規直交基底をなす関数こそが、まさしく**球面調和関数** $\{Y_{lm}(\theta, \phi) \mid m = -l, \dots, +l\}$ なのです。

これは、球面調和関数が以下の素晴らしい変換性質を持つことを意味します。

- ある球面調和関数 Y_{lm} を回転させると、その結果は**同じ l を持つ球面調和関数の線形結合**でしか書けない。異なる l の成分は決して混ざらない。
- その際の係数は、 $SO(3)$ の $(2l+1)$ 次元既約表現行列、すなわち **Wigner の D 行列** $D_{m'm}^{(l)}(R)$ で与えられる。

$$D(R)Y_{lm} = \sum_{m'=-l}^l Y_{lm'} D_{m'm}^{(l)}(R)$$

角運動量演算子との対応

この抽象的な議論が、量子力学の具体的な計算とどう結びつくかを見てみましょう。Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ の生成子である角運動量演算子は、球面座標 (θ, ϕ) を用いて、以下のような微分演算子として書くことができます。

$$L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$$
$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

これらの微分演算子を、関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ に作用させると、

$$L_z Y_{lm}(\theta, \phi) = m Y_{lm}(\theta, \phi)$$
$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$$
$$L_{\pm} Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} Y_{l, m \pm 1}(\theta, \phi)$$

となり、抽象ベクトル $|l, m\rangle$ が満たすべき関係式を寸分違わず満たしていることがわかります。

これは、球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ が、抽象状態ケット $|l, m\rangle$ の座標表示 $\langle \theta, \phi | l, m \rangle$ であることを示しています。

水素原子や 3 次元調和振動子など、中心力ポテンシャルの下でのシュレーディンガー方程式の解に球面調和関数が現れるのは、単なる偶然ではありません。それは、問題設定が持つ回転対称性が、その解の関数形にこのような美しい構造を要請した、必然的な結果なのです。

5.3 SU(3) フレーバー対称性と八重項

$\mathfrak{su}(2)$ の表現論がスピンやアイソスピンの構造を完璧に説明したように、より複雑な Lie 代数の表現論は、さらに豊かな物理的世界を記述します。1950 年代から 60 年代にかけて、陽子や中性子以外にも、K 中間子や Λ 粒子といった、性質は似ているが少しだけ重い「奇妙な（ストレンジ）」新粒子が次々と発見され、物理学者は混乱の中にいました。

この粒子動物園を整理し、その背後にある秩序を見出したのが、 $\mathfrak{su}(2)$ を拡張した **SU(3) フレーバー対称性** のアイデアでした。これは、陽子と中性子をまとめたアイソスピン対称性に、ストレンジネスという新しい量子数を加えた、より大きな対称性です。

SU(3) とクォークモデル

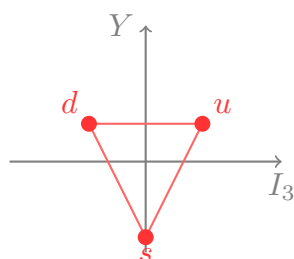
$\mathfrak{su}(3)$ は Dynkin 図 A_2 に対応する、ランク 2 の単純 Lie 代数です。ランクが 2 であるため、その表現に属する状態は、Cartan 部分代数の二つの生成子 H_1, H_2 に対応する、二つの量子数によって分類されます。物理学では、これらの量子数として**アイソスピンの第 3 成分 I_3** と**ハイパーチャージ Y** が選ばれました。

この理論の最も根源的な仮説は、全てのハドロンの（強い相互作用をする粒子）が、より基本的

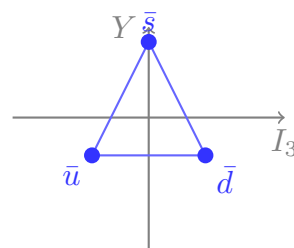
な粒子から構成されている、というものです。

- $\text{su}(3)$ の最も基本的な表現は、3次元の**基本表現 (3)** です。この表現に属する粒子として、マレー・ゲルマンは**クォーク** (アップ u , ダウン d , ストレンジ s) の存在を仮定しました。
- その複素共役表現である**反基本表現 ($\bar{3}$)** には、**反クォーク** ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$) が属します。

