

2022 北京平谷初三二模

数 学

2022.6

注 意 事 项	<p>1. 本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题，满分 100 分，考试时间 120 分钟</p> <p>2. 在答题卡上准确填写学校名称、班级和姓名</p> <p>3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效</p> <p>4. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答</p> <p>5. 考试结束，请将答题卡交回</p>
------------------	---

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的.

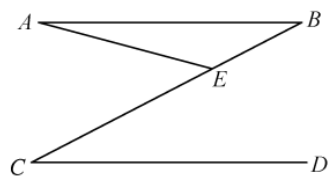
1. 下列立体图形中，俯视图是三角形的是（ ）



2. 2022 年 3 月 23 日下午，“天宫课堂”第二课在中国空间站开讲，神舟十三号乘组翟志刚、王亚平、叶光富进行授课，央视新闻抖音号进行全程直播，超过 3000000 多人次在线观看，3000000 用科学记数法表示应为（ ）

- A. 0.3×10^7 B. 3×10^6 C. 3×10^7 D. 30×10^6

3. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ，连接 BC ，点 E 是 BC 上一点， $\angle A = 15^\circ$ ， $\angle C = 27^\circ$ ，则 $\angle AEC$ 的大小为（ ）

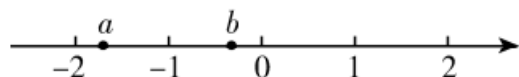


- A. 27° B. 42° C. 45° D. 70°

4. 正 n 边形的每个内角都是 120° ，则 n 的值为（ ）

- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

5. 实数 a ， b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是（ ）

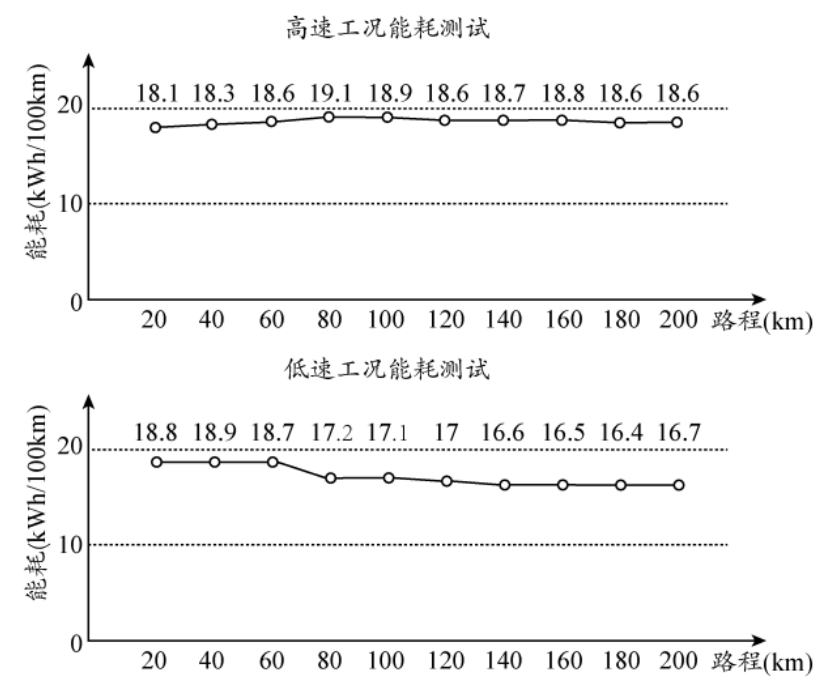


- A. $a < -2$ B. $|a| < |b|$ C. $-a < -b$ D. $ab > 0$

6. 甲、乙、丙、丁四名同学随机组合，两两一组做游戏，则甲与乙恰好被分在同一组的概率是（ ）

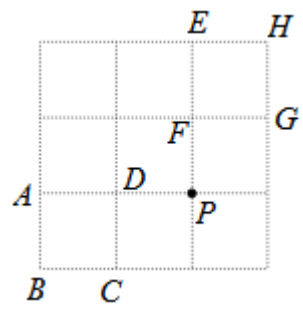
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 测试某款纯电动汽车低速工况和高速工况的能耗情况，为了更接近真实的日常用车环境，低速工况的平均时速在 30km/h 左右，包括城市一般道路、环路等路况；高速工况的平均时速保持在 90km/h 左右，路况主要是高速公路。设低速工况时能耗的平均数为 \bar{x}_1 ，方差为 S_1^2 ；高速工况时能耗的平均数为 \bar{x}_2 ，方差为 S_2^2 ，则下列结论正确的是（ ）



- A. $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$, $S_1^2 > S_2^2$ B. $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$, $S_1^2 < S_2^2$ C. $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, $S_1^2 > S_2^2$ D. $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$, $S_1^2 < S_2^2$

8. 边长为 1 的正方形格点图中，点 P 为格点上一一点，点 M 在正方形 $ABCD$ 边上运动，点 N 在正方形 $EFGH$ 边上运动，则 $\triangle PMN$ 的面积不可能是（ ）



- A. 1 B. 1.5 C. 2 D. 2.1

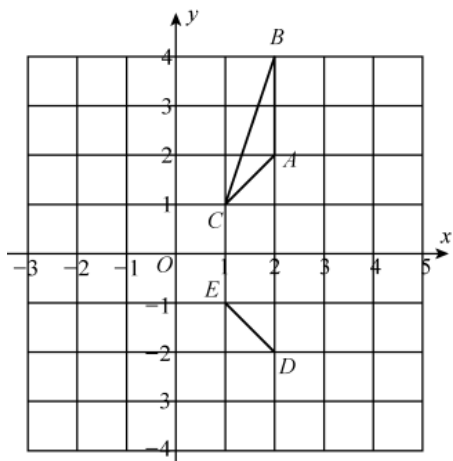
二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 使代数式 $\sqrt{x-1}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

10. 分解因式： $x^3 - x =$ _____.

11. 方程 $\frac{2}{x+1} = \frac{1}{x}$ 的解为_____.

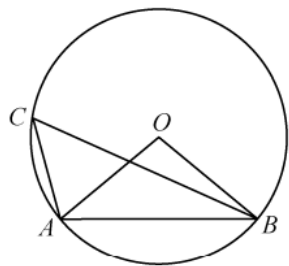
12. 如图，正方形格点图中，点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 均在格点上，若以 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 全等，请写出一个满足条件的 F 点坐标_____.



13. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 经过点 $(2, -3)$ 和点 $(-1, b)$ ，则 $b =$ _____.

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根，则 $m =$ _____.

15. 如图， $\odot O$ 中，点 A 、 B 、 C 为 $\odot O$ 上的点，若 $\angle C = 50^\circ$ ，则 $\angle OAB$ 的度数为_____.



16. 明明和丽丽去书店买书，若已知明明买了 A 、 B 两本书共花费 100.5 元，丽丽买了 A 、 C 两本书共花费 88.5 元，则 B 书比 C 书贵_____元；若又知 B 、 C 两本书 总价钱恰好等于 A 书的价钱，则 A 、 B 、 C 三本书的总价钱为_____.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

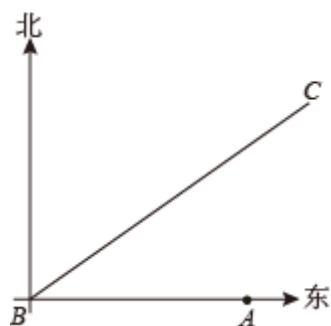
17. 计算: $\sqrt[3]{8} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2\cos 30^\circ + |1 - \sqrt{3}|$.

18 解不等式组:
$$\begin{cases} 5x + 3 > 4x \\ \frac{6 - x}{2} \geq x \end{cases}.$$

19. 已知 $m^2 - 2m + 5 = 0$, 求代数式 $(m - 2)^2 + 2(m + 1)$ 的值.

20. 如图, A 市气象台预报: 一沙尘暴中心在 A 市正西方的 B 处, 正迅速向北偏东的 BC 方向移动, 距沙尘暴中心一定的范围内都将受沙尘暴影响, 我们称这个范围为“波及范围”. 若想预测 A 市是否会受这次沙尘暴的影响, 只需测量 A 市到射线 BC 的距离, 若这个距离大于波及范围则 A 市不会受到影响, 若这个距离小于波及范围则 A 市会受到沙尘暴的影响. 结合题意, 在地图中作出所要测量的线段:

- ①作线段 AB 的垂直平分线 l;
- ②直线 l 与线段 AB 交于点 O;
- ③以 O 为圆心, OB 长为半径画圆, 交射线 BC 于点 H;
- ④连接 AH, AH 即为所求作.

