

2024 北京人大附中初三（下）开学考

数 学

考生须知：

1. 本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题，满分 100 分。考试时间，120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束，将答题卡和草稿纸一并交回。

第一部分选择题

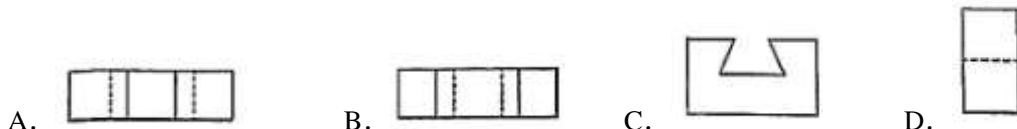
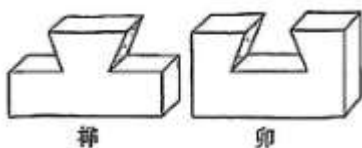
一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1—8 题均有四个选项，等合题意的选项只有一个。

1. 2024 年春节假期，首都市民纷纷走出家门，到公园逛庙会、赏民俗、看花灯，感受新春的喜庆氛围。据北京市园林绿化局的数据信息，春节假期首日（2 月 10 日），全市共接待游客 71.1 万人次。将 71.1 万用科学记数法表示应为（ ）

A. 71.1×10^4 B. 7.11×10^5 C. 7.11×10^4 D. 711×10^3

2. 在我国古代建筑中经常使用榫卯构件，如图是某种榫卯构件的示意图，其中，卯的俯视图是（ ）



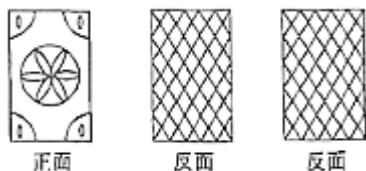
3. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根，则实数 m 的值为（ ）

A. 3 B. 2 C. 1 D. -1

4. 已知 $-x > -1$ ，则下列不等式一定成立的是（ ）

A. $x > 1$ B. $x < 1$ C. $x > -1$ D. $x < -1$

5. 如图，桌面上有 3 张卡片，1 张正面朝上。任意将其中 1 张卡片正反面对调一次后，这 3 张卡片中出现 2 张正面朝上的概率是（ ）

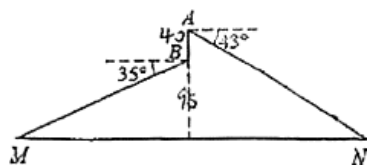


A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 已知点 $(-3, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$ 在下列某一函数图象上，且 $y_3 < y_1 < y_2$ ，那么这个函数可能是（ ）

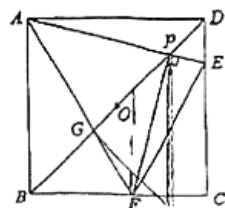
A. $y = 3x$ B. $y = 3x^2$ C. $y = \frac{3}{x}$ D. $y = -\frac{3}{x}$

7. 无人机低空遥感技术已广泛应用于农作物监测. 如图, 某农业特色品牌示范基地用无人机对一块试验田进行监测作业时, 在距地面高度为135m的A处测得试验田右侧出界N处俯角为 43° , 无人机垂直下降40m至B处, 又测得试验田左侧边界M处俯角为 35° , 则M,N之间的距离约为(参考数据: $\tan 43^\circ \approx 0.9$, $\sin 43^\circ \approx 0.7$, $\cos 35^\circ \approx 0.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$, 结果保留整数) ()



- A. 312m B. 286m C. 269m D. 188m

8. 如图, 在正方形ABCD中, 点O是对角线BD的中点, 点P在线段OD上, 连接AP并延长交CD于点E, 过点P作 $PF \perp AP$ 交BC于点F, 连接AF、EF, AF交BD于G. 给出下面四个结论:



① $AB^2 + BF^2 < 2AP^2$; ② $BF + DE > EF$;

③ $PB - PD < 2BF$; ④ $FC + EC > \sqrt{2}PG$.

上述结论中, 所有正确结论的序号是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ③

第二部分非选择题

二、填空题(共16分, 每题2分)

9. 若代数式 $\frac{1}{x-2}$ 有意义, 则实数x的取值范围是_____.

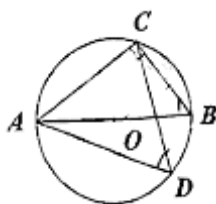
10. 五边形的内角和等于_____度.

11. 若反比例函数的图象经过点 $(-2, 3)$, 则该函数的解析式为_____.

