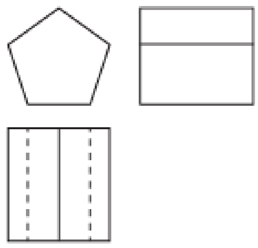
2022 北京西城初三一模

数　学

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1. 如图是某几何体的三视图，该几何体是（　）

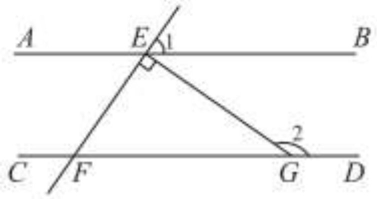


A. 圆柱　　B. 五棱柱　　C. 长方体　　D. 五棱锥

2. 国家速滑馆“冰丝带”上方镶嵌着许多光伏发电玻璃，据测算，“冰丝带”屋顶安装的光伏电站每年可输出约 44. 8 万度清洁电力．将 448000 用科学记数法表示应为（　）

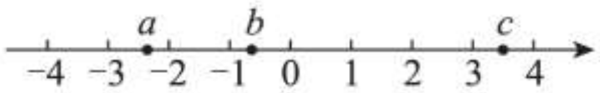
A. 0.448×10^6　　B. 44.8×10^4　　C. 4.48×10^5　　D. 4.48×10^6

3. 如图，直线 $AB//CD$，直线 EF 分别与直线 AB，CD 交于点 E，F，点 G 在直线 CD 上，$GE\perp EF$．若 $\angle1=55°$，则 $\angle2$ 的大小为（　）



A. 145°　　B. 135°　　C. 125°　　D. 120°

4. 实数 a，b，c 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



A. $a>b$　　B. $|b|<|c|$　　C. $a+c<0$　　D. $ab>c$

5. 若正多边形的一个外角是 $60°$，则该正多边形的内角和为（　）

A. $360°$　　B. $540°$　　C. $720°$　　D. $900°$

6. △ABC 和△DEF 是两个等边三角形，AB=2，DE=4，则△ABC 与△DEF 的面积比是（　）

A. $1:2$　　B. $1:4$　　C. $1:8$　　D. $1:\sqrt{2}$

7. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m+1)x+4=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的值可以是（　）

A. 1　　B. -1　　C. -5　　D. -6

8. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A　坐标是 $(5,0)$，点 B 是函数 $y=\frac{6}{x}(x>0)$ 图象上的一个动点，过点 B 作 $BC\perp y$ 轴交函数 $y=-\frac{2}{x}(x<0)$ 的图象于点 C，点 D 在 x 轴上（D 在 A 的左侧），且 $AD=BC$，连接 AB，CD．有如下四个结论：

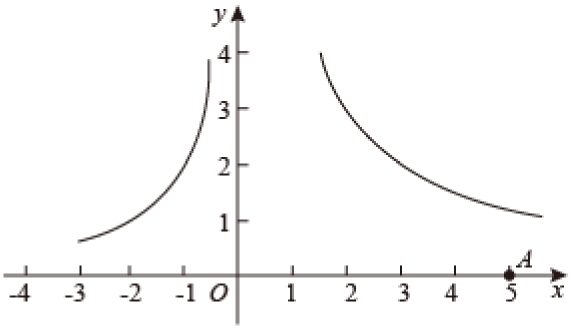
①四边形 $ABCD$ 可能是菱形；

②四边形 $ABCD$ 可能　正方形；

③四边形 $ABCD$ 的周长是定值；

④四边形 $ABCD$ 的面积是定值．

所有正确结论的序号是（　）



A. ①②　　B. ③④　　C. ①③　　D. ①④

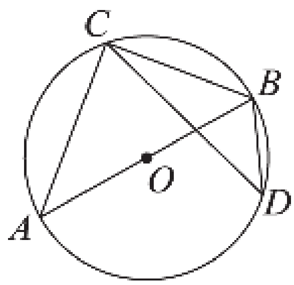
第二部分　非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若 $\sqrt{x-6}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围为________________．

10. 分解因式：$x^3-9x=$____．

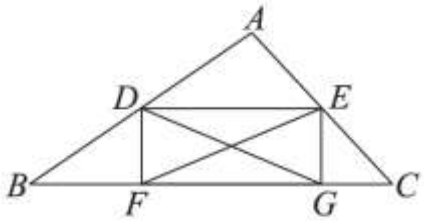
11. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C，D 在⊙O 上．若∠CBA=50°，则∠CDB=______°．



12. 方程 $\frac{2x-3}{x+1}=1-\frac{x}{x+1}$ 的解为______．

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $P(4,m)$，且在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大，则点 P 在第______象限．

14. 如图，在△ABC 中，D，E 分别是 AB，AC 的中点，点 F，G 在边 BC 上，且 $DG=EF$．只需添加一个条件即可证明四边形 $DFGE$ 是矩形，这个条件可以是______．（写出一个即可）



15. 某校学生会在同学中招募志愿者作为校庆活动讲解员，并设置了“即兴演讲”“朗诵短文”“电影片段配音”三个测试项目，报名的同学通过抽签的方式从这三个项目中随机抽取一项进行测试．甲、乙两位同学报名参加测试，恰好都抽到“即兴演讲”项目的概率是______．

16. 叶子是植物进行光合作用的重要部分，研究植物的生长情况会关注叶面的面积．在研究水稻等农作物的生长时，经常用一个简洁的经验公式 $S=\dfrac{ab}{k}$ 来估算叶面的面积，其中 a，b 分别是稻叶的长和宽（如图 1），k 是常数，则由图 1 可知 k______1（填“＞”“＝”或“＜”）．试验小组采集了某个品种的稻叶的一些样本，发现绝大部分稻叶的形状比较狭长（如图 2），大致都在稻叶的 $\dfrac{4}{7}$ 处“收尖”．根据图 2 进行估算，对于此品种的稻叶，经验公式中 k 的值约为_______（结果保留小数点后两位）．

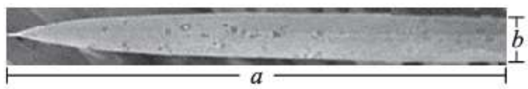


图 1

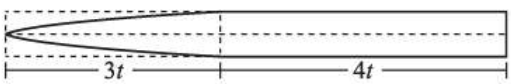


图 2

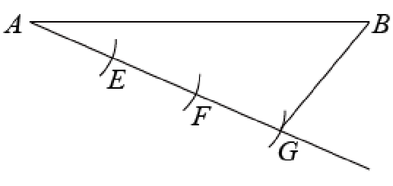
三、解答题（共 68 分，第 17-20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22-23 题，每题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17. 计算：$\sqrt{12}-\tan 60^{\circ}+\left|\sqrt{3}-2\right|+\left(\pi-4\right)^{0}$．

18. 解不等式组 $\begin{cases}5x+1>3\left(x-1\right)\\ \dfrac{8x+2}{9}>x\end{cases}$：

19. 已知 $a^{2}-2ab-7=0$，求代数式 $(a+b)^{2}-b(4a+b)+5$ 的值．

20. 已知：如图，线段 AB．



求作：点 C，D，使得点 C，D 在线段 AB 上，且 $AC=CD=DB$．

作法：①作射线 AM，在射线 AM 上顺次截取线段 $AE=EF=FG$，连接 BG；

②以点 E 为圆心，BG 长为半径画弧，再以点 B 为圆心，EG 长为半径画弧，两弧在 AB 上方交于点 H；

③连接 BH，连接 EH 交 AB 于点 C，在线段 CB 上截取线段 $CD=AC$．

所以点 C，D 就是所求作的点．

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：∵$EH=BG$，$BH=EG$，

∴四边形 $EGBH$ 是平行四边形．（______）（填推理的依据）

∴ $EH \parallel BG$，即 $EC \parallel BG$．

∴AC∶______$=AE$∶AG．

∵$AE=EF=FG$，

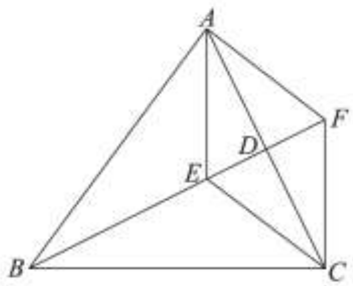
∴$AE=$______AG．

∴ $AC=\frac{1}{3}AB=CD$．

∴ $DB=\frac{1}{3}AB$．

∴$AC=CD=DB$．

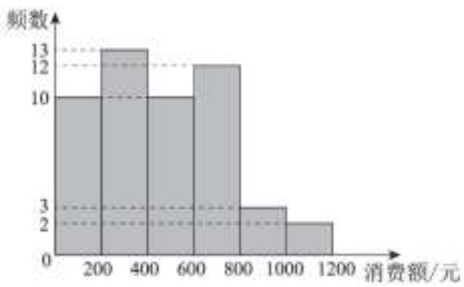
21. 如图，在△ABC 中，$BA=BC$，BD 平分∠ABC 交 AC 于点 D，点 E 在线段 BD 上，点 F 在 BD 的延长线上，且 $DE=DF$，连接 AE，CE，AF，CF．



（1）求证：四边形 $AECF$ 是菱形；

（2）若 $BA\perp AF$，$AD=4$，$BC=4\sqrt{5}$，求 BD 和 AE 的长．

22. 2022 年北京冬奥会的举办促进了冰雪旅游，小明为了解寒假期间冰雪旅游的消费情况，从甲、乙两个滑雪场的游客中各随机抽取了 50 人，获得了这些游客当天消费额（单位：元）的数据，并对数据进行整理、描述和分析．下面给出部分信息：a．甲滑雪场游客消费额的数据的频数分布直方图如下（数据分成 6 组：$0\le x<200$，$200\leqslant x<400$，$400\le x<600$，$600\le x<800$，$800\le x<1000$，$1000\le x<1200$）：



b．甲滑雪场游客消费额的数据在 $400\le x<600$ 这一组的是：

410 430 430 440 440 440 450 450 520 540

c．甲、乙两个滑雪场游客消费额的数据的平均数、中位数如下：

	平均数	中位数
甲滑雪场	420	m

乙滑雪场	390	n

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m 的值；

（2）一名被调查　游客当天的消费额为 380 元，在他所在的滑雪场，他的消费额超过了一半以上的被调查的游客，那么他是哪个滑雪场的游客？请说明理由；

（3）若乙滑雪场当天的游客人数为 500 人，估计乙滑雪场这个月（按 30 天计算）的游客消费总额．

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: y=kx+b$ 与坐标轴分别交于 $A(2,0)$，$B(0,4)$ 两点．将直线 l_1 在 x 轴上方的部分沿 x 轴翻折，其余的部分保持不变，得到一个新的图形，这个图形与直线 $l_2: y=m(x-4)(m\neq 0)$ 分别交于点 C，D．

