# 2021 北京东城初三二模

# 数　　学

**一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．**

1．（2 分）下列各数中，小于 $\sqrt{2}$ 的正整数是(　　)

A．$-1$　　B．0　　C．1　　D．2

2．（2 分）在下列不等式中，解集为 $x>-1$ 的是(　　)

A．$2x>2$　　B．$-2x>-2$　　C．$2x<-2$　　D．$-2x<2$

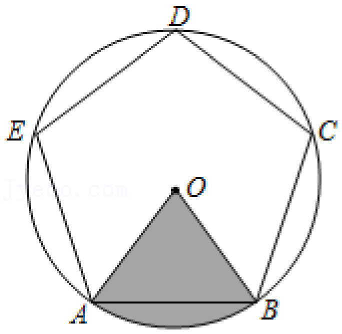
3．（2 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，$\odot O$ 的半径为 2，点 $A(1,\sqrt{3})$ 与 $\odot O$ 的位置关系是(　　)

A．在 $\odot O$ 上　　B．在 $\odot O$ 内　　C．在 $\odot O$ 外　　D．不能确定

4．（2 分）下列式子中，运算正确的是(　　)

A．$(1+x)^2=1+x^2$　　B．$a^2\cdot a^4=a^8$　　C．$-(x-y)=-x-y$　　D．$a^2+2a^2=3a^2$

5．（2 分）如图，$\odot O$ 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆．若 $\odot O$ 的半径为 5，则半径 $OA$，$OB$ 与 $AB$ 围成的扇形的面积是(　　)

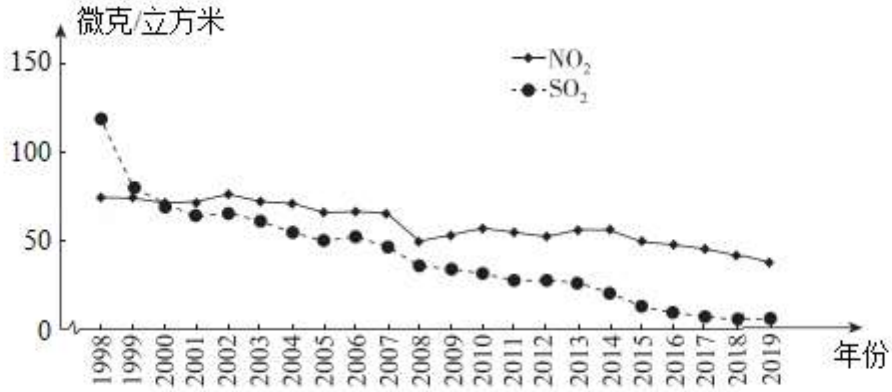



A．$2\pi$　　B．$5\pi$　　C．$\frac{25}{6}\pi$　　D．$10\pi$

6．（2 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $A$，$B$ 是直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 的交点，点 $B$ 在第一象限，点 $C$ 的坐标为 $(6,-2)$．若直线 $BC$ 交 $x$ 轴于点 $D$，则点 $D$ 的横坐标为(　　)

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．（2 分）多年来，北京市以强有力的措施和力度治理大气污染，空气质量持续改善，主要污染物的年平均浓度值全面下降．如图是 1998 年至 2019 年二氧化硫 $(SO_2)$ 和二氧化氮 $(NO_2)$ 的年平均浓度值变化趋势图，下列说法错误的是(　　)




A．1998 年至 2019 年，$SO_2$ 的年平均浓度值的平均数小于 $NO_2$ 的年平均浓度值的平均数

B．1998 年至 2019 年，$SO_2$ 的年平均浓度值的中位数小于 $NO_2$ 的年平均浓度值的中位数

C．1998 年至 2019 年，$SO_2$ 的年平均浓度值的方差小于 $NO_2$ 的年平均浓度值的方差

D．1998 年至 2019 年，$SO_2$ 的年平均浓度值比 $NO_2$ 的年平均浓度值下降得更快

8．（2 分）四位同学在研究函数 $y=-x^2+bx+c(b$，$c$ 是常数）时，甲同学发现当 $x=1$ 时，函数有最大值；乙同学发现函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象与 $y$ 轴的交点为 $(0,-3)$；丙同学发现函数的最大值为 4；丁同学发现当 $x=3$ 时，函数的值为 0．若这四位同学中只有一位同学的结论是错误的，则该同学是(　　)

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

**二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）**

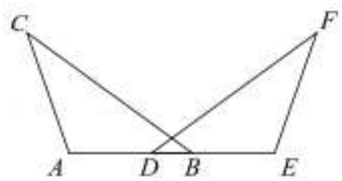
9．（2 分）若分式 $\dfrac{2}{x-1}$ 有意义，则 $x$ 的取值范围是____．

10．（2 分）分解因式：$mx^2-9m=$____．

11．（2 分）用一个 $k$ 的值推断命题“一次函数 $y=kx+1(k\neq 0)$ 中，$y$ 随着 $x$ 的增大而增大”．是错误的，这个值可以是 $k=$____．

12．（2 分）某校九年级（1）班计划开展“讲中国好故事”主题活动．第一小组的同学推荐了“北大红楼、脱贫攻坚、全面小康、南湖红船、抗疫精神、致敬英雄”六个主题，并将这六个主题分别写在六张完全相同的卡片上，然后将卡片放入不透明的口袋中．组长小东从口袋中随机抽取一张卡片，抽到含“红”字的主题卡片的概率是____．

13．（2 分）如图，点 $A$，$D$，$B$，$E$ 在同一条直线上，$AD=BE$，$AC=EF$，要使 $\Delta ABC\cong\Delta EDF$，只需添加一个条件，这个条件可以是____．




14．（2 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知点 $A(2,0)$，$B(5,4)$．若四边形 $OABC$ 是平行四边形，则 $OABC$ 的周长等于____．

15．（2 分）若点 $P$ 在函数 $y=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 的图象上，且到 $x$ 轴的距离等于 1，则点 $P$ 的坐标是____．

16．（2 分）数学课上，李老师提出如下问题：

已知：如图，$AB$ 是 $\odot O$ 的直径，射线 $AC$ 交 $\odot O$ 于 $C$．

求作：弧 $BC$ 的中点 $D$ .

同学们分享了四种方案：

①如图 1，连接 $BC$ ，作 $BC$ 的垂直平分线，交 $\odot O$ 于点 $D$ .

②如图 2，过点 $O$ 作 $AC$ 的平行线，交 $\odot O$ 于点 $D$ .

③如图 3，作 $\angle BAC$ 的平分线，交 $\odot O$ 于点 $D$ .

④如图 4，在射线 $AC$ 上截取 $AE$ ，使 $AE=AB$ ，连接 $BE$ ，交 $\odot O$ 于点 $D$ .

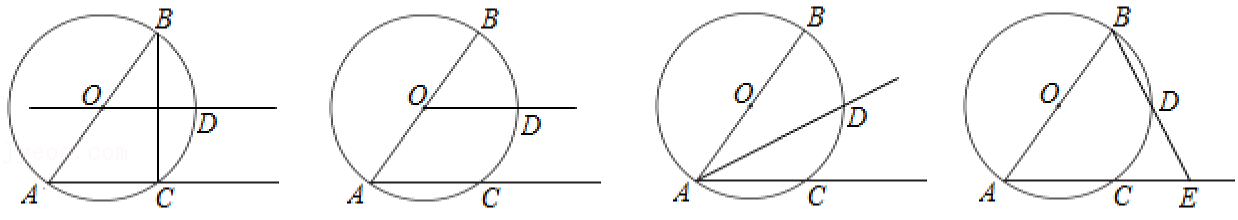
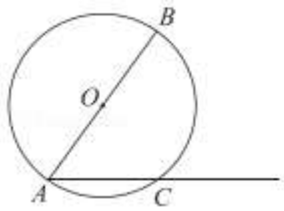



图1　　图2　　图3　　图4

上述四种方案中，正确的方案的序号是 ____.

