2023 北京燕山初三一模

数　　学

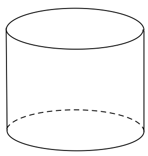
2023 年 4 月

考生须知	1．本试卷共 6 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。 2．在试卷和答题纸上准确填写学校名称、班级、姓名和考号。 3．试题答案一律填涂或书写在答题纸上，在试卷上作答无效。 4．在答题纸上，选择题、画图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 5．考试结束，请将本试卷和答题纸一并交回。

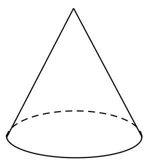
一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1－8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

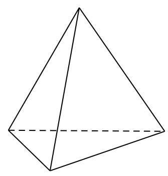
1．下列几何体中，是圆锥的为



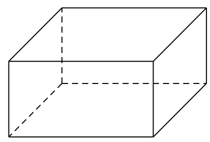
A.



B.



C.



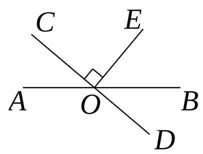
D.

2．近年来，我国充电基础设施快速发展，已建成世界上数量最多、分布最广的充电基础设施网络，有效支撑了新能源汽车的快速发展．2022 年，我国充电基础设施累计数量达到 520 万台左右．将 5 200 000 用科学记数法表示应为

A．52×10^5　　B．5.2×10^6　　C．5.2×10^7　　D．0.52×10^7

3．如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$OE\perp CD$，垂足为 O，

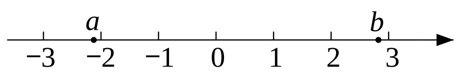
若$\angle BOD=40°$，则$\angle AOE$ 的大小为



A．50°　　B．120°

C．130°　　D．140°

4．实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是



A．$a>-2$　　B．$b>3$　　C．$|a|>b$　　D．$a+b>0$

5．若一个多边形的每个外角都是 45°，则该多边形的边数为

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

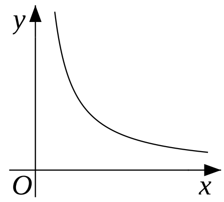
6．若关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+m=0$ 有实数根，则 m 的值不可能是

A．2　　B．1　　C．-1　　D．-2

7．为了学习宣传党的二十大精神，某校学生宣讲团赴社区宣讲．现从 2 名男生 1 名女生中任选 2 人，则恰好选中 1 名男生 1 名女生的概率为

A．$\dfrac{2}{3}$　　　　B．$\dfrac{1}{2}$　　　　C．$\dfrac{1}{3}$　　　　D．$\dfrac{1}{4}$

8．下面的三个问题中都有两个变量：



①正方形的周长 y 与边长 x；

②一个三角形的面积为 5，其底边上的高 y 与底边长 x；

③小赵骑行 10km 到公司上班，他骑行的平均速度 y 与骑行时间 x；

其中，变量 y 与变量 x 之间的函数关系可以用如图所示的图象表示的是

A．①②　　　　B．②③　　　　C．①③　　　　D．①②③

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

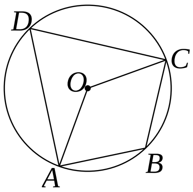
9．若 $\sqrt{x+1}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是_________.

10．分解因式：$3a^2-3b^2=$_________.

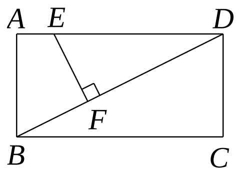
11．方程 $\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{x-3}$ 的解为_________.

12．在平面直角坐标系 xOy 中，若反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}\left(k\neq 0\right)$ 的图象经过点 $P(2，1)$和点 $Q(-2，m)$，则 m 的值为_________.

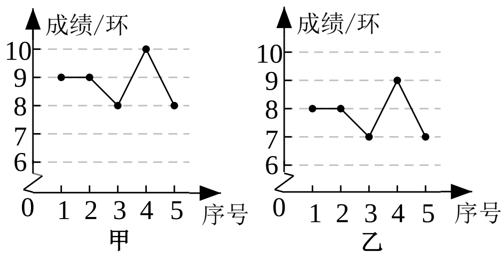
13．如图，点 A，B，C，D 在⊙O 上，$\angle AOC=130°$，则$\angle ABC=$_________°．



（第 13 题）



(第 14 题)



（第 15 题）

14．如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AD 上，$EF\perp BD$ 于点 F．若 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{2}$，$EF=1$，则 DE 的长为_________.