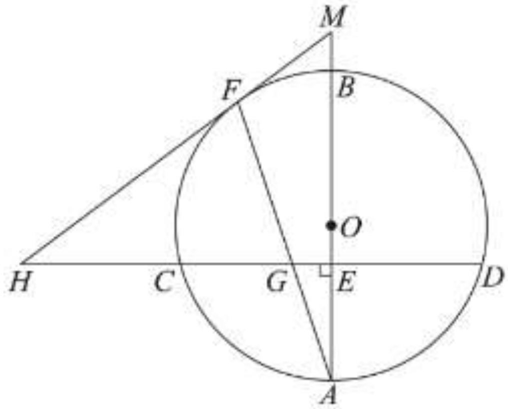
（1）求 k，b 的值；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫做整点．记线段 AC，CD，DA 围成的区域（不含边界）为 W．

①当 m=1 时，区域 W 内有______个整点；

②若区域 W 内恰有 3 个整点，直接写出 m 的取值范围．

24. 如图，AB 是⊙O 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，点 F 在弧 BC 上，AF 与 CD 交于点 G，点 H 在 DC 的延长线上，且 $HG=HF$，延长 HF 交 AB 的延长线于点 M．



（1）求证：HF 是⊙O 的切线；

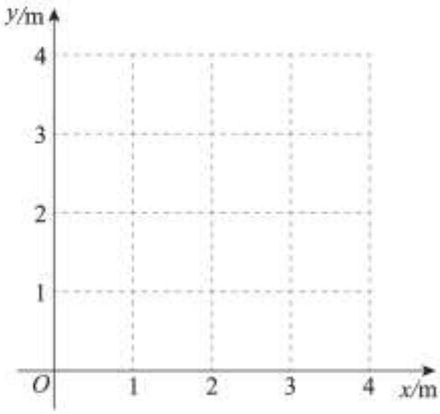
（2）若 $\sin M=\dfrac{4}{5}$，BM=1，求 AF 的长．

25. 要修建一个圆形喷水池，在池中心竖直安装一根水管，水管的顶端安一个喷水头，记喷出的水与池中心的水平距离为 x m，距地面的高度为 y m．测量得到如下数值：

x/m	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.37
y/m	2.44	3.15	3.49	3.45	3.04	2.25	1.09	0

小腾根据学习函数的经验，发现 y 是 x 的函数，并对 y 随 x 的变化而变化的规律进行了探究．

下面是小腾的探究过程，请补充完整：



（1）在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组数值所对应的点 $\left(x, y\right)$，并画出函数的图象；

（2）结合函数图象，出水口距地面的高度为_______m，水达到最高点时与池中心的水平距离约为_______m（结果保留小数点后两位）；

（3）为了使水柱落地点与池中心的距离不超过 3.2m，如果只调整水管的高度，其他条件不变，结合函数图象，估计出水口至少需要_______（填“升高”或“降低”）_______m（结果保留小数点后两位）.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-(a+4)x+3$ 经过点 $(2, m)$.

（1）若 $m=-3$，

①求此抛物线的对称轴；

②当 $1<x<5$ 时，直接写出 y 的取值范围；

（2）已知点 $\left(x_1, y_1\right)$，$\left(x_2, y_2\right)$ 在此抛物线上，其中 $x_1<x_2$．若 $m>0$，且 $5x_1+5x_2\geq 14$，比较 y_1， y_2 的大小，并说明理由.

27. 已知正方形 $ABCD$，将线段 BA 绕点 B 旋转 α（$0°<\alpha<90°$），得到线段 BE，连接 EA，EC.

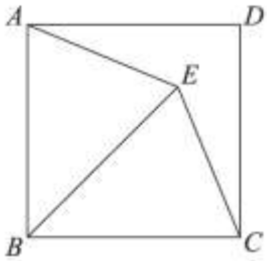


图 1

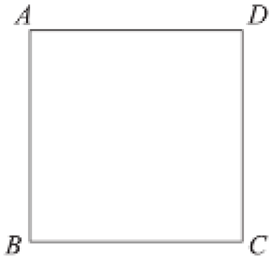


图 2

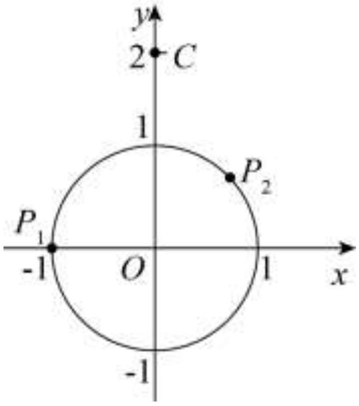
（1）如图 1，当点 E 在正方形 $ABCD$ 内部时，若 BE 平分∠ABC，AB=4，则∠AEC=______°，四边形 $ABCE$ 的面积为______；

（2）当点 E 在正方形 $ABCD$ 外部时，

①在图 2 中依题意补全图形，并求∠AEC 的度数；

②作∠EBC 的平分线 BF 交 EC 于点 G，交 EA 的延长线于点 F，连接 CF．用等式表示线段 AE，FB，FC 之间的数量关系，并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于△ABC 与⊙O，给出如下定义：若△ABC 与⊙O 有且只有两个公共点，其中一个公共点为点 A，另一个公共点在边 BC 上（不与点 B，C 重合），则称△ABC 为⊙O 的“点 A 关联三角形”.



（1）如图，$\odot O$的半径为 1，点$C(0,2)$．$\triangle AOC$为$\odot O$的“点 A 关联三角形”．

①在$P_1(-1,0)$，$P_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$这两个点中，点 A 可以与点______重合；

②点 A 的横坐标的最小值为_______；

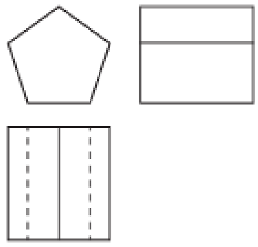
（2）$\odot O$的半径为 1，点$A(1,0)$，点 B 是 y 轴负半轴上的一个动点，点 C 在 x 轴下方，$\triangle ABC$是等边三角形，且$\triangle ABC$为$\odot O$的“点 A 关联三角形”．设点 C 的横坐标为 m，求 m 的取值范围；

（3）$\odot O$的半径为 r，直线$y=x$与$\odot O$在第一象限的交点为 A，点$C(4,0)$．若平面直角坐标系 xOy 中存在点 B，使得$\triangle ABC$是等腰直角三角形，且$\triangle ABC$为$\odot O$的“点 A 关联三角形”，直接写出 r 的取值范围．

参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 如图是某几何体的三视图，该几何体是（　）



A. 圆柱　　B. 五棱柱　　C. 长方体　　D. 五棱锥

【答案】B

【解析】

【分析】根据三视图可知正视图是一个正五边形，左视图是一个大长方形，里面有两个小长方形，俯视图是一个大长方形，竖着分成两个小长方形且有两条线看不见，由此即可得到答案.

【详解】解：由三视图可知正视图是一个正五边形，左视图是一个大长方形，里面有两个小长方形，俯视图是一个大长方形，竖着分成两个小长方形且有两条线看不见，由此可知这个几何体是五棱柱，

故选 B.

【点睛】本题主要考查了由三视图还原几何体，解题的关键在于能够正确理解图中的三视图.

2. 国家速滑馆“冰丝带”上方镶嵌着许多光伏发电玻璃，据测算，“冰丝带”屋顶安装的光伏电站每年可输出约 44. 8 万度清洁电力．将 448000 用科学记数法表示应为（　）

A. 0.448×10^{6}　　B. 44.8×10^{4}　　C. 4.48×10^{5}　　D. 4.48×10^{6}

【答案】C

【解析】

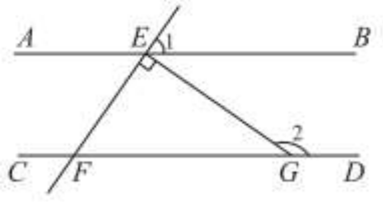
【分析】直接用科学记数法的形式表示即可.

【详解】解：448000=4.48×10^{5}

故选：C

【点睛】本题考查了用科学记数法表示绝对值较大的数，此时 $a\times10^{n}$ 中，$1\le|a|<10$，n 为正整数且 n 等于原数的整数位数减 1.

3. 如图，直线 $AB//CD$，直线 EF 分别与直线 AB，CD 交于点 E，F，点 G 在直线 CD 上，$GE\perp EF$．若 $\angle1=55^\circ$，则$\angle2$ 的大小为（　）



A. 145°　　B. 135°　　C. 125°　　D. 120°

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $AB//CD$，由两直线平行同位角相等可推导$\angle EFG=\angle 1$；根据 $GE\perp EF$，可知$\angle FEG=90^\circ$；然后借助三角形外角　性质“三角形外角等于不相邻的两个内角和”，利用（$\angle EFG+\angle FEG$）计算$\angle 2$即可.

【详解】解：$\because AB//CD$，

$\therefore \angle EFG=\angle 1=55^\circ$，

$\because GE\perp EF$，

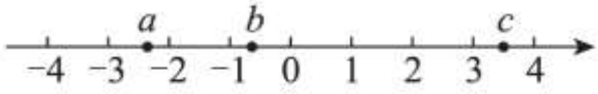
$\therefore \angle FEG=90^\circ$，

$\therefore \angle 2=\angle EFG+\angle FEG=55^\circ+90^\circ=145^\circ$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质及三角形外角的定义和性质，解题关键是熟练掌握相关性质并灵活运用.

4. 实数 a，b，c 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



A. $a>b$　　B. $|b|<|c|$　　C. $a+c<0$　　D. $ab>c$

【答案】B

【解析】

【分析】根据 a，b，c 对应的点在数轴上的位置，逐一判断即可.

【详解】解：由题意得：$-3<a<-2<-1<b<0<3<c<4$

$\therefore a<b<c$，$|b|<|c|$，$a+c>0$，$ab<c$，

$\therefore A$ 错误，B 正确，C 错误，D 错误.

故选 B.

【点睛】本题考查的是有理数的大小比较，绝对值的概念，有理数的和的符号，积的符号的确定，掌握以上知识是解题的关键.

