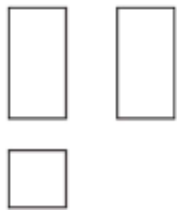


2021 北京大兴初三一模

数 学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1. 如图，是某几何体的三视图，该几何体是（ ）

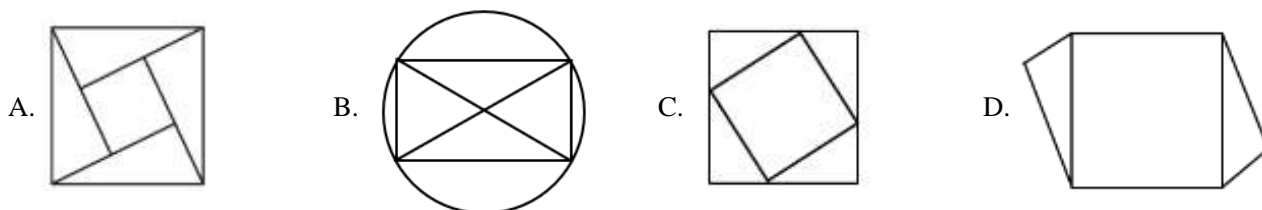


- A. 圆柱 B. 正方体 C. 三棱柱 D. 长方体

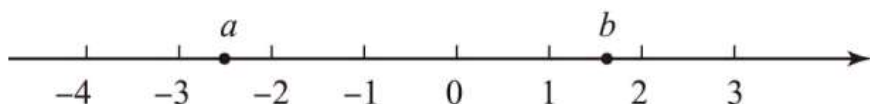
2. 2021 年 2 月 25 日，全国脱贫攻坚总结表彰大会在北京人民大会堂隆重举行。经过全党全国各族人民共同努力，我国脱贫攻坚战取得了全面胜利，现行标准下 98990000 农村贫困人口全部脱贫，832 个贫困县全部摘帽，12.8 万个贫困村全部出列，完成了消除绝对贫困的艰巨任务，创造了又一个彪炳史册的人间奇迹！98990000 用科学记数法表示应为（ ）

- A. 0.9899×10^8 B. 9.899×10^7 C. 98.99×10^6 D. 9899×10^4

3. 勾股定理是几何学中一颗光彩夺目的明珠，现发现约有 400 种证明方法。下面四个图形是证明勾股定理的图形，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



4. 实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则下列不等关系正确的是（ ）

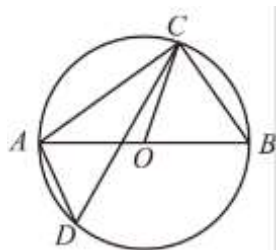


- A. $a > b$ B. $ab > 0$ C. $|a| > |b|$ D. $-a < b$

5. 若正多边形的一个内角是 120° ，则这个正多边形的边数为（ ）

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

6. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 是 $\odot O$ 上两点，若 $\angle D = 55^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数是（ ）



- A. 35° B. 55° C. 60° D. 70°

7. 某校进行垃圾分类的环保知识竞赛，进入决赛的共有 15 名学生，他们的决赛成绩如下表所示：

决赛成绩/分	100	95	90	85
人数/名	2	8	2	3

则这 15 名学生决赛成绩的中位数和平均数分别是 ()

- A. 95,97 B. 95,93 C. 95,86 D. 90,95

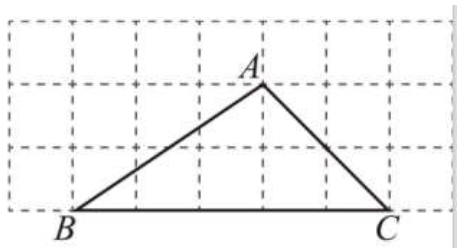
8. 已知二次函数 $y = x^2 + mx + n$ ，当 $x = 0$ 和 $x = 2$ 时对应的函数值相等，则下列说法中不正确的是 ()

- A. 抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 的开口向上 B. 抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 与 y 轴有交点
C. 当 $n > 1$ 时，抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 与 x 轴有交点 D. 若 $P(-1, y_1), Q(3, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 上两点，
则 $y_1 = y_2$

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

10. 如图所示 网格是正方形网格， A, B, C 是网格线的交点，则 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的大小关系为： $\angle ABC$ _____ $\angle ACB$ （填“>”，“=”或“<”）.

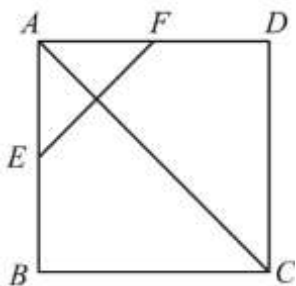


11. 化简： $\frac{3x}{x+y} + \frac{y-2x}{x+y} =$ _____.

12. 分解因式 $ma^2 - 2mab + mb^2 =$ _____.

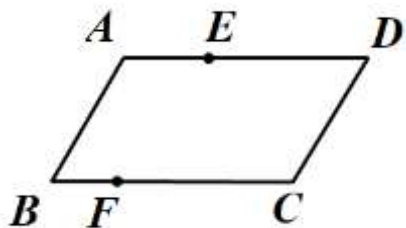
13. 某区域进行“环境改造，植树绿化”活动. 若该区域种植树苗 2000 株，树苗的成活率为 95%，则成活的树苗大约有_____株.

14. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别是 AB, AD 的中点，若 $EF = 2$ ，则 AC 的长是_____.



15. 小华到商店为班级购买跳绳和毽子两种体育用品，跳绳每个 4 元，毽子每个 5 元，两种体育用品共需购买 22 个，是否存在用 90 元钱完成这项购买任务的方案？_____（填“是”或“否”）.

16. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AD > AB$, E, F 分别为边 AD, BC 上的点（ E, F 不与端点重合）. 对于任意 $\square ABCD$ ，下面四个结论中：



- ①存在无数个四边形 $ABFE$ ，使得四边形 $ABFE$ 是平行四边形；
 ②至少存在一个四边形 $ABFE$ ，使得四边形 $ABFE$ 菱形；
 ③至少存 一个四边形 $ABFE$ ，使得四边形 $ABFE$ 矩形；
 ④存在无数个四边形 $ABFE$ ，使得四边形 $ABFE$ 的面积是 $\square ABCD$ 面积的一半.

所有正确结论 序号是_____.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算： $2\sin 45^\circ + |-\sqrt{2}| - \sqrt{8} + (\pi - 3)^0$.

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 > 0 \\ 2(x-1) + 3 \geq 3x \end{cases}$$

19. 已知抛物线 $y = x^2 - 4x + c$ 经过点 $(-1, 8)$.

- (1) 求抛物线的解析式；
 (2) 求抛物线与 x 轴交点的坐标.

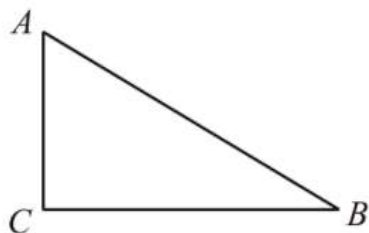
20. 已知 $x^2 - 3x - 1 = 0$ ，求代数式 $(x+2)(x-2) - x(3x-6)$ 的值.

21. 已知：如图 $\text{Rt } \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$.

求作：点 P ，使得点 P 在 AC 上，且点 P 到 AB 的距离等于 PC .

作法：

- ①以点 B 为圆心，以任意长为半径作弧，分别交射线 BA, BC 于点 D, E ；
 ②分别以点 D, E 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle ABC$ 内部交于点 F ；
 ③作射线 BF 交 AC 于点 P . 则点 P 即为所求.



- (1) 使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；
 (2) 完成下面证明.

证明：连接 DF, FE .

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle BEF$ 中

$$\begin{cases} DB = EB, \\ DF = EF, \\ BF = BF. \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle BEF$.

