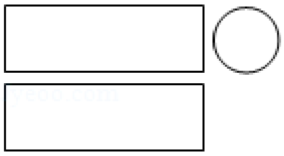
2021 北京东城初三一模

数　　学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1．（2 分）某几何体的三视图如图所示，该几何体是(　　)



A．三棱柱　　B．正方体　　C．圆锥　　D．圆柱

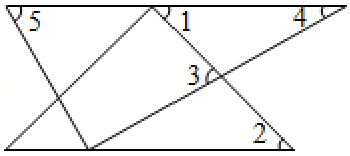
2．（2 分）在平面直角坐标系 xOy 中，下列函数的图象不过点 $(1,1)$ 的是(　　)

A．$y=\dfrac{1}{x}$　　B．$y=x^{2}$　　C．$y=-x+1$　　D．$y=x^{3}$

3．（2 分）2020 年 7 月 23 日，中国首颗火星探测器“天问一号”成功发射.2021 年 2 月 10 日，在经过长达七个月，475000000 公里的漫长飞行之后，“天问一号”成功进入火星轨道．将 475000000 用科学记数法表示应为(　　)

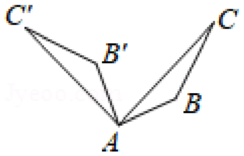
A．4.75×10^{7}　　B．4.75×10^{8}　　C．4.75×10^{9}　　D．475×10^{6}

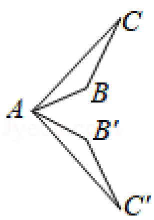
4．（2 分）一副三角板如图放置，斜边互相平行，且每个三角板的直角顶点都在另一个三角板的斜边上，在图中所标记的角中，与 $\angle1$ 相等的角是(　　)

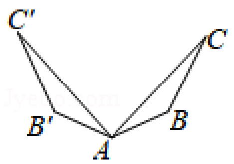


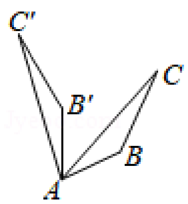
A．$\angle2$　　B．$\angle3$　　C．$\angle4$　　D．$\angle5$

5．（2 分）如图，ΔABC 经过旋转或轴对称得到△ $AB'C'$，其中 ΔABC 绕点 A 逆时针旋转 60° 的是(　　)

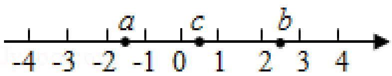
A．

B．

C．

D．

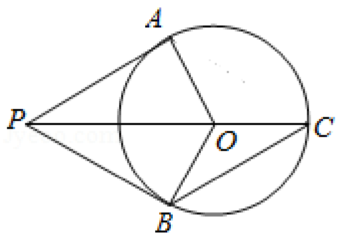
6．（2 分）实数 a，b，c 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列式子正确的是(　　)



A．$|a|>|b|$　　B．$a<-b$　　C．$a-b<0$　　D．$ac>bc$

7．（2 分）如图，PA，PB 是 $\odot O$ 的切线，切点分别为 A，B，PO 的延长线交 $\odot O$ 于点 C，连接 OA，OB，

BC．若 $AO=2$，$OP=4$，则 $\angle C$ 等于(　　)



A．20°　　B．30°　　C．45°　　D．60°

8.（2 分）一个直角三角形木架的两条直角边的边长分别是 $30cm$，$40cm$．现要做一个与其相似的三角形木架，如果以 $60cm$ 长的木条为其中一边，那么另两边中长度最大的一边最多可达到(　　)

A．$60cm$　　B．$75cm$　　C．$100cm$　　D．$120cm$

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9.（2 分）若分式 $\frac{x}{2x-1}$ 的值为 0，则 x 的值等于____.

10.（2 分）分解因式：$ma^{2}-4mab+4mb^{2}=$____.

11.（2 分）用一组 a，b 的值说明“若 $a>b$，则 $a^{2}>b^{2}$”是假命题，这组值可以是 $a=$____，$b=$____.

12.（2 分）4 月 23 日是世界读书日．甲、乙两位同学在读书日到来之际共购买图书 22 本，其中甲同学购买的图书数量比乙同学购买的图书数量的 2 倍多 1 本，求甲、乙两位同学分别购买的图书数量．设甲同学购买图书 x 本、乙同学购买图书 y 本，则可列方程组为____.

13.（2 分）有人做了掷骰子的大量重复试验，统计结果如下表所示：

投掷次数 (n)	“出现点数为 1”的次数（频数 (m)	频率 $\frac{m}{n}$
300	52	0.173
400	65	0.163
500	80	0.160
600	99	0.165
700	114	0.163
800	136	0.170
900	151	0.168
1000	166	0.166

根据上表信息，掷一枚骰子，估计“出现点数为 1”的概率为____.（精确到 0.001)

14.（2 分）一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，则这个多边形的边数为____.

15.（2 分）若关于 x 的一元二次方程 $x^{2}+2(m+1)x+c=0$ 有两个相等的实数根，则 c 的最小值是____.

16.（2 分）小青要从家去某博物馆参加活动，经过查询得到多种出行方式，可选择的交通工具有地铁、公交车、出租车、共享单车等，小青的家到地铁站（或公交车站）有一段距离，地铁站（或公交车站）到该博物馆也有一段距离，需要步行或骑共享单车，共享单车的计价规则为：每 30 分钟 1.5 元，不足 30 分钟的按 30 分钟计算．出行方式的相应信息如下表(√表示某种出行方式选择的交通工具）：

	乘出租车	乘坐公交车	乘坐地铁	骑共享单车	共需步行（公里）	总用时（分钟）	费用（元）
方式 1			√		2.0	47	4
方式 2				√		56	3
方式 3		√			1.6	78	3
方式 4		√			1.8	80	3
方式 5		√	√		1.5	60	6
方式 6		√	√		1.6	56	6
方式 7		√	√		1.7	55	6
方式 8		√	√		1.5	57	6
方式 9	√				0.2	32	41

根据表格中提供的信息，小青得出以下四个推断：

①要使费用尽可能少，可以选择方式 2，3，4；

②要使用时较短，且费用较少，可以选择方式 1；

③如果选择公交车和地铁混合的出行方式，平均用时约 57 分钟；

④如果将上述出行方式中的“步行”改为“骑共享单车”，那么除方式 2 外，其它出行方式的费用均会超过 8 元．

其中推断合理的是____（填序号）．

三、解答题（本题共 68 分，第 17-19 题，每小题 5 分，第 20 题 6 分，第 21-23 题，每小题 5 分，第 24-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程

