

物理学のためのリーマン幾何学

ほの

2025 年 8 月 17 日

概要

現代物理学の金字塔である一般相対性理論は、「重力とは時空の曲がりである」という革命的な描像を私たちに提示しました。この理論を理解するためには、その言語である「リーマン幾何学」を学ぶことが不可欠です。しかし、その抽象性と数学的な厳密さから、多くの物理学徒が学習の途中で困難に直面するのも事実です。

本書は、物理学を学ぶ学部生、大学院生、そして知的好奇心あふれる社会人の方々を対象に、リーマン幾何学の世界への道案内をすることを目的としています。その最大の特徴は、物理的・幾何学的な直観を最優先し、難解な数式の背後にある豊かなイメージを掴んでいただくことにあります。

本書のスタンスについて

本書では、読者の直感的な理解を助けるため、一部の証明を省略したり、厳密な数学的定義よりも物理的なアナロジーを優先したりする箇所があります。より厳密な議論に興味を持たれた方は、巻末の参考文献を足がかりに、さらなる探求の旅へ進んでいただければ幸いです。

本書は、まずテンソルという「時空を記述する共通言語」から始め、曲がった空間での微積分（共変微分）や「まっすぐな線」（測地線）の概念を丁寧に解説します。そして、時空の曲がりそのものを定量化する曲率テンソルを経て、最終的に物質が時空をどう曲げ、曲がった時空が物質の運動をどう決めるかを記述するアインシュタイン方程式へと至ります。

この一冊を読み終えたとき、読者の皆様が時空の幾何学という新しい「言葉」を習得し、ブラックホールや重力波、そして膨張する宇宙といった、物理学の最もエキサイティングなテーマを、より深いレベルで理解する喜びを感じていただけることを願っています。

目次

まえがき：なぜ物理学に「曲がった空間」の言葉が必要なのか？	4
第Ⅰ部 準備編 - 平坦な空間から曲がった空間へ	5
1 言葉の準備 - テンソルという共通言語	5
1.1 スカラー、ベクトル、そしてテンソルへ	5
1.2 物理学におけるテンソルの例	8

1.3	計量テンソル $g_{\mu\nu}$: 空間の「ものさし」	11
1.4	アインシュタインの縮約記法	13
1.5	曲がった空間の計量 : 局所内積の定義	15
第 II 部 実践編 - 曲がった時空を記述する		17
2	舞台設定 - 多様体	17
2.1	地球儀と世界地図 : 曲がった空間の表現	17
2.2	多様体の直感的イメージ	18
2.3	接ベクトル空間 : 局所的な物理法則の舞台	21
3	微分の一般化 - 共変微分と接続	23
3.1	曲面上のベクトルと微分の難しさ	24
3.2	ベクトルの「平行移動」という考え方	26
3.3	接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$: 座標系の歪みを補正する	28
3.4	共変微分 ∇_{μ} : 座標系に依らない真の微分	30
4	曲がった空間での「まっすぐな線」 - 測地線	36
4.1	「まっすぐ」の再定義	36
4.2	測地線の方程式	38
4.3	物理的意味 : 重力場を自由落下する粒子	41
5	空間の曲がりそのものを測る - 曲率テンソル	44
5.1	ベクトルで四角形を描くと何が起こるか ?	45
5.2	リーマン曲率テンソル $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$	46
5.3	曲率の物理的イメージ	48
5.4	リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ とスカラー曲率 R	49
第 III 部 物理学との融合 - アインシュタイン方程式		53
6	アインシュタイン方程式 - 時空と物質の相互作用	53
6.1	方程式の右辺 : 物質の分布 (エネルギー・運動量テンソル)	53
6.2	方程式の左辺 : 時空の幾何学 (アインシュタインテンソル)	55
6.3	物質は時空を曲げ、時空は物質の運動を決める	56
6.4	弱い重力場での近似 : ニュートン重力の再現	58
7	最初の厳密解 - シュワルツシルト時空	60
7.1	真空中の球対称な解	60
7.2	シュワルツシルト半径と事象の地平線 (イベントホライズン)	62

7.3	時空の特異点	63
8	シュワルツシルト時空上の冒険 - 粒子の運動	65
8.1	有効ポテンシャルと粒子の軌道	65
8.2	水星の近日点移動：一般相対性理論の最初の証拠	67
8.3	光の軌跡と重力レンズ効果	69
8.4	(発展) 軌道計算と楕円関数との出会い	70
	おまけ - Appendix	74
	参考文献	78

まえがき：なぜ物理学に「曲がった空間」の言葉が必要なのか？

アイザック・ニュートンは、すべての物体が互いに引き合う「万有引力」という力によって、惑星の運動からリンゴが木から落ちる現象までを見事に説明しました。この理論は絶大な成功を収めました。一つの根源的な謎を残していました。それは、離れた物体同士が、間に何もない空間を越えて、瞬時に力を及ぼし合う「遠隔作用」という考え方です。アインシュタインは、この不可解な描像に満足することができませんでした。

また、物理学にはもう一つ、古くからの謎がありました。それは「慣性質量（動かしにくさ）」と「重力質量（重力への応答しやすさ）」が、なぜこれほどまでに高い精度で一致するのか、という問題です。ニュートン力学では、これは単なる偶然として片付けられていました。

アインシュタインは、この二つの謎を結びつける、ある思考実験にたどり着きます。それが有名な「エレベーターの思考実験」です。もし宇宙空間でロケットが加速すれば、中の人は床に押し付けられ、まるで重力があるかのように感じます。逆に、地上にあるエレベーターのケーブルがもし切れて自由落下したなら、中の人はふわりと浮き上がり、重力が消え去ったかのように感じるでしょう。この「加速度と重力は局所的に区別できない」という洞察を、彼は「等価原理」と名付けました。

この原理は、革命的な結論を示唆します。私たちが「重力」と呼んでいるものは、ニュートンが考えたような、物体間を飛び交う不思議な力なのではなく、時空そのものの性質なのではないか？ つまり、重力の正体とは、質量を持つ物体の存在によって「時空が曲がっている」ことの現れなのではないか、と。

惑星は、太陽が発する力によって軌道を曲げられているわけではありません。太陽という巨大な質量の存在によって歪められた時空の「窪み」を、ただひたすら「まっすぐ」進んでいるに過ぎないのです。これが、アインシュタインが到達した一般相対性理論の核心的な描像です。

しかし、「曲がった時空」を物理法則として数式で記述するには、どうすればよいのでしょうか。幸いなことに、そのための数学的な言語は、すでに 19 世紀の数学者ベルンハルト・リーマンによって準備されていました。それが「リーマン幾何学」です。物理学における最も根源的な問題の答えが、一見すると無関係に見えた純粋数学の分野に眠っていたのです。

本書は、この「リーマン幾何学」という、一般相対性理論を学ぶ上で最大の壁とも言える数学を、物理学を志す皆さんのために書き下ろした入門書です。難解な数式の羅列に終始するのではなく、

- なぜその概念が必要なのか（物理的動機）
- その数式はどのような「かたち」を表しているのか（幾何学的イメージ）

を常に問いかけながら、一步一步、着実に歩みを進めていきます。

この知的な冒険の果てに、皆さんが時空の言葉を操り、ブラックホールや重力波、膨張する宇宙といった、現代物理学の最先端のテーマを自らの言葉で語れるようになることを願ってやみません。

第 I 部

準備編 - 平坦な空間から曲がった空間へ

1 言葉の準備 - テンソルという共通言語

一般相対性理論が描き出す「曲がった時空」という舞台を理解するためには、まず、その舞台上で物理現象を記述するための「言葉」を習得する必要があります。それが「テンソル」です。テンソルと聞くと、多くの学生が複雑な添字計算や難解な定義に気圧されてしまうかもしれません。しかし、その本質は非常にシンプルかつ物理学的な要請に基づいています。この章では、なぜテンソルが必要なのかという動機から出発し、その正体に迫っていきましょう。

1.1 スカラー、ベクトル、そしてテンソルへ

物理学の目的は、自然現象を支配する普遍的な法則を見出すことです。ここでいう「普遍的」とは、観測者がどのような立場（座標系）で現象を観測しても、法則そのものは同じ形でなければならない、ということを意味します。例えば、エネルギー保存則は、私たちがどのような座標系を使おうとも、常に成り立っていないくてはなりません。

物理学の大原則

物理法則は、観測者が用いる座標系の選び方によらない。

この当たり前に思える原則こそが、テンソルという概念を生み出す土台となります。物理量を「座標変換したときに、その各成分がどのように変化するか」という観点で分類し、整理していくことにしましょう。

スカラー：座標変換で「変わらない」量

最も単純な物理量は、座標系をどのように変えてもその値が一切変わらないものです。例えば、ある点における「温度」や「質量」がそれに当たります。あなたが部屋の温度を測るとき、部屋のどの隅を原点にしようが、あるいは座標軸をどのような向きに取ろうが、その点の温度が 25°C であるという事実は変わりません。

このような、座標変換に対して不変な量をスカラー (scalar) と呼びます。これは「0 階のテンソル」とも呼ばれます。

ベクトル：座標変換で「連動して変わる」量

次に、高校物理でも馴染みの「ベクトル」を考えます。私たちはベクトルを「大きさと向きを持つ矢印」として学びました。このイメージは非常に直感的ですが、より厳密な定義は、座標変換に対する「成分の変わり方」によって与えられます。

簡単な例として、2次元平面上の点 P の位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ を考えます。もし私たちが座

標系 (x, y) を原点の周りに角度 θ だけ回転させて、新しい座標系 (x', y') を作ると、新しい座標での成分 (x', y') は元の成分 (x, y) と以下の関係で結ばれます。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

速度ベクトルや力ベクトルなど、多くの物理的なベクトルも、座標系を回転させると、その成分はこのルールに従って変換されます。

反変ベクトル (Contravariant Vector)

座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ に伴い、その成分 V^μ が

$$V'^\mu = \sum_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu$$

というルールに従って変換される量を、反変ベクトルと呼びます。慣例として、その添字は上付きで書きます。

補足：偏微分による変換則

先ほどの回転行列の各成分、例えば $\cos \theta$ は $\frac{\partial x'}{\partial x}$ に対応します。このように偏微分で変換則を書くことで、回転だけでなく、どのような座標変換に対しても適用できる一般的な表現となります。

1-形式 (共変ベクトル)：もう一つの「ベクトル」

さて、ベクトルと呼ばれるものの中には、実は反変ベクトルとは異なる変換の仕方をするものがあります。その代表例が、スカラー場（各点の値がスカラーで与えられる場。例えばポテンシャル $\phi(x, y)$ など）の「勾配 (gradient)」です。

勾配の成分は $(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y})$ です。この量が、座標回転によってどのように変換されるかを計算してみましょう。合成関数の微分法則（連鎖律）から、

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'}$$

となります。これは、反変ベクトルの変換則で現れた偏微分の分子と分母が逆になっています。実際、行列で書くと逆の変換（逆行列による変換）になっていることがわかります。

このように、反変ベクトルとは「双対的な」変換則に従う量を、私たちは反変ベクトルと区別して呼びます。

共変ベクトル (Covariant Vector) または 1-形式 (1-form)

座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ に伴い、その成分 A_μ が

$$A'_\mu = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu$$

というルールに従って変換される量を、共変ベクトルまたは 1-形式と呼びます。慣例として、その添字は下付きで書きます。

そしてテンソルへ

私たちは今、座標変換に対する振る舞いによって、物理量をスカラー (0 階)、反変ベクトル (1 階)、共変ベクトル (1 階) に分類しました。テンソルとは、この考え方をさらに一般化したものです。

例えば、2 つの反変ベクトル A^μ と B^ν の単純な積 $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ を考えます。この 4 つの成分 ($T^{xx}, T^{xy}, T^{yx}, T^{yy}$) を持つ量は、座標変換によって

$$T'^{\mu\nu} = A'^\mu B'^\nu = \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) \left(\sum_{\beta} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} B^\beta \right) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}$$

という変換を受けます。これは、反変ベクトルが持つ変換の「腕」が 2 本あると見なせます。このような量を「2 階の反変テンソル」または (2,0) 型テンソルと呼びます。

同様に、共変ベクトル 2 つの積から「2 階の共変テンソル $S_{\mu\nu}$ 」((0,2) 型テンソル) が、反変ベクトルと共変ベクトル 1 つずつの積から「2 階の混合テンソル $U^\mu{}_\nu$ 」((1,1) 型テンソル) が定義できます。

テンソル (Tensor)

テンソルとは、座標変換に対して、その各添字が反変ベクトルまたは共変ベクトルの変換則に従うような多次元的な「量」のことです。その本質は、座標変換に対する変換則そのものにあります。

テンソルは、いわば曲がった時空を記述するためのアルファベットのようなものです。この先の章では、これらのアルファベットを組み合わせて、時空の距離 (計量テンソル) や曲がり具合 (曲率テンソル) といった、より複雑な「単語」や「文章」を組み立てていきます。

補足：なぜ反変と共変の区別が必要なのか？

添字を上下に分け、反変ベクトルと共変ベクトルという 2 種類を導入することに、面倒な印象を持たれた方もいるかもしれません。私たちが高校以来慣れ親しんできたユークリッド空間の直交デカルト座標では、この 2 つは実質的に同じものであり、区別する必要がほとんどないからです。

では、なぜこの区別が重要なのでしょうか。それは、「幾何学的な量を測る」という行為には、本質的に 2 種類の異なる方法があり、曲がった空間や歪んだ座標系を扱う際には、その違いが明確に現れるからです。

簡単なアナロジーで考えてみましょう。あるベクトル \mathbf{V} を、歪んだ方眼紙 (斜交座標系) の上で表現することを想像してください。

1. 「座標軸に沿ってプロットする」方法（反変）

ベクトル \mathbf{V} の終点にたどり着くために、座標軸の方向に沿って、それぞれ何ステップ進めばよいかを数える方法です。これは、ベクトルを $\mathbf{V} = V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2$ のように基底ベクトル \mathbf{e}_i の線形結合で表すときの係数 (V^1, V^2) を求めることに対応します。もし座標系の目盛りを2倍に拡大（基底ベクトルが2倍の長さ）したら、同じベクトルにたどり着くために必要なステップ数（成分の値）は半分になります。このように、基底ベクトルのスケールの変化と、成分のスケールの変化が「反対」に振る舞うため、反変 (contra-variant) ベクトルと呼ばれます。「速度」や「変位」のように、空間内を移動していくイメージを持つ量は、こちらの反変ベクトルに対応します。

2. 「等高線のような目盛りを数える」方法（共変）

次に、各座標軸に対して垂直な「等高線」のような平行な線をたくさん引くことを考えます。そして、ベクトル \mathbf{V} が、それらの等高線を何本横切るかを数える、という方法です。これは、ベクトル \mathbf{V} を各軸に射影して成分を得る操作に似ています。この成分 (V_1, V_2) が共変成分です。もし座標系の目盛りを2倍に拡大（基底ベクトルが2倍の長さ）したら、同じ傾きを表現するための等高線の密度は2倍になります（つまり、横切る本数が増えます）。このように、基底ベクトルのスケールの変化と、成分のスケールの変化が「共に」振る舞うため、共変 (co-variant) ベクトルと呼ばれます。「ポテンシャルの勾配」や「力」のように、スカラー場の変化率を表すような量は、こちらの共変ベクトル (1-形式) に対応します。

直交デカルト座標は、基底ベクトルが互いに直交し、長さが1という非常に「綺麗な」座標系です。この特別な場合には、上記の2つの測り方がたまたま同じ結果を与えるため、私たちは反変と共変を区別する必要がなかったのです。

しかし、一般相対性理論が扱う重力によって曲げられた時空では、このような綺麗な直交座標系をいつでも全体に張れるとは限りません。そのような一般的な状況で、座標系の取り方によらない普遍的な物理法則を記述するためには、この2種類のベクトルを明確に区別することが不可欠となります。

この区別は、物理を不必要に複雑にするものではありません。むしろ、豊かな幾何学的構造を正しく認識するための、より解像度の高い「メガネ」のようなものなのです。そして、次節で学ぶ計量テンソルこそが、この反変と共変という2つの世界観を自由に行き来するための「翻訳機」の役割を果たします。

1.2 物理学におけるテンソルの例

前節では、テンソルを「座標変換に対する変換則」という少し抽象的な形で定義しました。ここでは、物理学の様々な場面で、テンソルがどのように自然に現れ、現象を記述するためにいかに強力な道具であるかを見ていきましょう。テンソルは数学者の気まぐれで生まれたのではなく、物理的な要請から生まれた必然的な概念であることがわかるはずです。

例 1：慣性モーメントテンソル

剛体の回転運動を考えると、角運動量 \mathbf{L} は角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を用いて $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ と書けると高校物理で学びました。このとき I はスカラー（慣性モーメント）として扱われることがほとんどです。しかし、これは物体が軸周りに対称であるなど、非常に特殊な場合に限られます。

より一般の、例えば歪んだ形のコマの回転を考えてみましょう。このとき、回転軸の方向（ $\boldsymbol{\omega}$ の向き）と、角運動量の方向（ \mathbf{L} の向き）は、一般には一致しません。つまり、ある軸周りに物体を回転させようとする、想定とは違う向きに「振られ」ようとする力が働くのです。

この複雑な関係を表現するのが、慣性モーメントテンソル \mathbf{I} です。これは 3×3 の 9 個の成分を持つ量であり、角運動量ベクトルと角速度ベクトルの関係を次のように結びつけます。

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

ここで現れる I_{ij} が、2 階のテンソルの成分です。このテンソルは、物体の質量が空間的にどのように分布しているかを完全に表現しており、「どの軸周りに回転させようとする、どの方向への抵抗が生まれるか」という情報をすべて含んでいます。スカラーでは表現しきれなかった、回転の「しにくさ」の異方性を記述するために、テンソルが必要となるのです。

例 2：応力テンソル

流体や弾性体など、連続した物質の内部で働く力を考えてみましょう。ある微小な面を考えたとき、その面を通して隣の部分からどのような力が働いているのでしょうか。もし流体が静止した水ならば、力は常に面に垂直に働く「圧力」だけを考えれば十分です。圧力はスカラーです。

しかし、物体が変形していたり、流体が流れていたりすると、面を滑らせるような「ずり応力」も働きます。つまり、力の向きは必ずしも面の向きと一致しません。

この状況を記述するのが、応力テンソル（またはストレステンソル） σ_{ij} です。これは、「 j 方向に垂直な面を通して働く、力の i 成分」を表す 2 階のテンソルです。

- 例えば σ_{zz} は、 z 軸に垂直な面（ xy 平面）に働く、 z 方向の力（圧力や垂直応力）を表します。
- 一方で σ_{zx} は、 x 軸に垂直な面（ yz 平面）に働く、 z 方向の力（ずり応力）を表します。

このように、「面の向き」と「力の向き」という 2 つの異なる「方向」の情報を同時に持つ必要があるため、2 つの添字を持つテンソルが自然に導入されます。

例 3：電磁場テンソル

電磁気学を特殊相対性理論の視点で見直すと、テンソルの威力と美しさが最も際立ちます。マクスウェル方程式は、電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} という 2 つのベクトル場を用いて記述されます。しかし、特殊相対論によれば、これらは独立した存在ではありません。ある観測者にとって純粋な電場に見えるものが、その観測者に対して運動している別の観測者にとっては、電場と磁場の両方が存

在するように見えるのです。

つまり、電場と磁場は、より根源的な一つの物理的実体の、見る角度（座標系）によって異なる現れ方に過ぎない、ということです。この統一された実体こそが、電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ です。これは、4次元時空における2階の反対称テンソルであり、その成分は以下のように電場と磁場の成分から構成されます。

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

この表現を用いると、複雑に見えた4本のマクスウェル方程式は、わずか2本の非常にコンパクトなテンソル方程式にまとめられます。これにより、電磁気学がローレンツ変換（特殊相対論的な座標変換）に対して不変であることが一目瞭然となり、その法則の持つ数学的な構造が明らかになります。

まとめ

これらの例からわかるように、テンソルは単なる数学的な遊びではありません。ベクトルの向きを変えてしまうような線形な関係（慣性モーメント）や、2つの異なる方向を同時に関連付ける必要がある場合（応力）、あるいは、異なる物理量が実は一つのものの別の側面に過ぎないこと（電磁場）を記述するなど、物理現象をより深く、統一的に表現するための必然的な言語なのです。

コラム：なぜ「変換性」で定義するのか？ — 物理的実体を持つということ

前節で私たちは、ベクトルやテンソルを「座標変換に対して成分がどう変わるか」という、一見すると回りくどい方法で定義しました。単に「数字を3つ並べたものがベクトルである」と定義してはいけないのでしょうか？

結論から言えば、それはできません。なぜなら、物理法則が記述すべきは、座標系の取り方に依存しない客観的な「物理的実体」だからです。そして、その実体を正しく表現している量であるための保証書こそが、「正しい変換性を持つ」ということなのです。

簡単な思考実験をしてみましょう。2次元平面上の各点に、その点の座標 (x, y) を使って、3つの数字の組 $\mathbf{U} = (x, y, x^2 + y^2)$ を対応させます。これは数字を3つ並べたものですから、「3次元ベクトル」と呼びたくなるかもしれません。

では、点 P $(x, y) = (1, 0)$ を考えます。この点での \mathbf{U} の成分は $\mathbf{U}_P = (1, 0, 1^2 + 0^2) = (1, 0, 1)$ です。

次に、座標系を原点の周りに 90° 回転させて、新しい座標系 (x', y') を作ります。この新しい座標系では、物理的に同じ点 P は $(x', y') = (0, -1)$ という座標で表されます。この新しい座標を使って \mathbf{U} を計算すると、 $\mathbf{U}'_P = (0, -1, 0^2 + (-1)^2) = (0, -1, 1)$ となります。

もし \mathbf{U} が本当に「幾何学的なベクトル」という物理的実体を表しているならば、その成分は座標系の回転に伴って変換されるはずです。つまり、元のベクトル $\mathbf{U}_P = (1, 0, 1)$ を 90°

回転させたものになるはずですが、しかし、実際に計算して得られた \mathbf{U}'_P はそうになっていません。

これは、私たちが定義した \mathbf{U} という量が、座標系の取り方次第でコロコロと変わってしまう、物理的な実体のない「見かけの量」であったことを意味します。速度ベクトルや電場ベクトルは、私たちがどのような座標系を導入しようとも、空間内の「運動状態」や「場の状態」という、唯一の客観的な実体を指し示しています。その客観性を数学的に保証するのが、厳密な変換規則なのです。

