

2020 北京门头沟初三二模

数 学

2020.6

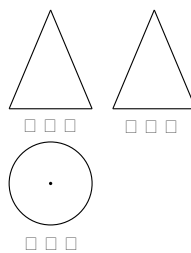
考 生 须 知	<p>1. 本试卷共 10 页，共三道大题，28 个小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。</p> <p>2. 在试卷和答题卡上准确填写学校和姓名，并将条形码粘贴在答题卡相应位置处。</p> <p>3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。</p> <p>4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其它试题用黑色字迹签字笔作答。</p> <p>5. 考试结束，将试卷、答题卡和草稿纸一并交回。</p>
------------------	--

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

第 1- 8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 如图，是某个几何体的三视图，该几何体是

- A. 三棱锥 B. 三棱柱
- C. 圆柱 D. 圆锥



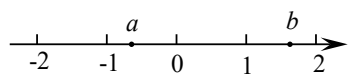
2. -3 的相反数是

- A. 3 B. -3 C. ± 3 D. $\frac{1}{3}$

3. 如果代数式 $\frac{x-1}{x}$ 的值为 0，那么实数 x 满足

- A. $x=1$ B. $x \geq 1$ C. $x \neq 0$ D. $x \geq 0$

4. 实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是



- A. $a > 0$ B. $b > 2$ C. $a < b$ D. $a = b$

5. 下列运算中，正确的是

- A. $x^2 + 2x^2 = 3x^4$ B. $x^2 \cdot x^3 = x^5$ C. $(x^3)^2 = x^5$ D. $(xy)^2 = x^2y$

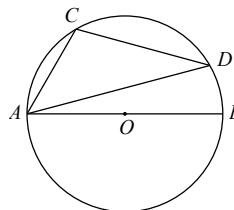
6. 如果 $x^2 - 2x + 1 = 0$ ，那么代数式 $\left(x - \frac{4}{x}\right) \div \frac{x+2}{x^2}$ 的值为

- A. 0 B. 2 C. 1 D. -1

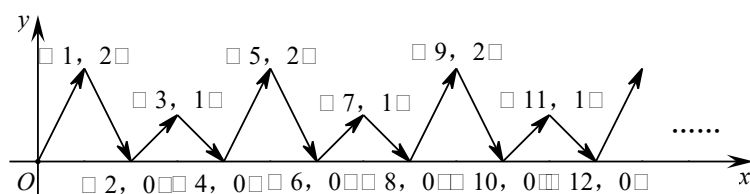
7. 如图，线段 AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 为 $\odot O$ 上两点，如果 $AB=4, AC=2$,

那么 $\angle ADC$ 的度数是

- A. 15° B. 30°
C. 45° D. 60°



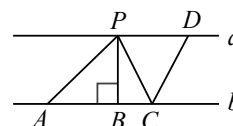
8. 如图，动点 P 在平面直角坐标系 xOy 中，按图中箭头所示方向运动，第 1 次从原点运动到点 $(1, 2)$ ，第 2 次接着运动到点 $(2, 0)$ ，第 3 次接着运动到点 $(3, 1)$ ，第 4 次接着运动到点 $(4, 0)$ ，……，按这样的运动规律，经过第 27 次运动后，动点 P 的坐标是



- A. $(26, 0)$ B. $(26, 1)$ C. $(27, 1)$ D. $(27, 2)$

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 如图所示， $a \parallel b$ ，表示直线 a 与 b 之间距离的是线段_____的长度。

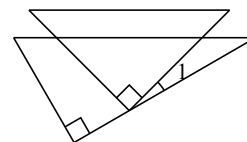


10. 分解因式： $x^3 - xy^2 =$ _____.

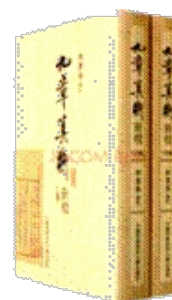
11. 如果数据 a, b, c 的平均数是 4，那么数据 $a+1, b+1, c+1$ 的平均数是_____.

12. 如图，将一副直角三角板按图中所示位置摆放，保持两条斜边互

相平行，那么 $\angle 1$ 的度数为_____°.



13. 方程术是《九章算术》最高的数学成就，其中“盈不足”一章中曾记载“今有大器五小器一容三斛（“斛”是古代的一种容量单位），大器一小器五容二斛，问大小器各容几何？”
译文：有大小两种盛酒的桶，已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛，1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2 斛，问 1 个大桶和 1 个小桶分别可以盛酒多少斛？

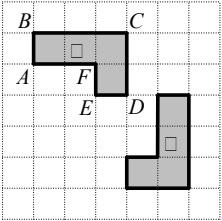


设 1 个大桶可以盛酒 x 斛，1 个小桶可以盛酒 y 斛，依题意，可列二元一次方程组为 _____.

14. 在同一时刻，测得身高 $1.8m$ 的小明同学的影长为 $3m$ ，同时测得一根旗杆的影长为 $20m$ ，那么这根旗杆的高度为 _____ m .

15. 如图，在方格纸中，图形②可以看作是图形①经过若干次图形变化（平移、轴对称、旋转）得到的，写出一种由图形①得到图形②的

变化过程： _____.



16. 某租赁公司有 A , B 型两种客车，它们的载客量和租金标准如下：

客车类型	载客量（人/辆）	租金（元/辆）
A 型	45	400
B 型	30	280

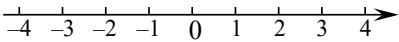
如果某学校计划组织 195 名师生到培训基地参加社会实践活动，那么租车的总费用最低为 _____ 元.

三、解答题（本题共 68 分，第 17~22 题每小题 5 分，第 23~26 题每小题 6 分，第 27~28 题每小题 7 分）

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 计算： $|1-\sqrt{2}|+2\cos 45^{\circ}-\sqrt{8}+2^{-2}$.

18. 解不等式 $1+\frac{x}{2}\leq\frac{x+5}{4}$ ，并把它的解集在数轴上表示出来.



19. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(a+1)x+a=0$.

(1) 求证：此方程总有两个实数根；

(2) 如果此方程有两个不相等的实数根，写出一个满足条件的 a 的值，并求此时方程的根.

20. 下面是小明同学设计的“过直线外一点作已知直线的平行线”的尺规作图过程.

已知：如图 1，直线 l 和直线 l 外一点 P .

P .