17．（5 分）计算：$(\frac{1}{3})^{-1}+\sqrt{8}-|-1|-6\sin 45^{\circ}$ ．

18．（5 分）已知 $2x^{2}-10x-1=0$ ，求代数式 $(x-1)(2x-1)-(x+1)^{2}$ 的值．

19．（5 分）尺规作图：

如图，已知线段 a ，线段 b 及其中点．

求作：菱形 $ABCD$ ，使其两条对角线的长分别等于线段 a ， b 的长．

作法：①作直线 m ，在 m 上任意截取线段 $AC=a$ ；

②作线段 AC 的垂直平分线 EF 交线段 AC 于点 O ；

③以点 O 为圆心，线段 b 的长的一半为半径画圆，交直线 EF 于点 B ， D ；

④分别连接 AB ， BC ， CD ， DA ；

则四边形 $ABCD$ 就是所求作的菱形．

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

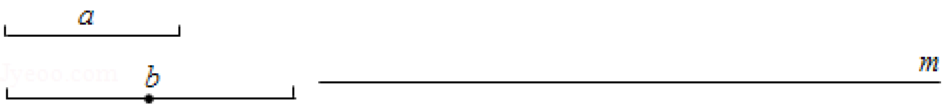
（2）完成下面的证明．

证明：$\because OA=OC$ ， $OB=OD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是____．

$\because AC\perp BD$ ，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形____（填推理的依据）.



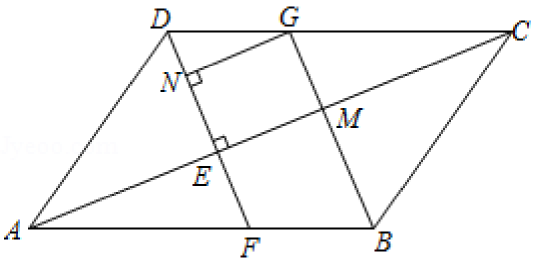
20．（6 分）解不等式组：$\begin{cases}\dfrac{1+x}{6}>\dfrac{2x-5}{3}+1\\5x+3\geqslant 4x-1\end{cases}$，并写出其中的正整数解.

21．（5 分）解分式方程：$\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3-2x}{2+x}+1$.

22．（5 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，DE 的延长线交 AB 于点 F，过点 B 作 $BG//DF$ 交 DC 于点 G，交 AC 于点 M．过点 G 作 $GN\perp DF$ 于点 N．

（1）求证：四边形 $NEMG$ 为矩形；

（2）若 $AB=26$，$GN=8$，$\sin\angle CAB=\dfrac{5}{13}$，求线段 AC 的长.



23．（5 分）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: y=kx+b$ 与直线 $y=3x$ 平行，且过点 $A(2,7)$.

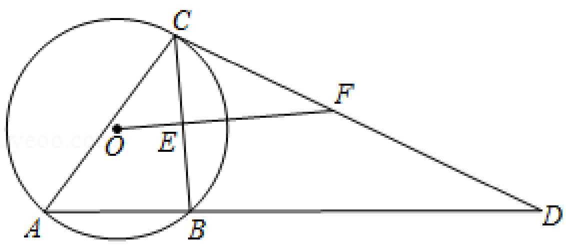
（1）求直线 l_1 的表达式；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫做整点．直线 l_2 与直线 l_1 关于 y 轴对称，直线 $y=m$ 与直线 l_1，l_2 围成的区域 W 内（不包含边界）恰有 6 个整点，求 m 的取值范围.

24．（6 分）如图，ΔABC 是 $\odot O$ 的内接三角形，过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 D，$OE\perp BC$ 于点 E，交 CD 于点 F．

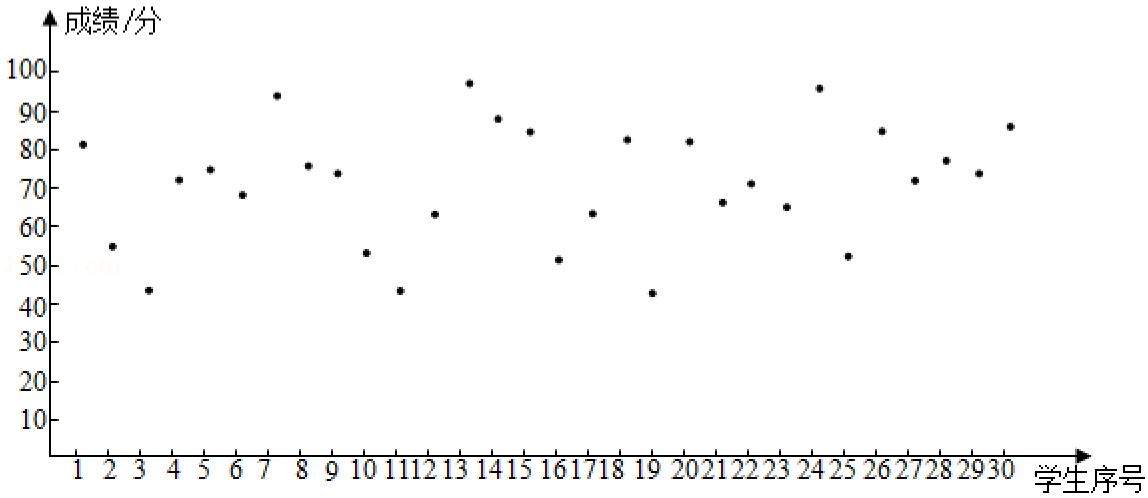
（1）求证：$\angle A+\angle OFC=90^\circ$；

（2）若 $\tan A=\dfrac{3}{2}$，$BC=6$，求线段 CF 的长.

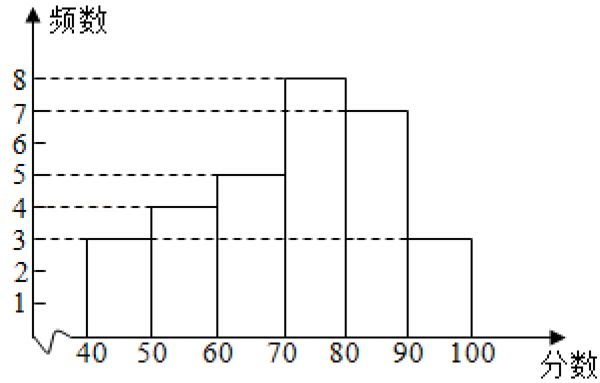


25．（6 分）第 24 届冬季奥林匹克运动会，又称 2022 年北京冬奥会，将于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日，在北京市和张家口市同时举行，为了调查同学们对冬奥知识的了解情况，小冬从初中三个年级各随机抽取 10 人，进行了相关测试，获得了他们的成绩（单位：分），并对数据（成绩）进行了整理、描述和分析下面给出了相关信息：

a.30 名同学冬奥知识测试成绩的统计图如下：



b.30 名同学冬奥知识测试成绩的频数分布直方图如下（数据分成 6 组：$40\leqslant x<50$，$50\leqslant x<60$，$60\leqslant x<70$，$70\leqslant x<80$，$80\leqslant x<90$，$90\leqslant x\leqslant 100$）:



c．测试成绩在 $70\leqslant x<80$ 这一组的是：70，73，74，74，75，75，77，78.

d．小明的冬奥知识测试成绩为 85 分.