$\therefore \angle ABF = \angle CBF$ () (填推理的依据).

$\because \angle ACB = 90^\circ$, 点 P 在 AC 上,

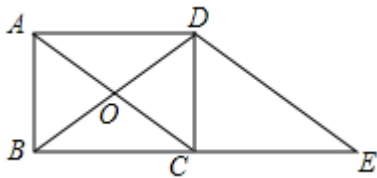
$\therefore PC \perp BC$.

作 $PQ \perp AB$ 于点 Q ,

\because 点 P 在 BF 上,

$\therefore PC =$ () (填推理的依据).

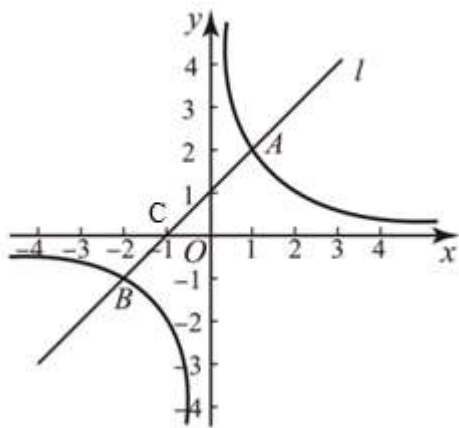
22. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E .



(1) 求证: $\angle ADB = \angle E$;

(2) 若 $AD=4$, $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$, 求 AO 的长.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 交于点 $A(1, n)$ 和点 $B(-2, -1)$.



(1) 求 m, n 的值及直线 l 的解析式;

(2) 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 是线段 AB 上两点且 $x_1 < x_2$, $PQ = 2\sqrt{2}$, 若线段 PQ 与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 无交点, 求 x_1 的取值范围.

24. 随着绿色出行意识增强, 更多市民选择公共交通出行. 从市交通委获悉, 目前, 轨道交通多条线路缩短发车间隔, 保障市民出行安全、便捷.

下图是地铁 10 号线由西钓鱼台站开往公主坟方向，工作日和双休日的列车时刻表（列车时刻表仅供参考，实际以现场列车运行情况为准）。小明从西钓鱼台站乘 10 号线地铁（开往公主坟方向）出行，结合图中信息回答以下问题：

10 号线 西钓鱼台站列出时刻表	
开往公主坟站方向	工作日
5 00 06 12 18 24 30 36 40 44 48 52 56	
6 00 04 08 12 16 20 24 28 32 36 41 45 47 49 51 53 55 57 59	
7 01 03 05 07 09 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59	
8 01 03 05 07 09 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59	
9 01 03 05 07 09 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 53 57	
10 01 05 09 13 17 21 25 29 33 37 41 47 53 59	
11 05 11 17 24 30 36 42 48 54	
12 00 07 13 19 25 31 37 43 49 56	
13 02 08 14 20 26 32 39 45 51 57	
14 03 09 15 21 28 34 40 46 52 58	
15 04 08 11 17 23 26 29 35 41 44 47 53	
16 00 03 06 12 18 21 24 30 36 40 43 46 49 52 54 57 59	
17 01 03 06 05 10 12 15 17 19 21 24 26 28 31 33 35 37 40 42 44 46 49 51 53 55 58	
18 00 02 05 07 09 11 14 16 18 20 23 25 27 29 32 34 36 39 41 43 45 48 50 52 54 57 59	
19 01 03 06 05 10 12 15 17 19 21 24 26 31 35 40 44 49 53 58	
20 02 07 11 16 21 25 30 34 39 43 48 52 57	
21 01 06 10 15 19 24 29 33 38 43 48 53	
22 01 09 15 24 29 39 45	
5 21 表示 5 点 21 分	
10 号线 西钓鱼台站列出时刻表	

开往公主坟站方向	双休日
5	00 05 15 22 29 36 43 50 57
6	04 11 18 25 32 38 45 52 59
7	03 06 13 17 21 27 34 38 42 48 52 56
8	02 09 12 16 23 26 31 37 44 49 54 59
9	04 09 13 18 23 28 33 38 43 48 53 58
10	03 08 13 18 23 28 33 38 43 48 53 58
11	03 08 14 19 25 30 36 41 47 52 58
12	03 09 14 20 25 30 36 41 47 52 58
13	03 09 14 20 25 31 36 42 47 53 58
14	04 09 15 20 26 31 37 42 48 53 59
15	04 09 15 20 26 31 37 42 48 53 59
16	04 10 15 21 26 32 37 43 48 54 59
17	05 10 16 21 27 32 38 43 49 54 59
18	05 10 16 21 27 32 38 43 49 54
19	00 06 11 16 22 27 33 38 44 49 55
20	00 06 13 20 27 34 41 46 53
21	00 07 14 21 28 35 43 50 57
22	04 11 16 25 32 39 43
5 21 表示 5 点 21 分	

（1）工作日早晨 7 点 01 分—7 点 59 分这段时间内，列车发车间隔为_____分钟；

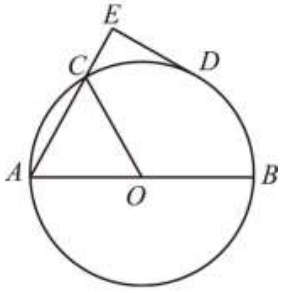
（2）下列说法中：

- ①双休日早晨 6 点 04—6 点 59 期间列车发车最小间隔为 7 分钟；
- ②设两个相邻整点之间为一个时间段，则工作日发车次数最少的时间段是 22 点—23 点；
- ③设两个相邻整点之间为一个时间段，则双休日时，每个时间段的发车次数的众数为 11；
- ④工作日 10 点 01 分—10 点 59 分发车次数为 12.

所有正确说法的序号是_____；

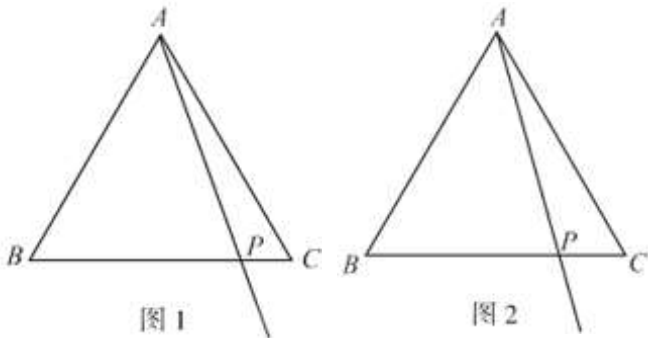
（3）小明周一上午乘车时间为 7 点—7 点 10 分之间，周二上午乘车时间为 7 点—7 点 06 分之间．若这两天发车到站的时间与图中时间表一致，用画树状图或列表的方法，求小明这两天乘坐相同车次列车的概率（每天在同一时刻发车的列车视为相同车次）？

25. 如图, AB 为 $\odot O$ 直径, 点 C , 点 D 在 $\odot O$ 上, 且点 C 是 AD 的中点, DE 是 $\odot O$ 的切线且 $DE \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 E , 连接 OC .



- (1) 求证: $\triangle AOC$ 是等边三角形;
 - (2) 若 $DE = 2\sqrt{3}$, 求 AC 的长.
26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 - 2bx + b^2 - 2 (b > 0)$ 经过点 $A(m, n)$.
- (1) 用含 b 的代数式表示抛物线顶点的坐标;
 - (2) 若抛物线经过点 $B(0, 2)$, 且满足 $0 < m < 3$, 求 n 的取值范围;
 - (3) 若 $3 \leq m \leq 5$ 时, $n \leq 2$, 结合函数图象, 直接写出 b 的取值范围.

27. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, 点 P 是 BC 边上一点, 作点 C 关于直线 AP 的对称点 D , 连接 CD , BD , 作 $AE \perp BD$ 于点 E .

