2022 北京燕山初三一模

数　　学

2022.4

考生须知：

1.本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题．满分 100 分．考试试卷 120 分钟．

2.在试卷和草稿纸上准确填写姓名、准考证号、考场号和座位号．

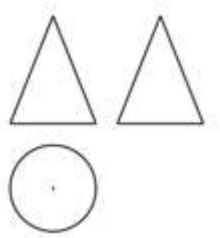
3.试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．

4.在答题卡上，选择题、作图题用 2*B* 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答．

5.考试结束，将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回．

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1. 下图是某几何体　三视图，该几何体是（　）

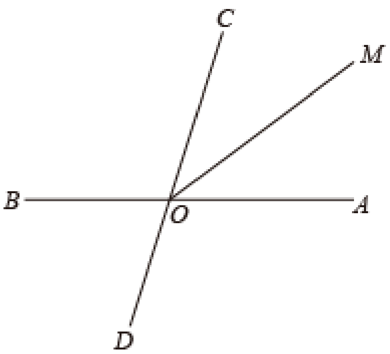


A. 圆锥　　B. 圆柱　　C. 三棱锥　　D. 长方体

2. 小云同学在“百度”搜索引擎中输入“北京 2022 冬奥会”，能找到相关结果约为 42500000 个，将 42500000 用科学记数法表示应为（　）

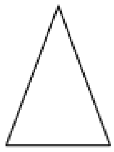
A. 0.425×10^{8}　　B. 4.25×10^{7}　　C. 4.25×10^{6}　　D. 42.5×10^{5}

3. 如图，直线 AB，CD 交于点 O．射线 OM 平分 $\angle AOC$，若 $\angle BOD=72°$，则 $\angle BOM$ 等于（　）

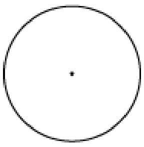


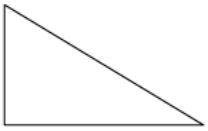
A. $36°$　　B. $108°$　　C. $126°$　　D. $144°$

4. 下列图形中，既是中心对称图形也是轴对称图形的是（　）

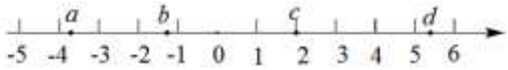
A. 

B. 

C. 

D. 

5. 实数 a，b，c，d 在数轴上　对应点的位置如图所示，则正确的结论是（　）



A. $b+c>0$　　　　B. $bd>0$　　　　C. $|a|>|d|$　　　　D. $a<-4$

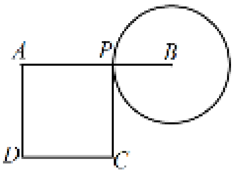
6. 如图，有 5 张形状、大小、质地均相同的卡片，正面分别印有北京冬奥会的会徽、吉祥物（冰墩墩）、主题口号和奖牌等四种不同的图案，背面完全相同．现将这 5 张卡片洗匀后正面向下放在桌子上，从中随机抽取一张，抽出的卡片正面图案恰好是奖牌的概率是（　）


A. $\frac{1}{5}$　　　　B. $\frac{2}{5}$　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{3}{5}$

7. 已知 $43^2=1849$，$44^2=1936$，$45^2=2025$，$46^2=2116$．若 n 为整数且 $n<\sqrt{2022}<n+1$，则 n 的值为（　）

A. 43　　　　B. 44　　　　C. 45　　　　D. 46

8. 线段 $AB=5$．动点以每秒 1 个单位长度的速度从点出发，沿线段 AB 运动至点 B，以线段 AP 为边作正方形 $APCD$，线段 PB 长为半径作圆．设点的运动时间为 t，正方形 $APCD$ 周长为 y，$\odot B$ 的面积为 S，则 y 与 t，S 与 t 满足的函数关系分别是（　）



A. 正比例函数关系，一次函数关系　　　　B. 一次函数关系，正比例函数关系

C. 正比例函数关系，二次函数关系　　　　D. 反比例函数关系，二次函数关系

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 若代数式 $\frac{1}{x-1}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是__________.

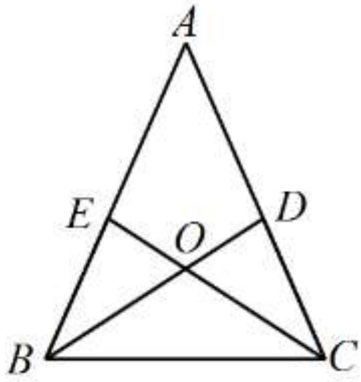
10. 分解因式：$4x^2-9y^2$=________________.

11. 写出一个比 $\sqrt{2}$ 大且比 π 小的整数是____________.