15．甲、乙两名射击爱好者 5 次射击测试成绩(单位：环)的统计图如图所示．记甲、乙两人这 5 次测试成绩数据的平均数分别为 $\bar{x}_{甲}$，$\bar{x}_{乙}$，方差分别为 $s^2_{甲}$，$s^2_{乙}$，则 $\bar{x}_{甲}$_________$\bar{x}_{乙}$，$s^2_{甲}$_________$s^2_{乙}$（填“＞”，“＜”或“＝”）.

16．某工厂用甲、乙两种原料制作 A，B，C 三种型号的工艺品，三种型号工艺品的重量及所含甲、乙两种原料的重量如下：

工艺品型号	含甲种原料的重量/kg	含乙种原料的重量/kg	工艺品的重量/kg
A	3	4	7
B	3	2	5
C	2	3	5

现要用甲、乙两种原料共 31kg，制作 5 个工艺品，且每种型号至少制作 1 个.

(1) 若 31kg 原料恰好全部用完，则制作 A 型工艺品的个数为_____；

(2) 若使用甲种原料不超过 13kg，同时使用乙种原料最多，则制作方案中 A，B，C 三种型号工艺品的个数依次为_____.

三、解答题（共 68 分，第 17－20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22 题 5 分，第 23－24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27－28 题，每题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17．计算：$4\sin 30°+\left|-2\right|+\sqrt{12}-(\frac{1}{4})^{-1}$.

18．解不等式组：$\begin{cases}3x-4<x,\\ \dfrac{5x+3}{2}>x.\end{cases}$

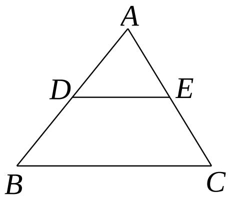
19．已知 $x^2+3x-5=0$，求代数式 $(x+3)^2+3x(x+2)$ 的值.

20．下面是证明三角形中位线定理的两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明.

三角形中位线定理：三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

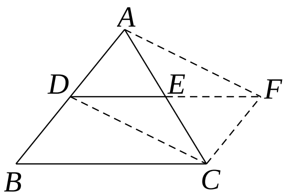
已知：如图，在△ABC中，点D，E分别是AB，AC边的中点.

求证：DE∥BC，且$DE=\frac{1}{2}BC$.



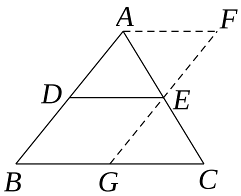
方法一：

证明：如图，延长DE到点F，使$EF=DE$，连接FC，DC，AF.



方法二：

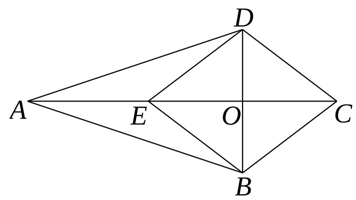
证明：如图，取BC中点G，连接GE并延长到点F，使$EF=GE$，连接AF.



21．如图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AB=AD$，$OB=OD$，点 E 在 AC 上，且∠CED=∠ECB.

(1) 求证：四边形 $EBCD$ 是菱形；

(2) 若 $BC=5$，$EC=8$，$\sin\angle DAE=\frac{\sqrt{10}}{10}$，求 AE 的长.



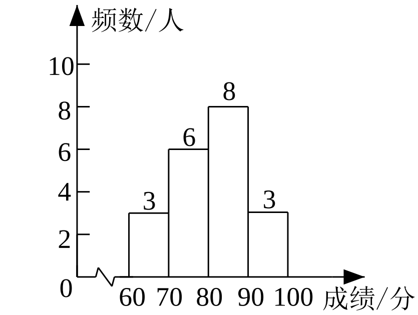
22．在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$的图象由函数 $y=2x$ 的图象平移得到，且经过点 $A(2，0)$.

(1) 求该一次函数的解析式；

(2) 当 $x>2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=x+n$ 的值小于一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$的值，直接写出 n 的取值范围.