根据以上信息，回答下列问题：

（1）小明的测试成绩在抽取的 30 名同学的成绩中从高到低排名第____；

（2）抽取的 30 名同学的成绩的中位数为____；

（3）序号为$1-10$ 的学生是七年级的，他们的成绩的方差记为 s_1^2；序号为$11-20$ 的学生是八年级的，他们的成绩的方差记为 s_2^2；序号为$21-30$ 的学生是九年级的，他们的成绩的方差记为 s_3^2．直接写出 s_1^2，s_2^2，s_3^2 的大小关系；

（4）成绩 80 分及以上记为优秀，若该校初中三个年级 420 名同学都参加测试，估计成绩优秀的同学约为____人.

26.（6 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 在抛物线 $y=-x^2+(2a-2)x-a^2+2a$ 上，其中 $x_1<x_2$.

（1）求抛物线的对称轴（用含 a 的式子表示）;

（2）①当 $x=a$ 时，求 y 的值；

②若 $y_1=y_2=0$，求 x_1 的值（用含 a 的式子表示）.

（3）若对于 $x_1+x_2<-4$，都有 $y_1<y_2$，求 a 的取值范围.

27.（7 分）已知 $\angle MAN=30^{\circ}$，点 B 为边 AM 上一个定点，点 P 为线段 AB 上一个动点（不与点 A，B 重合），点 P 关于直线 AN 的对称点为点 Q，连接 AQ，BQ，点 A 关于直线 BQ 的对称点为点 C，连接 PQ，CP.

（1）如图 1，若点 P 为线段 AB 的中点；

①直接写出 $\angle AQB$ 的度数；

②依题意补全图形，并直接写出线段 CP 与 AP 的数量关系；

（2）如图 2，若线段 CP 与 BQ 交于点 D .

①设 $\angle BQP=\alpha$ ，求 $\angle CPQ$ 的大小（用含 α 的式子表示）；

②用等式表示线段 DC ， DQ ， DP 之间的数量关系，并证明．

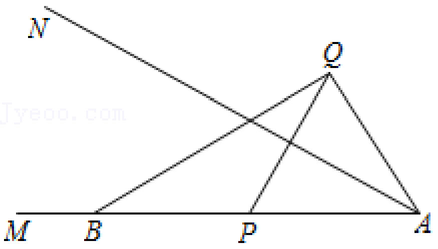


图1

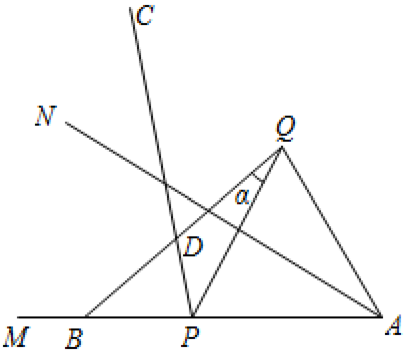


图2

28．（7 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知正方形 $ABCD$ ，其中 $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}，0)$ ， $B(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ ， $C(\frac{\sqrt{2}}{2}，0)$ ， $D(0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ． M ， N 为该正方形外两点， $MN=1$.

给出如下定义：记线段 MN 的中点为 P ，平移线段 MN 得到线段 $M'N'$ ，使点 M' ， N' 分别落在正方形 $ABCD$ 的相邻两边上，或线段 $M'N'$ 与正方形的边重合(M' ， N' ， P' 分别为点 M ， N ， P 的对应点)，线段 PP' 长度的最小值称为线段 MN 到正方形 $ABCD$ 的“平移距离”.

（1）如图 1，平移线段 MN ，得到正方形 $ABCD$ 内两条长度为 1 的线段 M_1N_1 ， M_2N_2 ，则这两条线段的位置关系是____；若 P_1 ， P_2 分别为 M_1N_1 ， M_2N_2 的中点，在点 P_1 ， P_2 中，连接点 P 与点____的线段的长度等于线段 MN 到正方形 $ABCD$ 的“平移距离”.

（2）如图 2，已知点 $E(\frac{\sqrt{2}}{2}+1，0)$ ，若 M ， N 都在直线 BE 上，记线段 MN 到正方形 $ABCD$ 的“平移距离”为 d_1 ，求 d_1 的最小值；

（3）若线段 MN 的中点 P 的坐标为 $(2,2)$ ，记线段 MN 到正方形 $ABCD$ 的“平移距离”为 d_2 ，直接写出 d_2 的取值范围.

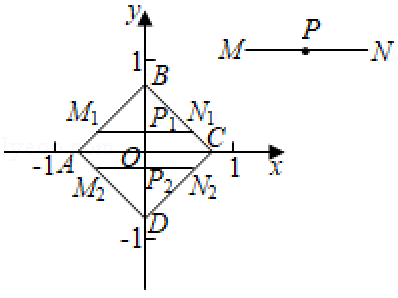


图 1

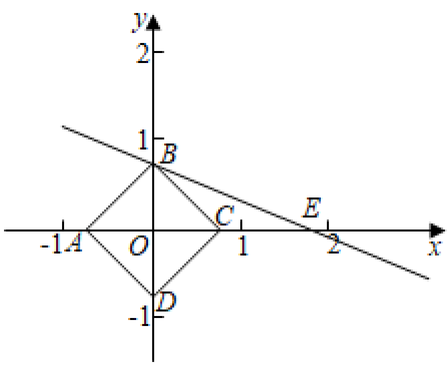
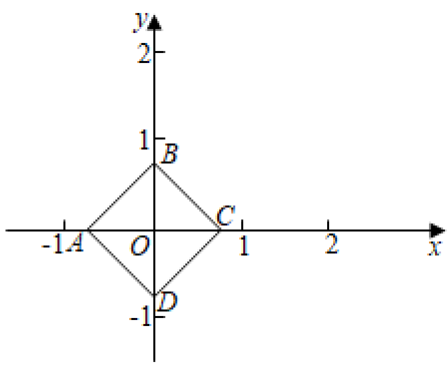