12. 方程组 $\begin{cases}x+y=6\\2x-y=3\end{cases}$ 的解为_________

13. 在直角坐标系 xOy 中，直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}\left(m\neq 0\right)$ 交于 A， B 两点．若点 A， B 的横坐标分别为 x_1， x_2，则 x_1+x_2 的值为____________．

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别 AC 、 AB 上的点， BD 与 CE 交于点 O．给出下列三个条件：① $\angle EBO=\angle DCO$；② $\angle BEO=\angle CDO$；③ $BE=CD$．利用其中两个条件可以证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，这两个条件可以是____________．



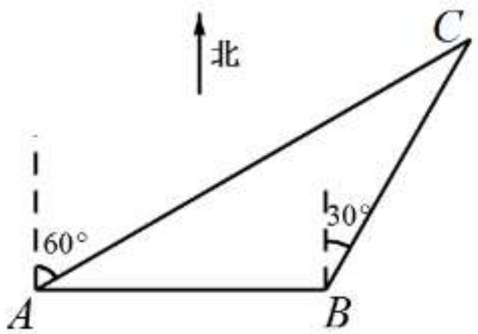
15. $A\left(a,0\right),B\left(5,3\right)$ 是平面直角坐标系中的两点，线段 AB 长度的最小值为____________．

16. 甲、乙、丙三人进行羽毛球比赛赛前训练，每局两人进行比赛，第三个人做裁判，每一局都要分出胜负，胜方和原来的裁判进行新一局的比赛，输方转做裁判，依次进行．半天训练结束时，发现甲共当裁判 9 局，乙、丙分别进行了 14 局、12 局比赛，在这半天的训练中，甲、乙、丙三人共进行了_______局比赛，其中最后一局比赛的裁判是_______．

三、解答题（本题共 68 分，第 17－23 题，每小题 5 分，第 24－25 每小题 6 分，第 26－28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

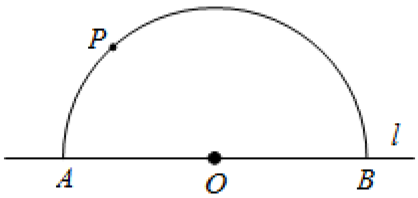
17. 计算： $3\tan30°-\tan^{2}45°+2\sin60°$

18. 疫情防控过程中，很多志愿者走进社区参加活动．如图所示，小冬老师从 A 处出发，要到 A 地北偏东 $60°$ 方向的 C 处，他先沿正东方向走了 200m 到达 B 处，再沿北偏东 $30°$ 方向走，恰能到达目的地 C 处，求 A，C 两地的距离．（结果取整数，参考数据： $\sqrt{2}\approx1.414,\sqrt{3}\approx1.732$ ）



19. 已知：如图，直线 l，和直线外一点 P．

求作：过点 P 作直线 PC，使得 $PC\mathbin{/\!/}l$，



作法：①在直线 l 上取点 O，以点 O 为圆心，OP 长为半径画圆，交直线 l 于 A，B 两点；

②连接 AP，以点 B 为圆心，AP 长为半径画弧，交半圆于点 C；

③作直线 PC.

直线 PC 即为所求作.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明：

证明：连接 BP.

∵ $BC=AP$，

∴ $BC=$______.

∴ $\angle ABP=\angle BPC$（______）（填推理依据）.

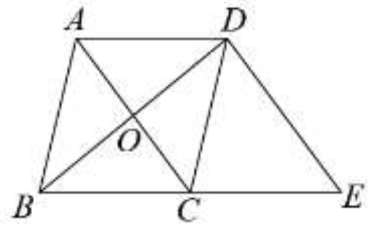
∴直线 $PC\parallel$ 直线 l.

20. 已知关于 x 的方程 $x^2+2x+k=0$ 总有两个不相等的实数根.

（1）求 k　取值范围；

（2）写出一个 k 的值，并求此时方程的根.

21. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 D 作 $DE\perp BD$ 交 BC 的延长线于点 E.



（1）求证：四边形 $ACED$　平行四边形；

（2）若 $BD=4$， $AC=3$，求 $\sin\angle CDE$ 的值.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象由函数 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象向上平移 3 个单位长度得到.

（1）求这个一次函数的解析式；

（2）当 $x>2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx(m\neq 0)$ 的值大于一次函数 $y=kx+b$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

23. 农业农村经济在国民经济中占有重要地位，科技兴农、为促进乡村产业振兴提供有力支撑．为了解甲、乙两种新品猕猴桃的质量，进行了抽样调查．在相同条件下，随机抽取了甲、乙各 25 份样品，对大小、甜度等各方面进行了综合测评，并对数据进行收集、整理、描述和分析，下面给出了部分信息．

a．测评分数（百分制）如下：

甲 77　79　80　80　85　86　86　87　88　89　89　90　91

91　91　91　91　92　93　95　95　96　97　98　98

乙 69　87　79　79　86　79　87　89　90　89　90　90　90

91　90　92　92　94　92　95　96　96　97　98　98

b．按如下分组整理、描述这两组样本数据：

	$60 \le x < 70$	$70 \le x < 80$	$80 \le x < 90$	$90 \le x \le 100$
甲	0	a	9	14
乙	1	3	b	16