23．在第四个国际数学日(2023 年 3 月 14 日)到来之际，燕山地区举办了“数学节”，通过数学素养竞赛、数学创意市集、数学名师讲座等活动，展现数学魅力、传播数学文化．为了解学生数学素养竞赛的答题情况，从甲、乙两校各随机抽取了 20 名学生成绩(单位：分)的数据，并对数据进行整理、描述和分析．下面给出了部分信息：

a．乙校学生成绩数据的频数分布直方图如右图所示（数据分为四组：$60\leqslant x<70$，$70\leqslant x<80$，$80\leqslant x<90$，$90\leqslant x\leqslant 100$）



b．乙校学生成绩数据在 $80\leqslant x<90$ 这一组的是：

80 81 81 82 85 86 88 88

c．甲、乙两校学生成绩的平均数、中位数、众数如下：

学校	平均数	中位数	众数
甲	79.2	79	78
乙	79.7	m	76

根据以上信息，回答下列问题：

(1) 写出表中 m 的值；

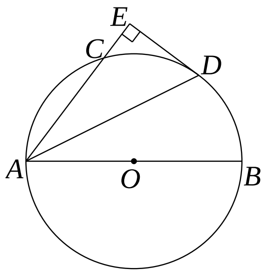
(2) 在甲、乙两校抽取的学生中，记成绩高于各自学校平均分的人数分别为 p，q, 则 p__________q (填“＞”,“＜”或“＝”)，理由是________________________________；

(3) 若乙校共有 160 名学生参加了该数学素养竞赛，且成绩不低于 80 分的学生可获得“数学之星”的称号，估计乙校获得“数学之星”称号的学生有_____人．

24．如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，点 D 为$\overset{\frown}{BC}$的中点，连接 AD，过点 D 作 $DE\perp AC$，交 AC 的延长线于点 E.

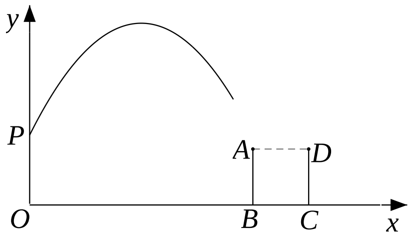
(1) 求证：DE 是⊙O 的切线；

(2) 延长 ED 交 AB 的延长线于点 F，若 $BF=2$，$DF=4$，求⊙O 的半径和 DE 的长.



25．某数学兴趣小组设计了一个弹珠投箱游戏：将无盖正方体箱子放在水平地面上，弹珠从箱外投入箱子，弹珠的飞行轨迹可以看作是抛物线的一部分．建立如图所示的平面直角坐标系(正方形 $ABCD$ 为箱子正面示意图，x 轴经过箱子底面中心，并与其一组对边平行).

某同学将弹珠从点 P 处抛出，弹珠的竖直高度 y(单位：dm)与水平距离 x(单位：dm)近似满足函数关系 $y=a(x-h)^2+k$ $(a<0)$.



下面是弹珠的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据：

水平距离 x/dm	0	1	2	3	4	5	6
竖直高度 y/dm	2.50	4.25	5.50	6.25	6.50	6.25	5.50

(1) 直接写出弹珠竖直高度的最大值，并求出满足的函数关系 $y=a(x-h)^2+k$ $(a<0)$；

(2) 若点 B 的坐标为(8，0)，BC＝2dm，则该同学抛出的弹珠______投入箱子(填“能”或“不能”).

26．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-4ax+5(a\neq 0)$ 与 y 轴交于点 C.

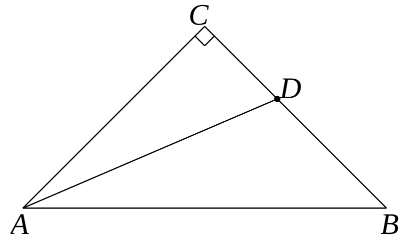
(1) 求点 C 的坐标及抛物线的对称轴；

(2) 已知点(－1，y_1)，(2，y_2)，(6，y_3)在该抛物线上，且 y_1，y_2，y_3 中有且只有一个小于 0，求 a 的取值范围.

27．如图，△ABC 中，∠ACB＝90°，AC＝BC，D 为边 BC 上一点(不与点 B，C 重合)，连接 AD，过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 E，过点 B 作 $BF\perp CE$，交直线 CE 于点 F.

(1) 依题意补全图形；用等式表示线段 CE 与 BF 的数量关系，并证明；

(2) 点 G 为 AB 中点，连接 FG，用等式表示线段 AE，BF，FG 之间的数量关系，并证明.



28．在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 1，M 为⊙O 上一点，点 N(0，－2).