求作：直线 PQ ，使直线 $PQ \parallel$ 直线 l .

作法：如图 2，

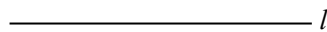


图 1

①在直线 l 上任取一点 A ，作射线 AP ；

②以 P 为圆心， PA 为半径作弧，交直线 l 于点 B ，连接 PB ；

③以 P 为圆心， PB 长为半径作弧，交射线 AP 于点 C ；分别以 B ， C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 长为半径作弧，在 AC 的右侧两弧交于点 Q ；

④作直线 PQ ；

所以直线 PQ 就是所求作的直线.

根据上述作图过程，回答问题：

(1) 用直尺和圆规，补全图 2 中的图形；

(2) 完成下面的证明：

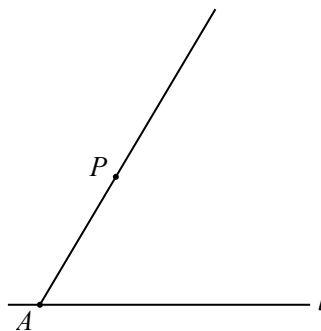


图 2

证明：由作图可知 PQ 平分 $\angle CPB$,

$$\therefore \angle CPQ = \angle BPQ = \frac{1}{2} \angle CPB.$$

又 $\because PA = PB$,

$$\therefore \angle PAB = \angle PBA. \quad (\text{填依据 1}).$$

$$\because \angle CPB = \angle PAB + \angle PBA,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PBA = \frac{1}{2} \angle CPB.$$

$$\therefore \angle CPQ = \angle PAB.$$

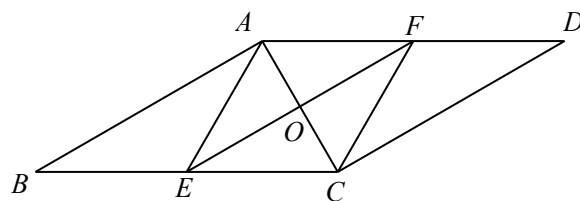
$$\therefore \text{直线 } PQ \parallel \text{直线 } l. \quad (\text{填依据 2}).$$

21. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，线段 AC 的垂直平分线交 AC 于 O ，分别交 BC ， AD 于 E ， F ，连接 AE ， CF 。

(1) 证明：四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 在 (1) 的条件下，如果 $AC \perp AB$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

$AE = 2$ ，求四边形 $AECF$ 的面积。

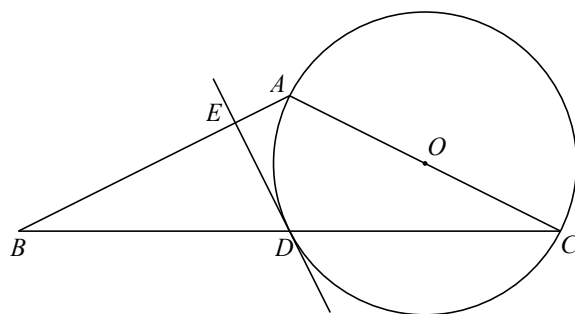


22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D ，过点 D 作 $\odot O$ 的切线

DE 交 AB 于 E 。

(1) 求证： $DE \perp AB$ ；

(2) 如果 $\tan B = \frac{1}{2}$ ， $\odot O$ 的直径是 5，求 AE 的长。



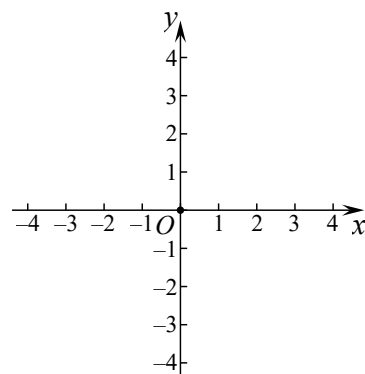
23. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = mx + m$ 的图象与 x 轴交于点 A ，将点 A 向右平移 2 个单位得到点 D 。

(1) 求点 D 坐标；

(2) 如果一次函数 $y = mx + m$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 B ，且点 B 的横坐标为 1。

①当 $k = 4$ 时，求 m 的值；

②当 $AD = BD$ 时，直接写出 m 的值。



24. 有这样一个问题：探究函数 $y = \frac{1}{x^2} + x$ 的图象与性质.

小菲根据学习函数的经验，对函数 $y = \frac{1}{x^2} + x$ 的图象与性质进行了探究.

下面是小菲的探究过程，请补充完整：

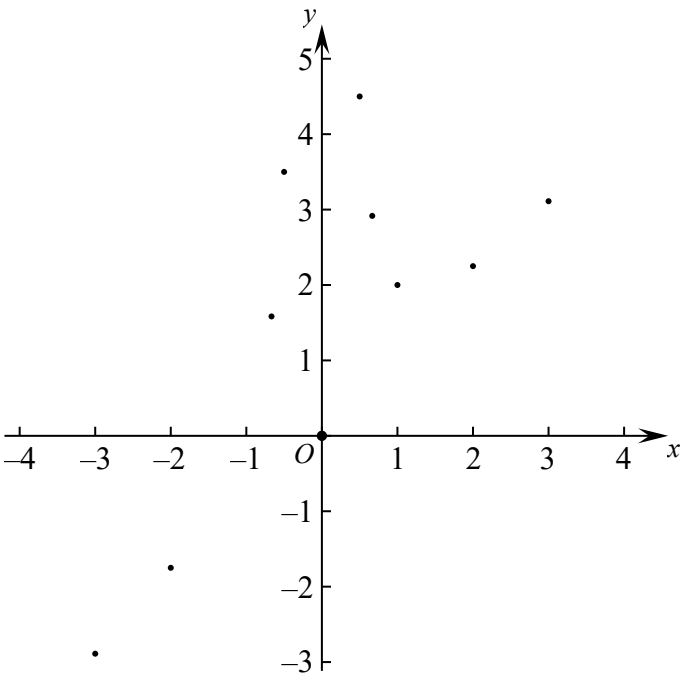
(1) 函数 $y = \frac{1}{x^2} + x$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

(2) 下表是 y 与 x 的几组对应值.

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
y	...	$-\frac{26}{9}$	$-\frac{7}{4}$	m	$\frac{19}{12}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{35}{12}$	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{28}{9}$...

表中 m 的值为_____.