5. 若正多边形的一个外角是60°，则该正多边形的内角和为（ ）

A. 360°　　B. 540°　　C. 720°　　D. 900°

【答案】C

【解析】

【分析】根据正多边形的外角度数求出多边形的边数，根据多边形的内角和公式即可求出多边形的内角和.

【详解】由题意，正多边形的边数为$n=\dfrac{360^\circ}{60^\circ}=6$，

其内角和为$(n-2)\cdot 180^\circ=720^\circ$.

故选 C.

【点睛】考查多边形的内角和与外角和公式，熟练掌握公式是解题的关键.

6. $\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 是两个等边三角形，$AB=2$，$DE=4$，则$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的面积比是（　）

A. $1:2$　　B. $1:4$　　C. $1:8$　　D. $1:\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】所有的等边三角形都相似，且相似比等于其边长比，再利用两个相似三角的面积之比等于其相似比的平方，即可求解.

【详解】∵△ABC 和△DEF 是两个等边三角形，

∴ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$，且有相似比为：$\dfrac{AB}{ED}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

又∵两个相似三角的面积比等于其相似比的平方，

∴ $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}=(\dfrac{AB}{ED})^2=(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$，

故选：B.

【点睛】本题考查了相似三角形的基本性质，利用两个相似三角的面积比等于其相似比的平方是解答本题关键.

7. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m+1)x+4=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的值可以是（　）

A. 1　　　　B. -1　　　　C. -5　　　　D. -6

【答案】D

【解析】

【分析】根据根的判别式得到 $\Delta=\left(m+1\right)^2-4\times1\times4=\left(m+1\right)^2-4^2>0$，然后解关于 m 的不等式，即可求出 m 的取值范围，并根据选项判断.

【详解】∵关于 x 的一元二次方程 $x^2+(m+1)x+4=0$ 有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=\left(m+1\right)^2-4\times1\times4=\left(m+1\right)^2-4^2>0$，

∴ $\left(m+1\right)^2>4^2$，

∴m+1>4，m>3，或 m+1<-4，m<-5.

故选 D .

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，一元二次方程有两个不相等的实数根时，Δ>0.

8. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标是 $(5,0)$，点 B 是函数 $y=\dfrac{6}{x}\left(x>0\right)$ 图象上的一个动点，过点 B 作 $BC\perp y$ 轴交函数 $y=-\dfrac{2}{x}\left(x<0\right)$ 的图象于点 C，点 D 在 x 轴上（D 在 A 的左侧），且 $AD=BC$，连接 AB，CD．有如下四个结论：

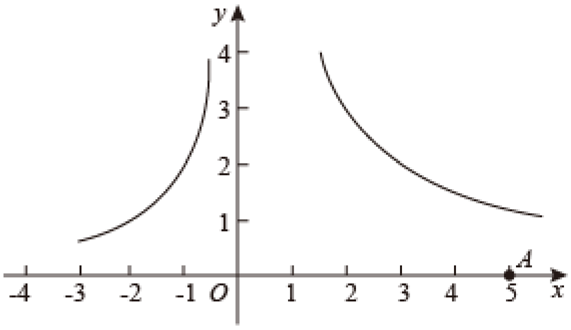
①四边形 $ABCD$ 可能是菱形；

②四边形 $ABCD$ 可能是正方形；

③四边形 $ABCD$ 的周长是定值；

④四边形 $ABCD$ 的面积是定值.

所有正确结论的序号是（　）



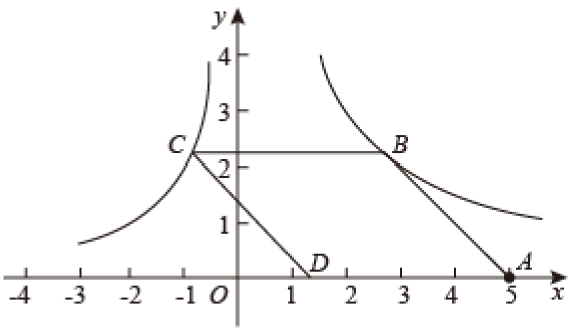
A. ①②　　　　B. ③④　　　　C. ①③　　　　D. ①④

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，设点 $B\left(\frac{6}{a},a\right)$，则 $C\left(-\frac{2}{a},a\right)$，根据 $BC=AB$，可得关于 a 的方程，有解，可得①正确；若四边形 $ABCD$ 是正方形，则 $AB\perp x$ 轴，$AB\perp BC$，$BC=AB$，可得到点 B，C 的坐标，从而得到 $AB\neq BC$，可得②错误；取 a 的不同的数值，可得③错误；根据平行四边的面积，可得平行四边的面积等于8，可得④正确，即可求解.

【详解】解：如图，



∵$BC\perp y$ 轴，

∴$BC\parallel AD$，

∵$AD=BC$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

设点 $B\left(\frac{6}{a},a\right)$，则 $C\left(-\frac{2}{a},a\right)$，

①若四边形 $ABCD$ 是菱形，则 $BC=AB$，

$\therefore BC=\frac{6}{a}-\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{8}{a}$，

∵点 A 的坐标是 $(5,0)$，

$\therefore AB=\sqrt{\left(5-\frac{6}{a}\right)^{2}+a^{2}}$，

$\therefore \dfrac{8}{a}=\sqrt{\left(5-\dfrac{6}{a}\right)^2+a^2}$，解得：$a^4+25a^2-60a-28=0$，该方程有解，

∴四边形 $ABCD$ 可能是菱形，故①正确；

②若四边形 $ABCD$ 是正方形，则 $AB\perp x$ 轴，$AB\perp BC$，$BC=AB$，

∵点 A 的坐标是 $(5,0)$，

∴点 B 的横坐标为 5，

∵点 B 是函数 $y=\dfrac{6}{x}\left(x>0\right)$ 图象上，

∴点 B 的纵坐标为 $\dfrac{6}{5}$，

$\therefore AB=\dfrac{6}{5}$

∵$BC\perp y$ 轴，

∴点 C 的纵坐标为 $\dfrac{6}{5}$，

∵点 C 是函数 $y=-\dfrac{2}{x}\left(x<0\right)$ 的图象的一点，

∴点 C 的横坐标为 $-\dfrac{5}{3}$，

∴此时 $BC=5-\left(-\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{20}{3}\neq AB$，

∴四边形 $ABCD$ 不可能是正方形，故②错误；

③若 $a=1$ 时，点 $B\left(6,1\right)$，则 $C\left(-1,1\right)$，

∴$AD=BC=7$，$CD=AB=\sqrt{\left(6-5\right)^2+1^2}=\sqrt{2}$，

∴此时四边形 $ABCD$ 的周长为 $2\left(7+\sqrt{2}\right)=14+2\sqrt{2}$，

若 $a=2$ 时，点 $B\left(3,2\right)$，则 $C\left(-1,2\right)$，

∴$AD=BC=4$，$CD=AB=\sqrt{\left(3-5\right)^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

∴此时四边形 $ABCD$ 的周长为 $2\left(4+2\sqrt{2}\right)=8+4\sqrt{2}$，

∴四边形 $ABCD$ 的周长不是定值，故③错误；

$\because B\left(\dfrac{6}{a},a\right)$，$C\left(-\dfrac{2}{a},a\right)$，

∴$AD=BC=\dfrac{6}{a}-\left(-\dfrac{2}{a}\right)=\dfrac{8}{a}$，点 B 到 x 轴的距离为 a，

∴四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{8}{a}\times a=8$，

∴四边形 $ABCD$ 的面积是定值，故④正确；

∴正确的有①④.

故选：D

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象与性质，平行四边形的性质，菱形的判定，正方形的判定，平行四边形的周长、面积公式，利用数形结合思想解答是解题的关键.

第二部分 非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若 $\sqrt{x-6}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围为________.

【答案】$x\geq 6$

【解析】

【分析】根据根式有意义的条件，得到不等式，解出不等式即可.

详解】要使 $\sqrt{x-6}$ 有意义，则需要 x-$6\geq 0$，解出得到 $x\geq 6$.

【点睛】本题考查根式有意义的条件，能够得到不等式是解题关键.

10. 分解因式： $\mathrm{x}^3-9\mathrm{x}=$____.

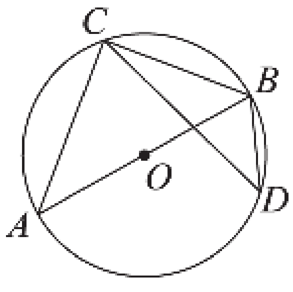
【答案】$\mathrm{x}\left(\mathrm{x}+3\right)\left(\mathrm{x}-3\right)$

【解析】

【详解】试题分析：要将一个多项式分解因式的一般步骤是首先看各项有没有公因式，若有公因式，则把它提取出来，之后再观察是否是完全平方公式或平方差公式，若是就考虑用公式法继续分解因式．因此，

先提取公因式 x 后继续应用平方差公式分解即可：$\mathrm{x}^2-9\mathrm{x}=\mathrm{x}\left(\mathrm{x}^2-9\right)=\mathrm{x}\left(\mathrm{x}+3\right)\left(\mathrm{x}-3\right)$.

11. 如图，AB 是⊙O 的直径，点 C，D 在⊙O 上．若∠CBA=50°，则∠CDB=______°.



【答案】40

【解析】

【分析】根据 AB 是⊙O 的直径，可得∠ACB=90°，从而得到∠A=40°，再由圆周角定理，即可求解.

【详解】解：∵AB 是⊙O 的直径，

∴∠ACB=90°，

∵∠CBA=50°，

∴∠A=90°-∠CBA=40°，

∵∠CDB=∠A，

∴∠CDB=40°.

故答案为：40

【点睛】本题主要考查了圆周角定理，熟练掌握直径所对的圆周角是直角，圆周角定理是解题的关键.

12. 方程$\frac{2x-3}{x+1}=1-\frac{x}{x+1}$的解为______.

【答案】$x=2$

【解析】

【分析】先去分母，整理成整式方程，求解即可.

【详解】解：两边同乘以$\left(x+1\right)$去分母得：$2x-3=\left(x+1\right)-x$，

去括号得：$2x-3=x+1-x$，

移项合并同类项得：$2x=4$，

系数化为1得：$x=2$，

检验：当$x=2$时$x+1\neq0$，

∴方程的解为$x=2$.

【点睛】本题考查解分式方程，解题的关键是掌握解分式方程的步骤：去分母变成整式方程再进行求解.

13. 在平面直角坐标系xOy中，反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点$P(4,m)$，且在每一个象限内，y随x的增大而增大，则点P在第______象限.