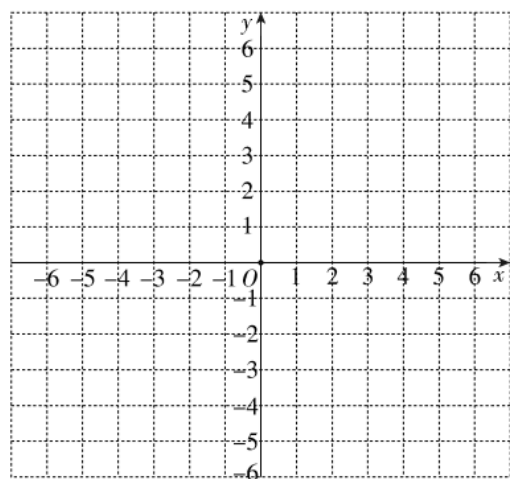


- (1) 使用直尺和圆规, 补全图形 (保留作图痕迹);
- (2) 依据作图过程完成如下证明.

证明:

$\because AB$ $\odot O$ 直径,
 $\therefore \angle AHB = \underline{\hspace{2cm}}$ ($\underline{\hspace{2cm}}$) (填推理的依据).
 $\therefore AH$ 即为所求作.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象由函数 $y = \frac{1}{2}x$ 平移得到, 且过点 $(0, -1)$.

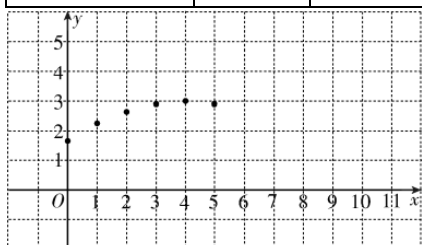


(1) 求这个一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的表达式;

(2) 当 $x > -2$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = mx + 1$ 的值大于一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的值, 求 m 的取值范围.

22. 一名同学推铅球, 铅球出手后行进过程中离地面的高度 y (单位: m) 与水平距离 x (单位: m) 近似满足二次函数关系, 已知铅球行进过程中的水平距离与离地面的高度的部分数据及图象如下.

x (米)	0	1	2	3	4	5	...
y (米)	1.67	2.25	2.67	2.92	3.00	2.92	...



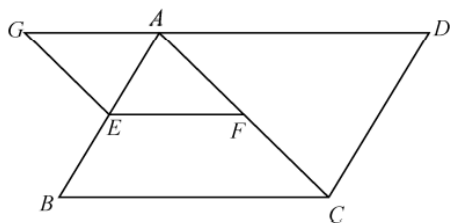
请解决以下问题:

(1) 在平面直角坐标系中, 根据已知数据描点, 并用平滑的曲线连接, 补全图形;

(2) 根据图象估出铅球落地时的水平距离 (单位: m, 精确到 0.1);

(3) 在铅球行进过程中, 当它离地面的高度为 2.5m 时, 根据图象估出铅球的水平距离 (单位: m, 精确到 0.1).

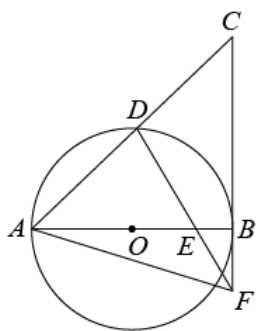
23. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 连接 AC , 点 E 是 AB 中点, 点 F 是 AC 的中点, 连接 EF , 过 E 作 $EG \parallel AF$, 交 DA 的延长线于点 G .



(1) 求证：四边形 $AGEF$ 是平行四边形；

(2) 若 $\sin \angle G = \frac{3}{5}$ ， $AC = 10$ ， $BC = 12$ ，连接 GF ，求 GF 长.

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，过 B 作 $\odot O$ 的切线，与弦 AD 的延长线交于点 C ， $AD = DC$ ， E 是直径 AB 上一点，连接 DE 并延长与直线 BC 交于点 F ，连接 AF .



(1) 求证： $AD = BD$ ；

(2) 若 $\tan \angle BAF = \frac{1}{4}$ ， $\odot O$ 的半径长为 6，求 EF 的长.

25. 改革开放以来，我国博物馆数量增多，质量提高，各方面的功能不断完善，在文化事业和社会发展中发挥了应有的作用，网络的互联互通让一切成为可能，在网上逛博物馆已成为一种时尚，据《2021 某网上平台数据报告》显示 2021 年该平台博物馆相关视频播放 380 亿次，相当于全国博物馆 2020 年接待观众总人数的 70 倍. 数据显示，2021 年该网络平台最受欢迎五大博物馆分别为： A ：故宫博物院、 B ：秦始皇陵博物院、 C ：中国国家博物院、 D ：中国人民革命军事博物馆、 E ：四川广汉三星堆博物馆.

图 1 2014—2020 年全国博物馆观众接待数量变化趋势（单位：亿人次）

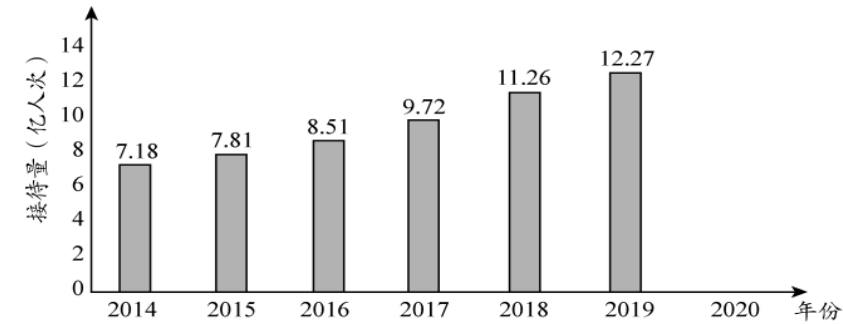
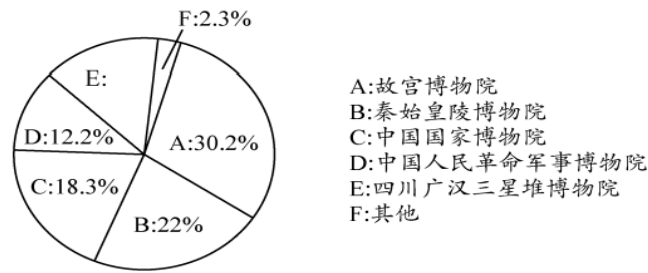


图 2 2021 年某网上平台博物馆浏览次数（亿次）扇形统计图



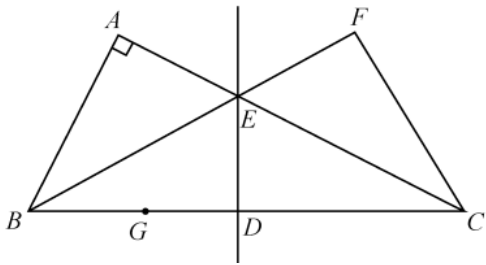
根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 全国博物馆 2020 年接待观众总人数约为_____亿人次（精确到 0.01），补全条形统计图；
 - (2) 2014-2020 年全国博物馆接待观众数量的中位数为_____；
 - (3) 2021 年该平台博物馆浏览次数（亿次）统计图中，E 博物馆所占圆心角度数为_____；
 - (4) 下列说法正确的是_____（填序号）.
- ①2014 至 2020 年全国博物馆观众接待数量的平均值超过 10 亿人次；
- ②2021 年在该平台，四川广汉三星堆博物院的浏览次数约为 57 亿人次；
- ③网上逛博物馆以它的呈现更清晰、讲解更深入、接待能力不受限制、便捷等优势越来越深受大家的喜爱.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(-1, y_1)$ 、 $(1, y_2)$ 、 $(3, y_3)$ 是抛物线 $y = x^2 + bx + 1$ 上三个点.

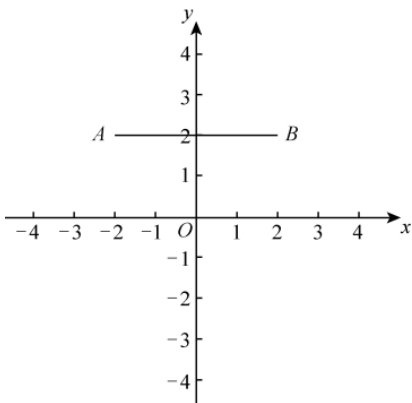
- (1) 直接写出抛物线与 y 轴的交点坐标；
- (2) 当 $y_1 = y_3$ 时，求 b 的值；
- (3) 当 $y_3 > y_1 > 1 > y_2$ 时，求 b 的取值范围.

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 D 为 BC 边中点，过点 D 作 $DE \perp BC$ 交 AC 于 E ，连接 BE 并延长使 $EF = AE$ ，连接 FC ， G 为 BC 上一点，过 G 作 $GH \perp BF$ 于点 H ，作 $GM \perp AC$ 于点 M .



- (1) 依题意补全图形；
- (2) 求证： $\angle ABE = \angle FCE$ ；
- (3) 判断线段 HG 、 GM 、 FC 之间的数量关系，并证明.