(3) 如下图，在平面直角坐标系 xOy 中，描出补全后的表中各组对应值所对应的点，并画出该函数的图象：



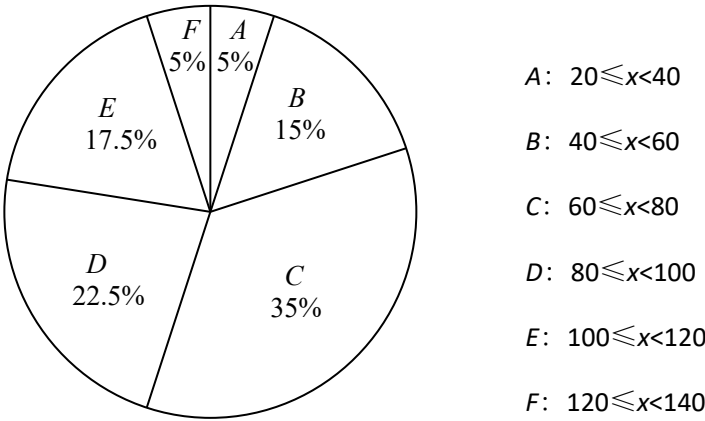
(4) 根据画出的函数图象，写出：

① $x = 1.5$ 时，对应的函数值 y 约为_____（结果保留一位小数）；

② 该函数的一条性质：_____.

25. 自从开展“创建全国文明城区”工作以来，门头沟区便掀起了“门头沟热心人”志愿服务的热潮，区教委也号召各校学生积极参与到志愿服务当中. 为了解甲、乙两所学校学生一周志愿服务情况，从这两所学校中各随机抽取 40 名学生，分别对他们一周的志愿服务时长（单位：分钟）数据进行收集、整理、描述和分析. 下面给出了部分信息：

a. 甲校 40 名学生一周的志愿服务时长的扇形统计图如图(数据分成 5 组: $20\leq x<40$ ， $40\leq x<60$ ， $60\leq x<80$ ， $80\leq x<100$ ， $100\leq x<120$ ， $120\leq x<140$)：



b. 甲校 40 名学生一周志愿服务时长在 $60\leq x<80$ 这一组的是：

60 60 62 63 65 68 70 72 73 75 75 76 80 80

c. 甲、乙两校各抽取的 40 名学生一周志愿服务时长的平均数、中位数、众数如下：

学校	平均数	中位数	众数
甲校	75	m	90
乙校	75	76	85

根据以上信息，回答下列问题：

- (1) m =_____；
- (2) 根据上面的统计结果，你认为__①_____所学校学生志愿服务工作做得好（填“甲”或“乙”），理由____
②_____；
- (3) 甲校要求学生一周志愿服务的时长不少于 60 分钟，如果甲校共有学生 800 人，请估计甲校学生中一周志愿服务时长符合要求的有_____人.

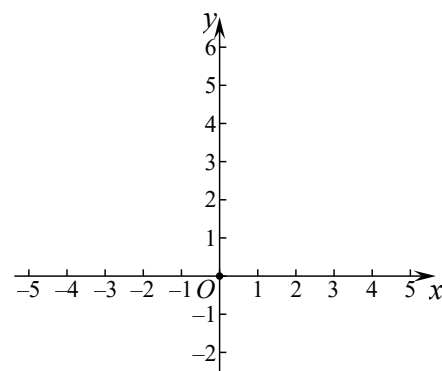
26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 - 2ax + a^2$ 的顶点为 A , 直线 $y = x + 3$ 与抛物线交于点 B, C (点 B 在点 C 的左侧).

(1) 求点 A 坐标;

(2) 横、纵坐标都是整数的点叫做整点. 记线段 BC 及抛物线在 B, C 两点之间的部分围成的封闭区域 (不含边界) 记为 \mathcal{W} .

①当 $a = 0$ 时, 结合函数图象, 直接写出区域 \mathcal{W} 内的整点个数;

②如果区域 \mathcal{W} 内有 2 个整点, 请求出 a 的取值范围.



27. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是 AB, BC 上的两个动点 (不与点 A, B, C 重合), 且 $AE = CF$, 延长 BC 到 G , 使 $CG = CF$, 连接 EG, DF .

(1) 依题意将图形补全;

(2) 小华通过观察、实验、提出猜想: 在点 E, F 运动过程中, 始终有 $EG = \sqrt{2}DF$. 经过与同学们充分讨论, 形成了几种证明的想法:

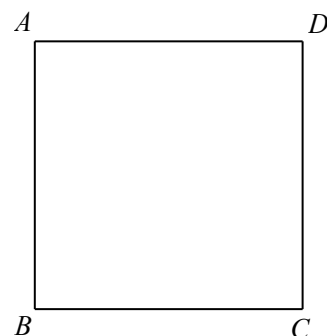
想法一: 连接 DE, DG , 证明 $\triangle DEG$ 是等腰直角三角形;

想法二: 过点 D 作 DF 的垂线, 交 BA 的延长线于 H , 可得 $\triangle DFH$ 是等腰直角三角形,

证明 $HF = EG$;

.....

请参考以上想法, 帮助小华证明 $EG = \sqrt{2}DF$. (写出一种方法即可)

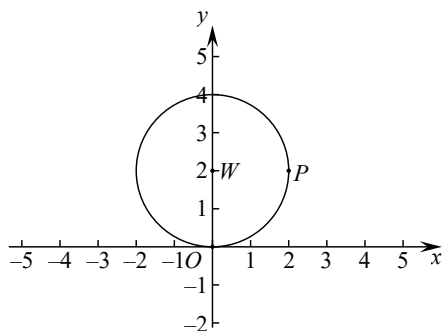
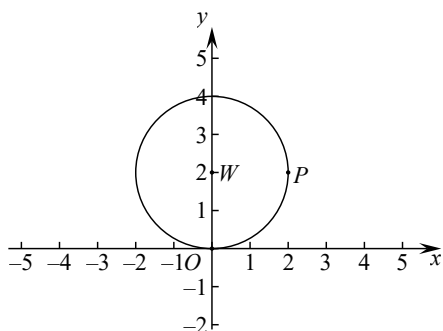


28. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，存在半径为 2，圆心为 $(0, 2)$ 的 $\odot W$ ，点 P 为 $\odot W$ 上的任意一点，线段 PO 绕点 P 逆时针旋转 90° 得到线段 PO' ，如果点 M 在线段 PO' 上，那么称点 M 为 $\odot W$ 的“限距点”。