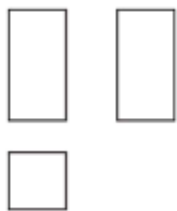


- (1) 若 $\angle PAC = 10^\circ$, 依题意补全图 1, 并直接写出 $\angle BCD$ 的度数;
 - (2) 如图 2, 若 $\angle PAC = \alpha (0^\circ < \alpha < 30^\circ)$,
 - ①求证: $\angle BCD = \angle BAE$;
 - ②用等式表示线段 BD, CD, AE 之间的数量关系并加以证明.
28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于任意两点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 若 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = k$ (k 为常数且 $k \neq 0$), 则称点 M 为点 N 的 k 倍直角点.
- 根据以上定义, 解决下列问题:
- (1) 已知点 $A(1, 1)$
 - ①若点 $B(-2, 3)$ 是点 A 的 k 倍直角点, 则 k 的值是_____;
 - ②在点 $C(2, 3), D(-1, 1), E(0, -2), O(0, 0)$ 中是点 A 2 倍直角点的是_____;
 - ③若直线 $y = -2x + b$ 上存在点 A 的 2 倍直角点, 求 b 的取值范围;
 - (2) $\odot T$ 的圆心 T 的坐标为 $(1, 0)$, 半径为 r , 若 $\odot T$ 上存在点 O 的 2 倍直角点, 直接写出 r 的取值范围.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1. 如图，是某几何体的三视图，该几何体是（ ）



- A. 圆柱 B. 正方体 C. 三棱柱 D. 长方体

【答案】D

【解析】

【分析】该几何体的主视图与左视图均为矩形，俯视图为正方形，易得出该几何体的形状.

【详解】解：该几何体的主视图为矩形，左视图为矩形，俯视图是一个正方形，
则可得出该几何体是长方体.

故选：D.

【点睛】主要考查的是三视图的相关知识，解得此题时要有丰富的空间想象力.

2. 2021 年 2 月 25 日，全国脱贫攻坚总结表彰大会在北京人民大会堂隆重举行. 经过全党全国各族人民共同努力，我国脱贫攻坚战取得了全面胜利，现行标准下 98990000 农村贫困人口全部脱贫，832 个贫困县全部摘帽，12.8 万个贫困村全部出列，完成了消除绝对贫困的艰巨任务，创造了又一个彪炳史册的人间奇迹！98990000 用科学记数法表示应为（ ）

- A. 0.9899×10^8 B. 9.899×10^7 C. 98.99×10^6 D. 9899×10^4

【答案】B

【解析】

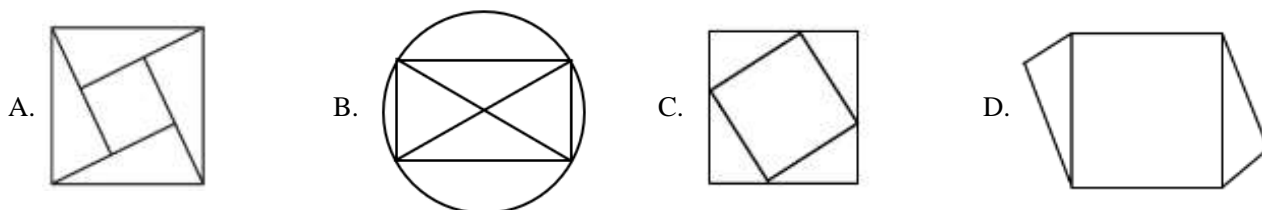
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解：98990000 = 9.899×10^7 ；

故选：B.

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. 勾股定理是几何学中一颗光彩夺目的明珠，现发现约有 400 种证明方法. 下面四个图形是证明勾股定理的图形，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义和中心图形的定义进行判断求解即可.

【详解】解：A、不是轴对称图形，故此选项不符合题意；

B、既是轴对称图形又是中心对称图形，故此选项符合题意；

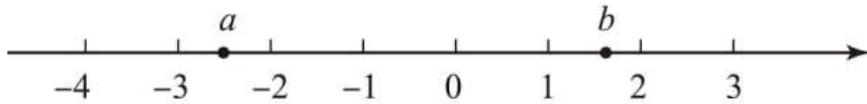
C、不是轴对称图形，故此选项不符合题意；

D、不是轴对称图形，故此选项不符合题意.

故选 B.

【点睛】本题考查了轴对称图形和中心对称图形的定义，解题的关键在于熟练掌握相关定义去判断图形.

4. 实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则下列不等关系正确的是（ ）



A. $a > b$

B. $ab > 0$

C. $|a| > |b|$

D. $-a < b$

【答案】C

【解析】

【分析】根据数轴上的位置，确定 a, b 的正负和绝对值大小，逐条判断即可.

【详解】解：根据 a, b 在数轴上的对应点的位置可知， $-3 < a < -2$ ， $1 < b < 2$ ，

可判断 $a < b$ ， $ab < 0$ ， $|a| > |b|$ ， $-a > b$ ，A、B、D 选项错误，不符合题意；C 选项正确，符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了实数与数轴，解题关键是准确从数轴上获取两个数的信息，根据实数运算法则和性质进行判断.

5. 若正多边形的一个内角是 120° ，则这个正多边形的边数为（ ）

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】多边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，因为所给多边形的每个内角均相等，故又可表示成 $120^\circ n$ ，列方程可求解.

【详解】解：设所求正 n 边形边数为 n ，

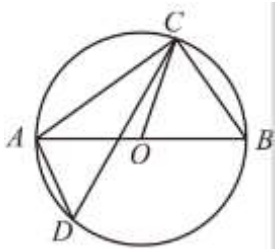
则 $120^\circ n = (n-2) \cdot 180^\circ$ ，

解得 $n=6$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查了根据多边形的内角和计算公式求多边形的边数，解答时要会根据公式进行正确运算是解答此题的关键.

6. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 是 $\odot O$ 上两点，若 $\angle D = 55^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数是（ ）



- A. 35° B. 55° C. 60° D. 70°

【答案】D

【解析】

【分析】由 AB 为 $\odot O$ 的直径，根据直径所对的圆周角是直角，可求得 $\angle ACB=90^\circ$ ，又由 $\angle D=55^\circ$ ，得出 $\angle B$ 的度数，从而计算出 $\angle CAB$ ，根据同弧所对的圆心角是圆周角度数的 2 倍进行求解即可。

【详解】解： $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB=90^\circ,$$

$$\because \angle D=55^\circ,$$

$$\therefore \angle B=\angle D=55^\circ(\text{同弧所对的圆周角相等})$$

$$\therefore \angle BAC=90^\circ-\angle B=35^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC=2\angle BAC=70^\circ. (\text{同弧所对的圆心角是圆周角的 2 倍})$$

故选：D.

【点睛】本题主要考查了圆周角定理，圆周角与圆心角之间的关系，解题的关键是理清角之间的关系.

7. 某校进行垃圾分类的环保知识竞赛，进入决赛的共有 15 名学生，他们的决赛成绩如下表所示：

决赛成绩/分	100	95	90	85
人数/名	2	8	2	3

则这 15 名学生决赛成绩的中位数和平均数分别是（ ）

- A. 95,97 B. 95,93 C. 95,86 D. 90,95

【答案】B

【解析】

【分析】

根据加权平均数的计算方法，以及中位数的计算方法即可得出.

【详解】由题意可知，共有 15 名学生，成绩按从小到大排列，位置排在中间的是第 8 名，

所以中位数是 95，

$$\text{平均数为 } \bar{x} = \frac{100 \times 2 + 95 \times 8 + 90 \times 2 + 85 \times 3}{15} = 93,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了平均数，以及中位数，熟练掌握平均数，中位数的计算方法是解题的关键.