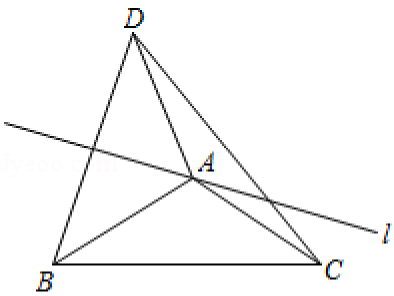



**三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.**

17.（5 分）计算： $(-5)^0+\sqrt{27}+2^{-1}-\tan 60^\circ$ .

18.（5 分）先化简代数式 $\dfrac{a^2+1}{a-1}+1-a$ ，再求当 $a$ 满足 $a-2=0$ 时，此代数式的值.

19.（5 分）如图，在等腰 $\Delta ABC$ 中， $AB=AC$ ，直线 $l$ 过点 $A$ . 点 $B$ 与点 $D$ 关于直线 $l$ 对称，连接 $AD$ ， $CD$ . 求证： $\angle ACD=\angle ADC$ .




20.（5 分）已知：如图，点 $C$ 在 $\angle MON$ 的边 $OM$ 上.

求作：射线 $CD$ ，使 $CD//ON$ ，且点 $D$ 在 $\angle MON$ 的角平分线上.

作法：①以点 $O$ 为圆心，适当长为半径画弧，分别交射线 $OM$ ， $ON$ 于点 $A$ ， $B$ ；②分别以点 $A$ ， $B$ 为圆心，大于 $\dfrac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，交于点 $Q$ ；③画射线 $OQ$ ；④以点 $C$ 为圆心， $CO$ 长为半径画弧，交射线 $OQ$ 于点 $D$ ；⑤画射线 $CD$ . 射线 $CD$ 就是所求作的射线.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明：

$\because OD$ 平分 $\angle MON$，

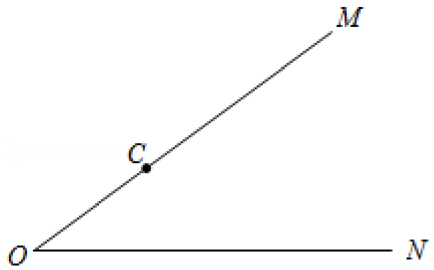
$\therefore \angle MOD=$____.

$\because OC=CD$，

$\therefore \angle MOD=$____.

$\therefore \angle NOD=\angle CDO$.

$\therefore CD//ON($____$)$（填推理的依据）.




21.（5 分）已知关于 $x$ 的一元二次方程 $mx^2-(m+1)x+1=0(m\neq 0)$.

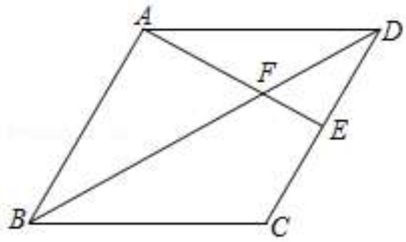
（1）求证：此方程总有实数根；

（2）写出一个 $m$ 的值，使得此该方程的一个实数根大于 1，并求此时方程的根.

22.（5 分）如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 $E$ 是 $CD$ 的中点，连接 $AE$，交 $BD$ 于点 $F$.

（1）求 $BF:DF$ 的值；

（2）若 $AB=2$，$AE=\sqrt{3}$，求 $BD$ 的长.




23.（6 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $l$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的两个交点分别为 $A(-3,-1)$，$B(1,m)$.

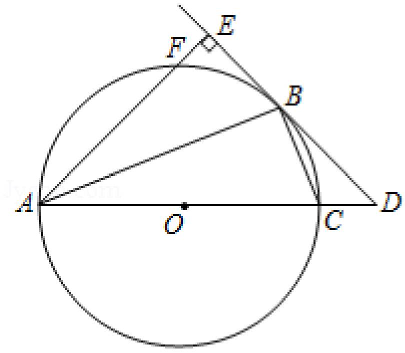
（1）求 $k$ 和 $m$ 的值；

（2）点 $P$ 为直线 $l$ 上的动点，过点 $P$ 作平行于 $x$ 轴的直线，交双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 于点 $Q$. 当点 $Q$ 位于点 $P$ 的右侧时，求点 $P$ 的纵坐标 $n$ 的取值范围.

24.（6 分）如图，$\odot O$ 是 $\Delta ABC$ 的外接圆，圆心 $O$ 在 $AC$ 上．过点 $B$ 作直线交 $AC$ 的延长线于点 $D$，使得 $\angle CBD=\angle CAB$. 过点 $A$ 作 $AE\perp BD$ 于点 $E$，交 $\odot O$ 于点 $F$.

（1）求证：$BD$ 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $AF=4$，$\sin D=\dfrac{2}{3}$，求 $BE$ 的长.




25．（6 分）中国新闻出版研究院组织实施的全国国民阅读调查已持续开展了 18 次，对我国国民阅读总体情况进行了综合分析．2021 年 4 月 23 日，第十八次全国国民阅读调查结果发布．

下面是关于样本及国民图书阅读量的部分统计信息：

$a$．本次调查有效样本容量为 46083，成年人和未成年人样本容量的占比情况如图 1．

$b$．2020 年，成年人的人均纸质图书阅读量约为 4.70 本，人均电子书阅读量约为 3.29 本；2019 年，成年人的人均纸质图书阅读量约为 4.65 本，人均电子书阅读量约为 2.84 本．

$c$.2012 年至 2020 年，未成年人的年人均图书阅读量如图 2．

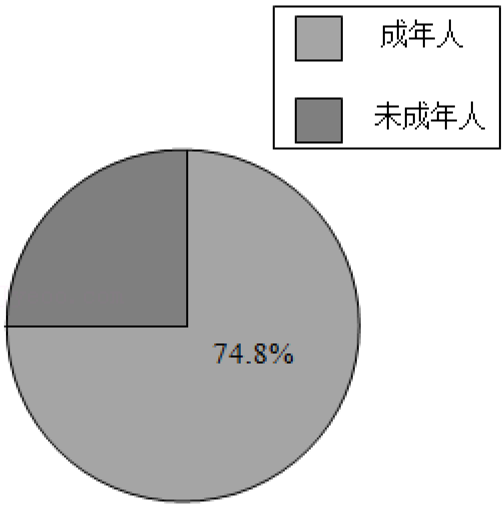



图 1

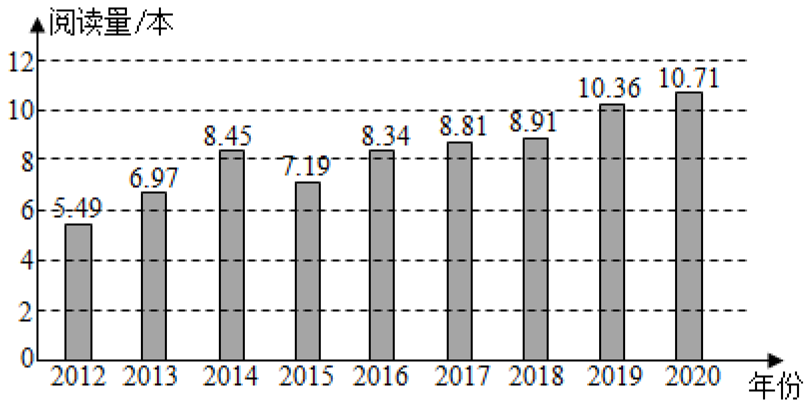



图 2

根据以上信息，回答问题：

（1）第十八次全国国民阅读调查中，未成年人样本容量占有效样本容量的____；

（2）2020 年，成年人的人均图书阅读量约为____本，比 2019 年多____本；

（3）在 2012 年至 2020 年中后一年与前一年相比，____年未成年人的年人均图书阅读量的增长率最大；

（4）2020 年，未成年人的人均图书阅读量比成年人的人均图书阅读量高____%（结果保留整数）．

26．（6 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，抛物线 $y=ax^2-3ax+1$ 与 $y$ 轴交于点 $A$．