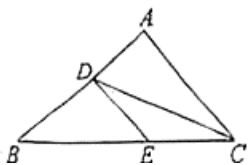
12. 天坛是古代帝王祭天的地方, 其中最主要的建筑就是祈年殿. 老师希望同学们利用所学过的知识测量祈年殿的高度, 数学兴趣小组的同学们设计了如图所示的测量图形, 并测出竹竿AB长2米, 在太阳光下, 它的影长BC为1.5米, 同一时刻, 祈年殿的影长EF约为28.5米. 请你根据这些数据计算出祈年殿的高度DE约为_____米.



13. 如图, 已知AB是 $\odot O$ 的直径, 点C、D在 $\odot O$ 上, 且 $AB = 5$, $AC = 4$. 则 $\tan \angle ADC =$ _____.



14. 如图, $\triangle ABC$ 中, CD 平分 $\angle ACB$, $DE \parallel AC$ 交 BC 于点 E . 若 $AC = 5$, $DE = 3$, 则 $BE =$ _____.



15. 已知 $(1, 3)$ 是反比例函数 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ 图象和正比例函数 $y_2 = k_2 x$ 图象的交点. 若 $y_1 > y_2$, 则 x 的取值范围是 _____.

16. 甲乙两人进行如下游戏: 已知 1、2、3、4、5、6、7、8 共 8 个数, 每人每次从中勾去 2 个数, 若甲先开始, 两人轮流进行, 经过 3 次勾数后, 还剩两个数, 这时所剩两数之差即为甲得的分数, 则甲可保证自己至少得 _____ 分.

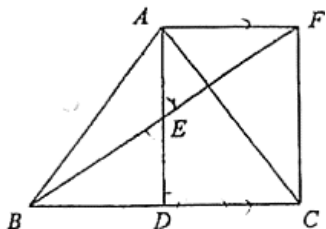
三、解答题 (共 68 分, 第 17—19 题, 每题 5 分, 第 20—21 题, 每题 6 分, 第 22—23 题, 每题 5 分, 第 24 题 6 分, 第 25 题 5 分, 第 26 题 6 分, 第 27—28 题, 每题 7 分)

17. 计算: $2\sin 45^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |-\sqrt{2}| - \sqrt{8}$.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} x \leq \frac{2x+4}{3}, \\ x+1 > 7-2x. \end{cases}$$

19. 已知 $x^2 + xy - 3 = 0$, 求代数式 $\left(x + \frac{2xy + y^2}{x}\right) \div \frac{x+y}{x^2}$ 的值.

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 为 BC 边上的中线, 点 E 为 AD 中点, 过点 A 作 $AF \parallel BC$, 交 BE 的延长线于点 F , 连接 CF .



(1) 求证: 四边形 $ADCF$ 为矩形;

(2) 若 $BC = 6$, $\sin \angle BAD = \frac{3}{5}$, 求 EF 的长.

21. 电影《刘三姐》中, 有这样一个场景, 罗秀才摇头晃脑地吟唱道: “三百条狗交给你, 一少三多四下分, 不要双数要单数, 看你怎样分得匀?” 该歌词表达的是一道数学题. 其大意是: 把 300 条狗分成 4 群, 每个群里, 狗的数量都是奇数, 其中一个群, 狗的数量少; 另外三个群, 狗的数量多且数量相同. 问: 应该如何分? 请你根据题意解答下列问题:

(1) 刘三姐的姐妹们以对歌的形式给出答案: “九十九条打猎去, 九十九条看羊来, 九十九条守门口, 剩下三条给财主.”

下面有三种说法:

- ①刘三姐的姐妹们给出的答案是正确的, 但不是唯一正确的答案.
- ②刘三姐的姐妹们给出的答案是唯一正确的答案.
- ③该歌词表达的数学题的正确答案有无数多种.

所有正确说法的序号是_____；

(2) 若罗秀才再增加一个条件：“数量多且数量相同的三个群里，每个群里狗的数量比数量较少的那个群里狗的数量多 40 条”，求每个群里狗的数量.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 图象经过点 $A(1,4)$ 和 $B(2,m)$

(1) 若 $m=2$ ，求该函数的解析式；

(2) 当 $x>2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx-1$ 的值大于 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的，结合函数图象，直接写出 m 的取值范围.