8. 已知二次函数 $y = x^2 + mx + n$ ，当 $x = 0$ 和 $x = 2$ 时对应的函数值相等，则下列说法中不正确的是（ ）

- A. 抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 的开口向上 B. 抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 与 y 轴有交点

C. 当 $n > 1$ 时, 抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 与 x 轴有交点 D. 若 $P(-1, y_1), Q(3, y_2)$ 是抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 上两点, 则 $y_1 = y_2$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数图象的开口方向、对称性、与坐标轴交点等性质逐条判断即可.

【详解】解: 二次函数 $y = x^2 + mx + n$ 二次项系数是 1, 大于 0, 抛物线开口向上, 故 A 正确, 不符合题意;

当 $x = 0$ 时, $y = n$, 抛物线与 y 轴有交点为 $(0, n)$, 故 B 正确, 不符合题意;

二次函数 $y = x^2 + mx + n$, 当 $x = 0$ 和 $x = 2$ 时对应的函数值相等, 它的对称轴为 $x = \frac{0+2}{2} = 1$, 即 $\frac{-m}{2} = 1$,

$m = -2$, 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x + n$, 若抛物线 $y = x^2 - 2x + n$ 与 x 轴有交点, 则 $(-2)^2 - 4n \geq 0$, 解得 $n \leq 1$,

故 C 错误, 符合题意;

$P(-1, y_1), Q(3, y_2)$ 两点关于抛物线对称轴直线 $x = 1$ 对称, 所以 $y_1 = y_2$, 故 D 正确, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了二次函数图象与性质, 解题关键是熟练掌握二次函数性质, 根据相关性质准确进行推断.

二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. 若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 2$

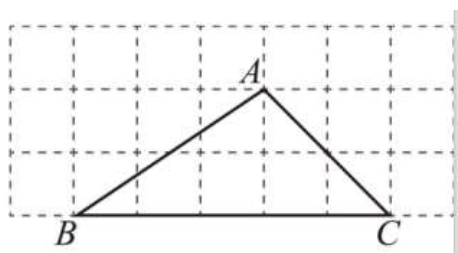
【解析】

【详解】试题分析: 根据题意, 使二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义, 即 $x - 2 \geq 0$, 解得 $x \geq 2$.

故答案是 $x \geq 2$.

【点睛】考点: 二次根式有意义的条件.

10. 如图所示的网格是正方形网格, A, B, C 是网格线的交点, 则 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的大小关系为: $\angle ABC$ _____ $\angle ACB$ (填“>”, “=”或“<”).



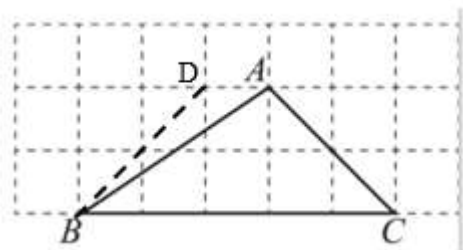
【答案】<

【解析】

【分析】在网格中构建和 $\angle ACB$ 一样大的角, 比较即可.

【详解】解: 如图所示: $\angle DBC = \angle ACB = 45^\circ$, AB 在 $\angle DBC$ 内部, 所以, $\angle ABC < \angle ACB$,

故答案为: <.



【点睛】本题考查了角的比较，等腰三角形的性质，解题关键是通过网格转换，把两个要比较的角放在一起，直接判断.

11. 化简: $\frac{3x}{x+y} + \frac{y-2x}{x+y} =$ _____.

【答案】1

【解析】

【分析】直接进行同分母的加减运算即可.

【详解】 $\frac{3x}{x+y} + \frac{y-2x}{x+y}$

$$= \frac{3x + y - 2x}{x+y}$$

$$= \frac{x+y}{x+y}$$

$$= 1.$$

故答案为: 1.

【点睛】本题考查了同分母的分式的运算，解题的关键是熟练掌握分式的运算法则.

12. 分解因式 $ma^2 - 2mab + mb^2 =$ _____.

【答案】 $m(a-b)^2$

【解析】

【详解】 $ma^2 - 2mab + mb^2 = m(a^2 - 2ab + b^2) = m(a-b)^2$.

故答案为 $m(a-b)^2$.

13. 某区域进行“环境改造，植树绿化”活动. 若该区域种植树苗 2000 株，树苗的成活率为 95%，则成活的树苗大约有_____株.

【答案】1900

【解析】

【分析】利用 2000 乘以成活率为 95% 即可得出答案;

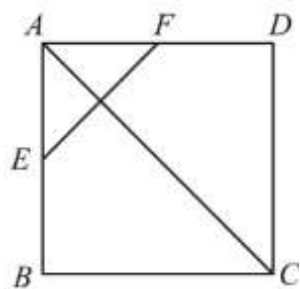
【详解】解: $2000 \times 95\% = 1900$ (株);

所以成活的树苗大约有 1900 株.

故答案为: 1900

【点睛】本题考查了有理数的乘法的应用，熟练掌握运算法则是解题的关键.

14. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别是 AB, AD 的中点，若 $EF = 2$ ，则 AC 的长是_____.



【答案】4.

【解析】

【分析】连接 BD ，根据中位线性性质求出 BD ，再根据正方形对角线相等可求 AC 。

【详解】解：连接 BD ，

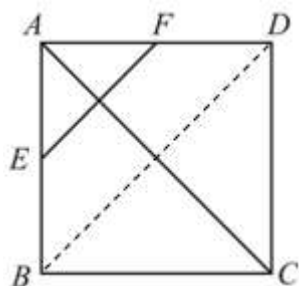
$\because E, F$ 分别是 AB, AD 的中点，

$\therefore BD = 2EF = 4$ ，

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC = BD = 4$ ；

故答案为：4.



【点睛】本题考查正方形的性质和中位线性性质，解题关键是连接对角线，构建中位线。

15. 小华到商店为班级购买跳绳和毽子两种体育用品，跳绳每个 4 元，毽子每个 5 元，两种体育用品共需购买 22 个，是否存在用 90 元钱完成这项购买任务 方案？_____（填“是”或“否”）。

【答案】是.

【解析】

【分析】设买跳绳 x 个，则毽子买 $(22-x)$ 个，根据题意列出方程，解方程即可。

【详解】解：设买跳绳 x 个，则毽子买 $(22-x)$ 个，根据题意列方程得，

$$4x + 5(22 - x) = 90,$$

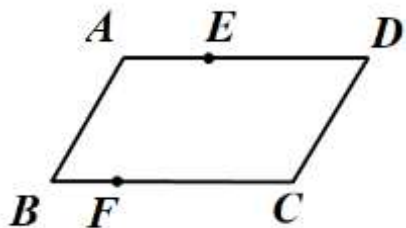
解得， $x = 20$ ， $22 - x = 2$ ，

存在用 90 元钱完成这项购买任务的方案，买跳绳 20 个，毽子 2 个；

故答案为：是.