注：分数 90 分及以上为优秀，80~89 分为合格，80 分以下为不合格．

c．甲、乙两种猕猴桃测评分数的平均数、众数、中位数如下表所示：

品种	平均数	众数	中位数
甲	89 4	91	d
乙	89.4	c	90

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 a，b，c，d 的值；

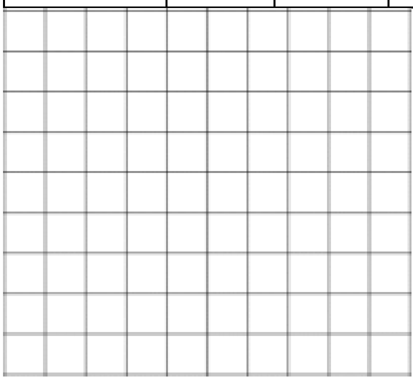
（2）记甲种猕猴桃测评分数的方差为 S_1^2，乙种猕猴桃测评分数的方差为 S_2^2，则 S_1^2，S_2^2 的大小关系为

____________；

（3）根据抽样调查情况，可以推断____________种猕猴桃的质量较好，理由为____________．（至少从两个不同的角度说明推断的合理性）

24. 某景观公园内人工湖里有一组小型喷泉，水柱从垂直于湖面的水枪喷出，水柱落于湖面的路径形状是抛物线．现测量出如下数据，在湖面上距水枪水平距离为 d 米的位置，水柱距离湖面高度为 h 米．

d（米）	0.5	1.0	2.0	3.0	3.5	4.5	…
h（米）	1.6	2.1	2.5	2.1	m	0	…



请解决以下问题：

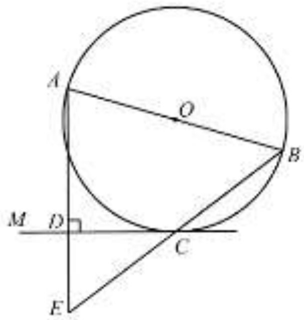
（1）以水枪与湖面交点为原点，原点与水柱落地处所在直线为 x 轴，水枪所在直线为 y 轴，在下边网格中建立平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接．

（2）请结合表中所给数据或所画图象，写出水柱最高点的坐标．

（3）湖面上距水枪水平距离为3.5米时，水柱距离湖面的高度$m=$____________米．

（4）现公园想通过喷泉设立新的游玩项目，准备通过调节水枪高度，使得公园湖中的游船能从喷泉下方通过．游船左右两边缘最宽处有一个长方体形状的遮阳棚，若游船宽（指船的最大宽度）为2米，从水面到棚顶的高度为2.1米，要求是游船从喷泉水柱中间通过时，为避免游船被喷泉淋到，顶棚到水柱的垂直距离均不小于0.5米．请问公园该如何调节水枪高度以符合要求？请通过计算说明理由．

25. 如图，AB为$\odot O$的直径，点C在$\odot O$上，过点C作$\odot O$的切线CM，过点A作$AD\perp CM$于点D，交BC的延长线于点E．



（1）求证：$AB=AE$；

（2）若$AB=10$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，求CD的长．

26. 在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y=ax^2+bx+3a\left(a\neq 0\right)$与$x$轴的交点为点$A\ 1,0$和点$B$．

（1）用含a的式子表示b；

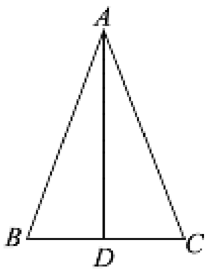
（2）求抛物线的对称轴和点B的坐标；

（3）分别过点$P\left(t,0\right)$和点$Q\left(t+2,0\right)$作x轴的垂线，交抛物线于点M和点N，记抛物线在M，N之间的部分为图象G（包括M，N两点）．记图形G上任意一点的纵坐标的最大值是m，最小值为n．

①当$a=1$时，求$m-n$的最小值；

②若存在实数t，使得$m-n=1$，直接写出a的取值范围．

27. 如图，在三角形ABC中，$AB=AC$，$\angle BAC<60^\circ$，AD是BC边的高线，将线段AC绕点A逆时针旋转60°得到线段AE，连接BE交AD于点F．

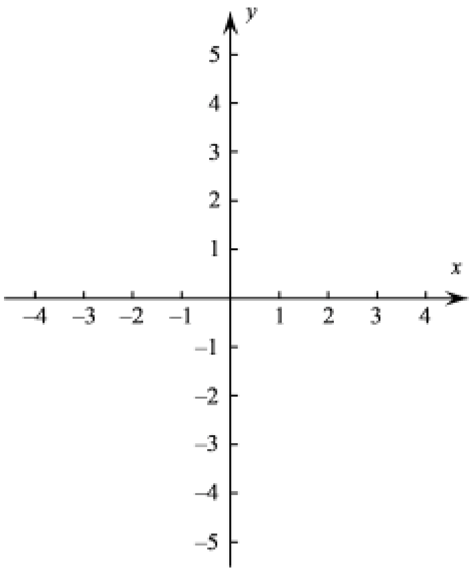


（1）依题意补全图形，写出$\angle CAE=$____________°

（2）求$\angle BAF+\angle ABF$和$\angle FBC$的度数；

（3）用等式表示线段AF，BF，EF之间的数量关系，并证明．

28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的线段 PQ，给出如下定义：若存在 $\triangle PQR$ 使得 $S_{\triangle PQR}=PQ^2$，则称 $\triangle PQR$ 为线段 PQ 的"等幂三角形"，点 R 称为线段 PQ 的"等幂点".