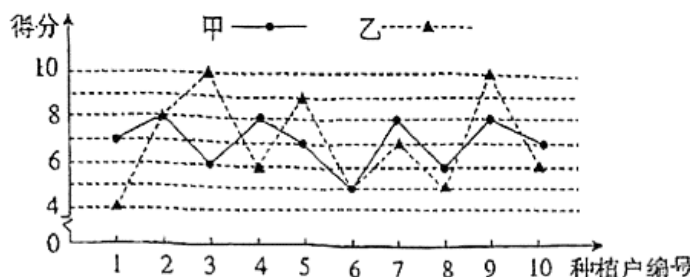
23. 蓬勃发展的快递业，为全国各地的新鲜水果及时走进千家万户提供了极大便利. 不同的快递公司在配送、服务、收费和投递范围等方面各具优势. 樱桃种植户小丽经过初步了解，打算从甲、乙两家快递公司中选择一家合作，为此，小丽收集了 10 家樱桃种植户对两家公司的相关评价，并整理、描述、分析，下面给出了部分信息：

a. 配送速度得分（满分 10 分）：

甲：6 7 7 8 8 8 8 9 9 10

乙：7 7 8 8 8 9 9 9 10 10

b. 服务质量得分统计图（满分 10 分）：



c. 配送速度和服务质量得分统计表：

项目统计量快递公司	配送速度得分		服务质量得分	
	平均数	中位数	平均数	中位数
甲	m	8	7	7
乙	8.5	8.5	7	n

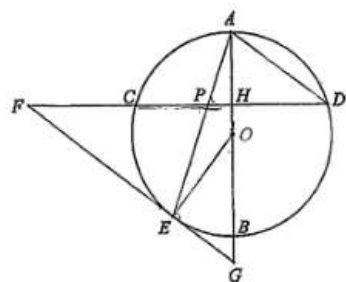
根据以上信息，回答下列问题：

(1) 写出表中 m, n 的值；

(2) 在甲乙两家快递公司中，如果某公司得分的 10 个数据的方差越小，则认为种植户对该公司的评价越一致. 据此推断：甲、乙两家公司中，种植户对_____的服务质量的评价更一致（填“甲”或“乙”）；

(3) 一开始小丽考虑到樱桃保鲜时间短，所以更看重配送速度，从这个角度看，你为小雨推荐的公司为_____（填“甲”或“乙”）；后来改进了储存技术，在配送速度达到 6 分及以上的情况下，小丽更看重服务质量的稳定性，从这个角度看，你为小丽推荐的公司为_____（填“甲”或“乙”）.

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ，垂足为 H , E 为 BC 上一点，过点 E 作 $\odot O$ 的切线，分别交 DC, AB 的延长线于点 F, G . 连接 AE ，交 CD 于点 P .



(1) 求证: $\angle FEP = \angle FPE$;

(2) 连接 AD , 若 $AD \parallel FG$, $CD = 4$, $\cos F = \frac{4}{5}$, 求 EG 的长.

25. 酶是一种绿色添加剂, 合理地使用酶制作面包, 能增加面粉的拉伸面积, 从而既能降低原料的成本, 又能改善面包的口味.

下表是 A 种酶对面粉拉伸面积的影响表.

A 种酶添加量 $x(\text{mg/kg})$	0	5	10	15	20	30	40	50	60
面粉拉伸面积 $y(\text{cm}^2)$	90	92.5	95	97.5	100	120	120	100	60

(1) 根据表格中的数据, 发现可以用函数刻画面粉拉伸面积 y 和 A 种酶添加量 x 之间的关系,

当 $0 \leq x \leq 20$ 时, y 与 x 满足_____关系;

当 $20 \leq x \leq 60$ 时, y 与 x 满足_____关系;

(填“一次函数”或“反比例函数”或“二次函数”)

(2) 当面粉拉伸面积不小于 112.5cm^2 时, 达到效果较好, 结合 (1) 中的判断, 请你求出面粉拉伸面积 y 与 A 种酶的添加量 x 的函数关系式, 并写出达到效果较好时的 x 的取值范围.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 (x_0, y_0) 是抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a > 0)$ 上任意一点.

(1) 若 $x_0 = -2, y_0 = 3$, 求该抛物线的对称轴;

(2) 已知点 $(-1, y_1), (1, y_2), (3, y_3)$ 在该抛物线上. 若存在 $3 < x_0 < 4$, 恰好使 $y_0 = 3$. 比较 y_1, y_2, y_3 的大小, 并说明理由.

27. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \alpha, AB = AC, D$ 为 BC 上一动点, 连结 AD . 将 AD 绕点 A 逆时针旋转 $(180^\circ - \alpha)$ 得到线段 AE , 连接 BE , 取 BE 中点 G .

