2023北京西城初三二模

数　　学

考生须知：

1．本试卷共7页，共两部分，28道题．满分100分．考试时间120分钟．

2．在试卷和草稿纸上准确填写姓名、准考证号、考场号和座位号．

3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．

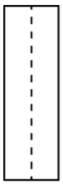
4．在答题卡上，选择题、作图题用2B铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答．

5．考试结束，将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回．

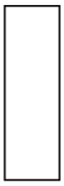
第一部分选择题

一、选择题（共16分，每题2分）第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1. 如图是某几何体的视图，则该几何体是（　　）



主视图



左视图

俯视图

A. 长方体　　B. 三棱柱　　C. 圆锥　　D. 正方体

2. 据报道，至2022年，我国已经建成世界上规模最大的教育体系、社会保障体系、医疗卫生体系，基本养老保险覆盖10.4亿人，将1040000000用科学记数法表示应为（　　）

A. 10.4×10^{8}　　B. 1.04×10^{8}　　C. 1.04×10^{9}　　D. 1.04×10^{10}

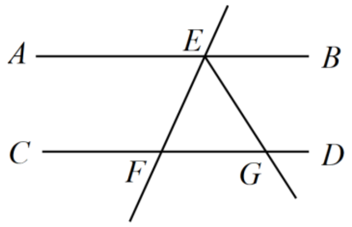
3. 方程组$\begin{cases}x+y=3,\\3x-y=5\end{cases}$的解是（　　）

A. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$　　C. $\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$

4. 比$\sqrt{3}$大且比$\sqrt{14}$小的整数可以是（　　）

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

5. 如图，直线$AB\,/\!/\,CD$，直线EF分别交AB，CD于点E，F，$\angle BEF$的平分线交CD点G，若$\angle BEF=116^\circ$，则$\angle EGC$的大小是（　　）

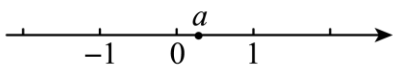


A. 116°　　B. 74°　　C. 64°　　D. 58°

6. 一个不透明的口袋中有 3 个红球和 1 个白球，这四个球除颜色外完全相同．摇匀后，随机从中摸出一个小球不放回，再随机摸出一个小球，则两次摸出小球的颜色相同的概率是(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{5}{8}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

7. 实数 a 在数轴上的位置如图所示，则 a，$-a$，a^2，$\frac{1}{a}$ 中最大的是(　　)



A. a　　B. $-a$　　C. a^2　　D. $\frac{1}{a}$

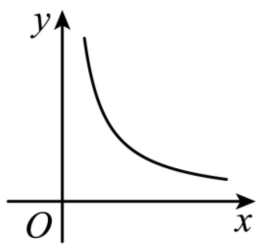
8. 下面的三个问题中都有两个变量：

①京沪铁路全程为1463km，某次列车的平均速度 y(单位：km/h)与此次列车的全程运行时间 x(单位：h)；

②已知北京市的总面积为$1.68\times10^4\text{km}^2$，人均占有面积 y(单位：km^2/人)与全市总人口 x(单位：人)；

③某油箱容量是50L 的汽车，加满汽油后开了200km时，油箱中汽油大约消耗了$\frac{1}{4}$．油箱中的剩油量 yL 与加满汽油后汽车行驶的路程 $x$km．

其中，变量 y 与变量 x 之间的函数关系可以用如图所示的图象表示的是(　　)



A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

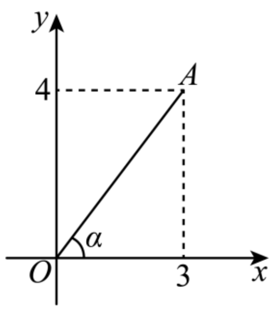
第二部分非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若代数式 $\frac{1}{x-2}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是 ________.

10. 已知反比例函数 $y=\frac{k-1}{x}$ 的图象位于第二、四象限，则 k 的取值范围为______.

11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为$(3,4)$，设线段 OA 与 x 轴正方向的夹角为 α，则 $\tan\alpha=$__________.



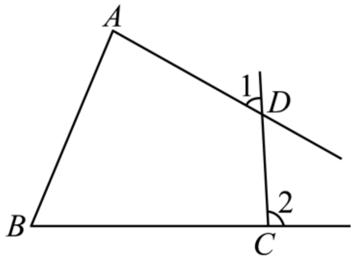
12. 用一组 a ,b 的值说明命题："若 $a^2=b^2$，则 a=b"是错误的，这组值可以是 a= _________.，b=______.

13. 某射击队要从甲、乙、丙三名队员中选出一人代表射击队参加市里举行的射击比赛，下表是这三名队员在相同条件下 10 次射击成绩的数据：

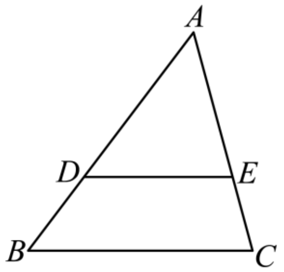
	甲	乙	丙
平均数	8.5	9	8.8
方差	0.25	0.23	0.27

如果要选出一个成绩好且又稳定的队员去参加比赛，这名队员应是___________.

14. 如图，$\angle A=80°$，$\angle B=70°$，则 $\angle 1+\angle 2=$___________.



15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$S_{\triangle ADE}=4$，$S_{四边形DBCE}=5$，则 $\dfrac{DE}{BC}$ 的值是___________.



16. 下表是某市本年度 GDP 前十强的区县排行榜，变化情况表示该区县相对于上一年度名次变化的情况，"↑"表示上升，"↓"表示下降，"一"则表示名次没有变化．已知每个区县的名次变化都不超过两位，上一年度排名第 1 的区县是___________，上一年度排在第 6，7，8 名的区县依次是___________．(写出一种符合条件的排序)

名次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区县	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

变化情况	↑	一	↓	一	↑	↓	↑	↓	↓	一

三、解答题（共 68 分，第 17-20 题，每题 5 分，第 21-22 题，每题 6 分，第 23 题 5 分，第 24 题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$\sqrt{8}-4\cos 45°+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-|-2|$.

18. 解不等式组$\begin{cases}2x+1>\frac{x-1}{2}\\3x-1\le 5\end{cases}$，并写出它的所有正整数解.

19. 已知：如图 1，线段 a，b.

求作：矩形 $ABCD$，使得 $AB=a$， $BC=b$.

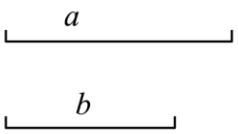


图1

作法：如图 2.