(1) 在点 $A(4, 0)$ ， $B(1, 2)$ ， $C(0, 4)$ 中， $\odot W$ 的“限距点”为_____；

(2) 如果过点 $N(0, a)$ 且平行于 x 轴的直线 l 上始终存在 $\odot W$ 的“限距点”，画出示意图并直接写出 a 的取值范围；

(3) $\odot G$ 的圆心为 $(b, 2)$ ，半径为 1，如果 $\odot G$ 上始终存在 $\odot W$ 的“限距点”，请直接写出 b 的取值范围。



备用图

2020 北京门头沟初三二模数学

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 【分析】由主视图和左视图确定是柱体，锥体还是球体，再由俯视图确定具体形状。

【解答】解：根据主视图和左视图为三角形判断出是锥体，根据俯视图是圆形可判断出该几何体是圆锥。

故选：D。

【点评】考查学生对三视图掌握程度和灵活运用能力，同时也体现了对空间想象能力方面的考查。主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形。

2. 【分析】根据相反数的概念解答即可。

【解答】解：-3 的相反数是 $-(-3)=3$ 。

故选：A。

【点评】本题考查了相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号；一个正数的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0。

3. 【分析】根据分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零求解可得。

【解答】解： \because 代数式 $\frac{x-1}{x}$ 的值为 0，

$\therefore x-1=0$ 且 $x \neq 0$ ，

解得 $x=1$ ，

故选：A。

【点评】本题主要考查分式的值为零的条件，分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零。注意：“分母不为零”这个条件不能少。

4. 【分析】根据数轴可以发现 $-1 < a < 0 < b < 2$ ，由此即可判断以上选项正确与否。

【解答】解： $\because -1 < a < 0 < b < 2$ ，

\therefore 答案 A 错误；答案 B 错误；故选项 C 正确，选项 D 错误。

故选：C。

【点评】本题考查的是数轴与实数的大小比较等相关内容，会利用数轴比较实数的大小是解决问题的关键。

5. 【分析】分别根据合并同类项法则，同底数幂的乘法法则，幂的乘方运算法则以及积的乘方运算法则逐一判断即可。

【解答】解：A. $x^2+2x^2=3x^2$ ，故本选项不合题意；

B. $x^2 \cdot x^3 = x^5$ ，故本选项符合题意；

C. $(x^3)^2 = x^6$ ，故本选项不合题意；

D. $(xy)^2 = x^2y^2$, 故本选项不合题意.

故选: B.

【点评】本题主要考查了同底数幂的乘法, 合并同类项以及幂的乘方与积的乘方, 熟记幂的运算法则是解答本题的关键.

6. 【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式, 再由已知等式可得答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= \left(\frac{x^2}{x} - \frac{4}{x} \right) \cdot \frac{x^2}{x+2} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{x} \cdot \frac{x^2}{x+2} \end{aligned}$$

$$= x(x-2)$$

$$= x^2 - 2x,$$

$$\because x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 2x = -1, \text{ 即原式} = -1,$$

故选: D.

【点评】本题主要考查分式的化简求值, 解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

7. 【分析】连接 BC , 构造直角三角形, 利用已知边的长度结合锐角三角函数的定义求得 $\angle ABC$ 的度数, 最后利用圆周角定理确定 $\angle ADC$ 的度数即可.

【解答】解: 如图, 连接 BC ,

$\because AB$ 是直径,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

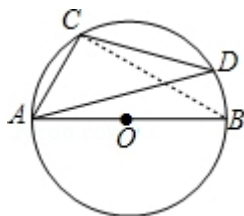
$$\because AB = 4, AC = 2,$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ABC = 30^\circ,$$

故选: B.



【点评】考查了圆周角定理的知识, 解题的关键是能够作出半径构造直角三角形, 难度不大.

8. 【分析】观察图象, 结合动点 P 第 1 次、第 2 次、第 3 次、第 4 次 $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$ 运动后的点的坐标特点, 分别得出点 P 运动的横坐标和纵坐标的规律, 再根据循环规律可得答案.

【解答】解: 观察图象, 结合动点 P 第 1 次、第 2 次、第 3 次、第 4 次 $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$ 运

动后的点的坐标特点，

可知各点的横坐标与运动次数相同，则经过第 27 次运动后，动点 P 的横坐标是 27，故排除选项 A 和 B ；

由图象可得纵坐标每 4 次运动组成一个循环：2，0，1，0；

$$\because 27 \div 4 = 6 \cdots 3,$$

\therefore 经过第 27 次运动后，动点 P 的纵坐标是 1，

故经过第 27 次运动后，动点 P 的坐标是 (27, 1)。

故选：C。

【点评】本题考查了规律型点的坐标，数形结合并从图象中发现循环规律是解题的关键。

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 【分析】从一条平行线上的任意一点到另一条直线作垂线，垂线段的长度叫两条平行线之间的距离，由此可得出答案。

【解答】解：由题可得， $a \parallel b$ ， $PB \perp b$ ，

\therefore 直线 a 与直线 b 之间的距离是线段 PB 的长度，

故答案为：PB。

【点评】本题考查了平行线之间的距离：从一条平行线上的任意一点到另一条直线作垂线，垂线段的长度叫两条平行线之间的距离。

10. 【分析】首先提取公因式 x ，进而利用平方差公式分解因式得出答案。

【解答】解： $x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2) = x(x+y)(x-y)$ 。

故答案为： $x(x+y)(x-y)$ 。

【点评】此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式，熟练应用平方差公式是解题关键。

11. 【分析】先根据 a ， b ， c 的平均数是得出 $a+b+c$ 的值，再根据平均数的概念列式计算可得。

【解答】解： $\because a$ ， b ， c 的平均数是 4，

$$\therefore a+b+c = 3 \times 4 = 12,$$

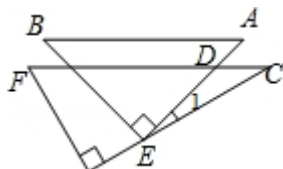
$$\text{则数据 } a+1, b+1, c+1 \text{ 的平均数是 } \frac{a+1+b+1+c+1}{3} = \frac{12+3}{3} = 5,$$

故答案为：5。

【点评】本题主要考查算术平均数，平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数。它是反映数据集中趋势的一项指标。

12. 【分析】根据平行线的性质可得 $\angle A = \angle FDE = 45^\circ$ ，再根据三角形内角与外角的性质可得 $\angle 1$ 的度数。

【解答】解：如图，



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle A = \angle FDE = 45^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle C = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle FDE - \angle C = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

故答案为：15.