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，解题关键是准确理解题意，找出等量关系，列出方程并求解。

16. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AD > AB$ ， E, F 分别为边 AD, BC 上的点（ E, F 不与端点重合）。对于任意 $\square ABCD$ ，下面四个结论中：



- ①存在无数个四边形 $ABFE$ ，使得四边形 $ABFE$ 是平行四边形；
 ②至少存在一个四边形 $ABFE$ ，使得四边形 $ABFE$ 菱形；
 ③至少存在一个四边形 $ABFE$ ，使得四边形 $ABFE$ 矩形；
 ④存在无数个四边形 $ABFE$ ，使得四边形 $ABFE$ 的面积是 $\square ABCD$ 面积的一半。

所有正确结论的序号是_____。

【答案】①②④。

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定与性质、菱形的判定、矩形的判定逐条判断即可。

【详解】解：只要满足 $AB \parallel EF$ ，四边形 $ABFE$ 是平行四边形，这样的 EF 有无数条，故①正确；
 因为 $AD > AB$ ，可在 AD 上截取 $AE = AB$ ，再满足 $AB \parallel EF$ ，四边形 $ABFE$ 是菱形，故②正确；
 因为是任意 $\square ABCD$ ， $\angle B$ 不一定是直角，矩形 $ABFE$ 不一定存在，故③错误；
 当 EF 经过 $\square ABCD$ 对角线交点时，四边形 $ABFE$ 的面积是 $\square ABCD$ 面积的一半，故④正确。
 故答案为：①②④。

【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质、菱形、矩形的判定，解题关键是熟练运用所学四边形的性质与判定，准确进行推理判断。

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 计算： $2\sin 45^\circ + |-\sqrt{2}| - \sqrt{8} + (\pi - 3)^0$ 。

【答案】1

【解析】

【分析】分别根据特殊角的三角函数值、绝对值的性质、零指数幂计算各部分，即可求解。

【详解】解：原式 $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1$
 $= \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1$
 $= 1$ 。

【点睛】本题考查实数的混合运算、特殊角的三角函数值，掌握实数的运算法则以及熟记特殊角的三角函数值是解题的关键。

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 > 0 \\ 2(x-1) + 3 \geq 3x \end{cases}$$

【答案】 $-2 < x \leq 1$.

【解析】

【分析】 分别求出每一个不等式 解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【详解】解：
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + 1 > 0 \textcircled{1} \\ 2(x-1) + 3 \geq 3x \textcircled{2} \end{cases}$$

解不等式①， $\frac{x}{2} + 1 > 0$ ，解得 $x > -2$

解不等式②， $2(x-1) + 3 \geq 3x$

即 $2x - 2 + 3 \geq 3x$ ， $x \leq 1$

\therefore 不等式的解集为 $-2 < x \leq 1$

【点睛】 本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

19. 已知抛物线 $y = x^2 - 4x + c$ 经过点 $(-1, 8)$.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 求抛物线与 x 轴交点的坐标.

【答案】 (1) 抛物线解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$ ； (2) 抛物线与 x 轴的交点坐标是 $(1, 0)$ ， $(3, 0)$.

【解析】

【分析】 (1) 把已知点的坐标代入 $y = x^2 - 4x + c$ 中得到关于 c 的方程，然后解方程即可；

(2) 通过解方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 可得到抛物线与 x 轴的交点坐标.

【详解】解： (1) \because 抛物线 $y = x^2 - 4x + c$ 经过点 $(-1, 8)$,

$$\therefore (-1)^2 + 4 + c = 8,$$

解得： $c = 3$,

\therefore 抛物线解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$ ；

(2) 当 $y = 0$ ，则 $x^2 - 4x + 3 = 0$.

解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 3$,

\therefore 抛物线与 x 轴的交点坐标是 $(1, 0)$ ， $(3, 0)$.

【点睛】 本题考查了抛物线与 x 轴 交点：把求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标问题转化为解关于 x 的一元二次方程. 也考查了待定系数法求抛物线解析式.

20. 已知 $x^2 - 3x - 1 = 0$ ，求代数式 $(x+2)(x-2) - x(3x-6)$ 的值.

【答案】 $-2(x^2 - 3x + 2)$ ； -6 .

【解析】

【分析】 把代数式化简成含有 $x^2 - 3x$ 的式子，再由已知得到 $x^2 - 3x = 1$ 后代入化简后的算式可以得解.

【详解】解：由已知可得： $x^2-3x=1$ ，

$$\therefore \text{原式} = x^2 - 4 - 3x^2 + 6x$$

$$= -2x^2 + 6x - 4$$

$$= -2(x^2 - 3x + 2)$$

$$= -2(1+2)$$

$$= -2 \times 3$$

$$= -6.$$

【点睛】本题考查代数式的应用，熟练掌握整式的运算法则及整体代入的方法是解题关键.

21. 已知：如图 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$.

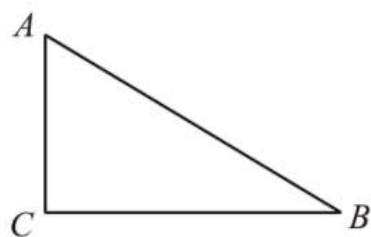
求作：点 P ，使得点 P 在 AC 上，且点 P 到 AB 的距离等于 PC .

作法：

①以点 B 为圆心，以任意长为半径作弧，分别交射线 BA, BC 于点 D, E ；

②分别以点 D, E 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle ABC$ 内部交于点 F ；

③作射线 BF 交 AC 于点 P . 则点 P 即为所求.



(1) 使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

(2) 完成下面证明.

证明：连接 DF, FE .

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle BEF$ 中

$$\begin{cases} DB = EB, \\ DF = EF, \\ BF = BF. \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle BEF.$$

$$\therefore \angle ABF = \angle CBF \quad (\text{填推理的依据}).$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \text{ 点 } P \text{ 在 } AC \text{ 上},$$

$$\therefore PC \perp BC.$$

作 $PQ \perp AB$ 于点 Q ,

$$\because \text{点 } P \text{ 在 } BF \text{ 上},$$

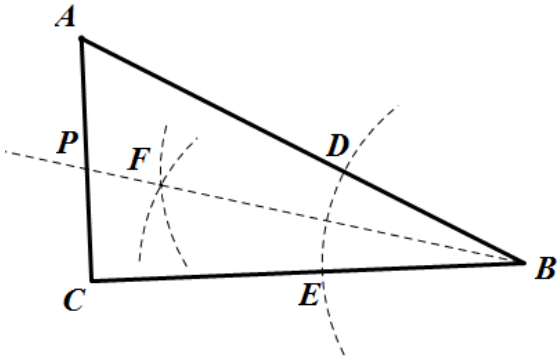
$$\therefore PC = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{填推理的依据}).$$

【答案】(1) 图见解析；(2) 全等三角形的对应角相等， PQ ，角平分线上的点到角两边的距离相等

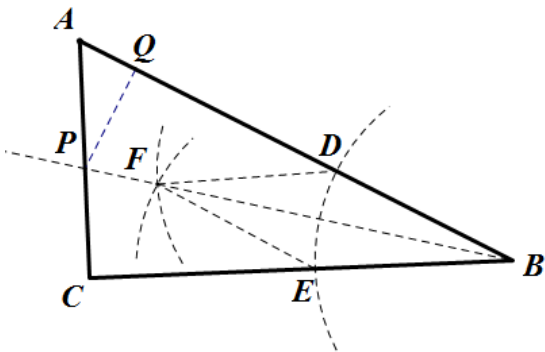
【解析】

【分析】(1) 按照题目中的已知作法作图即可

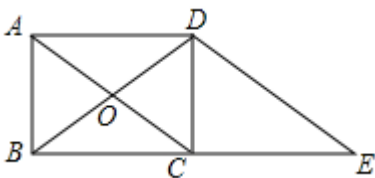
【详解】 (1) 如图所示:


$$\begin{cases} DB = EB \\ DF = EF \\ BF = BF \end{cases}$$

$\therefore PC = PQ$ (角平分线上的点到角两边的距离相等) (填推理的依据).



22. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E .



(1) 求证: $\angle ADB = \angle E$;

(2) 若 $AD=4$, $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$, 求 AO 的长.

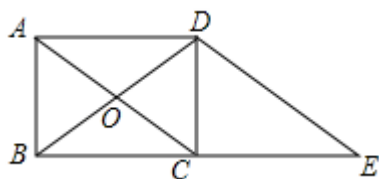
【答案】(1) 见解析; (2) $AO = \frac{5}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 由矩形的性质和平行四边形的判定定理推知四边形 $ACED$ 是平行四边形, 则由该平行四边形的性质证得 $BD=DE$, 从而证得结论;

(2) 由三角函数的定义求得 $AC=BD=5$, 再由矩形的性质进行解答即可.