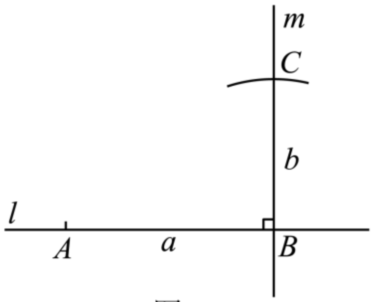


图2

1．在直线 l 上截取 $AB=a$.

2．过点 B 作直线 $m\perp l$ ，在直线 m 上截取 $BC=b$.

3．分别以点 A 和点 C 为圆心，b，a 的长为半径画弧，两弧的交点为 D.

(点 D 与点 C 在直线 l 的同侧)

4．连接 AD，CD .

则四边形 $ABCD$ 为所求的矩形.

根据上面设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，在图 2 中补全图形(保留作图痕迹)；

（2）完成下面的证明：

证明：∵ $AD=BC=b$， $AB=DC=a$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形(____________)．(填推理的依据)

∵直线 $m \perp l$，

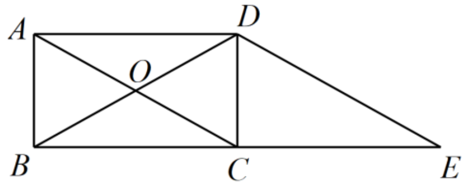
∴ $\angle ABC =$ __________ °，

∴四边形 $ABCD$ 是矩形(__________)．(填推理的依据)．

20. 已知 $a^2+a-5=0$，求代数式 $\left(a-\frac{1}{a}\right)\div\frac{a-1}{a^2}$ 的值．

21. 关于 x 的方程 $x^2-3x+m+1=0$ 有实数根，且 m 为正整数，求 m 的值及此时方程的根．

22. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，过点 D 作 AC 的平行线交 BC 的延长线于点 E．

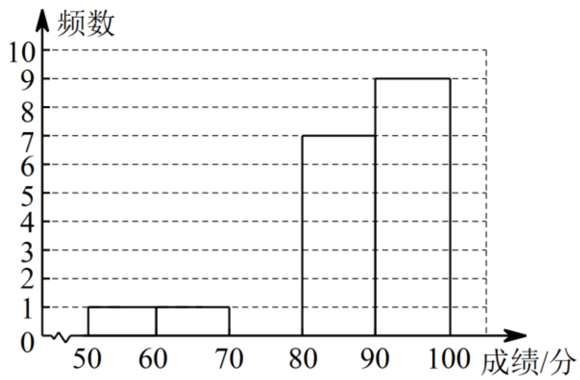


（1）求证：$BD=DE$；

（2）连接 OE，若 $AB=2$，$BC=4$，求 OE 的长．

23. 为增强居民的反诈骗意识，A，B 两个小区的居委会组织小区居民进行了有关反诈骗知识的有奖问答活动．现从 A，B 小区参加这次有奖问答活动居民的成绩中各随机抽取 20 个数据，分别对这 20 个数据进行整理、描述和分析，下面给出了部分信息．

a．A 小区参加有奖问答活动的 20 名居民成绩的数据的频数分布直方图如下（数据分成 5 组：$50\le x<60$，$60\le x<70$，$70\le x<80$，$80\le x<90$，$90\le x\le 100$）；



b．A 小区参加有奖问答活动的 20 名居民成绩的数据在 $80\le x<90$ 这一组的是：

84　　85　　85　　86　　86　　88　　89

c．B 小区参加有奖问答活动的 20 名居民成绩的数据如下：

分数	73	81	82	85	88	91	92	94	96	100
人数	1	3	2	3	1	3	1	4	1	1

根据以上信息，解答下列问题：

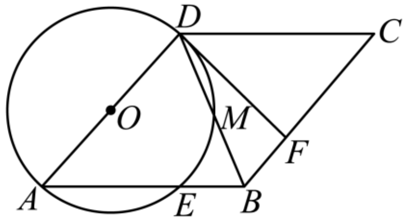
（1）补全 a 中频数分布直方图；

（2）A 小区参加有奖问答活动的 20 名居民成绩的数据的中位数是__________；B 小区参加有奖问答活动

的 20 名居民成绩的数据的众数是__________；

（3）为鼓励居民继续关注反诈骗宣传，对在这次有奖问答活动中成绩大于或等于 90 分的居民颁发小奖品．已知 A，B 两个小区各有 2000 名居民参加这次活动，估计这两个小区的居委会一共需要准备多少份小奖品．

24. 如图，以菱形 $ABCD$ 的边 AD 为直径作 $\odot O$ 交 AB 于点 E，连接 DB 交 $\odot O$ 于点 M，F 是 BC 上的一点，且 $BF=BE$，连接 DF．



（1）求证：$DM=BM$；

（2）求证：DF 是 $\odot O$ 的切线．

25. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像与一次函数 $y=2x$ 的图像交于点 $A(a,2)$．

（1）求 a，k 的值；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫做整点．点 P 是射线 OA 上一点，过点 P 分别作 x 轴，y 轴的垂线交函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像于点 B，C．将线段 PB，PC 和函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像在点 B，C 之间的部分所围成的区域（不含边界）记为 W．

利用函数图像解决下列问题：

①若点 P 的横坐标是 2，直接写出区域 W 内整点个数；

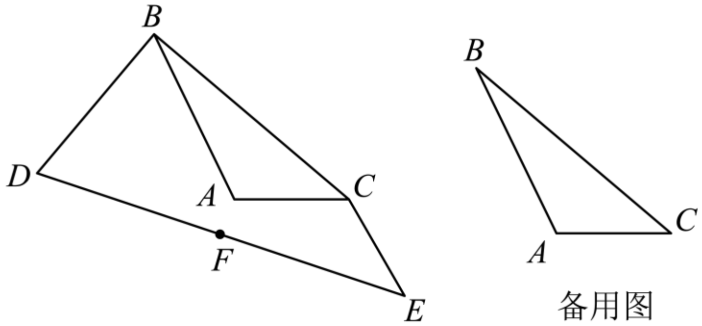
②若区域 W 内恰有 5 个整点，直接写出点 P 的横坐标 x_P 的取值范围．

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 都在抛物线 $y=ax^2-2ax+8(a<0)$ 上，且 $-1<x_1<2$，$1-m<x_2<m+7$．