ですから、私たちは次のように結論付けます。

ただ数字を並べたものではなく、
正しい変換性を持つもののみが、物理的な実体を持つのです。

テンソルの変換則は、物理法則を記述するための「言葉」として採用するための、いわば資格認定のようなものだと考えてください。

1.3 計量テンソル $g_{\mu\nu}$: 空間の「ものさし」

これまで、テンソルが座標変換に対してどのように振る舞うべきかを見てきました。この章の最後に、数あるテンソルの中でも特に重要で、この本の主役とも言える計量テンソル (**metric tensor**) を紹介します。これは、その名の通り、空間の「計量」、すなわち距離や角度の測り方を定める、いわば空間の「ものさし」の役割を果たすテンソルです。

ピタゴラスの定理から出発する

私たちが最もよく知っている距離の尺度は、ピタゴラスの定理（三平方の定理）です。2次元のデカルト座標 (x, y) において、原点から点 (x, y) までの距離 s は $s^2 = x^2 + y^2$ で与えられます。

この考え方を、隣り合った2点間の微小な距離に拡張してみましょう。座標 (x, y) と $(x + dx, y + dy)$ の間にある微小な距離 ds の2乗は、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

と書くことができます。これを空間の線素 (**line element**) と呼びます。この式は、この空間で距離がどのように測られるかを規定する、基本的なルールです。

この一見単純な式を、行列を使って書き直してみましょう。

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

この中央に現れた行列こそが、平坦な2次元ユークリッド空間の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ です。3次元空間ならば、 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ であり、計量テンソルは3x3の単位行列になります。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$

計量テンソルは、空間の線素 ds^2 を定義する 2 階の共変対称テンソル ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) である。アインシュタインの縮約記法（次節で導入）を用いると、線素は以下のように書ける。

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

計量テンソルは、その空間の幾何学的な性質（距離、角度、曲がり具合など）をすべて決定づける。

座標系によって「ものさし」の見た目は変わる

重要なのは、計量テンソルの成分が用いる座標系に依存するということです。例として、同じ平坦な 2 次元平面を、デカルト座標 (x, y) の代わりに極座標 (r, θ) で記述してみましょう。変換式は $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ です。ここから、 dx と dy を計算すると、

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

となります。これを線素の式 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dr^2 + (-2r \cos \theta \sin \theta + 2r \sin \theta \cos \theta) dr d\theta + (r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

となります。このときの計量テンソルは、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

であり、もはや単位行列ではありません。特に $g_{\theta\theta} = r^2$ という成分は、原点からの距離 r に依存しています。これは、「角度方向に $d\theta$ だけ動いたときの実際の距離は、中心からの距離 r に比例する」という私たちの直感（円周の長さが半径に比例すること）と一致します。

このように、同じ平坦な空間を記述しているにもかかわらず、用いる座標系によって計量テンソルの成分は変化します。

時空の計量：ミンコフスキー計量

特殊相対性理論では、時間は空間と同等な座標として扱われます。この 4 次元時空における 2 点間の「距離」に相当する量を時空間隔と呼び、その線素は

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

で与えられます (c は光速)。この時空をミンコフスキー時空と呼び、その計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ は以下のように書けます。

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ここでは $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ としています)。時間成分の符号が負になっていることが、空間のみのユークリッド計量との決定的な違いであり、光の速度が不変であることや、時間と空間の間に因果関係が存在することの現れです。

計量テンソルの三つの重要な役割

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は、本書全体を通して中心的な役割を果たします。その役割は大きく分けて三つあります。

1. 幾何学の定義：空間内の距離や角度の定義を与え、その空間の「形」を決定します。
2. 添字の上げ下げ：反変ベクトルと共変ベクトルを相互に変換する「橋渡し役」となります。例えば、反変ベクトル V^ν から共変ベクトル V_μ を $V_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} V^\nu$ という計算で作ることができます。
3. 重力場の表現：一般相対性理論では、この計量テンソルの成分 $g_{\mu\nu}$ が場所の関数 $g_{\mu\nu}(x)$ となり、もはや定数ではなくなります。この計量テンソルの時空的な変化そのものが、重力場の正体なのです。

1.4 アインシュタインの縮約記法

これまでの節で、テンソルに関連する数式をいくつか見てきました。その中で、

$$V'^\mu = \sum_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu, \quad ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad V_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} V^\nu$$

のように、総和を表す記号 \sum が何度も登場することにお気づきでしょう。相対性理論の計算では、このような「ある添字について、全ての成分の和を取る」という操作が非常に頻繁に現れます。数式が複雑になってくると、この \sum を毎回書くのは非常に煩わしく、式の本質が見えにくくしてしまいます。

アインシュタインは、この煩雑さを解消するため、ある画期的なルールを導入しました。それがアインシュタインの縮約記法 (**Einstein summation convention**)、または単に総和規約と呼ばれるものです。

アインシュタインの縮約記法

一つの項の中に、同じ添字が上付きと下付きでペアになって現れた場合は、その添字について和 (\sum) を取るものと約束し、 \sum 記号の表記を省略する。

このルールは驚くほどシンプルですが、効果は絶大です。早速、先ほどの例をこの新しい記法で書き直してみましょう。

- ベクトルの変換則：

$$V'^{\mu} = \sum_{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \xrightarrow{\text{省略}} V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}$$

右辺では、添字 ν が上 (dx^{ν}) と下 (∂x^{ν}) に現れているため、自動的に ν についての和が取られていると解釈します。

- 線素：

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \xrightarrow{\text{省略}} ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

この場合、 μ と ν がそれぞれ上下のペアになっているため、 μ と ν の両方について和が取られます。

- 添字の上げ下げ：

$$V_{\mu} = \sum_{\nu} g_{\mu\nu} V^{\nu} \xrightarrow{\text{省略}} V_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu}$$

添字 ν が和を取られ、添字 μ はそのまま残ります。

ダミー添字と自由な添字

この記法を用いる上で、添字は2種類に分類されます。

- **ダミー添字 (dummy index)**：和が取られる添字のこと。どの文字を使っても結果は同じです（例えば、 $A^{\mu} B_{\mu}$ も $A^{\nu} B_{\nu}$ も全く同じ量を表します）。
- **自由な添字 (free index)**：和が取られず、式の両辺に残る添字のこと。テンソル方程式が正しく成立するためには、両辺で自由な添字の種類と数が一致していなければなりません。例えば $V_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu}$ では、 ν がダミー添字、 μ が自由な添字です。

この記法は、単に数式を短くするだけでなく、式の構造をより明確にするという大きな利点があります。上下の添字がペアで消える（和が取られる）操作は、多くの場合、テンソルの階数を下げることに対応します。例えば、ベクトル A^{μ} と 1-形式 B_{μ} の積 $A^{\mu} B_{\mu}$ では、添字がすべてダミー添字となり、結果として自由な添字がなくなります。これは、この量がスカラー（0 階のテンソル）であることを示唆しており、実際にその通りなのです。

今後の約束

アインシュタインの縮約記法は、現代の相対性理論や場の理論において標準的な「文法」となっています。本書でも、これ以降、特に断りのない限り、この記法を全面的に採用します。

1.5 曲がった空間の計量：局所内積の定義

これまでの節で、計量テンソルを空間の微小な長さを測る「ものさし」として紹介してきました。しかし、計量テンソルの役割はそれだけにとどまりません。より根源的には、計量テンソルは各点におけるベクトル同士の内積を定義するという、さらに重要な役割を担っています。

計量テンソルの本質：各点での内積のルール

これから第2章で、多様体の各点 P には、その点におけるベクトル（速度、力など）が住むための平坦な「接ベクトル空間 $T_P M$ 」が付属していることを学びます。接ベクトルは簡単に言えば「風」だと思ってください。天気予報では日本地図上の各点で風向きが表示されていますが、この風向きは、風が吹いている空間の歪みの影響を受けて、その物理法則が補正を受けます。

では、曲がった時空上で、接ベクトル空間に属する2つのベクトル U と V があったとき、これらの内積 $U \cdot V$ はどう計算すればよいのでしょうか？ 曲がった空間の非一様な効果がどのように反映されるのでしょうか？

この計算ルールを定めるのが、まさにその点 P における計量テンソル $g_{\mu\nu}(P)$ なのです。

計量と内積

点 P の接ベクトル空間に属する2つのベクトル $U = U^\mu e_\mu$ と $V = V^\nu e_\nu$ の内積は、その点における計量テンソル $g_{\mu\nu}(P)$ を用いて次のように定義される。

$$U \cdot V = g_{\mu\nu}(P) U^\mu V^\nu$$

この内積が定義されることで、私たちは初めて、あるベクトルの「長さ（大きさ）」を計算したり、2つのベクトルがなす「角度」を計算したりすることができるようになります。

- ベクトルの長さの2乗： $|V|^2 = V \cdot V = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$
- 2つのベクトルのなす角 α ： $\cos \alpha = \frac{U \cdot V}{|U||V|}$

そして、微小な変位ベクトル $d\mathbf{x}$ （成分は dx^μ ）の長さの2乗 $|d\mathbf{x}|^2$ をこのルールで計算すれば、それはまさしく私たちが最初に学んだ線素 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ と一致します。つまり、線素とは、計量テンソルが定める内積のルールを、微小変位ベクトルに適用した特別な場合に過ぎなかったのです。

リーマン計量の幾何学的な役割

リーマン計量 $g_{\mu\nu}(x)$ の本質とは、多様体の各点 P の接ベクトル空間 $T_P M$ に、局所的な内積の構造（すなわち、長さや角度の測り方）を与えることです。場所 x によって $g_{\mu\nu}(x)$ の成分が変化するということは、接ベクトル空間の「ものさし」の性質が場所ごとに異なっていることを意味します。この「ものさし」の局所的な性質を多様体全体で繋ぎ合わせたものが、空間全体の幾何学（曲がり具合など）を決定づけるのです。

具体例で見る「局所内積」

■例 1：2次元球面の計量 半径 R の球面上の計量 $g_{\mu\nu}$ は、 $g_{\theta\theta} = R^2, g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta, g_{\theta\phi} = 0$ でした。これは、各点 (θ, ϕ) の接平面における内積のルールが、

- 基底ベクトル e_θ と e_ϕ は常に直交している ($g_{\theta\phi} = 0$ だから)。
- 基底ベクトルの長さは $|e_\theta|^2 = g_{\theta\theta} = R^2$ (常に一定)、 $|e_\phi|^2 = g_{\phi\phi} = R^2 \sin^2 \theta$ (緯度 θ に依存) である。

と定められていることを意味します。特に、赤道 ($\theta = \pi/2$) から極 ($\theta = 0$) に近づくにつれて、経度方向の基底ベクトル e_ϕ の「長さ」が縮んでいくことが、この空間が内在的に曲がっていることの現れです。

■例 2：シュワルツシルト計量 天体の周りの時空を記述するシュワルツシルト計量は、時空の各点における 4 元ベクトル (4-ベクトル) の内積のルールを定めています。

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \quad , \quad g_{rr} = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \quad \text{etc.}$$

これは、時間方向の基底ベクトル e_t の「長さ」の 2 乗が g_{tt} であり、半径方向の基底ベクトル e_r の「長さ」の 2 乗 (のマイナス) が $|g_{rr}|$ であることを意味します。天体に近づくほど e_t は「短く」なり (時間の遅れ)、 e_r は「長く」なる (空間の伸び)。このように、計量テンソルを通じて各点のベクトルの内積構造を調べることで、時空の歪みを幾何学的に、より鮮明に理解することができます。

これで、曲がった時空を記述するための基本的な「言葉」の準備が整いました。次の第 2 部では、いよいよこれらの道具を使って、曲がった空間での微積分や運動法則といった、より実践的なテーマに挑んでいきます。

第 II 部

実践編 - 曲がった時空を記述する

2 舞台設定 - 多様体

第 1 部では、テンソルという「言葉」を学びました。第 2 部からは、いよいよその言葉を使って、物理現象が繰り広げられる「舞台」そのものを記述していきます。一般相対性理論の舞台は、ニュートン力学や特殊相対性理論が想定していた平坦で静的な空間や時空とは異なり、物質の存在によってダイナミックに曲がる「曲がった時空」です。

このような、私たちが直接知覚することのできない高次元の曲がった空間を、どうすれば数学の俎上に載せ、物理法則を議論することができるのでしょうか。そのための強力な枠組みが、**多様体 (manifold)** という数学的な概念です。この章では、その全体像を直感的につかむことを目指します。

2.1 地球儀と世界地図：曲がった空間の表現

多様体という概念を理解するために、最も身近で優れたアナロジーは、私たちの住む地球です。

宇宙から見れば、地球の表面は明らかに曲がった 2 次元の球面です。この全体像を最も忠実に再現したものが地球儀でしょう。しかし、地球儀の上で二都市間の距離を精密に測ったり、航路を計画したりするのは不便です。私たちは通常、地球表面の一部を平面に写し取った「地図」を利用します。ここに、曲がった空間を扱う上での本質的な難しさと、その解決策のヒントが隠されています。

1 枚の地図では世界を覆えない

皆さんもよくご存知のように、曲面である地球全体を、一枚の長方形の紙に、歪みなく完全に写し取ることは不可能です。

例えば、最も有名なメルカトル図法の世界地図を思い浮かべてください。この地図は角度を正しく保つという優れた特徴を持つ一方で、高緯度地方に行けば行くほど面積が極端に引き伸ばされてしまいます。地図上では巨大に見えるグリーンランドの実際の面積は、アフリカ大陸の約 14 分の 1 しかありません。南極大陸に至っては、もはや一点であるべき南極点が、地図の最下辺という一本の直線にまで引き伸ばされてしまっています。

どのような巧妙な方法を使っても、球面の情報を完全に平坦な一枚の地図に落とし込むと、どこかに必ずこのような歪みや破綻が生じてしまうのです。

曲がった空間の性質

空間が「曲がっている」とは、「その空間全体を、一つの平坦なユークリッド座標系で矛盾なく覆うことができない」ということと同義である。

■解決策としての「地図帳（アトラス）」では、どうすればよいのでしょうか。答えは単純です。一枚で無理なら、たくさんの地図を貼り合わせればよいのです。

私たちは普段、世界地図だけでなく、日本地図、関東地方の地図、さらには自分の住む街の地図、といった様々な縮尺の地図を使っています。自分の街の地図のような十分に小さな領域に限れば、地球表面が曲がっていることなど意識する必要はなく、完全に平坦な面として扱うことができます。

これと同じように、地球表面全体を、それぞれが歪みを見捨てるほど小さな領域を写し取った、たくさんの平らな地図で覆い尽くすことを考えます。日本周辺は日本地図、ヨーロッパ周辺はヨーロッパ地図、北極周辺は極を中心に投影した地図、というように、それぞれの場所に適した地図を用意するのです。

そして、それらの地図の縁が少しずつ重なり合うようにしておけば（例えば、日本地図の端とアジア大陸の地図の東端が重なるように）、地図から地図へとスムーズに移っていくことで、地球表面全体の情報を完全に表現することができます。

この「地図の貼り合わせ」という考え方こそが、多様体の本質です。

- 個々の平らな地図一枚一枚のことを、数学の言葉でチャート (chart) または座標近傍 (coordinate patch) と呼びます。
- そして、地球全体を覆うために必要なチャートの集まり、すなわち「地図帳」全体のことをアトラス (atlas) と呼びます。

のりしろ部分の重要性

2枚のチャートが重なる「のりしろ」の部分では、物理的に同じ一つの点ですが、それぞれのチャートの異なる座標で表現されます。例えば、東京は日本地図上の経度・緯度でも、メルカトル図法上の (x,y) 座標でも指定できます。この2つの座標の対応関係を計算できること（座標変換がスムーズであること）が、アトラス全体が「なめらかな」多様体を構成するための条件となります。これはまさに、第1章で学んだテンソルの変換則が活躍する場面なのです。

2.2 多様体の直感的イメージ

前節では、地球儀と地図帳のアナロジーを通して、曲がった空間を「平らな地図の貼り合わせ」として表現するアイデアを見ました。この考え方を、2次元の球面に限らず、様々な次元や形の図形に対して一般化したものが多様体です。

多様体の直感的定義

多様体とは、大域的（たいきよくてき）には曲がっているかもしれないが、どの点の周りも、局所的（きよくしよてき）には平坦なユークリッド空間と見なせるような図形のことで

ある。

「局所的に平坦」とは、言い換えれば「その図形の上に立っている（とても小さな）アリさんからは、自分の周りが真っ平らに見える」ということです。あるいは、図形をどんどんズームインしていくと、どんな点もその近辺は真っ直ぐな空間に見える、と言ってもよいでしょう。地球は平面ではありませんが、局所的に平面であるという意味で、「局所地球平面説」という形で定義されるのが多様体のイメージです。

補足

ただし本稿では、リーマン幾何学を展開するにあたり、局所的に平坦であるだけでなく、十分に「なめらか」であることを前提とします。すなわち、我々が多様体と呼ぶのは \mathbb{R}^m の中に C^k （通常は $k \geq 2$ ）級で埋め込まれた部分多様体であるように限定します。この仮定により、任意の点において接平面が定義でき、外側のユークリッド計量から自然にリーマン計量を誘導することができます。

例えば円錐面は位相的には多様体の定義を満たしますが、頂点において接平面を定義することができず、誘導計量も滑らかに延長できません。このような「尖った点」（円錐特異点）は本稿の対象から除外します。

多様体の例と、そうでない例

この「局所的に平坦」という性質を、具体的な図形で確認してみましょう。

- **1次元多様体（曲線）**：円や放物線のような、なめらかな曲線を考えてみましょう。全体を見れば明らかに曲がっていますが、その一部分を顕微鏡でどんどん拡大していくと、ほとんど直線（1次元ユークリッド空間）に見えます。したがって、これらは**1次元多様体**です。
- **2次元多様体（曲面）**：球面やドーナツの表面（トーラス）のような、なめらかな曲面を考えます。私たちが地球の表面を平らだと感じるように、これらの曲面も、ごく狭い領域だけを見れば、ほとんど平坦な平面（2次元ユークリッド空間）と見なせます。これらは**2次元多様体**です。
- **多様体でない例**：一方で、円錐の頂点を考えてみましょう。この頂点をどれだけ拡大しても、決して平坦にはならず、いつまでも「尖った」ままです。また、2枚の平面が直線で交わっているような図形も、その交線上の点を拡大すると、いつまでも「折り目」が見えてしまいます。このような「尖り」や「折り目」（特異点と呼びます）を持つ図形は、その点において局所的に平坦ではないため、多様体ではありません。

多様体の次元とは、その図形を局所的に見たときのユークリッド空間の次元によって決まります。曲線は局所的に1次元の直線なので1次元多様体、曲面は局所的に2次元の平面なので2次元多様体となります。

物理学の舞台としての時空多様体

この多様体という概念が、まさに一般相対性理論の舞台設定にうってつけなのです。一般相対性理論が記述する 4 次元時空は、4 次元の時空多様体としてモデル化されます。

多様体と等価原理

時空が多様体である、という数学的な要請は、アインシュタインの等価原理と深く結びついています。

- 時空多様体は、全体としては重力によって曲がっています。
- しかし、そのごく狭い領域（局所的な座標近傍、すなわち「チャート」）に限れば、平坦な 4 次元ミンコフスキー時空と見なすことができます。
- 平坦なミンコフスキー時空とは、重力が存在しない特殊相対性理論が成り立つ世界です。

つまり、「自由落下している観測者の系（エレベーターの中など）では、ごく狭い範囲に限れば重力が消え、特殊相対性理論の法則が成り立つ」という物理的な原理が、「曲がった時空多様体は、局所的には平坦なミンコフスキー時空で近似できる」という数学的な構造に、見事に対応しているのです。

このように、多様体という数学的な枠組みは、私たちが曲がった時空の上で物理を考えるための、非常に強力な土台を与えてくれます。この「局所的には平坦」という性質のおかげで、私たちは平坦な時空で成り立つ物理法則（電磁気学や特殊相対論）を、曲がった時空へと拡張していくための確かな足がかりを得ることができるのです。

次の節では、この多様体という舞台の上で、物理的なベクトルをどのように定義するかを見ていきましょう。

補足：多様体の数学的な定義

これまでは「地図帳」のアナロジーを用いて、多様体の直感的なイメージを説明してきました。ここで一度、このイメージが数学の言葉ではどのように厳密に定義されるのかを覗いてみましょう。いくつかの専門用語が登場しますが、その一つ一つが「地図帳」のどの部分に対応するのかを考えながら読むと、その本質が見えてくるはずです。

物理学で扱う（可微分）多様体は、厳密には以下の条件を満たす点の集まり（集合 M ）として定義されます。

■可微分多様体の定義 集合 M が n 次元の C^∞ 級 可微分多様体であるとは、以下の性質を満たすことである。

1. 土台となる空間： M は位相空間であり、ハウスドルフ性と第二可算性を満たす。
2. 地図の存在（局所ユークリッド性）： M の任意の点 p に対して、 p を含む M の開

集合 U_p と、 n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の開集合との間の同相写像（連続で、逆写像も連続な写像） $\phi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在する。このペア (U_p, ϕ_p) を点 p の周りのチャート（地図）と呼ぶ。

3. 地図帳の存在：このようなチャートの集まり（族） $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ があり、 M 全体を覆っている（ $\bigcup_i U_i = M$ ）。この \mathcal{A} をアトラス（地図帳）と呼ぶ。
4. のりしろの滑らかさ：アトラスに含まれる任意の2つのチャート (U_i, ϕ_i) と (U_j, ϕ_j) を考える。もし、これらの定義域が重なっている場合 $(U_i \cap U_j \neq \emptyset)$ 、一方の地図からもう一方の地図への座標変換関数

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

が、 \mathbb{R}^n の開集合から \mathbb{R}^n の開集合への写像として、無限回微分可能 (C^∞ 級) である。

少し圧倒されるかもしれませんが、一つ一つの意味はアナロジーと対応しています。

- (1) は、多様体が一変に枝分かれしたりせず、連続性などをきちんと議論できる「まともな」空間であるための技術的な条件です。
- (2) が「局所的には平坦」ということの厳密な表現です。同相写像 ϕ が、多様体の一部 U を平らなユークリッド空間 (\mathbb{R}^n) に写し取る「地図」の役割を果たします。
- (3) は、そのような地図をたくさん集めれば、全体を漏れなくカバーできる、ということです。
- (4) が最も重要です。これは、地図と地図が重なる「のりしろ」部分で、一方の座標系からもう一方の座標系への読み替えが「なめらか」に行えることを保証する条件です。物理学では、速度（1 階微分）や加速度（2 階微分）などを扱いたいので、多様体の上で微分ができることが絶対条件となります。この「座標変換が無限回微分可能」という条件が、どの地図（チャート）の上で微分を計算しても、その結果が矛盾なく他の地図に翻訳できることを保証してくれるのです。

このように、数学的な定義は一見すると抽象的ですが、その目的は「局所的に平坦な空間を、矛盾なく滑らかに貼り合わせる」という直感的なアイデアを、厳密かつ論理的に定式化することにあります。私たち物理学徒は、この直感的なイメージを心の拠り所としながら、先に進んでいきましょう。