【答案】四

【解析】

【分析】直接利用反比例函数的性质确定m的取值范围，进而分析得出答案.

【详解】解：∵反比例函数$y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）图象在每个象限内y随着x的增大而增大，

∴$k<0$，

又反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象经过点$P(4,m)$，

∴$4m=k<0$

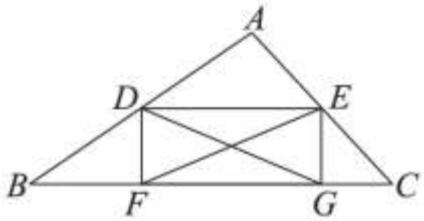
∴$m<0$

∴$P(4,m)$　第四象限.

故答案为：四.

【点睛】此题主要考查了反比例函数的性质，正确记忆点的坐标的分布是解题关键.

14. 如图，在△ABC中，D，E分别是AB，AC的中点，点F，G在边BC上，且$DG=EF$．只需添加一个条件即可证明四边形$DFGE$是矩形，这个条件可以是______．（写出一个即可）



【答案】$DE=FG$ 或 $DF \parallel EG$

【解析】

【分析】由 DE 是中位线得出 $DE \parallel BC$，又 $DG=EF$ 表示的是对角线相等，根据：对角线相等的平行四边形是矩形；增加条件使四边形 $DFGE$ 是平行四边形即可.

【详解】解：$\because D, E$ 分别是 AB, AC 的中点，

$\therefore DE \parallel BC$，

当 $DE=FG$ 时，四边形 $DFGE$ 是平行四边形，

$\because DG=EF$，

$\therefore$ 四边形 $DFGE$ 是矩形；

当 $DF \parallel EG$ 时，四边形 $DFGE$ 是平行四边形，

$\because DG=EF$，

$\therefore$ 四边形 $DFGE$ 是矩形；

故答案为：$DE=FG$ 或 $DF \parallel EG$.

【点睛】本题考查矩形的判定、平行四边形的判定，根据：对角线相等的平行四边形是矩形；准确分析出平行四边形的判定是解题关键.

15. 某校学生会在同学中招募志愿者作为校庆活动讲解员，并设置了“即兴演讲”“朗诵短文”“电影片段配音”三个测试项目，报名的同学通过抽签的方式从这三个项目中随机抽取一项进行测试．甲、乙两位同学报名参加测试，恰好都抽到“即兴演讲”项目的概率是______.

【答案】$\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】列表后，再根据概率公式计算概率即可.

【详解】解：列表如下：

	即兴演讲	朗诵短文	电影片段配音
即兴演讲	（即兴演讲，即兴演讲）	（即兴演讲，朗诵短文）	（即兴演讲，电影片段配音）
朗诵短文	（朗诵短文，即兴演讲）	（朗诵短文，朗诵短文）	（朗诵短文，电影片段配音）

电影片段配音	（电影片段配音，即兴演讲）	（电影片段配音，朗诵短文）	（电影片段配音，电影片段配音）

共有 9 种等可能结果，其中甲、乙都抽到“即兴演讲”项目的结果有 1 种，

故 P（甲、乙都抽到“即兴演讲”项目）$=\frac{1}{9}$，

故答案为：$\frac{1}{9}$

【点睛】此题考查了概率的计算，正确列出表格是解答此题的关键.

16. 叶子是植物进行光合作用的重要部分，研究植物的生长情况会关注叶面的面积．在研究水稻等农作物的生长时，经常用一个简洁的经验公式 $S=\frac{ab}{k}$ 来估算叶面的面积，其中 a，b 分别是稻叶的长和宽（如图 1），k 是常数，则由图 1 可知 k______1（填“＞”“＝”或“＜”）．试验小组采集了某个品种的稻叶的一些样本，发现绝大部分稻叶的形状比较狭长（如图 2），大致都在稻叶的 $\frac{4}{7}$ 处“收尖”．根据图 2 进行估算，对于此品种的稻叶，经验公式中 k 的值约为_______（结果保留小数点后两位）．

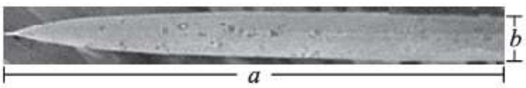


图 1

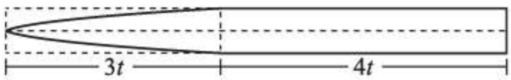


图 2

【答案】 ①. > ②. 1.27

【解析】

【分析】根据叶面的面积<矩形的面积，即 $S=\frac{ab}{k}<ab$，可求 $k>1$；根据 $S_{叶子}=\frac{1}{2}b\bullet 3t+b\bullet 4t=\frac{11}{2}bt$ 和 $S=\frac{ab}{k}=\frac{7t\bullet b}{k}=\frac{7bt}{k}$，列出方程，求出 k 即可.

【详解】解：∵叶面的面积<矩形的面积，即 $S<ab$

$\therefore S=\frac{ab}{k}<ab$

$\therefore k>1$，

$\because S_{叶子}=\frac{1}{2}b\bullet 3t+b\bullet 4t=\frac{11}{2}bt$

$S=\frac{ab}{k}=\frac{7t\bullet b}{k}=\frac{7bt}{k}$

$\therefore \frac{11}{2}bt=\frac{7bt}{k}$

$\therefore k=\frac{7bt}{\frac{11}{2}bt}=\frac{14}{11}\approx 1.27$

故答案为：>，1.27．

【点睛】本题考查了数据的处理和应用，涉及不等式的性质，方程等知识，理清题意，找到相等关系是解题的关键．

三、解答题（共 68 分，第 17-20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22-23 题，每题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17. 计算：$\sqrt{12}-\tan 60^{\circ}+\left|\sqrt{3}-2\right|+(\pi-4)^{0}$ ．

【答案】3

【解析】

【分析】根据二次根式、特殊角的三角函数值、零指数幂的法则，先化简，再进行积极运算．

【详解】解：原式$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+1=3$

【点睛】本题考查了实数的混合运算，以及特殊角的三角函数值，解题的关键是掌握运算法则．

18. 解不等式组$\begin{cases}5x+1>3(x-1)\\ \dfrac{8x+2}{9}>x\end{cases}$：

【答案】$-2<x<2$

【解析】

【分析】分别求出两个不等式的解集，即可求解．

【详解】解：$\begin{cases}5x+1>3(x-1)①\\ \dfrac{8x+2}{9}>x②\end{cases}$，

解不等式①得：$x>-2$，

解不等式②得：$x<2$，

∴不等式组的解集为$-2<x<2$．

【点睛】本题主要考查了解一元一次不等式组，熟练掌握解不等式组解集　口诀：同大取大，同小取小大小小大中间找，大大小小找不到（无解）是解题的关键．

19. 已知$a^{2}-2ab-7=0$，求代数式$(a+b)^{2}-b(4a+b)+5$的值．

【答案】7

【解析】

【分析】先利用完全平方公式和整式的乘法运算法则化简，再把$a^{2}-2ab-7=0$变形为$a^{2}-2ab=7$，然后再代入，即可求解．

【详解】解：$(a+b)^{2}-b(4a+b)+5$

$=a^{2}+2ab+b^{2}-4ab-b^{2}+5$

$=a^{2}-2ab+5$

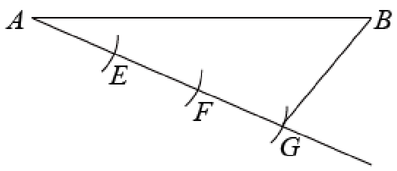
∵ $a^{2}-2ab-7=0$，

∴ $a^{2}-2ab=7$，

∴原式$=7+5=12$

【点睛】本题主要考查了整式的混合运算，熟练掌握整式混合运算法则是解题的关键.

20. 已知：如图，线段 *AB*.



求作：点 *C*，*D*，使得点 *C*，*D* 在线段 *AB* 上，且 *AC*=*CD*=*DB*.

作法：①作射线 *AM*，在射线 *AM* 上顺次截取线段 *AE*=*EF*=*FG*，连接 *BG*；

②以点 *E* 为圆心，*BG* 长为半径画弧，再以点 *B* 为圆心，*EG* 长为半径画弧，两弧在 *AB* 上方交于点 *H*；

③连接 *BH*，连接 *EH* 交 *AB* 于点 *C*，在线段 *CB* 上截取线段 *CD*=*AC*.

所以点 *C*，*D* 就是所求作的点.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：∵*EH*=*BG*，*BH*=*EG*，

∴四边形 *EGBH* 是平行四边形．（______）（填推理的依据）

∴ $EH \parallel BG$，即 $EC \parallel BG$.

∴*AC*∶______=*AE*∶*AG*.

∵*AE*=*EF*=*FG*，

∴*AE*=______*AG*.

∴ $AC=\frac{1}{3}AB=CD$.

∴ $DB=\frac{1}{3}AB$.

∴*AC*=*CD*=*DB*.

【答案】（1）见解析；

（2）两组对边分别相等的四边形是平行四边形；*AB*； $\frac{1}{3}$.

【解析】

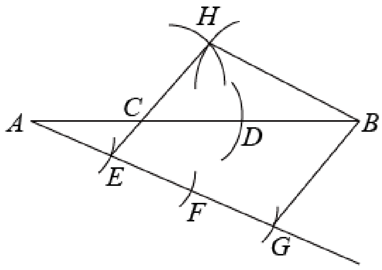
【分析】（1）根据要求作出图形即可.

（2）先证明四边形 *EGBH* 是平行四边形，再通过平行线分线段成比例定理来解决问题.

