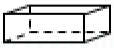
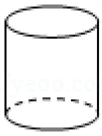
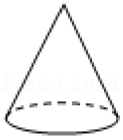
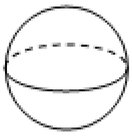
2021 北京石景山初三一模

数　学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）下面各题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

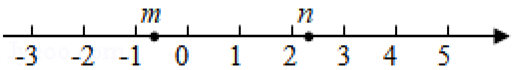
1.（2 分）下列几何体中，是长方体的为(　　)

A. 　B. 　C. 　D. 

2.（2 分）2020 年 11 月 10 日，中国“奋斗者”号载人潜水器在马里亚纳海沟成功坐底，坐底深度 10909 米，刷新中国载人深潜的新纪录．将 10909 用科学记数法表示应为(　　)

A．0.10909×10^{5}　B．1.0909×10^{5}　C．1.0909×10^{4}　D．10.909×10^{3}

3.（2 分）实数 m ，n 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是(　　)



A．$m<-1$　B．$|-2n|<0$　C．$m+n<0$　D．$n-2m>0$

4.（2 分）在下列面点烘焙模具中，其图案是中心对称图形的是(　　)

A. 　B. 

C. 　D. 

5.（2 分）若一个多边形的内角和为540°，则这个多边形的边数是(　　)

A．6　B．5　C．4　D．3

6.（2 分）《九章算术》是中国传统数学重要的著作，奠定了中国传统数学的基本框架．其中《盈不足》卷记载了一道有趣的数学问题：“今有共买物，人出八，赢三；人出七，不足四．问人数、物价各几何？”译文：“今有人合伙购物，每人出 8 钱，会多出 3 钱；每人出 7 钱，又差 4 钱．问人数、物价各多少？”设人数为 x 人，物价为 y 钱，根据题意，下面所列方程组正确的是(　　)

A. $\begin{cases}8x+3=y\\7x-4=y\end{cases}$　　B. $\begin{cases}8x-3=y\\7x+4=y\end{cases}$

C. $\begin{cases}8x+3=y\\7x+4=y\end{cases}$　　D. $\begin{cases}8x-3=y\\7x-4=y\end{cases}$

7.（2 分）下列两个变量之间的关系为反比例关系的是(　　)

A．圆的周长与其半径的关系

B．平行四边形面积一定时，其一边长与这边上的高的关系

C．销售单价一定时，销售总价与销售数量的关系

D．汽车匀速行驶过程中，行驶路程与行驶时间的关系

8.（2 分）如图为某二次函数的部分图象，有如下四个结论：

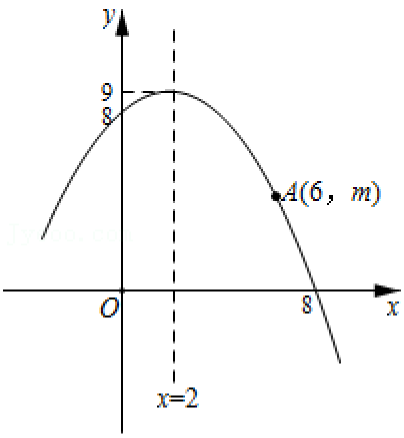
①此二次函数表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2-x+9$；

②若点 $B(-1,n)$ 在这个二次函数图象上，则 $n>m$；

③该二次函数图象与 x 轴的另一个交点为 $(-4,0)$；

④当 $0<x<6$ 时，$m<y<8$.

所有正确结论的序号是(　　)



A．①③　　B．①④　　C．②③　　D．②④

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

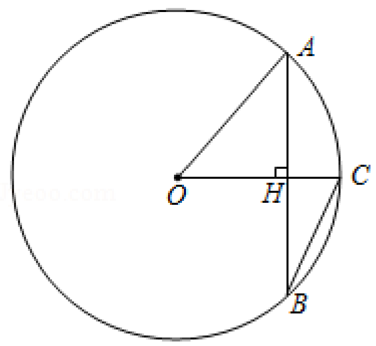
9.（2 分）二次根式 $\sqrt{x-5}$ 有意义，则 x 的取值范围是____.

10.（2 分）分解因式：$9x^2-y^2=$____.

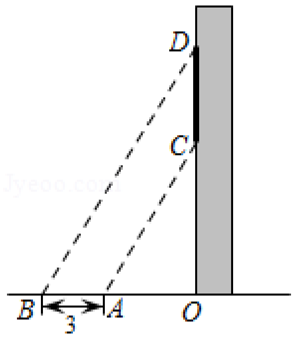
11.（2 分）若 $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，则代数式 $\frac{x-y}{x+2y}$ 的值是____.

12．（2 分）不透明的盒子中有 3 个红球，1 个白球，这些球除颜色外无其他差别．从中随机摸出一个球不放回，再从中随机摸出一个球，两次摸出的恰好都是红球的概率是____．

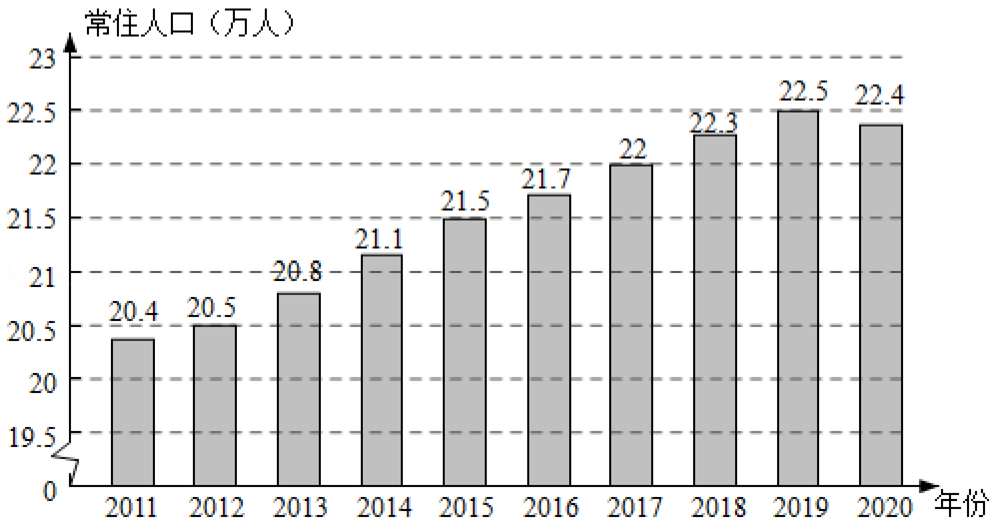
13．（2 分）如图，在$\odot O$中，半径$OC\perp AB$于点H，若$\angle OAB=40^{\circ}$，则$\angle ABC=$____$^{\circ}$．



14．（2 分）如图，小石同学在A，B两点分别测得某建筑物上条幅两端C，D两点的仰角均为60°，若点O，A，B在同一直线上，A，B两点间距离为 3 米，则条幅的高CD为____米（结果可以保留根号）．



15．（2 分）为了解某市常住人口的变化情况，收集并整理了 2011 年至 2020 年的常住人口（单位：万人）数据，绘制统计图如下：



根据统计图，写出一条有关该市常住人口变化情况的信息：____．

16．（2 分）某餐厅在客人用餐完毕后收拾餐桌分以下几个步骤：①回收餐具与剩菜、清洁桌面；②清洁椅面与地面；③摆放新餐具．前两个步骤顺序可以互换，但摆放新餐具必须在前两个步骤都完成之后才可进行，每个步骤所花费时间如表所示：