（1）求抛物线的对称轴；

（2）点 $B$ 是点 $A$ 关于对称轴的对称点，求点 $B$ 的坐标；

（3）已知点 $P(0,2)$，$Q(a+1,1)$．若线段 $PQ$ 与抛物线与恰有一个公共点，结合函数图象，求 $a$ 的取值范围．

27．（7 分）已知 $\Delta ADE$ 和 $\Delta ABC$ 都是等腰直角三角形，$\angle ADE=\angle BAC=90^\circ$，$P$ 为 $AE$ 的中点，连接 $DP$．

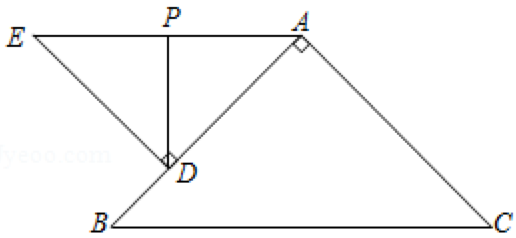


图 1

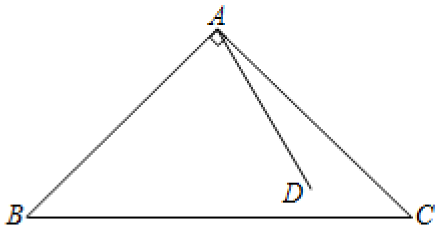


图 2

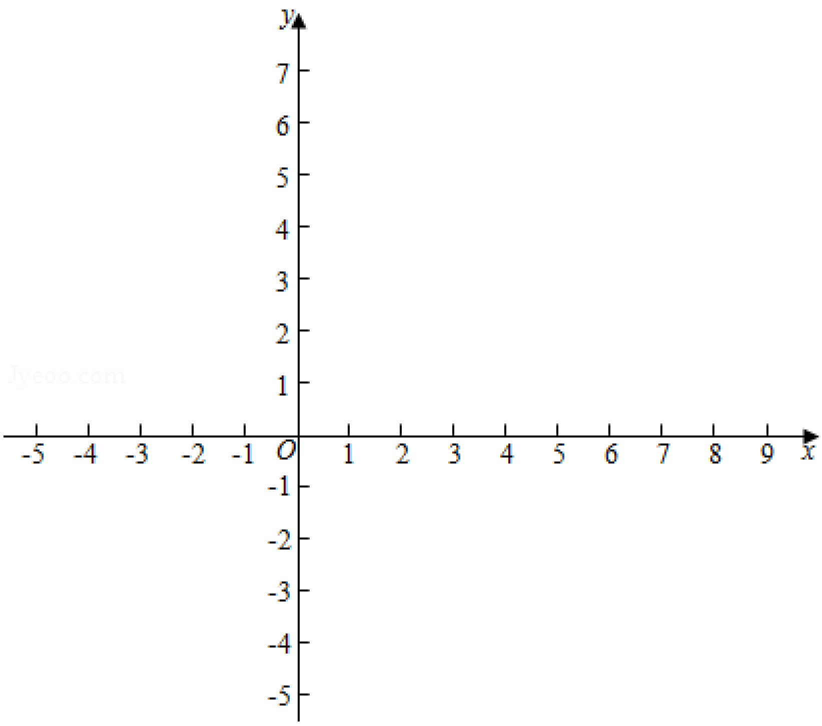
（1）如图 1，点 $A$， $B$， $D$ 在同一条直线上，直接写出 $DP$ 与 $AE$ 的位置关系；

（2）将图 1 中的 $\Delta ADE$ 绕点 $A$ 逆时针旋转，当 $AD$ 落在图 2 所示的位置时，点 $C$， $D$， $P$ 恰好在同一条直线上．

①在图 2 中，按要求补全图形，并证明 $\angle BAE=\angle ACP$；

②连接 $BD$，交 $AE$ 于点 $F$．判断线段 $BF$ 与 $DF$ 的数量关系，并证明．

28．（7 分）对于平面直角坐标系 $xOy$ 中的图形 $W$，给出如下定义：点 $P$ 是图形 $W$ 上任意一点，若存在点 $Q$，使得 $\angle OQP$ 是直角，则称点 $Q$ 是图形 $W$ 的“直角点”．




（1）已知点 $A(6,8)$，在点 $Q_1(0,8)$， $Q_2(-4,2)$， $Q_3(8,4)$ 中，____是点 $A$ 的“直角点”；

（2）已知点 $B(-3,4)$， $C(4,4)$，若点 $Q$ 是线段 $BC$ 的“直角点”，求点 $Q$ 的横坐标 $n$ 的取值范围；

（3）在（2）的条件下，已知点 $D(t,0)$， $E(t+1,0)$，以线段 $DE$ 为边在 $x$ 轴上方作正方形 $DEFG$．若正方形 $DEFG$ 上的所有点均为线段 $BC$ 的“直角点”，直接写出 $t$ 的取值范围．

# 参考答案

**一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.**

1．【分析】估算确定出$\sqrt{2}$的大小，判断即可.

【解答】解：$\because 1<2<4$，

$\therefore 1<\sqrt{2}<2$，

则小于$\sqrt{2}$的正整数是 1.

故选：$C$.

【点评】此题考查了估算无理数的大小，熟练掌握无理数估算的方法是解本题的关键.

2．【分析】根据不等式的性质逐一判断即可，在不等式两边同乘或同除一个正数或式子，不等号的方向不变；在不等式两边同乘或同除一个负数或式子，不等号的方向改变.

【解答】解：$A.2x>2$，不等式的两边同时除以 2 得：$x>1$，即该不等式的解集不合题意，故本选项不合题意；

$B$．$-2x>-2$，不等式的两边同时除以$-2$得：$x<1$，即该不等式的解集不合题意，故本选项不合题意；

$C.2x<-2$，不等式的两边同时除以 2 得：$x<-1$，即该不等式的解集不合题意，故本选项不合题意；

$D$．$-2x<2$，不等式的两边同时除以$-2$得：$x>-1$，即该不等式的解集符合题意，故本选项符合题意；

故选：$D$.

【点评】本题考查了解一元一次不等式，熟记不等式的基本性质是解答本题的关键.

3．【分析】根据两点间的距离公式求出$AO$的长，然后与$\odot O$的半径比较，即可确定点$A$的位置.

【解答】解：$\because$点$A(1,\sqrt{3})$，

$\therefore AO=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，

$\because \odot O$的半径为 2，

$\therefore$点$A$在$\odot O$上，

故选：$A$.

【点评】此题主要考查了点与圆的位置关系，关键要记住若半径为$r$，点到圆心的距离为$d$，则有：当$d>r$时，点在圆外；当$d=r$时，点在圆上；当$d<r$时，点在圆内.

4．【分析】分别根据完全平方公式，同底数幂的乘法法则，去括号法则以及合并同类项法则逐一判断即可.

【解答】解：$A$．$(1+x)^2=1+2x+x^2$，故本选项不合题意；

$B$．$a^2\cdot a^4=a^6$，故本选项不合题意；

$C$．$-(x-y)=-x+y$，故本选项不合题意；

$D$．$a^2+2a^2=3a^2$，故本选项符合题意；

故选：$D$.