图 2



备用图

参考答案

一、选择题（本题共16分，每小题2分）第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1.【分析】根据一个空间几何体的主视图和俯视图都是全等的长方形，可判断该几何体是柱体，进而根据左视图的形状，可判断柱体侧面形状，得到答案．

【解答】解：由几何体的主视图和俯视图都是全等的矩形，

故该几何体是一个柱体，

又$\because$左视图是一个圆，

故该几何体是一个圆柱．

故选：D．

【点评】本题考查的知识点是三视图，如果有两个视图为三角形，该几何体一定是锥，如果有两个矩形，该几何体一定是柱体，其底面由第三个视图的形状决定．

2.【分析】把点$(1,1)$分别代入解析式判断即可．

【解答】解：A．$x=1$，则$y=\dfrac{1}{x}=1$；故函数$y=\dfrac{1}{x}$的图象过点$(1,1)$；

B．$x=1$，则$y=x^2=1$，故函数$y=x^2$的图象过点$(1,1)$；

C．$x=1$，则$y=-x+1=0\neq 1$，故函数$y=-x+1$的图象不过点$(1,1)$；

D．$x=1$，则$y=x^3=1$，故函数$y=x^3$的图象过点$(1,1)$；

故选：C．

【点评】本题考查了反比函数、一次函数、二次函数图象上点的坐标特征．图象上点的坐标适合解析式是解题的关键．

3.【分析】科学记数法的表示形式为$a\times 10^n$的形式，其中$1\leqslant |a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值$\geqslant 10$时，n是正整数；当原数的绝对值<1时，n是负整数．

【解答】解：将475000000用科学记数法表示为4.75×10^8．

故选：B．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为$a\times 10^n$的形式，其中$1\leqslant |a|<10$，n为整数，表示时关键要正确确定a的值以及n的值．

4.【分析】根据平行线的性质逐项进行判断即可得到结论．

【解答】解：$\because AB//CD$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

故A符合题意；

$\because AB$与BF不平行，

故B不符合题意；

$\because \angle 1=\angle 2=45^{\circ}$，$\angle 4=30^{\circ}$，

$\therefore \angle 1\neq \angle 4$，

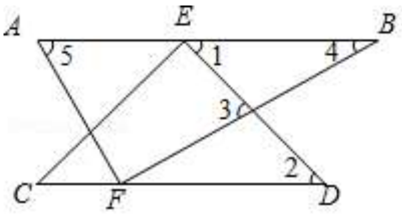
故C不符合题意；

$\because AF$与ED不平行，

$\therefore \angle 1 \neq \angle 5$，

故D不符合题意；

故选：A.



【点评】此题考查平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

5.【分析】根据轴对称，旋转的性质判断即可.

【解答】解：由题意，选项B，C可以通过翻折得到.

选项A，其中ΔABC绕点A逆时针旋转$90°$可以得到$\triangle AB'C'$，

选项D，其中ΔABC绕点A逆时针旋转$60°$可以得到$\triangle AB'C'$.

故选：D.

【点评】本题考查旋转及轴对称概念和性质，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

6.【分析】根据数轴上点与原点的位置，确定各数符号及绝对值大小即可得到答案.

【解答】解：由图可知：$a<0<c<b$，且$|a|<|b|$，

$\therefore A$不符合题意；

$a>-b$，B不符合题意；

$a-b<0$，C符合题意；

$ac<0<bc$，D不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查数轴上点表示的数，解题的关键是观察各点与原点的位置，确定各数符号及绝对值大小.

7.【分析】根据切线的性质可得$PA=PB$，$\angle OAP=\angle OBP=90°$，根据$AO=OB=2$，$OP=4$，可得$\angle APO=\angle BPO=30°$，进而可得$\angle C$的度数.

【解答】解：$\because PA$，PB是$\odot O$的切线，

$\therefore PA=PB$，$\angle OAP=\angle OBP=90°$，

$\because AO=OB=2$，$OP=4$，

$\therefore \angle APO=\angle BPO=30°$，

$\therefore \angle AOP=\angle BOP=60°$，

$\because OB=OC$，

$\therefore \angle C=30°$.

故选：B.

【点评】本题考查了切线的性质，圆周角定理，解题的关键是掌握切线的性质.

8.【分析】直接利用勾股定理得出斜边长，再利用相似三角形的性质得出相似比，进而得出答案.

【解答】解：$\because$一个直角三角形木架的两条直角边的边长分别是$30cm$，$40cm$，

$\therefore$ 三角形的斜边长为：$\sqrt{30^2+40^2}=50(cm)$，

$\because$ 现要做一个与其相似的三角形木架，以 $60cm$ 长的木条为其中一边，

$\therefore$ 当另两边中长度最大的一边最长，则两三角形的相似比为：$30:60=1:2$，

故设要做的三角形最长边长为：$50\times 2=100(cm)$．

故选：C．

【点评】此题主要考查了相似三角形的应用，正确得出相似比是解题关键．

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．【分析】分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零．

【解答】解：根据题意，得 $x=0$ 且 $2x-1\neq 0$．

解得 $x=0$．

故答案是：0．

【点评】此题主要考查了分式的值为零的条件，注意："分母不为零"这个条件不能少．

10．【分析】原式提取公因式，再利用完全平方公式分解即可．

【解答】解：原式 $=m(a^2-2ab+4b^2)=m(a-2b)^2$．

故答案为：$m(a-2b)^2$．

【点评】此题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键．

11．【分析】举出一个反例：$a=-1$，$b=-2$，说明命题"若 $a>b$，则 $a^2>b^2$"是错误的即可．

【解答】解：当 $a=-1$，$b=-2$ 时，满足 $a>b$，但是 $a^2<b^2$，

$\therefore$ 命题"若 $a>b$，则 $a^2>b^2$"是错误的．

故答案为：-1、-2．（答案不唯一）

【点评】此题主要考查了命题与定理，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：任何一个命题非真即假．要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可．

12．【分析】设甲同学购买图书 x 本、乙同学购买图书 y 本，根据"甲同学购买图书 $+$ 乙同学购买图书 $=22$、甲同学购买图书 $=2$ 乙同学购买图书 $+1$"列出方程组．

【解答】解：根据题意得到：$\begin{cases}x+y=22\\x=2y+1\end{cases}$．

故答案是：$\begin{cases}x+y=22\\x=2y+1\end{cases}$．

【点评】本题主要考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，根据实际问题中的条件列方程组时，要注意抓住题目中的一些关键性词语，找出等量关系，列出方程组．