步骤 时间（分钟）	回收餐具与剩菜、	清洁椅面与地面	摆放新餐具

桌别	清洁桌面		
大桌	5	3	2
小桌	3	2	1

现有三名餐厅工作人员分别负责：①回收餐具与剩菜、清洁桌面，②清洁椅面与地面，③摆放新餐具，每张桌子同一时刻只允许一名工作人员进行工作．现有两张小桌和一张大桌需要清理，那么将三张桌子收拾完毕最短需要____分钟．

三、解答题（本题共68分，第17-22题每小题5分，第23-26题，每小题5分，第27-28题，每小题5分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17．（5分）计算：$(\frac{1}{2})^{-1}+\sqrt{8}+|-5|-4\cos 45^{\circ}$．

18．（5分）解不等式组：$\begin{cases} x+5>3 \\ \dfrac{4x-3}{5}\geqslant\dfrac{x}{2} \end{cases}$．

19．（5分）下面是小景设计的“过直线外一点作这条直线的垂线”的尺规作图过程．

已知：如图1，直线l和l外一点A．

求作：直线AE，使得$AE\perp l$于点E．

作法：①在直线l上取一点B，连接AB（如图2）；

②作线段AB的垂直平分线CD，交AB于点O；

③以O为圆心，OB长为半径作圆，交直线l于点E；

④作直线AE．

所以直线AE即为所求作的直线．

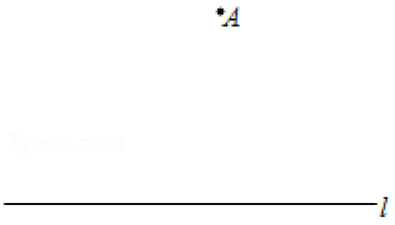


图1

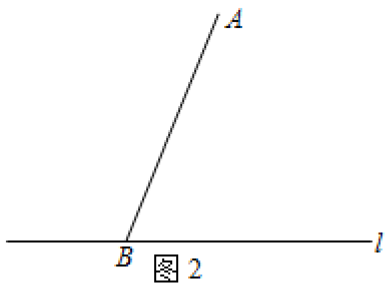


图2

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：$\because CD$为线段AB的垂直平分线，

$\therefore OA=$____．

$\therefore AB=2OB$．

$\therefore AB$是$\odot O$的直径．

$\therefore \angle AEB=90^{\circ}$(____)（填推理的依据）．

$\therefore AE\perp l$．

20．（5分）关于x的一元二次方程$x^2+(k+3)x+3k=0$．

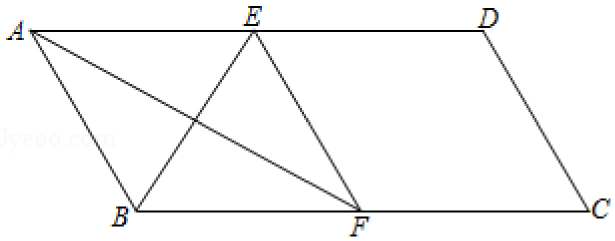
（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若该方程有一个根大于 1，求 k 的取值范围.

21.（5 分）如图，在▱$ABCD$ 中，$BC=2CD$，E，F 分别是 AD，BC 的中点，连接 EF.

（1）求证：四边形 $EFCD$ 是菱形；

（2）连接 AF，若 $AF=2\sqrt{3}$，$\angle DEF=60^{\circ}$，则 EF 的长为____；菱形 $EFCD$ 的面积为____.



22.（5 分）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l:y=x-3$ 与函数 $y=\dfrac{a}{x}(x>0)$ 的图象 G 交于点 $P(4,b)$.

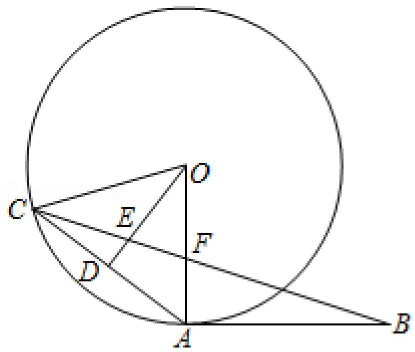
（1）求 a，b 的值；

（2）直线 $l_1:y=kx(k\neq 0)$ 与直线 l 交于点 M，与图象 G 交于点 N，点 M 到 y 轴的距离记为 d_1，点 N 到 y 轴的距离记为 d_2，当 $d_1>d_2$ 时，直接写出 k 的取值范围.

23.（6 分）如图，OA 是⊙O 的半径，AB 与⊙相切于点 A，点 C 在⊙O 上且 $AC=AB$，D 为 AC 的中点，连接 OD，连接 CB 交 OD 于点 E，交 OA 于点 F.

（1）求证：$OE=OF$；

（2）若 $OE=3$，$\sin\angle AOD=\dfrac{3}{5}$，求 BF 的长.



24.（6 分）阅读下面材料：

小石遇到这样一个问题：如图 1，$\angle ABC=90^{\circ}$，DE 分别是 $\angle ABC$ 的边 BA，BC 上的动点（不与点 B 重合），$\angle ADE$ 与 $\angle DEC$ 的角平分线交于点 P，ΔDBE 的周长为 a，过点 P 作 $PM\perp BA$ 于点 M，$PN\perp BC$ 于点 N，求 $PM+PN$ 与 ΔDBE 的周长 a 的数量关系.

小石通过测量发现了垂线段 PM 与 PN 的数量关系，从而构造全等三角形和直角三角形，经过推理和计算使问题得到解决.

请回答：线段 PM 与 PN 的数量关系为____；

$PM+PN$ 与 a 的数量关系是____.

参考小石思考问题的方法，解决问题：

如图 2，当 $\angle ABC=60^{\circ}$ 时，其它条件不变，判断点 P 到 DE 的距离与 ΔDBE 的周长 a 的数量关系，并简要说明理由.

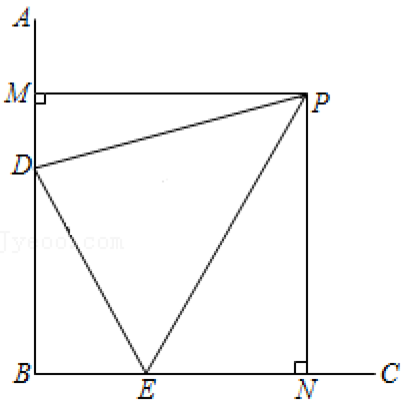


图 1

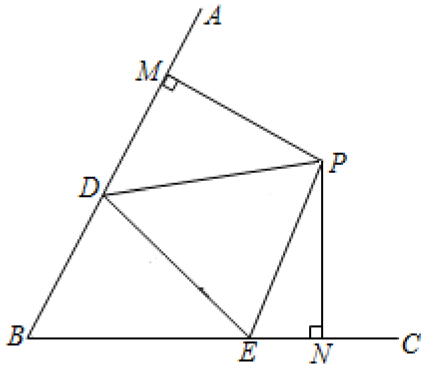


图 2

25.（6 分）某校举行“云端好声音”线上歌唱比赛活动丰富同学们的居家生活．由 1 至 4 号的专业评委和 5 至 10 号的大众评委进行评分．

例如：A 节目演出后各个评委所给分数如表：

评委编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
评分 / 分	7.2	7.5	7.8	7.5	8.2	9.7	7.9	6.7	8.5	9.4