【点评】本题考查了完全平方公式，同底数幂的乘法以及合并同类项，熟记相关公式与运算法则是解答本题的关键.

5．【分析】首先求出圆心角，根据扇形的面积$=\dfrac{n\pi r^2}{360}$计算即可.

【解答】解：$\because ABCDE$是正五边形，

$\therefore \angle AOB=\dfrac{360^{\circ}}{5}=72^{\circ}$，

$\therefore S_{扇形OAB}=\dfrac{72\pi\cdot 5^{2}}{360}=5\pi$，

故选：$B$．

【点评】本题考查正多边形与圆，扇形的面积等知识，解题的关键是记住扇形的面积公式．

6．【分析】先联立直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 组成方程组求出点 $B$ 坐标，然后再用待定系数法求出直线 $BC$ 的解析式，再令 $y=0$ 求出 $x$ 即可．

【解答】解：$\because$ 点 $A$， $B$ 是直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 的交点，

$\therefore$ 联立方程得：$\begin{cases}y=x\\ y=\dfrac{4}{x}\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\\ y=-2\end{cases}$，

$\because$ 点 $B$ 在第一象限，

$\therefore B(2,2)$，

$\because$ 点 $C$ 的坐标为 $(6,-2)$，

设直线 $BC$ 的解析式为： $y=kx+b$，

把 $B(2,2)$， $C(6,-2)$ 代入得：

$\begin{cases}2=2k+b\\ -2=6k+b\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-1\\ b=4\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 $BC$ 的解析式为： $y=-x+4$，

$\because$ 直线 $BC$ 交 $x$ 轴于点 $D$，

$\therefore$ 令 $y=0$，即 $-x+4=0$，

解得： $x=4$，

$\therefore$ 点 $D$ 横坐标是 4，

故选：$C$．

【点评】本题考查一次函数与反比例函数的交点，关键是列方程组求交点坐标．

7．【分析】根据折线图进行分析即可作出判断．

【解答】解：由图可得：

$A$、1998 年至 2019 年， $SO_2$ 的年平均浓度值的平均数值都在 $SO_2$ 的 $NO_2$ 的年平均浓度值的平均数以下，由此可得 $SO_2$ 的年平均浓度值的平均数小于 $NO_2$ 的年平均浓度值的平均数，此选项正确，不合题意；

$B$、1998 年至 2019 年， $SO_2$ 的年平均浓度值的平均数值都在 $SO_2$ 的 $NO_2$ 的年平均浓度值的平均数以下，由此可得

$SO_2$ 的年平均浓度值的中位数小于 $NO_2$ 的年平均浓度值的中位数，此选项正确，不合题意；

$C$ 、根据图中两折线中点的离散程度可得 $SO_2$ 的年平均浓度值的方差大于 $NO_2$ 的年平均浓度值的方差，此选项错误，符合题意；

$D$ 、1998 年至 2019 年，根据图中两折线的起止点可得 $SO_2$ 的年平均浓度值比 $NO_2$ 的年平均浓度值下降得更快，此选项正确，不合题意．

故选：$C$ ．

【点评】本题主要考查了折线统计图，方差，中位数，解题时注意：从统计图可以很容易看出数据的大小，折线图能够清楚地表示出数量的增减变化情况．从统计图表中获取信息是解题的关键．

8．【分析】依据函数的性质逐个分析求解，将甲乙丙丁四人的结论转化为等式，然后用假设法逐一排除正确的结论，最后得出错误的结论．

【解答】解：由甲的结论可知：

对称轴是直线 $x=1$ 时，即 $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{b}{2}=1$ 时 $b=2$ ；

由乙的结论可知：

函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象与 $y$ 轴的交点为 $(0,-3)$ 时， $c=-3$ ；

若甲、乙正确，

则 $y=-x^2+2x-3$ ，

当 $x=1$ 时， $y$ 有最大值 $=-1+2-3=-2$ ，

当 $x=3$ 时， $y=-9+6-3=-6$ ，

所以甲、乙、丁中有一个错误，

若丙正确，可知：

函数的最大值为 4 时， $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=4$ ，即 $-4c-b^2=-16$ ；

若甲正确，则 $b=2$ ，

此时 $-4c-b^2=-16$ ，得 $c=3$ ，

则 $y=-x^2+2x+3$ ，

当 $x=3$ 时， $y=-9+6+3=0$ ；

所以丁正确，

所以甲、丙、丁正确，乙错误．

故选： $B$ ．

【点评】本题考查一元二次函数的图象及性质；能够熟练掌握二次函数的性质，假设分析结论是解题的关键．

**二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）**

9．【分析】根据分式有意义的条件可知 $x-1\neq 0$ ，再解不等式即可．

【解答】解：由题意得： $x-1\neq 0$ ，

解得： $x\neq 1$ ，

故答案为： $x\neq 1$ ．

【点评】此题主要考查了分式有意义的条件，关键是掌握分式有意义的条件是分母不等于零．

10．【分析】直接提取公因式$m$，再利用平方差公式分解因式得出答案．

【解答】解：原式$=m(x^2-9)$

$=m(x+3)(x-3)$．

故答案为：$m(x+3)(x-3)$．

【点评】此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式，正确运用乘法公式分解因式是解题关键．

11．【分析】根据一次函数的性质：对于一次函数$y=kx+b$，当$k<0$时，$y$随$x$的增大而减小解答即可．

【解答】解：当$k=-1$时，一次函数为$y=-x+1$，$y$随着$x$的增大而减小，

$\therefore$命题“一次函数$y=kx+1(k\neq 0)$中，$y$随着$x$的增大而增大”．是错误的，

故答案为：$-1$（答案不唯一）．

【点评】本题考查的是命题和定理、一次函数的性质，掌握对于一次函数$y=kx+b$，当$k<0$时，$y$随$x$的增大而减小是解题的关键．

12．【分析】含“红”字的主题卡片有2张，而总共有62张卡片，根据概率公式即可求解．

【解答】解：含“红”字的主题卡片有“北大红楼”和“南湖红船”共2张，

所以抽到含“红”字的主题卡片的概率是$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$．

故答案为：$\dfrac{1}{3}$．

【点评】本题主要考查了概率公式：概率$=$所求情况数与总情况数之比．

13．【分析】根据全等三角形的判定方法可以由$SSS$证明$\Delta ABC\cong\Delta EDF$．

【解答】解：添加$BC=DF$．

$\because AD=BE$，

$\therefore AD+DB=BE+BD$，

$\therefore AB=ED$，

在$\Delta ABC$和$\Delta EDF$中，

$$\begin{cases}AB=ED\\AC=EF\\BC=DF\end{cases}，$$

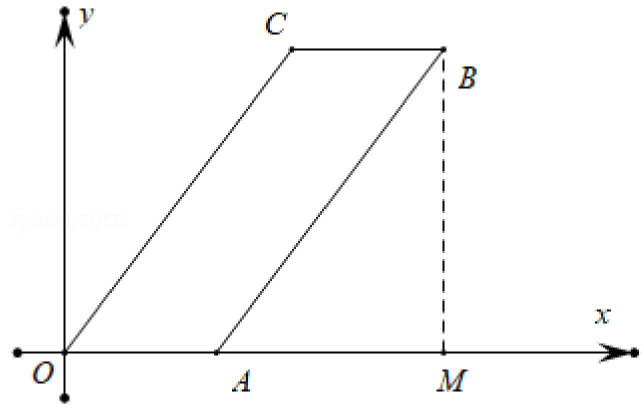
$\therefore\Delta ABC\cong\Delta EDF(SSS)$，