（1）当 $m=-2$ 时，比较 y_1，y_2 的大小关系，并说明理由；

（2）若存在 x_1，x_2，满足 $y_1=y_2$，求 m 的取值范围．

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，边 AB 绕点 B 顺时针旋转 α（$0°<\alpha<180°$）得到线段 BD，边 AC 绕点 C 逆时针旋转 $180°-\alpha$ 得到线段 CE，连接 DE，点 F 是 DE 的中点．



备用图

（1）以点 F 为对称中心，作点 C 关于点 F 的对称点 G，连接 BG，DG．

①依题意补全图形，并证明 $AC = DG$；

②求证：$\angle DGB = \angle ACB$；

（2）若 $\alpha = 60°$，且 $FH \perp BC$ 于 H，直接写出用等式表示的 FH 与 BC 的数量关系．

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，给定圆 C 和点 P，若过点 P 最多可以作出 k 条不同的直线，且这些直线被圆 C 所截得的线段长度为正整数，则称点 P 关于圆 C 的特征值为 k．已知圆 O 的半径为 2，

（1）若点 M 的坐标为 $(1,1)$，则经过点 M 的直线被圆 O 截得的弦长的最小值为__________，点 M 关于圆 O 的特征值为__________；

（2）直线 $y = x + b$ 分别与 x，y 轴交于点 A，B，若线段 AB 上总存在关于圆 O 的特征值为 4 的点，求 b 的取值范围；

（3）点 T 是 x 轴正半轴上一点，圆 T 的半径为 1，点 R，S 分别在圆 O 与圆 T 上，点 R 关于圆 T 的特征值记为 r，点 S 关于圆 O 的特征值记为 s．当点 T 在 x 轴正轴上运动时，若存在点 R，S，使得 $r + s = 3$，直接写出点 T 的横坐标 t 的取值范围．

参考答案

第一部分选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1.【答案】B

【分析】根据几何体的主视图和左视图都是长方形，可判断该几何体是柱体，进而根据俯视图的形状，可判断柱体底面形状，得到答案.

【详解】由几何体的主视图和左视图都是长方形，

故该几何体是柱体，

又因为俯视图是三角形，

故该几何体是三棱柱.

故选：B.

2.【答案】C

【分析】科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 ≥10 时，n 是正数；当原数的绝对值 <1 时，n 是负数.

【详解】解：将 1040000000 用科学记数法表示为：1.04×10^9.

故选：C.

$1\le|a|<10$，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3.【答案】C

【分析】根据加减消元法进行求解即可.

【详解】解：$\begin{cases}x+y=3① \\ 3x-y=5②\end{cases}$，

①+②，得，$4x=8,$

解得，$x=2,$

把 $x=2$ 代入①得，$2+y=3,$

解得，$y=1,$

∴方程组的解为：$\begin{cases}x=2, \\ y=1\end{cases}$

故选：C

【点睛】本题主要考查解二元一次方程组，解答的关键是对解二元一次方程组的方法的掌握.

4.【答案】B

【分析】根据算术平方根的定义估算无理数 $\sqrt{3}$、$\sqrt{14}$ 的大小即可.

【详解】解：$\because 1<\sqrt{3}<2, 3<\sqrt{14}<4$，

$\therefore$比$\sqrt{3}$大且比$\sqrt{14}$小的整数有：2和3，

故选：B．

5.【答案】D

【分析】首先根据角平分线计算出$\angle BEG=\frac{1}{2}\angle BEF=58^{\circ}$，再根据两直线平行内错角相等得出$\angle EGC$的大小即可．

【详解】解：$\because \angle BEF=116^{\circ}$，$EG$平分$\angle BEF$，

$\therefore \angle BEG=\angle FEG=\frac{1}{2}\angle BEF=\frac{1}{2}\times 116^{\circ}=58^{\circ}$，

$\because AB // CD$，

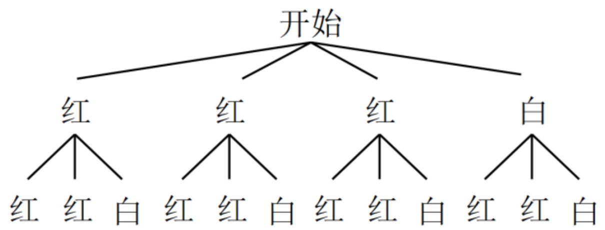
$\therefore \angle EGC=\angle BEG=58^{\circ}$，

故选：D．

6.【答案】C

【分析】先利用树状图法得出两次摸球所有可能的结果，进而利用概率的计算公式求解即可．

【详解】画树状图得所有可能出现的结果数为：



共有12种等可能的结果，两次摸出小球的颜色相同的有6种情况，

两次摸出小球的颜色相同的概率是：$\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$．

故选C．

7.【答案】D

【分析】由数轴可知$0<a<1$，移项和两边除以a分别得到$-a<0$，$\frac{1}{a}>1$，两边同时乘以a得到$0<a^{2}<a$，从而得到$-a<0<a^{2}<a<1<\frac{1}{a}$，由此选出答案．

【详解】解：由数轴可知：$0<a<1$，

$\therefore -a<0$，$\frac{1}{a}>1$．

又$\because 0<a<1$，

$\therefore$两边乘以a得：$0<a^{2}<a$，

$\therefore -a<0<a^2<a<1<\frac{1}{a}$，

$\therefore a$，$-a$，a^2，$\frac{1}{a}$中，最大的是$\frac{1}{a}$．

故选：D

8.【答案】A

【分析】分别求出三个问题中变量y与变量x之间的函数关系式即可得到答案．

【详解】解：①由平均速度等于路程除以时间得：$y=\frac{1463}{x}$，符合题意；

②由人均面积等于总面积除以总人口得：$y=\frac{1.68\times 10^4}{x}$，即$y=\frac{16800}{x}$，符合题意；

③由加满汽油后开了200km时，油箱中汽油大约消耗了$\frac{1}{4}$，可知每公里油耗为：$\frac{1}{4}\times 50\div 200=\frac{1}{16}(\mathrm{L})$，

再由油箱中的剩油量等于油箱容量减去耗油量，耗油量等于每公里油耗乘以加满汽油后汽车行驶的路程得：

$y=50-\frac{1}{16}x$，不符合题意；

综上分析可知，变量y与变量x之间的函数关系可以用该图象表示的是①②．

故选：A．

第二部分非选择题

二、填空题（共16分，每题2分）

9.【答案】$x\neq 2$

【分析】根据分式有意义的条件即分母不为0可直接进行求解．

【详解】解：由题意可得：

$x-2\neq 0$，

$\therefore x\neq 2$，

故答案为：$x\neq 2$．

10.【答案】$k<1$

【分析】根据反比例函数$y=\frac{k-1}{x}$的图象位于第二、四象限，可以得到$k-1<0$，然后求解即可．

【详解】解：$\because$反比例函数$y=\frac{k-1}{x}$的图象位于第二、四象限，

$\therefore k-1<0$，

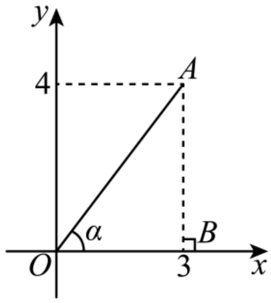
解得：$k<1$，

故答案为：$k<1$．

11.【答案】$\frac{4}{3}$##$1\frac{1}{3}$

【分析】取点$B(3,0)$，则$AB\perp x$轴于B，根据点A的坐标求出OB和AB，根据锐角正切函数的定义求出即可.