评分方案如下：

方案一：取各位评委所给分数的平均数则该节目的得分为 $\overline{x}=\dfrac{7.2+7.5+7.5+7.5+8.2+9.7+7.9+6.7+8.5+9.4}{10}=8.04$．

方案二：从评委所给的分数中先去掉一个最高分和一个最低分，再取其余八位评委所给分数的平均数，则该节目的得分为 $\overline{x}=\dfrac{7.2+7.5+7.8+7.5+8.2+7.9+8.5+9.4}{8}=8.00$．

回答下列问题：

（1）小乐认为“方案二”比“方案一”更合理，你____小乐的说法吗（填“同意”或“不同意”)？理由是____；

（2）小乐认为评分既要突出专业评审的权威性又要尊重大众评审的喜爱度，因此设计了“方案三”：先计算 1 至 4 号评委所给分数的平均数 $\overline{x_1}=7.5$，5 至 10 号评委所给分数的平均数 $\overline{x_2}=8.4$，再根据比赛的需求设置相应的权重 $(f_1$ 表示专业评委的权重，f_2 表示大众评委的权重，且 $f_1+f_2=1)$．

如当 $f_1=0.7$ 时，则 $f_2=1-0.7=0.3$．

该节目的得分为 $\overline{x}=f_1\overline{x_1}+f_2\overline{x_2}=0.7\times7.5+0.3\times8.4=7.77$．

I．当按照“方案三”中 $f_1=0.6$ 评分时，A 节目的得分为____．

II．关于评分方案，下列说法正确的有____．

①当 $f_1=0.5$ 时，A 节目按照“方案三”和“方案一”评分结果相同；

②当 $f_1>0.4$ 时，说明“方案三”评分更注重节目的专业性；

③当 $f_1=0.3$ 时，A 节目按照“方案三”评分的结果比“方案一”和“方案二”都高．

26.（6 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 是抛物线 $y=-x^2+2mx-m^2+2m+1$ 的顶点．

（1）求点 A 的坐标（用含 m 的代数式表示）；

（2）若射线 OA 与 x 轴所成的锐角为 45°，求 m 的值；

（3）将点 $P(0,1)$ 向右平移 4 个单位得到点 Q，若抛物线与线段 PQ 只有一个公共点，直接写出 m 的取值范围.

27.（7 分）在 ΔABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha(0^{\circ}<\alpha<60^{\circ})$．点 E 是 ΔABC 内动点，连接 AE，CE，将 ΔAEC 绕点 A 顺时针旋转 α，使 AC 边与 AB 重合，得到 ΔADB，延长 CE 与射线 BD 交于点 M（点 M 与点 D 不重合）.

（1）依题意补全图 1；

（2）探究 $\angle ADM$ 与 $\angle AEM$ 的数量关系为____；

（3）如图 2，若 DE 平分 $\angle ADB$，用等式表示线段 MC，AE，BD 之间的数量关系，并证明.

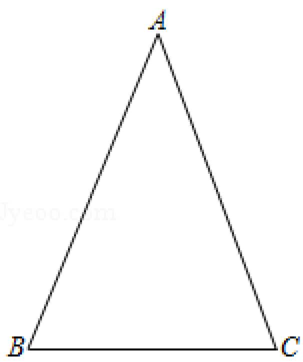


图 1

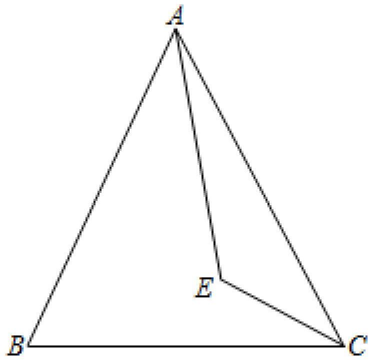


图 2

28.（7 分）在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 P 和线段 ST，我们定义点 P 关于线段 ST 的线段比 $k=\begin{cases}\dfrac{PS}{ST} & (PS<PT)\\ \dfrac{PT}{ST} & (PS\geqslant PT)\end{cases}$.

（1）已知点 $A(0,1)$，$B(1,0)$.

①点 $Q(2,0)$ 关于线段 AB 的线段比 $k=$____；

②点 $C(0,c)$ 关于线段 AB 的线段比 $k=\sqrt{2}$，求 c 的值.

（2）已知点 $M(m,0)$，点 $N(m+2,0)$，直线 $y=x+2$ 与坐标轴分别交于 E，F 两点，若线段 EF 上存在点使得这一点关于线段 MN 的线段比 $k\leqslant\dfrac{1}{4}$，直接写出 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）下面各题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1.【分析】长方体指 6 个长方形所围成的立体图形.

【解答】解：A、该几何体是长方体，故本选项符合题意.

B、该几何体是圆柱，故本选项不符合题意.

C、几何体是圆锥，故本选项不符合题意.

D、几何体是球体，故本选项不符合题意.

故选：A.

【点评】此题主要考查了对立体图形的认识，熟悉各种常见立体图形的性质即可轻松解答.

2.【分析】科学记数法的表示形式为$a\times10^{n}$的形式，其中$1\leqslant|a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值$\geqslant10$时，n是正整数；当原数的绝对值<1时，n是负整数.

【解答】解：10909 用科学记数法可以表示：1.0909×10^{4}.

故选：C.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为$a\times10^{n}$的形式，其中$1\leqslant|a|<10$，n为整数，表示时关键要正确确定a的值以及n的值.

3.【分析】A选项根据数轴上表示的两个实数，右边的总比左边的大去判断；B选项根据绝对值的非负性判断；C选项，异号两数相加，取绝对值较大的数的符号；D选项根据不等式的性质判断.

【解答】解：A．$\because$数轴上表示的两个实数，右边的总比左边的大，

$\therefore m>-1$，不符合题意；

B．$\because$一个数的绝对值具有非负性，

$\therefore B$选项不符合题意；

C．$\because m<0$，$n>0$，$|m|<|n|$，

$\therefore m+n>0$；

$\therefore C$选项不符合题意；

D．$\because m<0$，

$\therefore -2m>0$，

$\because n>0$，

$\therefore n-2m>0$，

$\therefore D$选项符合题意.

故选：D.

【点评】本题考查数轴，绝对值，加法法则，不等式等，解题的关键是熟记这些基础知识．在选项D中，也可以这样做：$\because m<0$，$\therefore 2m<0$，又$\because n>0$，$\therefore n>2m$，$\therefore n-2m>0$.

4.【分析】根据中心对称图形的概念作答．在同一平面内，如果把一个图形绕某一点旋转 180 度，旋转后的图形能和原图形完全重合，那么这个图形就叫做中心对称图形．这个旋转点，就叫做中心对称点.