（1）已知 $A(2,0)$.

①在点 $P_1(2,4), P_2(1,2), P_3(-4,1), P_4(1,-4)$ 中，线段 OA 的"等幂点"是____________；

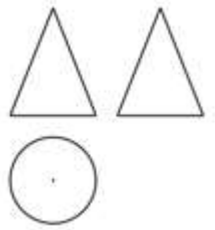
②若存在等腰 $\triangle OAB$ 是线段 OA 的"等幂三角形"，求点 B 的坐标；

（2）已知点 C 的坐标为 $C(2,-1)$，点 D 在直线 $y=x-3$ 上，记图形 M 为以点 $T(1,0)$ 为圆心，2 为半径的 $\odot T$ 位于 x 轴上方的部分．若图形 M 上存在点 E，使得线段 CD 的"等幂三角形" $\triangle CDE$ 为锐角三角形，直接写出点 D 的横坐标 x_D 的取值范围.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 下图是某几何体的三视图，该几何体是（   ）



A. 圆锥　　B. 圆柱　　C. 三棱锥　　D. 长方体

【答案】A

【解析】

【分析】根据几何体的三视图，对各个选项进行分析即可得到答案.

【详解】根据主视图是三角形可知，圆柱、三棱锥、长方体不符合要求

根据几何体的三视图，可得该几何体为圆锥

故选：A.

【点睛】本题考查的是几何体的三视图，掌握主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形是解题的关键.

2. 小云同学在“百度”搜索引擎中输入“北京 2022 冬奥会”，能找到相关结果约为 42500000 个，将 42500000 用科学记数法表示应为（   ）

A. 0.425×10^{8}　　B. 4.25×10^{7}　　C. 4.25×10^{6}　　D. 42.5×10^{5}

【答案】B

【解析】

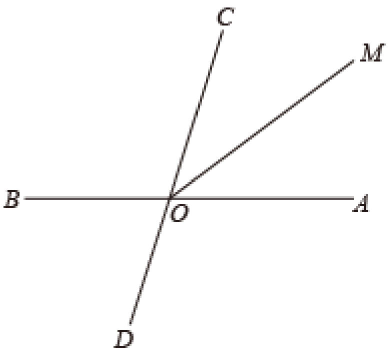
【分析】科学计数法：用科学记数法表示较大的数时，注意 $a\times10^{n}$ 中 a 的范围是 $1\le a<10$，n 是正整数，n 与原数的整数部分的位数 m 的关系是 $m-1=n$，反过来由用科学记数法表示的数写出原数时，原数的整数部分的数位 m 比 10 的指数大 1．（即 $m=n+1$）

【详解】解：$42500000=4.25\times10^{7}$

故选 B

【点睛】本题考查科学技术法的应用，掌握其写法是关键.

3. 如图，直线 AB，CD 交于点 O．射线 OM 平分 $\angle AOC$，若 $\angle BOD=72^\circ$，则 $\angle BOM$ 等于（   ）



A. 36°　　B. 108°　　C. 126°　　D. 144°

【答案】D

【解析】

【分析】根据对顶角求得$\angle COM$，根据角平分线的意义求得$\angle AOM$，根据邻补角即可求解.

【详解】解：∵ $\angle BOD=72°$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOD=72°$，

∵射线OM平分$\angle AOC$，

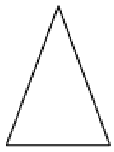
$\therefore \angle AOM=\angle COM=\frac{1}{2}\angle AOC=36°$.

$\therefore \angle BOM=180°-\angle AOM=144°$.

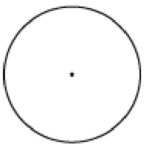
故选 D.

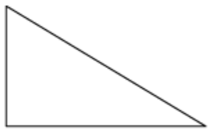
【点睛】本题考查了对顶角相等，角平分线的意义，求一个角的邻补角，数形结合是解题的关键.