【小问 1 详解】

、

补全图形如下图所示：



【小问 2 详解】

证明：∵$EH=BG$，$BH=EG$，

∴四边形 $EGBH$ 是平行四边形．（两组对边分别相等的四边形是平行四边形）

∴ $EH \parallel BG$，即 $EC \parallel BG$．

∴AC∶AB=AE∶AG．

∵$AE=EF=FG$，

∴$AE=\frac{1}{3}AG$．

∴ $AC=\frac{1}{3}AB=CD$．

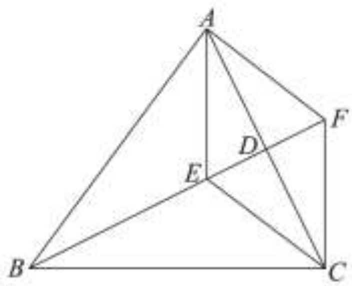
∴ $DB=\frac{1}{3}AB$．

∴$AC=CD=DB$．

故答案为：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；AB；$\frac{1}{3}$．

【点睛】本题考查基本作图，平行四边形的判定和性质及平行线分线段成比例定理等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

21. 如图，在△ABC 中，$BA=BC$，BD 平分∠ABC 交 AC 于点 D，点 E 在线段 BD 上，点 F 在 BD 的延长线上，且 $DE=DF$，连接 AE，CE，AF，CF．



（1）求证：四边形 $AECF$ 是菱形；

（2）若 $BA\perp AF$，$AD=4$，$BC=4\sqrt{5}$，求 BD 和 AE 的长．

【答案】（1）见解析　（2）$BD=8, AE=2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】（1）由等腰三角形的性质得到 $AD=CD, BD\perp AC$，再由菱形的判定定理即可得到结论；

（2）先求出 $AB=4\sqrt{5}$，由勾股定理得出 BD 的长度，解直角三角形求出 AF 的长度，再由菱形的性质即可求解．

【小问 1 详解】

$\because$ $BA=BC$，BD 平分$\angle ABC$

$\therefore AD=CD, BD\perp AC$

$\because$ $DE=DF$

$\therefore$四边形 $AECF$ 是菱形；

【小问 2 详解】

$\because BD\perp AC$，$BA\perp AF$

$\therefore \angle ADB=\angle BAF=90^{\circ}$

$\because BC=4\sqrt{5}$，$BA=BC$

$\therefore AB=4\sqrt{5}$

$\because$ $AD=4$

$\therefore$ 在 $Rt\Delta ABD$ 中，$\mathrm{BD}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AD}^2}=8$

$\because \tan\angle ABD=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AF}{AB}$

$\therefore \dfrac{4}{8}=\dfrac{AF}{4\sqrt{5}}$

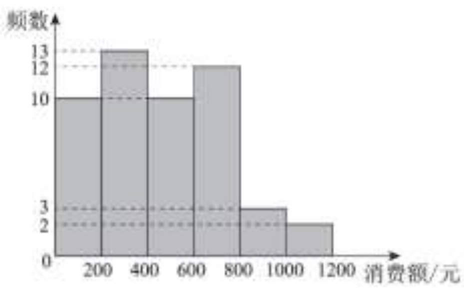
$\therefore AF=2\sqrt{5}$

$\because$四边形 $AECF$ 是菱形

$\therefore AE=AF=2\sqrt{5}$

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质、菱形的判定和性质、勾股定理及利用同角的三角函数关系求值，熟练掌握知识点是解题的关键．

22. 2022 年北京冬奥会的举办促进了冰雪旅游，小明为了解寒假期间冰雪旅游的消费情况，从甲、乙两个滑雪场的游客中各随机抽取了 50 人，获得了这些游客当天消费额（单位：元）的数据，并对数据进行整理、描述和分析．下面给出部分信息：a．甲滑雪场游客消费额的数据的频数分布直方图如下（数据分成 6 组：$0\le x<200$，$200\leqslant x<400$，$400\le x<600$，$600\le x<800$，$800\le x<1000$，$1000\le x<1200$）：



b．甲滑雪场游客消费额的数据在$400\le x<600$这一组的是：

410 430 430 440 440 440 450 450 520 540

c．甲、乙两个滑雪场游客消费额的数据的平均数、中位数如下：

	平均数	中位数
甲滑雪场	420	m

乙滑雪场	390	n

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m 的值；

（2）一名被调查的游客当天的消费额为380元，在他所在的滑雪场，他的消费额超过了一半以上的被调查的游客，那么他是哪个滑雪场的游客？请说明理由；

（3）若乙滑雪场当天的游客人数为500人，估计乙滑雪场这个月（按30天计算）的游客消费总额.

【答案】（1）430　（2）乙滑雪场的游客，理由见解析

（3）5850000

【解析】

【分析】（1）根据题意得到位于第25位和第26位　分别为430和430，即可求解；

（2）根据甲滑雪场游客消费额的中位数为430，且被调查的游客当天的消费额为380元，可得他不是甲滑雪场的游客，即可求解；

（3）用乙滑雪消费的平均数乘以每天的人数，再乘以时间，即可求解.

【小问1详解】

解：根据题意得：位于第25位和第26位的分别为430和430，

∴m=430；

【小问2详解】

解：∵甲滑雪场游客消费额的中位数为430，且被调查的游客当天的消费额为380元，

∴他不是甲滑雪场的游客，而是乙滑雪场的游客；

【小问3详解】

根据题意得：乙滑雪场这个月（按30天计算）的游客消费总额为：$390\times500\times30=5850000$元.

【点睛】本题主要考查了条形统计图和统计表，求中位数，中位数和平均数的应用，明确题意，准确从统计图和统计表中获取信息是解题的关键.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: y=kx+b$ 与坐标轴分别交于 $A(2,0)$，$B(0,4)$ 两点．将直线 l_1 在 x 轴上方的部分沿 x 轴翻折，其余的部分保持不变，得到一个新的图形，这个图形与直线 $l_2: y=m(x-4)(m\neq0)$ 分别交于点 C，D.

（1）求 k，b 的值；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫做整点．记线段 AC，CD，DA 围成的区域（不含边界）为 W.

①当 m=1时，区域 W 内有______个整点；

②若区域 W 内恰有3个整点，直接写出 m 的取值范围.

【答案】（1）$\begin{cases}k=-2\\b=4\end{cases}$

（2）1；$1<m\le\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】（1）利用待定系数法可求得直线 $l_1: y=kx+b$ 的解析式；

（2）①画出图象，确定点 B 关于 x 轴的对称点及与直线 $l_2: y=m(x-4)(m\neq 0)$ 的交点 C，根据图象可求解；②利用图象找到区域 W 内恰好有 1 个整点和恰有 3 个整点时的 m 的取值即可求解.

【小问 1 详解】

∵直线 $l_1: y=kx+b$ 与坐标轴分别交于 $A(2,0)$，$B(0,4)$ 两点,

$\therefore \begin{cases} 2k+b=0 \\ b=4 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k=-2 \\ b=4 \end{cases}$，且 $y=-2x+4$.

【小问 2 详解】

如图所示，点 B 关于 x 轴的对称点坐标为(0，-4)

当 m=1 时，直线 l_2 的解析式为 $y=x-4$，恰好过(0，-4)，即为交点 C，此时区域 W 内有 1 个整点 E，

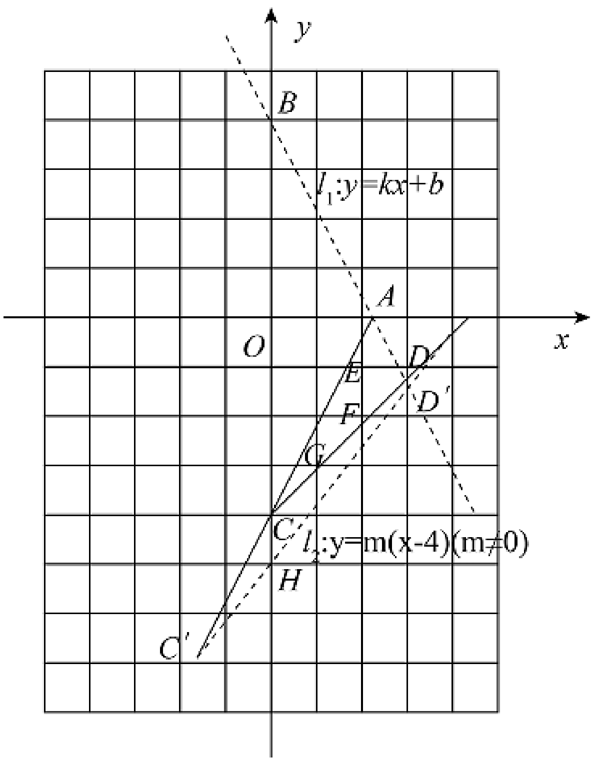
故答案为：1

如图所示，当 m=1 时，直线 l_2 的解析式为 $y=x-4$，恰好经过整点 G，F，

当直线 $l_2: y=m(x-4)(m\neq 0)$ 恰好经过整点 H 时，区域 W 内恰有 3 个整点，此时把整点 H 的坐标(0，-5)代入 $l_2: y=m(x-4)(m\neq 0)$ 得，$-4m=-5$，

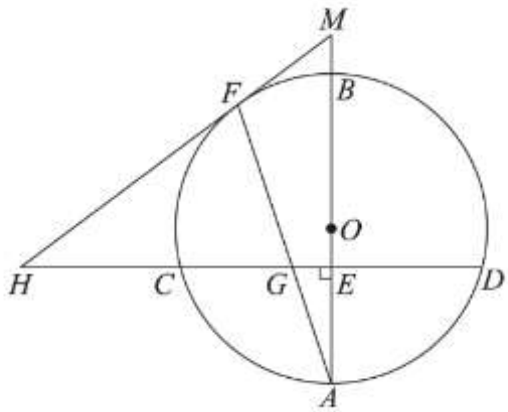
解得 $m=\frac{5}{4}$，

∴区域 W 内恰有 3 个整点时，m 的取值范围为：$1<m\leq \frac{5}{4}$.



【点睛】本题考查了一次函数的图象与性质，利用图象求解问题，通过画图象确定临界点是解题的关键.

24. 如图，AB 是⊙O 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，点 F 在弧 BC 上，AF 与 CD 交于点 G，点 H 在 DC 的延长线上，且 $HG=HF$，延长 HF 交 AB 的延长线于点 M.



（1）求证：*HF* 是⊙*O* 的切线；

（2）若 $\sin M=\dfrac{4}{5}$，*BM*=1，求 *AF* 的长.

【答案】（1）见解析　（2）$\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$

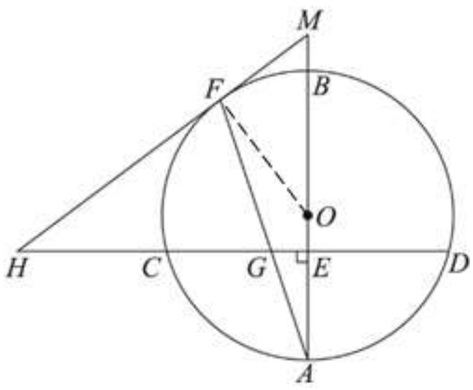
【解析】

【分析】（1）连接 *OF*，根据 *CD*⊥*AB*，可得∠*A*+∠*AGE*=90°，再由 *HG*=*HF*，可得∠*HFG* =∠*AGE*，然后根据 *OA*=*OF*，可得∠*A*=∠*OFA*，即可求证；

（2）连接 *BF*，先证得△*BFM*∽△*FAM*，可得 $\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{FM}{AM}$，再由 $\sin M=\dfrac{4}{5}$，可得 *OM*=5，*AM*=9，*AB*=8，*FM*=3，从而得到 $BF=\dfrac{1}{3}AF$，然后由勾股定理，即可求解.