28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 P , Q , 给出如下定义: M 为图形 P 上任意一点, N 为图形 Q 上任意一点, 如果 M , N 两点间的距离有最小值, 那么称这个最小值为图形 P , Q 间的“非常距离”, 记作 $d(P, Q)$. 已知点 $A(-2, 2)$, $B(2, 2)$, 连接 AB .

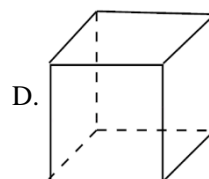
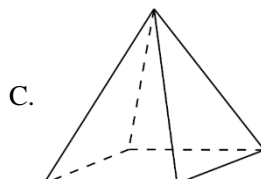
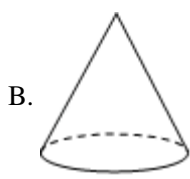
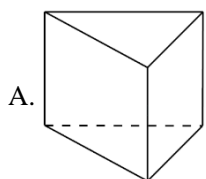


- (1) $d(\text{点 } O, AB) = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) $\odot O$ 半径为 r , 若 $d(\odot O, AB) = 0$, 直接写出 r 的取值范围;
- (3) $\odot O$ 半径为 r , 若将点 A 绕点 B 逆时针旋转 $\alpha^\circ (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$, 得到点 A' .
 - ① 当 $\alpha = 30^\circ$ 时 $d(\odot O, A') = 0$, 求出此时 r 的值;
 - ② 对于取定的 r 值, 若存在两个 α 使 $d(\odot O, A') = 0$, 直接写出 r 的范围.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的.

1. 下列立体图形中，俯视图是三角形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】俯视图是从物体上面看所得到的图形，据此判断得出物体的俯视图.

【详解】A、俯视图是三角形，故本选项符合题意；

B、俯视图是有圆心的圆，故本选项不合题意；

C、俯视图是四边形，四边形的内部有一点与四个顶点相连，故本选项不合题意；

D、俯视图是正方形，故本选项不合题意，

故选：A.

【点睛】本题考查了几何体的三种视图，解题的关键是掌握定义，注意所有的看到的棱都应表现在三视图中.

2. 2022 年 3 月 23 日下午，“天宫课堂”第二课在中国空间站开讲，神舟十三号乘组翟志刚、王亚平、叶光富进行授课，央视新闻抖音号进行全程直播，超过 3000000 多人次在线观看，3000000 用科学记数法表示应为（ ）

A. 0.3×10^7

B. 3×10^6

C. 3×10^7

D. 30×10^6

【答案】B

【解析】

【分析】根据科学记数法的定义即可得.

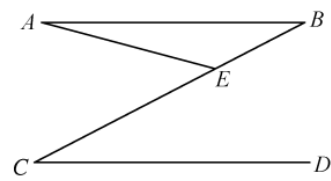
【详解】解：科学记数法：将一个数表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，这种记数的方法叫做科学记数法，

则 $3000000 = 3 \times 10^6$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了科学记数法，熟记科学记数法的定义（将一个数表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，这种记数的方法叫做科学记数法）是解题关键．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．

3. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ，连接 BC ，点 E 是 BC 上一点， $\angle A = 15^\circ$ ， $\angle C = 27^\circ$ ，则 $\angle AEC$ 的大小为（ ）



- A. 27° B. 42° C. 45° D. 70°

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行线的性质、三角形的外角的定义进行求解即可；

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle C = 27^\circ$

$$\therefore \angle B = \angle C = 27^\circ$$

$$\because \angle A = 15^\circ$$

$$\therefore \angle AEC = \angle B + \angle A = 27^\circ + 15^\circ = 42^\circ$$

故选：B

【点睛】本题主要考查平行线的性质、三角形的外角的定义，掌握相关知识并灵活应用是解题的关键．

4. 正 n 边形的每个内角都是 120° ，则 n 的值为（ ）

- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】根据正多边形内角与外角互补可得多边形外角为 $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，再结合多边形外角为 360° 即可求解．

【详解】解： \because 正 n 边形的每个内角都是 120° ，

$$\therefore \text{该正 } n \text{ 边形的每个外角都是 } 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ，$$

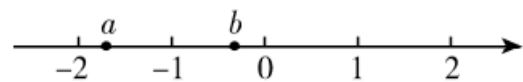
$$\because \text{任意一个多边形外角和都为 } 360^\circ，$$

$$\therefore n = \frac{360}{60} = 6,$$

故选：C.

【点睛】本题考查正多边形的角度关系，熟练掌握多边形内角与外角互补，多边形外角和为 360° ，以及正多边形的性质是解决问题的关键.

5. 实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是（ ）



- A. $a < -2$ B. $|a| < |b|$ C. $-a < -b$ D. $ab > 0$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据数轴的性质可得 $-2 < a < b < 0$ ，再根据绝对值的性质、不等式的性质、有理数乘法法则逐项判断即可得.

【详解】解：由数轴的性质得： $-2 < a < b < 0$.

A、 $a > -2$ ，此项错误，不符题意；

B、 $|a| > |b|$ ，此项错误，不符题意；

C、 $-a > -b$ ，此项错误，不符题意；

D、 $ab > 0$ ，此项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了数轴、绝对值、不等式的性质、有理数的乘法法则，熟练掌握数轴的性质是解题关键.

6. 甲、乙、丙、丁四名同学随机组合，两两一组做游戏，则甲与乙恰好被分在同一组的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用列表法求概率即可；

【详解】解：由题意列表得：

	甲	乙	丙	丁
甲		甲，乙	甲，丙	甲，丁
乙	乙，甲		乙，丙	乙，丁
丙	丙，甲	丙，乙		丙，丁
丁	丁，甲	丁，乙	丁，丙	

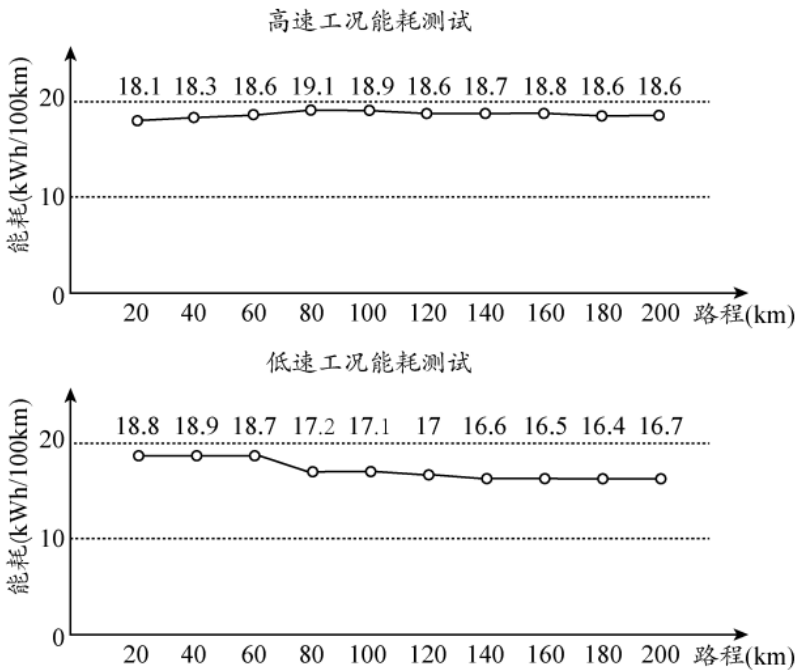
一共有 12 中组合，甲、乙同一组的情况有 2 种，

∴甲与乙恰好被分在同一组的概率= $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查了概率的计算，掌握概率=所求事件的结果数÷总的结果数是解题关键.

7. 测试某款纯电动汽车低速工况和高速工况的能耗情况，为了更接近真实的日常用车环境，低速工况的平均时速在 30km/h 左右，包括城市一般道路、环路等路况；高速工况的平均时速保持在 90km/h 左右，路况主要是高速公路. 设低速工况时能耗的平均数为 \bar{x}_1 ，方差为 S_1^2 ；高速工况时能耗的平均数为 \bar{x}_2 ，方差为 S_2^2 ，则下列结论正确的是（ ）



- A. $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$ ， $S_1^2 > S_2^2$ B. $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$ ， $S_1^2 < S_2^2$ C. $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ， $S_1^2 > S_2^2$ D. $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ ， $S_1^2 < S_2^2$

【答案】C

【解析】

【分析】观察两个折线统计图，根据数据波动大小即可判断方差大小，进而估计平均数即可求解。

【详解】解：∵低速工况和高速工况的能耗情况，两个折线统计图中，

低速工况能耗测试折线统计图中数据在16.4与18.9之间波动，高速工况能耗测试折线统计图中数据在18.1与19.1之间波动，

$$\therefore S_1^2 > S_2^2$$

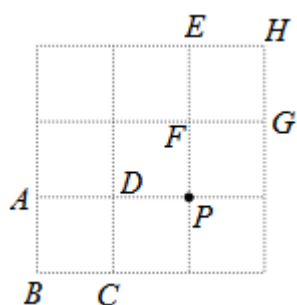
∵低速工况能耗测试折线统计图中数据整体与高速工况能耗测试折线统计图中数据偏小，

$$\therefore \bar{x}_1 < \bar{x}_2$$

故选 C

【点睛】本题考查了折线统计图，方差的意义，平均数，从图中获取信息是解题的关键。

8. 边长为 1 的正方形格点图中，点 P 为格点上一，点 M 在正方形 $ABCD$ 边上运动，点 N 在正方形 $EFGH$ 边上运动，则 $\triangle PMN$ 的面积不可能是（ ）