13．【分析】利用频率估计概率的方法得出概率的估计值．

【解答】解：根据图表中数据可得出，"出现点数为 1"的概率的估计值是 0.166．

故答案为：0.166．

【点评】此题主要考查了利用频率估计概率，正确理解频率与概率的区别与联系是解题关键．

14．【分析】利用多边形的外角和以及多边形的内角和定理即可解决问题．

【解答】解：$\because$ 多边形的外角和是 360 度，多边形的内角和是外角和的 2 倍，

则内角和是720度，

$720\div180+2=6$，

$\therefore$这个多边形的边数为6．

故答案为：6．

【点评】本题主要考查了多边形的内角和定理与外角和定理，熟练掌握定理是解题的关键．

15．【分析】由方程有两个相等的实数根可得出$\triangle=4(m+1)^2-4c=0$，解之即可得出结论．

【解答】解：$\because$方程$x^2+2(m+1)x+c=0$有两个相等的实数根，

$\therefore\triangle=4(m+1)^2-4c=0$，

$\therefore(m+1)^2=c$，

$\because(m+1)^2\geqslant0$，

$\therefore c$的最小值是0．

故答案为：0．

【点评】本题考查了根的判别式，牢记"当$\triangle=0$时，方程有两个相等的实数根"是解题的关键．

16．【分析】根据题目表格所给的9种出行方式的相应数据对选项进行逐一判断即可得到答案．

【解答】解：①要使出行费用尽可能少，由表格数据可知，出行方式2、3、4的费用均为3元比其他6种出行方式费用都少，故此说法正确；

②出行方式1，出行时间47分钟，花费4元，对比较其他出行方式，出行时间最少，花费也较少，故此说法正确；

③由题意可知方式 5、6、7、8 为公交车和地铁混合出行方式，故平均出行时间$=$出行总时间$\div4$，即平均出行时间$=(60+56+55+57)\div4=57$，故此说法正确；

④共享单车起步价30分钟内1.5元，方式1与方式2结合来看，2公里骑共享单车需花费1.5元，地铁需花费4元，共需5.5元，不超过8元，故④错误．

故答案为：①②③．

【点评】本题主要考查了出行方式费用和时间的相关知识点，解题的关键在于能够读懂表格中提供的信息进行解答．

三、解答题（本题共68分，第17-19题，每小题5分，第20题6分，第21-23题，每小题5分，第24-26题，每小题5分，第27-28题，每小题5分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程

17．【分析】原式利用负整数指数幂法则，二次根式性质，绝对值的代数意义，以及特殊角的三角函数值计算即可求出值．

【解答】解：原式$=3+2\sqrt{2}-1-6\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=3+2\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}$

$=2-\sqrt{2}$．

【点评】此题考查了实数的运算，负整数指数幂，以及特殊角的三角函数值，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

18．【分析】当$2x^2-10x-1=0$时，$x^2-5x=\dfrac{1}{2}$．然后根据整式的运算法则即可求出答案．

【解答】解：当$2x^2-10x-1=0$时，$x^2-5x=\dfrac{1}{2}$．

原式$=2x^2-3x+1-(x^2+2x+1)$

$=x^2-5x$

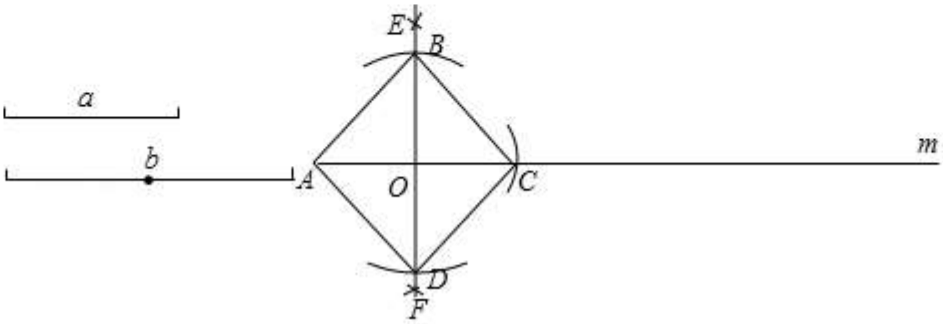
$=\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查一元二次方程的解，解题的关键是熟练运用整式的运算法则，本题属于基础题型.

19.【分析】(1) 根据要求作出图形即可.

(2) 根据对角线垂直的平行四边形是菱形证明即可.

【解答】解：(1) 如图，四边形 $ABCD$ 即为所求作.



(2) $\because OA=OC$， $OB=OD$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平四边形.

$\because AC\perp BD$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是菱形（对角线垂直的平行四边形是菱形）.

故答案为：平行四边形，对角线垂直的平行四边形是菱形.

【点评】本题考查作图 – 复杂作图，菱形的判定和性质，线段的垂直平分线的性质等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

20.【分析】分别求出不等式组中两不等式的解集，找出两解集的公共部分确定出不等式组的解集，进而求出正整数解即可.

【解答】解：$\begin{cases}\frac{1+x}{6}>\frac{2x-5}{3}+1① \\ 5x+3\geqslant 4x-1②\end{cases}$，

由①得：$x<\frac{5}{3}$，

由②得：$x\geqslant -4$，

$\therefore$不等式组的解集为$-4\leqslant x<\frac{5}{3}$，

则不等式组的正整数解为 1.

【点评】此题考查了解一元一次不等式组的整数解，以及解一元一次不等式组，熟练掌握不等式组的解法是解本题的关键.

21.【分析】解分式方程的一般步骤为：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1，检验.

【解答】解：$\frac{x-1}{x+2}=\frac{3-2x}{2+x}+1$，

$x-1=3-2x+x+2$，

$x+2x-x=3+2+1$，

$2x=6$，

$x=3$.

经检验，$x=3$是原方程的根，

$\therefore$原方程的解为：$x=3$.

【点评】本题考查解分式方程，考核学生的计算能力，解题时注意解分式方程一定要检验.

22.【分析】(1) 证$AC//GN$，$\angle MEN=90^{\circ}$，则四边形$NEMG$是平行四边形，即可得出结论；

(2) 由矩形的性质得$EM=GN=8$，$\angle EMG=90^{\circ}$，再由锐角三角函数定义求出$BM=10$，由勾股定理得$AM=24$，则$AE=AM-EM=16$，然后证$\Delta BCM\cong\Delta DAE(AAS)$，得$CM=AE=16$，即可求解.