これらのクォークと反クォークのウェイト図は、 (I_3, Y) の2次元平面上で美しい三角形をなします。



(a) クォークの表現 $\mathbf{3}$



(b) 反クォークの表現 $\bar{\mathbf{3}}$

八重項の発見

クォークモデルによれば、観測される粒子はクォークの複合状態です。

- **中間子 (メソン)** : 1つのクォークと1つの反クォークからなる ($q\bar{q}$)。
- **バリオン** : 3つのクォークからなる (qqq)。

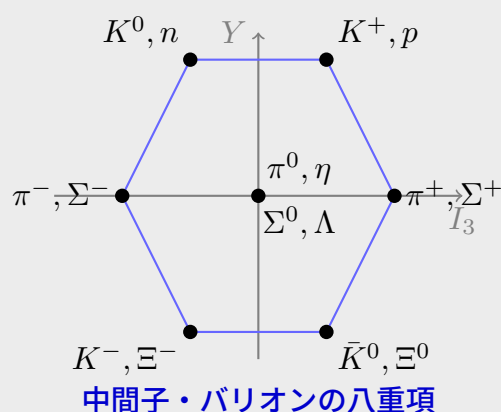
これらの複合状態が属する表現は、表現のテンソル積を既約分解することで明らかになります。

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

この $\text{su}(3)$ の表現論が導き出す数学的結論は、衝撃的な物理的予言をしました。「**中間子は、8個の粒子のグループ (八重項、Octet) と、1個の粒子のグループ (一重項、Singlet) を形成するはずだ**」。これは、当時発見されていたパイ中間子や K 中間子などの粒子群の性質と見事に一致しました。この分類法は、仏教の八正道になぞらえ**八道説 (Eightfold Way)** と呼ばれました。

中間子・バリオンの八重項

$\text{su}(3)$ の 8次元表現 (随伴表現) のウェイト図は、6つの頂点と中心の2つの点からなる美しい六角形を描きます。当時知られていた中間子とバリオンは、この六角形の各点に驚くほど綺麗に収まりました。



理論の勝利： Ω^- 粒子の発見

SU(3) フレーバー対称性の最も劇的な成功は、未知の粒子の予言とその発見でした。バリオンのテンソル積 $3 \otimes 3 \otimes 3$ を既約分解すると、八重項の他に、10 個の粒子からなる**十重項 (Decuplet)** が現れます。

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S \oplus 8_M \oplus 8_M \oplus 1_A$$

当時、この十重項に対応する粒子が 9 個まで発見されていましたが、ウェイト図の頂点の一つだけ空席でした。ゲルマンと大久保は、この対称性に基づき、空席に収まるべき未知の粒子（後に Ω^- と命名）の性質（質量、電荷、ストレンジネス）を正確に予言しました。

1964 年、ブルックヘブン国立研究所での実験で、 Ω^- 粒子が予言と寸分違わぬ性質を持つ粒子として発見されました。これは、物理法則の背後にある対称性を数学的に探求することの正しさと、その驚異的な予言能力を証明する、物理学史に残る金字塔となりました。

5.4 多体量子系における対称性分類

これまでの応用例では、素粒子という「個」の粒子が、SU(2) や SU(3) といった対称性によって、どのように美しい多重項に分類されるかを見てきました。本節では、対称性の応用の舞台を、無数の粒子が相互作用する**多体量子系**（原子核や固体中の電子系など）へと広げます。