【详解】取点$B(3,0)$，则$AB\perp x$轴于B，



∵点A的坐标为(3，4)，

∴$OB=3$，$AB=4$，

$tan\alpha=\dfrac{AB}{OB}=\dfrac{4}{3}$.

故答案为：$\dfrac{4}{3}$.

12.【答案】 ①. 1 ②. -1

【分析】通过a取1，b取-1可说明命题“若$a^2=b^2$，则a=b”是错误的.

【详解】解：当a=1，b=-1时，满足$a^2=b^2$，但a≠b．故命题错误.

故答案为1，-1（答案不唯一）.

13.【答案】乙

【分析】根据方差越小越稳定和平均数决策即可.

【详解】解：∵乙的平均数最大，方差最小，即乙的成绩好且状态稳定，

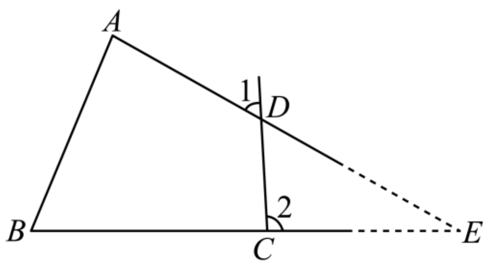
∴这名队员应是乙.

故答案是：乙.

14.【答案】$150°$

【分析】延长AD,BC相交于点E，由三角形内角和定理求出$\angle E=30°$，$\angle 2+\angle EDC=150°$，由对顶角相等可得$\angle EDC=\angle 1$，从而可得结论.

【详解】解：延长AD,BC相交于点E，如图，



∴$\angle A+\angle B+\angle E=180°$，

又 $\angle A=80°$，$\angle B=70°$，

$\therefore \angle E=180°-\angle A-\angle B=18°-80°-70°=30°$，

又 $\angle 2+\angle EDC+\angle E=180°$，

$\therefore \angle 2+\angle EDC=180°-\angle E=180°-30°=150°$，

又 $\angle EDC=\angle 1$，

$\therefore \angle 1+\angle 2=150°$，

故答案为：$150°$.

15.【答案】$\frac{2}{3}$

【分析】先证明$\triangle ADE\sim\triangle ABC$，然后利用相似三角形的性质求解.

【详解】解：$\because DE\parallel BC$，

$\therefore \triangle ADE\sim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2=\frac{4}{4+5}$，

$\therefore \frac{DE}{BC}=\frac{2}{3}$，

故答案为：$\frac{2}{3}$.

16.【答案】 ①. C ②. E、H、I或H、E、I. (二者之一即可)

【分析】①C地GDP名次下降，只能是第一名下降而来的，即上一年度排名第1的区县是C；

②F地GDP名次下降，上一年度F地排第五，G地GDP名次上升，上一年度G地排第九，E地本年度GDP排第五，名次上升，上一年度可能是排第六或者第七，然后分类讨论即可.

【详解】解：①$\because A$地GDP名次上升，每个区县的名次变化都不超过两位，B地GDP名次无变化，

$\therefore$只能是第三名上升而来的，即原来A地原来名次是第三名；

同理，C地GDP名次下降，只能是第一名下降而来的；

$\therefore$上一年度排名第1的区县是C，上一年度排名前四名依次是C、B、A、D；

②F地GDP名次下降，只能是从第五名下降，即上一年度F地排第五，

同理，G地GDP名次上升，只能是从第九名上升，即上一年度G地排第九，

$\because E$地本年度GDP排第五，名次上升，每个区县的名次变化都不超过两位，

$\therefore E$地上一年度可能是排第六或者第七

(i)若E地上一年度是排第六，即E地和F地的排名交换，

$\therefore H$地上一年度是排第七，I地上一年度是排第八，

$\therefore$上一年度排名从前往后依次是：C、B、A、D、F、E、H、I、G、J；

(ii)若E地上一年度是排第七，

$\because H$地本年度GDP排第八，GDP名次下降，现在上一年度未确定的只有第六和第八，

∴H地上一年度是排第六，I地上一年度是排第八

∴上一年度排名从前往后依次是：C、B、A、D、F、H、E、I、G、J；

∴上一年度排在第6，7，8名的区县依次是E、H、I或H、E、I．

故答案为：C；E、H、I或H、E、I（二者之一即可）.

三、解答题（共68分，第17-20题，每题5分，第21-22题，每题6分，第23题5分，第24题6分，第25题5分，第26题6分，第27-28题，每题7分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17.【答案】1

【解析】

【分析】利用特殊角的三角函数值、负整数指数幂、绝对值的性质逐项计算，即可求解.

【详解】解：$\sqrt{8}-4\cos 45^\circ+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-|-2|$

$=2\sqrt{2}-4\times\frac{\sqrt{2}}{2}+3-2$

$=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3-2$

$=1$.

18.【答案】$-1<x\le 2$,1,2

【分析】根据解一元一次不等式的步骤即可解答.

【详解】解：$\begin{cases}2x+1>\frac{x-1}{2}① \\ 3x-1\le 5②\end{cases}$，

由①得：$x>-1$，

由②得：$x\le 2$，

∴原不等式的解集为$-1<x\le 2$；

∴原不等式所有正整数解为：1,2；

19.【答案】(1）见解析　（2）两组对边分别相等的四边形是平行四边形；90；有一个内角是直角的平行四边形是矩形.

【解析】

【分析】(1）按照步骤操作即可；

(2）根据矩形的判定定理推导，填空即可.