2.3 接ベクトル空間：局所的な物理法則の舞台

多様体という、物理法則が展開される「舞台」の全体像を掴むことができました。次なる疑問は、「この曲がった舞台の上で、ベクトルはどのように定義されるのか？」ということです。

曲がった空間で矢印をどう扱うか？

私たちがベクトルに対して持っている最も素朴なイメージは「矢印」です。しかし、この矢印を曲がった多様体の上で扱う際には、一つ根本的な問題が生じます。

2次元球面（地球の表面）を考えてみてください。東京の地表に、北を指す長さ1の矢印を描きます。同様に、ニューヨークの地表にも、北を指す長さ1の矢印を描きます。これら2つの矢印（ベクトル）は、同じ「北向きで長さ1」という性質を持っていますが、果たして「同じベクトル」と言えるでしょうか？そして、この2つのベクトルを足し算することはできるでしょうか？

答えはノーです。なぜなら、東京の地表が作る平面と、ニューヨークの地表が作る平面は、向きが異なっているからです。異なる土台の上に乗っているベクトル同士を、直接足したり引いたり、あるいは比較したりすることは意味をなしません。平坦なユークリッド空間では、すべてのベクトルが同じ一つの巨大な平面の上に乗っていると見なせたため、この問題は生じませんでした。しかし、曲がった多様体の上では、ベクトルの「居場所」を各点ごとにきちんと用意してあげる必要があります。

各点に付属する平坦な空間

この問題を解決するため、私たちは次のように考えます。「多様体上のベクトルとは、多様体そのものの上に直接乗っているのではなく、多様体の各点 P に接する、無限に広がる平坦な空間の上に存在している。」

この、各点 P に接する仮想的な平坦空間のことを、点 P における接ベクトル空間 (**tangent vector space**) と呼び、 $T_P M$ のように表記します (M は多様体を指します)。

接ベクトル空間 $T_P M$

多様体 M のある点 P における接ベクトル空間とは、その点 P で多様体に「接している」平坦な空間（ユークリッド空間またはミンコフスキー空間）のことである。多様体が n 次元ならば、接ベクトル空間も n 次元の平坦な空間となる。

地球の例で言えば、東京という点における接ベクトル空間は、東京の地平線を無限に広げたような接平面です。東京における風のベクトルや、自動車の速度ベクトルは、すべてこの「東京接平面」という平坦な舞台の住人なのです。

重要なのは、多様体上のすべての点に、それぞれ独立した接ベクトル空間が一つずつ付属しているということです。あたかも、ウニの表面から無数のトゲが生えているように、多様体の表面の各点から、それぞれ真っ直ぐな接ベクトル空間が突き出しているとイメージしてください。

局所的な物理法則の舞台

一つの接ベクトル空間の中は、完全に平坦で真っ直ぐな空間です。したがって、その中では、ベクトルの足し算・引き算・スカラー倍といった、私たちがよく知っている線形代数の演算が自由にできます。

これは物理的に極めて重要です。なぜなら、各点 P の接ベクトル空間 $T_P M$ こそが、その点における局所的な物理法則が成り立つ舞台だからです。

点 P における電場ベクトルやエネルギーの流れ、粒子の運動量といった物理量は、すべてその点 P の接ベクトル空間に属するベクトル（やテンソル）として定義されます。マクスウェル方程式や運動方程式などの物理法則は、本来、この局所的な平坦な舞台の上で成立する法則だと解釈することができるのです。

ベクトル場という考え方

最後に、ベクトル場 (vector field) という概念を導入します。これは、多様体上の各点 P に対して、その点の接ベクトル空間 $T_P M$ の中からベクトルを一つ選び出して指定する、という規則のことです。

天気予報の風の分布図を思い浮かべてください。あれは、地表の各点に、その場所での風の向きと強さを表す矢印（ベクトル）を割り当てたものです。これがまさに、球面という2次元多様体上のベクトル場の典型的な例です。

一般相対性理論で扱う物理量の多くは、このベクトル場や、それをさらに一般化したテンソル場（各点にテンソルを割り当てたもの）として記述されます。

残された問題：異なる点をつなぐには？

さて、私たちは「舞台（多様体）」と、その上の各点における「局所的な舞台（接ベクトル空間）」、そしてその「住人（ベクトル）」を定義することができました。

しかし、最初の問題が完全に解決したわけではありません。東京の接ベクトル空間にあるベクトルと、ニューヨークの接ベクトル空間にあるベクトルは、やはりまだ直接比較することはできません。これらの異なる接ベクトル空間の住人同士を比較し、関係づけるためには、空間の曲がり具合を考慮しながら、ある点のベクトルを別の点まで「平行移動」させるためのルールが必要になります。

この、異なる接ベクトル空間同士を「つなぐ」ためのルールこそが、次章で学ぶ「接続」と「共変微分」なのです。

3 微分の一般化 - 共変微分と接続

物理法則の舞台となる「多様体」と、その各点における局所的な舞台である「接ベクトル空間」を準備しました。物理学において、法則を定式化する上で最も強力な道具の一つが「微分」です。速度や加速度、場の勾配など、物理量の「変化」を捉えるためには微分が不可欠です。

この章では、私たちがこれまで慣れ親しんできた微分の概念を、曲がった多様体の上で正しく機能するように一般化していきます。その過程で、空間の「曲がり」そのものを定量化する「接続」という新しい概念が登場します。これは一般相対性理論を理解する上で、まさに心臓部とも言える部分です。

3.1 曲面上のベクトルと微分の難しさ

まず、なぜ通常の微分が曲がった空間ではうまく機能しないのか、その理由を探ることから始めましょう。

ベクトル場 $\mathbf{V}(t)$ の時間微分は、以下のように定義されます。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(t + \Delta t) - \mathbf{V}(t)}{\Delta t}$$

この定義が数学的に意味を持つためには、大前提として、異なる 2 点（時刻 t の点 P と時刻 $t + \Delta t$ の点 Q ）に存在する 2 つのベクトル、 $\mathbf{V}(P)$ と $\mathbf{V}(Q)$ の間で引き算ができる必要があります。

平坦なユークリッド空間では、すべてのベクトルが同じ一つの巨大なベクトル空間の元と見なせるため、この引き算は何の問題もなく行えました。しかし、舞台が曲がった多様体になると、状況は一変します。

球面上の「一定な」ベクトル場

具体的な例として、2 次元球面（地球表面）の上を、赤道から北極へ、経線に沿って一定の速さで進む人の速度ベクトル場 \mathbf{V} を考えてみましょう。

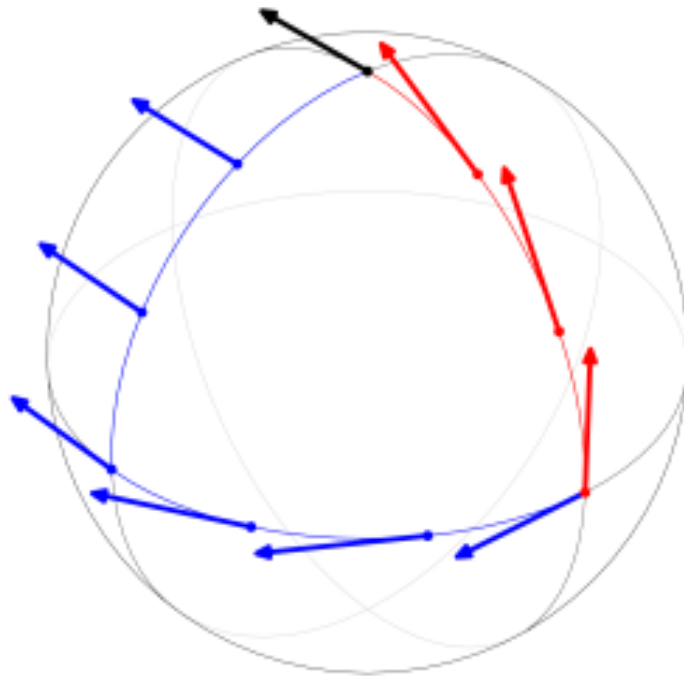


図 1 球面上の平行移動：Wikipedia より引用

この人の速度ベクトルは、どの瞬間においても「その場所での北向き」で、速さ（ベクトルの大きさ）は常に一定です。直感的には、このベクトル場は「変化していない」つまり「微分はゼロ」であると考えたくなります。

しかし、このベクトルを、私たちがいる 3 次元空間に埋め込まれた矢印として客観的に見てみましょう。

- 赤道上の点 P でのベクトル $\mathbf{V}(P)$ は、赤道面に平行な方向を向いています。
- 少し北へ進んだ点 Q でのベクトル $\mathbf{V}(Q)$ は、少しお辞儀をしたような、傾いた方向を向いています。

3 次元空間の視点から見れば、この 2 つの矢印は明らかに異なる方向を向いています。したがって、単純にベクトルとして引き算 $\mathbf{V}(Q) - \mathbf{V}(P)$ を計算すると、その結果はゼロになりません。直感と数式が食い違ってしまうのです。

通常の微分が破綻する根本原因

この問題の根本原因は、第 2 章で学んだことにあります。ベクトル $\mathbf{V}(P)$ は点 P における接ベクトル空間 $T_P M$ の住人であり、ベクトル $\mathbf{V}(Q)$ は点 Q における接ベクトル空間 $T_Q M$ の住人です。

$P \neq Q$ である限り、 $T_P M$ と $T_Q M$ は異なるベクトル空間です。

したがって、 $\mathbf{V}(Q) - \mathbf{V}(P)$ という計算は、異なるベクトル空間に属する元同士を、無理やり引き算しようとする行為に他なりません。これは、リンゴとミカンを同じ単位で数えようとするようなもので、線形代数的に許されない、意味のない操作なのです。

座標成分の微分も役に立たない

「ベクトルそのものの引き算がダメなら、どこかの座標系を導入して、その座標成分を微分すればよいのでは？」と考えるかもしれません。一見すると、これは良いアイデアに思えます。

例えば、地球表面を経度 ϕ と緯度 θ で表す座標系を考えます。先ほどの北上する運動は、例えば $V^\theta = v_0$ (一定)、 $V^\phi = 0$ のように、非常に単純な成分で表せるかもしれません。この成分を時間で微分すれば、当然ゼロになります。

しかし、もし私たちが別の、例えば傾いた極座標のような座標系を使っていたとしたらどうでしょうか。同じ「北へ一定速度で進む」という物理的な運動でも、その座標系での成分 (V'^θ, V'^ϕ) は、場所によって複雑に変化するでしょう。その成分を単純に微分しても、もはや結果はゼロにはなりません。

これは、ベクトルの成分の変化には、

1. ベクトルそのものが物理的に本当に変化したことによる部分
2. 座標軸（基底ベクトル）自体が場所によって伸び縮みしたり、傾いたりすることによる、見かけ上の変化

の 2 つが混ざってしまっていることを意味します。座標成分の単純な微分では、この 2 つを区別することができません。結果として、その値は座標系の取り方に依存してしまい、物理的な意味を持つ量とは言えないのです。

解決への道筋

問題をまとめましょう。曲がった多様体の上では、

- 異なる点にあるベクトルは、直接比較（引き算）できない。
- 座標成分の単純な微分は、座標系の選び方に依存してしまう。

という理由で、通常の微分は使えません。

この絶望的な状況を打破するには、どうすればよいのでしょうか。答えは、「異なる接ベクトル空間の元を比較するための、新しいルール」を導入することです。具体的には、点 P にあるベクトル $V(P)$ を、点 Q までの道のりに沿って「その向きをなるべく変えないように」運び、点 Q の接ベクトル空間 $T_Q M$ の上で、初めて $V(Q)$ と比較（引き算）するのです。

この「ベクトルを平行に運ぶ」という操作を数学的に定式化したものが「接続 (connection)」であり、この操作によって補正された新しい微分のことを「共変微分 (covariant derivative)」と呼びます。次節から、この新しいルールを構築していきましょう。

3.2 ベクトルの「平行移動」という考え方

前節で、曲がった多様体の上で微分を定義するためには、異なる点にあるベクトル同士を比較するための新しいルールが必要である、という結論に至りました。そのルールとは、ある点のベクトルを、道のりに沿って別の点まで「運んで」くる操作のことです。

この、ベクトルを「運ぶ」という操作を、幾何学の言葉で平行移動 (parallel transport) と呼びます。直感的には「ベクトルの向きをなるべく変えずに運ぶ」ということですが、この操作は、空間が平坦か曲がっているかで、その性質が劇的に異なります。

平坦な空間での平行移動

まず、私たちのよく知る 2 次元ユークリッド平面（平坦な空間）で考えてみましょう。点 P にあるベクトル V を、曲線 C に沿って点 Q まで平行移動させるとは、どういうことでしょうか。

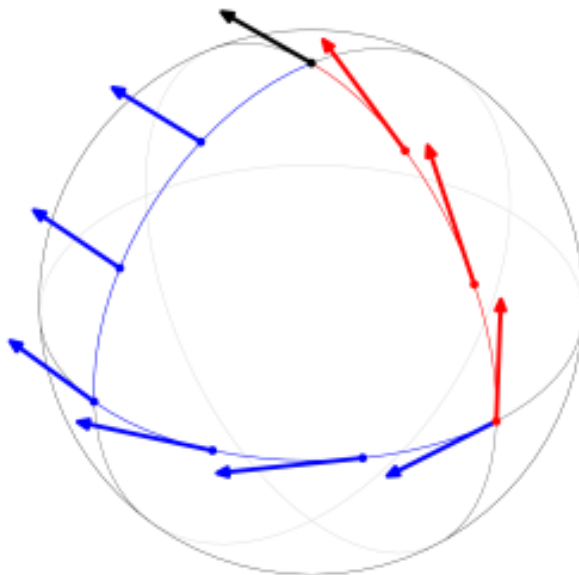
これは簡単です。ベクトルの向きと大きさを一切変えずに、そのままスライドさせていく操作です。計量 $g_{\mu\nu}(x)$ は各点で線素のみならず内積を記述することができるので、「向きと大きさを保存する」というコンセプトを表現する平行移動の概念と相性が抜群なのです。平坦な空間では、どの点においても「上向き」や「右向き」といった方向が共通の概念として存在するため、この操作は曖昧さなく定義できます。平坦な空間における平行移動の最も重要な性質は、その結果が経路に依存しないということです。点 P から点 Q まで、どのような遠回りをしてベクトルを運んだとしても、最終的に点 Q に到着したベクトルの向きと大きさは、常に同じになります。

曲がった空間での平行移動

次に、舞台を 2 次元球面（曲がった空間）に移しましょう。ここでも、「ベクトルの向きをなるべく変えずに運ぶ」というルールを適用したいのですが、その意味するところはより繊細になり

ます。球面上の平行移動は、「ベクトルが常に球面に接した状態を保ち、かつ、移動する経路に対して常に一定の角度を保ち続けるように運ぶ」と定義するのが自然です。

このルールに従って、驚くべき結果を示す思考実験を、右の図に示されたような経路に沿って行ってみましょう。



1. スタート地点 (**A**) : 赤道上的のある点 **A** を出発点とします。ここで、これから進む経路、つまり経線に沿った真北の方向を指すベクトル **V** を用意します。
2. 移動 1 (**A** → **P**) : このベクトル **V** を、進行方向と平行な状態（経線との角度を 0 度を保ったまま）で、北極点 **P** まで平行移動させます。
3. 移動 2 (**P** → **B**) : 北極点 **P** に到着したら、今度はそこから経度が 90 度異なる別の経線に沿って、赤道上的の点 **B** まで南下します。平行移動のルールに従い、ベクトルは新しい進行方向（南向きの経線）と平行な状態を保ち続けます。したがって、この移動中、ベクトルは常に真南を指しています。
4. 移動 3 (**B** → **A**) : 赤道上的の点 **B** に到着したとき、ベクトルは真南を向いています。ここから最後の道のりとして、赤道に沿って出発点 **A** に戻ります。この経路での進行方向は真西です。ベクトル（南向き）は、進行方向（西向き）に対して常に 90 度の角度を保ったまま、平行移動されます。

さて、出発点 **A** に戻ってきたベクトルは、どの方向を向いているのでしょうか？

進行方向（西）と常に 90 度の角度を保っているので、最終的にベクトルが指す方向は**真南**です。スタートの時点では**真北**を向いていたベクトルが、曲面上で三角形のループを描いて戻ってきただけで、全く逆の方向を向いてしまったのです！ 右の図は、まさにこのような平行移動の経路依存性によって、ベクトルがどのように回転してしまうかを視覚的に示したものです。

平行移動の経路依存性と空間の曲率

この思考実験が明らかにしたのは、極めて重要な事実です。

曲がった空間において、ベクトルの平行移動の結果は、通ってきた経路に依存する。

平坦な空間では、ベクトルを一周させて元の場所に戻すと、必ず元のベクトルと一致しました。しかし、曲がった空間では、一周して戻ってきたベクトルは、一般に元のベクトルとは異なる向きを向いてしまいます。

この「平行移動によって生じるズレ」こそが、空間が「曲がっている」ことの動かぬ証拠なのです。そして、このズレの大きさは、一周するループが囲む領域の曲率 (curvature) が大きければ大きいほど、顕著になります。後の章で学ぶリーマン曲率テンソルは、このズレを定量的に記述するためのものです。

「接続」というルールの必要性

平坦な空間では、平行移動のルールは誰にとっても自明でした。しかし、曲がった空間では、ある点から隣の点へベクトルを運ぶ際に、その成分がどのように変化するかを、明確な「対応規則」として私たちが与えてやる必要があります。

この、隣り合う点々の接ベクトル空間を「つなぐ」ための対応規則、すなわち平行移動のルールを数学的に定式化したものが「接続 (connection)」です。次節では、この「接続」を具体的な係数 (クリストッフェル記号) として表現する方法を学びます。

3.3 接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$: 座標系の歪みを補正する

前節では、曲がった空間でベクトルを比較するためには「平行移動」という操作が必要であり、その結果が経路に依存することを見ました。この平行移動の具体的なルールを数学的に定式化し、定量的に扱うための道具が接続係数 (connection coefficients) です。

一般相対性理論の文脈では、計量テンソルから定まるこの係数を特にクリストッフェル記号 (Christoffel symbols) と呼びますが、その幾何学的な本質は、隣り合う点々の接ベクトル空間を「つなぐ (connect)」ルールを与えることにあります。

平行移動のルールを数式で表現する

点 x^{μ} にある反変ベクトル $V^{\lambda}(x)$ を考えます。このベクトルを、無限小だけ離れた点 $x^{\mu} + dx^{\mu}$ まで平行移動させたとき、その成分はどのように変化するでしょうか。

もし空間が平坦で、デカルト座標系を使っているならば、平行移動させても成分は全く変化しません。しかし、曲がった空間や、あるいは平坦でも極座標のような歪んだ座標系を使っている場合、ベクトルを平行に保つためには、その成分を意図的に少し変化させてやる必要があります。

この平行移動による無限小の変化量を δV^{λ} と書くことにします。この変化量は、元のベクトルのどの成分 V^{μ} に依存し、どの方向へ dx^{ν} 動かしたかに、線形的に依存すると考えるのが自然です。この線形的な関係を結びつける係数を $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ と定義します。

接続係数による平行移動の定義

ベクトル V^μ を無限小ベクトル dx^ν だけ平行移動させたときの、ベクトル成分の変化量 δV^λ は、接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ を用いて次のように定義される。

$$\delta V^\lambda = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\mu dx^\nu$$

(ここでのマイナス符号は、後で定義する共変微分が綺麗な形になるようにするための慣習です。)

この式が、接続係数の第一の顔です。すなわち、平行移動という幾何学的な操作を規定するルールブックとしての役割です。 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ の具体的な値が分かれば、私たちはベクトルを多様体上の任意の曲線に沿って平行移動させることができるようになります。

なぜ成分は変わるのか？：微分と基底ベクトルの変化

ここで、より根本的な問いに立ち返ってみましょう。そもそも、なぜ平行移動ごときでベクトルの成分が変化してしまうのでしょうか。その原因は、ベクトルを表現するための「ものさし」である基底ベクトル e_μ が、場所によって変化する（歪んでいる）からです。

あるベクトル場 $\mathbf{V}(x)$ を考え、これを基底ベクトルを用いて $\mathbf{V} = V^\mu e_\mu$ と展開します。(アインシュタインの縮約記法を用いています。) このベクトル場を、座標 x^ν の方向に偏微分してみましょう。積の微分法則を適用すると、

$$\partial_\nu \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial (V^\mu e_\mu)}{\partial x^\nu} = (\partial_\nu V^\mu) e_\mu + V^\mu (\partial_\nu e_\mu)$$

となります。この式の意味を考えてみましょう。

- 第1項 $(\partial_\nu V^\mu) e_\mu$: これは、基底を固定したままで、ベクトルの成分だけがどれだけ変化したかを表す部分です。私たちが本当に知りたい「物理的なベクトルの真の変化」に最も近い部分です。
- 第2項 $V^\mu (\partial_\nu e_\mu)$: こちらは、ベクトルの成分は変わらなくても、基底ベクトル（座標系のものさし）自体が場所によって変化するために生じる「見かけの変化」です。

この厄介な第2項の中心である「基底ベクトルの変化」 $\partial_\nu e_\mu$ を考えます。基底ベクトルを微分したものもまたベクトルなので、同じ点の基底ベクトルの線形結合で書けるはずで、その展開係数を、まさに接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ を用いて定義します。

$$\partial_\nu e_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda$$

この式が、接続係数の第二の顔です。すなわち、「 ν 方向に進んだときの、基底ベクトル e_μ が e_λ 方向にどれだけ歪むか」という、座標系の局所的な歪み具合そのものを表しているのです。

接続係数の役割：微分演算子の補正

通常の微分演算子（偏微分 ∂_ν ）が曲がった空間でうまく機能しないのは、この「基底ベクトルの変化」という余計な項を拾ってしまうからでした。接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ は、この座標系の歪みに起因する見かけの変化を正確に定量化する量です。したがって、この接続係数を使って通常の微分を「補正」してやれば、座標系の歪みの影響を相殺し、ベクトルの真の変化だけを取り出すことができるはずです。これこそが、次節で導入する「共変微分」の基本的なアイデアとなります。

計量からの計算：レヴィチヴィタ接続

では、この重要な接続係数は、具体的にどうやって計算すればよいのでしょうか。一般の多様体では接続の選び方は様々ですが、一般相対性理論が扱うリーマン多様体（および擬リーマン多様体）では、物理的に最も自然な接続が、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ から一意的に定まります。これをレヴィチヴィタ接続と呼びます。

これは、以下の2つの妥当な要請から導かれます。

1. 振率（れいりつ）がゼロ： $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ であること。これは、微小な平行移動が「ねじれ」を起こさないことを意味します。
2. 計量条件を満たす：ベクトルを平行移動させても、その長さや、他のベクトルとの角度が変わらない、という条件です。これは、硬い棒を空間内で平行移動させても伸び縮みしない、という物理的直感に合致します。