【详解】解: (1) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AC=BD$, $AD \parallel BC$, 且 $AD=BC$.



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle DBE$, $AD \parallel CE$.

$\because DE \parallel AC$,

\therefore 四边形 $ACED$ 是平行四边形,

$\therefore DE = AC$.

$\therefore BD = DE$,

$\therefore \angle DBE = \angle E$,

$\therefore \angle ADB = \angle E$;

(2) $\because AD=4$, $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$,

$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{4}{5}$,

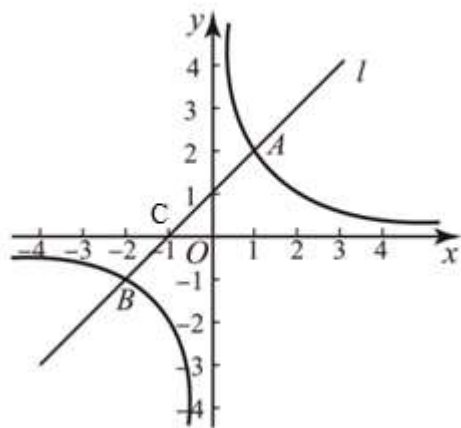
$\therefore BD=5$,

由矩形的性质知, $AC=BD=5$, $AO=CO=\frac{1}{2}AC$,

$\therefore AO = \frac{5}{2}$.

【点睛】本题考查了矩形的性质, 锐角三角函数, 解题时, 充分利用了矩形的对角线相等、矩形的对边平行且相等的性质.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 交于点 $A(1, n)$ 和点 $B(-2, -1)$.



(1) 求 m, n 的值及直线 l 的解析式;

(2) 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 是线段 AB 上两点且 $x_1 < x_2$, $PQ = 2\sqrt{2}$, 若线段 PQ 与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 无交点, 求 x_1 的取值范围.

【答案】 (1) $m=2, n=2$, (2) 反比例解析式为 $y = \frac{2}{x}$, 直线 l 的解析式为: $y=x+1$; (2) $-2 < x_1 < -1$

【解析】

【分析】 (1) 将 A 与 B 坐标代入一次函数与反比例解析式, 得到 m 与 n 的值, 再设直线 l 的解析式为 $y=kx+b$, 将 A 与 B 坐标代入, 进而求出 k 与 b 的值, 确定出一次函数与反比例解析式;

(2) 先根据两点间的距离公式得出 AB 的长, 求出当点 Q 与点 A 重合时得出 x_1 , 再结合已知即可得出答案

【详解】解: (1) 将点 $B(-2, -1)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ 得, $m = (-2) \times (-1) = 2$,

\therefore 反比例解析式为 $y = \frac{2}{x}$;

$\because A(1, n)$ 在双曲线上,

$\therefore n=2$,

设直线 l 的解析式为 $y=kx+b$, 点 $A(1, 2)$ 和点 $B(-2, -1)$ 在 l 上,

$$\therefore \begin{cases} k+b=2 \\ -2k+b=-1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=1 \\ b=1 \end{cases},$$

\therefore 直线 l 的解析式为: $y=x+1$;

(2) 直线 l 的解析式 $y=x+1$ 与 x 轴的交点 C 为 $(-1, 0)$

$\because A(1, 2)$ 和点 $B(-2, -1)$

$$\therefore AB = \sqrt{(1+2)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2},$$

$\because PQ=2\sqrt{2},$

$\therefore PQ<AB,$

\because 点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 是线段 AB 上两点且 $x_1<x_2,$

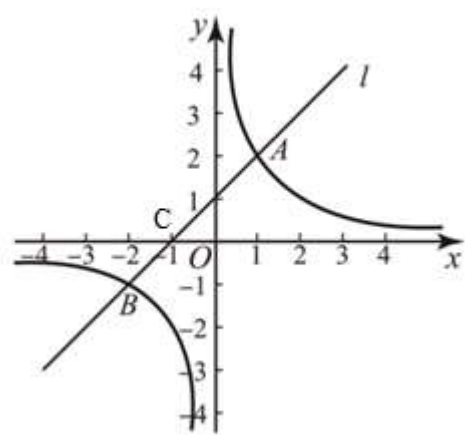
$\therefore x_1>-2, \ x_2<1,$

当 $x_2=1$ 即点 A 与点 Q 重合时， $AC=\sqrt{(1+1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2},$

此时点 P 与点 C 重合， $\therefore x_1=-1,$

\because 线段 PQ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 无交点，

$\therefore -2<x_1<-1$



【点睛】本题考查了一次函数和反比例函数的交点问题，以及两点间的距离，此题的关键是用待定系数法求函数的解析式.

24. 随着绿色出行意识增强，更多市民选择公共交通出行．从市交通委获悉，目前，轨道交通多条线路缩短发车间隔，保障市民出行安全、便捷．

下图是地铁 10 号线由西钓鱼台站开往公主坟方向，工作日和双休日的列车时刻表（列车时刻表仅供参考，实际以现场列车运行情况为准）．小明从西钓鱼台站乘 10 号线地铁（开往公主坟方向）出行，结合图中信息回答以下问题：

10 号线 西钓鱼台站列出时刻表	
开往公主坟站方向	工作日
	5 00 06 12 18 24 30 36 40 44 48 52 56
	6 00 04 08 12 16 20 24 28 32 36 41 45 47 49 51 53 55 57 59
	7 01 03 05 07 09 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59
	8 01 03 05 07 09 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59

9	01	03	05	07	09	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	53	57
10	01	05	09	13	17	21	25	29	33	37	41	47	53	59													
11	05	11	17	24	30	36	42	48	54																		
12	00	07	13	19	25	31	37	43	49	56																	
13	02	08	14	20	26	32	39	45	51	57																	
14	03	09	15	21	28	34	40	46	52	58																	
15	04	08	11	17	23	26	29	35	41	44	47	53															
16	00	03	06	12	18	21	24	30	36	40	43	46	49	52	54	57	59										
17	01	03	06	05	10	12	15	17	19	21	24	26	28	31	33	35	37	40	42	44	46	49	51	53	55	58	
18	00	02	05	07	09	11	14	16	18	20	23	25	27	29	32	34	36	39	41	43	45	48	50	52	54	57	59
19	01	03	06	05	10	12	15	17	19	21	24	26	31	35	40	44	49	53	58								
20	02	07	11	16	21	25	30	34	39	43	48	52	57														
21	01	06	10	15	19	24	29	33	38	43	48	53															
22	01	09	15	24	29	39	45																				
5 21 表示 5 点 21 分																											
10 号线 西钓鱼台站列出时刻表																											
开往公主坟站方向														双休日													
5	00	05	15	22	29	36	43	50	57																		
6	04	11	18	25	32	38	45	52	59																		
7	03	06	13	17	21	27	34	38	42	48	52	56															
8	02	09	12	16	23	26	31	37	44	49	54	59															
9	04	09	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58															
10	03	08	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58															
11	03	08	14	19	25	30	36	41	47	52	58																
12	03	09	14	20	25	30	36	41	47	52	58																
13	03	09	14	20	25	31	36	42	47	53	58																

14 04 09 15 20 26 31 37 42 48 53 59
15 04 09 15 20 26 31 37 42 48 53 59
16 04 10 15 21 26 32 37 43 48 54 59
17 05 10 16 21 27 32 38 43 49 54 59
18 05 10 16 21 27 32 38 43 49 54
19 00 06 11 16 22 27 33 38 44 49 55
20 00 06 13 20 27 34 41 46 53
21 00 07 14 21 28 35 43 50 57
22 04 11 16 25 32 39 43
5 21 表示 5 点 21 分

(1) 工作日早晨 7 点 01 分—7 点 59 分这段时间内，列车发车间隔为_____分钟；

(2) 下列说法中：

- ①双休日早晨 6 点 04—6 点 59 期间列车发车最小间隔为 7 分钟；
- ②设两个相邻整点之间为一个时间段，则工作日发车次数最少的时间段是 22 点—23 点；
- ③设两个相邻整点之间为一个时间段，则双休日时，每个时间段的发车次数的众数为 11；
- ④工作日 10 点 01 分—10 点 59 分发车次数为 12.