多体系のハミルトニアンは極めて複雑であり、そのシュレーディンガー方程式を厳密に解くことは、ほとんどの場合不可能です。しかし、そのような複雑な系であっても、系全体が持つ**対称性**を手がかりにすれば、そのエネルギー準位の構造や縮退度、状態を分類する量子数について、驚くほど多くの情報を引き出すことができます。

対称性によるハミルトニアンのブロック対角化

多体系のハミルトニアン H が、ある Lie 群 G の対称性を持つとします。これは、群の任意の操作 $g \in G$ に対してハミルトニアンが不変であること、すなわち $[g, H] = 0$ を意味します。

このとき、量子力学の基本原則と群論（シュアの補題）から、以下の極めて重要な結論が導かれます。

1. 系のエネルギー固有状態は、 G の既約表現に属するものへと分類できる。
2. 同じ既約表現に属する状態は、**必ず同じエネルギー固有値を持つ** (縮退する)。

これは、巨大なハミルトニアンを、既約表現ごとに小さな「ブロック」へと分解 (ブロック対角化) できることを意味します。我々は、巨大な行列全体を対角化するかわりに、これらの小さなブロックだけを考えればよくなります。これにより、問題の複雑さは劇的に低下します。

例：原子核の $SU(4)$ 超多重項 (Supermultiplet)

原子核は、陽子と中性子という多数の核子が、複雑な核力によって相互作用する典型的な多体系です。核力はスピンの向きにあまり依存せず、また (電磁気力を無視すれば) 陽子と中性子をほぼ対等に扱います。

この近似的な対称性を捉えるため、ユージン・ウィグナーは、核子の 4 つの内部状態 (陽子スピン上向き、陽子スピン下向き、中性子スピン上向き、中性子スピン下向き) を、 \mathbb{C}^4 の基底ベクトルと見なしました。そして、この 4 状態間の変換を記述する $SU(4)$ 対称性を導入しました。

このモデルでは、原子核全体のエネルギー状態は、 $SU(4)$ の既約表現によって分類されます。例えば、Young 図を用いて $SU(4)$ の既約表現を調べることで、特定の核子数を持つ原子核にどのような状態 (スピンとアイソスピンの組み合わせ) が現れ、それらがどのように縮退しているかを予言できます。これは、原子核の複雑なエネルギースペクトルの中に存在する驚くべき規則性を、対称性の観点から見事に説明しました。

物性物理学への応用

対称性の考え方は、固体中の電子系などを扱う物性物理学においても不可欠です。例えば、物質の磁性を記述する基本的なモデルであるハバード模型は、格子上の電子のスピンの自由度に関して $SU(2)$ 対称性を持ちます。これにより、系の全スピンが保存量となり、エネルギー固有状態を全スピンの値によって分類できます。

さらに、特殊な条件下では、この模型がスピンを記述する $SU(2)$ とは別に、電荷の自由度に関連したもう一つの「擬スピン」 $SU(2)$ 対称性を持つことがあり、全体として $SU(2) \times SU(2) \cong SO(4)$ という、より大きな対称性が出現することが知られています。このような隠れた対称性を見つけ出すことは、超伝導などの複雑な量子現象のメカニズムを解明する上で、極めて重要な役割を果たします。

このように、素粒子の世界から原子核、そして物性物理に至るまで、対称性に基づいて系进行分类し、その性質を理解するという方法は、現代物理学のあらゆる分野を貫く、普遍的かつ強力な指導原理となっているのです。

5.5 超対称代数・量子群へのイントロダクション

本教科書で探求してきた Lie 代数の理論は、20 世紀の物理学の発展と歩調を合わせて、対称性の数学的言語として確立されました。しかし、理論物理学の探求はそこで終わりません。本節では、Lie 代数の概念そのものを拡張する、より現代的な二つのアイデア、「超対称代数」と「量子群」への入門的な紹介を行います。これらは、現代の素粒子論や物性物理学の最前線で活発に研究されている、新しい対称性の形です。