4. 下列图形中，既是中心对称图形也是轴对称图形的是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【详解】解：A、等腰三角形是轴对称图形，但不是中心对称图形，不符合题意；

B、平行四边形不是轴对称图形，是中心对称图形，不符合题意；

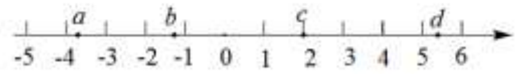
C、圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，符合题意；

D、直角三角形既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查中心对称图形和轴对称图形的知识，关键是掌握好中心对称图形与轴对称图形的概念；轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，图形旋转180°后与原图重合．

5. 实数 a，b，c，d 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是（　）



A. $b+c>0$　　B. $bd>0$　　C. $|a|>|d|$　　D. $a<-4$

【答案】A

【解析】

【分析】根据数轴上点的位置关系，可得 a，b，c，d 的大小，根据有理数的运算，绝对值的性质，可得答案．

【详解】解：由数轴上点的位置，得－4＜a＜b＜0＜c＜5＜d．

A、b+c>0，故 A 符合题意；

B、bd＜0，故 B 不符合题意；

C、$|a|$＜$|d|$，故 C 不符合题意；

D、a＞-4，故 D 不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题考查了实数与数轴以及绝对值，观察数轴，能根据点的位置判断点对应的数的大小是解题关键．

6. 如图，有 5 张形状、大小、质地均相同的卡片，正面分别印有北京冬奥会的会徽、吉祥物（冰墩墩）、主题口号和奖牌等四种不同的图案，背面完全相同．现将这 5 张卡片洗匀后正面向下放在桌子上，从中随机抽取一张，抽出的卡片正面图案恰好是奖牌的概率是（　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用概率公式求解即可．

【详解】解：∵随机抽取一张卡片有 5 种等可能结果，其中抽出的卡片正面图案恰好是奖牌结果有 2 种，

∴抽出的卡片正面图案恰好是奖牌的概率是：$\frac{2}{5}$．

故选：B

【点睛】本题考查概率公式，解题的关键是利用概率的定义求事件概率．

7. 已知 $43^2=1849$，$44^2=1936$，$45^2=2025$，$46^2=2116$．若 n 为整数且 $n<\sqrt{2022}<n+1$，则 n 的值为（　）

A. 43　　B. 44　　C. 45　　D. 46

【答案】B

【解析】

【分析】由已知条件的提示可得$\sqrt{44^2}<\sqrt{2022}<\sqrt{45^2}$，即得出$44<\sqrt{2022}<44+1$．再根据$n<\sqrt{2022}<n+1$，且$n$为整数，即可得出答案．

【详解】$\because 1936<2022<2025$，

$\therefore \sqrt{44^2}<\sqrt{2022}<\sqrt{45^2}$，即$44<\sqrt{2022}<44+1$．

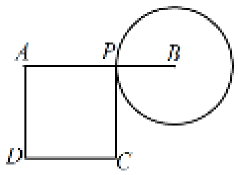
$\because n<\sqrt{2022}<n+1$，$n$为整数．

$\therefore n=44$．

故选B．

【点睛】本题考查的是无理数的估算，掌握无理数的估算方法是解题的关键.

8. 线段$AB=5$．动点以每秒1个单位长度的速度从点出发，沿线段AB运动至点B，以线段AP为边作正方形$APCD$，线段PB长为半径作圆．设点的运动时间为t，正方形$APCD$周长为y，$\odot B$的面积为S，则y与t，S与t满足的函数关系分别是（　）



A. 正比例函数关系，一次函数关系　　B. 一次函数关系，正比例函数关系

C. 正比例函数关系，二次函数关系　　D. 反比例函数关系，二次函数关系

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意分别列出与，与的函数关系，进而进行判断即可．

【详解】解：依题意：$AP=t$，$BP=5-t$,

故$y=4t$，$S=(5-t)^2$

故选择：C

【点睛】本题考查了列函数表达式，正比例函数与二次函数的识别，根据题意列出函数表达式是解题的关键．

二、填空题（本题共16分，每小题2分）

9. 若代数式$\dfrac{1}{x-1}$有意义，则实数x的取值范围是__________.

【答案】$x\neq 1$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件即可求得.

详解】解：$\because$代数式$\dfrac{1}{x-1}$有意义，

$\therefore x-1\neq 0$，

解得$x\neq 1$，

故答案为：$x\neq 1$．

【点睛】本题考查了分式有意义的条件，熟练掌握和运用分式有意义的条件是解决本题的关键．

10. 分解因式：$4x^2-9y^2=$________________．

【答案】（$2x+3y$）（$2x-3y$）

【解析】

【详解】解：原式=（$2x+3y$）（$2x-3y$）．

故答案为：$2x+3y\quad 2x-3y$

11. 写出一个比$\sqrt{2}$大且比π小的整数是____________．

【答案】2##3

【解析】

【分析】根据实数的估算，进而取值即可．

【详解】解：∵1<$\sqrt{2}$<2，π≈3.14

∴比$\sqrt{2}$大且比π小的整数有 2，3

故答案为：2（故答案为：3）．

【点睛】本题考查了实数的估算，准确地判断无理数的大小是解决本题的关键．

12. 方程组$\begin{cases}x+y=6\\2x-y=3\end{cases}$的解为_________

【答案】$\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$

【解析】

【分析】根据观察看出用加减法消元较好，把两式相加便可消去 y，解出 x 的值，再把 x 的值代入变形后的式子，即可得到 y 的值．

【详解】解：两式相加得 3x=9

解得：x=3，

把 x=5 代入第一个方程得：y=3，

∴方程组的解为：$\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$.