【点评】主要考查了平行线的性质，关键是掌握两直线平行，同位角相等.

13. 【分析】设 1 个大桶可以盛酒 x 斛，1 个小桶可以盛酒 y 斛，根据“5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛，1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2 斛”列方程组即可.

【解答】解：设 1 个大桶可以盛酒 x 斛，1 个小桶可以盛酒 y 斛，依题意，可列二元一次方程组 $\begin{cases} 5x+y=3 \\ x+5y=2 \end{cases}$,

$$\text{故答案为：} \begin{cases} 5x+y=3 \\ x+5y=2 \end{cases}.$$

【点评】本题主要考查由实际问题抽象出二元一次方程组，由实际问题列方程组是把“未知”转化为“已知”的重要方法，它的关键是把已知量和未知量联系起来，找出题目中的相等关系.

14. 【分析】直接利用同一时刻物体影长与实际高度比值相同进而得出答案.

【解答】解：设这根旗杆的高度为 xm ，根据题意可得：

$$\frac{1.8}{3} = \frac{x}{20},$$

$$\text{解得：} x=12.$$

即这根旗杆的高度为 $12m$.

故答案为：12.

【点评】此题主要考查了相似三角形的应用，正确得出比例式是解题关键.

15. 【分析】根据旋转的性质，平移的性质即可解决问题.

【解答】解：由图形①得到图形②的变化过程：图形①绕 D 点顺时针旋转 90° ，并向下平移 3 个单位得到图形②.

故答案为：图形①绕 D 点顺时针旋转 90° ，并向下平移 3 个单位得到图形②.

【点评】考查了坐标与图形变化 - 旋转，平移，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

16. 【分析】可设租赁 A 型客车 x 辆，根据 A 型客车人均票价较低，可知满座情况多租赁 A 型客车的总费用最低，依此可求租赁 A 型客车和 B 型客车的辆数，进一步可求租车的最低总费用.

【解答】解：设租赁 A 型客车 x 辆，租赁 B 型客车 y 辆，依题意有

$$45x+30y \geq 195,$$

$$\because x, y \text{ 都为非负整数},$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 7,$$

∵满座情况多租赁 A 型客车的总费用最低，

$$\therefore x=3, y=2,$$

∴租车的总费用最低为 $400 \times 3 + 280 \times 2 = 1760$ (元)。

故答案为：1760。

【点评】考查了一元一次不等式的应用，解决问题的关键是读懂题意，找到关键描述语，找到所求的量的不等关系。

三、解答题（本题共 68 分，第 17~22 题每小题 5 分，第 23~26 题每小题 5 分，第 27~28 题每小题 5 分）解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【分析】先计算算术平方根、负整数指数幂、去绝对值符号、代入三角函数值，再计算乘法，最后计算加减可得。

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= \sqrt{2} - 1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} \\ &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

【点评】本题主要考查实数的运算，解题的关键是掌握算术平方根的定义、负整数指数幂的规定、绝对值的性质、熟记特殊锐角的三角函数值。

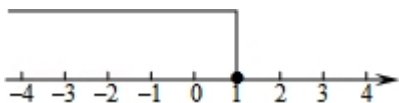
18. 【分析】根据解一元一次不等式基本步骤：去分母、移项、合并同类项可得。

$$\text{【解答】解：去分母，得：} 4 + 2x \leq x + 5,$$

$$\text{移项，得：} 2x - x \leq 5 - 4,$$

$$\text{合并，得：} x \leq 1,$$

将不等式的解集表示在数轴上如下：



【点评】本题主要考查解一元一次不等式的基本能力，严格遵循解不等式的基本步骤是关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数不等号方向要改变。

19. 【分析】(1) 计算判别式得到 $\Delta = (a - 1)^2$ ，然后利用非负数的性质得到 $\Delta \geq 0$ ，然后根据判别式的意义得到结论；

(2) 在满足 $\Delta > 0$ 时取 $a = 0$ ，则方程为 $x^2 + x = 0$ ，然后解方程即可。

$$\text{【解答】(1) 证明：} \because \Delta = (a+1)^2 - 4a$$

$$= (a - 1)^2 \geq 0,$$

∴此方程总有两个实数根；

(2) 当 $a = 0$ ，方程为 $x^2 + x = 0$ ，

解得 $x_1=0$, $x_2=-1$.

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系：当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根。

20. 【分析】(1) 根据作图过程即可补全图形；

(2) 根据等腰三角形的性质和平行线的判定即可完成证明。

【解答】解：(1) 补全的图形如图 2；

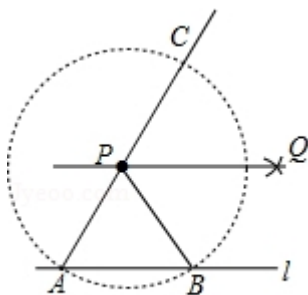


图2

(2) 证明：由作图可知：PQ 平分 $\angle CPB$,

$$\therefore \angle CPQ = \angle BPQ = \frac{1}{2} \angle CPB.$$

又 $\because PA=PB$,

$$\therefore \angle PAB = \angle PBA. \text{ (等边对等角).}$$

$$\because \angle CPB = \angle PAB + \angle PBA,$$

$$\therefore \angle PAB = \angle PBA = \frac{1}{2} \angle CPB.$$

$$\therefore \angle CPQ = \angle PAB.$$

\therefore 直线 PQ // 直线 l (内错角相等，两直线平行)。

故答案为：等边对等角；内错角相等，两直线平行。

【点评】本题考查了作图 - 复杂作图、平行线的判定与性质，解决本题的关键是掌握平行线的判定与性质。

21. 【分析】(1) 证 $\triangle AOF \cong \triangle COE$ (ASA)，得出 $AF=CE$ ，则四边形 AECF 是平行四边形，由 $EF \perp AC$ ，得出四边形 AECF 是菱形；