故答案为：$BC=DF$（答案不唯一）．

【点评】本题主要考查了全等三角形的判定，解题的关键是掌握$SSS$，$SAS$证明两个三角形全等，此题难度不大．

14．【分析】利用点的坐标表示出平行四边形的边，进而求出周长．

【解答】解：过点$B$作$BM\perp x$轴交于点$M$，如图，




$\because$ 点 $A$， $B$ 的坐标为 $(2,0)$， $(5,4)$

$\therefore OA=2$， $AM=5-2=3$， $BM=4$，

$\therefore AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because$ 四边形 $OABC$ 是平行四边形，

$\therefore OA=BC=2$， $CO=AB=5$， \

$\therefore OABC$ 的周长等于 $2\times2+5\times2=14$，

故答案为：14．

【点评】本题考查了根据坐标求平行四边形的边长，利用平行四边形对边相等，即可求周长．

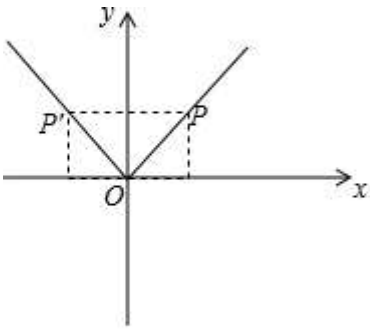
15．【分析】由点 $P$ 到 $x$ 轴的距离等于 3 可得出点 $P$ 的纵坐标 $y=1$，再利用一次函数图象上点的坐标特征即可求出点 $P$ 的坐标．

【解答】解：$\because$ 点 $P$ 在函数 $y=\begin{cases}x, x\geqslant0\\-x, x<0\end{cases}$ 的图象上，且到 $x$ 轴的距离等于 1，

$\therefore$ 点 $P$ 的纵坐标 $y=1$．

$\therefore$ 点 $P$ 的坐标为 $(-1,1)$ 或 $(1,1)$．

故答案为：$(-1,1)$ 或 $(1,1)$．




【点评】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，牢记直线上任意一点的坐标都满足函数关系式是解题的关键．

16．【分析】①利用垂径定理可以证明 $BD=DC$．

②证明 $BC\perp OD$，可得结论．

③利用圆周角定理可得结论．

④利用等腰三角形的三线合一的性质证明即可．

【解答】解：①由 $\because OD\perp BC$，

$\therefore BD=DC$．

②如图 2 中，连接 $BC$，

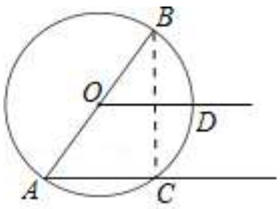



图2

$\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ACB = 90^{\circ}$，

$\therefore AC \perp BC$，

$\because OD // AC$，

$\therefore OD \perp BC$，

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$.

③$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \angle BAD = \angle DAC$，

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$.

④如图 4 中，连接 $AD$.

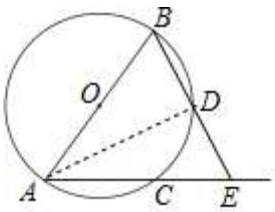



图4

$\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ADB = 90^{\circ}$，

$\therefore AD \perp BE$，

$\because AB = AE$，

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$.

故答案为：①②③④.

【点评】本题考查作图 – 复杂作图，垂径定理，圆周角定理，等腰三角形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握垂径定理，圆周角定理解决问题，属于中考常考题型.

**三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.**

17.【分析】根据零指数幂，二次根式的性质，负整数指数幂，特殊角的三角函数值计算即可.

【解答】解：原式 $=1+3\sqrt{3}+\frac{1}{2}-\sqrt{3}$

$=\frac{3}{2}+2\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了二次根式的性质，负整数指数幂，零指数幂，特殊角的三角函数值，考核学生的计算能力，解题时注意 $a^{-p}=\dfrac{1}{a^{p}}(a\neq 0)$ .

18．【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 $a$ 的值代入计算即可.

【解答】解：原式 $=\dfrac{a^{2}+1}{a-1}-(a-1)$

$=\dfrac{a^{2}+1}{a-1}-\dfrac{(a-1)^{2}}{a-1}$

$=\dfrac{a^{2}+1}{a-1}-\dfrac{a^{2}-2a+1}{a-1}$

$=\dfrac{2a}{a-1}$ ,

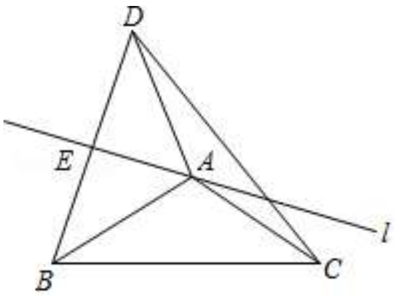
当 $a-2=0$ ，即 $a=2$ 时，

原式 $=\dfrac{2\times 2}{2-1}=4$ .

【点评】本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

19．【分析】设直线 $l$ 交 $BD$ 于点 $E$ ，根据轴对称的性质得到 $\angle AEB=\angle AED=90^{\circ}$ ， $BE=DE$ ，从而根据 $SAS$ 可判定 $\Delta ABE\cong\Delta ADE$ ，由全等三角形的性质得到 $AB=AD$ ，从而得到 $AD=AC$ ，根据等腰对等角即可求解.

【解答】证明：设直线 $l$ 交 $BD$ 于点 $E$ ，




$\because$ 点 $B$ 与点 $D$ 关于直线 $l$ 对称，

$\therefore \angle AEB=\angle AED=90^{\circ}$ ， $BE=DE$ ，

在 $\Delta ABE$ 和 $\Delta ADE$ 中，

$\begin{cases} BE=DE \\ \angle AEB=\angle ADE \\ AE=AE \end{cases}$ ，

$\therefore \Delta ABE\cong\Delta ADE(SAS)$ ，

$\therefore AB=AD$ ，

$\because AB=AC$ ，

$\therefore AD=AC$ ，

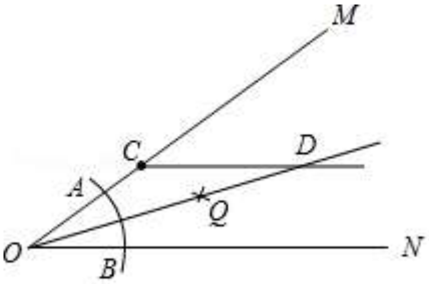
$\therefore \angle ACD=\angle ADC$ .

【点评】此题考查了轴对称的性质和等腰三角形的性质，熟记轴对称的性质和等腰三角形的性质是解题的关键.

20．【分析】（1）根据要求作出图形即可.

（2）根据等腰三角形的性质以及角平分线的定义证明 $\angle CDO=\angle DON$ 即可.

【解答】解：（1）如图，射线$CD$即为所求作．




（2）$\because OD$平分$\angle MON$，

$\therefore \angle MOD=\angle NOD$．

$\because OC=CD$，

$\therefore \angle MOD=\angle CDO$，

$\therefore \angle NOD=\angle CDO$．

$\therefore CD//ON$（内错角相等两直线平行）．

故答案为：$\angle NOD$，$\angle CDO$，内错角相等两直线平行．

【点评】本题考查作图－复杂作图，平行线的判定和性质，等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是理解题意，正确作出图形，属于中考常考题型．

21．【分析】（1）根据方程的系数，结合根的判别式可得出$\triangle=(m-1)^2$，利用偶次方的非负性可得出$(m-1)^2\geqslant 0$，即$\triangle\geqslant 0$，再利用“当$\triangle\geqslant 0$时，方程有实数根”即可证出结论；

（2）利用因式分解法解一元二次方程可得出原方程的解且$x_1=\dfrac{1}{m}$，$x_2=1$，结合该方程的一个实数根大于1，可得出$\dfrac{1}{m}>1$，解之可得出$0<m<1$，任取其内的一值即可得出结论．

【解答】（1）证明：$\because a=m$，$b=-(m+1)$，$c=1$，

$\therefore \triangle=b^2-4ac=[-(m+1)]^2-4\times m\times 1=m^2+2m+1-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2$．

$\because (m-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore \triangle\geqslant 0$，

$\therefore$此方程总有实数根；

（2）解：$\because mx^2-(m+1)x+1=0$，

$\therefore (mx-1)(x-1)=0$，

$\therefore x_1=\dfrac{1}{m}$，$x_2=1$．

又$\because$该方程的一个实数根大于1，

$\therefore \dfrac{1}{m}>1$，

$\therefore 0<m<1$，

$\therefore$当$m=\dfrac{1}{2}$时，该方程的一个实数根大于1，此时方程的解为$x_1=\dfrac{1}{m}=2$，$x_2=1$．

【点评】本题考查了根的判别式、偶次方的非负性以及因式分解法解一元二次方程，解题的关键是：（1）牢记“当

△⩾0 时，方程有实数根”；（2）利用因式分解法求出方程的解.