【小问1详解】

解：补全图形如下：

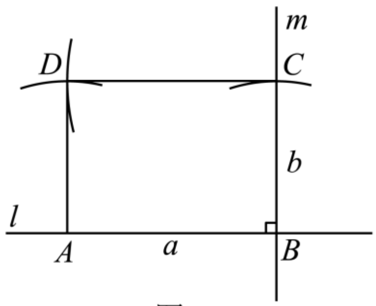


图2

【小问2详解】

证明：∵ $AD=BC=b$， $AB=DC=a$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形(两组对边分别相等的四边形是平行四边形).

∵直线 $m\perp l$，

∴ $\angle ABC=$ __90°__ ，

∴四边形 $ABCD$ 是矩形(有一个内角是直角的平行四边形是矩形).

故答案是：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；90；有一个内角是直角的平行四边形是矩形.

20.【答案】化简为： a^2+a，结果值为：5

【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再根据已知等式可得答案.

【详解】解： $\left(a-\frac{1}{a}\right)\div\frac{a-1}{a^2}$

$=\frac{a^2-1}{a}\times\frac{a^2}{a-1}$

$=\frac{(a+1)(a-1)}{a}\times\frac{a^2}{a-1}$

$=a^2+a$，

∵ $a^2+a-5=0$

∴ $a^2+a=5$

∴ $\left(a-\frac{1}{a}\right)\div\frac{a-1}{a^2}=a^2+a=5$.

21.【答案】$m=1$， $x_1=2$， $x_2=1$

【分析】先根据根的判别式的意义得到 $\Delta=(-3)^2-4(m+1)\geq 0$，解不等式，从而得到正整数 m 的值，代入原方程，然后利用因式分解法解方程即可.

【详解】根据题意得 $\Delta=(-3)^2-4(m+1)\geq 0$

解得 $m\leq\frac{5}{4}$

所以正整数 m 的值为 1

代入原方程得 $x^2-3x+2=0$

即 $(x-2)(x-1)=0$

$\therefore x_1=2$， $x_2=1$

22.【答案】（1）见解析　（2）$OE=\sqrt{37}$

【分析】（1）根据矩形的对角线相等可得 $AC=BD$，对边平行可得 $AD\parallel BC$，再证明出四边形 $ADEC$ 是平行四边形，根据平行四边形的对边相等可得 $AC=DE$，从而得证；

（2）如图，过点 O 作 $OF\perp CD$ 于点 F，欲求 OE，只需在直角 $\triangle OEF$ 中求得 OF、FE 的值即可．结合三角形中位线求得 OF，结合矩形、平行四边形的性质以及勾股定理求得 OE 即可．

【小问 1 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC=BD,\ AD\parallel BC$，

又 $\because DE\parallel AC$，

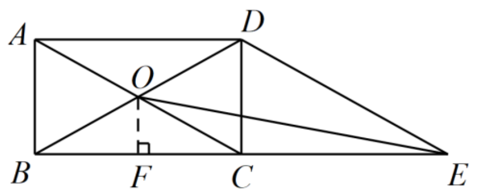
$\therefore$ 四边形 $ADEC$ 是平行四边形，

$\therefore AC=DE$，

$\therefore BD=DE$；

【小问 2 详解】

如图，过点 O 作 $OF\perp CD$ 于点 F，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC=BD,$ 点 O 是 AC,BD 的中点， $AD=BC=4,$

$\therefore OC=\frac{1}{2}AC, OB=\frac{1}{2}BD,$

$\therefore OC=OB,$

$\therefore CF=BF=\frac{1}{2}BC=2$，

$\therefore F$ 点是 BC 的中点，

$\therefore OF$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线，

$\therefore OF=\frac{1}{2}CD=1,$

又 $\because$ 四边形 $ADEC$ 是平行四边形，

$\therefore CE=AD=4,$.

$\therefore EF = CF + CE = 2 + 4 = 6$.

在 $Rt\triangle OEF$ 中，由勾股定理可得：$OE = \sqrt{OF^2 + EF^2} = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37}$.

【点睛】本题考查了矩形的性质，平行四边形的判定与性质，熟记各性质并求出四边形 $ADEC$ 是平行四边形是解题的关键.

23.【答案】(1）见解析　（2）88.5 分；94 分

（3）950 份

【分析】(1）用 20 减去第一、二、四、五组的频数即可得到第三组（$70 \le x < 80$）的频数，进而可补全频数分布直方图；

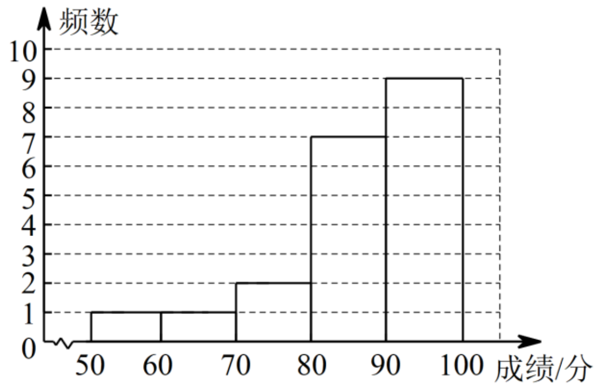
（2）根据中位数和众数的定义求解即可；

（3）用样本百分比估计总体数量即可.

【小问 1 详解】

第三组（$70 \le x < 80$）的频数为：$20 - 1 - 1 - 7 - 9 = 2$，

补全图形如下：



【小问 2 详解】

∵20 个数据按大小顺序排列，最中间的两个数据是第 10 和 11 个，

∴A 小区参加有奖问答活动的 20 名居民成绩的数据的中位数在 $80 \le x < 90$ 这一组内的第 6 和 7 个数据的平均数，即 $\frac{88+89}{2}=88.5$；

B 小区参加有奖问答活动的 20 名居民成绩中出现次数最多的是 94 分，出现 4 次，

故 B 小区参加有奖问答活动的 20 名居民成绩中众数是 94 分，

故答案为：88.5 分；94 分；

【小问 3 详解】

$2000\times\frac{9+3+1+4+1+1}{20+20}=950$（份）

答：估计这两个小区的居委会一共需要准备 950 份小奖品

24.【答案】(1）见解析；

（2）见解析

【分析】（1）根据直径所对的圆周角是直角及菱形的性质得到点M是BD的中点即可解答；

（2）根据菱形的性质及全等三角形的判定得到$\triangle DBE\cong\triangle DBF$，再根据全等三角形的性质得到$\angle BFD=\angle DEB=90^\circ$，最后利用四边形的内角和及切线的判定即可解答.