(2) 由菱形的性质得出 $CE=AE=2$, $OA=OC$, $OB=OD$ ，证 $EF \parallel AB$ ，由平行线的性质得出 $\angle OEC = \angle B = 30^\circ$ ，由直角三角形的性质得出 $OC = \frac{1}{2}CE = 1$, $OE = \sqrt{3}OC = \sqrt{3}$ ，则 $AC = 2OC = 2$, $EF = 2OE = 2\sqrt{3}$ ，由菱形面积公式即可得出答案。

【解答】(1) 证明： \because 四边形 ABCD 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle OAF = \angle OCE,$$

$\because EF$ 是线段 AC 的垂直平分线，

$$\therefore OA=OC, EF \perp AC,$$

$$\text{在} \triangle AOF \text{ 和 } \triangle COE \text{ 中, } \begin{cases} \angle OAF = \angle OCE \\ OA = OC \\ \angle AOF = \angle COE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AF = CE,$$

\therefore 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

$$\text{又} \because EF \perp AC,$$

\therefore 四边形 $AECF$ 是菱形;

(2) 解: 由 (1) 得: 四边形 $AECF$ 是菱形, $EF \perp AC$,

$$\therefore CE = AE = 2, OA = OC, OB = OD,$$

$$\because AC \perp AB,$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle OEC = \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}CE = 1, OE = \sqrt{3}OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = 2OC = 2, EF = 2OE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{四边形 } AECF \text{ 的面积} = \frac{1}{2}AC \times EF = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了菱形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、线段垂直平分线的性质、含 30° 角的直角三角形的性质等知识; 熟练掌握菱形的判定与性质, 证明三角形全等是解题的关键.

22. **【分析】** (1) 连接 AD, OD , 根据圆周角定理得到 $AD \perp BC$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle BAD = \angle ODA$, 推出 $AB \parallel OD$, 根据切线的性质即可得到结论;

(2) 设 $AD = k, BD = 2k$, 根据勾股定理得到 $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{5}k$, 求得 $AD = \sqrt{5}, BD = 2\sqrt{5}$, 根据三角形的面积公式和勾股定理即可得到结论.

【解答】 (1) 证明: 连接 AD, OD ,

$$\because AC \text{ 为 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ODA,$$

$$\therefore AB \parallel OD,$$

$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp DE$,

$\therefore DE \perp AB$;

(2) 解: $\because \tan B = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$,

\therefore 设 $AD = k$, $BD = 2k$,

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{5}k,$$

$\because AB = AC = 5$,

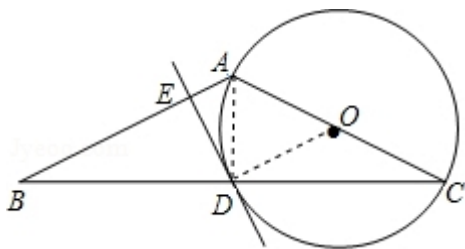
$$\therefore k = \sqrt{5},$$

$$\therefore AD = \sqrt{5}, BD = 2\sqrt{5},$$

$$\because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AB \cdot DE = \frac{1}{2}AD \cdot BD,$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}}{5} = 2,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{5 - 4} = 1.$$



【点评】 本题考查了切线的性质, 解直角三角形, 等腰三角形的性质, 圆周角定理, 熟练掌握切线的性质是解题的关键.

23. **【分析】** (1) 根据一次函数与正半轴的交点的求法求出点 A 的坐标, 根据平移的性质求出点 D 的坐标;

(2) ①根据反比例函数图象上点的坐标特征求出点 B 的纵坐标, 得到点 B 的坐标, 代入一次函数解析式计算, 求出 m ;

②根据坐标与图形性质得到 $BD \perp x$ 轴, 根据 $BD = AD$, 求出点 B 的纵坐标, 代入计算即可.

【解答】 解: (1) 对于 $y = mx + m$, 当 $y = 0$ 时, $x = -1$,

\therefore 一次函数 $y = mx + m$ 的图象与 x 轴交点 A 的坐标为 $(-1, 0)$,

把点 $A(-1, 0)$ 向右平移 2 个单位得到点 D , 则点 D 的坐标为 $(1, 0)$;

(2) ①当 $k = 4$ 时, 反比例函数解析式为 $y = \frac{4}{x}$,

\because 点 B 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象上, 点 B 的横坐标为 1,

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的纵坐标 } y = \frac{4}{1} = 4,$$

\therefore 点 B 的坐标为 $(1, 4)$,

\because 点 B 在直线 $y = mx + m$ 上, 点 B 的坐标为 $(1, 4)$,

$$\therefore m \times 1 + m = 4,$$

解得, $m = 2$;

② \because 点 B 的横坐标为 1, 点 D 的坐标为 $(1, 0)$,

$$\therefore BD \perp x \text{ 轴},$$

当 $BD = AD = 2$ 时, 点 B 的坐标为 $(1, 2)$ 或 $(1, -2)$,

$$\therefore m \times 1 + m = 2 \text{ 或 } m \times 1 + m = -2,$$

解得, $m = \pm 1$.

【点评】 本题考查的是反比例函数的知识, 掌握一次函数与反比例函数的交点、函数图象上点的坐标特征是解题的关键.

24. **【分析】** (1) 由图表可知 $x \neq 0$;

(2) 根据图表可知当 $x = -1$ 时的函数值为 m , 把 $x = -1$ 代入解析式即可求得;

(3) 根据坐标系中的点, 用平滑的曲线连接即可;

(4) 观察图象即可得出 $x = 1.5$ 时对应的函数值以及该函数的性质.

【解答】 解: (1) 函数 $y = \frac{1}{x^2} + x$ 的自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$.