22.【分析】（1）根据菱形性质，可得 $\Delta ABF \backsim \Delta EDF$ ，利用对应边成比例即可求解.

（2）连接 $AC$ ，利用已知，可得 $\Delta ADE$ 是直角三角形，即可求出 $\angle ADC = 60^\circ$ ，利用面积法即可求出 $BD$ 的长度.

【解答】解：（1）在菱形 $ABCD$ 中， $AB//CD$ .

$\therefore \angle BAF = \angle DEF$ ， $\angle ABF = \angle EDF$ .

$\therefore \Delta ABF \backsim \Delta EDF$ ，

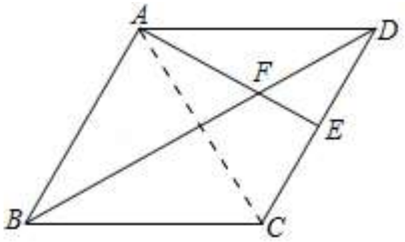
$\therefore \dfrac{BF}{DF} = \dfrac{AB}{DE}$ .

$\because$ 点 $E$ 是 $CD$ 的中点.

$\therefore DE = \dfrac{1}{2} AB$ .

$\therefore BF : DF = 2 : 1$ .

（2）连接 $AC$ .




$\because AB = 2$ ，

$\therefore AD = 2$ ， $DE = \dfrac{1}{2} AB = 1$ .

$\because AE = \sqrt{3}$ ，

$\therefore AE^2 + DE^2 = AD^2$ .

$\therefore \Delta ADE$ 是直角三角形，

$\therefore AE \perp DC$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ .

$\therefore \Delta ADC$ 是等边三角形.

$\therefore AC = 2$ .

利用菱形的面积等于对角线乘积的一半，也可底乘高，可得： $\dfrac{1}{2} AC \cdot BD = DC \cdot AE$ .

$\therefore BD = 2\sqrt{3}$ .

【点评】本题考查了菱形的性质，直角三角形判定，等边三角形判定，三角形相似判定和性质等知识，关键在于利用菱形的面积可以对角线乘积的一半，也可底乘高.

23.【分析】（1）利用待定系数法可求 $k$ ，然后把 $B(1,m)$ 代入即可求得 $m$ ；

（2）由图象可知， $P$ 点在 $x$ 轴的上方、 $B$ 点的下方或 $P$ 点在 $A$ 点的下方符合题意.

【解答】解：（1） $\because$ 双曲线 $y = \dfrac{k}{x}(k \neq 0)$ 过点 $A(-3,-1)$ ，

$\therefore k = -3 \times (-1) = 3$ ，

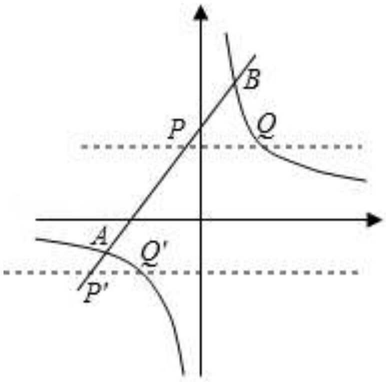
$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y=\dfrac{3}{x}$，

$\because B(1,m)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{3}{x}$ 的图象上，

$\therefore m=\dfrac{3}{1}=3$；

（2）$\because$ 直线 $l$ 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的两个交点分别为 $A(-3,-1)$，$B(1,3)$，且点 $Q$ 位于点 $P$ 的右侧，

$\therefore 0<n<3$ 或 $n<-1$.




【点评】本题是反比例函数与一次函数的交点问题，考查了待定系数法求反比例函数解析式，数形结合是解决本题的关键.

24.【分析】（1）借助 $AC$ 为直径，则 $\angle ABC=90^\circ$，再证 $\angle CBD=\angle OBA$ 即可解决.

（2）连接 $CF$，则 $CF//DE$，可得 $\angle D=\angle ACF$，在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ACF}$ 中求出 $AC=6$，通过勾股定理求出 $CF=2\sqrt{5}$，再由四边形 $EFHB$ 是矩形，只要求出 $FH$ 的长度即可.

【解答】证明：（1）连接 $OB$，

$\because$ 圆心 $O$ 在 $AC$ 上.

$\therefore AC$ 是直径，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

$\because OA=OB$，

$\therefore \angle CAB=\angle OBA$，

$\because \angle CBD=\angle CAB$，

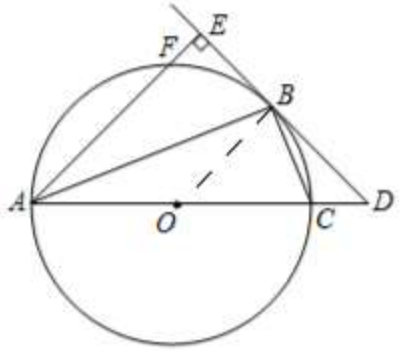
$\therefore \angle CBD=\angle OBA$，

$\therefore \angle OBC+\angle CBD=\angle OBC+\angle OBA=90^\circ$，

$\therefore OB\perp BD$，

$\because OB$ 为半径，

$\therefore BD$ 是 $\odot O$ 的切线；




（2）连接$CF$，

$\because AC$是直径，

$\therefore \angle AFC=90^\circ$，

$\because AE\perp BD$，

$\therefore \angle AED=90^\circ$，

$\therefore \angle AFC=\angle AED$，

$\therefore CF//DE$，

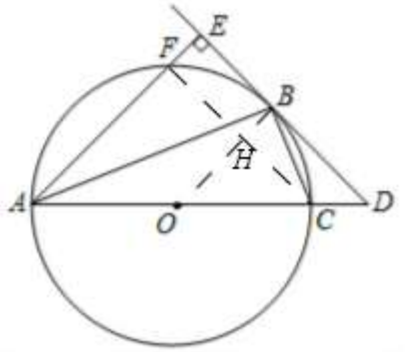
$\therefore \angle D=\angle ACF$，

在RtΔACF中，$\because AF=4$，

$\therefore \sin\angle ACF=\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore AC=6$，

由勾股定理可得：$CF=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$，




$\because \angle AEB=\angle EFC=\angle OBE=90^\circ$，

$\therefore$四边形$EFHB$是矩形，

$\therefore BE=FH$，

$\because OH//AF$，$OA=OC$，

$\therefore H$为$CF$的中点，

$\therefore FH=BE=\dfrac{1}{2}CF=\sqrt{5}$．

【点评】本题主要考查了圆的切线的证明，以及勾股定理和三角函数等知识，作出辅助线是解决问题的关键．

25．【分析】（1）根据扇形统计图中的数据，可以计算出未成年人样本容量占有效样本容量的百分数；

（2）根据“2020年，成年人的人均纸质图书阅读量约为4.70本，人均电子书阅读量约为3.29本”可以计算出2020

年，成年人的人均图书阅读量，根据“2019年，成年人的人均纸质图书阅读量约为4.65本，人均电子书阅读量约为2.84本”可以计算出2019年，成年人的人均图书阅读量，即可求解；

（3）根据统计图中的数据，可以计算出2012年至2020年中后一年与前一年相比，即可求解；

（4）根据2020年，未成年人的人均图书阅读量和成年人的人均图书阅读量即可求解.