【解答】解：(1) 证明：$\because DE\perp AC$，$GN\perp DF$，

$\therefore AC//GN$，$\angle MEN=90^{\circ}$，

$\because BG//DF$，

$\therefore$四边形$NEMG$是平行四边形，

又$\because\angle MEN=90^{\circ}$，

$\therefore$四边形$NEMG$为矩形；

(2) 由(1)得：四边形$NEMG$为矩形，

$\therefore EM=GN=8$，$\angle EMG=90^{\circ}$，

$\therefore\angle AMB=90^{\circ}$，

$\because AB=26$，$\sin\angle CAB=\dfrac{5}{13}=\dfrac{BM}{AB}$，

$\therefore BM=10$，

$\therefore AM=\sqrt{AB^{2}-BM^{2}}=\sqrt{26^{2}-10^{2}}=24$，

$\therefore AE=AM-EM=16$，

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore BC=AD$，$BC//AD$，

$\therefore\angle BCM=\angle DAE$，

$\because\angle BMC=90^{\circ}$，$\angle DEA=90^{\circ}$，

$\therefore\angle BMC=\angle DEA$，

在ΔBCM和ΔDAE中，

$$\begin{cases}\angle BCM=\angle DAE\\ \angle BMC=\angle DEA\\ BC=DA\end{cases}，$$

$\therefore\Delta BCM\cong\Delta DAE(AAS)$，

$\therefore CM=AE=16$，

$\therefore AC=AM+CM=24+16=40$.

【点评】本题考查了矩形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、锐角三角函数定

义、勾股定理等知识；熟练掌握矩形的判定与性质是解题的关键．

23．【分析】（1）根据题意直线 $l_1: y=kx+b(k\neq 0)$ 中 $k=3$，把点 $A(2,7)$ 代入即可求得 b，从而求得直线 l_1 的函数表达式；

（2）分两种情况，根据图象即可得到结论．

【解答】解：（1）$\because$ 直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=3x$ 平行，

$\therefore k=3$，

把点 $A(2,7)$ 代入直线 $y=3x+b$ 中，得到 $7=6+b$，

解得 $b=1$，

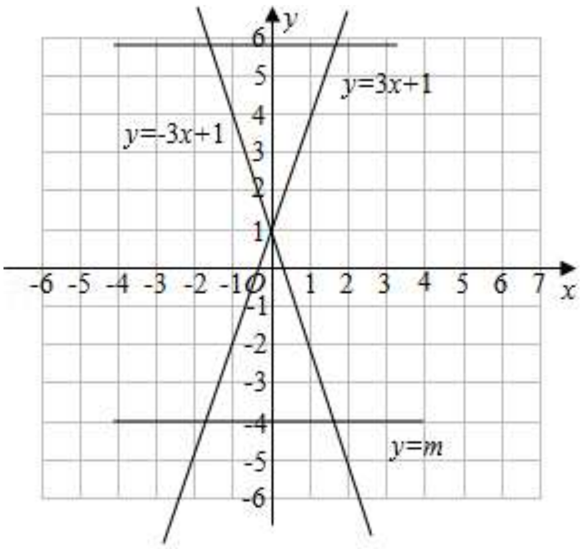
$\therefore$ 直线 l_1 的解析式为 $y=3x+1$；

（2）$\because$ 直线 l_2 与直线 l_1 关于 y 轴对称，

$\therefore$ 直线 l_2 为 $y=-3x+1$，

画出函数图象如图，

结合图象，可得 $-4\leqslant m<-3$ 或 $5<m\leqslant 6$ 时，区域 W 内恰有 6 个整点．

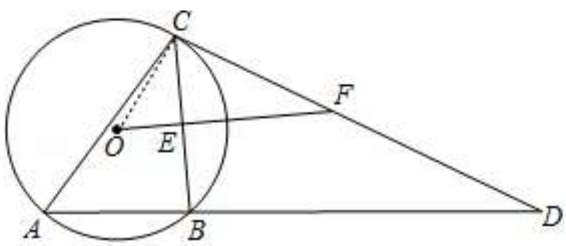


【点评】本题考查了一次函数的图象与几何变换，两条直线平行问题，待定系数法求一次函数的解析式，数形结合是解题的关键．

24．【分析】（1）连接 OC，根据切线的性质可得 $\angle OCF=90^\circ$，再根据垂径定理可得结论；

（2）根据垂径定理可得 $CE=BE=\dfrac{1}{2}BC=3$，结合已知条件可得 $OE=2$，根据勾股定理可得 $OC=\sqrt{13}$，再根据 $\sin\angle OCE=\sin\angle CFE$，即可求出线段 CF 的长．

【解答】（1）证明：如图，连接 OC，



$\because FC$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OC \perp CF$，

$\therefore \angle OCF = 90^\circ$，

$\therefore \angle OFC + \angle COF = 90^\circ$，

$\because OE \perp BC$，

$\therefore \angle COF = \angle A$，

$\therefore \angle A + \angle OFC = 90^\circ$；

（2）解：$\because \angle COF = \angle A$，

$\therefore \tan A = \tan \angle COF = \dfrac{CE}{OE} = \dfrac{3}{2}$，

$\because OE \perp BC$，

$\therefore CE = BE = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2} \times 6 = 3$，

$\therefore OE = 2$，

$\therefore OC = \sqrt{CE^2 + OE^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$，

$\because \angle OCF = \angle CEF = 90^\circ$，

$\therefore \angle FCE + \angle OCE = \angle CFE + \angle FCE = 90^\circ$，

$\therefore \angle OCE = \angle CFE$，

$\therefore \sin \angle OCE = \sin \angle CFE$，

$\therefore \dfrac{OE}{OC} = \dfrac{CE}{CF}$，

$\therefore \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{3}{CF}$，

$\therefore CF = \dfrac{3}{2}\sqrt{13}$．

【点评】此题考查了切线的性质，圆周角定理，勾股定理，垂径定理，解直角三角形．注意准确作出辅助线是解此题的关键．

25．【分析】（1）根据图 a 由大到小数即可得出结论；

（2）根据中位数的定义，可以得到结论；

（3）根据方差体现了某组数据的波动情况，波动越大，方差越大可得出结论；

（4）由图 b 可知，成绩在 80 分以上的有 10 人，总占比 $\dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$，再乘总人数即可得出结论．

【解答】解：（1）小明的成绩是 85，由 a 可知，小明位于第 5 名；

故答案为：5；

（2）$\because$ 抽取的人数为偶数，

$\therefore$ 中位数为中间两个数相加的一半；

$\because 40 \leqslant x < 50$，$50 \leqslant x < 60$，$60 \leqslant x < 70$，$70 \leqslant x < 80$，$80 \leqslant x < 90$，$90 \leqslant x \leqslant 100$ 的人数分别为：3 人，4 人，5 人，8 人，7 人，3 人；