故答案为：$\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$

【点睛】此题主要考查了二元一次方程组的解法，解题的关键是消元，消元的方法有两种：①加减法消元，②代入法消元．当系数成倍数关系式一般用加减法消元，系数为 1 时，一般用代入法消元．

13. 在直角坐标系xOy中，直线$y=x$与双曲线$y=\dfrac{m}{x}\left(m\neq 0\right)$交于 A，$B$两点．若点 A，$B$的横坐标分别为$x_1$，$x_2$，则$x_1+x_2$的值为____________．

【答案】0

【解析】

【分析】根据“正比例函数与反比例函数的交点关于原点对称”即可求解.

【详解】解：∵正比例函数和反比例函数均关于坐标原点 O 对称，

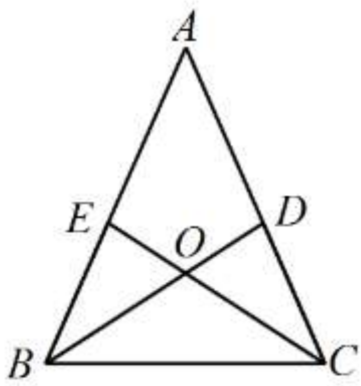
∴正比例函数和反比例函数的交点亦关于坐标原点中心对称，

∴ $x_1+x_2=0$，

故答案为：0.

【点睛】本题考查正比例函数和反比例函数的图像性质，根据正比例函数与反比例函数的交点关于原点对称这个特点即可解题.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别 AC 、 AB 上的点， BD 与 CE 交于点 O．给出下列三个条件：① $\angle EBO=\angle DCO$；② $\angle BEO=\angle CDO$；③ $BE=CD$．利用其中两个条件可以证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，这两个条件可以是____________.



【答案】①③或②③

【解析】

【分析】根据全等三角形和等腰三角形的性质分析，即可得到答案.

【详解】当 $\angle EBO=\angle DCO$ 、 $BE=CD$ 时

在 $\triangle OEB$ 和 $\triangle ODC$ 中

$$\begin{cases}\angle EOB=\angle DOC\\ \angle EBO=\angle DCO\\ BE=CD\end{cases}$$

∴ $\triangle OEB\cong\triangle ODC(AAS)$

∴ $OB=OC$， $OE=OD$

∵ $CE=OE+OC$， $BD=OD+OB$

∴ $CE=BD$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ABD$ 中

$$\begin{cases}\angle A=\angle A\\ \angle DCO=\angle EBO\\ CE=BD\end{cases}$$

$\triangle ACE\cong\triangle ABD$

$\therefore AC = AB$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形，即①③可以证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形；

当 $\angle BEO = \angle CDO$ 、 $BE = CD$ 时

在 $\triangle OEB$ 和 $\triangle ODC$ 中

$$\begin{cases} \angle EOB = \angle DOC \\ \angle OEB = \angle ODC \\ BE = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle OEB \cong \triangle ODC\left(AAS\right)$

$\therefore OB = OC$ ， $OE = OD$ ， $\angle OBE = \angle OCD$

$\because CE = OE + OC$ ， $BD = OD + OB$

$\therefore CE = BD$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle ABD$ 中

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ \angle OCD = \angle OBE \\ CE = BD \end{cases}$$

$\triangle ACE \cong \triangle ABD$

$\therefore AC = AB$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形，即②③可以证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形；

故答案为：①③或②③．

【点睛】本题考查了全等三角形、等腰三角形的知识；解题的关键是熟练掌握全等三角形、等腰三角形的性质，从而完成求解．

15. $A\left(a,0\right), B\left(5,3\right)$ 是平面直角坐标系中的两点，线段 AB 长度的最小值为____________．

【答案】3

【解析】

【分析】根据两点之间的距离公式即可求解．

【详解】解：$\because A$（a，0），B（5，3），

$\therefore AB = \sqrt{\left(5-a\right)^2 + \left(3-0\right)^2} = \sqrt{\left(5-a\right)^2 + 9}$ ，

当 $5-a=0$ ，即 $a=5$ 时，线段 AB 的长度的值最小，

此时 $AB=3$ ，

故答案为：3．

【点睛】本题考查了坐标系中求两点间的距离，熟练掌握上两点间的距离公式是解题关键．

16. 甲、乙、丙三人进行羽毛球比赛赛前训练，每局两人进行比赛，第三个人做裁判，每一局都要分出胜负，胜方和原来的裁判进行新一局的比赛，输方转做裁判，依次进行．半天训练结束时，发现甲共当裁判 9 局，乙、丙分别进行了 14 局、12 局比赛，在这半天的训练中，甲、乙、丙三人共进行了_______局比赛，其中最后一局比赛的裁判是_______．