A. 1

B. 1.5

C. 2

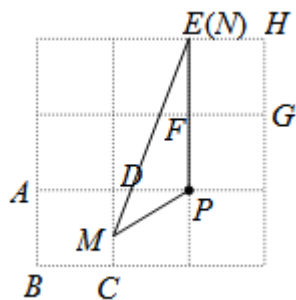
D. 2.1

【答案】D

【解析】

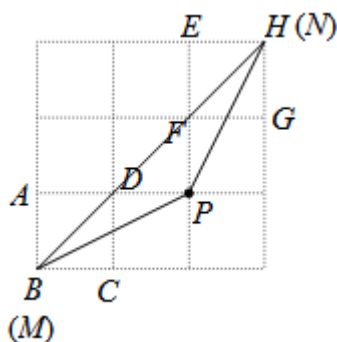
【分析】A 当点 M 在 CD 边，点 N 在点 E 处时，可得 $\triangle PMN$ 的面积为 1；B 当点 M 在点 B 处，点 N 在点 H 处时， $\triangle PMN$ 的面积为 1.5；C 当点 M 在 AB 边，点 N 在点 E 处时， $\triangle PMN$ 的面积为 2，即可求解。

【详解】解：A、如图，当点 M 在 CD 边，点 N 在点 E 处时，



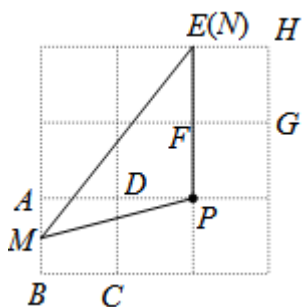
$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} NP \times DP = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1, \text{ 故本选项不符合题意;}$$

B、如图，当点 M 在点 B 处，点 N 在点 H 处时，



$$S_{\triangle PMN} = S_{\triangle PFM} + 2S_{\triangle PFN} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 1.5, \text{ 故本选项不符合题意;}$$

C、如图，当点 M 在 AB 边，点 N 在点 E 处时，



$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} NP \times AP = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, \text{ 且 } \triangle PMN \text{ 的面积最大, 故本选项不符合题意;}$$

D、当点 M 在 AB 边，点 N 在点 E 处时或当点 N 在 GH 边，点 M 在点 A 处时， $\triangle PMN$ 的面积最大，最大值为 2，所以 $\triangle PMN$ 的面积不可能为 2.1，故本选项符合题意；

故选：D

【点睛】本题主要考查了两平行线间的距离，熟练掌握两平行线间的距离处处相等是解题的关键.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 使代数式 $\sqrt{x-1}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 1$

【解析】

【分析】根据二次根式被开方数必须是非负数的条件，要使 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，必须 $x-1 \geq 0$ ，从而可得答案.

【详解】解：代数式 $\sqrt{x-1}$ 有意义，

$$\therefore x-1 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq 1,$$

故答案为： $x \geq 1$

10. 分解因式： $x^3 - x =$ _____.

【答案】 $x(x+1)(x-1)$

【解析】

【详解】解：原式 $= x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$.

11. 方程 $\frac{2}{x+1} = \frac{1}{x}$ 解为_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】先将分式方程转化 整式方程，再解方程，检验即可.

【详解】方程两边同乘 $x(x+1)$ ，得 $2x = x+1$ ，

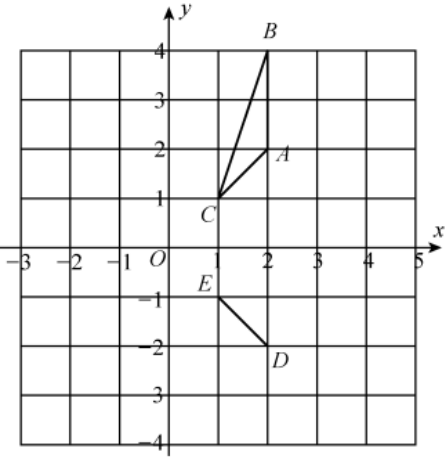
解得 $x = 1$ ，

经检验， $x = 1$ 是原方程的解，

故答案为： $x=1$.

【点睛】 本题考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

12. 如图，正方形格点图中，点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 均在格点上，若以 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 全等，请写出一个满足条件的 F 点坐标_____.

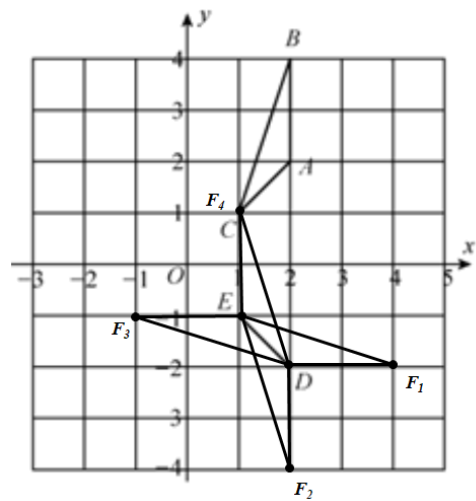


【答案】 $(4, -2)$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 三角形的各个顶点都在格点上，所以任意长度都可用勾股定理计算得出，本题可以采用“三边对应相等”或“两组对应边及夹角相等”进行判定三角形全等.

【详解】 根据图中可以判断 $\angle CAB=45^{\circ}+90^{\circ}=135^{\circ}$ ，且 AB 边等于两格长度，如下图中找出符合条件的 F 点，构造全等三角形，由图可知，符合条件的 F 点有四个，坐标是： $(4, -2)$ ， $(2, -4)$ ， $(-1, -1)$ ， $(1, 1)$.



故答案为： $(4, -2)$ (答案不唯一)

【点睛】 本题考查了三角形全等的判定，在网格中判定三角形全等一般采用的判定是 SSS 或 SAS ，根据图形特点进行灵活选择是解题的关键.

13. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 经过点 $(2, -3)$ 和点 $(-1, b)$ ，则 $b =$ _____.

【答案】6

【解析】

【分析】根据点在函数图像上的性质吗，直接将点的坐标代入表达式求解即可.

详解】解：∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 经过点 $(2, -3)$ 和点 $(-1, b)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -3 = \frac{k}{2} \\ b = \frac{k}{-1} \end{cases}, \text{ 即 } -3 \times 2 = b \times (-1), \text{ 解得 } b = 6,$$

故答案为：6.

【点睛】本题考查反比例函数的性质，掌握图像经过点就是点的坐标满足表达式是解决问题的关键.

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根，则 $m =$ _____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【详解】分析：利用判别式的意义得到 $\Delta = 3^2 - 4m = 0$ ，然后解关于 m 的方程即可，

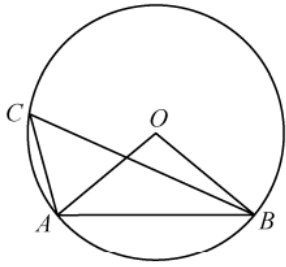
详解：根据题意得 $\Delta = 3^2 - 4m = 0$ ，

$$\text{解得 } m = \frac{9}{4}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{9}{4}.$$

点睛：本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

15. 如图， $\odot O$ 中，点 A, B, C 为 $\odot O$ 上的点，若 $\angle C = 50^\circ$ ，则 $\angle OAB$ 的度数为_____.



【答案】 40° ##40 度

【解析】

【分析】由在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半，可求得 $\angle AOB$ 的度数，又由等腰三角形的性质与三角形内角和定理，即可求得 $\angle OAB$ 的度数．

【详解】解： $\because \angle C = 50^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOB = 2\angle C = 100^\circ,$$

$$\because OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = 40^\circ.$$

故答案为： 40° ．

【点评】此题考查了圆周角定理、等腰三角形的性质与三角形内角和定理．此题难度不大，注意掌握数形结合思想的应用．

16. 明明和丽丽去书店买书，若已知明明买了 A 、 B 两本书共花费 100.5 元，丽丽买了 A 、 C 两本书共花费 88.5 元，则 B 书比 C 书贵_____元；若又知 B 、 C 两本书的总价钱恰好等于 A 书的价钱，则 A 、 B 、 C 三本书的总价钱为_____．

【答案】 ①. 12 ②. 126

【解析】

【分析】设 A 、 B 、 C 书的单价分别是 x 、 y 、 z 元，根据题意可得三元一次方程组，解方程组即可求解．

【详解】设 A 、 B 、 C 书的单钱分别是 x 、 y 、 z 元，根据题意可得：

$$\begin{cases} x + y = 100.5 \\ x + z = 88.5 \end{cases}$$

$$\therefore y - z = 12 \text{ (元)},$$

即 B 书比 C 书贵 12 元，

$$\because y+z=x,$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=100.5 \\ x+z=88.5 \\ y+z=x \end{cases}$$

$$\text{整理得: } 3x=189,$$

$$\text{解得: } x=63,$$

$$\therefore \begin{cases} y-z=12 \\ y+z=63 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} y=37.5 \\ z=25.5 \end{cases}$$

$$\therefore A、B、C \text{ 三本书的总价钱为 } x+y+z=63+37.5+25.5=126 \text{ (元)},$$

故答案为: 12; 126.