所有正确说法的序号是_____；

(3) 小明周一上午乘车时间为 7 点—7 点 10 分之间，周二上午乘车时间为 7 点—7 点 06 分之间．若这两天发车到站的时间与图中时间表一致，用画树状图或列表的方法，求小明这两天乘坐相同车次列车的概率（每天在同一时刻发车的列车视为相同车次）？

【答案】(1)2,(2)②③；(3) $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】(1)观察列车时刻表即可得出答案；

(2) 根据列车时刻表逐条判断即可；

(3) 根据题意用列表法表示出所有可能，再根据概率公式求概率即可．

【详解】解：(1) 工作日早晨 7 点 01 分—7 点 59 分这段时间内，列车发车间隔为 $3-1=2$ (分钟)；

故答案为：2；

(2) 双休日早晨 6 点 04—6 点 59 期间列车发车最小间隔为 6:32-6:38，6 分钟，故①错误；

设两个相邻整点之间为一个时间段，则工作日发车次数最少的时间段是 22 点—23 点，共 7 次，故②正确；

设两个相邻整点之间为一个时间段，则双休日时，每个时间段的发车次数的众数为 11，共 8 个，故③正确；

工作日 10 点 01 分—10 点 59 分发车次数为 14，故④错误；

故答案为：②③；

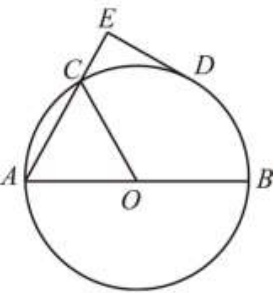
(3) 根据题意列表：

	01	03	05	07	09
01	0101	0103	0105	0107	0109
03	0301	0303	0305	0307	0309
05	0501	0503	0505	0507	0509

一共有 15 种等可能结果，乘坐相同车次列车的结果有 3 种，两天乘坐相同车次列车的概率为： $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ 。

【点睛】 本题考查了统计表和概率，解题关键是熟练从列车时刻表中获取正确信息，正确运用列举法求概率。

25. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C ，点 D 在 $\odot O$ 上，且点 C 是 AD 的中点， DE 是 $\odot O$ 的切线且 $DE \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 E ，连接 OC 。



(1) 求证： $\triangle AOC$ 是等边三角形；

(2) 若 $DE = 2\sqrt{3}$ ，求 AC 的长。

【答案】 (1) 证明见解析； (2) 4.

【解析】

【分析】 (1) 连接 OD ，根据点 C 是 AD 的中点得到 $\angle AOC = \angle COD$ ，再根据 DE 是 $\odot O$ 的切线且 $DE \perp AC$ 得到 $OD \parallel AE$ ，得到 $\angle ACO = \angle COD = \angle AOC$ ，再由 $OA = OC$ ，得到 $\angle ACO = \angle CAO = \angle AOC$ 即可证明；

(2) 连接 CD ，由 (1) 证得三角形 OAC 为等边三角形，同理也可证明三角形 COD 为等边三角形，从而得到 $\angle CDE = 30^\circ$ ，再根据三角函数求解即可。

【详解】解： (1) 如图所示，连接 OD

\because 点 C 是 AD 的中点

$\therefore \angle AOC = \angle COD$

又 $\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线且 $DE \perp AC$

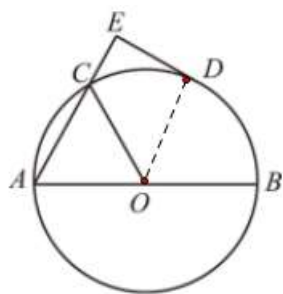
$\therefore OD \perp DE, AE \parallel OD$

$\therefore \angle ACO = \angle COD = \angle AOC$

$\because OA = OC$

$\therefore \angle ACO = \angle CAO = \angle AOC$

即三角形 AOC 为等边三角形。



(2) 如图所示, 连接 CD

由 (1) 证得三角形 AOC 是等边三角形

$$\therefore \angle ACO = \angle COD = \angle AOC = 60^\circ$$

又 $\because OD = OC$

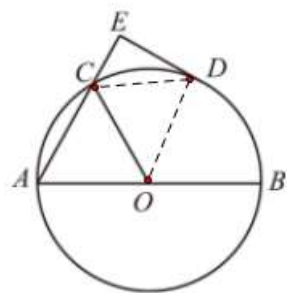
\therefore 三角形 COD 为等边三角形

$$\therefore \angle CDO = 60^\circ$$

又 $\because \angle ODE = 90^\circ$

$$\therefore \angle CDE = 30^\circ$$

$$\therefore AC = CD = \frac{DE}{\cos \angle CDE} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 4$$



【点睛】本题主要考查了圆切线的性质, 平行线的性质, 等边三角形的性质与判定, 三角函数等; 解题的关键在于能够熟练的掌握和应用相关知识进行解题.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 - 2bx + b^2 - 2 (b > 0)$ 经过点 $A(m, n)$.

(1) 用含 b 的代数式表示抛物线顶点的坐标;

(2) 若抛物线经过点 $B(0, 2)$, 且满足 $0 < m < 3$, 求 n 取值范围;

(3) 若 $3 \leq m \leq 5$ 时, $n \leq 2$, 结合函数图象, 直接写出 b 的取值范围.

【答案】(1) $(b, -2)$, (2) $-2 \leq n < 2$, (3) $3 \leq b \leq 5$.

【解析】

【分析】(1) 把抛物线配成顶点式即可;

(2) 把点 $B(0, 2)$ 代入解析式, 求出解析式后, 再根据 $0 < m < 3$, 确定 n 的取值范围即可;

(3) 把 $(3, 2)$ $(5, 2)$ 代入求出 b 值, 画出函数图象, 根据图象直接判断即可.

【详解】解: (1) $y = x^2 - 2bx + b^2 - 2$ 化成顶点式为: $y = (x - b)^2 - 2$,

抛物线顶点的坐标为 $(b, -2)$;

(2) 把 $B(0, 2)$ 代入解析式得, $2 = b^2 - 2$, 解得, $b_1 = -2$ (舍去), $b_2 = 2$,

抛物线解析式为： $y = x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$ ，

因为抛物线开口向下，当 $m = 2$ 时， n 有最小值，最小值为 -2，当 $m = 0$ 时， $n = 2$ ，当 $m = 3$ 时， $n = -1$ ，所以， n 的取值范围为： $-2 \leq n < 2$ ；

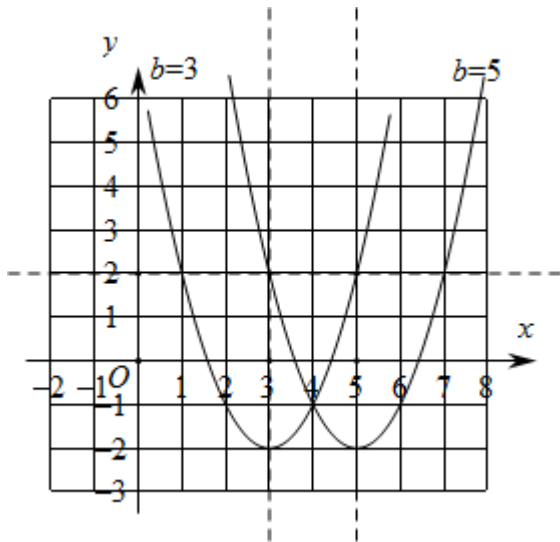
(3)把 (3,2) 代入 $y = x^2 - 2bx + b^2 - 2$ 得， $2 = 9 - 6b + b^2 - 2$ ，解得， $b_1 = 1$ ， $b_2 = 5$ ，