【解答】解：A、不是中心对称图形，因为找不到任何这样的一点，使它绕这一点旋转 180 度以后，能够与它本身重合，即不满足中心对称图形的定义．不符合题意；

B、不是中心对称图形，因为找不到任何这样的一点，使它绕这一点旋转 180 度以后，能够与它本身重合，即不满足中心对称图形的定义．不符合题意；

C、不是中心对称图形，因为找不到任何这样的一点，使它绕这一点旋转 180 度以后，能够与它本身重合，即不满足中心对称图形的定义．不符合题意；

D、是中心对称图形，符合题意．

故选：D．

【点评】本题考查了中心对称图形，熟记定义是解答本题的关键．

5．【分析】n边形的内角和公式为$(n-2)\cdot 180^{\circ}$，由此列方程求n．

【解答】解：设这个多边形的边数是n，

则$(n-2)\cdot 180^{\circ}=540^{\circ}$，

解得$n=5$，

故选：B．

【点评】本题考查了多边形外角与内角．此题比较简单，只要结合多边形的内角和公式来寻求等量关系，构建方程即可求解．

6．【分析】设人数为x人，物价为y钱，根据“每人出 8 钱，会多出 3 钱；每人出 7 钱，又差 4 钱”，即可得出关于x，y的二元一次方程组，此题得解．

【解答】解：设人数为x人，物价为y钱，

依题意得：$\begin{cases}8x-3=y\\7x+4=y\end{cases}$．

故选：B．

【点评】本题考查了由实际问题抽象出二元一次方程组以及数学常识，找准等量关系，正确列出二元一次方程组是解题的关键．

7．【分析】根据反比例函数的定义逐个分析可进行判断．

【解答】解：A．圆的周长与其半径是正比例函数，故不符合题意；

B．平行四边形面积一定时，其一边长与这边上的高是反比例函数，故符合题意；

C．销售单价一定时，销售总价与销售数量是正比例函数，故不符合题意；

D．汽车匀速行驶过程中，行驶路程与行驶时间是正比例函数，故不符合题意．

故选：B．

【点评】本题考查反比例函数的定义，会根据实际问题判断函数类型是解题关键．

8．【分析】根据函数图象和性质逐一求解即可．

【解答】解：①从图象看，抛物线的顶点坐标为$(2,9)$，抛物线和x轴的一个交点坐标为$(8,0)$，

则设抛物线的表达式为$y=a(x-2)^{2}+9$，

将$(8,0)$代入上式得：$0=a(8-2)^{2}+9$，解得$a=-\dfrac{1}{4}$，

故抛物线的表达式为$y=-\frac{1}{4}x^2-x+8$，故①错误，不符合题意；

②从点A、B的横坐标看，点A距离抛物线对称轴远，故$n>m$正确，符合题意；

③抛物线的对称轴为直线$x=2$，抛物线和x轴的一个交点坐标为$(8,0)$，则另外一个交点为$(-4,0)$，

故③正确，符合题意；

④从图象看，当$0<x<6$时，$m<y\leqslant 9$，故④错误，不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查的是抛物线与x轴的交点，主要考查函数图象上点的坐标特征，要求学生非常熟悉函数与坐标轴的交点、顶点等点坐标的求法，及这些点代表的意义及函数特征.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9.【分析】根据二次根式的意义，被开方数是非负数列出方程，解方程即可.

【解答】解：根据题意得：$x-5\geqslant 0$，

解得$x\geqslant 5$.

故答案为：$x\geqslant 5$.

【点评】本题考查的是二次根式有意义的条件，掌握二次根式的被开方数是非负数是解题的关键.

10.【分析】利用平方差公式进行分解即可.

【解答】解：原式$=(3x+y)(3x-y)$，

故答案为：$(3x+y)(3x-y)$.

【点评】此题主要考查了公式法分解因式，关键是掌握平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

11.【分析】利用x与y的比可$x=2t$，$y=3t$，然后把它们代入代数式中进行分式的运算.

【解答】解：$\because \frac{x}{y}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$设$x=2t$，$y=3t$，

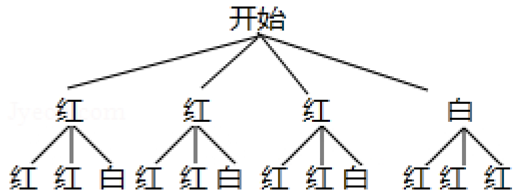
$\therefore \frac{x-y}{x+2y}=\frac{2t-3t}{2t+6t}=\frac{-t}{8t}=-\frac{1}{8}$.

故答案为$-\frac{1}{8}$.

【点评】本题考查了比例的性质：灵活应用比例性质（内项之积等于外项之积、合比性质、分比性质、合分比性质、等比性质）进行计算.

12.【分析】画树状图，共有 12 个等可能的结果，两次摸出的恰好都是红球的结果有 6 个，再由概率公式求解即可.

【解答】解：画树状图如图：



共有 12 个等可能的结果，两次摸出的恰好都是红球的结果有 6 个，

$\therefore$ 两次摸出的恰好都是红球的概率为 $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$．

【点评】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

13．【分析】先利用垂直得到 $\angle AHO=90^{\circ}$，再利用互余计算出 $\angle O=50^{\circ}$，然后根据圆周角定理得到 $\angle ABC$ 的度数．

【解答】解：$\because OC\perp AB$，

$\therefore \angle AHO=90^{\circ}$，

$\therefore \angle O=90^{\circ}-\angle OAB=90^{\circ}-40^{\circ}=50^{\circ}$，

$\therefore \angle ABC=\frac{1}{2}\angle O=25^{\circ}$．

故答案为 25．

【点评】本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．

14．【分析】根据题意和锐角三角函数可以得到 CD 的长，本题得以解决．

【解答】解：由题意可得，

$\angle CAO=\angle DBO=60^{\circ}$，$\angle COA=\angle DOB=90^{\circ}$，

$\because \tan\angle CAO=\frac{OC}{OA}$，$\tan\angle DBO=\frac{OD}{OB}=\frac{OC+CD}{OA+AB}$，

$\therefore \tan 60^{\circ}=\frac{OC}{OA}$，$\tan 60^{\circ}=\frac{OC+CD}{OA+3}$，

$\therefore OC=\sqrt{3}OA$，$\sqrt{3}(OA+3)=OC+CD$，

$\therefore \sqrt{3}(OA+3)=\sqrt{3}OA+CD$，

解得 $CD=3\sqrt{3}$，

故答案为：$3\sqrt{3}$．

【点评】本题考查解直角三角形的应用 $-$ 仰角、俯角问题，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

15．【分析】根据条形统计图中每年的常住人口数量得出合理信息均可．

【解答】解：由条形统计图知，该市常住人口逐年增加，2020 年首次出现下降，

故答案为：该市常住人口逐年增加，2020 年首次出现下降（答案不唯一）．

【点评】本题主要考查条形统计图，解题的关键是根据条形统计图的特点：从条形图可以很容易看出数据的大小，便于比较．

16.【分析】设工作人员 1 负责①回收餐具与剩菜、清洁桌面，工作人员 2 负责②清洁椅面与地面，工作人员 3 负责③摆放新餐具，当工作人员 1 清理大桌子的同时，工作人员 2 清理 2 张小桌子，5 分钟后，当工作人员 1 清理 2 张小桌子的同时，工作人员 2 开始清理 1 张大桌子，第 8 分钟，工作人员 3 开始在大桌上摆放新餐具，进而即可求解.

【解答】解：设工作人员 1 负责①回收餐具与剩菜、清洁桌面，工作人员 2 负责②清洁椅面与地面，工作人员 3 负责③摆放新餐具，具体流程如下图：

将三张桌子收拾完毕最短需要 12 分钟，

故答案是：12.