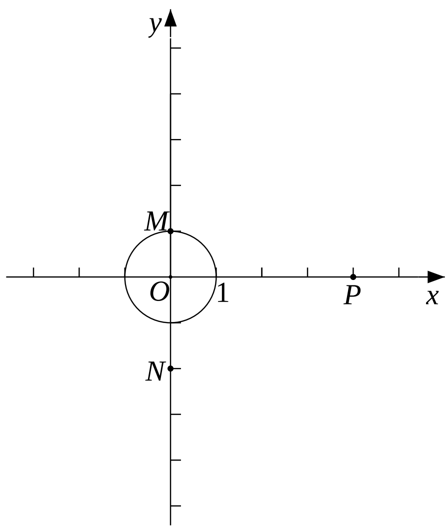
对于点 P 给出如下定义：将点 P 绕点 M 顺时针旋转 90°，得到点 P'，点 P'关于点 N 的对称点为 Q，称点 Q 为点 P 的“对应点”.

(1) 如图，已知点 M(0，1)，点 P(4，0)，点 Q 为点 P 的“对应点”.

①在图中画出点 Q；

②求证：$OQ=\sqrt{2}\,OM$；

(2) 点 P 在 x 轴正半轴上，且 $OP=t\,(t>1)$，点 Q 为点 P 的“对应点”，连接 PQ，当点 M 在⊙O 上运动时，直接写出 PQ 长的最大值与最小值的积(用含 t 的式子表示).



参考答案

阅卷须知：

1．为便于阅卷，本试卷答案中有关解答题的推导步骤写得较为详细，阅卷时，只要考生将主要过程正确写出即可。

2．若考生的解法与给出的解法不同，正确者可参照评分参考相应给分。

3．评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数。

第一部分　选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	D	C	A	A	B

第二部分　非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9．$x \geq -1$　　10．$3(a-b)(a+b)$　　11．$x=6$

12．－1　　13．115　　14．$\sqrt{5}$

15．＞；＝　　16．(1) 3；(2) 2，1，2

三、解答题（共 68 分，第 17－20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22 题 5 分，第 23－24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27－28 题，每题 7 分）

17．(本题满分 5 分)

解：原式＝$4\times\frac{1}{2}+2+2\sqrt{3}-4$ ……………………………………4 分

$=2\sqrt{3}$. ……………………………………5 分

18．(本题满分 5 分)

解：原不等式组为$\begin{cases}3x-4<x, & ①\\ \frac{5x+3}{2}>x. & ②\end{cases}$

解不等式①，得 $x<2$， ……………………………………2 分

解不等式②，得 $x>-1$， ……………………………………4 分

∴原不等式组的解集为$-1<x<2$. ……………………………………5 分

19．(本题满分 5 分)

解：$(x+3)^2+3x(x+2)$

$=x^2+6x+9+3x^2+6x$ ……………………………………2 分

$=4x^2+12x+9$

$=4(x^2+3x)+9$ ……………………………………3 分

∵ $x^2+3x-5=0$，

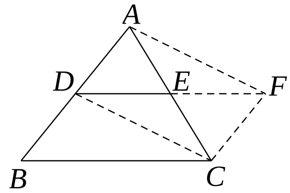
∴ $x^2+3x=5$， ……………………………………4 分

∴原式＝29. ……………………………………5 分

20．(本题满分 5 分)

方法一

证明：如图，延长 DE 到点 F，使 $EF=DE$，连接 FC，DC，AF.



∵点D，E分别是AB，AC边的中点，

∴$AE=EC$，$AD=BD$，

∴四边形 $ADCF$ 是平行四边形，

$CF \overset{//}{=} AD$，

∴$CF \overset{//}{=} BD$，

∴四边形 $DBCF$ 是平行四边形，

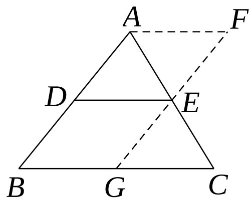
$DF \overset{//}{=} BC$.

又∵$DE=\frac{1}{2}DF$，

∴$DE // BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$. ……………………………………………5 分

方法二

证明：如图，取 BC 中点 G，连接 GE 并延长到点 F，使 $EF=GE$，连接 AF.



∵点D，E分别是AB，AC边的中点，

∴$AE=EC$，$AD=BD$.

又∵$\angle AEF=\angle CEG$，

∴$\triangle AEF \cong \triangle CEG$，

∴$AF=CG$，$\angle F=\angle CGE$，

∴$AF // CG$.