【点睛】本题考查三元一次方程组的应用，解题的关键是设出未知数，正确解读题意，找出等量关系列出方程组。

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

$$17. \text{ 计算: } \sqrt[3]{8} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2\cos 30^\circ + |1 - \sqrt{3}|.$$

【答案】4

【解析】

【分析】先利用负整数指数幂，特殊角锐角三角函数值，绝对值的性质，立方根的性质化简，再合并，即可求解.

$$\text{【详解】解: } \sqrt[3]{8} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2\cos 30^\circ + |1 - \sqrt{3}|$$

$$= 2 + 3 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - 1$$

$$= 2 + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$= 4.$$

【点睛】本题主要考查了负整数指数幂，特殊角锐角三角函数值，绝对值的性质，立方根的性质，熟练掌握相关运算法则是解题的关键是解题的关键。

18. 解不等式组：
$$\begin{cases} 5x+3 > 4x \\ \frac{6-x}{2} \geq x \end{cases} .$$

【答案】 $-3 < x \leq 2$

【解析】

【分析】先分别求出两个不等式的解集，再找出它们的公共部分即为不等式组的解集。

【详解】解：
$$\begin{cases} 5x+3 > 4x \text{①} \\ \frac{6-x}{2} \geq x \text{②} \end{cases} ,$$

解不等式①得： $x > -3$ ，

解不等式②得： $x \leq 2$ ，

则不等式组的解集为 $-3 < x \leq 2$ 。

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握不等式组的解法是解题关键。

19. 已知 $m^2 - 2m + 5 = 0$ ，求代数式 $(m-2)^2 + 2(m+1)$ 的值。

【答案】 1

【解析】

【分析】先根据已知等式可得 $m^2 - 2m = -5$ ，再利用完全平方公式、整式的加减运算法则求值即可得。

【详解】解：由 $m^2 - 2m + 5 = 0$ 得： $m^2 - 2m = -5$ ，

$$\text{所以 } (m-2)^2 + 2(m+1) = m^2 - 4m + 4 + 2m + 2$$

$$= m^2 - 2m + 6$$

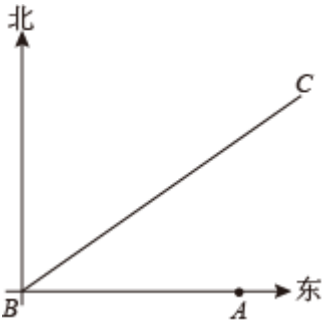
$$= -5 + 6$$

$$= 1.$$

【点睛】本题考查了代数式求值、完全平方公式、整式的加减运算，熟练掌握整式的运算法则是解题关键。

20. 如图，A 市气象台预报：一沙尘暴中心在 A 市正西方的 B 处，正迅速向北偏东的 BC 方向移动，距沙尘暴中心一定的范围内都将受沙尘暴影响，我们称这个范围为“波及范围”。若想预测 A 市是否会受这次沙尘暴的影响，只需测量 A 市到射线 BC 的距离，若这个距离大于波及范围则 A 市不会受到影响，若这个距离小于波及范围则 A 市会受到沙尘暴的影响。结合题意，在地图中作出所要测量的线段：

- ①作线段 AB 的垂直平分线 l;
- ②直线 l 与线段 AB 交于点 O;
- ③以 O 为圆心，OB 长为半径画圆，交射线 BC 于点 H;
- ④连接 AH，AH 即为所求作。



- (1) 使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；
- (2) 依据作图过程完成如下证明。

证明：

∵ AB 是⊙O 直径，
 ∴ $\angle AHB = \underline{\hspace{2cm}}$ （ ）（填推理的依据）。
 ∴ AH 即为所求作。

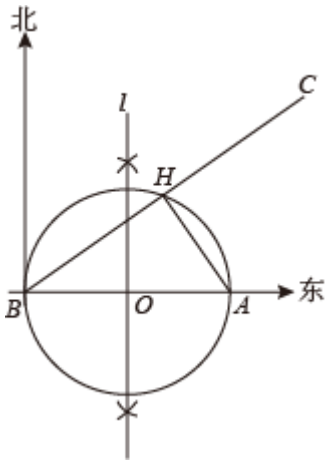
【答案】（1）见解析 （2） 90° ，直径所对的圆周角是直角

【解析】

- 【分析】（1）根据题意完成作图即可，
- （2）根据直径所对的圆周角是直角完成填空即可。

【小问 1 详解】

如图，



【小问 2 详解】

$\because AB$ 是 $\odot O$ 直径,

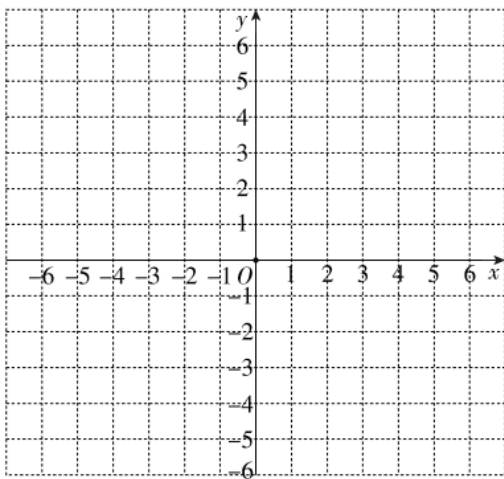
$\therefore \angle AHB = 90^\circ$ (直径所对的圆周角是直角) (填推理的依据).

$\therefore AH$ 即为所求作.

故答案为: 90° , 直径所对的圆周角是直角.

【点睛】本题考查了作垂线, 作圆, 直径所对的圆周角是直角, 掌握直径所对的圆周角是直角是解题的关键.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象由函数 $y = \frac{1}{2}x$ 平移得到, 且过点 $(0, -1)$.



(1) 求这个一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的表达式;

(2) 当 $x > -2$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = mx + 1$ 的值大于一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的值, 求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x - 1$

$$(2) \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 先根据一次函数图象的平移可得 $k = \frac{1}{2}$ ，再将点 $(0, -1)$ 代入即可得；

(2) 先根据 $mx+1 > \frac{1}{2}x-1$ 可得 $(m-\frac{1}{2})x+2 > 0$ ，从而问题可转化为当 $x > -2$ 时，函数 $y = (m-\frac{1}{2})x+2$ 的值大于 0，再分① $m = \frac{1}{2}$ 和② $m > \frac{1}{2}$ 两种情况，解不等式即可得。

【小问 1 详解】

解：∵ 一次函数 $y = kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象由函数 $y = \frac{1}{2}x$ 平移得到，

$$\therefore k = \frac{1}{2},$$

∵ 一次函数 $y = \frac{1}{2}x+b$ 的图象经过点 $(0, -1)$ ，

$$\therefore b = -1,$$

则这个一次函数的表达式为 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 。

【小问 2 详解】

解：当 $x > -2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = mx+1$ 的值大于一次函数 $y = \frac{1}{2}x-1$ 的值，则 $m \geq \frac{1}{2}$ ，

$$mx+1 > \frac{1}{2}x-1, \text{ 即 } (m-\frac{1}{2})x+2 > 0,$$

则所求问题可转化为当 $x > -2$ 时，函数 $y = (m-\frac{1}{2})x+2$ 的值大于 0，

① 当 $m = \frac{1}{2}$ 时， $y = 2 > 0$ 符合题意；

② 当 $m > \frac{1}{2}$ 时，则 $-2(m-\frac{1}{2})+2 \geq 0$ ，

解得 $m \leq \frac{3}{2}$,

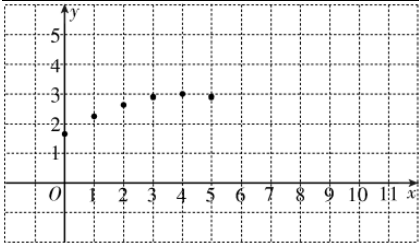
所以此时 m 的取值范围为 $\frac{1}{2} < m \leq \frac{3}{2}$,

综上, m 的取值范围为 $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查了一次函数图象的平移、待定系数法、一元一次不等式的应用, 较难的是题 (2), 正确将问题进行转化, 并分两种情况讨论是解题关键.