【点评】本题主要考查事件的统筹安排，尽可能让①回收餐具与剩菜、清洁桌面，②清洁椅面与地面，在同一时段中同时进行，节约时间是解题关键.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17.【分析】直接利用特殊角的三角函数值以及二次根式的性质、负整数的性质分别化简得出答案.

【解答】解：原式$=2+2\sqrt{2}+5-4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=2+2\sqrt{2}+5-2\sqrt{2}$

$=7$.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

18.【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【解答】解：解不等式 $x+5>3$，得：$x>-2$，

解不等式 $\dfrac{4x-3}{5}\geqslant\dfrac{x}{2}$，得：$x\geqslant 2$，

则不等式组的解集为 $x\geqslant 2$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

19.【分析】（1）根据几何语言画出对应的几何图形；

（2）根据圆周角定理得到 $\angle AEB=90^{\circ}$，从而得到 $AE\perp l$.

【解答】解：（1）如图，直线 AE 为所作；

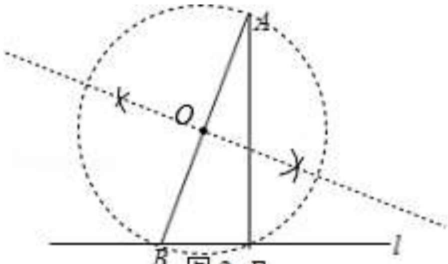


图2

（2）完成下面的证明.

证明：$\because CD$ 为线段 AB 的垂直平分线，

$\therefore OA = OB$.

$\therefore AB = 2OB$.

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径.

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$（直径所对的圆周角为直角）.

$\therefore AE \perp l$.

故答案为 OB ；直径所对的圆周角为直角.

【点评】本题考查了作图 – 复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法．解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作．也考查了圆周角定理.

20.【分析】(1) 先计算出判别式的值得到 $\triangle = (k-3)^2 \geqslant 0$ ，然后根据判别式的意义得到结论；

（2）先解方程得到 $x_1 = -3$ ， $x_2 = -k$ ，则根据题意得到 $-k > 1$ ，然后解不等式即可.

【解答】(1) 证明：$\because \triangle = (k+3)^2 - 4 \times 3k$

$= k^2 + 6k + 9 - 12k$

$= (k-3)^2 \geqslant 0$,

$\therefore$ 方程总有两个实数根；

（2）$\because (x+3)(x+k) = 0$,

$\therefore x_1 = -3$ ， $x_2 = -k$,

$\because$ 该方程有一个根大于 1，

$\therefore -k > 1$ ，解得 $k < -1$ ，

即 k 的范围为 $k < -1$.

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\triangle = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\triangle > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\triangle = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\triangle < 0$ 时，方程无实数根.

21.【分析】(1) 由平行四边形的判定和中点性质可得 $DE = CF = CD$ ，即可得结论；

（2）过点 F 作 $FH \perp AD$ 于 H ，由勾股定理可求 EH 的长，即可求解.

【解答】证明：(1) 在 $\square ABCD$ 中， $BC = 2CD$ ，

$\therefore AD // BC$ ， $AD = BC = 2CD$ ，

$\because E$ ， F 分别是 AD ， BC 的中点，

$\therefore DE = CF = CD$ ，

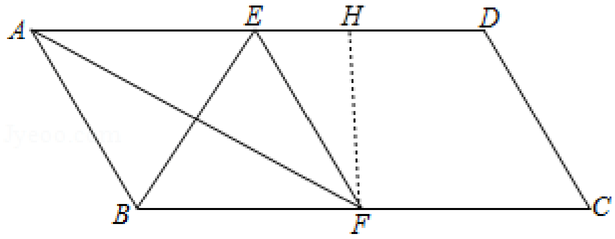
又 $AD//BC$，

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 是平行四边形，

又 $\because CD=DE$，

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 是菱形；

（2）如图，过点 F 作 $FH\perp AD$ 于 H，



$\because$ 四边形 $EFCD$ 是菱形，

$\therefore DE=EF=AE$，

$\because \angle DEF=60^{\circ}$，

$\therefore \angle EFH=30^{\circ}$，

$\therefore EH=\dfrac{1}{2}EF$， $FH=\sqrt{3}EH$，

$\therefore AH=AE+EH=3EH$，

$\because AF^{2}=AH^{2}+HF^{2}$，

$\therefore 12=9EH^{2}+3EH^{2}$，

$\therefore EH=1$，

$\therefore EF=2=DE$， $HF=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 菱形 $EFCD$ 的面积 $=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

故答案为：2， $2\sqrt{3}$．

【点评】本题考查了平行四边形的性质，菱形的判定和性质，勾股定理，利用勾股定理求出 EH 的长是本题的关键．

22．【分析】（1）将 $P(4,b)$ 先代入 $y=x-3$ 求出 b，再通过反比例函数 $xy=k$ 求出 a．

（2）分别求出两直线与双曲线交于同一点的两种情况求临界值．

【解答】解：将 $(4,b)$ 代入 $y=x-3$ 得 $b=4-3=1$，

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(4,1)$，

$\therefore a=4\times1=4$，

故 $a=4$， $b=1$．

（2）$\because$ 图象 $G:y=\dfrac{4}{x}$ 在第一象限，

$\therefore$ 正比例函数 $y=kx$ 中 $k>0$ 时与图象 G 有交点，

$\because$ 直线 $l_1:y=kx(k\neq0)$ 与直线 l 有交点，

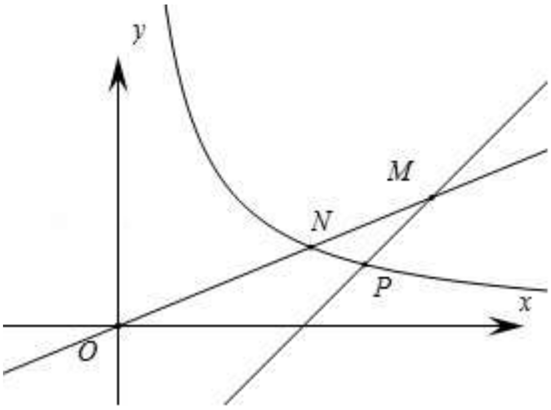
$\therefore k\neq1$，

当交点 M 在第一象限时， $0<k<1$，

当交点 M， P， N 时重合时， $d_1=d_2$，

此时 $k = 1 \div 4 = \dfrac{1}{4}$，

$\therefore \dfrac{1}{4} < k < 1$满足题意.



【点评】本题考查一次函数与反比例函数的应用，解题关键是掌握数形结合方法求解.

23.【分析】(1) 由等腰三角形的性质及切线的性质得出 $\angle CED = \angle AFB$，得出 $\angle OEF = \angle OFE$，则可得出结论；

(2) 设 $AD = 3x$，$OA = 5x$，则 $OD = 4x$，求出 $x = 1$，由锐角三角函数的定义可得出答案.