【小问1详解】

解：连接AM，

$\because AD$为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle AMD=90^\circ$，

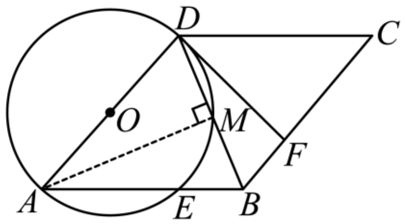
$\therefore AM\perp BD$，

$\because$四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore AD=AB$，

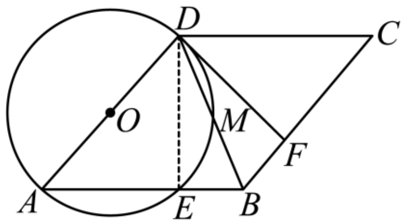
$\therefore$点M是BD的中点，

$\therefore DM=BM$；



【小问2详解】

解：连接DE，



$\because$四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore \angle DBE=\angle DBF$，$\angle DAB+\angle ABC=180^\circ$，

$\therefore$在$\triangle DBE$和$\triangle DBF$，

$$\begin{cases} BE=BF \\ \angle DBE=\angle DBF \\ BD=BD \end{cases},$$

$\therefore \triangle DBE\cong\triangle DBF\left(SAS\right)$，

$\therefore \angle DEB=\angle DFB$，

$\because AD$是$\odot O$的直径，

$\therefore \angle AED=\angle DEB=90^\circ$，

$\therefore \angle BFD=\angle DEB=90^\circ$，

$\because \angle DAB+\angle ABC=180^\circ$，

$\therefore$ 在四边形 $ABFD$ 中，$\angle ADF+\angle BFE=180^\circ$，

$\therefore \angle ADF=90^\circ$，

$\therefore AD\perp DF$，

$\therefore DF$ 是 $\odot O$ 的切线.

25.【答案】（1）1，2

（2）①1；② $2<x_P\le\dfrac{5}{2}$

【分析】（1）先根据直线的解析式可求 a 的值，从而可得点 A 的坐标，再将点 A 坐标代入反比例函数的解析式可得 k 的值；

（2）①先求出点 P 坐标，再根据反比例函数的解析式求出点 B、C 坐标，然后结合函数图像、整点的定义即可得；②由图可知点 P 不可能在点 A 下方，故点 P 在点 A 上方，结合函数图像列出不等式组求解即可.

【小问 1 详解】

解：$\because$ 函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图像与一次函数 $y=2x$ 的图像交于点 $A(a,2)$，

$\therefore 2=2\times a$，即 $a=1$，

$\therefore A(1,2)$，

将 $A(1,2)$ 代入反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 中，$2=\dfrac{k}{1}$ 解得：$k=2$，

故答案为：$a=1$，$k=2$；

【小问 2 详解】

①由（1）可知反比例函数解析式为 $y=\dfrac{2}{x}(x>0)$，

$\because$ 点 P 是射线 OA 上一点，P 的横坐标是 2，

$\therefore y=2\times 2=4$

$\therefore P(2,4)$

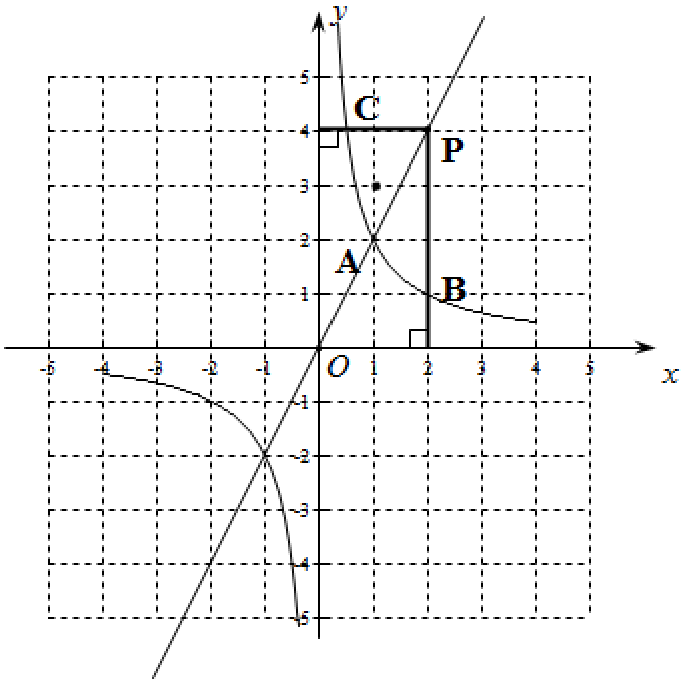
将 $x=2$ 代入 $y=\dfrac{2}{x}(x>0)$，得 $y=1$

将 $y=4$ 代入 $y=\dfrac{2}{x}(x>0)$，得 $x=\dfrac{1}{2}$

$\because$ 点 P 与 x 轴，y 轴的垂线交函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图像于点 B，C，

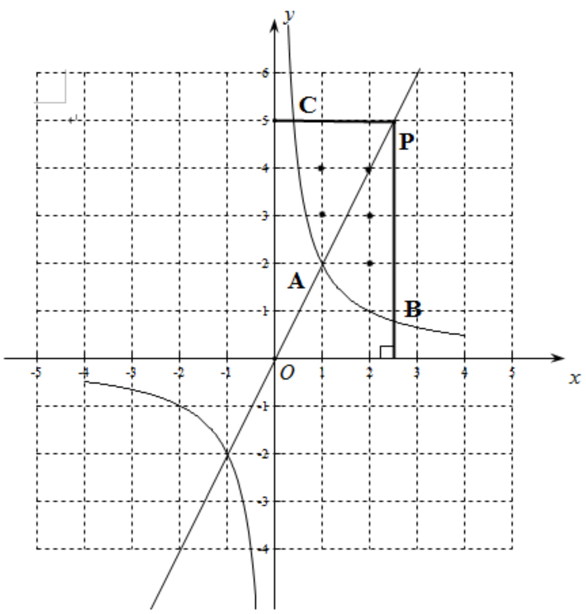
$\therefore B(2,1)$，$C\left(\dfrac{1}{2},4\right)$，

如图：



结合函数图像可知，区域W内有1个整数点；

②区域W内恰有5个整点，由图可知点P只能位于A的上方如图：



如图，当P的纵坐标为5时，横坐标为$x=\frac{y}{2}=\frac{5}{2}$，

结合图像可知，当$2<x_P\le\frac{5}{2}$时，区域内有5个整数点．

26.【答案】（1）$y_1>y_2$，理由见解析

（2）$m>1$

【解析】

【分析】（1）当$m=-2$时，$3<x_2<5$，将抛物线解析式化为顶点式，得到对称轴，根据x_1，x_2的大小判断与对称轴的距离，结合a<0，即可得出答案；

（2）根据题意可知满足 $y_1=y_2$，即 x_1 与 x_2 关于对称轴 $x=1$ 对称，当 $-1<x_1<2$ 时，则 x_2 的最小值要比 $x_1=2$ 时的对称点 0 小，x_2 的最大值要比 $x_1=-1$ 时的对称点 3 大，解不等式组即可.