22. 一名同学推铅球, 铅球出手后行进过程中离地面的高度 y (单位: m) 与水平距离 x (单位: m) 近似满足二次函数关系, 已知铅球行进过程中的水平距离与离地面的高度的部分数据及图象如下.

x (米)	0	1	2	3	4	5	...
y (米)	1.67	2.25	2.67	2.92	3.00	2.92	...



请解决以下问题:

- (1) 在平面直角坐标系中, 根据已知数据描点, 并用平滑的曲线连接, 补全图形;
- (2) 根据图象估出铅球落地时的水平距离 (单位: m, 精确到 0.1);
- (3) 在铅球行进过程中, 当它离地面的高度为 2.5m 时, 根据图象估出铅球的水平距离 (单位: m, 精确到 0.1).

【答案】 (1) 补全图形见解析

(2) 约为 10.0m (3) 约为 1.5m 或 6.5m

【解析】

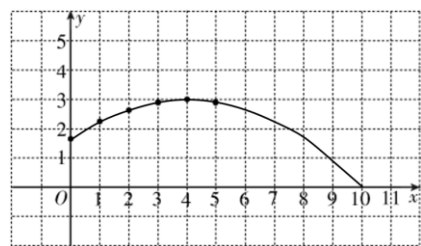
【分析】 (1) 根据二次函数的对称性用平滑曲线连接即可.

(2) 根据二次函数图象与 x 轴交点的横坐标求解即可.

(3) 根据二次函数与一元二次方程关系求解即可.

【小问 1 详解】

解：补全图形如下.



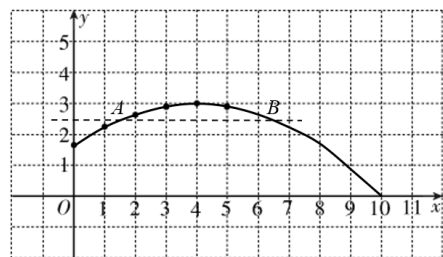
【小问 2 详解】

解：观察（1）中图象可知其与 x 轴交点的横坐标约为 10.0.

所以铅球落地时的水平距离约为 10.0m.

【小问 3 详解】

解：如下图所示，在平面直角坐标系中作直线 $y=2.5$ ，与二次函数图象交于点 A 和点 B .

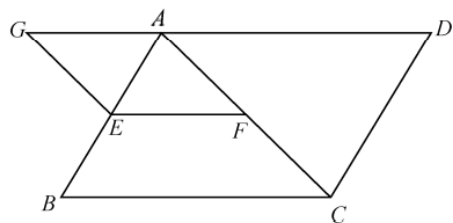


观察点 A 与点 B 的位置，点 A 的横坐标约为 1.5，点 B 的横坐标约为 6.5.

∴当铅球离地面的高度为 2.5m 时，铅球的水平距离约为 1.5m 或 6.5 米.

【点睛】本题考查画二次函数图象，二次函数的对称性，二次函数与 x 轴交点问题，二次函数与一元二次方程关系，正确应用数形结合思想是解题关键.

23. 如图，在 $\square ABCD$ 中，连接 AC ，点 E 是 AB 中点，点 F 是 AC 的中点，连接 EF ，过 E 作 $EG \parallel AF$ ，交 DA 的延长线于点 G .



(1) 求证：四边形 $AGEF$ 是平行四边形；

(2) 若 $\sin \angle G = \frac{3}{5}$ ， $AC = 10$ ， $BC = 12$ ，连接 GF ，求 GF 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\sqrt{109}$

【解析】

【分析】（1）根据平行四边形的性质可得 $AD \parallel BC$ ，再由三角形中位线定理可得 $EF \parallel BC$ ，从而得到 $EG \parallel AF$ ，即可求证；

（2）过点 E 作 $EM \perp DG$ 于点 M ，过点 F 作 $FN \perp DG$ 于点 N ，可得 $EM = FN$ ，再由三角形中位线定理可得 $EF = 6$ ，然后根据四边形 $AGEF$ 是平行四边形，可得 $AG = EF = 6$ ， $GE = AF$ ， $GE = AF = 5$ ，根据 $\sin \angle G = \frac{3}{5}$ ，可得 $FN = EM = 3$ ，从而得到 $AN = 4$ ，再由勾股定理，即可求解。

【小问 1 详解】

解：在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

\because 点 E 是 AB 中点，点 F 是 AC 的中点，

$\therefore EF \parallel BC$ ，

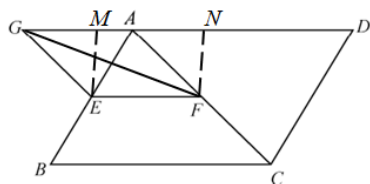
$\therefore EF \parallel AD$ ，即 $EF \parallel AG$ ，

$\because EG \parallel AF$ ，

\therefore 四边形 $AGEF$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

如图，过点 E 作 $EM \perp DG$ 于点 M ，过点 F 作 $FN \perp DG$ 于点 N ，



$\because EF \parallel AD$ ，

$\therefore EM = FN$ ，

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD = BC = 12$ ，

\because 点 E 是 AB 中点，点 F 是 AC 的中点，

$\therefore EF = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ ，

\because 四边形 $AGEF$ 是平行四边形，

$$\therefore AG=EF=6, \quad GE=AF,$$

$$\because F \text{ 是 } AC \text{ 的中点, } AC=10,$$

$$\therefore AF=5,$$

$$\therefore GE=AF=5,$$

$$\because EM \perp DG,$$

$$\therefore \angle EMG=90^\circ,$$

$$\therefore \sin G = \frac{EM}{GE} = \frac{EM}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore EM=3,$$

$$\therefore FN=EM=3,$$

$$\because FN \perp DG,$$

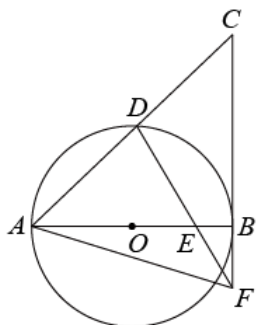
$$\therefore AN = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore GN=AG+AN=10,$$

$$\therefore GF = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109}.$$

【点睛】本题主要考查了平行四边形的判定和性质，解直角三角形，勾股定理，三角形中位线定理，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，过 B 作 $\odot O$ 的切线，与弦 AD 的延长线交于点 C ， $AD=DC$ ， E 是直径 AB 上一点，连接 DE 并延长与直线 BC 交于点 F ，连接 AF .



(1) 求证： $AD=BD$ ；

(2) 若 $\tan \angle BAF = \frac{1}{4}$ ， $\odot O$ 的半径长为 6，求 EF 的长.

【答案】（1）证明见解析

（2） $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】（1）连接 BD ，根据圆周角定理、切线性质以及题中 $AD = DC$ 可得

$\angle BAD = \angle ABD = \angle CBD = \angle C = 45^\circ$ ，从而得出结论；

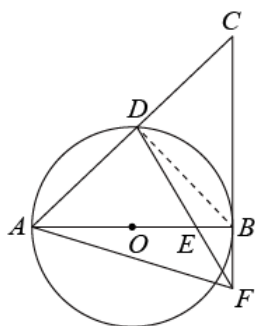
（2）连接 OD ，由（1）知 $DO \perp AB$ ，得出 $\triangle DOE \sim \triangle FBE$ ，得出 $\frac{DO}{BF} = \frac{OE}{BE}$ ，在 $Rt\triangle ABF$ 中，

$\tan \angle BAF = \frac{1}{4}$ ， $\odot O$ 的半径长为 6，解得 $BF = 3$ ，从而 $\frac{6}{3} = \frac{OE}{BE}$ ，设 $BE = x, OE = 2x$ ，则

$BE + OE = OB = 6$ ，解得 $x = 2$ ，即 $BE = 2$ ，在 $Rt\triangle EBF$ 中，利用勾股定理得结论．

【小问 1 详解】

证明：连接 BD ，如图所示：



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ABD = 90^\circ$ ，即 $BD \perp AC$ ，

\because 过 B 作 $\odot O$ 的切线，

$\therefore AB \perp BC$ ，

$\because AD = DC$ ，

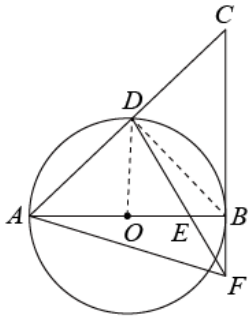
$\therefore \angle BAD = \angle ABD = \angle CBD = \angle C = 45^\circ$ ，

$\therefore BD = AD$ ，

$\therefore AD = BD$ ；

【小问 2 详解】

解：连接 OD ，如图所示：



在等腰 $Rt\triangle ABD$ 中， $\angle ADB = 90^\circ$ ，

$\therefore DO \perp AB$ ，

$\because \angle DEO = \angle BEF, \angle DOE = \angle FBE = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle DOE \sim \triangle FBE$ ，

$$\therefore \frac{DO}{BF} = \frac{OE}{BE}，$$

在 $Rt\triangle ABF$ 中， $\tan \angle BAF = \frac{1}{4}$ ， $\odot O$ 的半径长为 6，则 $\tan \angle BAF = \frac{1}{4} = \frac{BF}{AB} = \frac{BF}{12}$ ，解得 $BF = 3$ ，