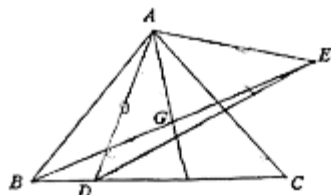


图 1

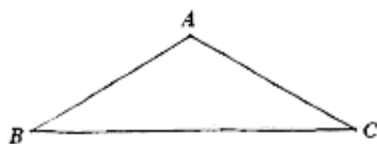
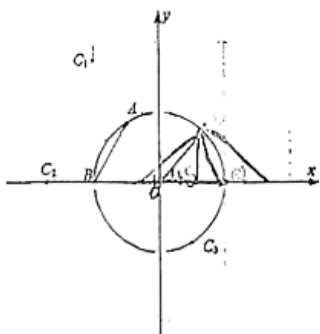


图 2

(1) 如图 1, 点 D 不与 B, C 重合, 用等式表示线段 CD 与 AG 的数量关系, 并证明;

(2) 若 $\alpha = 120^\circ$, 且 $AD \perp BE$, 连接 DG, CE , 依题意补全图 2, 并直接写出 $\frac{BD - DG}{CE}$ 的值.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1. 对于 $\odot O$ 的弦 AB 和点 C 给出如下定义: 若直线 CA 经过点 O , 线段 CB 与 $\odot O$ 只有一个公共点 B , 且 $\angle ACB = 30^\circ$, 则称点 C 是弦 AB 的“关联点”.



(1) 如图, 点 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B(-1, 0)$.

在点 $C_1(-1, \sqrt{3}), C_2(-\sqrt{3}, 0), C_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), C_4(1, 0)$ 中, 弦 AB 的“关联点”是_____;

(2) 若点 $A(1, 0), B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 且点 C 是弦 AB 的“关联点”, 求线段 OC 的长;

(3) 已知直线 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 M, N . 对于线段 MN 上一点 P , 存在 $\odot O$ 的弦 AB , 使得点 P 是弦 AB 的“关联点”. 记 AB 的长为 t , 当点 P 在线段 MN 上运动时, 直接写出 t 的取值范围.

参考答案

一、选择题（每小题 2 分，共 16 分）

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	C	B	C	D	B	C

二、填空题（每小题 2 分，共 16 分）

9. $x \neq 2$; 10. 540; 11. $y = -\frac{6}{x}$; 12. 38; 13. $\frac{4}{3}$; 14. $\frac{9}{2}$; 15. $0 < x < 1$ 或 $x < -1$; 16. 5

三、解答题（共 68 分，过程与标准答案不同，但合理，即可给分）

17. 解：原式 $= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2$

18. 解：原不等式组为
$$\begin{cases} x \leq \frac{2x+4}{3} \text{ ①} \\ x+1 > 7-2x \text{ ②} \end{cases}$$

由①得 $x \leq 4$ ，由②得 $x > 2$ ，

\therefore 不等式组的解集为 $2 < x \leq 4$ 。

19. 解：原式 $= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x+y} = (x+y) \cdot x = x^2 + xy$

$\because x^2 + xy - 3 = 0 \therefore x^2 + xy = 3$ 。即原式值为 3。

20. (1) 证明： \because 点 E 为 AD 中点， $AF \parallel BC$ ， $\therefore \frac{EF}{BE} = \frac{AE}{ED} = 1$ 。

\therefore 四边形 $ABDF$ 为平行四边形， $\therefore AF \parallel BD, AF = BD$ 。

又 $\because AB = AC, AD$ 为 BC 边上的中线，

$\therefore AD \perp BC, BD = DC$ 。 $\therefore AF \parallel DC, AF = DC$ 。 \therefore 四边形 $ADCF$ 为平行四边形。

又 $\because \angle ADC = 90^\circ$ ， \therefore 平行四边形 $ADCF$ 为矩形。

(2) 解： $\because BC = 6, AD$ 为 BC 边上的中线， $\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 3$ 。

\because 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中， $\sin \angle BAD = \frac{3}{5}$ ， $\therefore AB = \frac{BD}{\sin \angle BAD} = 5$ 。 $\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 4$ 。

又 \because 点 E 为 AD 中点， $\therefore ED = \frac{1}{2}AD = 2$ 。

\therefore 在 $\text{Rt} \triangle EBD$ 中， $BE = \sqrt{ED^2 + BD^2} = \sqrt{13}$ 。 $\therefore EF = BE = \sqrt{13}$ 。

21. (1) ①;

(2) 解：设数量多的三个群均有 x 条狗，则数量少的群有 $(x-40)$ 条狗。

由题意，列方程为 $3x + (x-40) = 300$ ，

解得 $x = 85$ 。则 $x - 40 = 45$ 。

答：四个群里狗的条数分别为 85, 85, 85, 45。

22. (1) $\because m = 2$ ，

\therefore 函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 图象经过点 $A(1, 4)$ 和 $B(2, 2)$ 。

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ m = \frac{245}{2} \end{cases} \therefore y = -\frac{1}{10}(x-35)^2 + \frac{245}{2}$$

$$\text{综上所述, } y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 90, 0 \leq x \leq 20 \\ -\frac{1}{10}(x-35)^2 + \frac{245}{2}, 20 < x \leq 60, \end{cases}$$

达到效果较好时的 x 的取值范围为 $25 \leq x \leq 45$.