この2つの条件を課すと、接続係数は計量テンソルとその一階微分だけを用いて、次のように計算できます。

リーマン幾何学における最も重要な接続係数：レヴィチビタ接続

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

この公式は極めて重要です。なぜなら、空間の幾何学的性質をすべて担う計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が分かりさえすれば、その空間での平行移動のルール（接続係数）がすべて計算できることを保証してくれるからです。導出は、次の共変微分を学んだ後で行うことにします。

3.4 共変微分 ∇_μ ：座標系に依らない真の微分

これまでの議論で、私たちは曲がった多様体の上で微分を正しく行うための準備を着々と進めてきました。その問題点と解決策への道筋を再確認しましょう。

- 問題点：座標成分の単純な偏微分 $\partial_\nu V^\mu$ は、ベクトルそのものの「真の変化」と、座標系の歪みによる「見かけの変化」を分離できない。そのため、テンソルとして正しく振る舞

わず、物理的な意味を持つ量とならない。

- 解決策：「見かけの変化」の元凶である座標系の歪み（基底ベクトルの変化）を定量化する接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ を導入した。

準備は整いました。いよいよ、この接続係数を用いて偏微分を「補正」し、座標系の選び方によらない「真の微分」を定義します。それが共変微分 (covariant derivative) です。

共変微分の導出

ベクトルの「真の変化」とは何でしょうか。それは、ある点 x でのベクトル $\mathbf{V}(x)$ と、無限小だけ離れた点 $x + dx$ でのベクトル $\mathbf{V}(x + dx)$ との「ずれ」です。しかし、この2つは異なる接ベクトル空間に属しているため、直接比較できません。

そこで、前節で導入した平行移動を使います。点 x にあるベクトル $\mathbf{V}(x)$ を、点 $x + dx$ まで平行移動させたものを $\mathbf{V}_{\parallel}(x + dx)$ と書くことにします。この $\mathbf{V}_{\parallel}(x + dx)$ は、点 $x + dx$ の接ベクトル空間に属しているので、 $\mathbf{V}(x + dx)$ と正しく引き算をすることができます。

この差こそが、ベクトル場の「真の変化」です。

$$(\text{真の変化}) = \mathbf{V}(x + dx) - \mathbf{V}_{\parallel}(x + dx)$$

これを成分で計算してみましょう。

- $\mathbf{V}(x + dx)$ の成分 $V^{\lambda}(x + dx)$ は、テイラー展開により $V^{\lambda}(x) + (\partial_{\nu} V^{\lambda}) dx^{\nu}$ と近似できます。
- 一方、 $\mathbf{V}_{\parallel}(x + dx)$ の成分は、元の成分 $V^{\lambda}(x)$ に平行移動による変化量 $\delta V^{\lambda} = -\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} V^{\sigma} dx^{\nu}$ を加えたものですから、 $V^{\lambda}(x) - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} V^{\sigma} dx^{\nu}$ となります。

両者の差を取ると、

$$\begin{aligned} (\text{真の変化})^{\lambda} &= (V^{\lambda} + \partial_{\nu} V^{\lambda} dx^{\nu}) - (V^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} V^{\sigma} dx^{\nu}) \\ &= (\partial_{\nu} V^{\lambda} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} V^{\sigma}) dx^{\nu} \end{aligned}$$

となります。この dx^{ν} の係数部分こそが、私たちが探し求めていた「真の微分」に他なりません。

反変ベクトルの共変微分

反変ベクトル V^{λ} の、 x^{ν} 方向に関する共変微分 $\nabla_{\nu} V^{\lambda}$ は、次のように定義される。

$$\nabla_{\nu} V^{\lambda} = \partial_{\nu} V^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V^{\mu}$$

(ダミー添字は自由に付け替えられるので、 σ を μ に戻しました。)

共変微分の本質

共変微分の構造は、「通常の偏微分」＋「座標系の歪みを打ち消す補正項」となっています。

$$\nabla_\nu V^\lambda = \underbrace{\partial_\nu V^\lambda}_{\text{見かけの変化}} + \underbrace{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\mu}_{\text{歪みの補正}}$$

この補正項のおかげで、共変微分 $\nabla_\nu V^\lambda$ は、座標変換に対して (1,1) 型のテンソルとして振る舞います。これにより、共変微分を用いて書かれた物理法則は、自動的に座標系の選び方によらない普遍的な方程式（共変な方程式）となるのです。

様々なテンソルの共変微分

共変微分は、スカラーや共変ベクトル、さらに高階のテンソルに対しても定義できます。

- スカラー場 ϕ

スカラーは添字を持たないため、座標系の歪みの影響を受けません。したがって、補正は不要です。

$$\nabla_\nu \phi = \partial_\nu \phi$$

- 共変ベクトル A_μ

共変ベクトルの場合、補正項はマイナスの符号で入ります。

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda$$

- 高階のテンソル $T^{\mu\nu}$

テンソルの共変微分は、ライプニッツ則（積の微分法則）が成り立つように定義されます。つまり、各添字に対して、それぞれ対応する補正項が一つずつ加わります。反変（上付き）添字にはプラスの項、共変（下付き）添字にはマイナスの項です。

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = \partial_\lambda T^{\mu\nu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu T^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^\nu T^{\mu\sigma}$$

$$\nabla_\lambda U^\mu{}_\nu = \partial_\lambda U^\mu{}_\nu + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu U^\sigma{}_\nu - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma U^\mu{}_\sigma$$

特に重要なのは、レヴィ＝チヴィタ接続の場合、計量テンソルの共変微分は常にゼロになるということです。

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

これは、計量条件（平行移動で長さや角度が不変）の現れであり、計量テンソルが空間のどこでも「定数」のように振る舞えることを意味します。これにより、計量テンソルを微分演算子 ∇ の外に出したり、添字の上げ下げを自由に行ったりすることができます。

補足：共変微分の物理的イメージと非可換性

共変微分を、少し違う角度から捉え直してみましょう。これは、本書の根幹に関わる重要なイメージです。

平坦で均一なユークリッド空間を、どこまでも同じ構造が続く「完璧な結晶格子」だと想像してください。この結晶の上では、どの場所で物理量を測定しても、測定に使う「ものさし」は全く同じです。したがって、ある点の量と隣の点の量を比較（微分）するのは簡単です。一方、重力によって曲がった時空（多様体）は、場所によって性質が異なる「不均一に歪んだ結晶」や「伸び縮みしたゴムシート」のようなものです。この「不均一な構造」の上では、点ごとに「ものさし」の長さや向き（すなわち基底ベクトル）が異なっています。

この不均一な構造の上で、単純な引き算による微分を行うと、物理量の真の変化と、「ものさし」自体の変化がごちゃ混ぜになってしまいます。

共変微分とは、この空間の不均一な構造を補正し、あたかも均一な空間であるかのように微分を自由自在に扱えるようにした、究極のツールなのです。接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ とは、いわば「隣の地点で使われている『ものさし』は、こちらの『ものさし』に対して、どれだけ傾いて、どれだけ伸び縮みしているか」という換算レートの情報です。共変微分は、この換算レートを使って物理量の変化を補正することで、純粋な物理的变化だけを抽出します。

しかし、この強力な「補正」は、重要な副作用をもたらします。それは、微分の順番が結果に影響する、ということです。

平坦な地面の上では、「東に1歩進んでから、北に1歩進む」と、「北に1歩進んでから、東に1歩進む」のでは、最終的に同じ場所に到達します。微分の言葉で言えば、 $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$ というように、偏微分は可換です。

ところが、丘のような曲面の上で、常に地面に対して垂直に立つように姿勢を「補正」しながら移動することを考えてみてください。

- 「東へ進み、傾きに合わせて姿勢を補正し、その状態で北へ進み、さらに姿勢を補正する」
- 「北へ進み、傾きに合わせて姿勢を補正し、その状態で東へ進み、さらに姿勢を補正する」

この2つのプロセスを経た後、あなたの最終的な体の向きは、一般には異なってしまいます。移動の経路（＝微分の順番）によって、最終的な状態が変わってしまうのです。

これこそが、共変微分の非可換性です。数学的には、2階の共変微分を計算すると、一般にその順番を交換できません。

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} V^{\lambda} \neq \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} V^{\lambda}$$

そして、この「順番を入れ替えたときの差（交換子）」が、まさに空間の「曲がり具合」（曲率）そのものを表しているのです。後の章で詳しく学びますが、この差はリーマン曲率テンソル $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ を用いて、

$$(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma}$$

と書くことができます。もし空間が平坦ならば、曲率はゼロ（ $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = 0$ ）となり、共変微分は可換になります。

このように、共変微分は空間の不均一性を乗り越えるための道具であり、その結果として現れる非可換性こそが、空間の曲がりという最も本質的な情報を私たちに教えてくれるのです。

計量テンソルと平行移動から、レヴィ=チヴィタ接続を導出する

先ほど、「振率ゼロ」と「計量条件」という2つの物理的に自然な要請を課すと、接続係数が計量テンソルから一意に決まる、と述べました。ここでは、その関係式を実際に導出してみましょう。これは、一般相対性理論の数学的構造がいかに堅牢であることを示す、美しい計算です。

私たちの出発点となる2つの要請を、数式で再確認します。

レヴィ=チヴィタ接続の導出の仮定

- (A) 振率がゼロであること（接続係数の対称性）：

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$$

- (B) 計量条件が満たされること（平行移動で長さ・角度が不変）：

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$$

まず、条件 (B) を共変微分の定義に従って書き下します。計量テンソルは共変の2階テンソルなので、その共変微分は

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} g_{\mu\sigma} = 0$$

となります。移項して、以下の基本となる式を得ます。

$$\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} g_{\mu\sigma} \quad (1)$$

ここからが計算の核心部です。この式 (1) の自由な添字 (λ, μ, ν) を、巡回的に入れ替えた式を2つ作ります。

$$\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} g_{\sigma\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} g_{\nu\sigma} \quad (2)$$

$$\partial_{\nu} g_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} g_{\sigma\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g_{\lambda\sigma} \quad (3)$$

次に、これらの3つの式を組み合わせ、(2) + (3) - (1) という計算を実行します。

■左辺の計算：

$$\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}$$

これは、私たちが求めたい接続係数の公式の括弧の中身に似ています。

■右辺の計算：

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} g_{\sigma\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} g_{\nu\sigma}) \quad \leftarrow (2) \text{の右辺} \\ &+ (\Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} g_{\sigma\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} g_{\lambda\sigma}) \quad \leftarrow (3) \text{の右辺} \\ &- (\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} g_{\mu\sigma}) \quad \leftarrow (1) \text{の右辺} \end{aligned}$$

ここで、条件 (A) の「振率ゼロ」、すなわち $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ を使って項を整理します。例えば、 $\Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ を $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ に書き換える、といった具合です。また、計量テンソルが対称であること ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) も使います。すると、

- $(\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\nu\sigma} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\sigma\nu})$ の項は、 $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma$ かつ $g_{\nu\sigma} = g_{\sigma\nu}$ なので、互いに打ち消し合います。
- $(\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma g_{\mu\sigma})$ の項も同様に、 $\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma$ かつ $g_{\sigma\mu} = g_{\mu\sigma}$ なので、打ち消し合います。
- 残るのは、 $\Gamma_{\nu\mu}^\sigma g_{\sigma\lambda}$ と $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\lambda\sigma}$ です。振率ゼロの条件からこれらは $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\lambda\sigma}$ となり、計量の対称性から $2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\lambda\sigma}$ となります。

結果として、右辺は $2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\lambda\sigma}$ という非常にシンプルな形になります。

■接続係数を求める 左辺と右辺を等しいと置くと、

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} = 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\lambda\sigma}$$

となります。私たちの目標は Γ を求めることなので、この式を Γ について解きます。式の両辺に逆計量テンソル $g^{\rho\lambda}$ を掛けて、添字 λ について縮約を取ります。

$$g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) = 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\lambda\sigma} g^{\rho\lambda}$$

右辺は、 $g_{\lambda\sigma} g^{\rho\lambda} = \delta_\sigma^\rho$ (クロネッカーのデルタ) となるので、 $2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \delta_\sigma^\rho = 2\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ となります。最後に、両辺を 2 で割り、添字の名前を慣習に合わせて付け替える ($\rho \rightarrow \lambda, \lambda \rightarrow \sigma$) と、最終的に求めたい公式が導かれます。

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

このように、計量テンソルを与え、物理的に自然な 2 つの要請 (振率ゼロ、計量条件) を課すだけで、空間の接続構造 (平行移動のルール) が一意に決まってしまうのです。この事実、計量テンソルがいかにその空間の根源的な情報を担っているかを示しています。

接続の一般性とレヴィ=チヴィタ接続の奇跡

ここで、私たちが成し遂げたことの重要性を、少し広い視点から振り返ってみましょう。数学的には、「接続」とは多様体上の平行移動のルールを定めるものであり、本来は計量テンソルとは全く独立に、もっと広く定義される概念です。原理的には、同じ一つの多様体の上にも、無数の異なる「接続」 (= 平行移動のルール) を考えることができ、どの接続を選ぶかによって、測地線の形も全く変わってしまいます。

しかし、物理的な時空を記述するにあたり、私たちは

1. 平行移動で長さや角度が変わらない (計量条件)
2. 平行移動がねじれない (振率ゼロ)

という、極めて自然で妥当な 2 つの要請を課しました。

すると、驚くべきことが起こります。先ほどの計算が示したように、この 2 つの条件を課した途端、無数にあった接続の可能性の中から、たった一つの接続が、奇跡的とも言えるほど

自然に、そして一意的に選び出されるのです。

しかも、その唯一許された特別な接続は、私たちが最初に時空の「ものさし」として与えた計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその微分だけで、完全に記述できてしまうのです。

この事実は、計量（時空の歪み）を与えれば、そこでの慣性運動（測地線）のルールが自動的に決まるという、物理と幾何学の深く美しい結びつきを示しています。

これ以降、本書で単に「接続」または「接続係数」と呼ぶ場合は、この計量から一意に定まるレヴィ＝チヴィタ接続のことを指すものとします。

私たちは今、曲がった多様体上で物理法則を記述するための、最も重要な文法を手に入れました。次章では、この強力な道具である共変微分を使って、曲がった空間での「まっすぐな運動」とは何かを定義します。

4 曲がった空間での「まっすぐな線」 - 測地線

第3章で、私たちは曲がった多様体上で正しく微分を行うための強力な道具「共変微分」を手に入れました。これにより、ベクトル場やテンソル場の「変化」を、座標系の選び方によらない普遍的な形で記述できるようになったのです。

次なるテーマは「運動」です。物理学の基礎であるニュートンの第一法則（慣性の法則）は、「いかなる力も働いていない物体は、静止し続けるか、等速直線運動を続ける」と述べています。この法則を、アインシュタインの曲がった時空へと一般化するためには、まず「直線」、すなわち「まっすぐな線」とは何かを、曲がった空間上で定義し直さなければなりません。

地球の表面のような曲面の上で、「まっすぐ進む」とは、一体どういうことなのでしょう？

4.1 「まっすぐ」の再定義

私たちが平坦なユークリッド空間で「まっすぐな線」と聞いて思い浮かべるイメージには、主に2つの性質があります。

1. 最短距離の性質：2つの点を結ぶ最も短い経路である。
2. 向きが変わらない性質：その線上を移動する観測者にとって、進行方向が常に一定である。

曲がった空間では、これらの性質をナイーブに適用することはできません。例えば、地球上で東京からニューヨークへ、コンパスの向きを常に一定（例えば真東）に保って進んでも、その経路は最短距離にはなりません。

しかし、2番目の「向きが変わらない」という性質を、私たちが第3章で苦労して手に入れた「平行移動」という言葉で洗練させることで、一般化への道が拓けます。

平行移動で「まっすぐ」を定義する

平坦な空間で直線の上を等速で進むとき、その速度ベクトルは、大きさも向きも一切変わりません。これは、速度ベクトルが自分自身の方向に沿って平行移動されていると見なすことができます。

この考え方を、そのまま曲がった空間に持ち込みましょう。

測地線の定義

ある曲線が、その空間にとっての「まっすぐな線」であるとは、その曲線の接線ベクトル（進行方向を表すベクトル）を、曲線自身に沿って平行移動させたときに、常に自分自身と重なり続けるような曲線のことである。

これをもう少し直感的なイメージで捉え直してみましょう。あなたが今、ある曲がった地面の上を歩いているとします。そして、自分の進行方向を指し示す一本の槍を、常に体の正面にまっすぐ掲げています。あなたが「まっすぐ」進むとは、次のようなプロセスです。

1. まず一步、槍の指し示す方向へ進みます。
2. 次に、その場で体の向きを変えずに、掲げている槍の向きを、地面の曲がりに合わせて「なるべく変わらないように」微調整します（これが、接線ベクトルの平行移動です）。
3. そして、その微調整された新しい槍の向きに、また次の一步を踏み出す。

このプロセスを無限に繰り返して描かれる軌跡が、その空間にとって最も自然な「まっすぐな線」です。このような線のことを、数学と物理学の世界では測地線 (geodesic) と呼びます。

例：球面上の測地線

この定義を地球表面（2次元球面）に適用すると、測地線はどのような曲線になるでしょうか。それは、地球の中心を通る平面で球面を切り取ったときにできる切り口の円、すなわち大円 (great circle) の弧となります（赤道や全ての経線はこれにあたります）。

国際線の飛行機が、世界地図（メルカトル図法）の上では大きく北へ膨らんだ奇妙な曲線を描いて飛ぶのを見たことがあるでしょう。あれは、まさに球面上での2都市間を結ぶ最短経路、すなわち測地線（大円航路）を飛んでいるからなのです。

測地線の二つの顔と物理的意味

実は、「向きが（共変的な意味で）変わらない線」として定義した測地線は、「2点間の距離を最短（または最長、あるいは極値）にする線」という性質も持っています。変分法という数学的手法を用いて最短距離の線を計算すると、それは測地線が満たすべき方程式と一致するのです。

測地線は、これら二つの顔を持っています。

- 幾何学的な顔：その空間にとって最も自然な「まっすぐな線」。
- 物理学的な顔：外部から力が働かない物体がたどる「慣性運動」の軌跡。

一般相対性理論の基本的な主張は、まさにこれです。「重力場の中を自由に運動する物体（自由落下する物体）は、重力によって曲げられた4次元時空の測地線に沿って運動する」。惑星が太陽の周りを楕円軌道を描いて回るのは、太陽から何らかの力で引っ張られているからではありません。太陽という巨大な質量によって歪められた時空の「くぼみ」を、ただひたすら「まっすぐ」進んだ結果が、私たちには楕円軌道に見えているに過ぎないのです。

4.2 測地線の方程式

前節では、測地線を「その接線ベクトルが、曲線自身に沿って平行移動されているような線」として、直感的に定義しました。この節では、この直感的な定義を、私たちが第3章で手に入れた共変微分の言葉を使って、具体的な微分方程式に翻訳していきます。

定義から方程式へ

まず、曲線をパラメータ λ （例えば時間や距離）を使って $x^\mu(\lambda)$ と表現し、その接線ベクトル（速度ベクトル）を $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ と定義します。

測地線の定義「接線ベクトルが、曲線に沿って平行移動されている」とは、数学的には「接線ベクトル U^μ の、自分自身の方向への共変微分がゼロである」という条件に翻訳されます。これにより、測地線が満たすべき方程式は、次のように非常に美しく、かつ簡潔に表現されます。

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0$$

この式を、共変微分の定義を用いて接続係数 $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ で具体的に書き下すと、以下のようになります。

測地線の方程式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

これは、測地線の軌跡 $x^\mu(\lambda)$ を決定するための2階の常微分方程式です。この一見複雑な方程式の気持ちを、アナロジーで解き明かしてみましょう。

方程式の解釈

この方程式を、曲がった地面の上を走る自動運転車の制御システムだと考えてみてください。

$$\underbrace{\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2}}_{\text{加速度（ハンドルの切れ角）}} + \underbrace{\Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}}_{\text{地面の歪みに合わせた自動操舵}} = 0$$

- 第 1 項（加速度）：これは車の加速度であり、ドライバーがハンドルを切ることに対応します。もし地面が完全に平坦で、マス目もまっすぐなら、まっすぐ進むためにはハンドル操作は不要です。つまり、この項がゼロになります。
- 第 2 項（自動操舵）：これが曲がった空間（または歪んだ座標系）の効果です。
 - $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$ は、その地点の地面の曲がり具合や座標の歪み具合が記録された「地図データ」です。
 - $\frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}$ は、車の現在の速度の 2 乗に相当します。

つまり、この第 2 項は「地図データと現在の速度に基づいて、車がまっすぐ進み続けるために、どれだけ自動でハンドルを切るべきか」を計算しているのです。例えば、カーブに差し掛かったら、その曲率に応じて内側にハンドルを切らないと「まっすぐ」進めません。測地線の方程式は、この「自動操舵」によって、加速度（ドライバーによる余計なハンドル操作）が常にゼロになるように車を走らせるための制御則なのです。

■計算例：球面上の測地線が大円になることの確認 測地線の方程式という抽象的なツールが、本当に私たちの直感と一致するのか、具体的な計算で確かめてみましょう。目標は、2 次元球面上の「まっすぐな線」が大円（赤道や経線など）になることを、方程式を解くことで示すことです。

演習問題：球面上の測地線方程式

$$\text{球面上の測地線が} \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (\mu = \theta \text{ の式}) \quad (4)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \quad (\mu = \phi \text{ の式}) \quad (5)$$

という微分方程式を満たすことを確かめてみましょう。（この問題は解くためのステップ数が多いので、初見だとやや難しいです。解けなくても無理せず、解説を読んで理解していただいても大丈夫です）。

Step 1：球面の計量を準備する

まず、半径 R の球面を考えます。座標として、北極からの角度（余緯度） θ と、経度 ϕ を用いるのが便利です。この球座標 (R, θ, ϕ) を用いると、球面上の微小距離（線素） ds^2 は、

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

と書けます。ここから、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆行列 $g^{\mu\nu}$ の成分がわかります。

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & 1/(R^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

Step 2 : 接続係数を計算する

次に、計量テンソルとその微分を使って、接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ を計算します。公式

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})$$

に代入して計算を進めると（途中計算は省略します）、ゼロにならない接続係数は以下の 3 つだけであることがわかります。

$$\begin{aligned}\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} &= \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\end{aligned}$$

Step 3 : 測地線の方程式を立てる

計算した接続係数を、測地線の方程式

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0$$

に代入します。 $x^1 = \theta$, $x^2 = \phi$ として、 $\mu = \theta$ と $\mu = \phi$ のそれぞれについて方程式を書き下します。