【小问 1 详解】

证明：连接 *OF*，



∵*CD*⊥*AB*，

∴∠*AEG*=90°，

∴∠*A*+∠*AGE*=90°，

∵*HG*=*HF*，

∴∠*HFG*=∠*HGF*，

∵∠*HGF*=∠*AGE*，

∴∠*HFG* =∠*AGE*，

∵*OA*=*OF*，

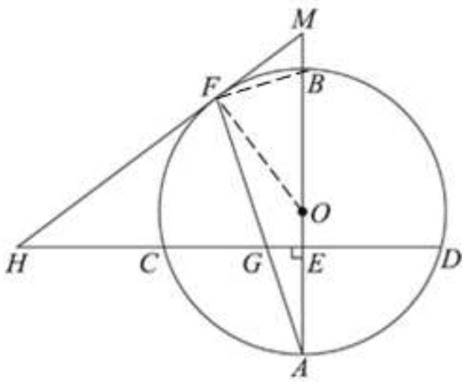
∴$\angle A=\angle OFA$，

∴$\angle OFA+\angle HFG=90°$，即$\angle OFH=90°$，

∴HF 是⊙O 的切线；

【小问 2 详解】

解：如图，连接 BF，



由（1）得：$\angle OFM=90°$，

∴$\angle BFO+\angle BFM=90°$，

∵AB 是⊙O 的直径，

∴$\angle AFB=90°$，

∴$\angle A+\angle ABF=90°$，

∵$OB=OF$，

∴$\angle ABF=\angle BFO$，

∴$\angle BFM=\angle A$，

∵$\angle M=\angle M$，

∴$\triangle BFM\backsim\triangle FAM$，

∴$\frac{BF}{AF}=\frac{FM}{AM}$，

∵$\sin M=\frac{4}{5}$，

∴$\frac{OF}{OM}=\frac{4}{5}$，

∵$BM=1$，$OB=OF$，

∴$\frac{OF}{OB+1}=\frac{4}{5}$，

解得：$OF=4$，

∴$OM=5$，$AM=9$，$AB=8$，

∴$FM=\sqrt{OM^2-OF^2}=3$，

∴$\frac{BF}{AF}=\frac{FM}{AM}=\frac{1}{3}$，

$\therefore BF=\dfrac{1}{3}AF$，

$\because AF^2+BF^2=AB^2$，

$\therefore AF^2+\left(\dfrac{1}{3}AF\right)^2=8^2$，

解得：$AF=\dfrac{12\sqrt{10}}{5}$．

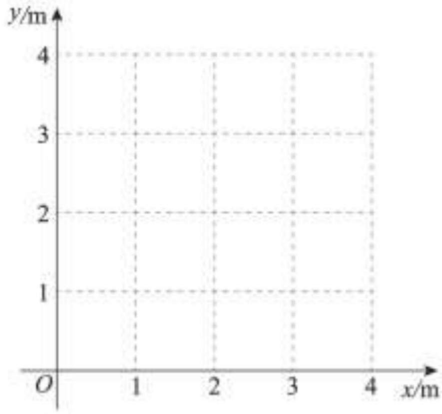
【点睛】本题主要考查了圆的综合题，熟练掌握切线的判定，相似三角形的判定和性质，理解锐角三角函数是解题的关键．

25. 要修建一个圆形喷水池，在池中心竖直安装一根水管，水管的顶端安一个喷水头，记喷出的水与池中心的水平距离为 x m，距地面的高度为 y m．测量得到如下数值：

x/m	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.37
y/m	2.44	3.15	3.49	3.45	3.04	2.25	1.09	0

小腾根据学习函数的经验，发现 y 是 x 的函数，并对 y 随 x 的变化而变化的规律进行了探究．

下面是小腾的探究过程，请补充完整：



（1）在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组数值所对应的点 (x,y)，并画出函数的图象；

（2）结合函数图象，出水口距地面的高度为_______m，水达到最高点时与池中心的水平距离约为_______m（结果保留小数点后两位）；

（3）为了使水柱落地点与池中心的距离不超过 3.2m，如果只调整水管的高度，其他条件不变，结合函数图象，估计出水口至少需要_______（填“升高”或“降低”）_______m（结果保留小数点后两位）．

【答案】（1）见解析；

（2）出水口距地面的高度为 2.44m，水达到最高点时与池中心的水平距离约为 1.20m；

（3）出水口至少需要降低 0.52m．

【解析】

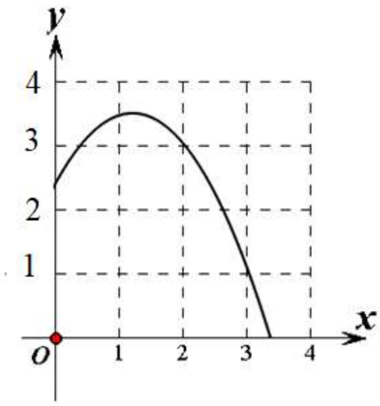
【分析】（1）根据表格中的数据，描点，连线画出图象；

（2）设 $y=ax^2+bx+2.44$，将点(1，3.49)，(2，3.04)代入求出解析式，然后求出对称轴即可；

（3）根据水柱落地点与池中心的距离不超过 3.2m，得出 a，b 不变，只有 c 改变，将 x=3.2 代入求解即可．

【小问 1 详解】

如图所示：



【小问 2 详解】

由图象可得：当 x=0 时，y=2.44，

∴c=2.44，设 $y=ax^2+bx+2.44$，

将点(1，3.49)，(2，3.04)代入得：$\begin{cases}3.49=a+b+2.44\\3.04=4a+2b+2.44\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-0.75\\b=1.8\end{cases}$，

∴$y=-0.75x^2+1.8x+2.44$，

∴抛物线的对称轴为：$x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1.8}{1.5}=1.2$，

∴$y=-0.75\times1.2^2+1.8\times1.2+2.44=3.52$，

∴出水口距地面的高度为 2.44m，水达到最高点时与池中心的水平距离约为 1.20m；

【小问 3 详解】

为了使水柱落地点与池中心的距离不超过 3.2m，此时 $y=ax^2+bx+c$ 中，a，b 不变，只有 c 改变，

∴$y=-0.75\times3.2^2+1.8\times3.2+c$，解得 c=1.92，2.44-1.92=0.52(m)，

∴出水口至少需要降低 0.52m.

【点睛】本题考查了二次函数在实际生活中的运用，解题的关键是数形结合并熟练掌握待定系数法.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-(a+4)x+3$ 经过点 $(2,m)$.

（1）若 $m=-3$，

①求此抛物线的对称轴；

②当 $1<x<5$ 时，直接写出 y 的取值范围；

（2）已知点 $\left(x_1, y_1\right)$，$\left(x_2, y_2\right)$ 在此抛物线上，其中 $x_1<x_2$．若 $m>0$，且 $5x_1+5x_2\geq14$，比较 y_1，y_2 的大小，并说明理由.

【答案】（1）① $x=\dfrac{5}{2}$，② $-\dfrac{13}{4}\leq y<3$

（2）$y_1<y_2$

【解析】

【分析】（1）①抛物线 $y=ax^2-(a+4)x+3$ 经过点 $(2,-3)$，求出 a，再代入对称轴公式求解即可；②因为 $1<\dfrac{5}{2}<5$，所以顶点是最低点，分别求出 x=1 和 x=5 时 y 的值，即可求解；

（2）根据$5x_1+5x_2\geq 14$得$\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{14}{10}>\frac{13}{10}$，说明$x_1$、$x_2$ 的中点x_0 在对称轴的左侧，即x_1离对称轴较近，x_2离对称轴较远，由$x_1<x_2$即可求解.

【小问 1 详解】

解：①∵抛物线$y=ax^2-(a+4)x+3$经过点$(2,-3)$.

∴ $-3=4a-2(a+4)+3$

解得 $a=1$，

∴ $y=x^2-5x+3$

∴对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}$；

②当$x=\frac{5}{2}$ 时，$y=-\frac{13}{4}$

当$x=1$时，$y=-1$，

当$x=5$时，$y=3$

∴当$1<x<5$时，$-\frac{13}{4}\leq y<3$.

【小问 2 详解】

解：∵抛物线$y=ax^2-(a+4)x+3$经过点$(2,m)$.

∴$m=4a-2(a+4)+3=2a-5>0$

∴$a>\frac{5}{2}>0$

对称轴$x=-\frac{-(a+4)}{2a}=\frac{1}{2}+\frac{2}{a}$

∵$a>\frac{5}{2}>0$

∴ $\frac{1}{a}<\frac{2}{5}$

∴ $\frac{1}{2}+\frac{2}{a}<\frac{13}{10}$

∵ $5x_1+5x_2\geq 14$

∴ $x_1+x_2\geq\frac{14}{5}$

∴ $\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{14}{10}>\frac{13}{10}$ ，

又∵ $x_1<x_2$

∴ x_1、x_2 的中点x_0 在对称轴的右侧，即x_1离对称轴较近，x_2离对称轴较远，

又∵$a>0$，抛物线的开口向上，则自变量x离对称轴距离越近函数值越小

$\therefore y_1 < y_2$

【点睛】本题考查了待定系数法求解析式、对称轴公式、顶点坐标、二次函数的性质，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

27. 已知正方形 *ABCD*，将线段 *BA* 绕点 *B* 旋转 α（$0° < \alpha < 90°$），得到线段 *BE*，连接 *EA*，*EC*.