∵$BG=CG$，

∴$AF \overset{//}{=} BG$，

∴四边形 $ABGF$ 是平行四边形，

∴$AB \overset{//}{=} FG$.

∵$DB=\frac{1}{2}AB$，$GE=\frac{1}{2}GF$，

∴$DB \overset{//}{=} GE$，

∴四边形 $DBGE$ 是平行四边形，

∴$DE // BC$，且 $DE=BG=\frac{1}{2}BC$. ……………………………………………5 分

21．(本题满分 6 分)

(1) 证明：在$\triangle OED$ 和$\triangle OCB$ 中，

$OB=OD$，$\angle DOE=\angle BOC$，$\angle OED=\angle OCB$，

∴$\triangle OED \cong \triangle OCB$，

∴$OE=OC$.

又∵$AB=AD$，$OB=OD$，

∴$AO \perp BD$ 于点 O，

∴四边形 $EBCD$ 是菱形. ……………………………………………3 分

(2) 解：∵四边形 $EBCD$ 是菱形，

∴$CD=BC=5$，$OE=OC=\frac{1}{2}EC=4$.

∵$CE\perp BD$ 于点 O，∴$\angle DOC=\angle DOA=90°$，

∴在 Rt△OCD 中，$OD=\sqrt{CD^2-OC^2}=3$.

在 Rt△AOD 中，由 $\sin\angle DAO=\frac{OD}{AD}=\frac{3}{AD}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

得 $AD=3\sqrt{10}$，

∴$AO=\sqrt{AD^2-OD^2}=9$，

∴$AE=AO-OE=9-4=5$. ……………………………………………6 分

22．(本题满分 5 分)

解：(1) ∵一次函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$的图象由函数 $y=2x$ 的图象平移得到，

∴$k=2$.

将点 $A(2，0)$的坐标代入 $y=2x+b$ 中，得 $0=2\times 2+b$，

解得 $b=-4$，

∴该一次函数的解析式为 $y=2x-4$. ………………………………3 分

(2) $n\leqslant -2$. ……………………………………………5 分

23．(本题满分 6 分)

解：(1) 由题意可知，乙校学生成绩数据的中位数

$m=\frac{80+81}{2}=80.5$. ……………………………………………2 分

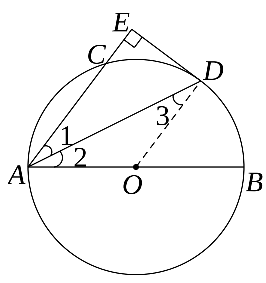
(2) $p<q$，理由：答案不唯一，如

甲校成绩数据的中位数为 79 低于平均数 79.2，而乙校成绩数据的中位数 80.5 高于平均数 79.7，故乙校成绩高于平均数的人数更多. ………………4 分

(3)88. ……………………………………………6 分

24．(本题满分 6 分)

(1) 证明：如图，连接 OD，



∵点 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，

∴$\angle 1=\angle 2$.

∵$OA=OD$，

∴$\angle 2=\angle 3$.

∴$\angle 1=\angle 3$，

∴$OD\parallel AE$.

∵$DE\perp AE$，

∴$DE\perp OD$.

又∵OD 是⊙O 的半径，

∴DE 是⊙O 的切线. ……………………………………………3 分

(2) 解：如图，设⊙O 的半径为 r，则 $OD=OB=r$，

在 Rt△ODF 中，$\angle ODF=90°$，$OD=r$，$OF=r+2$，$DF=4$，

由 $OF^2 = OD^2 + DF^2$，

得 $(r+2)^2 = r^2 + 4^2$，

解得 $r=3$，

即⊙O 的半径为 3，

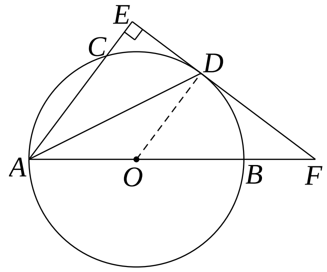
∴$OF=OB+BF=5$.