【答案】 ①. 17 ②. 甲

【解析】

【分析】先确定了乙与丙打了9局，甲与丙打了3局，乙与甲打了5局，进而确定三人一共打的局数，可推导出甲当裁判9局，乙当裁判3局，丙当裁判5局，甲当裁判的局次只能是1，3，5，…15，17，由此能求出结果，即可得到答案．

【详解】解：∵甲当了9局裁判，

∴乙、丙之间打了9局，

又∵乙、丙分别共打了14局、12局，

∴乙与甲打了$14-9=5$局，丙与甲打了$12-9=3$局，

∴甲、乙、丙三人共打了$9+5+3=17$局，

又∵甲当了9局裁判，而从1到17共9个奇数，8个偶数，

∴甲当裁判的局为奇数局，

∴最后一局比赛的裁判是：甲，

故答案为：17，甲．

【点睛】本题考查推理与论证，解本题关键根据题目提供的特征和数据，分析其存在的规律和方法，并递推出相关的关系式，从而解决问题．

三、解答题（本题共68分，第17－23题，每小题5分，第24－25每小题6分，第26－28题，每小题7分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17. 计算：$3\tan30°-\tan^{2}45°+2\sin60°$

【答案】$2\sqrt{3}-1$

【解析】

【分析】利用锐角三角函数值，代入计算即可．

【详解】解：$3\tan30°-\tan^{2}45°+2\sin60°$

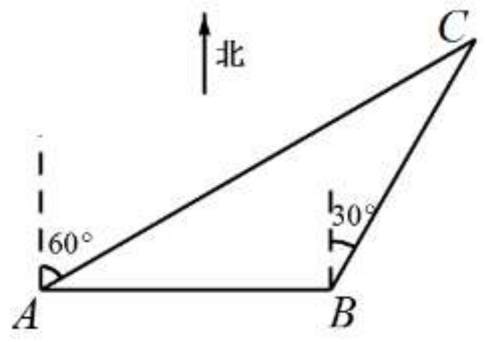
$=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}-1^{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}-1+\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-1$

【点睛】本题考查三角函数的混合运算，熟练地掌握特殊角的三角函数值是解决本题的关键．

18. 疫情防控过程中，很多志愿者走进社区参加活动．如图所示，小冬老师从A处出发，要到A地北偏东$60°$方向的C处，他先沿正东方向走了200m到达B处，再沿北偏东$30°$方向走，恰能到达目的地C处，求A，C两地的距离．（结果取整数，参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414,\sqrt{3}\approx1.732$）



【答案】346m

【解析】

【分析】过点 C 作垂线交 AB 延长线于点 D，先证明 $AB=CB=200$，再由含 30°角的直角三角形的性质得出 $BD=100$，则 $DC=100\sqrt{3}$，再根据含 30°角的直角三角形的性质求解即可.

【详解】解：$\because \angle ABC=120^{\circ}$

$\therefore \angle CAB=\angle ACB=30^{\circ}$

$\therefore AB=CB=200$

过点 C 作垂线交 AB 延长线于点 D，

$\therefore \angle BCD=30^{\circ}$.

在 $Rt\triangle BDC$ 中，$CB=200$

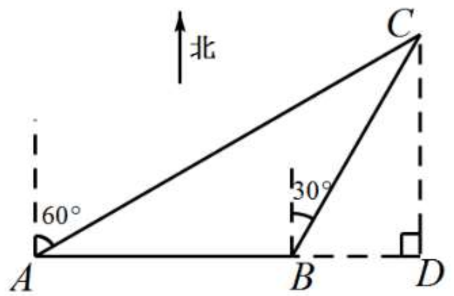
$\therefore BD=100$

$\therefore DC=100\sqrt{3}$

又在 $Rt\triangle DCA$ 中，$\angle ACB=30^{\circ}$.

$\therefore AC=200\sqrt{3}\approx 346$

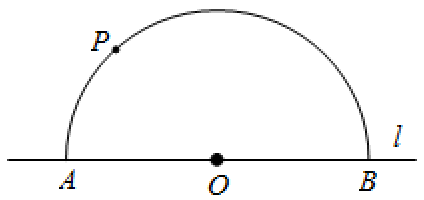
$\therefore A$，C 两地的距离是 346m .



【点睛】本题考查了解直角三角形的应用-方向角问题，正确理解题意并作出辅助线是解题的关键.

19. 已知：如图，直线 l，和直线外一点 P.

求作：过点 P 作直线 PC，使得 $PC\parallel l$，



作法：①在直线 l 上取点 O，以点 O 为圆心，OP 长为半径画圆，交直线 l 于 A，B 两点；

②连接 AP，以点 B 为圆心，AP 长为半径画弧，交半圆于点 C；

③作直线 PC.

直线 PC 即为所求作.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明：

证明：连接 BP.

∵ $BC=AP$，

∴ $BC=$______.