超対称代数：ボソンとフェルミオンを繋ぐ対称性

これまでに扱ってきた全ての Lie 代数（ゲージ対称性やフレーバー対称性など）は、ボソン（力を媒介する粒子など）を別のボソンに、フェルミオン（物質を構成する粒子など）を別のフェルミオンに変換する対称性でした。両者を決して混ぜることはありません。

超対称性 (Supersymmetry, SUSY) とは、この最後の壁を打ち破る、より根源的であるかもしれない対称性です。超対称性変換は、**ボソンをフェルミオンに、フェルミオンをボソンに変換**します。

この新しい変換を実現するためには、Lie 代数の構造を拡張する必要があります。通常の Lie 代数が交換子 $[A, B] = AB - BA$ のみで定義されていたのに対し、超対称代数（より一般には**次数付き Lie 代数**）は、交換子に加えて**反交換子** $\{A, B\} = AB + BA$ もその定義に含みます。

- **ボソンの生成子** B_i : 通常の Lie 代数の生成子（運動量、角運動量など）。互いに交換関係を満たす。
- **フェルミオンの生成子** Q_α : スピノル的な性質を持つ新しい生成子。超対称性変換を引き起こす。

これらの生成子は、以下のような（反）交換関係を満たします。

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu$$

最も重要なのは、二つのフェルミオンの生成子の「反交換子」が、ボソンの生成子である運動量演算子 P_μ を与えるという関係です。これにより、時空の対称性（ポアンカレ代数）と内部対称性が見事に融合されます。

もし超対称性が自然界の真の対称性であるならば、我々が知る全ての素粒子には、スピンの 1/2 だけ異なる「超対称性パートナー」が存在するはずです。例えば、電子（フェルミオン）にはスピン 0 のスカラー電子（セレクトロン、ボソン）が、光子（ボソン）にはスピン 1/2 のフォティーノ（フェルミオン）が対応します。これらのパートナー粒子の探索は、LHC などの加速器実験の主要な目的の一つです。

量子群：変形された対称性

Lie 代数のもう一つの重要な一般化が、**量子群 (Quantum Group)** です。これは、Lie 代数の構造そのものを、あるパラメータ q を用いて連続的に「変形 (deform)」させたものです。

例えば、 $\mathfrak{su}(2)$ の交換関係 $[J_+, J_-] = 2J_z$ は、量子群 $U_q(\mathfrak{su}(2))$ においては、

$$[J_+, J_-] = \frac{q^{2J_z} - q^{-2J_z}}{q - q^{-1}}$$

のように変更されます。ここで、 q は複素数の変形パラメータです。重要なのは、このパラメータ q を 1 にする極限をとると、右辺はロピタルの定理により $2J_z$ に収束し、元の Lie 代数がきちんと回復される点です。

「群」という名前が付いていますが、量子群は厳密には群ではなく、**ホップ代数**と呼ばれる、より豊かな代数構造を持っています。この代数構造のおかげで、通常の Lie 代数と同様に表現のテンソル積などを矛盾なく定義できます。

量子群は、2次元の可解な統計力学模型や、3次元トポロジーにおける結び目理論、場の量子論など、理論物理学の様々な場面で自然に現れる数学的構造です。これは、我々がこれまで学んできた「剛体」のような対称性が、特定の状況下ではパラメータ q によって「弾性」を持つように変形しうることを示唆しており、対称性の概念をさらに奥深いものにしています。

超対称代数と量子群は、21世紀の物理学と数学が探求する新しい対称性のフロンティアであり、その研究は今も活発に進められています。

付録

A. 微分幾何・微分形式の基礎

本書では、Lie 群を「滑らかな多様体であり、かつ群の構造を持つもの」として導入した。この付録では、物理学の学部生から大学院生が Lie 群・Lie 代数の幾何学的な側面をより深く理解するために必要となる、微分幾何の基本的な概念を直観的な解説を中心にまとめる。厳密な証明よりも、各概念の物理的なイメージを掴むことを目的とする。