球面上の測地線方程式

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (\mu = \theta \text{ の式}) \quad (6)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \quad (\mu = \phi \text{ の式}) \quad (7)$$

これが、球面上のまっすぐな線を決定する連立微分方程式です。

Step 4 : 簡単な解を見つける

この複雑な連立方程式の一般解を求めるのは大変ですが、いくつかの簡単なケースを調べること、測地線の正体がわかります。

■ケース A : 赤道 赤道は、 $\theta = \pi/2$ で一定の軌道です。このとき、 $d\theta/d\lambda = 0$ かつ $d^2\theta/d\lambda^2 = 0$ です。また、 $\cos(\pi/2) = 0$, $\cot(\pi/2) = 0$ です。これらの値を方程式に代入してみましょう。

- ($\mu = \theta$ の式): $0 - \sin(\pi/2)\cos(\pi/2)(\dots)^2 = 0 - (1 \cdot 0 \cdot \dots) = 0$ となり、成立します。
- ($\mu = \phi$ の式): $\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2\cot(\pi/2) \cdot 0 \cdot (\dots) = \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 0 = 0$ となります。これは $\frac{d\phi}{d\lambda}$ が定数であることを意味し、赤道上を一定角速度で進む運動に対応します。これも成立します。

よって、赤道は測地線であることが確認できました。

■ケース B: 経線 経線は、 $\phi = \text{const.}$ で一定の軌道です。このとき、 $d\phi/d\lambda = 0$ かつ $d^2\phi/d\lambda^2 = 0$ です。

- ($\mu = \theta$ の式): $\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \sin\theta \cos\theta \cdot 0 = \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = 0$ となります。これは $\frac{d\theta}{d\lambda}$ が定数であることを意味し、経線上を一定速度で進む運動に対応します。成立します。
- ($\mu = \phi$ の式): $0 + 2 \cot\theta \frac{d\theta}{d\lambda} \cdot 0 = 0$ となり、成立します。

よって、経線も測地線であることが確認できました。

赤道も経線も、球の中心を通る平面で球面を切り取ってできる「大円」の一種です。より厳密な解析を行うと、この測地線方程式の解は、すべて大円になることが証明できます。このように、測地線の方程式は、私たちの幾何学的な直観を数学的に裏付けてくれる強力なツールなのです。

4.3 物理的意味：重力場を自由落下する粒子

私たちは、数学的な道具として「測地線」を定義し、それを計算するための方程式を導出してきました。この章の最後に、この測地線という概念が、物理学、特にアインシュタインの重力理論において、どれほど中心的で革命的な役割を果たすのかを明らかにしましょう。

等価原理との再会

本書の冒頭で紹介した、アインシュタインの思考の出発点である等価原理を思い出してください。「自由落下している観測者（例えば、ケーブルの切れたエレベーターの中にいる人）の、ごく狭い周辺領域（局所慣性系）においては、重力は完全に消え去り、物理法則は特殊相対性理論の法則と同じ形になる。」

さて、特殊相対性理論の世界（平坦なミンコフスキー時空）において、外部から力が働かない粒子はどのような運動をするのでしょうか？ 答えは自明です。粒子は等速直線運動をします。そして、平坦な時空における「直線」とは、まさにその時空の測地線に他なりません。

この事実を等価原理と組み合わせると、驚くべき結論が導かれます。

1. 重力場の中を自由に運動している粒子（＝自由落下する粒子）を考える。
2. その粒子と一緒に運動する局所的な慣性系（自由落下するエレベーター）から見れば、その粒子は力が働かない粒子として、特殊相対性理論に従い、まっすぐ（測地線に沿って）運動しているように見える。
3. 測地線であるという性質は、座標変換によって変わらない（共変的な）性質です。したがって、ある座標系（自由落下系）で測地線を描く軌道は、他のどのような座標系（例えば、地上に静止した観測者の系）から見ても、測地線でなければなりません。

測地線と自由落下

以上の考察から、一般相対性理論の運動に関する基本原理が導かれます。

重力場の中を、重力以外の力を受けずに自由に運動する粒子（自由落下する粒子）の軌跡は、その重力場によって曲げられた 4 次元時空の測地線である。

パラダイムシフト：力から幾何学へ

この結論は、ニュートン以来 300 年間支配的だった重力観を、根底から覆すパラダイムシフトを意味します。

■ニュートンの描像

- 舞台：時間は絶対的で、空間は平坦で不変なユークリッド空間。
- 運動の原因：惑星は、太陽が及ぼす「重力」という力 F_g によって、本来のまっすぐな軌道（直線）から無理やり軌道を曲げられている。
- 運動方程式： $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g$

■アインシュタインの描像

- 舞台：質量とエネルギーの存在によって曲げられた、動的な 4 次元時空多様体。
- 運動の原因：惑星は、いかなる力も受けていない。ただ、その曲がった時空を、自身の慣性に従って自然に「まっすぐ」（測地線に沿って）進んでいるだけである。
- 運動方程式： $\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$

アインシュタインの世界では、「重力」という名の力はもはや存在しません。ニュートンが重力と呼んだものの正体は、時空の幾何学的な性質、すなわち時空の曲がりそのもの（接続係数 Γ として現れる）だったのです。

木から落ちるリンゴも、地球の周りを回る月も、あるいは太陽の周りを回る地球も、全てはそれぞれの質量が作った時空の歪みを、ただひたすら「まっすぐ」進んでいるだけなのです。その「まっすぐ」な軌跡が、私たち 3 次元空間の住人には、あたかも何かの力で引っ張られているかのような放物線や楕円軌道に見える、というわけです。

次なる問いへ

これで、一般相対性理論の描像の半分、「曲がった時空が、物質の運動をどのように規定するか」が、測地線の方程式によって定式化されました。

しかし、まだ最も重要な問いが残されています。それは、物語の残りの半分、「そもそも、物質やエネルギーは、時空をどのように曲げるのか？」という問いです。

この問いに答えるのが、物理学の最も美しい方程式の一つと称される、アインシュタイン方程式です。次章では、いよいよこの方程式の導入を目指します。

私たちはこれまで、ベクトルの平行移動と座標系の歪みを補正するために「接続係数 Γ 」を導入し、それを用いて「共変微分 ∇ 」を定義しました。これは純粋に幾何学的な要請から導かれたものでしたが、驚くべきことに、この考え方は素粒子物理学の根幹をなすゲージ理論に現れる構造と全く同じなのです。その最も身近な例が電磁気学です。

量子力学の「位相」と局所対称性

量子力学において、電子のような粒子は波動関数 $\psi(x)$ で記述されます。しかし、物理的に観測可能な量は確率密度 $|\psi(x)|^2$ などであり、波動関数に任意の（一定の）位相因子を掛けても物理は変わりません。

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad (\alpha \text{ は定数})$$

これを大域的ゲージ対称性と呼びます。

では、この位相の回転角度 α が、時空の場所ごとに異なる関数 $\alpha(x)$ であっても物理法則が不変である、という、より強力な要請を考えてみましょう。これを局所ゲージ対称性と呼びます。

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x)$$

これは、「時空の各点で、波動関数の位相という『内部的なものさし』の向きを自由に選べる」という要請です。この状況は、多様体の各点で座標系を自由に選べる「一般座標変換」と非常によく似ています。

局所対称性と「ゲージ共変微分」

この要請のもとで、通常の微分 $\partial_\mu \psi$ がどう変換されるか見てみましょう。

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi) = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu \psi) + i(\partial_\mu \alpha) e^{i\alpha(x)} \psi$$

変換後の $\partial_\mu \psi'$ は、単に $\partial_\mu \psi$ を位相回転させたものではなく、余計な項 $(i(\partial_\mu \alpha) \dots)$ が現れてしまいました。これでは物理法則が局所ゲージ変換に対して不変（共変）になりません。

これは、曲がった座標系でベクトルの成分を偏微分したときに、テンソルとして振る舞わなかった問題と全く同じ構造です。あの時、私たちは接続係数 Γ を導入して微分を「補正」しました。今回も同じことをします。

厄介な項を打ち消すために、新しい場 $A_\mu(x)$ （ゲージ場と呼ぶ）を導入し、微分を次のように置き換えます。

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_\mu$$

この D_μ をゲージ共変微分と呼びます。そして、波動関数の位相を回転させると同時に、ゲージ場 A_μ も以下のように変換されると要請します。

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

このルールのもとで $D_\mu \psi$ の変換性を計算すると、余計な項が綺麗に打ち消しあい、

$$D'_\mu \psi' = e^{i\alpha(x)} (D_\mu \psi)$$

となることがわかります。つまり、ゲージ共変微分 $D_\mu \psi$ は、波動関数 ψ と同じように共変的に変換されるのです。

そして、物理法則の局所ゲージ対称性を保つために必然的に導入されたこのゲージ場 A_μ こそ、私たちがよく知る電磁ポテンシャルに他なりません。

重力と電磁気学の美しい対応

このアナロジーをまとめると、以下の美しい対応表が出来上がります。

一般相対性理論（重力）	U(1) ゲージ理論（電磁気学）
多様体上の一般座標変換	内部空間での局所ゲージ変換
接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ （重力場）	ゲージ場 A_μ （電磁ポテンシャル）
共変微分 ∇_μ	ゲージ共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$
曲率 $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ （潮汐力）	場の強さ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ （電磁場）

さらに驚くべきことに、このアナロジーは「曲率」のレベルでも成立します。重力理論では、共変微分の非可換性 $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ がリーマン曲率テンソル（物理的に観測可能な潮汐力）を与えました。同様に、電磁気学のゲージ共変微分の非可換性 $[D_\mu, D_\nu]$ を計算すると、それは電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ （物理的に観測可能な電場と磁場）に比例します。

つまり、「接続」そのものは座標やゲージの選び方に依存するが、その「曲率」は物理的な実体を表すという深遠な幾何学的構造が、重力と電磁気学（さらには弱い力、強い力）という、自然界の基本的な相互作用の根底に共通して流れているのです。

5 空間の曲がりそのものを測る - 曲率テンソル

これまでの章で、私たちは曲がった空間の上で物理を語るための様々な道具を揃えてきました。第3章では、ベクトルを異なる点の間で比較するためのルールとして「接続（平行移動）」を、第4章ではそのルールを使って「まっすぐな線（測地線）」を定義しました。

しかし、私たちはまだ最も根源的な問いに答えていません。それは、「空間が、どれくらい、どのように曲がっているのか？」を、客観的な数値（テンソル）としてどう表現すればよいのか、という問いです。

第3章の思考実験で、球面上でベクトルを一周させると元の向きからズレてしまうことを見ました。この「平行移動の経路依存性」こそが、空間が曲がっていることの本質的な現れでした。この章では、このアイデアを精密化し、空間の「曲がり」そのものを測る究極の道具、リーマン曲率テンソルを導入します。

5.1 ベクトルで四角形を描くと何が起こるか？

空間の曲がり具合を調べるために、ある点 P のごく近傍で、微小な四角形を描く思考実験を試みましょう。

まず、点 P の接ベクトル空間 $T_P M$ から、2つの微小な変位ベクトルを用意します。一つは x^μ 方向に微小量 δ_1 だけ進むベクトル \mathbf{u} 、もう一つは x^ν 方向に微小量 δ_2 だけ進むベクトル \mathbf{v} とします。そして、点 P にあるテスト用のベクトル \mathbf{V} を、これらの変位ベクトルが作る「微小な四角形」の2つの異なる経路に沿って、終点まで平行移動させてみます。

思考実験のステップ

- 経路 1 ($P \rightarrow A \rightarrow Q$)

1. 点 P から、ベクトル \mathbf{u} に沿って点 A まで進みます。この間、ベクトル \mathbf{V} を平行移動させます。
2. 次に、点 A から、ベクトル \mathbf{v} に沿って点 Q まで進みます。この間も、ベクトルを平行移動させ続けます。

こうして最終的に点 Q に到着したベクトルを \mathbf{V}_1 とします。

- 経路 2 ($P \rightarrow B \rightarrow Q$)

1. 今度は出発点 P から、まずベクトル \mathbf{v} に沿って点 B まで進み、ベクトル \mathbf{V} を平行移動させます。
2. 次に、点 B から、ベクトル \mathbf{u} に沿って同じ終点 Q まで進み、ベクトルを平行移動させ続けます。

こうして点 Q に到着したベクトルを \mathbf{V}_2 とします。

もし、この実験を平坦なユークリッド空間で行ったなら、どうなるでしょうか？ 平坦な空間では平行移動の結果は経路に依りませんでしたから、必ず $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$ となります。つまり、2つのベクトルの差 $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ は、厳密にゼロになります。

しかし、空間が曲がっている場合、この差 $\Delta \mathbf{V}$ はもはやゼロにはなりません。この「平行移動の経路依存性によって生じる、ごくわずかなズレ」こそが、空間の曲がりの直接的な現れなのです。

曲率テンソルの誕生

このズレのベクトル $\Delta \mathbf{V}$ の各成分 ΔV^ρ が、何に比例するかを考えてみましょう。

- ズレは、元のテストベクトル \mathbf{V} (成分 V^σ) がなければ生じませんから、その成分に比例するはずです。
- また、描く四角形が大きければ大きいほどズレも大きくなるでしょうから、四角形の辺の長さ（変位ベクトルの大きさ δ_1, δ_2 ）に比例するはずです。

この比例関係を結びつける係数こそが、リーマン曲率テンソル (Riemann curvature tensor) $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ です。

$$\Delta V^\rho \approx R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma (\delta_1 x^\mu) (\delta_2 x^\nu)$$

($\delta_1 x^\mu$ はベクトル \mathbf{u} の μ 成分、 $\delta_2 x^\nu$ はベクトル \mathbf{v} の ν 成分を表します)

リーマン曲率テンソルの直感的定義

リーマン曲率テンソルとは、微小なループ（四角形）に沿ってベクトルを平行移動させて出発点に戻したときに、元のベクトルからどれだけズレるかを定量化するテンソルである。

このテンソルは、接続係数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ とその微分から構成されます。接続係数そのものは座標変換でゼロにできる「見かけの量」でしたが、その微分を含む曲率テンソルは、もはや座標変換で消すことのできない「真の」物理量を表します。

曲率テンソル：空間が本当に曲がっているかの判定条件

リーマン曲率テンソル $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ は、空間が内在的に曲がっているかどうかの絶対的な判定基準を与えてくれます。

- ある領域の全ての点で $R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$ ならば、その領域は（たとえ極座標のような歪んだ座標で書かれていても）本質的に平坦です。
- 逆に、どのような巧妙な座標変換を試みても $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ をゼロにできないならば、その空間は真に曲がっているのです。

私たちはついに、空間の「曲がり」そのものを、座標系の選び方という曖昧さから解放された、客観的なテンソル量として捉えることに成功したのです。

5.2 リーマン曲率テンソル $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$

前節で、ベクトルを微小な四角形の経路に沿って平行移動させると、空間が曲がっている場合に「ズレ」が生じることを見ました。リーマン曲率テンソルは、この「ズレ」の大きさと方向を厳密に定量化する数学的な道具です。その定義には、主に2つの方法があります。

定義1：共変微分の非可換性として

一つ目の定義は、共変微分という演算の性質に基づきます。平坦な空間でデカルト座標を使っている場合、通常の偏微分は順番を入れ替えることが可能でした ($\partial_\mu \partial_\nu f = \partial_\nu \partial_\mu f$)。しかし、曲がった空間での共変微分 ∇ は、一般にその順番を入れ替えることができません。

リーマン曲率テンソルは、この「微分の非可換性」の度合いを測る量として定義されます。

定義：共変微分の交換子

任意のベクトル場 V^ρ に対して、リーマン曲率テンソル $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ は、共変微分の交換子（演算の順番を入れ替えた差）を用いて次のように定義される。

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma$$

この式の意味を解説します。

- もし空間が平坦ならば、共変微分の順番は交換可能であり、左辺は常にゼロになります。したがって、 $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ も恒等的にゼロとなります。
- もし空間が曲がっているならば、微分の順番を入れ替えると結果が異なります。その差（左辺）は、元のベクトル V^σ に比例した、あるベクトルを生み出します。その比例係数こそが、リーマン曲率テンソルなのです。

つまり、曲率テンソルは「共変微分がどれだけ可換でないか」を測る指標と言えます。

定義 2：接続係数による具体的表現

この定義を、私たちが学んだ接続係数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を使って具体的に計算すると、曲率テンソルの成分は以下のように書き下せます。

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

この式を暗記する必要はありません。重要なのは、曲率テンソルが、接続係数（平行移動のルール）とその微分（ルールの場所による変化）だけで完全に決まるということです。これは、空間の「曲がり」が、各点での「平行移動のルールの変化の仕方」から生じる、という幾何学的な描像を数式で表したものです。

幾何学的な意味：測地線逸脱

では、この数学的な量は、幾何学的に何を意味するのでしょうか。それは、測地線逸脱 (geodesic deviation) という現象に現れます。

非常に近くを、ほぼ同じ方向に走り始めた 2 本の測地線を考えてください。

- もし空間が平坦ならば、これらの測地線（直線）は、どこまで進んでも互いに同じ距離を保ち続けます。
- しかし、空間が曲がっている場合、たとえ最初は平行であっても、これらの測地線は自然に互いに近づいたり（収束）、あるいは離れたり（発散）します。

例えば、球面上では、赤道で平行に出発した 2 本の経線は、北極で交差します。これが測地線逸脱です。

リーマン曲率テンソルは、この測地線逸脱の度合いを正確に記述します。2 本の測地線の間微小なズレを表すベクトルを ξ^μ とすると、その相対的な加速度は、測地線逸脱の方程式によって、以下のように与えられます。

測地線逸脱の方程式

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho \xi^\sigma$$

(ここで $\frac{D}{d\tau}$ は曲線に沿った共変微分、 U^μ は測地線に沿って進む速度ベクトルです。)

この方程式は、測地線間の相対加速度（左辺）が、空間の曲率 R に比例して生じる（右辺）ことを示しています。つまり、曲率が大きいほど、隣り合う「まっすぐな線」はより激しくズレていくのです。

物理的意味について

一般相対性理論では、自由落下する粒子の軌跡が測地線となります。したがって、測地線逸脱という純粋に幾何学的な現象は、「隣り合って自由落下する粒子たちが、互いの距離を変えていく」という物理現象に対応します。この、場所による重力場の違いによって生じる相対的な加速度のことを、物理学では潮汐力と呼びます。

このように、リーマン曲率テンソルは、接続係数 Γ のように座標変換で消すことのできない、時空の真の幾何学的性質を捉える量であり、それは測定可能な物理現象と直接結びついているのです。

5.3 曲率の物理的イメージ

前節では、リーマン曲率テンソルを、共変微分の非可換性や測地線逸脱といった、幾何学的な観点から定義しました。数学的にはそれで完璧ですが、「では、結局それは物理的に何なのか？」という当然の疑問が残ります。

この節では、曲率テンソルが私たちの世界でどのような「顔」をして現れるのか、その物理的なイメージを探ります。結論を先に述べると、それは重力場の「ムラ」、すなわち、場所による重力場の違いそのものです。

自由落下する物体の集団に何が起こるか？

アインシュタインの等価原理によれば、自由落下する観測者は、その一点においては重力を感じません。しかし、もし観測する対象が「広がり」を持っていたら、話は変わってきます。

時空のある領域に、小さなテスト粒子（お互いに力を及ぼし合わない塵のようなもの）の集団が、最初、静止した状態で浮かんでいると想像してください。そして、この粒子集団全体が、ある天体（例えば地球）の重力場に向かって、一斉に自由落下を始めるとします。

粒子の一つ一つは、自身の測地線に沿って運動します。もし時空が平坦であれば、全ての粒子は同じ加速度で平行に落下し続け、粒子集団の形は全く変わりません。

しかし、実際の重力場（曲がった時空）では、何が起こるのでしょうか。

■水平方向の動き 水平に並んでいた2つの粒子を考えます。それぞれの粒子は、地球の中心に向かって落下します。彼らがたどる測地線は、完全な平行線ではありません。地球の中心という

一点に向かって、わずかに収束していきます。その結果、2つの粒子は、お互いに力を及ぼし合っていないにもかかわらず、自然に互いに近づいていきます。粒子集団は、水平方向に押し潰されるように変形します。

■垂直方向の動き 次に、垂直に（地球の中心からの距離が異なるように）並んでいた2つの粒子を考えます。地球に近い方の粒子は、遠い方の粒子よりも、わずかに強い重力を受けます（これはニュートン力学的な言い方ですが、結果は同じです）。その結果、地球に近い方の粒子の方が、遠い方の粒子よりも軌道の曲がり方が大きく（より速く落下し）、2つの粒子は自然に互いに引き離されていきます。粒子集団は、垂直方向に引き伸ばされるように変形します。

曲率とは、消すことのできない「重力場の差」

このように、自由落下する物体の集団は、外部から力を加えられていないにもかかわらず、自然に変形してしまいます。ある方向には収縮し、別の方向には伸長するのです。

この「物体の集団を変形させる効果」こそが、時空の曲率の物理的な現れです。

- 等価原理によって、ある一点での重力加速度そのものは、自由落下系を選ぶことで常に見かけ上ゼロにできます。これは、接続係数 Γ が座標変換によって局所的にゼロにできることに対応します。
- しかし、物体や観測装置が広がりを持つ限り、その内部に生じる「場所による重力場の差」は、決して消すことができません。この消すことのできない重力場の「ムラ」や「勾配」が、リーマン曲率テンソル $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ なのです。

曲率の物理的本質

時空の曲率とは、隣り合って自由落下する物体（測地線）の軌道を、互いに近づけたり引き離したりする性質のことです。物理学の言葉で言えば、これは潮汐力に他なりません。月が地球の海を歪ませる潮汐力は、まさに月が作る時空の曲率が、地球という「広がりのある物体」に作用した結果なのです。

曲がった時空の上では、「平行な直線は交わらない」というユークリッド幾何学の公理が破れます。潮汐力は、まさにその幾何学の破れが、物理現象として私たちの目の前に現れた姿なのです。

5.4 リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ とスカラー曲率 R

これまでの章で、私たちは時空の曲がりを記述するための幾何学的な道具（接続、測地線、曲率テンソル）を揃えてきました。しかし、アインシュタインが解くべき根源的な問題は、その先、「何が、どのように時空を曲げるのか？」という物理法則の定式化でした。

物理的な直観から、時空を曲げる源は、そこに存在する物質やエネルギーであると考えられます。相対性理論において、物質やエネルギー（電磁場なども含む）の分布や流れを記述する物理量が、エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ です。これは2階の対称テンソルであり、その成分はエネ

ルギー密度、圧力、運動量の流れなどを表します。

そして、このテンソルが持つ最も重要な物理的性質が、エネルギーと運動量の保存則です。曲がった時空において、この保存則は「共変微分がゼロになる」という、以下の非常に美しい形で表現されます。