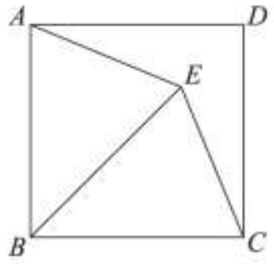


图 1

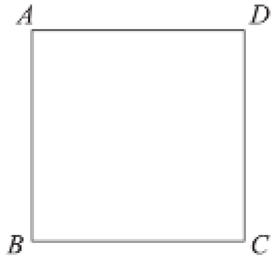


图 2

（1）如图 1，当点 *E* 在正方形 *ABCD* 的内部时，若 *BE* 平分∠*ABC*，*AB*=4，则∠*AEC*=______°，四边形 *ABCE* 的面积为______；

（2）当点 *E* 在正方形 *ABCD* 的外部时，

①在图 2 中依题意补全图形，并求∠*AEC* 的度数；

②作∠*EBC* 的平分线 *BF* 交 *EC* 于点 *G*，交 *EA* 的延长线于点 *F*，连接 *CF*．用等式表示线段 *AE*，*FB*，*FC* 之间的数量关系，并证明．

【答案】（1）135，$8\sqrt{2}$

（2）①作图见解析，45°；② $BF = \sqrt{2}CF - \frac{\sqrt{2}}{2}AE$

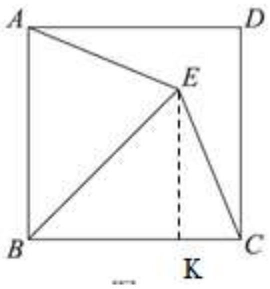
【解析】

【分析】（1）过点 *E* 作 $EK \perp BC$ 于点 *K*，由正方形的性质、旋转的性质及角平分线的定义可得 $\angle ABE = \angle CBE = 45°, AB = BE = BC = 4$，再利用等腰三角形的性质和解直角三角形可求出 $\angle BAE = \angle BEA = 67.5°$，$EK = 2\sqrt{2}$，继而可证明 $\Delta ABE \cong \Delta CBE(SAS)$，便可求解；

（2）①根据题意作图即可；由正方形的性质、旋转的性质可得 $BE = BA = BC$，再根据三角形内角和定理及等腰三角形的性质求出 $\angle AEB, \angle BEC = 45°$，即可求解；

②过点 *B* 作 $BH \perp AE$ 垂足为 *H*，由等腰三角形的性质得到 $AH = EH = \frac{1}{2}AE$，再证明 $\Delta FBE \cong \Delta FBC(SAS)$ 即可得到 $EF = CF$，再推出 ΔHBF 为等腰直角三角形，即可得到三者之间的关系.

【小问 1 详解】



过点 *E* 作 $EK \perp BC$ 于点 *K*

$\therefore \angle BKE = 90°$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore \angle ABC = 90°, AB = BC$

$\because$ BE 平分$\angle ABC$，AB=4，将线段 BA 绕点 B 旋转α（$0° < \alpha < 90°$），得到线段 BE

$\therefore \angle ABE = \angle CBE = 45°, AB = BE = BC = 4$

$\therefore \angle BAE = \angle BEA = 67.5°$， $\sin \angle EBK = \dfrac{EK}{BE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{EK}{4}$

$\therefore EK = 2\sqrt{2}$

$\therefore S_{\Delta BCE} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot EK = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\because BE = BE$

$\therefore \Delta ABE \cong \Delta CBE(SAS)$

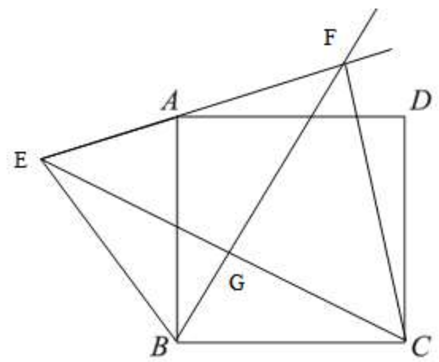
$\therefore \angle AEB = \angle CEB, S_{\Delta AEB} = S_{\Delta CEB}$

$\therefore \angle AEC = \angle AEB + \angle CEB = 135°$，四边形 $ABCE$ 的面积为$= S_{\Delta AEB} + S_{\Delta CEB} = 8\sqrt{2}$

故答案为：135，$8\sqrt{2}$

【小问 2 详解】

①作图如下



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore \angle ABC = 90°, AB = BC$

由旋转可得， $BE = BA = BC$

$\because \angle ABE + \angle BAE + \angle BEA = 180°, \angle ABE = \alpha$

$\therefore \angle BEA = \angle BAE = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$

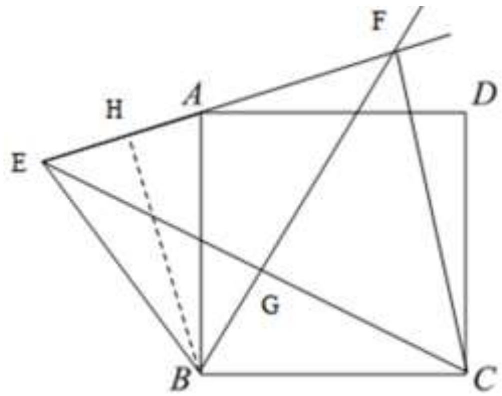
$\because \angle CBE + \angle BCE + \angle BEC = 180°, \angle CBE = \angle ABE + \angle ABC = 90° + \alpha$

$\therefore \angle BEC = \angle BCE = \dfrac{180° - (90° + \alpha)}{2} = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$

$\therefore \angle AEC = \angle AEB - \angle BEC = 45°$

② $BF = \sqrt{2}CF - \dfrac{\sqrt{2}}{2}AE$，理由如下：

如图，过点 B 作 $BH \perp AE$ 垂足为 H



$\therefore \angle BHF = 90°$

$\because BA = BE$

$\therefore AH = EH = \frac{1}{2}AE$

$\because BE = BC$ ，$\angle EBC$ 的平分线 BF 交 EC 于点 G

$\therefore BG \perp CE, \angle FBE = \angle FBC$

$\therefore \angle EGF = 90°$

$\because BF = BF$

$\therefore \Delta FBE \cong \Delta FBC(SAS)$

$\therefore EF = CF$

$\because \angle AEC = 45°$

$\therefore \angle AEC = \angle EFG = 45°$

$\therefore \angle EFG = 45° = \angle HBF$

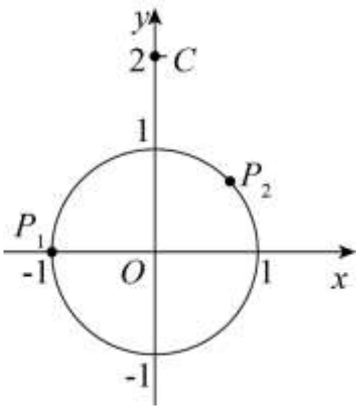
$\therefore \Delta HBF$ 为等腰直角三角形

$\therefore BF = \sqrt{2}HF = \sqrt{2}(EF - EH) = \sqrt{2}(EF - \frac{1}{2}AE) = \sqrt{2}(CF - \frac{1}{2}AE)$

即 $BF = \sqrt{2}CF - \frac{\sqrt{2}}{2}AE$

【点睛】本题属于四边形和三角形的综合题目，涉及正方形的性质、旋转的性质、角平分线的定义、等腰三角形的性质和判定、解直角三角形、全等三角形的判定与性质、三角形的内角和定理等，灵活运用上述知识点是解题的关键.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于△ABC 与⊙O，给出如下定义：若△ABC 与⊙O 有且只有两个公共点，其中一个公共点为点 A，另一个公共点在边 BC 上（不与点 B，C 重合），则称△ABC 为⊙O 的“点 A 关联三角形”.



（1）如图，⊙*O* 的半径为 1，点 $C(0,2)$．△*AOC* 为⊙*O* 的“点 *A* 关联三角形”．

①在 $P_1(-1,0)$，$P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$这两个点中，点 *A* 可以与点______重合；

②点 *A* 的横坐标的最小值为_______；

（2）⊙*O* 的半径为 1，点 $A(1,0)$，点 *B* 是 *y* 轴负半轴上的一个动点，点 *C* 在 *x* 轴下方，△*ABC* 是等边三角形，且△*ABC* 为⊙*O* 的“点 *A* 关联三角形”．设点 *C* 的横坐标为 *m*，求 *m* 的取值范围；

（3）⊙*O* 的半径为 *r*，直线 $y=x$ 与⊙*O* 在第一象限的交点为 *A*，点 $C(4,0)$．若平面直角坐标系 *xOy* 中存在点 *B*，使得△*ABC* 是等腰直角三角形，且△*ABC* 为⊙*O* 的“点 *A* 关联三角形”，直接写出 *r* 的取值范围．

【答案】（1）①P_2，②$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

（2）$m>\frac{1}{2}$

（3）$4\sqrt{2}-4<r\le$ 或 $r>4$．

【解析】

【分析】（1）根据“点 *A* 的关联三角形”的定义，只有除 *OC* 与⊙*O* 有一个交点外，线段 *AC* 与⊙*O* 也只有一个交点，所以当过点 *C* 作⊙*O* 的切线时，点 *A* 应在弧 *MN* 上，求出 *M* 点的坐标，即可知点 *A* 的横坐标为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，即可判断点 *A* 应与 $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$重合，点 *A* 的横坐标的最小值为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

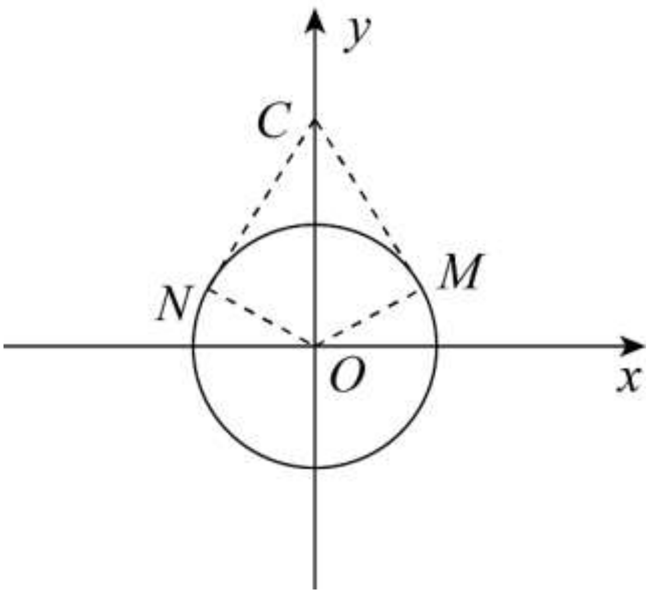
（2）作 *OA* 的垂直平分线 *GH*，交⊙*O* 于 *G*，*OA* 于 *H*，那么 *C* 点应在直线 *GH* 的右侧，根据△*OGA* 是等边三角形，可求结论；