多様体 (Manifold)

我々が住む 3 次元ユークリッド空間は「平ら」であり、どこまでも直線的に進める。しかし、地表のように、局所的には平らな地面 (2 次元平面) に見えるが、大域的には丸い (2 次元球面) という「曲がった」空間も存在する。

微分可能多様体とは、このような「局所的にはユークリッド空間 \mathbb{R}^n と見なせるが、大域的には繋ぎ合わさり方が複雑で曲がっている可能性のある空間」のことである。

- **チャートとアトラス**: 多様体上の小さな領域 (開集合) と、 \mathbb{R}^n 中の領域とを対応付ける「地図」をチャートと呼ぶ。多様体全体を覆うようなチャートの集まりをアトラス (地図帳) と呼ぶ。
- **滑らかさ**: チャートが重なり合う部分で、一方の座標からもう一方の座標への変換が無限回微分可能 (滑らか) であるとき、その多様体は**微分可能**であるという。これにより、多様体上で微分積分を矛盾なく定義できる。

物理学では、系の状態が取りうる空間 (配位空間) が多様体となる例が多い。例えば、剛体の回転状態全体のなす空間は、3 次元の特殊直交群 $SO(3)$ という多様体である。

接空間とベクトル場 (Tangent Space and Vector Field)

多様体は一般に曲がっているため、「ベクトル」を単純に定義できない (異なる点にあるベクトルを足し合わせることができない)。そこで、多様体上の各点 p で、その点に「接する」平らな空間を考える。

接空間 $T_p M$ とは、多様体 M 上の点 p を通る全ての滑らかな曲線の「速度ベクトル」が集まってできる、 n 次元のベクトル空間である。地表の一点における接平面をイメージすると分かりやすい。

Lie 群 G の単位元 e における接空間 $T_e G$ が、我々が本書で学んできた **Lie 代数** \mathfrak{g} の正体である。Lie 代数の元 (生成子) は、単位元から出発する「無限小変換」の速度ベクトルと見なせる。

微分形式 (Differential Forms)

微分形式は、ベクトル場と対をなす概念であり、「積分される対象」として考えると直観的である。

- **0-形式:** 多様体上の各点にスカラーを対応させる、ただの滑らかな関数 $f(x)$ 。
- **1-形式:** 多様体上の各点に「コベクトル」を対応させるもの。座標で書けば $\omega = \sum_{\mu} A_{\mu}(x)dx^{\mu}$ の形をしており、線積分 $\int_C \omega$ の中身に現れる。電磁気学におけるベクトルポテンシャル A_{μ} は1-形式の成分と見なせる。
- **2-形式:** $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(x)dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ の形をしており、面積分 $\int_S F$ の中身に現れる。電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ は2-形式の成分である。
- **外積 (\wedge):** 微分形式の間に定義される積で、反対称性 $dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = -dx^{\nu} \wedge dx^{\mu}$ を持つ。
- **外微分 (d):** k -形式を $(k+1)$ -形式に変換する操作で、勾配 (grad)、回転 (curl)、発散 (div) の概念を統一する。
 - 0-形式 f に対して: $df = \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}$ (勾配)
 - 1-形式 $A = A_{\mu} dx^{\mu}$ に対して: $dA = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ (回転)

外微分の性質と物理学

外微分には、 $d(d\omega) = 0$ (あるいは簡単に $d^2 = 0$) という極めて重要な性質がある。これは、

- $\text{curl}(\text{grad} f) = 0$
- $\text{div}(\text{curl} A) = 0$

という、ベクトル解析の有名な公式をエレガントに表現したものである。

電磁気学において、電磁場テンソル 2-形式を $F = dA$ と書くと (A はベクトルポテンシャル 1-形式)、 $dF = d(dA) = 0$ となる。このシンプルな数式 $dF = 0$ が、実はマクスウェル方程式のうちの 2 本、