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

これは、局所的にエネルギーや運動量が勝手に湧き出したり消えたりしない、という物理学の根幹をなす法則です。

アインシュタインが目指した重力場の方程式は、時空の幾何学と物質を結びつける、 $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ という形になるはずでした。ここで $G_{\mu\nu}$ は、時空の曲率だけから作られる、幾何学的な 2 階の対称テンソルです。

この方程式が物理法則として意味を持つためには、 $T_{\mu\nu}$ が持つ数学的性質を、 $G_{\mu\nu}$ もまた持っていなければなりません。すなわち、時空の幾何学から作り出すテンソル $G_{\mu\nu}$ は、

$$\text{その共変微分が、自動的にゼロになる } (\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0)$$

という、極めて厳しい数学的条件を満たす必要があるのです。

このセクションの目標

リーマン曲率テンソル $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ という、複雑な 4 階のテンソルを材料にして、この「共変微分が恒等的にゼロになる」という奇跡的な性質を持つ 2 階テンソル $G_{\mu\nu}$ を、どうすれば構築できるのでしょうか？

この問いへの答えを探す過程で、リーマンテンソルから情報を「縮約」して得られる、リッチテンソルとスカラー曲率という部品が、必然的に浮かび上がってくるのです。

リッチテンソル：曲率の「平均」

私たちの目標は、4 階のリーマンテンソル $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ という複雑な材料から、エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ と釣り合うべき、2 階のテンソルを作り出すことでした。

4 つの添字を持つテンソルから、2 つの添字を持つテンソルを作り出す最も単純で自然な操作が、添字のペアを選んで和を取る縮約 (**contraction**) です。リーマン曲率テンソルに対して行える最も自然な縮約は、1 番目の上付き添字 ρ と、3 番目の下付き添字 μ を同じものと見なし、その添字について和を取る操作です。

この操作によって得られる 2 階のテンソルを、リッチテンソル (**Ricci tensor**) と呼びます。

リッチテンソル $R_{\sigma\nu}$

リッチテンソルは、リーマン曲率テンソルの縮約によって、次のように定義される。

$$R_{\sigma\nu} = R^\rho{}_{\sigma\rho\nu}$$

(アインシュタインの縮約記法により、 $\rho = 0, 1, 2, 3$ についての和が取られている。)

このリッチテンソルは対称テンソル ($R_{\sigma\nu} = R_{\nu\sigma}$) となります。これは、対になるべきエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ も対称テンソルであるため、物理法則を構築する上で非常に都合の良い、美しい性質です。

では、この「縮約」という数学的な操作は、物理的に何を意味するのでしょうか。なぜこれを曲率の「平均」と呼ぶのでしょうか。

リーマンテンソル $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ が、特定の 2 方向 ($\mu\nu$ 方向) が作る面に沿った曲がり具合、すなわち潮汐力の詳細な方向依存性を記述していたのに対し、リッチテンソルはその情報を、ある方向について「平均化」したものと解釈することができます。

その物理的な効果は、自由落下する小さな粒子群の体積変化の傾向に最も端的に現れます。時空のある点に、静止した小さな球状の粒子群（塵の集まり）を考えてみましょう。この粒子群が重力によって自由落下を始めると、時空の曲がり（潮汐力）によって球は変形します。ある方向には押し潰され、別の方向には引き伸ばされます。リッチテンソルは、この体積が全体として、平均的に収縮していくのか、それとも膨張していくのか、その傾向を決定づける量なのです。

つまり、リッチテンソルとは、物質（テスト粒子群）が、時空の曲がりによって、平均的にどれだけ収束・発散させられるかを示す量と言えます。この性質は、時空を曲げる源であるエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ と結びつけるのに、非常に相応しいものだと言えるでしょう。なぜなら、エネルギー密度が高い場所では、周りの物質（他の測地線）を引き寄せる（収束させる）力が強く働くと期待されるからです。

こうして、私たちはリーマンテンソルという複雑な材料から、縮約によって、物理的に意味深い 2 階のテンソル、リッチテンソルを抽出することに成功しました。しかし、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ だけでは、まだ私たちのゴールにはたどり着きません。実は、 $R_{\mu\nu}$ の共変微分は、一般にはゼロにならないのです ($\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} \neq 0$)。

目標である「共変微分がゼロになるテンソル」を構築するためには、もう一つの部品が必要となります。それが次に紹介するスカラー曲率です。

スカラー曲率

私たちの目標は「共変微分がゼロになる 2 階テンソル」を構築することですが、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ は、単体ではこの条件を満たしません。この幾何学のパズルを完成させるための、最後のピースがスカラー曲率 (scalar curvature) です。

スカラー曲率は、リッチテンソルという 2 階のテンソルから、さらに情報を縮約して得られる、その点の曲がり具合を代表する、ただ一つの数値（スカラー）です。数学的には、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ を、逆計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を使って完全に縮約（トレースを取る操作）することで定義されます。

スカラー曲率 R

スカラー曲率（またはリッチスカラー）は、リッチテンソルの縮約によって、次のように定義される。

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

もしリッチテンソルが曲率の「平均」を表すならば、スカラー曲率はその「総和」のようなものであり、その点における「全体的な曲がりの度合い」を一つの数字で表す指標と考えることができます。非常に大雑把に言えば、ある点のスカラー曲率が正であれば、その点の周りの空間は、平均して「球」のように閉じる傾向があり、負であれば「双曲面（馬の鞍）」のように開く傾向がある、とイメージすることができます。

アインシュタインテンソルの完成

さて、私たちは時空の曲率から作られた2つの部品、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ とスカラー曲率 R を手に入れました。アインシュタインは、これらと最も基本的な幾何学量である計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の3つを組み合わせることで、探し求めていた奇跡的なテンソルにたどり着きました。

アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

このアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ こそが、私たちの最終目標でした。このテンソルは、一見すると場当たり的な組み合わせに見えるかもしれません。しかし、リーマン幾何学の深遠な性質であるビアンキの恒等式という数学的な定理（曲率テンソルとその共変微分が満たすべき関係式）を用いると、この $G_{\mu\nu}$ の共変微分は、自動的に、そして恒等的にゼロになることが証明できるのです。

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

アインシュタイン方程式への最終準備

私たちはついに、エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ と全く同じ数学的性質、

- 2階の対称テンソルである
- 共変微分が恒等的にゼロになる

を持つ、純粋に時空の幾何学（曲率）だけで作られたテンソル $G_{\mu\nu}$ を構築することに成功しました。

これで、舞台の左右の役者、すなわち物質を代表するテンソル $T_{\mu\nu}$ と、時空の幾何学を代表するテンソル $G_{\mu\nu}$ が揃いました。

次章では、この2つのテンソルを物理定数を介して等号で結び、物理学で最も美しい方程式と称される、アインシュタイン方程式を完成させます。

第 III 部

物理学との融合 - アインシュタイン方程式

これまでのパートで、私たちは「曲がった時空」という舞台を記述するための、リーマン幾何学という精巧な言語を学んできました。時空の「曲がり」が、接続係数 Γ 、測地線、そして究極的にはリーマン曲率テンソル $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ によって、いかに定量的に記述されるかを見てきました。

しかし、それはあくまで幾何学の物語です。物理学の物語は、その先から始まります。「なぜ、時空は曲がるのか?」「何が、時空を曲げているのか?」という問いです。この章では、ついに物理学と幾何学が融合し、アインシュタイン方程式が完成する瞬間を目指します。

6 アインシュタイン方程式 - 時空と物質の相互作用

アインシュタインの偉大な洞察は、「重力とは時空の曲がりである」というものでした。そして、その時空を曲げる「原因」は、そこに存在する物質とエネルギーである、と考えました。質量を持つ物体が周りの空間を歪ませる、というイメージです。

アインシュタイン方程式 (Einstein's Field Equations)

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

アインシュタインテンソルを展開して書くと、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

この節では、アインシュタイン方程式の等式の右辺、すなわち「原因」である物質とエネルギーの分布を、相対性理論の言葉で正しく表現する方法を学びます。

6.1 方程式の右辺：物質の分布（エネルギー・運動量テンソル）

特殊相対性理論によれば、質量とエネルギーは $E = mc^2$ の関係式で結ばれる、いわば同じものの異なる側面です。時空を曲げる源は、単なる質量（物質）だけでなく、運動エネルギーや、電磁場のような「場」が持つエネルギーも全て含まれなければなりません。

この、時空に存在するあらゆる形態のエネルギーと、それに関連する物理量（運動量や圧力など）を、一つのテンソルにまとめて記述したものが、**エネルギー・運動量テンソル (energy-momentum tensor)**、または**ストレス・エネルギーテンソル**とも呼ばれる $T_{\mu\nu}$ です。

エネルギー・運動量テンソルの「解剖」

$T^{\mu\nu}$ は 4×4 の対称テンソルであり、その 10 個の独立な成分は、それぞれが重要な物理的意味を持っています。

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \text{エネルギー密度} & \text{エネルギーの流れ (x)} & & & \\ \text{運動量密度 (x)} & \text{圧力 (x)} & \text{ずり応力 (xy)} & \dots & \\ \vdots & & \ddots & & \end{pmatrix}$$

エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の各成分

- T^{00} (時間-時間成分): エネルギー密度。その点における、静止質量エネルギー ($\rho_0 c^2$) を含む、全てのエネルギーの密度を表します。これが、ニュートン重力における質量密度に相当する、最も主要な重力源です。
- T^{0i} と T^{i0} (時間-空間成分): 運動量密度、あるいはエネルギー流速密度。例えば T^{01} は、 x 方向の運動量の密度を表し、同時に時間あたりに x 方向へ流れるエネルギーの量も表します。テンソルが対称 ($T^{0i} = T^{i0}$) であることが、この 2 つの解釈が等価であることを保証します。
- T^{ij} (空間-空間成分): 運動量流速密度、またはストレス (応力)。 T^{ij} は、 j 方向に流れる、 i 方向の運動量を表します。
 - 対角成分 (T^{11}, T^{22}, T^{33}): それぞれ x, y, z 方向への圧力を表します。圧力もまた、エネルギーの一形態として時空を曲げる原因となります。
 - 非対角成分 (T^{12} など): 面に沿って働く力、すなわちずり応力 (シアストレス) を表します。

つまり、 $T_{\mu\nu}$ は、その点における物質や場の状態を完全に記述する「カルテ」のようなもののです。

具体例

■例 1: 完全流体 宇宙論や多くの天体物理学のモデルで使われる、最も重要な例が完全流体 (perfect fluid) です。これは、粘性 (ずり応力) や熱伝導のない、理想化された流体であり、その状態はエネルギー密度 ρ と圧力 p という 2 つの量だけで完全に記述されます。そのエネルギー・運動量テンソルは、流体の 4 元速度を u^μ として、

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}$$

と書けます。例えば、ほとんど圧力がなくゆっくり動く塵の集まり (ダスト流体) の場合、 $p = 0$ となり、 $T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$ となります。

■例 2: 電磁場 エネルギーを持つのは物質だけではありません。電磁場のような「場」もエネルギーと運動量を持ち、時空を曲げます。電磁場のエネルギー・運動量テンソルは、電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ を使って構成することができます。

最も重要な性質：保存則

そして、前章の最後で触れたように、エネルギー・運動量テンソルが持つ最も重要な数学的・物理的性質が、エネルギーと運動量の保存則です。これは、共変微分を用いて、

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

と表現されます。この「共変発散がゼロになる」という性質こそが、 $T^{\mu\nu}$ が、アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ と等号で結ばれるための「資格」なのでした。

これで、アインシュタイン方程式の右辺（物理サイド）の準備が整いました。次節で、いよいよ左辺（幾何学サイド）と結びつけ、方程式を完成させます。

6.2 方程式の左辺：時空の幾何学（アインシュタインテンソル）

前節では、アインシュタイン方程式の右辺、すなわち時空を曲げる「源」であるエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を準備しました。このテンソルは、物理学の大原則であるエネルギー・運動量保存則（ $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ）を満たしていました。

アインシュタインが次に成し遂げるべき課題は、この $T_{\mu\nu}$ と等号で結ぶにふさわしい、時空の「曲がり」を表す幾何学的なテンソルを見つけ出すことでした。そのテンソルを仮に $G_{\mu\nu}$ と書くと、それは以下の条件を満たさなければなりません。

1. $T_{\mu\nu}$ と同じく、2 階の対称テンソルであること。
2. 時空の曲率（リーマンテンソル）だけから構成されていること。
3. そして最も重要なのが、 $T_{\mu\nu}$ の保存則に対応して、その共変微分が自動的にゼロになること。すなわち、 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ が恒等的に成立すること。

なぜリッチテンソルだけではダメなのか？

時空の曲率から作られる、最も単純な 2 階の対称テンソルは、前章で学んだリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ です。アインシュタインも、最初は $R_{\mu\nu}$ と $T_{\mu\nu}$ を直接結びつける、

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (\kappa \text{ は定数})$$

というシンプルで美しい方程式を考えました。

しかし、この方程式には致命的な欠陥がありました。一般に、リッチテンソルの共変発散はゼロにはなりません（ $\nabla^\mu R_{\mu\nu} \neq 0$ ）。もしこの方程式が正しいとすると、左辺の共変発散がゼロでないのに、右辺の共変発散（ $\nabla^\mu T_{\mu\nu}$ ）は物理法則により必ずゼロでなければならない、という深刻な矛盾が生じてしまいます。これは、エネルギー・運動量保存則という、物理学の金字塔を破壊することを意味します。

この困難を乗り越えるため、アインシュタインはリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ を「修正」し、共変発散が常にゼロになるような新しいテンソルを作り出す必要に迫られました。

アインシュタインテンソルの登場

アインシュタインは、リーマン幾何学の数学的性質を深く探求した結果、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ に、スカラー曲率 R と計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いた「補正項」を付け加えることで、この問題を完璧に解決できることを発見しました。

アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$

アインシュタインテンソルは、リッチテンソル、スカラー曲率、計量テンソルから次のように定義される。

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

このテンソルの最も重要で、ほとんど魔法のような性質は、その構成要素である $R_{\mu\nu}$ や R の共変発散はゼロでないにもかかわらず、それらを組み合わせた $G_{\mu\nu}$ の共変発散は、どのような時空であっても必ずゼロになるということです。

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

ニュートン重力との整合性

このアインシュタインテンソルが正しいことを裏付ける、もう一つの強力な証拠があります。時空の曲がりがかくわずかな「弱い重力場」で、かつ物質の運動が光速に比べて十分遅いという近似（ニュートン近似）を行うと、アインシュタインテンソルの時間-時間成分 G_{00} は、ニュートン重力の法則を支配する重力ポテンシャル Φ のラプラシアン $\nabla^2\Phi$ に比例することが示されます。

ニュートンの重力場方程式は $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ であり、 T_{00} は質量密度 ρ に対応しますから、 G_{00} が $\nabla^2\Phi$ に対応するのは、見事な整合性です。このことは、 $G_{\mu\nu}$ と $T_{\mu\nu}$ を結びつけるアイデアが、私たちのよく知るニュートン重力を正しく再現することを保証しています。

アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ は、時空の幾何学（曲率）から構成され、かつ、エネルギー・運動量保存則と見事に整合する、唯一無二のテンソルなのです。これこそが、アインシュタイン方程式の左辺に座るにふさわしい、時空の幾何学的状態を代表する量と言えるでしょう。

6.3 物質は時空を曲げ、時空は物質の運動を決める

私たちは、ついに旅の目的地にたどり着きました。これまでの長く、時に困難だった道のりは、すべてこの瞬間のためでした。舞台の左右に、主役となる2つのテンソルが揃いました。

- 方程式の右辺（物理サイド）：時空に「何が、どのように存在するか」を記述する、物質とエネルギーの代表、エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ 。
- 方程式の左辺（幾何学サイド）：時空が「どのように曲がっているか」を記述する、幾何学

の代表、アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ 。

これら 2 つのテンソルは、共に 2 階の対称テンソルであり、そして何よりも、共にその共変発散がゼロになる ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$) という、完璧な数学的対応関係を持っています。

アインシュタインは、この 2 つのテンソルが、ある普遍的な物理定数を介して、正比例の関係にあるに違いないと結論付けました。これこそが、ニュートンの万有引力の法則に取って代わる、新しい重力の基本法則、アインシュタイン方程式です。

アインシュタイン方程式 (Einstein's Field Equations)

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

アインシュタインテンソルを展開して書くと、

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

右辺の比例定数 $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ は、弱い重力場の極限でニュートンの万有引力の法則が正しく再現されるように決定された結合定数です。ここには、ニュートン以来の万有引力定数 G と、特殊相対性理論の基本定数である光速 c という、2 つの偉大な物理定数が同居しています。

方程式が語る、時空と物質の壮大なドラマ

この、一行で書かれたテンソル方程式は、一体何を物語っているのでしょうか。その物理的な描像は、物理学者ジョン・アーチボルト・ホイーラーによる、以下の有名な言葉に集約されています。

*“Spacetime tells matter how to move;
matter tells spacetime how to curve.”*

(時空は物質にどう動くべきかを教え、
物質は時空にどう曲がるべきかを教える。)

この言葉は、一般相対性理論が記述する、時空と物質の壮大な相互作用のドラマを完璧に表現しています。

- 「物質は時空にどう曲がるべきかを教える」

まさにアインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$ が語っていることです。方程式の右辺にある物質・エネルギーの分布 ($T_{\mu\nu}$) が、方程式の左辺にある時空の曲がり具合 ($G_{\mu\nu}$) を決定します。

- 「時空は物質にどう動くべきかを教える」

こちらは、第 4 章で学んだ測地線の方程式が担っています。

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

一度、物質によって時空の曲がり方（計量 $g_{\mu\nu}$ 、ひいては接続係数 Γ ）が決まってしまうば、その時空の中を自由に運動する他の物質は、その曲がりに沿ってまっすぐ（測地線に沿って）進むしかありません。

一般相対性理論の全体像

アインシュタイン方程式と測地線の方程式は、2 つで 1 つのシステムを構成しています。

1. アインシュタイン方程式：物質・エネルギーが時空の幾何学を決定する。
2. 測地線の方程式：時空の幾何学が物質の運動を決定する。

舞台（時空）と役者（物質）が、互いに影響を及ぼし合う。ニュートン力学では静的で絶対的な背景でしかなかった舞台が、アインシュタインの理論では、物質の動きに応じてダイナミックに形を変える、もう一人の主演となったのです。

この連立非線形偏微分方程式を解くことは極めて困難ですが、その困難さこそが、重力という現象の豊かさの現れでもあります。

私たちは、ついに一般相対性理論の完全な理論構造を手に入れました。しかし、方程式を書き下すことと、それを解いて未来を予言することは別の話です。

次章からは、この方程式の具体的な解をいくつか見ていくことにしましょう。まずは、太陽の周りの時空や、かの有名なブラックホールを記述する、最も基本的で重要な解、シュワルツシルト解を巡る冒険から始めます。

6.4 弱い重力場での近似：ニュートン重力の再現

アインシュタイン方程式という、壮大で美しい方程式を手に入れました。しかし、どんなに美しい理論でも、それが実験や観測の事実、そして、これまで成功を収めてきた古典理論と整合しなければ、物理学の理論としては認められません。

新しい理論の正当性を確かめる最も重要なテストの一つが、その理論が、特定の条件下で、旧来の成功した理論を再現できるか、ということです。この節では、アインシュタイン方程式が、適切な近似のもとで、私たちのよく知るニュートン重力を見事に再現することを見ていきましょう。

ニュートン近似の条件

ニュートン重力が適用できるのは、どのような状況でしょうか。それは、私たちの太陽系のように、

1. 弱い重力場 (Weak Field)：重力がそれほど強くなく、時空の曲がり方がごくわずかである。
2. 静的な場 (Static Field)：重力源（太陽など）が時間的に変化しない。
3. 低速な粒子 (Slow Motion)：惑星などの運動速度が、光速に比べて非常に小さい ($v \ll c$)。

という条件が満たされる状況です。この 3 つの条件を合わせてニュートン近似と呼びます。数学的には、「弱い重力場」とは、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が、平坦なミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ からの微小

なずれ $h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) として、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ と書けることを意味します。

計算の概略と驚くべき対応

この近似のもとで、アインシュタイン方程式と測地線の方程式を地道に計算していくと、驚くべき対応関係が見えてきます。ここでは詳細な計算は専門書に譲り、その美しい結果だけを味わうことにしましょう。

■ステップ1：運動方程式の比較 まず、ニュートン近似のもとで、自由落下する粒子の軌跡（測地線の方程式）を計算します。すると、その方程式は、

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \approx -\frac{c^2}{2} \nabla h_{00}$$

という形になります。一方、ニュートン力学における重力場中の粒子の運動方程式は、重力ポテンシャル Φ を使って、

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \Phi$$

と書けます。この2つの式を比較すると、計量テンソルの時間成分のずれ h_{00} と、ニュートンの重力ポテンシャル Φ との間に、

$$\Phi \approx \frac{c^2}{2} h_{00} \quad \text{すなわち} \quad g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

という、見事な対応関係があることがわかります。時空の幾何学的な量（計量のずれ）が、ニュートン力学の物理量（ポテンシャル）と直接結びついたのでした。

■ステップ2：場の方程式の比較 次に、アインシュタイン方程式 $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ の時間-時間成分 (00 成分) を考えます。

- 左辺（幾何学）： G_{00} は、計量 $g_{\mu\nu}$ の2階微分を含む項です。ニュートン近似のもとで計算すると、 G_{00} は上記のポテンシャル Φ を使って、 $G_{00} \approx \frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi$ となります。
- 右辺（物質）： T_{00} はエネルギー密度です。低速な物質の場合、これはほぼ質量密度 ρ を使って $T_{00} \approx \rho c^2$ と書けます。

これらをアインシュタイン方程式 $G_{00} = \kappa T_{00}$ に代入すると、

$$\frac{2}{c^2} \nabla^2 \Phi \approx \kappa (\rho c^2)$$

となります。一方、ニュートンの重力場方程式（ポアソン方程式）は、

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

でした。この2つの式が全ての ρ について一致するためには、比例定数 κ が

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

と、一意に定まらなければならないことがわかります。

ニュートン重力は、一般相対性理論に内包される

この計算が示したのは、極めて重要な事実です。

1. アインシュタイン方程式は、私たちが実験的に正しいと知っているニュートン重力を、適切な極限で完全に再現します。
2. その再現性から、アインシュタイン方程式に含まれる唯一の未定定数 κ が、万有引力定数 G と光速 c によって一意に決定されます。

これは、一般相対性理論が、ニュートン重力からの突飛なジャンプではなく、それを包含する、より普遍的で精緻な理論への論理的で自然な拡張であることを力強く示しています。ニュートン力学では謎に満ちていた「遠隔作用」としての重力は、こうして、時空の幾何学的な歪みが（光速で）伝播していく、より自然な描像へと置き換えられたのです。