故答案为: $x \neq 0$;

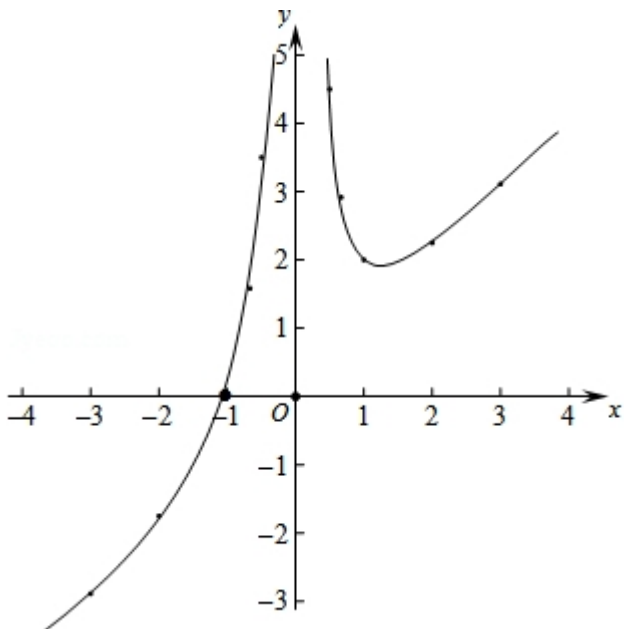
(2) 令 $x = -1$,

$$\therefore y = \frac{1}{1} - 1 = 0,$$

$$\therefore m = 0,$$

故答案为 0;

(3) 如图



(4) ①根据函数图象，① $x=1.5$ 时，对应的函数值 y 约为 1.9，

故答案为 1.9；

②该函数的性质：当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大；

故答案为当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大。

【点评】 本题考查函数的图象一个的问题，解题的关键是确定函数自变量的取值范围，学会用描点法画函数图象，能观察图象，总结函数的性质，属于中考常考题型。

25. **【分析】** (1) 根据抽查人数，可知从小到大排列后处在第 20、21 位两个数的平均数为中位数，可求出甲班 A、B、C 三组的人数为 22 人，可得到中位数在 C 组，再根据 C 组的服务时长，可得到处在第 20、21 位的两个数分别为 76，80，进而求出中位数；

(2) 通过比较甲、乙班的中位数、众数得出结论；

(3) 样本估计总体，样本中甲班学生一周志愿服务的时长不少于 60 分钟所占的比例为 $(1 - 5\% - 15\%) = 80\%$ ，因此估计总体 800 人的 80% 的学生，一周志愿服务的时长符合要求。

【解答】 解：(1) 甲班 A、B、C 三组的人数为 $40 \times (5\% + 15\% + 35\%) = 22$ (人)，

甲班同学一周志愿服务时长从小到大排列后，处在第 20、21 位两个数的平均数为 $\frac{76+80}{2} = 78$ (分)，

因此 $m = 78$ ，

故答案为：78；

(2) 甲班所在的学校学生志愿服务工作做得好，甲班所在学校学生的志愿服务时长的中位数、众数比乙班大，

故答案为：甲班，甲班所在学校学生的志愿服务时长的中位数、众数比乙班大；

(3) $800 \times (1 - 5\% - 15\%) = 640$ (人)，

故答案为：640.

【点评】考查扇形统计图的意义和制作方法，理解中位数、众数、平均数的意义是正确解答的前提.

26. 【分析】(1) 把抛物线解析式化成顶点式即可求得；

(2) ①当 $a=0$ 时，则抛物线 $y=x^2$ ，画出图形，观察后即可得出结论；

②找出：当抛物线经过 $(0, 2)$ ，区域 W 内有 1 个整点；当抛物线经过 $(0, 1)$ ，区域 W 内有 3 个整点. 结合函数图象，即可求出区域 W 内有 2 个整点时 a 的取值范围.

【解答】解：(1) $\because y=x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$,

\therefore 顶点 $A(a, 0)$;

(2) ①当 $a=0$ 时，则抛物线 $y=x^2$,

如图所示，

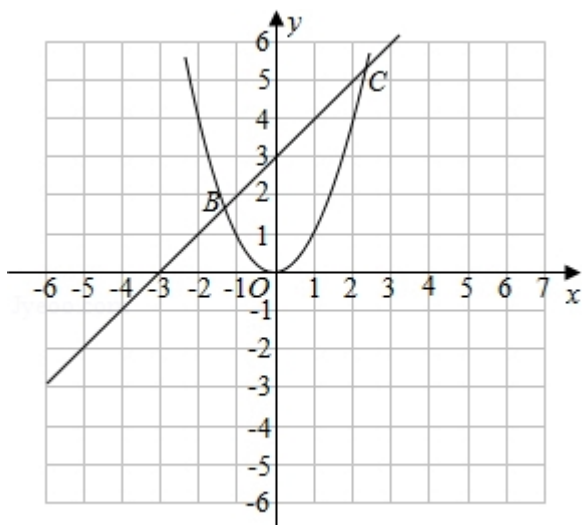


图1

观察图形，可知：区域 W 内的整点个数是 4；

②如图所示：

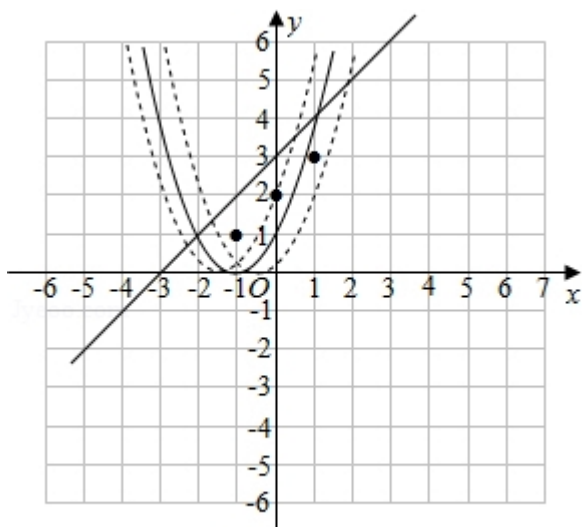


图2

当抛物线经过 $(0, 2)$ ，区域 W 内有 1 个整点；

当抛物线经过 $(0, 1)$ ，区域 W 内有 3 个整点；

观察图形，可知：如果区域 W 内有 2 个整点， a 的取值范围为 $-\sqrt{2} < a < -1$.