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{磁場ガウスの法則})$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{ファラデーの法則})$$

を同時に、かつ座標系の取り方によらない形で表現している。微分形式は、物理法則を幾何学的に、そして簡潔に記述するための強力な言語なのである。

B. 主要 Lie 代数の表・構造定数一覧

このセクションでは、物理学、特に量子力学と場の量子論で頻繁に登場する主要な Lie 代数について、その定義、基底 (生成子)、そして交換関係 (構造定数) を簡潔にまとめます。本教科書の表記法に合わせ、物理学で慣例的なエルミートな生成子と、交換関係に虚数単位 i を含む規約を主として用います。

$\mathfrak{su}(2)$: スピン・角運動量の代数

- **概要:** 2次元特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の Lie 代数。3次元回転群 $SO(3)$ の Lie 代数 $\mathfrak{so}(3)$ と同型であり、量子力学におけるスピンや軌道角運動量、アイソスピンを記述する最も基本的な Lie 代数です。
- **次元:** 3
- **ランク:** 1
- **生成子:** $J_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ ($a = 1, 2, 3$)
- **基底行列 (Pauli 行列 σ_a) :**

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

交換関係と構造定数

交換関係:

$$[J_a, J_b] = i \sum_{c=1}^3 \epsilon_{abc} J_c$$

構造定数: 物理学の規約 $[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c$ に従うと、 $\mathfrak{su}(2)$ の構造定数はレビ・チビタの完全反対称記号となります。

$$f_{abc} = \epsilon_{abc}$$

$\mathfrak{su}(3)$: フレーバー対称性・QCD の代数

- **概要:** 3次元特殊ユニタリ群 $SU(3)$ の Lie 代数。クォークのフレーバー対称性（八道説）や、量子色力学 (QCD) のカラーゲージ対称性を記述します。
- **次元:** 8
- **ランク:** 2
- **生成子:** $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ ($a = 1, \dots, 8$)
- **基底行列 (Gell-Mann 行列 λ_a) :** $\lambda_{1,2,3}$ は Pauli 行列の左上に埋め込んだ形、その他 5 つの 3×3 エルミート・トレースゼロ行列からなります。

交換関係と構造定数

交換関係:

$$[T_a, T_b] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} T_c$$

構造定数 (f_{abc}): $\mathfrak{su}(3)$ の構造定数は完全反対称であり、ゼロでない主なものは以下の通りです。

- $f_{123} = 2$
- $f_{147} = 1$
- $f_{156} = -1$
- $f_{246} = 1$
- $f_{257} = 1$
- $f_{345} = 1$
- $f_{367} = -1$
- $f_{458} = \sqrt{3}$
- $f_{678} = \sqrt{3}$

$\mathfrak{so}(3, 1)$: Lorentz 代数

- **概要:** 3+1 次元ミンコフスキー時空におけるローレンツ変換群 $SO(3,1)$ の Lie 代数。特殊相対性理論の時空対称性を記述する、非コンパクトな Lie 代数の代表例です。
- **次元:** 6
- **生成子:** 6 つの生成子 $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) からなります。これらは物理的には、3 つの回転生成子 J_i と 3 つのブースト生成子 K_i に分けられます。

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk}, \quad K_i = M^{0i}$$

交換関係

J_i と K_i の間の交換関係は以下の通りです。

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i \epsilon_{ijk} J_k && \text{(回転部分代数 } \mathfrak{so}(3)) \\ [J_i, K_j] &= i \epsilon_{ijk} K_k && \text{(ブーストは回転の下でベクトルとして振る舞う)} \\ [K_i, K_j] &= -i \epsilon_{ijk} J_k && \text{(二つのブーストの合成は回転を生む)} \end{aligned}$$

最後の式の右辺の負号が、この代数がコンパクトな $\mathfrak{so}(4)$ ではなく、非コンパクトな $\mathfrak{so}(3, 1)$ であることを示す決定的な特徴です。