【解答】（1）$1-74.8\%=25.2\%$，

故答案为：$25.2\%$；

（2）2020年，成年人的人均图书阅读量：$4.70+3.29=7.99$（本），

2019年，成年人的人均图书阅读量：$4.65+2.84=7.49$（本），

$7.99-7.49=0.5$（本），

故答案为：7.99，0.5；

（3）2012年至2013年的增长率为：$(6.97-5.49)\div 5.49\approx 27\%$，

2013年至2014年的增长率为：$(8.45-6.97)\div 6.97\approx 21\%$，

2014年至2015年的增长率为：$(7.19-8.45)\div 8.45\approx -15\%$，

2015年至2016年的增长率为：$(8.34-7.19)\div 7.19\approx 16\%$，

2016年至2017年的增长率为：$(8.81-8.34)\div 8.34\approx 6\%$，

2017年至2018年的增长率为：$(8.91-8.81)\div 8.81\approx 1\%$，

2018年至2019年的增长率为：$(10.36-8.91)\div 8.91\approx 16\%$，

2019年至2020年的增长率为：$(10.71-10.36)\div 10.36\approx 3\%$，

$\therefore$ 2012年至2013年的增长率最大，

故答案为：2012年至2013；

（4）$(10.71-7.99)\div 7.99\approx 34\%$，

故答案为：34.

【点评】本题考查条形统计图、扇形统计图，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

26．【分析】（1）利用配方法将抛物线 $y=ax^2-3ax+1$ 化成顶点式，抛物线对称轴可得；

（2）先求出点 $A$ 坐标，利用抛物线的对称性即可求点 $B$ 的坐标；

（3）分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情形讨论解答，首先依据题意画出图形，观察图象，利用点 $Q$ 的位置确定 $Q$ 的横坐标 $a+1$ 的大小，$a$ 的取值范围可以求得.

【解答】解：（1）$\because y=ax^2-3ax+1=a(x^2-3x)+1=a(x-\frac{3}{2})^2+\frac{4-9a}{4}$，

$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2-3ax+1$ 的对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$.

（2）令 $x=0$，则 $y=1$.

$\therefore A(0,1)$.

$\because$ 点 $B$ 是点 $A$ 关于对称轴的对称点，

$\therefore A$ 与 $B$ 的纵坐标相同.

$\because$ 对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$，

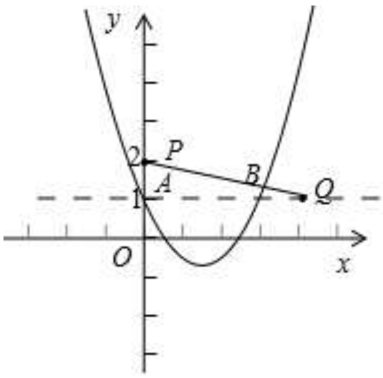
$\therefore$ 点 $A$ 与 $B$ 到直线 $x=\frac{3}{2}$ 的距离均为 $\frac{3}{2}$，

$\therefore$ 点 $B$ 的横坐标为 $\frac{3}{2}\times 2=3$．

$\therefore B(3,1)$．

（3）由题意：$a\neq 0$．

①当 $a>0$ 时，如图，




$\because Q(a+1,1)$，$A(0,1)$，$B(3,1)$，

$\therefore$ 点 $Q$，$A$，$B$ 在直线 $y=1$ 上．

$\because P(0,2)$，

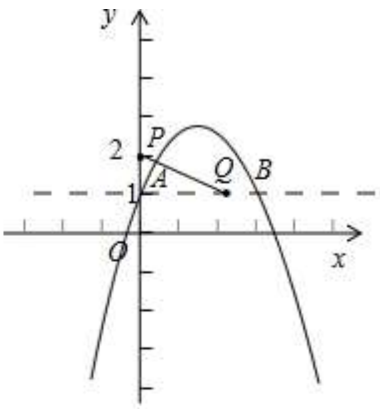
$\therefore$ 从图上可以看到：当点 $Q$ 在点 $A$ 的左侧（包括点 $A$) 或在点 $B$ 的右侧（包括点 $B$) 时，线段 $PQ$ 与抛物线只有一个公共点．

$\because A(0,1)$，$B(3,1)$，

$\therefore a+1\leqslant 0$（不合题意，舍去）或 $a+1\geqslant 3$．

$\therefore a\geqslant 2$．

②当 $a<0$ 时，如图，




由①知：点 $Q$，$A$，$B$ 在直线 $y=1$ 上．

$\because P(0,2)$，

$\therefore$ 从图上可以看到：当 $Q$ 在点 $A$ 与点 $B$ 之间（包括点 $A$，不包括点 $B$) 时，线段 $PQ$ 与抛物线只有一个公共点．

$\because A(0,1)$，$B(3,1)$，

$\therefore 0\leqslant a+1<3$ .

$\therefore -1\leqslant a<2$ .

又$\because a<0$，

$\therefore -1\leqslant a<0$ .

综上，若线段 $PQ$ 与抛物线与恰有一个公共点， $a$ 的取值范围为： $-1\leqslant a<0$ 或 $a\geqslant 2$ .

【点评】本题是二次函数的综合题，主要考查了二次函数的对称轴，开口方向，图象上点的坐标的特征．利用配方法求二次函数的对称轴和顶点坐标是解决此类问题的重要方法．

27．【分析】（1）根据 $\Delta ADE$ 是等腰直角三角形，可得 $AD=ED$，由 $P$ 为 $AE$ 的中点，依据等腰三角形性质“三线合一”，即可得到 $DP\perp AE$；

（2）①按照题意补全图形，根据等腰三角形性质可得 $\angle BAE+\angle CAD=\angle BAC-\angle DAE=45°$，即可证明结论；

②延长 $CP$ 至 $G$，使 $PG=DP$，连接 $AG$， $BG$，利用 $SAS$ 证明 $\Delta APG\cong\Delta APD$， $\Delta BAG\cong\Delta CAD$，可得 $\angle BGC=\angle APG$，进而可得 $PF//BG$，根据平行线分线段成比例定理即可证明结论．

【解答】解：（1）$\because \Delta ADE$ 是等腰直角三角形， $\angle ADE=90°$，

$\therefore AD=ED$，

$\because P$ 为 $AE$ 的中点，

$\therefore DP\perp AE$；

（2）①补全图形如图 2 所示；

证明：$\because \Delta ADE$ 和 $\Delta ABC$ 都是等腰直角三角形， $\angle ADE=\angle BAC=90°$，

$\therefore \angle DAE=45°$， $AD=ED$，

$\because P$ 为 $AE$ 的中点，

$\therefore \angle ADP=\angle EDP=45°$，

$\therefore \angle BAE+\angle CAD=\angle BAC-\angle DAE=45°$，

$\because \angle CAD+\angle ACP=\angle ADP=45°$，

$\therefore \angle BAE=\angle ACP$；

② $BF=DF$ .