【点评】本题是二次函数综合题，考查了二次函数图象上点的坐标特征，解题的关键是：（1）根据顶点式求得顶点坐标；（2）①②依照题意画出图形，利用数形结合找出结论．

27. 【分析】（1）根据题意画出图形即可；

（2）如图，连接 DE ， DG ，根据正方形的性质得到 $AD=CD$ ， $\angle A=\angle DCF=90^\circ$ ，根据全等三角形的性质得到 $DE=DF$ ， $\angle ADE=\angle CDF$ ，求得 $DF=DG$ ，由等腰三角形的性质得到 $\angle CDF=\angle CDG$ ，推出 $\triangle EDG$ 是等腰直角三角形，于是得到结论．

【解答】解：（1）依题意补全图形如图所示；

（2）如图，连接 DE ， DG ，

\because 在正方形 $ABCD$ 中， $AD=CD$ ， $\angle A=\angle DCF=90^\circ$ ，

$\because AE=CF$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF$ (SAS)，

$\therefore DE=DF$ ， $\angle ADE=\angle CDF$ ，

$\because \angle DCF=90^\circ$ ，

$\therefore DC \perp FG$ ，

$\because CF=CG$ ，

$\therefore DF=DG$ ，

$\therefore \angle CDF=\angle CDG$ ，

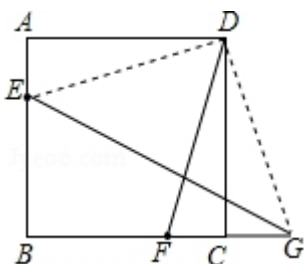
$\therefore DE=DG$ ， $\angle ADE=\angle CDG$ ，

$\because \angle ADC=90^\circ$ ，

$\therefore \angle EDG=90^\circ$ ，

$\therefore \triangle EDG$ 是等腰直角三角形，

$\therefore EG=\sqrt{2}DG=\sqrt{2}DF$ ．



【点评】本题考查了等腰直角三角形，作图 - 基本作图，正方形的性质，全等三角形的判定和性质，线段垂直平分线的性质，等腰三角形的判定和性质，正确的作出辅助线构造全等三角形是解题的关键．

28. 【分析】（1）如图 1 中，过点 W 作 $WJ \perp OW$ 交 $\odot W$ 于 J ，连接 OJ ， PW ， OO' ， JO' ．证明 $\triangle WOP \sim \triangle JOO'$ ，

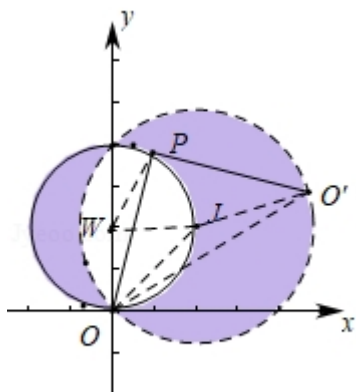
推出 $\frac{WJ}{JO'} = \frac{OW}{OJ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，推出 $JO' = \sqrt{2}WJ = 2\sqrt{2}$ ，推出点 O' 的运动轨迹是以 J 为圆心， $2\sqrt{2}$ 为半径的圆，推

出 $\odot W$ 的“限距点”是图中的阴影部分，由此即可判断．

(2) 当直线 $y=a$ 与阴影部分有公共点时, 满足条件.

(3) 如图 3 中, 由题意当 $\odot G$ 与阴影部分有公共点时, 满足条件. 求出四种特殊位置 G 的坐标即可判断.

【解答】解：（1）如图 1 中，过点 W 作 $WJ \perp OW$ 交 $\odot W$ 于 J ，连接 OJ ， PW ， OO' ， JO' 。



1

$\because \triangle OWJ, \triangle OPO'$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore OJ = \sqrt{2}OW, \quad OO' = \sqrt{2}OP,$$

$$\therefore \frac{OW}{OJ} = \frac{OP}{OO'},$$

$$\therefore \angle WOJ = \angle POO' \quad ,$$

$$\therefore \angle WOP = \angle JOO' \quad ,$$

$$\therefore \triangle WOP \sim \triangle JOO' \quad ,$$

$$\therefore \frac{WJ}{JO'} = \frac{OW}{OJ} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore JO' = \sqrt{2}WJ = 2\sqrt{2},$$

\therefore 点 O' 的运动轨迹是以 J 为圆心, $2\sqrt{2}$ 为半径的圆,

$\therefore \odot W$ 的“限距点”是图中的阴影部分,

$$\therefore J(2, 2), A(4, 0), B(1, 2), C(0, 4),$$

$\therefore \odot W$ 的“限距点”为 A, C .

故答案为: A, C .

(2) 如图 2 中,

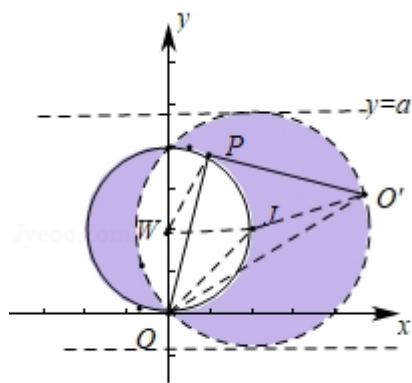


图2

当直线 $y=a$ 与阴影部分有公共点时，满足条件.

与 $\odot J$ 相切时 $a=2+2\sqrt{2}$ 或 $2-2\sqrt{2}$,

\therefore 满足条件的 a 的值为: $2-2\sqrt{2} \leq a \leq 2+2\sqrt{2}$.

(3) 如图 3 中，由题意当 $\odot G$ 与阴影部分有公共点时，满足条件.

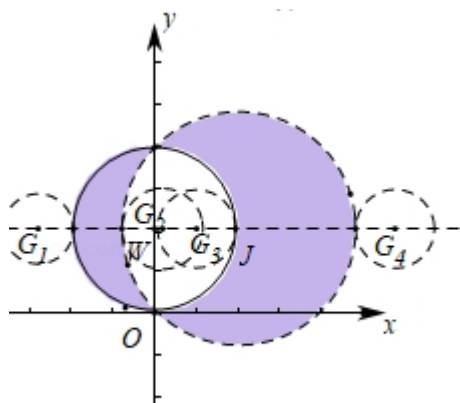


图2

当 $\odot G_1$ 与 $\odot W$ 外切时, $G_1(-3, 2)$,

当 $\odot G_2$ 与 $\odot J$ 内切时, $G_1(3-2\sqrt{2}, 2)$,

当 $\odot G_{13}$ 与 $\odot W$ 内切时, $G_1(1, 2)$,

当 $\odot G_4$ 与 $\odot J$ 外切时, $G_1(3+2\sqrt{2}, 2)$,

观察图象可知满足条件的 a 的值为: $-3 \leq 3-2\sqrt{2}$ 或 $1 \leq a \leq 3+2\sqrt{2}$.

【点评】 本题属于圆的综合题，考查了等腰直角三角形的性质，相似三角形的判定和性质，轨迹，圆与圆的位置关系，直线与圆的位置关系等知识，解题的关键是理解题意，正确寻找 $\odot W$ 的“限距点”的轨迹图形，属于中考压轴题.