$\therefore$ 中位数是第 15 和第 16 个分数的平均数，

$\therefore$ 中位数为$\frac{1}{2}(74+74)=74$，

故答案为：74；

（3）$\because$ 方差体现了某组数据的波动情况，波动越大，方差越大，

由 a 可知，八年级数据波动最大，九年级波动最小，

$\therefore s_2^2 > s_1^2 > s_3^2$；

（4）由图 b 可知，成绩在 80 分以上的有 10 人，总占比 $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$，

$\therefore 420\times\frac{1}{3}=140$（人），

故答案为：140．

【点评】本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力，涉及中位数，方差，用样本估计总体等知识．利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题．

26．【分析】（1）抛物线的对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$，计算即可；

（2）①将 $x=a$ 代入 $y=-x^2+(2a-2)x-a^2+2a$，计算即可；②若 $y_1=y_2=0$，则 $-x^2+(2a-2)x-a^2+2a=0$，解方程并根据 $x_1<x_2$，即可得出 x_1 的值．

（3）由题意得出 $x_1<-2$，则只需讨论 $x_1<a-1$ 的情况，分两种情况：①当 $a\geqslant -1$ 时，又有两种情况：$x_1<x_2<a-1$，$x_1<a-1<x_2$，分别结合二次函数的性质及 $x_1+x_2<-4$ 计算即可；②当 $a<-1$ 时，令 $x_1=a-1$，$x_2=-2$，此时 $x_1+x_2<-4$，但 $y_1>y_2$，不符合题意．

【解答】解：（1）抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{2(a-1)}{-2}=a-1$；

（2）①当 $x=a$ 时，$y=-a^2+(2a-2)a-a^2+2a$

$=-a^2+2a^2-2a-a^2+2a$

$=0$；

②当 $y_1=y_2=0$ 时，$-x^2+(2a-2)x-a^2+2a=0$，

$\therefore x^2-(2a-2)x+a^2-2a=0$，

$\therefore (x-a+2)(x-a)=0$，

$\because x_1<x_2$，

$\therefore x_1=a-2$；

（3）方法一、①当 $a\geqslant -1$ 时，

$\because x_1<x_2$，$x_1+x_2<-4$，

$\therefore x_1<-2$，只需讨论 $x_1<a-1$ 的情况．

若 $x_1<x_2<a-1$，

$\because x<a-1$ 时，y 随着 x 的增大而增大，

$\therefore y_1<y_2$，符合题意；

若 $x_1 < a-1 < x_2$，

$\because a-1 \geqslant -2$，

$\therefore 2(a-1) \geqslant -4$，

$\because x_1 + x_2 < -4$，

$\therefore x_1 + x_2 < 2(a-1)$.

$\therefore x_1 < 2(a-1) - x_2$.

$\because x = 2(a-1) - x_2$ 时， $y_1 = y_2$， $x < a-1$ 时， y 随着 x 的增大而增大，

$\therefore y_1 < y_2$，符合题意.

②当 $a < -1$ 时，令 $x_1 = a-1$， $x_2 = -2$，此时 $x_1 + x_2 < -4$，但 $y_1 > y_2$，不符合题意；

综上所述， a 的取值范围是 $a \geqslant -1$.

方法二、

$y_1 - y_2 = -x_1^2 + (2a-2)x_1 + x_2^2 - (2a-2)x_2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (2a-2)(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(2a-2-x_1-x_2) < 0$，

$\because 2a-2 > x_1 + x_2$，

$\therefore x_1 + x_2 < -4$，

$\therefore 2a-2 \geqslant -4$，

$\therefore a \geqslant -1$.

【点评】本题考查了二次函数的图象与系数的关系、二次函数图象上的点的坐标特点、二次函数与一元二次方程的关系及一元一次不等式等知识点，熟练掌握二次函数图象上的点的坐标特点及二次函数的性质是解题的关键.

27.【分析】(1) ①证明 $PQ = PA = PB$，可得结论.

②图形如图所示：结论： $PC = \sqrt{3}PA$. 证明 $\angle APC = 90^\circ$，可得结论.

(2) ①如图 2 中，连接 BC， CQ . 证明 B， P， Q， C 四点共圆，推出 $\angle CPB = \angle CQB = \angle AQB$，由 $\angle APC + \angle CPB = 180^\circ$，推出 $\angle PAQ + \angle PDQ = 180^\circ$，推出 $\angle PDQ = 120^\circ$，推出 $\angle DQP + \angle DPQ = 60^\circ$，可得结论.

②如图 $2-1$ 中，结论： $CD = DP + DQ$. 连接 AD，在 AD 上取一点 T，使得 $DT = DP$. 利用全等三角形的性质解决问题即可.

【解答】解：(1) ①$\because P$， Q 关于 AN 对称，

$\therefore AP = AQ$， $\angle PAN = \angle QAN = 30^\circ$，

$\therefore \Delta APQ$ 是等边三角形，

$\therefore PQ = PA$，

$\because$ 点 P 为线段 AB 的中点，

$\therefore PB = PA$，

$\therefore PQ = PA = PB$，

$\therefore \angle AQB = 90^\circ$.

②图形如图所示：结论：$PC=\sqrt{3}PA$.

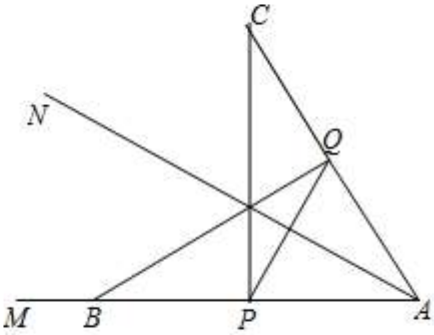


图1

理由：$\because \angle AQB=90^{\circ}$， A， C 关于 BQ 对称，

$\therefore AQ=QC$ ，

$\therefore PQ=QC=AQ$ ，

$\therefore \angle CPA=60^{\circ}$ ，

$\therefore \dfrac{PC}{PA}=\tan 60^{\circ}$ ，

$\therefore PC=\sqrt{3}PA$.

（2）①如图 2 中，连接 BC ， CQ .