【解答】(1) 证明：$\because OC = OA$，D 为 AC 的中点，

$\therefore OD \perp AC$，

$\therefore \angle DCE + \angle DEC = 90^\circ$，

$\because AB$ 与 $\odot$ 相切于点 A，

$\therefore OA \perp AB$，

$\therefore \angle OAB = 90^\circ$，

$\therefore \angle FAB + \angle B = 90^\circ$，

$\because AC = AB$，

$\therefore \angle ACB = \angle B$，

$\therefore \angle CED = \angle AFB$，

$\because \angle CED = \angle OEF$，$\angle AFB = \angle OFE$，

$\therefore \angle OEF = \angle OFE$，

$\therefore OE = OF$；

(2) 解：$\because \sin \angle AOD = \dfrac{3}{5}$，

$\therefore \dfrac{AD}{OA} = \dfrac{3}{5}$，

设 $AD = 3x$，$OA = 5x$，

$\therefore OD = 4x$，

$\because OE = OF = 3$，

$\therefore DE = 4x - 3$，$AF = 5x - 3$，

$\therefore AC = 2AD = 6x$，

$\therefore AB = 6x$，

$\because \angle ACB=\angle B$，

$\therefore \tan\angle ACB=\tan\angle B$，

$\therefore \dfrac{DE}{CD}=\dfrac{AF}{AB}$，

$\therefore \dfrac{4x-3}{3x}=\dfrac{5x-3}{6x}$，

解得 $x=1$，

$\therefore AF=2$， $AB=6$，

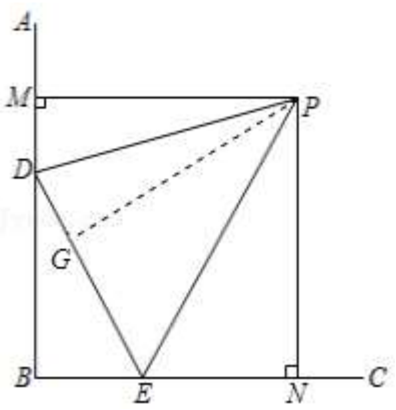
$\therefore BF=\sqrt{AF^2+AB^2}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$.

【点评】本题考查了等腰三角形的判定与性质，切线的性质，锐角三角函数的定义，熟练掌握切线的性质是解题的关键.

24．【分析】过点 P 作 $PG\perp DE$，垂足为 G，由角平分线的性质得 $PM=PG=PN$，根据 HL 得 $\mathrm{Rt\Delta PNE}\cong\mathrm{Rt\Delta PGE}$，$\mathrm{Rt\Delta PGD}\cong\mathrm{Rt\Delta PMD}$，从而得到结论；

连接 BP，过 P 作 $PH\perp DE$ 于 H，根据全等三角形的判定与性质得 $DM=DH$，同理，$PH=PN$，$HE=EN$，然后根据特殊直角三角形的性质及三角函数关系可得答案.

【解答】解：过点 P 作 $PG\perp DE$，垂足为 G，



$\because \angle ADE$ 与 $\angle DEC$ 的角平分线交于点 P，$PM\perp BA$ 于点 M，$PN\perp BC$ 于点 N，

$\therefore PM=PG=PN$，$\angle PNE=\angle PGE=\angle PGD=\angle PMD=90^\circ$，

$\because PE=PE$，$PD=PD$，

$\therefore \mathrm{Rt\Delta PNE}\cong\mathrm{Rt\Delta PGE(HL)}$，$\mathrm{Rt\Delta PGD}\cong\mathrm{Rt\Delta PMD(HL)}$，

$\therefore MD=GD$，$NE=GE$，

$\because \Delta DBE$ 的周长为 a，

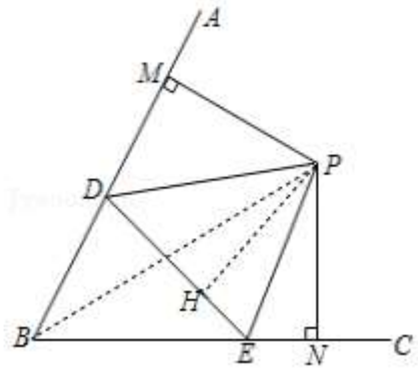
$\therefore PM+PN=BD+DM+BE+EN=BD+DG+BE+GE=BD+BE+DE=a$.

故答案为：$PM=PN$，$PM+PN=a$；

解决问题：

$PH=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

连接 BP，过 P 作 $PH\perp DE$ 于 H，



$\because DP$ 平分 $\angle ADE$， $PM \perp BA$，

$\therefore PM = PH$， $\angle MDP = \angle HDP$，

$\therefore \Delta PMD \cong \Delta PHD(AAS)$，

$\therefore DM = DH$，

同理， $PH = PN$， $HE = EN$，

$\therefore PM = PN$，

$\because PM \perp BM$， $PN \perp BC$，

$\therefore \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{BMP} \cong \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{BNP(HL)}$，

$\therefore \angle PBN = \angle PBM = \dfrac{1}{2}\angle ABC = 30^{\circ}$， $MB = NB$，

$\because MB + NB = DB + DM + BE + EN = PB + BE + DE = a$，

$\therefore MB = NB = \dfrac{a}{2}$，

$\therefore PM = MB \cdot \tan 30^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

【点评】此题考查的是全等三角形的判定与性质，掌握其性质及角平分线性质、直角三角形性质、三角函数是解决此题关键.

25.【分析】(1) 利用平均数的性质回答即可；

(2) I．当 $f_1 = 0.6$ 时，由题意知， $f_2 = 1 - f_1 = 0.4$， $\overline{x}_1 = 7.5$， $\overline{x}_2 = 8.4$，利用公式计算即可；

II．分别根据加权平均数公式及权重进行分析即可得到答案.

【解答】解：(1) 同意，理由：平均数易受极端值影响，故方案二更合理；

故答案为：同意，平均数易受极端值影响，故方案二更合理；

(2) I．当 $f_1 = 0.6$ 时，由题意知， $f_2 = 1 - f_1 = 0.4$， $\overline{x}_1 = 7.5$， $\overline{x}_2 = 8.4$，

$\therefore$ 该节目得分： $\overline{x} = f_1\overline{x}_1 + f_2\overline{x}_2 = 0.6 \times 7.5 + 0.4 \times 8.4 = 7.86$

$\therefore f_1 = 0.6$ 时， A 节目的得分为 7.86.

故答案为：7.86；

II．正确的有③.

① $f_1 = 0.5$ 时， $\overline{x} = f_1\overline{x}_1 + (1 - f_1)\overline{x}_2 = 0.5 \times 7.5 + 0.5 \times 8.4 = 7.95$，

$8.04 \neq 7.95$，故①错误；

② $f_1 > 0.4$ 时，说明方案三评的更注重节目的专业性，故②正确；

③ $f_1=0.3$， $\overline{x}=0.3\times7.5+0.7\times8.4=8.13$，

$\because 8.13>8.04$， $8.13>8.00$，

$\therefore$③正确．

故答案为：②③．

【点评】此题考查的是加权平均数，掌握其概念是解决此题关键..