观察图象，当 $b = 5$ 时，满足 $3 \leq m \leq 5$ 时， $n \leq 2$ ；

把 (5,2) 代入 $y = x^2 - 2bx + b^2 - 2$ 得， $2 = 25 - 10b + b^2 - 2$ ，解得， $b_1 = 3$ ， $b_2 = 7$ ，

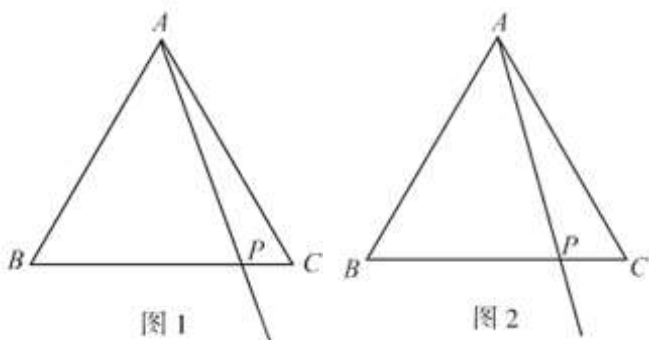
观察图象，当 $b = 3$ 时，满足 $3 \leq m \leq 5$ 时， $n \leq 2$ ；

故 b 的取值范围为 $3 \leq b \leq 5$ 。



【点睛】本题考查了二次函数的图象与性质，解题关键是熟练掌握二次函数性质，运用数形结合思想，直观地解决问题。

27. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中，点 P 是 BC 边上一点，作点 C 关于直线 AP 的对称点 D ，连接 CD ， BD ，作 $AE \perp BD$ 于点 E 。



(1) 若 $\angle PAC = 10^\circ$ ，依题意补全图 1，并直接写出 $\angle BCD$ 的度数；

(2) 如图 2，若 $\angle PAC = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 30^\circ$)，

①求证： $\angle BCD = \angle BAE$ ；

②用等式表示线段 BD ， CD ， AE 之间的数量关系并加以证明。

【答案】 (1) 补图见解析， 20° ， (2) ①证明见解析， ② $AE = CD + \frac{\sqrt{3}}{2}BD$ ，证明见解析，

【解析】

【分析】(1)根据题意画图，根据轴对称得出 $\angle AGC=90^\circ$ ，再结合等边三角形的性质可求；

(2) ①类似(1)表示出 $\angle BCD$ 、 $\angle BAE$ 即可；

②作 $BH \perp CD$ ，交 CD 延长线于点 H ，证 $\triangle BEA \cong \triangle BHC$ ，得到 HD, CD, AE 之间的数量关系，再利用解直角三角形得出 BD, HD 之间的数量关系即可。

【详解】(1)如图所示，即是所补全图； CD 与直线 AP 交点为 G ，由对称可知， $\angle AGC=90^\circ$ ，

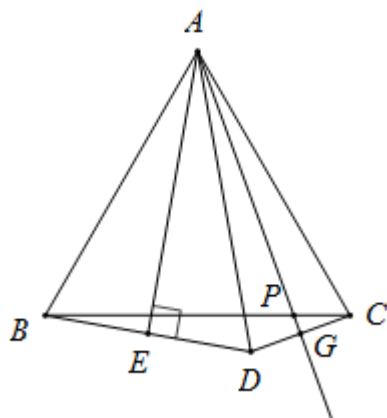
$$\because \angle PAC = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle ACG = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ;$$



(2) ①证明：由(1)得， $\angle BAC=60^\circ$ ， $\angle AGC=90^\circ$ ， $\angle ACG = 90^\circ - \alpha$ ， $\angle DCB = 90^\circ - \alpha - 60^\circ = 30^\circ - \alpha$ ；

由对称可知， $\angle DAP = \angle PAC = \alpha$ ， $AB = AD$ ，

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ - 2\alpha, \quad \angle BAE = \angle EAD = \frac{1}{2}(60^\circ - 2\alpha) = 30^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BAE;$$

$$\textcircled{2} AE = CD + \frac{\sqrt{3}}{2}BD;$$

作 $BH \perp CD$ ，交 CD 延长线于点 H ，由(2)得 $\angle BCD = \angle BAE$ ，

$$\because AB = BC, \angle BEA = \angle BHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BEA \cong \triangle BHC,$$

$$\therefore AE = HC,$$

由(2)可知， $\angle DAP = \angle PAC$ ， $\angle BAE = \angle EAD$ ，

$$\therefore \angle GAE = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ,$$

$$\because \angle AED = \angle AGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDG = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle BDH = 30^\circ,$$

点 $D(-1, 1)$, $k = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |-1 - 1| + |1 - 1| = 2$,

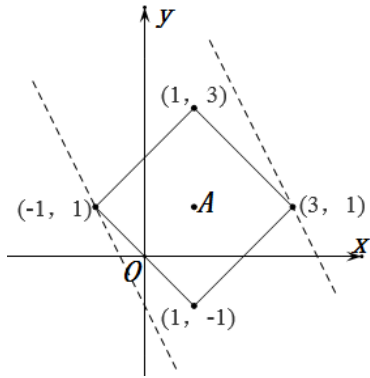
点 $E(0, -2)$, $k = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |0 - 1| + |-2 - 1| = 4$,

点 $O(0, 0)$, $k = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |0 - 1| + |0 - 1| = 2$,

\therefore 是点 A 的 2 倍直角点的是 $D(-1, 1)$, $O(0, 0)$,

故答案为: D 、 O ;

③如图, 正方形的边界即为点 A 的 2 倍直角点存在的区域,



若直线 $y = -2x + b$ 与其有交点, 则过点 $(-1, 1)$ 时, b 值最小,

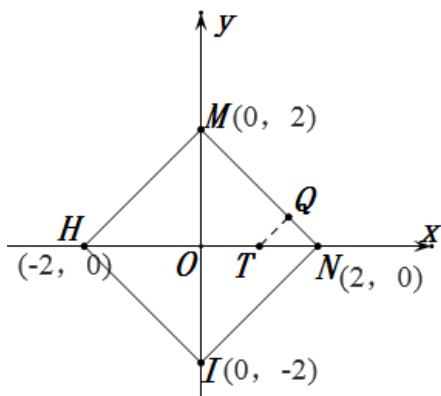
即 $1 = -2 \times (-1) + b$, 解得: $b = -1$,

当过点 $(3, 1)$ 时, b 值最大,

即 $1 = -2 \times 3 + b$, 解得: $b = 7$,

$\therefore b$ 的取值范围为: $-1 \leq b \leq 7$;

(2) 若 $\odot T$ 上存在点 O 的 2 倍直角点, 即 $\odot T$ 与如图的正方形有交点(正方形的边界为点 O 的 2 倍直角点存在的区域),



由图可知, 当 $\odot T$ 与正方形有交点为 $H(0, 0)$ 时, $\odot T$ 的半径最大, 即 $r = 3$;

当 $\odot T$ 与直线 MN 相切时, $\odot T$ 的半径最小,

过 T 作 $TQ \perp MN$ 于 Q , 即 $r = TQ$,

根据正方形的性质知 $\angle MNO = 45^\circ$,

$$\therefore \sin \angle QNT = \sin 45^\circ = \frac{TQ}{TN} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\because TN = 1$,

$$\therefore TQ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore r \text{ 的取值范围为 } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq r \leq 3.$$

【点睛】本题属于新定义与一次函数相结合的综合压轴题，考查了正方形的性质，特殊角的三角函数值，切线的性质等知识，读懂定义，紧扣定义解题，熟练掌握“ k 倍直角点”的定义是解答此题的关键.