证明：如图 3，延长 $CP$ 至 $G$，使 $PG=DP$ 连接 $AG$， $BG$，

$\because \Delta ADE$ 是等腰直角三角形， $\angle ADE=90°$，

$\therefore AD=DE$， $\angle DAE=45°$，

$\because P$ 为 $AE$ 的中点，

$\therefore \angle APD=\angle APG=90°$， $AP=DP=PG$， $\angle ADP=45°$，

$\therefore \Delta APG\cong\Delta APD(SAS)$，

$\therefore AG=AD$， $\angle PAG=\angle DAE=\angle AGP=45°$，

$\therefore \angle GAD=\angle BAC=90°$，

$\therefore \angle BAG+\angle BAD=\angle CAD+\angle BAD=90°$，

$\therefore \angle BAG=\angle CAD$，

$\because AG=AD$， $AB=AC$，

$\therefore \Delta BAG \cong \Delta CAD(SAS)$，

$\therefore \angle AGB = \angle ADC = 180° - \angle ADP = 135°$，

$\therefore \angle BGC = \angle AGB - \angle AGP = 90°$，

$\therefore \angle BGC = \angle APG$，

$\therefore PF // BG$，

$\therefore \dfrac{DF}{BF} = \dfrac{DP}{PG} = 1$，

$\therefore BF = DF$．

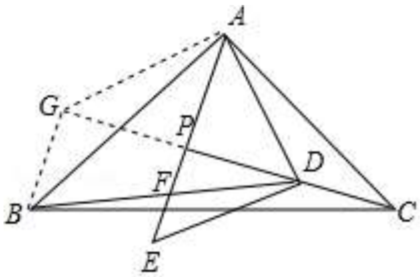



图3

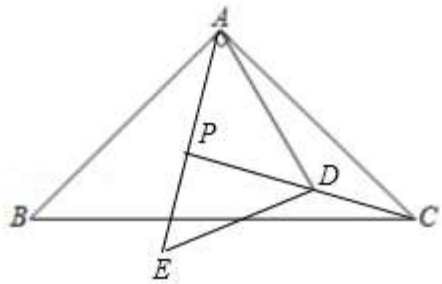



图2

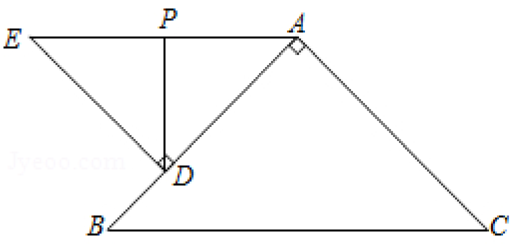



图 1

【点评】本题考查了等腰直角三角形性质和判定，全等三角形判定和性质，三角形内角和定理，旋转变换的性质，平行线分线段成比例定理等，解题关键是添加辅助线构造全等三角形．

28．【分析】（1）根据两点间距离公式和勾股定理的逆定理证明 $OQ_1^2 + AQ_1^2 = OA^2$，$OQ_3^2 + AQ_3^2 = OA^2$，可得 $\angle OQ_1A = 90°$，$\angle OQ_3A = 90°$，再根据“直角点”的定义可得结论；

（2）连接 $OB$，$OC$，取 $BO$ 的中点 $M$，$OC$ 的中点 $N$，分别以 $M$，$N$ 为圆心，$OB$，$OC$ 为直径作圆，由图可知，$Q_1$，$Q_2$ 为两个临界点，即可求得答案；

（3）如图 2，如图 2，分别以 $OB$，$OC$ 为直径作圆，确定正方形 $DEFG$ 的极限位置如图 2 中的①②③④，当 $t+1<0$，即 $t<-1$ 时，正方形 $DEFG$ 位于正方形①位置时，可得 $t=-3$，正方形 $DEFG$ 位于正方形②位置时，利用两点间距离公式和勾股定理可得 $t=1-\sqrt{7}$，即 $-3 \leqslant t \leqslant 1-\sqrt{7}$．同理可得：$\dfrac{\sqrt{21}-3}{2} \leqslant t \leqslant 3$，即可求得答案．

【解答】解：（1）$\because$ 点 $Q_1(0,8)$，$Q_2(-4,2)$，$Q_3(8,4)$，点 $A(6,8)$，

$\therefore OQ_1=\sqrt{0^2+8^2}=8$，

$OQ_2=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}$，

$OQ_3=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$，

$OA=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

$AQ_1=\sqrt{6^2+(8-8)^2}=6$，

$AQ_2=\sqrt{(6+4)^2+(8-2)^2}=\sqrt{100+36}=\sqrt{136}$，

$AQ_3=\sqrt{(8-6)^2+(8-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$，

$\therefore OQ_1^2+AQ_1^2=OA^2$，$OQ_3^2+AQ_3^2=OA^2$，$OQ_2^2+AQ_2^2\neq OA^2$，

$\therefore \angle OQ_1A=90°$，$\angle OQ_3A=90°$，

$\therefore Q_1$和$Q_3$是点$A$的直角点；

故答案为：$Q_1$和$Q_3$；

（2）如图1所示，连接$OB$，$OC$，取$BO$的中点$M$，$OC$的中点$N$，

分别以$M$，$N$为圆心，$OB$，$OC$为直径作圆，

由图可知，$Q_1$，$Q_2$为两个临界点，

则$x_{Q_2}=x_M-Q_2M=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=-4$，

同理，$x_{Q_1}=2+2\sqrt{2}$，

$\therefore -4\leqslant n\leqslant 2+2\sqrt{2}$；

（3）如图2，分别以$OB$，$OC$为直径作圆，

当$t+1<0$，即$t<-1$时，

正方形$DEFG$位于正方形①位置时，可得$t=-3$，

正方形$DEFG$位于正方形②位置时，

$\because F_2(t+1,1)$，$OF_2^2+CF_2^2=OC^2$，

$\therefore (t+1)^2+1^2+(t-3)^2+(1-4)^2=4^2+4^2$，

解得：$t=1-\sqrt{7}$或$t=1+\sqrt{7}$（舍去），

$\therefore -3\leqslant t\leqslant 1-\sqrt{7}$．

当$t>0$时，

正方形$DEFG$位于正方形③位置时，

$\because G_3(t,1)$，$OG_3^2+BG_3^2=OB^2$，

$\therefore t^2+1^2+(t+3)^2+(1-4)^2=3^2+4^2$，

解得：$t=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$或$t=\frac{-\sqrt{21}-3}{2}$（舍去），

正方形$DEFG$位于正方形④位置时，

$\because E_4(t+1,0)$，

$\therefore t+1=4$，

解得：$t=3$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{21}-3}{2}\leqslant t\leqslant 3$，

综上所述，$-3\leqslant t\leqslant 1-\sqrt{7}$ 或 $\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}\leqslant t\leqslant 3$．

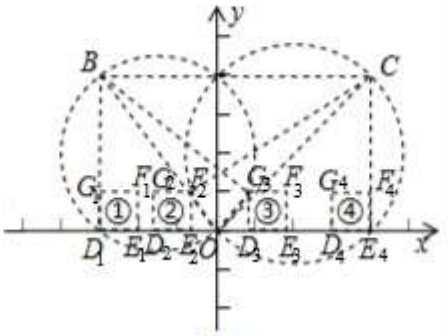


图2

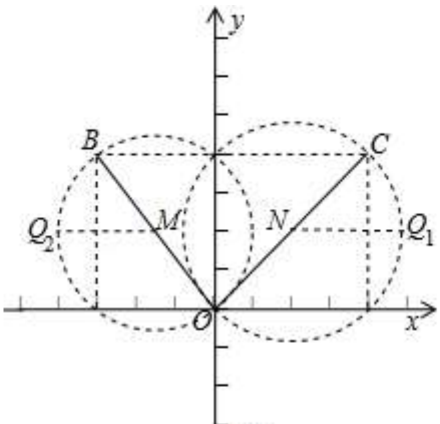


图1

【点评】本题考查了勾股定理及逆定理，圆的性质，不等式组的应用等，解题关键是理解并应用新定义“直角点”。