26．【分析】（1）直接将解析式配成顶点式，可以求得点 A 坐标；

（2）因为 OA 与 x 轴夹角为 45°，则点 A 到坐标轴距离相等，所以需要分类讨论，即横坐标与纵坐标相等，或者横坐标与纵坐标互为相反数，同时，也可以发现点 A 在直线 $y=2x+1$ 上运动；

（3）先由平移知识，可以得到 Q 点坐标，且 $PQ//x$ 轴，画出草图，可以发现，顶点 A 所在直线 $y=2x+1$ 也经过 P 点，并且当 A 与 P 重合时，此时 m 取得最小值，当 A 沿直线 $y=2x+1$ 向上运动时， m 值越来越大，最大值位置是当抛物线刚好经过 Q 点时，同时，要注意排除抛物线与直线 PQ 的两个交点均落在线段 PQ 上的特殊情况．

【解答】解：（1）$\because y=-x^2+2mx-m^2+2m+1=-(x-m)^2+2m+1$，

$\therefore$顶点 $A(m,2m+1)$；

（2）设 $x=m$， $y=2m+1$，消掉 m，得 $y=2x+1$，

$\therefore A$在直线 $y=2x+1$ 上运动，

$\therefore A$所在象限可能为第一、第二、第三象限，

$\because$射线 OA 与 x 轴所成的夹角为 45°，

$\therefore$可以分两类讨论，

①当 A 在第一、第三象限时， $m=2m+1$，

解得 $m=-1$，

②当 A 在第二象限时， $m+2m+1=0$，

解得 $m=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore m=-1$或$-\dfrac{1}{3}$；

（3）当 $P(0,1)$ 向右平移 4 个单位长度得到 Q，

则 $Q(4,1)$，且 $PQ//x$ 轴

$\because$抛物线与线段 PQ 只有一个交点，且抛物线顶点 A 在直线 $y=2x+1$ 上运动，

$\therefore$由图 1 可得，当顶点 A 与 P 点重合时，符合条件，此时 $m=0$，

由图 2，数形结合，当顶点 A 沿直线 $y=2x+1$ 向上运动时，抛物线与直线 PQ 均有两个交点，

当抛物线经过 Q 点时，即当 $x=4$， $y=1$时， $-(4-m)^2+2m+1=1$，

$\therefore m=2$ 或 8，

当 $m=2$ 时，抛物线为 $y=-(x-2)^2+5$，它与线段 PQ 的交点为 P 和 Q，有两个交点，不合题意，舍去，

当 $m=8$ 时，抛物线对称轴右侧的部分刚好经过点 Q，符合题意，

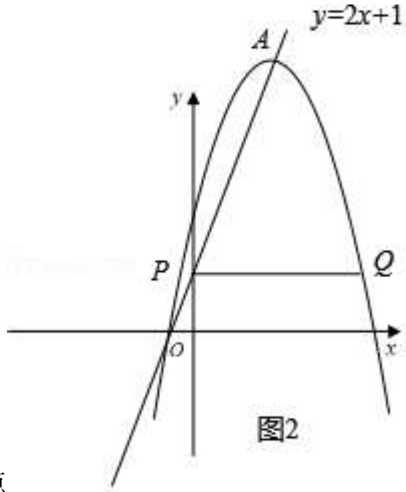


图2

$\therefore$ 当 $0 \leqslant m \leqslant 8$，且 $m \neq 2$ 时，抛物线与线段 PQ 只有一个交点

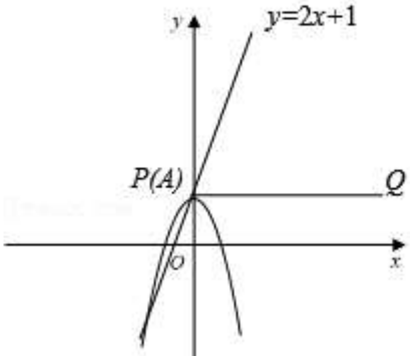


图1

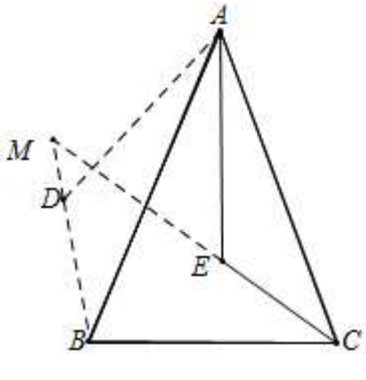
【点评】此题考查的是二次函数综合题，主要考查的是数形结合思想，根据题意，充分挖掘题目中的数据参数，是画图的关键，根据图象，判断临界位置，即可解决问题.

27.【分析】(1) 按要求作图即可；

(2) ΔAEC 绕点 A 顺时针旋转得到 ΔADB 可得 $\angle AEC = \angle ADB$，即可得到答案；

(3) 由 $\angle ADM = \angle AEM$ 可得 A 、M 、D 、E 共圆，证明 $\Delta AMD \cong \Delta EDM$ 得 $AD = ME$，从而可得 $MC = AE + BD$.

【解答】解：(1) 补全图 1 如下：



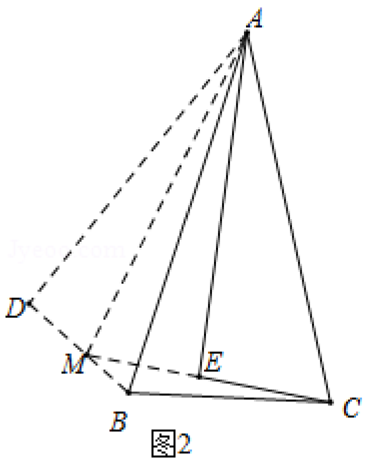


图2

（2）当 M 在线段 BD 延长线上时，如上图 1，

$\because$ 将 ΔAEC 绕点 A 顺时针旋转得到 ΔADB，

$\therefore \angle AEC = \angle ADB$，

$\therefore \angle ADM = \angle AEM$，

当 M 在线段 BD 上时，如上图 2，

$\because$ 将 ΔAEC 绕点 A 顺时针旋转得到 ΔADB，

$\therefore \angle AEC = \angle ADB$，

$\because \angle AEC + \angle AEM = 180°$，

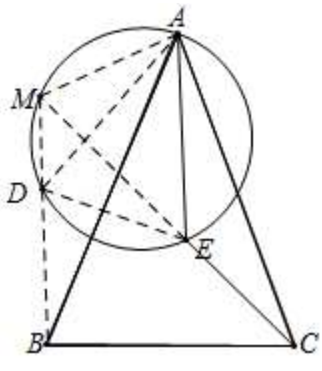
$\therefore \angle ADM + \angle AEM = 180°$，

故答案为：$\angle ADM = \angle AEM$ 或 $\angle ADM + \angle AEM = 180°$；

（3）$MC = AE + BD$，理由如下：

连接 AM，ΔAMD 和 ΔAME 公共边为 AM，且 $\angle ADM = \angle AEM$，

$\therefore A$、M、D、E 共圆，如图：



$\because A$、M、D、E 共圆，

$\therefore \angle MAD = \angle MED$，

$\because DE$ 平分 $\angle ADB$，

$\therefore \angle ADE = \angle EDB$，

$\because$ 将 ΔAEC 绕点 A 顺时针旋转得到 ΔADB，

$\therefore AD = AE$，$BD = EC$，

$\therefore \angle ADE = \angle AED$，

$\therefore \angle EDB = \angle AED$，

$\therefore BM//AE$，

$\therefore \angle DME=\angle AEM$，

$\because \angle ADM=\angle AEM$，

$\therefore \angle DME=\angle ADM$，

在ΔAMD和ΔEDM中，

$$\begin{cases}\angle MAD=\angle MED\\ \angle ADM=\angle DME\\ DM=DM\end{cases}，$$