26. (1) 解: \because 抛物线过 $(-2, 3)$,

$$\therefore 4a - 2b + 3 = 3 \text{ 即 } b = 2a,$$

$$\therefore \text{抛物线对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2a}{2a} = -1;$$

(2) 解: $y_1 > y_3 > y_2$

理由如下:

设抛物线对称轴为直线 $x = t$, 则抛物线上点 $(0, 3)$ 关于对称轴的对称点为 $(2t, 3)$,

\because 存在 $3 < x_0 < 4$, 恰好使 $y_0 = 3$. $\therefore 3 < 2t < 4$, 即 $\frac{3}{2} < t < 2$.

\because 抛物线开口向上, \therefore 在对称轴的左侧 y 随 x 增大而减小.

又 $(3, y_3)$ 关于对称轴的对称点为 $(2t-3, y_3)$ 且 $0 < 2t-3 < 1$

\therefore 点 $(-1, y_1), (1, y_2), (2t-3, y_3)$ 都在对称轴左侧, 且 $-1 < 2t-3 < 1 \therefore y_1 > y_3 > y_2$.

27. (1) 线段 CD 与 AG 的数量关系: $CD = 2AG$.

证明: 倍长 EA 到 F , 连接 BF .

$\because G$ 为 BE 的中点, $\therefore BF = 2AG$.

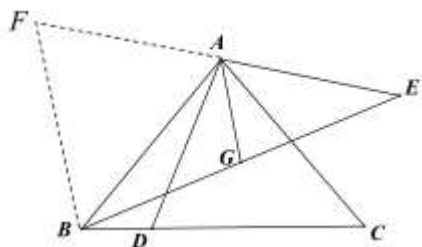
$\because AD$ 绕点 A 逆时针旋转 $(180^\circ - \alpha)$ 得到线段 AE ,

$\therefore AD = AE, \angle DAE = 180^\circ - \alpha \therefore AD = AF, \angle DAF = \alpha$.

$\because \angle BAC = \alpha = \angle FAD, \therefore \angle BAF = \angle CAD = \alpha - \angle BAD$.

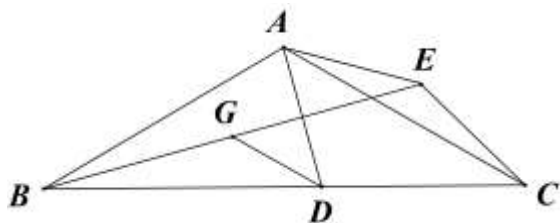
又 $\because AB = AC, \therefore \triangle FAB \cong \triangle DAC$.

$\therefore BF = CD \therefore CD = 2AG$.



$$(2) \frac{BD-DG}{CE} \text{ 的值: } \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

依题意补全图 2 如图:



28. (1) C_1 ;

(2) 解: 如图, 由题意可得, 点 C 在 x 轴上且 $\angle ACB = 30^\circ$, 即图中 C_1 和 C_2 两个位置. 过 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D ,

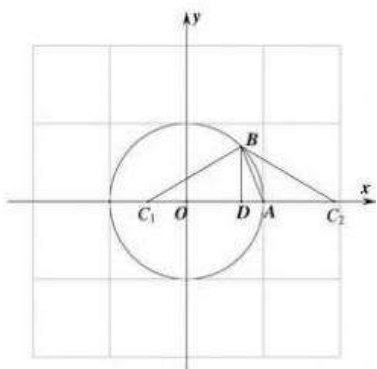
$$\because B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \therefore OD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又} \because \text{在 Rt} \triangle BC_1D \text{ 中, } \angle BC_1D = 30^\circ, \therefore C_1D = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\therefore OC_1 = C_1D - OD = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}. \text{ 同理可得 } C_2D = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore OC_2 = C_2D + OD = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

综上所述, 线段 OC 的长为 $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.



$$(3) \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1 \text{ 或 } \sqrt{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$