【小问 1 详解】

$y_1>y_2$；

理由：∵ $y=ax^2-2ax+8=a\left(x-1\right)^2+8-a$，

∴抛物线的对称轴是直线 $x=1$

当 $m=-2$ 时，$3<x_2<5$

∵ $-1<x_1<2$，$3<x_2<5$，对称轴是直线 $x=1$

∴ x_1 比 x_2 离对称轴近

∵ $a<0$，抛物线开口向下

∴ $y_1>y_2$

【小问 2 详解】

∵ $y_1=y_2$

∴ x_1 与 x_2 关于对称轴 $x=1$ 对称

∵ $-1<x_1<2$

∴ $0<x_2<3$

即 $\begin{cases}1-m<0\\m+7>3\end{cases}$

解得 $m>1$

27.【答案】（1）①补全图形见解析，证明见解析；②见解析

（2）$FH=\dfrac{\sqrt{3}}{4}BC$

【解析】

【分析】（1）①依题意补全图形如图所示，先证明 $\triangle DFG\cong\triangle EFC$，推出 $DG=CE$，然后结合旋转的性质可得结论；②根据对称的性质可证明 $\triangle BDG\cong\triangle BAC$，可得结论；

（2）连接 AD,BF，如图，根据等边三角形的性质结合（1）②的结论可得 $\triangle BGC$ 是等边三角形，可得 $\angle BCF=60^\circ$，再根据等边三角形的性质、30 度角的直角三角形的性质以及三角函数即可得出结论.

【小问 1 详解】

①依题意补全图形如图所示：

证明：∵点 F 是 DE 的中点，

∴ $DF=EF$，

∵点 C 关于点 F 的对称点为 G，

$\therefore CF=GF$，

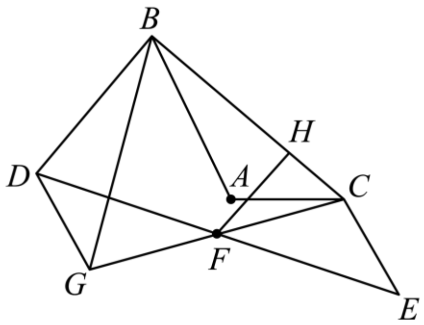
又$\because \angle DFG=\angle EFC$，

$\therefore \triangle DFG\cong\triangle EFC$，

$\therefore DG=CE$，

由旋转的性质可得：$AC=CE$，

$\therefore AC=DG$；



②证明：$\because$点C关于点F的对称点为G，

$\therefore BG=BC$，

$\because BD=BA, DG=AC$，

$\therefore \triangle BDG\cong\triangle BAC$，

$\therefore \angle DGB=\angle ACB$；

【小问2详解】

解：连接AD, BF，如图，由题意得$\angle DBA=\alpha=60^\circ$，

$\because \triangle BDG\cong\triangle BAC$，

$\therefore \angle DBG=\angle CBA$，

$\therefore \angle GBC=\angle DBA=60^\circ$，

$\because BG=BC$，

$\therefore \triangle BGC$是等边三角形，

$\therefore \angle BCF=\angle GBC=60^\circ$，

$\because$点F是CG的中点，

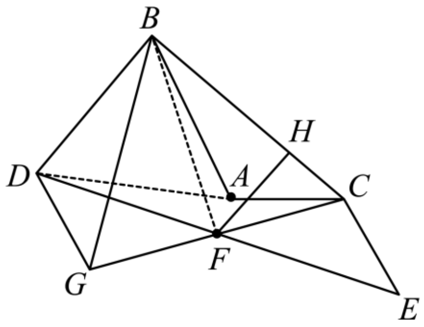
$\therefore BF\perp CG, \angle CBF=\dfrac{1}{2}\angle CBG=30^\circ$，

$\therefore CF=\dfrac{1}{2}BC$，

$\because FH\perp BC$，$\angle BCF=60^\circ$，

$\therefore FH=CF\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}CF=\dfrac{\sqrt{3}}{4}BC$；

$\therefore FH$与BC的数量关系是$FH=\dfrac{\sqrt{3}}{4}BC$．



28.【答案】（1）$2\sqrt{2}$，3

（2）b 的取值范围是 $\sqrt{3} \le b \le \sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{6} \le b \le -\sqrt{3}$；

（3）$2-\frac{\sqrt{3}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{7}}{2}+1$

【分析】（1）设经过点 M 的直线与 $\odot O$ 交于 E、F 两点，过点 O 作 $OH \perp EF$ 于 H，连接 OM，OE，利用垂径定理得到 $EF=2EH$，由勾股定理可得当 OH 最大时，EH 最小，即此时 EF 最小，求出 $OM=\sqrt{2}$，再由 $OH \le OM$，得到当点 H 与点 M 重合时，OH 有最大值 $\sqrt{2}$，即可求出 EF 的最小值为 $2\sqrt{2}$，则被圆 O 截得的弦长取值范围为 $2\sqrt{2} \le x \le 4$，再由被圆 O 截得的弦长为 3 的弦有 2 条，被圆 O 截得的弦长为 4 的弦只有 1 条，可得点 M 关于圆 O 的特征值为 3；

（2）根据题意得，关于圆 O 的特征值为 4 的所有点都在以 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆周上，分当 $b>0$ 时和当 $b<0$ 时，两种情况讨论即可求解；

（3）由于同一平面内，对于任意一点 Q，经过 O、Q 的直线与圆 O 截得的弦（直径）都为 4，则点 Q 关于圆 O 的特征值不可能为 0，由此可得 $rs \ne 0$，则 $\begin{cases} r=1 \\ s=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} r=2 \\ s=1 \end{cases}$；经过点 S 且弦长为 4（最长弦）的直线有 1 条，弦长为 3（最短弦）的直线有 1 条，由（2）可知点 S 一定在以 O 为圆心，以 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 为半径的圆上，同理点 R 一定在以 T 为圆心，以 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆上，则当满足以 O 为圆心，2 为半径的圆与以 T 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆有交点，且同时满足以 O 为圆心，$\frac{\sqrt{7}}{2}$ 为半径的圆与以 T 为圆心，1 为半径的圆有交点时 t 的值符合题意，由此求解即可．