$\therefore \Delta AMD\cong \Delta EDM(AAS)$，

$\therefore AD=ME$，

$\therefore AE=ME$，

$\because MC=ME+EC$，

$\therefore MC=AE+BD$．

【点评】本题考查三角形的旋转变换，解题的关键是利用A、M、D、E共圆，证明$\Delta AMD\cong \Delta EDM$．

28．【分析】（1）①求出QA、QB、AB，根据线段比定义即可得到答案；

②方法同①，分$c>0$和$c\leqslant 0$讨论；

（2）分两种情况，画出图象，根据线段比定义，分别在$M(N)$为"临界点"时列出不等式，即可得到答案．

【解答】解：（1）①$\because A(0,1)$，$B(1,0)$，$Q(2,0)$，

$\therefore AB=\sqrt{2}$，$QA=\sqrt{5}$，$QB=1$，

根据线段比定义点$Q(2,0)$关于线段AB的线段比$k=\dfrac{QB}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

②$\because A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(0,c)$，

$\therefore AB=\sqrt{2}$，$AC=|1-c|$，$BC=\sqrt{1+c^2}$，

$AC^2=1+c^2-2c$，$BC^2=1+c^2$，

当$c>0$时，$AC^2<BC^2$，即$AC<BC$，

由$C(0,c)$关于线段AB的线段比$k=\sqrt{2}$可得：

$\dfrac{|1-c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得$c=3$或$c=-1$（舍去），

$\therefore c=3$，

当$c\leqslant 0$时，$AC^2\geqslant BC^2$，即$AC\geqslant BC$，

由$C(0,c)$关于线段AB的线段比$k=\sqrt{2}$可得：

$\dfrac{\sqrt{1+c^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

解得$c=\sqrt{3}$（舍去）或$c=-\sqrt{3}$，

$\therefore c=-\sqrt{3}$，

综上所述，点$C(0,c)$关于线段AB的线段比$k=\sqrt{2}$， $c=3$或$c=-\sqrt{3}$；

（2）$\because$直线$y=x+2$与坐标轴分别交于E， F 两点，

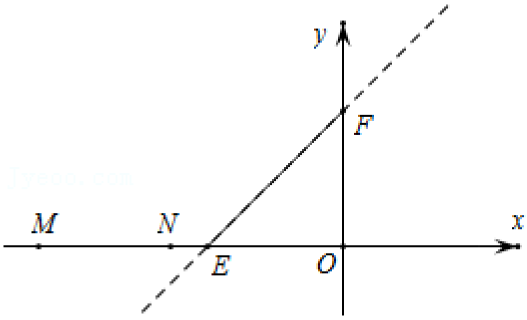
$\therefore E(-2,0)$， $F(0,2)$，

$\because$点$M(m,0)$，点$N(m+2,0)$，

$\therefore MN=2$， N在M右边2个单位，

当线段EF上的点到N距离较小时，分两种情况：

①当M 、 N在点E左侧时，如图：

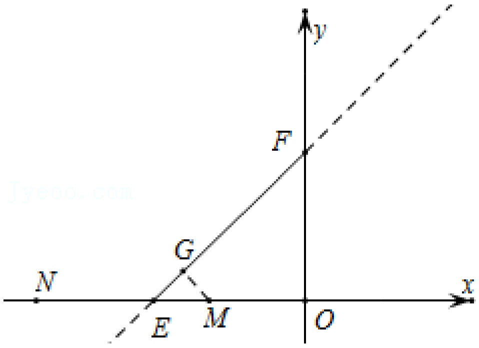


线段EF上存在点使得这一点关于线段MN的线段比$k\leqslant\frac{1}{4}$，

$\therefore \frac{NE}{MN}\leqslant\frac{1}{4}$， 即$\frac{-2-(m+2)}{2}\leqslant\frac{1}{4}$，

解得： $m\geqslant-\frac{9}{2}$，

②当N在E右侧， M在E左侧时，过M作$MG\perp EF$于G，如图：



线段EF上存在点使得这一点关于线段MN的线段比$k\leqslant\frac{1}{4}$，

$\therefore \frac{GM}{MN}\leqslant\frac{1}{4}$， 即$\frac{GM}{2}\leqslant\frac{1}{4}$，

$\therefore GM\leqslant\frac{1}{2}$，

而$E(-2,0)$， $F(0,2)$，

$\therefore \angle FEO=45^\circ$，

$\therefore \Delta HEM$时等腰直角三角形，

$\therefore GM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}EM$，

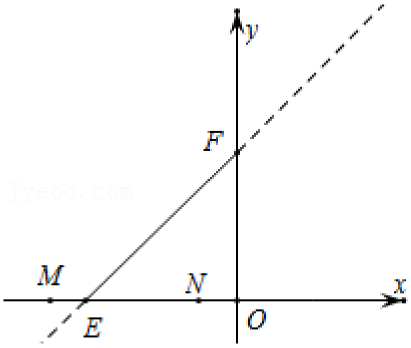
$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{2}EM \leqslant \dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}[(m+2)-(-2)] \leqslant \dfrac{1}{2}$，

解得 $m \leqslant -4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 线段 EF 上存在点使得这一点关于线段 MN 的线段比 $k \leqslant \dfrac{1}{4}$，线段 EF 上的点到 N 距离较小时，$-\dfrac{9}{2} \leqslant m \leqslant -4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当线段 EF 上的点到 M 距离较小时，也分两种情况：

①当 N 在 E 右侧，M 在 E 左侧时，如图：

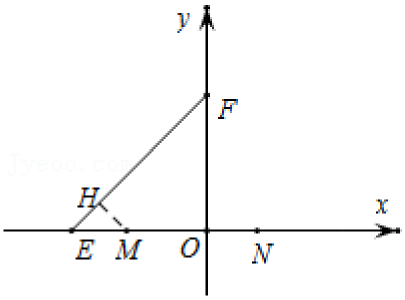


线段 EF 上存在点使得这一点关于线段 MN 的线段比 $k \leqslant \dfrac{1}{4}$，

$\therefore \dfrac{ME}{MN} \leqslant \dfrac{1}{4}$，即 $\dfrac{-2-m}{2} \leqslant \dfrac{1}{4}$，

解得 $m \geqslant -\dfrac{5}{2}$，

②当 M、N 在点 E 右侧时，过 M 作 $MH \perp EF$ 于 H，如图：



线段 EF 上存在点使得这一点关于线段 MN 的线段比 $k \leqslant \dfrac{1}{4}$，

$\therefore \dfrac{HM}{MN} \leqslant \dfrac{1}{4}$，即 $\dfrac{HM}{2} \leqslant \dfrac{1}{4}$，

$\therefore HM \leqslant \dfrac{1}{2}$，

而 $E(-2,0)$，$F(0,2)$，

$\therefore \angle FEO=45^{\circ}$，

$\therefore \Delta HEM$ 时等腰直角三角形，

$\therefore HM=\frac{\sqrt{2}}{2}EM$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}EM\leqslant\frac{1}{2}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}[m-(-2)]\leqslant\frac{1}{2}$，

解得：$m\leqslant-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$线段 EF 上存在点使得这一点关于线段 MN 的线段比 $k\leqslant\frac{1}{4}$，线段 EF 上的点到 M 距离较小时，$-\frac{5}{2}\leqslant m\leqslant-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

综上所述，线段 EF 上存在点使得这一点关于线段 MN 的线段比 $k\leqslant\frac{1}{4}$，则 $-\frac{9}{2}\leqslant m\leqslant-4+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{5}{2}\leqslant m\leqslant-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点评】本题考查一次函数应用，解题的关键是读懂线段比的定义，找出"临界点"列不等式.