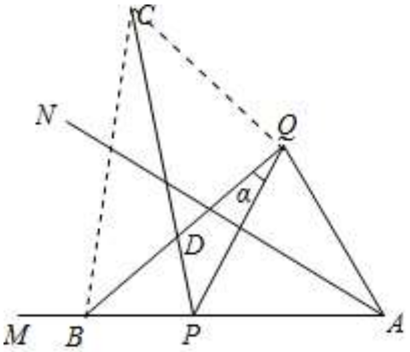


图2

$\because A$， C 关于 BQ 对称，

$\therefore BC=BA$， $CQ=AQ$ ，

$\because BQ=BQ$ ，

$\therefore \Delta BQC\cong BQA(SSS)$ ，

$\therefore \angle BCQ=\angle BAQ=60^{\circ}$， $\angle BQC=\angle BQA$ ，

$\because \angle APQ=60^{\circ}$ ，

$\therefore \angle BPQ=120^{\circ}$ ，

$\therefore \angle BPQ+\angle BCQ=180^{\circ}$ ，

$\therefore B$， P， Q， C 四点共圆，

$\therefore \angle CPB=\angle CQB=\angle AQB$ ，

$\because \angle APC+\angle CPB=180^{\circ}$ ，

$\therefore \angle PAQ+\angle PDQ=180^\circ$，

$\therefore \angle PDQ=120^\circ$，

$\therefore \angle DQP+\angle DPQ=60^\circ$，

$\therefore \angle CPQ=60^\circ-\alpha$.

②如图$2-1$中，结论：$CD=DP+DQ$.

理由：连接AD，在AD上取一点T，使得$DT=DP$.

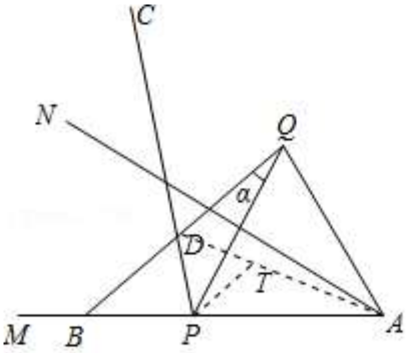


图2-1

$\because \angle PAQ+\angle PDQ=180^\circ$，

$\therefore A$，P，D，Q四点共圆，

$\therefore \angle PDT=\angle PQA=60^\circ$，

$\because DT=DP$，

$\therefore \Delta PDT$是等边三角形，

$\therefore PD=PT$，$\angle DPT=\angle QPA=60^\circ$，

$\therefore \angle DPQ=\angle TPA$，

$\because PD=PT$，$PQ=PA$，

$\therefore \Delta DPQ\cong \Delta TPA(SAS)$，

$\therefore DQ=TA$，

$\therefore AD=DT+AT=PD+DQ$，

$\because A$，C关于BQ对称，

$\therefore DC=AD$，

$\therefore CD=DP+DQ$.

【点评】本题属于几何变换综合题，考查了等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，四点共圆等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

28.【分析】(1）线段MN到正方形$ABCD$的“平移距离”的定义解决问题即可.

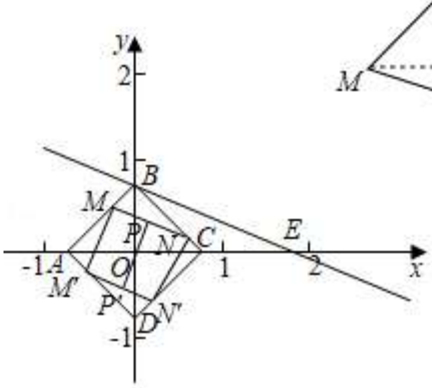
（2）如图2中，当M，N分别在AB，BC上时，d_1存在最小值，最小值等于点B到MN的距离.

（3）当MN与BC重合时，BC的中点为K，此时线段MN到正方形$ABCD$的“平移距离”为d_2的值最小，当MN与AB重合时，AB的中点为T，此时线段MN到正方形$ABCD$的“平移距离”为d_2的值最大.

【解答】解：（1）由题意，$M_1N_1//M_2N_2$，连接点 P 与点 P_1 的线段的长度是等于线段 MN 到正方形 $ABCD$ 的“平移距离”.

故答案为：$M_1N_1//M_2N_2$，P_1.

（2）如图 2 中，当 M，N 分别在 AB，BC 上时，d_1 存在最小值，最小值等于点 B 到 MN 的距离.



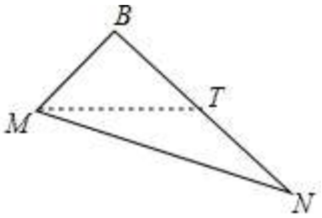


图 2

$\because A(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}，0)$，$B(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$C(\dfrac{\sqrt{2}}{2}，0)$，$D(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

$\therefore OA=OC=OB=OD$，

$\because AC\perp BD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$BC=\sqrt{2}OB=1$，

$\because E(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1，0)$，

$\therefore EC=1$，

$\therefore BC=EC$，

$\therefore \angle CBE=\angle CEB$，

$\because \angle OCB=45^\circ=\angle CBE+\angle CEB$，

$\therefore \angle CBE=\angle CEB=22.5^\circ$，

$\because MN//BE$，

$\therefore \angle BNM=\angle CBE=22.5^\circ$，

在 RtΔBMN 中，在 BN 上取一点 T，使得 $BM=BT$，则 $\angle BMT=\angle BTM=45^\circ$，

$\because \angle BTM=\angle TMN+\angle N=45^\circ$，

$\therefore \angle N=\angle TMN=22.5^\circ$，

$\therefore TM=TN$，

设 $BM=BT=x$，则 $TM=TN=\sqrt{2}x$，

$\because MN=1$，

$\therefore x^2+(x+\sqrt{2}x)^2=1^2$，

$\therefore x^2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore$点 B 到直线 MN 的距离 $=\dfrac{BM\cdot BN}{MN}=x(x+\sqrt{2}x)=(1+\sqrt{2})x^2=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．

（3）如图 3 中，

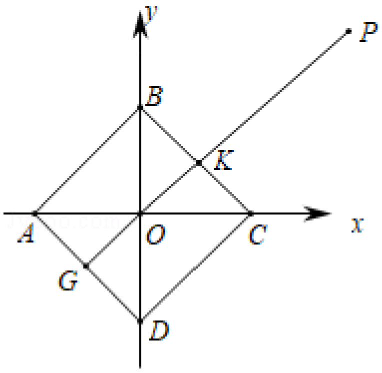


图3

当 MN 与 BC 重合时，BC 的中点为 K，此时线段 MN 到正方形 $ABCD$ 的“平移距离”为 d_2 的值最小，最小值 $=PK=2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$，

当 MN 与 GK 重合时，GK 的中点为 O，此时线段 MN 到正方形 $ABCD$ 的“平移距离”为 d_2 的值最大，最大值 $=PO=2\sqrt{2}$，

综上所述，$2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\leqslant d_2\leqslant 2\sqrt{2}$．

【点评】本题属于四边形综合题，考查了正方形的判定和性质，解直角三角形等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考压轴题。