7 最初の厳密解 - シュワルツシルト時空

アインシュタイン方程式は、10本の連立非線形偏微分方程式からなる、極めて複雑な方程式系です。一般の状況でこの方程式を解くことは、今日においても絶望的に困難です。

しかし、もし考える物理的な状況が、何らかの「対称性」を持っているならば、問題は劇的に単純化され、厳密な解を見つけ出すことが可能になります。1915年にアインシュタインが方程式を発表してからわずか数ヶ月後、ドイツの天文学者カール・シュワルツシルトは、戦地の塹壕の中から、歴史上初となる厳密解を発見しました。

この章では、彼が解いた問題設定と、その驚くべき解が記述する時空の性質を探っていきます。

7.1 真空中の球対称な解

シュワルツシルトが考えたのは、物理的に最も単純で、かつ重要な状況設定でした。すなわち、太陽や地球のような、天体の「外部」の時空です。この状況を、彼は以下のような、いくつかの妥当な仮定のもとにモデル化しました。

シュワルツシルト解を求めるための仮定

1. **真空 (Vacuum)** : 天体の外部には、物質やエネルギーは存在しないと仮定します。これは、エネルギー・運動量テンソルが恒等的にゼロである、 $T_{\mu\nu} = 0$ 、ということを意味します。この仮定により、解くべきアインシュタイン方程式は $G_{\mu\nu} = 0$ となります。これは、さらに計算すると、リッチテンソルがゼロである、

$$R_{\mu\nu} = 0$$

という、より単純な真空アインシュタイン方程式に帰着します。

2. **静的 (Static)** : 重力源である天体は、時間的に変化せず、また回転もしていないと仮定します。これにより、時空の幾何学的性質（計量テンソル）は、時間座標 t には

依存しないと考えることができます。

3. 球対称 (Spherically Symmetric) : 天体は完全な球体であり、それに伴って、それが作り出す時空も球対称であると仮定します。これは、どの方向から見ても、時空の幾何学的性質は同じに見える、ということです。

これらの仮定、特に「球対称」という強力な条件を課すことで、求めるべき計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の形を、大幅に限定することができます。最も一般的な静的・球対称な時空の線素は、

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

という形に書けることが知られています。ここで、 $A(r)$ と $B(r)$ は、中心からの距離 r のみに依存する、私たちがこれから決定すべき未知の関数です。

解の導出

以上の仮定により、アインシュタイン方程式を解くという複雑な問題は、「真空方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ を満たすように、2つの未知関数 $A(r)$ と $B(r)$ を決定せよ」という、比較的扱いやすい問題に帰着しました。

その手順の概略は以下の通りです。

1. 上記の計量の仮定から、接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ を、関数 $A(r), B(r)$ とその微分を使って計算する。
2. 計算した Γ を使って、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ の各成分を計算する。
3. 全ての成分について $R_{\mu\nu} = 0$ となるように、 $A(r), B(r)$ が満たすべき連立常微分方程式を立てる。
4. その微分方程式を解き、最後に、重力場が非常に弱い遠方 ($r \rightarrow \infty$) で、時空が平坦なミンコフスキー時空に一致するという境界条件を課すことで、積分定数を決定する。

シュワルツシルト計量

この計算を最後まで実行した結果、シュワルツシルトは歴史的な解を発見しました。

シュワルツシルト計量 (Schwarzschild Metric)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

この解には、積分定数として一つのパラメータが現れますが、遠方でのニュートン重力との比較から、それが中心にある天体の質量 M に対応することがわかります (G は万有引力定数、 c は光速)。つまり、未知関数は $A(r) = B(r)^{-1} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$ という、非常にシンプルで美しい形に決まったのです。

このシュワルツシルト解は、太陽や地球のような、回転が十分に遅い球対称な天体の外部の時空を、驚くべき精度で記述します。そして、この一見単純な数式が、ニュートン力学では想像もで

きなかった、時間の遅れ、空間の曲がり、そしてブラックホールという全く新しい物理世界への扉を開くことになるのです。

7.2 シュワルツシルト半径と事象の地平面（イベントホライズン）

前節で導出したシュワルツシルト計量の式を、もう一度注意深く眺めてみましょう。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

この式の係数を見ると、ある特定の半径 r において、何やら数学的に奇妙なことが起こりそうだとわかります。それは、 dt^2 の係数がゼロになり、 dr^2 の係数が無限大に発散する点です。

$$1 - \frac{2GM}{rc^2} = 0$$

この式を r について解くと、その特別な半径が明らかになります。

シュワルツシルト半径 r_s

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2}$$

このシュワルツシルト半径 (**Schwarzschild radius**) は、天体の質量 M のみによって決まる、その天体の重力的な性質を特徴づける極めて重要な長さのスケールです。

身近な天体のシュワルツシルト半径

その大きさがどれくらいか、具体的に計算してみましょう。

- 太陽（質量 $M \approx 2.0 \times 10^{30}$ kg）： $r_s \approx 3.0$ km
- 地球（質量 $M \approx 6.0 \times 10^{24}$ kg）： $r_s \approx 8.9$ mm

太陽の実際の半径は約 70 万 km、地球の半径は約 6400km です。ご覧の通り、通常の日体では、その物理的な半径はシュワルツシルト半径よりも圧倒的に大きくなっています。そのため、この「奇妙な半径」は天体の奥深くに埋もれており、私たちが観測する外部の時空には決して現れません。

重力崩壊とブラックホールの誕生

しかし、もし大質量の恒星が寿命を終え、核融合のエネルギーを失い、自らの巨大な重力に耐えきれずに暴走的な収縮（重力崩壊）を起こしたとしたらどうなるでしょうか。

もし、その星の全質量が、自身のシュワルツシルト半径の内側にまで押し込められたなら、状況は一変します。シュワルツシルト半径は天体の外部の「真空」領域に露出し、その場所の時空の性質が劇的に変化するのです。

事象の地平面：帰還不能点

半径が $r = r_s$ となる球面で、計量テンソルの成分に何が起こるかを見てみましょう。

- $g_{tt} = (1 - r_s/r) \rightarrow 0$: 時間の進み方を表すこの係数がゼロになります。これは、この場所での時間の進みが、無限遠にいる観測者から見ると完全に停止して見えることを意味します（重力赤方偏移が無限大になる）。
- $g_{rr} = -(1 - r_s/r)^{-1} \rightarrow -\infty$: 空間の歪みを表すこの係数が無限大に発散します。

この半径 $r = r_s$ の球面は、単なる数学的な特異点ではなく、時空を 2 つの領域に因果的に分割する、決定的な物理的境界となっています。

これを理解するために、滝壺に近づく船を想像してください。滝の縁に近づくにつれて川の流れはどんどん速くなり、ついには光の速さに達します。滝の縁を一度越えてしまえば、どんなに強力なエンジンを積んだ船（光速のロケットでさえ）も、もはや流れに逆らって上流に戻ることはできません。

この「一度入ったら、光でさえも二度と脱出できなくなる境界」、すなわち帰還不能点 (**point of no return**) のことを、**事象の地平面 (event horizon)**、またはイベントホライズンと呼びます。

事象の地平面 (Event Horizon)

外部の観測者と、情報のやり取り（事象の観測）が可能な領域と、そうでない領域を隔てる境界。シュワルツシルト時空においては、半径 $r = r_s$ の球面がこれにあたる。

ブラックホールとは何か

事象の地平面に囲まれた、外部の宇宙から因果的に切り離された時空領域、それこそがブラックホール (**black hole**) の正体です。事象の地平面は、物理的な「面」や「壁」があるわけではなく、時空そのものが持つ、一方通行の幾何学的な境界なのです。

なお、 $r = r_s$ で計量が発散するのは、シュワルツシルトが用いた座標系の選び方が特異であったためであり、物理量が本当に発散するわけではない「座標特異点」であることが後にわかりました。しかし、 $r = 0$ の中心には、曲率テンソルが本当に無限大になる、物理法則が破綻する**真の特異点**が存在すると考えられています。

7.3 時空の特異点

前節で、事象の地平面 $r = r_s$ は「座標特異点」であり、時空そのものが壊れているわけではない、と述べました。選んだ地図（座標系）がその場所をうまく表現できないだけで、別の地図（例えばクルスカール座標など）を使えば、観測者は事象の地平面をスムーズに通り返けてブラックホールの内部へと進んでいくことができます。

では、その先に何が待っているのでしょうか。ブラックホールの中心、 $r = 0$ には、座標の取り

方ではごまかすことのできない、真の特異点 (true singularity) が存在します。

曲率の無限大への発散

ある点が真の特異点であるかどうかを判定するには、座標系の選び方によらないスカラー量を計算し、それが発散するかどうかを見れば確実です。そのようなスカラー量の一つに、リーマン曲率テンソルから作られるクレッチマン・スカラー (Kretschmann scalar) $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ があります。

シュワルツシルト時空において、この量を計算すると、

$$K = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}$$

となります。この式の振る舞いを見てみましょう。

- $r \rightarrow r_s$ (事象の地平面に近づく): K は有限の値を保ちます。したがって、時空はここでは壊れていません。
- $r \rightarrow 0$ (中心に近づく): K は無限大に発散します。

曲率が無限大になるということは、潮汐力が無限大になることを意味します。 $r = 0$ の特異点に近づく物体は、あらゆる方向に無限の力で引き伸ばされ、引き裂かれ、原子や素粒子のレベルまで分解されてしまいます。密度も無限大となり、体積はゼロになる、古典物理学では記述不可能な究極の状態です。

物理法則の破綻

この「無限大」の出現は、物理学にとって極めて深刻な問題です。それは、アインシュタイン方程式そのものが、その点でもはや意味をなさなくなる、理論の適用限界を示しているからです。

$r = 0$ の特異点では、時間や空間といった、私たちが知る概念そのものが終わりを迎えます。その点の「向こう側」で何が起こるか、あるいは何が起こったかを、私たちの物理法則では一切予言することができません。これは、物理学の根幹である決定論の破綻を意味します。

特異点定理と宇宙検閲官仮説

この特異点の存在は、シュワルツシルト解という、完全に球対称で真空という理想化された状況だけの特殊な事情なのでしょうか。

ロジャー・ペンローズとスティーヴン・ホーキングによる特異点定理 (Singularity Theorems) は、これに「ノー」と答えました。この定理は、「物理的に妥当な条件下で重力崩壊が起これば、特異点の形成は避けられない」ということを、数学的に厳密に証明しました。つまり、特異点は、より現実的な回転するブラックホールなどでも、普遍的に現れるはずなのです。

では、なぜ私たちは危険な特異点を直接観測することがないのでしょ

な特異点)の存在を許さないのではないか」という仮説です。つまり、全ての特異点は、事象の地平面という「検閲官」によって、外部の私たちから因果的に隠されている、という考えです。これはまだ証明されていない、現代物理学の重要な未解決問題の一つです。

特異点と量子重力理論

時空の特異点は、一般相対性理論が自己矛盾に陥り、その限界を示す場所です。ほとんどの物理学者は、この特異点の出現は、もう一つの偉大な物理学の柱である量子力学の効果を完全に無視しているために生じる「虚像」だと考えています。

プランクスケール (10^{-35}m 程度) という極微の世界では、時空はもはや、私たちが考えてきたような滑らかな幾何学ではなく、量子的効果によって激しく泡立ち、その構造は全く異なっているのかもしれません。

この特異点の問題を真に解決し、ブラックホールの中心や宇宙の始まりの謎を解き明かすには、一般相対性理論と量子力学を統合した、究極の理論「量子重力理論」の完成が必要であると考えられています。

特異点は、私たちの知る物理学の「終わり」であると同時に、まだ見ぬ新しい物理学への「扉」でもあるのです。

8 シュワルツシルト時空上の冒険 - 粒子の運動

シュワルツシルト時空という、静的で球対称な天体の周りの時空の「地図」(計量テンソル)を手に入れました。この地図の上を自由に運動する粒子(惑星や光子など)は、どのような軌跡を描くのでしょうか。

その答えは、第4章で学んだ測地線の方程式を解くことで得られます。

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0$$

シュワルツシルト計量から接続係数 Γ を計算し、この方程式を直接解くのは非常に困難な道のりです。しかし、幸運なことに、シュワルツシルト時空が持つ「対称性」のおかげで、私たちは保存量(運動の前後で一定に保たれる量)を見つけ出すことができ、それによって問題を劇的に単純化することができます。

8.1 有効ポテンシャルと粒子の軌道

惑星の運動を扱うニュートン力学でも、エネルギーと角運動量が保存することを利用して、問題を「有効ポテンシャル」という考え方に帰着させたことを覚えている方もいるでしょう。驚くべきことに、一般相対性理論でも全く同じ戦略が使えるのです。

2つの保存量：エネルギーと角運動量

シュワルツシルト時空は、以下の2つの重要な対称性を持っています。

1. 時間に依存しない（静的）：計量の成分は時間座標 t を含みません。この対称性から、運動する粒子のある種の「エネルギー」が保存することが導かれます。
2. 回転に対して不変（球対称）：計量の成分は、回転軸の取り方によらず、角度 ϕ の原点をどこに選んでも変わりません。この対称性から、その回転軸周りの「角運動量」が保存することが導かれます。

これらの保存則を測地線の方程式に適用し、式を整理していくと、粒子の軌道を記述する方程式を、中心からの距離 r のみに注目した、以下のような非常に見通しの良い形に書き直すことができます。

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (\text{エネルギー})^2 - V_{\text{eff}}(r)^2$$

(τ は粒子の固有時間です。)

この式は、ニュートン力学におけるエネルギー保存則「(運動エネルギー) = (全エネルギー) - (ポテンシャルエネルギー)」とそっくりな形をしています。ここで登場した $V_{\text{eff}}(r)$ が、シュワルツシルト時空における有効ポテンシャル (**effective potential**) です。

有効ポテンシャルの「地形」を読む

粒子の運動は、この有効ポテンシャルという「地形」の上を、一定のエネルギーを持って転がるボールのようにイメージすることができます。有効ポテンシャルの具体的な形を、ニュートン力学の場合と比較してみましょう。(簡単のため、 $c = G = M = 1$ となる単位系で考えます。)

■ニュートン力学の場合

$$V_{\text{eff, Newton}}(r) = \sqrt{1 - \frac{2}{r} + \frac{L^2}{r^2}}$$

(L は角運動量を表す定数です。) このポテンシャルは、中心に引力項 ($-1/r$)、遠心力に対応する反発項 (L^2/r^2) からなり、一つの谷（極小値）を持ちます。惑星はこの谷底の周りを安定な円軌道や楕円軌道を描いて運動します。

■一般相対性理論の場合

$$V_{\text{eff, GR}}(r) = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)}$$

このポテンシャルは、ニュートンのポテンシャルと遠方ではよく似ていますが、 r が小さくなると、一般相対性理論に特有の補正項が現れます。具体的には、ニュートンのポテンシャルに加えて、より強い引力である $-1/r^3$ に比例する項が追加されたような形になります。

$$V_{\text{eff, GR}}(r)^2 \approx 1 - \frac{2}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \underbrace{\frac{2L^2}{r^3}}_{\text{GR 補正項}}$$

この追加の引力項が、ニュートン力学の世界にはなかった、全く新しい現象を引き起こすのです。

新しい軌道の可能性

この新しい「地形」は、惑星の軌道にどのような影響を与えるのでしょうか。

- 安定な円軌道：ニュートン力学と同様に、ポテンシャルの谷底では安定な円軌道が存在します。
- 不安定な円軌道：GR 補正項のおかげで、ポテンシャルには谷だけでなく「山（極大値）」も現れます。この山の頂上では、不安定な円軌道が存在します。少しでも内側にずれると中心に飲み込まれ、外側にずれると遠くへ飛び去ってしまいます。
- 最内安定円軌道 (ISCO)：角運動量がある値より小さくなると、ポテンシャルの「谷」と「山」が合体して消滅してしまいます。これは、ある半径よりも内側には、いかなる安定な円軌道も存在できないことを意味します。この限界の半径を最内安定円軌道 (Innermost Stable Circular Orbit, ISCO) と呼びます。シュワルツシルト時空では、ISCO は $r = 6GM/c^2 = 3r_s$ となります。ブラックホールに落ち込む物質が作る降着円盤の最内縁は、この ISCO によって決まっていると考えられています。

このように、有効ポテンシャルという強力なツールを使うことで、私たちはシュワルツシルト時空という複雑な幾何学の上での粒子の運動を、直感的な「地形図」として理解することができるのです。そして、その地形図に刻まれた一般相対性理論特有の「崖」や「谷」が、次節で見る水星の近日点移動といった、観測可能な新しい現象の源となるのです。

8.2 水星の近日点移動：一般相対性理論の最初の証拠

アインシュタインが 1915 年に発表した一般相対性理論は、そのあまりにも革新的な内容から、当初は多くの物理学者にすぐには受け入れられませんでした。理論の正しさを証明するには、ニュートン力学では説明できない現象を、自身の理論が正確に予言し、それが観測によって裏付けられる必要がありました。

幸運なことに、その格好の「テストケース」は、すでに 19 世紀から天文学者たちを悩ませ続けていた、ある不可解な謎として存在していました。

天文学に残された「最後の謎」

ニュートン力学によれば、もし宇宙に太陽と惑星が一つだけ存在するならば、惑星は太陽を一つの焦点とする、完璧に閉じた楕円軌道を描き続けます。その軌道上で太陽に最も近づく点である近日点の位置は、永遠に変わりません。

もちろん、現実の太陽系には他の惑星（特に木星や金星）が存在し、それらの引力（摂動）の影響で、惑星の軌道はわずかに乱され、楕円そのものがゆっくりと回転していきます。この現象を近日点の歳差運動（または移動）と呼びます。

19 世紀の天文学者たちは、ニュートン力学を用いて、この摂動の効果を極めて精密に計算しました。金星、地球、木星など、ほとんどの惑星については、計算される近日点の移動量と、実際の

観測値は完璧に一致しました。

しかし、唯一の例外がありました。それが、太陽に最も近い惑星、水星です。観測から得られた水星の近日点の移動量と、他の全ての惑星からの摂動効果を計算して得られた予測値との間には、

100 年あたり約 43 秒角

という、ごくわずかですが、観測誤差では到底説明できない明確な差が残ってしまったのです。(1 秒角は 1 度の 3600 分の 1)

この謎を説明するため、天文学者たちは水星の内側に未知の惑星「バルカン」が存在するのではないかと考え、何十年にもわたって探索しましたが、ついに発見されませんでした。この「43 秒角の謎」は、ニュートン重力の完璧さに投げかけられた、唯一の、しかし深刻な疑問だったのです。

GR 補正項がもたらす帰結

アインシュタインは、自身の理論がこの謎を説明できるかもしれないと考えました。前節で導出した、一般相対性理論における有効ポテンシャルの補正項を思い出してみましょう。

$$V_{\text{eff, GR}}(r)^2 \approx (\text{ニュートン項}) - \underbrace{\frac{2L^2}{r^3}}_{\text{GR 補正項}}$$

このニュートン力学には存在しなかった追加の引力項 ($-1/r^3$ 項) は、 r が小さいほど、つまり太陽に近いほど効果が強くなります。太陽系で最も内側を公転し、かつ軌道が(円ではなく)楕円であるため近日点での速度変化が大きい水星は、この新しい効果を検出するのに最も適した天体だったのです。

この補正項が存在すると、惑星の軌道はもはや数学的に完璧な閉じた楕円にはなりません。惑星が近日点を通過して遠日点に向かい、再び近日点に戻ってきたとき、その位置は前回よりもわずかに先にずれています。その結果、惑星の軌道は全体として少しずつ回転し、長い時間をかけて見ると、まるで花びらのような模様を描きます。これをロゼット軌道と呼びます。

アインシュタインは、この GR 補正項の効果から、水星の近日点が 100 年あたりにどれだけ移動するかを計算しました。その結果は、驚くべきものでした。理論から導かれた値は、観測されていた「43 秒角」と、誤差の範囲内で完璧に一致したのです。

理論の最初の勝利

この劇的な成功は、歴史的な転換点でした。

- アインシュタイン自身、この結果を得たとき、「心臓が止まるかと思うほど興奮し、数日間仕事にならなかった」と語っています。
- 未知の惑星のような、その場しのぎの仮定を一切必要とせず、ただ「時空は質量によって曲がる」という第一原理から、長年の謎が必然的な帰結として説明されたのです。
- これは、一般相対性理論が単なる数学的な思考の産物ではなく、現実の宇宙をニュー

トン力学以上に正確に記述していることを示した、最初の、そして最も強力な証拠となりました。

ニュートンが築き上げた重力の法則の、最初の綻びを完璧に説明したことで、重力理論の主演は、ニュートンからアインシュタインへと引き継がれたのです。

8.3 光の軌跡と重力レンズ効果

水星の近日点移動の成功は、質量を持つ物体の運動に関して、一般相対性理論がニュートン力学を凌駕することを示しました。しかし、アインシュタインの理論は、さらに大胆な予言をしていました。それは、質量を持たない光でさえも、重力の影響を受けてその軌跡を曲げられる、というものです。

光がたどる「まっすぐな線」

なぜ、質量のない光が重力の影響を受けるのでしょうか。アインシュタインの描像を思い出してください。重力とは「力」ではなく、「時空の曲がり」そのものです。光を含む全てのものは、この曲がった時空を、ただひたすら「まっすぐ」進みます。

したがって、光もまた測地線に沿って進みます。ただし、光は光速で進むため、その時空間隔 ds^2 は常にゼロです。このような測地線を、特にヌル測地線 (**null geodesic**) と呼びます。

質量を持つ粒子と同様に、光の軌道も有効ポテンシャルの考え方を使って分析することができます。光の場合、有効ポテンシャルはよりシンプルな形になり、 r が小さい領域に急峻なポテンシャルの「壁」が現れます。太陽のような天体のそばをギリギリで通過する光は、このポテンシャルの壁にぶつかって跳ね返されるように、その軌道がわずかに曲げられるのです。

アインシュタインの予言とエディントンの観測

アインシュタインは、この効果を計算し、太陽の縁をかすめて地球に届く遠方の恒星の光は、約 **1.75 秒角** だけ曲げられる、と予言しました。これは、ニュートン力学が（光を質量のある粒子と仮定して）予測する値の、ちょうど 2 倍でした。

この予言を検証するには、太陽のすぐそばに見えるはずの星を観測しなければなりません。しかし、普段は太陽自身の眩しい光に邪魔されて、それは不可能です。唯一のチャンスは、太陽が月に隠される**皆既日食**の時です。

1919 年、イギリスの天文学者アーサー・エディントンは、この予言を検証するため、皆既日食が観測できるアフリカのプリンシペ島とブラジルのソブラルへ、2 つの観測隊を派遣しました。彼らは日食中に太陽の周りの星々の写真を撮影し、半年後に太陽が別の位置にあるときに撮影した同じ星野の写真と比較しました。