$\therefore \frac{6}{3} = \frac{OE}{BE}$ ，设 $BE = x, OE = 2x$ ，则 $BE + OE = x + 2x = OB = 6$ ，解得 $x = 2$ ，

在 $Rt\triangle EBF$ 中， $\angle EBF = 90^\circ$ ， $BE = 2, BF = 3$ ，则利用勾股定理得

$$EF = \sqrt{BE^2 + BF^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}。$$

【点睛】本题考查圆综合，涉及到圆周角定理、直角三角形的性质、切线的性质、相似三角形的判定与性质、正切函数求线段长、勾股定理等知识点，根据题意准确作出辅助线是解决问题的关键。

25. 改革开放以来，我国博物馆数量增多，质量提高，各方面的功能不断完善，在文化事业和社会发展中发挥了应有的作用，网络的互联互通让一切成为可能，在网上逛博物馆已成为一种时尚，据《2021 某网上平台数据报告》显示 2021 年该平台博物馆相关视频播放 380 亿次，相当于全国博物馆 2020 年接待观众总人数的 70 倍。数据显示，2021 年该网络平台最受欢迎五大博物馆分别为： A ：故宫博物院、 B ：秦始皇陵博物院、 C ：中国国家博物院、 D ：中国人民革命军事博物馆、 E ：四川广汉三星堆博物馆。

图 1 2014—2020 年全国博物馆观众接待数量变化趋势（单位：亿人次）

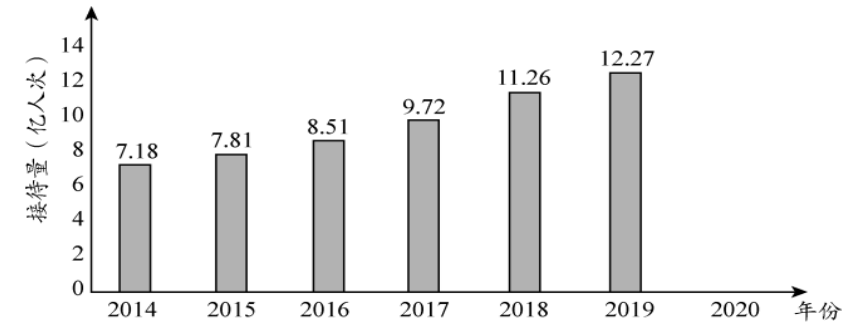
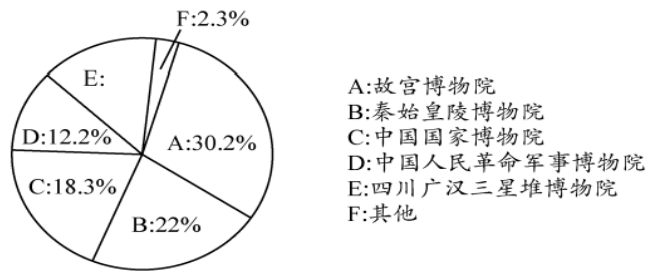


图 2 2021 年某网上平台博物馆浏览次数（亿次）扇形统计图



根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 全国博物馆 2020 年接待观众总人数约为_____亿人次（精确到 0.01），补全条形统计图；
 - (2) 2014-2020 年全国博物馆接待观众数量的中位数为_____；
 - (3) 2021 年该平台博物馆浏览次数（亿次）统计图中，*E* 博物馆所占圆心角度数为_____；
 - (4) 下列说法正确 是_____（填序号）.
- ①2014 至 2020 年全国博物馆观众接待数量的平均值超过 10 亿人次；
- ②2021 年在该平台，四川广汉三星堆博物院的浏览次数约为 57 亿人次；
- ③网上逛博物馆以它的呈现更清晰、讲解更深入、接待能力不受限制、便捷等优势越来越深受大家的喜爱.

【答案】（1）5.43，图见解析

（2）8.51

（3）54°

（4）②③

【解析】

【分析】（1）利用 380 亿除以 70 即可得全国博物馆 2020 年接待观众总人数，再据此补全条形统计图；

（2）根据中位数的定义即可得；

（3）利用 360° 乘以 *E* 博物馆所占百分比即可得；

(4) 利用平均数的计算公式可判断①；利用 380 亿乘以 E 博物馆所占百分比可判断②；根据网上逛博物馆的特点可判断③.

【小问 1 详解】

解：全国博物馆 2020 年接待观众总人数为 $380 \div 70 \approx 5.43$ （亿人次），

故答案为：5.43，

补全条形统计图如下：

图 1 2014—2020 年全国博物馆观众接待数量变化趋势（单位：亿人次）



【小问 2 详解】

解：将这组数据按从小到大进行排序为 5.43, 7.18, 7.81, 8.51, 9.72, 11.26, 12.27，

则中位数为 8.51，

故答案为：8.51.

【小问 3 详解】

解： E 博物馆所占圆心角度数为 $360^\circ \times (1 - 30.2\% - 22\% - 18.3\% - 12.2\% - 2.3\%) = 54^\circ$ ，

故答案为： 54° .

【小问 4 详解】

解： $\frac{5.43 + 7.18 + 7.81 + 8.51 + 9.72 + 11.26 + 12.27}{7} \approx 8.88$ （亿人次），则说法①错误；

$380 \times (1 - 30.2\% - 22\% - 18.3\% - 12.2\% - 2.3\%) = 57$ （亿人次），则说法②正确；

网上逛博物馆具有方便快捷、呈现更清晰、讲解更深入、接待能力不受限制等特点，则说法③正确；

故答案为：②③.

【点睛】本题考查了扇形统计图和条形统计图、中位数和平均数，熟练掌握统计调查的相关知识是解题关键.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(-1, y_1)$ 、 $(1, y_2)$ 、 $(3, y_3)$ 是抛物线 $y = x^2 + bx + 1$ 上三个点.

- (1) 直接写出抛物线与 y 轴的交点坐标；
- (2) 当 $y_1 = y_3$ 时，求 b 的值；
- (3) 当 $y_3 > y_1 > 1 > y_2$ 时，求 b 的取值范围.

【答案】 (1) $(0, 1)$ ；

(2) -2 ； (3) $-2 < b < -1$ ；

【解析】

【分析】 (1) 令 $x=0$ ，代入抛物线求得 y 值即可解答；

(2) 利用抛物线的对称性求得对称轴，再计算求值即可；

(3) 根据 $y_2 < 1$ ， $y_1 > 1$ ， $y_3 > y_1$ 将 x 的值代入抛物线解不等式，再求不等式的解的公共部分即可；

【小问 1 详解】

解：令 $x=0$ ，得： $y=0+0+1=1$ ，

\therefore 抛物线 $y = x^2 + bx + 1$ 与 y 轴的交点坐标 $(0, 1)$ ；

【小问 2 详解】

解：当 $y_1 = y_3$ 时，由点 $(-1, y_1)$ ， $(3, y_3)$ 可得抛物线对称轴为 $x=1$ ，

$$\therefore x = -\frac{b}{2} = 1,$$

$$\therefore b = -2,$$

【小问 3 详解】

解：由 $y_2 < 1$ 可得： $1+b+1 < 1$ ， $b < -1$ ，

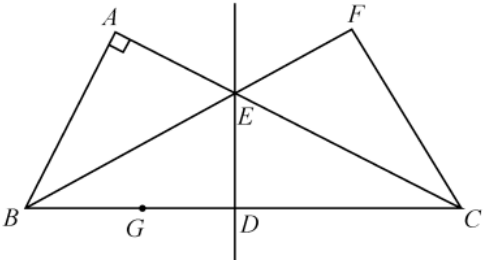
由 $y_1 > 1$ 可得： $1-b+1 > 1$ ， $b < 1$ ，

由 $y_3 > y_1$ 可得： $9+3b+1 > 1-b+1$ ， $b > -2$ ，

\therefore 当 $y_3 > y_1 > 1 > y_2$ 时， $-2 < b < -1$ ；

【点睛】 本题考查了二次函数的综合，一元一次不等式的应用，掌握二次函数的性质是解题关键.