【小问 1 详解】

解：设经过点 M 的直线与 $\odot O$ 交于 E、F 两点，过点 O 作 $OH \perp EF$ 于 H，连接 OM，OE，

$\therefore EF=2EH$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEH$ 中，由勾股定理得 $EH=\sqrt{OE^2-OH^2}=\sqrt{4-OH^2}$，

$\therefore$ 当 OH 最大时，EH 最小，即此时 EF 最小，

$\because$ 点 M 的坐标为 $(1,1)$，

$\therefore OM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

又$\because OH \le OM$，

$\therefore$当点H与点M重合时，OH有最大值$\sqrt{2}$，

$\therefore$此时EH有最小值$\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore EF$的最小值为$2\sqrt{2}$

$\because$过点M的直线被圆O截得的弦长的最大值为4（直径），

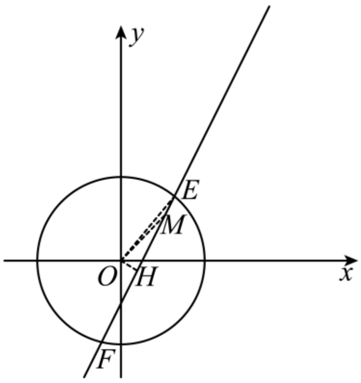
$\therefore$被圆O截得的弦长取值范围为$2\sqrt{2} \le x \le 4$，

$\therefore$被圆O截得的弦长为正整数的只有是3或4，

$\because$被圆O截得的弦长为3的弦有2条，被圆O截得的弦长为4的弦只有1条，

$\therefore$点M关于圆O的特征值为3，

故答案为：$2\sqrt{2}$，3；



【小问2详解】

解：设点G是圆O的特征值为4的点，

由（1）可知经过一点G且弦长为4（最长弦）的直线有1条，弦长为3的直线有2条，

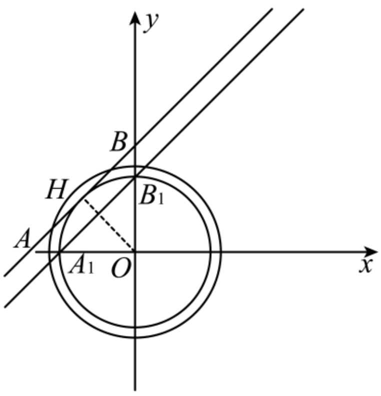
$\because$特征值要保证为4，

$\therefore$经过点G且弦长为2的直线有且只有1条，

$\therefore$经过点G的直线被圆O截得的弦长的最小值为2，

$\because \sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore$由（1）可知，关于圆O的特征值为4的所有点都在以O为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆周上，



∵直线 $y=x+b$ 分别与 x，y 轴交于点 A，B，

∴ $A(-b,0)$，$B(0,b)$，

∴ $OA=OB=b$，

∴ $\angle OBH=45°$

当 $b>0$ 时，

∵线段 AB 上总存在关于圆 O 的特征值为 4 的点，

∴线段 AB 与以 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆有交点，

当线段 AB 与以 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆相切时，将切点设为 H，连接 OH，则 $OH=\sqrt{3}$，

∴ $OB=\sqrt{2}OH=\sqrt{6}$，

∴ $b_1=\sqrt{6}$，

将以 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆与 y 轴正半轴的交点记为 B_1，则 $OB_1=\sqrt{3}$，

当线段 AB 与以 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆相交，且过点 B_1 时，可得 $b_2=\sqrt{3}$，

∴ $\sqrt{3}\le b\le\sqrt{6}$；

同理可求当 $b<0$ 时，$-\sqrt{6}\le b\le-\sqrt{3}$；

综上，b 的取值范围是 $\sqrt{3}\le b\le\sqrt{6}$ 或 $-\sqrt{6}\le b\le-\sqrt{3}$；

【小问 3 详解】

：∵同一平面内，对于任意一点 Q，经过 O、Q 的直线与圆 O 截得的弦（直径）都为 4，

∴点 Q 关于圆 O 的特征值不可能为 0，

∴ $rs\ne0$，

∵ $r+s=3$，且 r、s 都是整数，

∴ $\begin{cases}r=1\\s=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=2\\s=1\end{cases}$；

当 $\begin{cases}r=1\\s=2\end{cases}$ 时，

∴经过点 S 且弦长为 4（最长弦）的直线有 1 条，弦长为 3（最短弦）的直线有 1 条，

∴由（2）可知点 S 一定在以 O 为圆心，以 $\sqrt{2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 为半径的圆上，

同理当 $\begin{cases}r=2\\s=1\end{cases}$ 时，点 R 一定在以 T 为圆心，以 $\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆上，

∴当满足以 O 为圆心，2 为半径的圆与以 T 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆有交点，且同时满足以 O 为圆心，

$\frac{\sqrt{7}}{2}$为半径的圆与以 T 为圆心，1 为半径的圆有交点时 t 的值符合题意；

如图 3-1 所示，

当以 O 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$为半径的圆与以 T 为圆心，1 为半径的圆外切时，此时 $t_1=\frac{\sqrt{7}}{2}+1$；

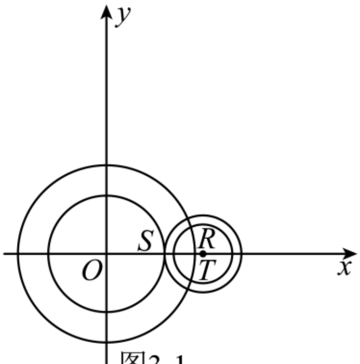


图3-1

如图 3-2 所示，当以 O 为圆心，2 为半径的圆与以 T 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$为半径的圆外切时，此时 $t_2=2-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

综上所述，当 $2-\frac{\sqrt{3}}{2}\le t\le\frac{\sqrt{7}}{2}+1$ 时，存在点 R，S，使得 $r+s=3$.

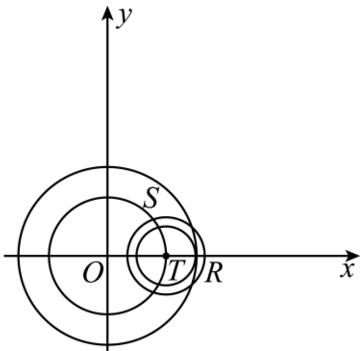


图3-2