（3）符合△*ABC* 等腰直角三角形的 *B* 点有 6 个，当 *r* 较小时，没有符合题意的 *B* 点，随着 *r* 增大，当 AB_1 与圆 *O* 有交点，直到 B_1 落在圆 *O* 上，$r=4\sqrt{2}-4$，此时仍不满足题意，当 $r>4\sqrt{2}-4$ 时，符合，直至下图的临界位置：*AC* 与圆 *O* 相切，B_1 与 *O* 重合，此时 $r=AB_1=2\sqrt{2}$，分①$r>2\sqrt{2}$，②$2\sqrt{2}<r\le4$，③$r>4$，进行讨论，即可求解．

【小问 1 详解】

解：①当点 *A* 与点 $P_1(-1,0)$ 重合时，连接 P_1C 与圆相交，而 *OC* 也与圆相交，这样△*AOC* 就与圆有三个交点，所以不符合“点 *A* 关联三角形”的定义；

过 *C* 作⊙*O* 的切线 *CM*，交⊙*O* 于 *M*，连接 *OM*，如图，



$\therefore OC=2$，$OM=1$，

$\therefore CM=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

设 M（x，y），则$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2+(y-2)^2=(\sqrt{3})^2\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$

当$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$时，线段 CM 与⊙O 有唯一交点，

$\because -\frac{\sqrt{3}}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴当点 A 与 $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$重合时，△$AOC$ 与⊙O 是“点 A 的关联三角形”；

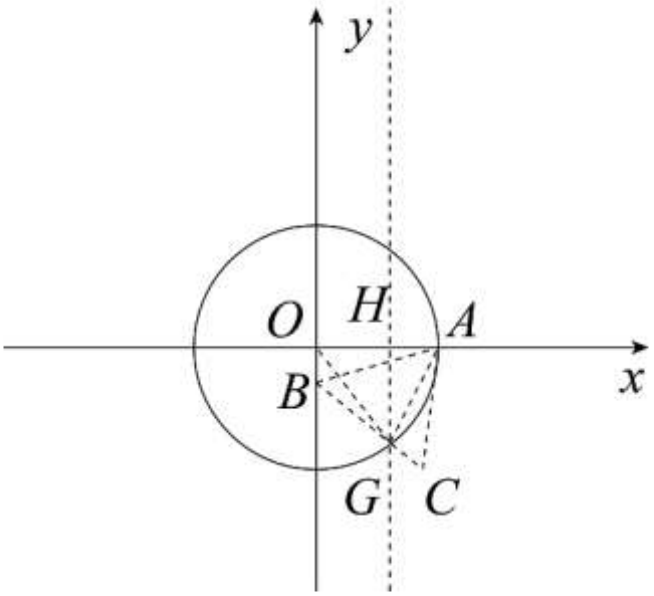
②由①得$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴点 A 的横坐标的最小值为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

【小问 2 详解】

解：作 OA 的垂直平分线 GH，交⊙O 于 G，OA 于 H，

那么 C 点应在直线 GH 的右侧，



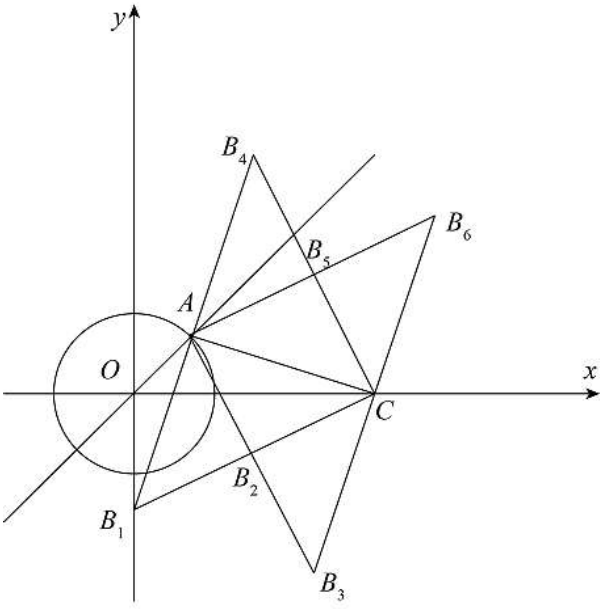
∵$OG=GA=OA=1$，

∴△OGA 是等边三角形，

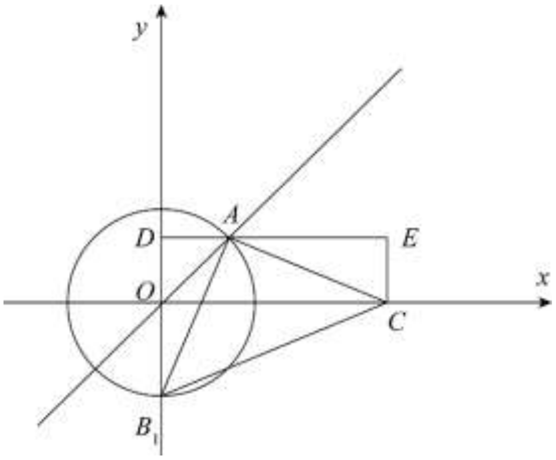
∴C 的横坐标为 $m>\frac{1}{2}$

【小问 3 详解】

解：如图，符合△ABC 等腰直角三角形的 B 点有 6 个，当 r 较小时，没有符合题意的 B 点，随着 r 增大，如下图所示，



当 AB_1 与圆 O 有交点，直到 B_1 落在圆 O 上，如图，设 A（m，m），C（4，0），B（x，y）



则 r=OA=$\sqrt{2}\,m$

过 A 作 x 轴平行线，交 y 轴于 D，过 C 作 $CE\perp AD$ 于 E

则$\triangle ADB_1\cong\triangle ACE$

∴AD=CE=m=m-x，DB_1=AE=4-m=m-y

∴x=0，y=2m-4

即 B_1 点恒在 y 轴上，

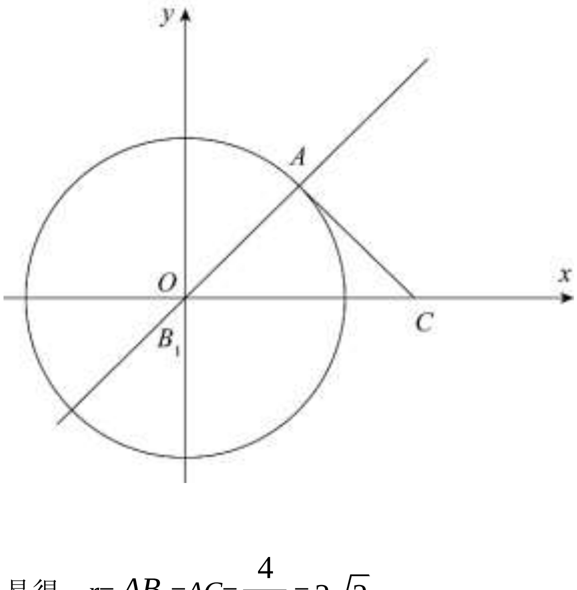
当 B_1 点在圆 O 上时，即 OB_1=r 时，可得：r+m=4-m，

故 $\sqrt{2}\,m$+m=4-m

解得：m=$4-2\sqrt{2}$，

∴r=$4\sqrt{2}-4$，此时仍不满足题意，

当 r>$4\sqrt{2}-4$时，符合，直至下图的临界位置：AC 与圆 O 相切，B_1 与 O 重合



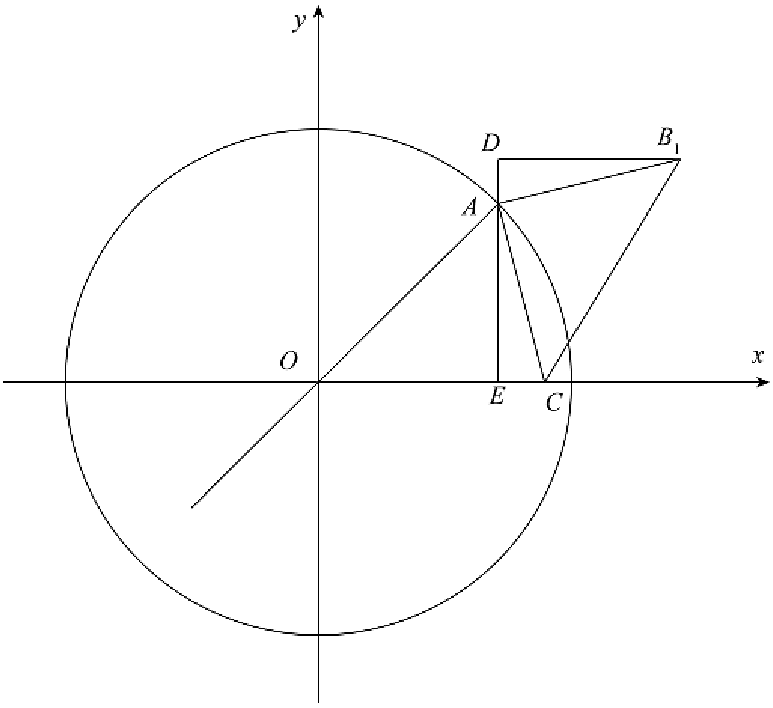
易得：r=AB_1=AC=$\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

①当 r>$2\sqrt{2}$时，由图可知，AC 将与圆 O 存在两个交点，不符题意

∴ $4\sqrt{2}-4<r\le 2\sqrt{2}$

②当$2\sqrt{2}<r\le 4$时，AC 与圆 O 有两个交点，不符题意

③当 $r>4$ 时，如图所示，



设 A（m，m），C（4，0），B（x，y），$r^2=2m^2$

$\because \angle ACE+\angle CAE=\angle CAE+\angle DAB_4=90°$，

$\therefore \angle ACE=\angle DAB_4$

$\because \angle AEC=\angle ADB_4=90°$, $AC=AB_4$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle AB_4D$

$\therefore AD=y-m=CE=4-m$，$DB_4=AE=m=x-m$

$\therefore y=4$，$x=2m$

此时 $OB_4^2=4m^2+16>r^2$

即 B_4 圆 O 外部，C 在圆 O 内部，B_4C 与圆 O 必有一个交点，符合题意

$\therefore r>4$ 符合题意

综上所述，r 的取值范围是：$4\sqrt{2}-4<r\le 2\sqrt{2}$ 或 $r>4$.

【点睛】本题是圆的综合题，主要考查了直线与圆的位置关系，全等三角形的判定与性质，等边三角形的性质、等腰直角三角形的性质，勾股定理等知识，综合运用这些知识点是解题的关键.