∵$OD // AE$，

∴$\dfrac{FO}{OA}=\dfrac{FD}{DE}$，

即$\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{DE}$，

∴$DE=\dfrac{12}{5}$. ……………………………………………6 分



25．(本题满分 5 分)

解：(1) 弹珠竖直高度的最大值为 6.5dm，

由题意可知 $y=a(x-4)^2+6.5$，

∵当 $x=0$ 时，$y=2.5$，

∴$a(0-4)^2+6.5=2.5$，

解得 $a=-0.25$，

∴函数关系为 $y=-0.25(x-4)^2+6.5$. ……………………………………4 分

(2) 能. ……………………………………………5 分

26．(本题满分 6 分)

解：(1) 由题意，抛物线与 y 轴交于点 $C(0，5)$.

对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4a}{2a}=2$. ……………………………………………3 分

(2) ∵抛物线的对称轴为直线 $x=2$，

∴点$(-1，y_1)$关于对称轴的对称点为$(5，y_1)$，

点$(2，y_2)$在对称轴上，点$(5，y_1)$，$(6，y_3)$在对称轴右侧.

当 $x=-1$ 时，$y_1=a+4a+5=5a+5$，

当 $x=2$ 时，$y_2=4a-8a+5=-4a+5$，

当 $x=6$ 时，$y_3=36a-24a+5=12a+5$.

当 $a>0$ 时，抛物线在对称轴右侧（即 $x\ge 2$ 时）y 随 x 的增大而增大，

∴$y_2<y_1<y_3$.

∵y_1，y_2，y_3中有且只有一个小于 0，

∴$y_2<0$，且 $y_1\geqslant 0$，

即$\begin{cases}-4a+5<0,\\5a+5\ge 0,\end{cases}$

解得 $a>\dfrac{5}{4}$.

当 $a<0$ 时，抛物线在对称轴右侧（即 $x\ge 2$ 时）y 随 x 的增大而减小，

∴$y_3<y_1<y_2$.

∵y_1，y_2，y_3中有且只有一个小于 0，

∴$y_3<0$，且 $y_1\geqslant 0$，

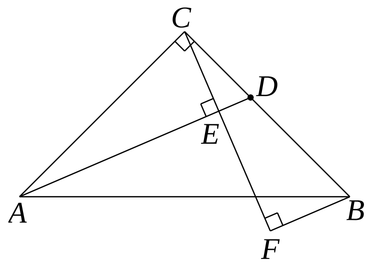
即$\begin{cases}12a+5<0,\\5a+5\ge 0,\end{cases}$

解得 $-1 \le a < -\dfrac{5}{12}$.

综上所述，$a > \dfrac{5}{4}$ 或 $-1 \le a < -\dfrac{5}{12}$. ······································6 分

27．(本题满分 7 分)

解：(1)依题意补全图形，如图.



线段 CE 与 BF 的数量关系：$CE=BF$.

证明：∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle CAE+\angle CDE=90°$.

∵$CE\perp AD$，

∴$\angle CED=90°$，

∴$\angle DCE+\angle CDE=90°$，

∴$\angle CAE=\angle DCE$.

在$\triangle ACE$和$\triangle CBF$中，

$\angle AEC=\angle CFB=90°$，$\angle CAE=\angle BCF$，$AC=BC$，

∴$\triangle ACE\cong\triangle CBF$，

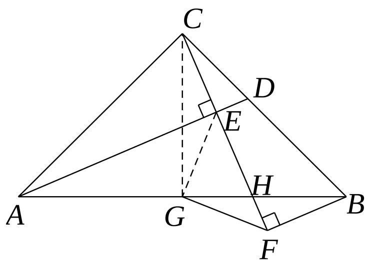
∴$CE=BF$. ··3 分

(2)线段 AE，BF，FG 之间的数量关系：$AE-BF=\sqrt{2}\,FG$.

证明：连接 CG，EG，设 CF 与 AB 交于点 H.

∵$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点 G 为 AB 中点，

∴$CG\perp AB$，$CG=BG=\dfrac{1}{2}AB$.



∵$\angle CGH=\angle BFH=90°$，

$\angle CHG=\angle BHF$，

∴$\angle GCH=\angle FBH$.

由(1)得$\triangle ACE\cong\triangle CBF$，

∴$AE=CF$，$CE=BF$.

在$\triangle GCE$和$\triangle GBF$中，

$CG=BG$，$\angle GCE=\angle GBF$，$CE=BF$，

∴$\triangle GCE\cong\triangle GBF$，

∴$GE=GF$，$\angle CGE=\angle BGF$，

∴$\angle EGF=\angle EGB+\angle BGF=\angle EGB+\angle CGE=\angle CGB=90°$，

∴$\triangle GEF$是等腰直角三角形，

∴$EF=\sqrt{2}\,FG$.