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，点 D 为 BC 边中点，过点 D 作 $DE \perp BC$ 交 AC 于 E ，连接 BE 并延长使 $EF = AE$ ，连接 FC ， G 为 BC 上一点，过 G 作 $GH \perp BF$ 于点 H ，作 $GM \perp AC$ 于点 M 。



- (1) 依题意补全图形；
- (2) 求证： $\angle ABE = \angle FCE$ ；
- (3) 判断线段 HG 、 GM 、 FC 之间的数量关系，并证明.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) $FC = GM + HG$ ，证明见解析

【解析】

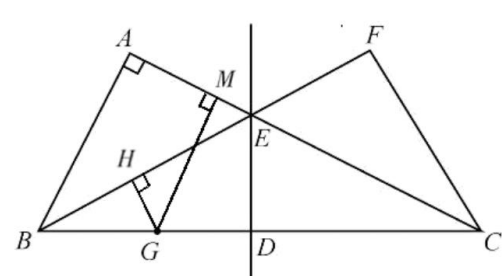
【分析】 (1) 根据题意补全图形即可；

(2) 根据垂直平分线的性质可得 $BE = CE$ ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle FCE(SAS)$ 即可得证；

(3) 过点 G 作 $GN \perp AB$ 于点 N ，交 BF 于点 P ，证明四边形 $ANGM$ 是矩形， $\triangle NBP \cong \triangle HGP(AAS)$ ，可得 $AB = AN + NB = GM + HG$ ，由(2)可得， $\triangle ABE \cong \triangle FCE$ ， $AB = FC$ ，即可得 $FC = GM + HG$.

【小问 1 详解】

补全图形，如图，



【小问 2 详解】

\because 点 P 为 BC 的中点

$\therefore BD = CD$

$\because DE \perp BC$

$\therefore DE$ 是线段 BC 的垂直平分线

$\therefore BE=CE$ (线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等)

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FCE$ 中

$$\begin{cases} AE = FE \\ \angle AEB = \angle FEC \\ BE = CE \end{cases}$$

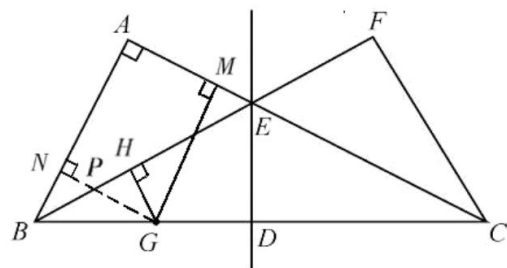
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCE (\text{SAS})$

$\therefore \angle ABE = \angle FCE$

【小问 3 详解】

$FC=GM+HG$,理由如下:

如图,过点 G 作 $GN \perp AB$ 于点 N , 交 BF 于点 P



$\because GM \perp AC, GN \perp AB,$

$\therefore \angle GMA = \angle GNA = \angle GNB = 90^\circ,$

$\because \angle BAC = 90^\circ,$

$\therefore \angle GMA = \angle BAC = \angle GNA = 90^\circ,$

\therefore 四边形 $ANGM$ 是矩形,

$\therefore GM \parallel AN, GM = AN,$

$\therefore \angle NGB = \angle ACB,$

\because 由 (2) 可得, $BE = CE,$

$\therefore \angle EBC = \angle ACB,$

$\therefore \angle NGB = \angle EBC,$

$\therefore BP = GP,$

$$GH \perp BF,$$

$$\therefore \angle PHG = 90^\circ = \angle GNB,$$

在 $\triangle NBP$ 和 $\triangle HGP$ 中

$$\begin{cases} \angle GNP = \angle PHG = 90^\circ \\ \angle NPB = \angle LHPG \\ BP = GP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle NBP \cong \triangle HGP (\text{AAS}),$$

$$\therefore NB = HG,$$

$$\therefore GM = AN,$$

$$\therefore AB = AN + NB = GM + HG,$$

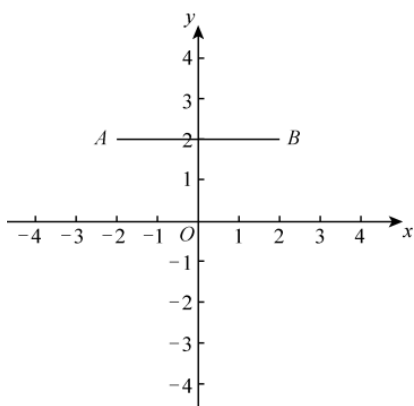
由(2)可得, $\triangle ABE \cong \triangle FCE$,

$$\therefore AB = FC,$$

$$\therefore FC = GM + HG.$$

【点睛】本题考查了画垂线, 全等三角形的性质与判定, 矩形的性质与判定, 垂直平分线的性质与判定, 掌握以上知识是解题的关键.

28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 P, Q , 给出如下定义: M 为图形 P 上任意一点, N 为图形 Q 上任意一点, 如果 M, N 两点间的距离有最小值, 那么称这个最小值为图形 P, Q 间的“非常距离”, 记作 $d(P, Q)$. 已知点 $A(-2, 2), B(2, 2)$, 连接 AB .



(1) $d(\text{点 } O, AB) = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $\odot O$ 半径为 r , 若 $d(\odot O, AB) = 0$, 直接写出 r 的取值范围;

(3) $\odot O$ 半径为 r , 若将点 A 绕点 B 逆时针旋转 $\alpha^\circ (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$, 得到点 A' .

①当 $\alpha = 30^\circ$ 时 $d(\odot O, A') = 0$, 求出此时 r 的值;

②对于取定的 r 值, 若存在两个 α 使 $d(\odot O, A') = 0$, 直接写出 r 的范围.

【答案】 (1) 2 (2) $2 \leq r \leq 2\sqrt{2}$

(3) ① $r = 2\sqrt{3} - 2$ ② $4 - 2\sqrt{2} < r < 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1)理解题意后直接利用垂线段最短即可求解.

(2)先理解当 $\odot O$ 与线段有交点时, $d(\odot O, AB) = 0$, 利用 $\odot O$ 与线段相切和 $\odot O$ 经过 A 点即可求解.

(3)①先确定 A' 位于 x 轴上, 再求出 OA' 的长即可求解; ②先确定 A' 的轨迹, 再利用存在两个 α 使 $d(\odot O, A') = 0$, 确定并求出两个界点值, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because O$ 点到 AB 的距离为 2,

$$\therefore d(\text{点 } O, AB) = 2,$$

故答案为 2.

【小问 2 详解】

当 $\odot O$ 与线段有交点时, $d(\odot O, AB) = 0$,

$$\because OA = OB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore 2 \leq r \leq 2\sqrt{2}.$$

【小问 3 详解】

①如图, 作 $A'N \perp AB$ 于点 N , 作

$$\therefore \angle A'NB = 90^\circ,$$

由旋转知 $BA' = BA = 2 - (-2) = 4$,

$$\because \angle ABA' = 30^\circ,$$

$$\therefore A'N = \frac{1}{2}BA' = 2,$$

$$\therefore A' \text{ 位于 } x \text{ 轴上, } BN = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

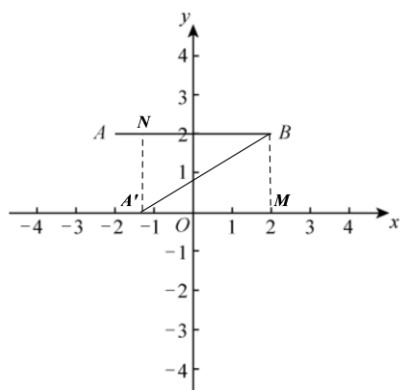
$$\therefore A'M = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore A'O = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore d(\odot O, A') = 0,$$

$\therefore \odot O$ 经过 A' 点,

$$\therefore r = 2\sqrt{3} - 2.$$



②如图所示, 连接 OB ,

\therefore 对于取定 r 值, 若存在两个 α 使 $d(\odot O, A')=0$,

$\therefore \odot O$ 与以 AH 为直径的半圆有两个交点 (A 点和 H 点除外),

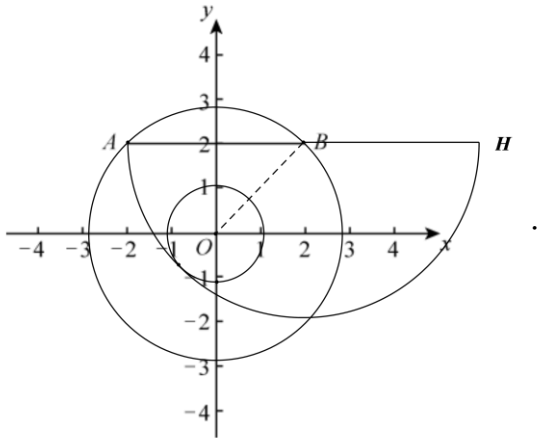
此时有两个界点值, 分别是 $\odot O$ 与该半圆内切时和 $\odot O$ 经过 A 点时,

$$\text{由 } B(2, 2), \text{ 得 } OB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{当 } \odot O \text{ 与该半圆内切时, } r = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$\text{当 } \odot O \text{ 经过 } A \text{ 点时, } r = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore 4 - 2\sqrt{2} < r < 2\sqrt{2}.$$



【点睛】本题为新定义题型，考查了旋转的性质、圆的性质及其应用，涉及到了用勾股定理求线段长、圆的内切等问题，解题关键是能理解题意，正确确定界点值.