その結果は、歴史的なものでした。星々の位置は、まさにアインシュタインが予言した通り、約 1.75 秒角だけ、太陽から離れる方向にずれて写っていたのです。

アインシュタイン、一夜にして世界の寵児に

この観測結果は、世界中の新聞で大々的に報じられ、「科学における革命」「ニュートンの宇宙観、覆る」といった見出しが躍りました。これにより、それまで専門家の間でしか知られていなかったアインシュタインの名前は、一夜にして世界中に轟くことになったのです。水星の近日点移動が既存の謎を解き明かした「説明」であったのに対し、光の湾曲は、未知の現象を理論から予言し、観測によってそれが証明された「予言の的中」でした。これは、一般相対性理論の正しさを世界に決定づける、劇的な出来事でした。

重力レンズ効果：宇宙の蜃気楼

天体の重力によって光が曲げられる現象は、あたかも宇宙空間に巨大なレンズが置かれているかのようです。これを**重力レンズ効果 (gravitational lensing)** と呼びます。重力源となる天体の質量や配置によって、この効果は様々な形で現れます。

- **強いレンズ効果**：観測者、レンズ役の天体（銀河など）、そして背景の光源（さらに遠方の銀河やクエーサー）が、ほぼ一直線上に並んだとき、背景の光源の像が複数に分裂して見えたり、リング状に引き伸ばされて見えたりします。このリング状の像は「**アインシュタイン・リング**」と呼ばれます。
- **弱いレンズ効果**：一直線上に並んでいない場合でも、手前にある銀河団などの重力は、その向こう側にある無数の銀河の像を、わずかに歪ませます。この微小な歪みのパターンを統計的に解析することで、銀河団に存在する、光では直接見ることはできない**ダークマター**の分布を地図化することができます。
- **マイクロレンズ効果**：レンズ役の天体が、恒星のような小さな質量の場合、背景の星の像を分離して見ることはできません。しかし、レンズ星が背景の星の前を横切る短い期間、重力レンズ効果によって背景の星の光が増幅され、一時的に明るく見える現象が起こります。この現象は、太陽系外惑星の発見にも利用されています。

かつては理論上の予測に過ぎなかった光の湾曲は、今や、ダークマターの正体を探り、遠方宇宙の姿を拡大し、そして新しい惑星系を発見するための、現代天文学に不可欠な「宇宙の望遠鏡」となっているのです。

8.4 （発展）軌道計算と楕円関数との出会い

前節までの議論では、有効ポテンシャルを用いて軌道の性質を定性的に調べたり、近日点移動のような特定の効果を近似的に計算したりしました。ここでは、シュワルツシルト時空における粒子の軌道方程式の、数学的に厳密な姿を少しだけ覗いてみましょう。そこには、19世紀の数学者たちが情熱を注いだ**楕円関数 (elliptic functions)** という美しい世界が広がっています。

運動方程式の変形

まず、私たちの出発点は、有効ポテンシャルの議論で出てきた、動径 r に関するエネルギー保存則の式です。

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - V_{\text{eff, GR}}(r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(c^2 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

ここで E は単位質量あたりのエネルギー、 L は単位質量あたりの角運動量で、共に保存量です。このままでは扱いにくいので、変数変換を行います。ニュートン力学の軌道計算（ケプラー問題）で馴染み深いように、動径の逆数 $u = 1/r$ を導入し、さらに独立変数を固有時間 τ から角度 ϕ に変更します。

角運動量の保存則 $L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$ を使うと、 $\frac{dr}{d\tau}$ は以下のように変換できます。

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \left(-\frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{du}{d\phi}\right) \left(\frac{L}{r^2}\right) = \left(-\frac{1}{u^2}\right) \left(\frac{du}{d\phi}\right) (Lu^2) = -L \frac{du}{d\phi}$$

これを最初のエネルギーの式に代入し、 $r = 1/u$ を使って整理すると、

$$\left(-L \frac{du}{d\phi}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GMu}{c^2}\right) (c^2 + L^2 u^2)$$

これを $(du/d\phi)^2$ について解くと、最終的に以下の軌道方程式が得られます。

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2 - c^2}{L^2} + \frac{2GM}{L^2} u - u^2 + \frac{2GM}{c^2} u^3$$

楕円関数への扉

さて、この方程式が持つ意味を考えてみましょう。

- ニュートン力学の場合：もし、一般相対性理論的な効果である最後の u^3 の項がなければ、この方程式は $(du/d\phi)^2 = (u \text{ の } 2 \text{ 次式})$ となります。これは単振動の方程式であり、その解は $u(\phi) \propto \cos(\phi - \phi_0)$ のように、単純な三角関数になります。 $u = 1/r$ でしたから、これは軌道が閉じた楕円（あるいは放物線・双曲線）になることを意味します。
- 一般相対性理論の場合：しかし、私たちの手元にあるのは $(du/d\phi)^2 = (u \text{ の } 3 \text{ 次式})$ という形の方程式です。

微分方程式の世界では、 $(\frac{dy}{dx})^2$ が y の 2 次多項式で与えられる関数の積分が三角関数やその逆関数に対応するのにに対し、それが 3 次または 4 次の多項式になる場合の解は、楕円関数と呼ばれる、より一般的な関数になることが知られています。

楕円関数は、三角関数を一般化したものと考えられます。三角関数が円周の長さをパラメータ化するのに使われるのに対し、楕円関数は楕円の弧長を計算する過程で歴史的に発見されました（名前の由来はここにあります）。三角関数が単一の周期を持つのに対し、楕円関数は複素平面上で 2 つの異なる周期を持つ「二重周期関数」であり、より豊かで複雑な性質を持っています。

重要なのは、楕円関数は三角関数の周期 2π よりもちょっとだけ長い周期 $4K$ を持つということです。角度変数 θ が周期 2π を持つのに対し、楕円関数の周期は少し伸びています。その結果、角度の変数が一周戻ってきても、動径は元の値に戻らないということを反映しているのです。これはまさに先ほど述べたロゼット軌道に他なりません。

軌道の厳密解と近日点移動

シュワルツシルト時空における粒子の軌道の厳密解が、三角関数ではなく楕円関数になるという事実は、物理的に何を意味するのでしょうか。

それは、軌道がもはや単純に閉じた楕円にはならないということです。楕円関数で記述される軌道は、まさに私たちが前節で見た近日点移動（ロゼット軌道）を自然に含んでいます。ニュートン力学からのずれを生み出す原因であった u^3 の項（GR 補正項）こそが、解を三角関数から楕円関数へと格上げする数学的な要因だったのです。

もちろん、水星の近日点移動のようなわずかな効果を計算するだけであれば、近似計算で十分です。しかし、ブラックホール近傍のような強重力場での運動を厳密に記述しようとする、この楕円関数という数学が必要不可欠となります。

一般相対性理論が、時空の幾何学という物理的な洞察から生まれながら、その厳密な解の内に、19 世紀数学の美しい華である楕円関数という構造を秘めていたことは、物理学と数学の深遠な結びつきを示す、驚くべき一例と言えるでしょう。

厳密解の姿：ヤコビの楕円関数

では、この $(du/d\phi)^2 = (u \text{ の } 3 \text{ 次式})$ という微分方程式を解くと、具体的にどのような解が得られるのでしょうか。

この方程式の右辺である 3 次式を $P(u)$ と書き、その 3 つの実数解を $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ とします。束縛された軌道（惑星のように中心天体の周りを回り続ける軌道）では、粒子は近日点（ r が最小 $\iff u$ が最大）と遠日点（ r が最大 $\iff u$ が最小）の間を運動します。これは、解 u が u_1 と u_2 の間を振動することに対応します。

この微分方程式を解くと、その厳密解はヤコビの楕円関数の一つである sn 関数を用いて、次のように表されます。

シュワルツシルト時空における軌道の厳密解

$$u(\phi) = u_1 + (u_2 - u_1)\text{sn}^2(\Omega(\phi - \phi_0), k)$$

この式に含まれる各項は、以下のような意味を持ちます。

- u_1, u_2 : それぞれ遠日点と近日点に対応する $1/r$ の値。これらは 3 次方程式 $P(u) = 0$ の解です。
- $\text{sn}(z, k)$: ヤコビの楕円関数。三角関数の \sin を一般化したものであり、 z が引数、 k が母数（モジュラス）です。

- k : 母数 (modulus) と呼ばれる、 $0 \leq k \leq 1$ の範囲の定数。楕円関数の「形」を決定し、 $k = 0$ のとき $\text{sn}(z, 0) = \sin(z)$ となり、三角関数に帰着します。
- Ω : 軌道の「角振動数」に相当する定数。近日点から次の近日点までの角度がどれくらいかを決定します。

母数 k と角振動数 Ω の値は、3 次方程式の解 u_1, u_2, u_3 から計算することができます。

■近日点移動の数学的表現 この厳密解が、どのように近日点移動を表現しているかを見てみましょう。三角関数の $\sin^2(z)$ の周期が π であるように、楕円関数 $\text{sn}^2(z, k)$ もまた周期を持ちます。その周期は $2K(k)$ と書かれます ($K(k)$ は第一種完全楕円積分と呼ばれる量です)。

軌道が一周して、粒子が再び近日点 ($u = u_2$) に戻ってくるまでの角度の変化量 $\Delta\phi$ は、

$$\Omega \cdot \Delta\phi = 2K(k) \quad \Longrightarrow \quad \Delta\phi = \frac{2K(k)}{\Omega}$$

となります。

- ニュートン力学の場合 : GR 補正項 (u^3 の項) がなければ、 $k \rightarrow 0$ となり、 $K(0) = \pi/2$, $\Omega \rightarrow 1$ となります。その結果、 $\Delta\phi = 2\pi$ となり、軌道は完全に閉じて、近日点は移動しません。
- 一般相対性理論の場合 : GR 補正項の影響で、 Ω の値は 1 からわずかにずれます。その結果、 $\Delta\phi$ は 2π とはならず、

$$\Delta\phi = 2\pi + (\text{ずれ})$$

という形になります。この「ずれ」こそが、一周ごとの近日点移動量に他なりません。

このように、楕円関数という数学的な枠組みは、一般相対性理論が予測する複雑な軌道の振る舞いを、完璧な形で内包しているのです。

おまけ - Appendix

付録 A：シュワルツシルト計量の導出

A.1 問題設定と計量の仮定

私たちの目標は、静的・球対称な天体の外部における真空の時空を記述する計量を見つけ出すことです。この問題設定は、以下の仮定にまとめられます。

1. 真空：エネルギー・運動量テンソルがゼロ ($T_{\mu\nu} = 0$)。これにより、解くべきアインシュタイン方程式は真空方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ となります。
2. 静的：計量は時間座標 t に依存しません。
3. 球対称：計量は空間的な回転に対して不変です。

これらの仮定を満たす最も一般的な計量の解の形は、未知関数 $\alpha(r), \beta(r)$ を用いて次のように書けます。

$$ds^2 = e^{2\alpha(r)} c^2 dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

座標は $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ です。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と、その逆行列 $g^{\mu\nu}$ のゼロでない成分は以下の通りです。

$$\begin{aligned} g_{tt} &= e^{2\alpha(r)} & g^{tt} &= e^{-2\alpha(r)} \\ g_{rr} &= -e^{2\beta(r)} & g^{rr} &= -e^{-2\beta(r)} \\ g_{\theta\theta} &= -r^2 & g^{\theta\theta} &= -1/r^2 \\ g_{\phi\phi} &= -r^2 \sin^2 \theta & g^{\phi\phi} &= -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

A.2 接続係数（クリストッフェル記号）の計算

次に、計量テンソルの微分から、ゼロでない接続係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$ を全て計算します。計量のゼロでない微分は以下の通りです。（' は r に関する微分を表します。）

$$\begin{aligned} \partial_r g_{tt} &= 2\alpha' e^{2\alpha} & \partial_r g_{rr} &= -2\beta' e^{2\beta} \\ \partial_r g_{\theta\theta} &= -2r & \partial_r g_{\phi\phi} &= -2r \sin^2 \theta \\ \partial_\theta g_{\phi\phi} &= -2r^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

これらを公式に代入し、一つ一つ計算していきます。

ゼロでない接続係数

$$\begin{aligned} \bullet \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{rr} + \partial_r g_{tr} - \partial_r g_{tr}) = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_r g_{tt}) = \frac{1}{2}e^{-2\alpha}(2\alpha'e^{2\alpha}) = \alpha' \\ \bullet \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_t g_{tr} + \partial_t g_{tr} - \partial_r g_{tt}) = -\frac{1}{2}g^{rr}(\partial_r g_{tt}) = -\frac{1}{2}(-e^{-2\beta})(2\alpha'e^{2\alpha}) = \end{aligned}$$

$$\alpha' e^{2(\alpha-\beta)}$$

- $\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2} (-e^{-2\beta}) (-2\beta' e^{2\beta}) = \beta'$
- $\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_\theta g_{r\theta} + \partial_\theta g_{\theta r} - \partial_r g_{\theta\theta}) = -\frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{\theta\theta}) = -\frac{1}{2} (-e^{-2\beta}) (-2r) = -r e^{-2\beta}$
- $\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_\phi g_{r\phi} + \partial_\phi g_{\phi r} - \partial_r g_{\phi\phi}) = -\frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{\phi\phi}) = -\frac{1}{2} (-e^{-2\beta}) (-2r \sin^2 \theta) = -r \sin^2 \theta e^{-2\beta}$
- $\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_\theta g_{r\theta}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_r g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} (-1/r^2) (-2r) = \frac{1}{r}$
- $\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\phi g_{\phi\theta} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\phi}) = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\theta g_{\phi\phi}) = -\frac{1}{2} (-1/r^2) (-2r^2 \sin \theta \cos \theta) = -\sin \theta \cos \theta$
- $\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_r g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{r\phi} - \partial_\phi g_{r\phi}) = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_r g_{\phi\phi}) = \frac{1}{2} (-1/(r^2 \sin^2 \theta)) (-2r \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}$
- $\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_\theta g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\phi g_{\theta\phi}) = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_\theta g_{\phi\phi}) = \frac{1}{2} (-1/(r^2 \sin^2 \theta)) (-2r^2 \sin^2 \theta \cot \theta) = \cot \theta$

(対称性から $\Gamma_{rt}^t = \Gamma_{tr}^t$ などが成り立ちます。)

A.3 リッチテンソルの計算と真空方程式

次に、Step 2 で求めた接続係数を、リッチテンソルの定義式に代入します。これは本書で最も骨の折れる計算ですが、その構造を追うことで、理論がどのように機能するかを深く理解できます。

リッチテンソルの定義式は以下の通りです。

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\lambda$$

私たちは、真空方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ に必要な、ゼロでない可能性のある対角成分 $R_{tt}, R_{rr}, R_{\theta\theta}$ を計算していきます。

予備計算：縮約された接続係数

第 2 項の計算のために、まず縮約 $\Gamma_{\rho\mu}^\rho$ を計算しておきます。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho r}^\rho &= \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{\phi r}^\phi = \alpha' + \beta' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \alpha' + \beta' + \frac{2}{r} \\ \Gamma_{\rho\theta}^\rho &= \Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\phi\theta}^\phi = 0 + 0 + 0 + \cot \theta = \cot \theta \end{aligned}$$

時間と ϕ 成分については、 $\Gamma_{\rho t}^\rho = 0, \Gamma_{\rho\phi}^\rho = 0$ となります。

計算 1： R_{tt} の導出

R_{tt} の公式は、 $R_{tt} = \partial_\rho \Gamma_{tt}^\rho - \partial_t \Gamma_{\rho t}^\rho + \Gamma_{\lambda\rho}^\rho \Gamma_{tt}^\lambda - \Gamma_{\lambda t}^\rho \Gamma_{t\rho}^\lambda$ です。

- 微分項：計量は t に依らないので $\partial_t(\dots) = 0$ 。また、 Γ_{tt}^ρ がゼロでないのは $\rho = r$ のみなので、 $\partial_\rho \Gamma_{tt}^\rho = \partial_r \Gamma_{tt}^r = \partial_r (\alpha' e^{2(\alpha-\beta)}) = (\alpha'' + 2\alpha'(\alpha' - \beta')) e^{2(\alpha-\beta)}$ 。

- 二次項： Γ_{tt}^λ がゼロでないのは $\lambda = r$ のみ。また、 $\Gamma_{t\rho}^\lambda$ がゼロでないのは $\lambda = t, \rho = r$ の場合とその逆のみです。ゼロでない項を拾い集めて計算すると、

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda\rho}^\rho \Gamma_{tt}^\lambda - \Gamma_{\lambda t}^\rho \Gamma_{t\rho}^\lambda &= \Gamma_{r\rho}^\rho \Gamma_{tt}^r - (\Gamma_{tr}^r \Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r) \\ &= (\alpha' + \beta' + \frac{2}{r})(\alpha' e^{2(\alpha-\beta)}) - ((\alpha')(\alpha') + (\alpha')(\alpha' e^{2(\alpha-\beta)})) \\ &= \dots (\text{整理すると}) \dots \\ &= (-\alpha'(\alpha') + \alpha'\beta' + \frac{2\alpha'}{r})e^{2(\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

これらを合計すると、

$$R_{tt} = \left(\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta' + \frac{2\alpha'}{r} \right) e^{2(\alpha-\beta)}$$

が得られます。

計算 2： R_{rr} の導出

同様に、 $R_{rr} = \partial_\rho \Gamma_{rr}^\rho - \partial_r \Gamma_{\rho r}^\rho + \dots$ を計算します。

- 微分項： $\partial_\rho \Gamma_{rr}^\rho = \partial_r \Gamma_{rr}^r = \beta''$ 。そして、 $\partial_r \Gamma_{\rho r}^\rho = \partial_r (\alpha' + \beta' + \frac{2}{r}) = \alpha'' + \beta'' - \frac{2}{r^2}$ 。
- 二次項：ゼロでない多くの項を拾い集めて計算し、整理すると、 $(\alpha')^2 - \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r} - \frac{2}{r^2}$ となります。

これらを合計すると、

$$R_{rr} = -\alpha'' - (\alpha')^2 + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r}$$

が得られます。

計算 3： $R_{\theta\theta}$ の導出

最後に、 $R_{\theta\theta}$ を計算します。

- 微分項： $\partial_\rho \Gamma_{\theta\theta}^\rho - \partial_\theta \Gamma_{\rho\theta}^\rho = \partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{\rho\theta}^\rho = \partial_r (-re^{-2\beta}) - \partial_\theta (\cot \theta) = (-1 + 2r\beta')e^{-2\beta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}$ 。
- 二次項： $\Gamma\Gamma$ の項を計算すると、 $-(2r\beta'e^{-2\beta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta}$ となります。(詳細略)

これらを合計すると、

$$R_{\theta\theta} = 1 - (1 + r(\alpha' - \beta'))e^{-2\beta}$$

が得られます。 $(R_{\phi\phi}$ は $R_{\theta\theta} \sin^2 \theta$ となるので独立な条件を与えません。)

真空方程式を解く

真空方程式 $R_{\mu\nu} = 0$ を課すと、これらが全てゼロにならなければなりません。ここで、魔法のような単純化が起こります。 $R_{tt} = 0$ (の括弧の中) と $R_{rr} = 0$ の式を足し合わせると、

$$(\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta' + \frac{2\alpha'}{r}) + (-\alpha'' - (\alpha')^2 + \alpha'\beta' + \frac{2\beta'}{r}) = 0$$

ほとんどの項が打ち消し合い、

$$\frac{2(\alpha' + \beta')}{r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha'(r) + \beta'(r) = 0$$

という、非常に簡単な関係式が得られます。

A.4 境界条件と解の決定

■1. 漸近平坦性： 無限遠方 ($r \rightarrow \infty$) では、時空は平坦なミンコフスキー時空に一致するはずで
す。すなわち、 $g_{tt} \rightarrow c^2$ かつ $g_{rr} \rightarrow -1$ となります。私たちの計量では $g_{tt} = e^{2\alpha}c^2, g_{rr} = -e^{2\beta}$
でしたので、これは $e^{2\alpha(\infty)} \rightarrow 1, e^{2\beta(\infty)} \rightarrow 1$ を意味します。つまり $\alpha(\infty) = 0, \beta(\infty) = 0$ です。
これにより、積分定数は $C_1 = \alpha(\infty) + \beta(\infty) = 0$ と決まり、

$$\alpha(r) = -\beta(r)$$

という重要な関係式が導かれます。

■2. 残りの方程式を解く： この関係式を、まだ使っていない $R_{\theta\theta} = 0$ の式に代入します。

$$1 - (1 + r(\alpha' - (-\alpha'))e^{-2(-\alpha)}) = 1 - (1 + 2r\alpha')e^{2\alpha} = 0$$

この微分方程式を $e^{2\alpha}$ について整理すると、 $(re^{2\alpha})' = 1$ となります。これを r で積分すると、

$$re^{2\alpha} = r + C_2 \quad \Longrightarrow \quad e^{2\alpha} = 1 + \frac{C_2}{r}$$

となります (C_2 は新たな積分定数)。

■3. ニュートン重力との比較： 最後に、この積分定数 C_2 の物理的な意味を決定します。弱い
重力場では、 $g_{tt} \approx c^2(1 + \frac{2\Phi}{c^2})$ であり、質量 M の点質量の重力ポテンシャルは $\Phi = -GM/r$ で
した。したがって、

$$g_{tt} \approx c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)$$

一方、私たちの解は $g_{tt} = e^{2\alpha}c^2 = c^2(1 + \frac{C_2}{r})$ です。この2つの式を比較することで、積分定数
は $C_2 = -\frac{2GM}{c^2}$ であることがわかります。

A.5 結論：シュワルツシルト計量の完成

これで、未知関数 $\alpha(r)$ と $\beta(r)$ が完全に決定されました。

$$e^{2\alpha(r)} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}, \quad e^{2\beta(r)} = e^{-2\alpha(r)} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1}$$

これらを最初の計量の仮定の式に代入すると、ついに最終的なシュワルツシルト計量が導かれ
ます。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

こうして、物理的に妥当な仮定とリーマン幾何学の計算道具、そして物理的な境界条件を組み合わせることで、アインシュタイン方程式から、現実の天体の周りの時空を見事に記述する解を導き出すことができました。

参考文献

- [1] 石井俊全 (著),『一般相対性理論を一步一步数式で理解する』,ベレ出版 (2018).
- [2] 見城 尚志 (著),佐野 茂 (著),『幾何で見える 必ずわかる一般相対性理論』,共立出版 (2021).
- [3] 須藤 靖 (著),『一般相対論入門 改訂版』,日本評論社 (2017).
- [4] 河野 俊丈 (著),『曲率とトポロジー: 曲面の幾何から宇宙のかたちへ』,共立出版 (2022).