∵$CF-CE=EF$，$CF=AE$，$CE=BF$，

∴$AE-BF=\sqrt{2}\,FG$. ··7 分

28．(本题满分 7 分)

解：(1)①如图，点 Q 即为所求；

②证明：方法一：如图 1，过点 P'作 $P'T\perp y$ 轴于点 T，

∵将点 P 绕点 M 顺时针旋转 90°，得到点 P'，

∴$MP'=MP$，$\angle P'MP=90°$，

∴$\angle P'MT+\angle OMP=90°$.

∵$\angle MOP=90°$，

∴$\angle OMP+\angle OPM=90°$，

∴$\angle P'MT=\angle OPM$，

∴$\triangle P'MT\cong\triangle PMO$，

∴$MT=OP=4$，$P'T=OM=1$，

∴$P'(-1，-3)$.

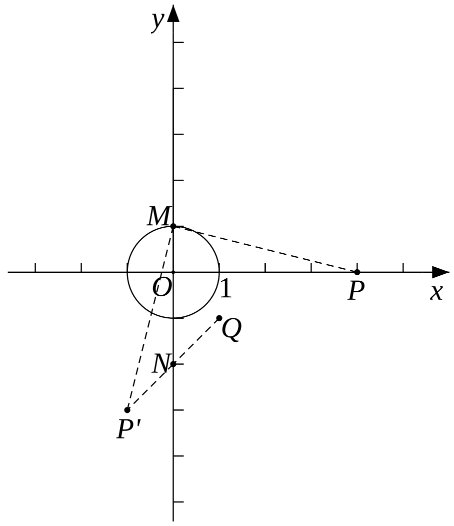
∵点 P'关于点 $N(0，-2)$的对称点为 Q，

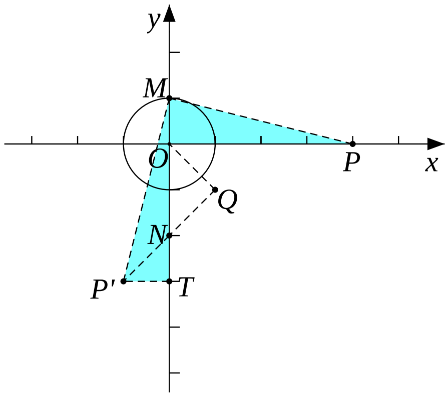
∴$Q(1，-1)$，

∴$OQ=\sqrt{2}$.

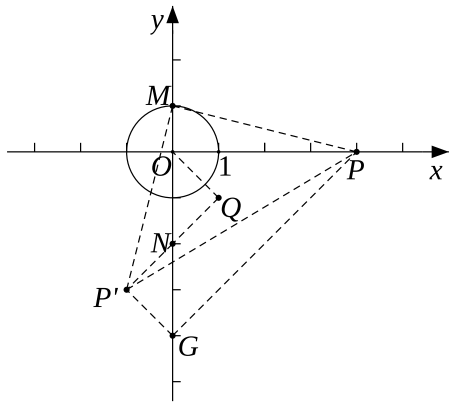
∵$OM=1$，

∴$OQ=\sqrt{2}\,OM$.





(图 1)



(图 2)

方法二：如图 2，设点 $G(0，-4)$，连接 $P'G$，PG，PP'，

由题意可知，$\triangle MP'P$ 和$\triangle OGP$ 都是等腰直角三角形，

∴$\dfrac{PP'}{MP}=\dfrac{PG}{OP}=\sqrt{2}$，$\angle MPP'=\angle OPG=45°$，

即$\angle OPM+\angle OPP'=\angle OPP'+\angle GPP'$，

∴$\angle OPM=\angle GPP'$，

∴$\triangle OPM\backsim\triangle GPP'$，

∴$\dfrac{GP'}{OM}=\sqrt{2}$，

即 $GP'=\sqrt{2}\,OM$.

又∵$P'N=NQ$，$\angle GNP'=\angle ONQ$，$GN=NO$，

∴$\triangle P'NG\cong\triangle QNO$，

∴$GP'=OQ$，

∴$OQ=\sqrt{2}\,OM$. ……………………………………………5 分

(2) PQ 长的最大值与最小值的积为 $2t^2-8t+14$. ……………………………7 分