∴ $\angle ABP=\angle BPC$（______）（填推理依据）.

∴直线 $PC\parallel$ 直线 l.

【答案】（1）见解析　（2）PA，同弧或等弧所对的圆周角相等

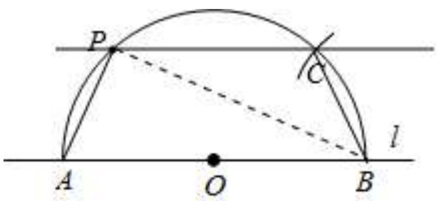
【解析】

【分析】（1）根据所给作法进行尺规作图即可得；

（2）根据圆周角定理进行解答即可得.

【小问 1 详解】

解：如图，直线 PC 即为所求作.



【小问 2 详解】

证明：连接 PB.

∵ $BC=AP$，

∴ $BC=AP$，

∴ $\angle ABP=\angle BPC$（同弧或等弧所对的圆周角相等），

∴直线 $PC\parallel$ 直线 l.

故答案为：PA，同弧或等弧所对的圆周角相等.

【点睛】本题考查了尺规作图，圆周角定理，解题的关键是掌握圆周角定理.

20. 已知关于 x 的方程 $x^2+2x+k=0$ 总有两个不相等的实数根.

（1）求 k 的取值范围；

（2）写出一个 k 的值，并求此时方程的根.

【答案】（1）$k<1$

（2）答案不唯一，见解析

【解析】

【分析】（1）根据根的判别式� ＞0，求出 k 的取值范围；

（2）根据（1）中的 k 的取值范围，代入符合要求的 k 值，进而求解.

【小问 1 详解】

解：∵方程总有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta=2^2-4\times1\times k$

$=4-4k>0$，

∴ $k<1$，

∴k的取值范围是 $k<1$；

【小问 2 详解】

答案不唯一

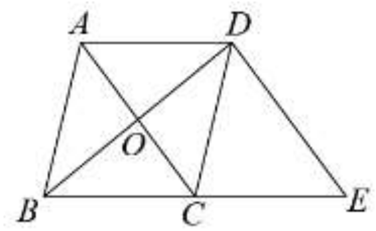
例如：$k=0$时，方程可化为$x^2+2x=0$

$x(x+2)=0$

∴ $x_1=0$， $x_2=-2$

【点睛】本题考查由根的判别式求参数的取值范围，涉及的知识点有一元一次不等式，解一元二次方程，正确地计算是解题的关键.

21. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 D 作 $DE\perp BD$ 交 BC 的延长线于点 E.



（1）求证：四边形 $ACED$ 是平行四边形；

（2）若 $BD=4$， $AC=3$，求$\sin\angle CDE$ 的值.

【答案】（1）见解析 （2）$\dfrac{4}{5}$

【解析】

【分析】（1）由菱形的性质及同位角相等两直线平行，即可证明 $AD\parallel BC$， $AC\parallel DE$，根据平行四边形的判定即可得到结论；

（2）由直角三角形斜边中线等于斜边一半及等边对等角的性质可得 $\angle CDE=\angle E$，再由等角的三角函数值相等进行求解即可.

【小问 1 详解】

证明：∵四边形 $ABCD$ 是菱形

∴ $AD\parallel BC$， $\angle BOC=90^\circ$.

∵ $DE\perp BD$

∴ $\angle BDE=90^\circ$

∴ $\angle BDE=\angle BOC$

∴ $AC\parallel DE$

∴四边形 $ACED$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

解：∵四边形 $ACED$ 是平行四边形

∴ $AD=CE$

∵ $AD=BC$

∴ $BC=CE$

∵ $\angle BDE=90°$

∴ $DC=CE$

∴ $\angle CDE=\angle E$

∵ $BD=4$， $AC=3$， $\angle BDE=90°$

∴ $BE=5$

∴ $\sin\angle E=\dfrac{BD}{BE}=\dfrac{4}{5}$

∴ $\sin\angle CDE=\dfrac{4}{5}$

【点睛】本题考查菱形的性质、平行四边形的判定和性质、平行线的判定、直角三角形的性质、锐角三角函数等知识，解题的关键是熟练掌握平行四边形的判定，学会用转化的思想思考问题.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象由函数 $y=\dfrac{1}{2}x$ 的图象向上平移 3 个单位长度得到.

（1）求这个一次函数的解析式；

（2）当 $x>2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx(m\neq 0)$ 的值大于一次函数 $y=kx+b$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

【答案】（1） $y=\dfrac{1}{2}x+3$

（2） $m\geq 2$

【解析】

【分析】（1）根据一次函数平移的性质分析，即可得到答案；

（2）根据一次函数图像的性质分析，即可得到答案.

【小问 1 详解】

∵一次函数 $y=kx+b\left(k\neq 0\right)$ 的图象由函数 $y=\dfrac{1}{2}x$ 的图象向上平移 3 个单位长度得到

∴ $k=\dfrac{1}{2}$， $b=3$

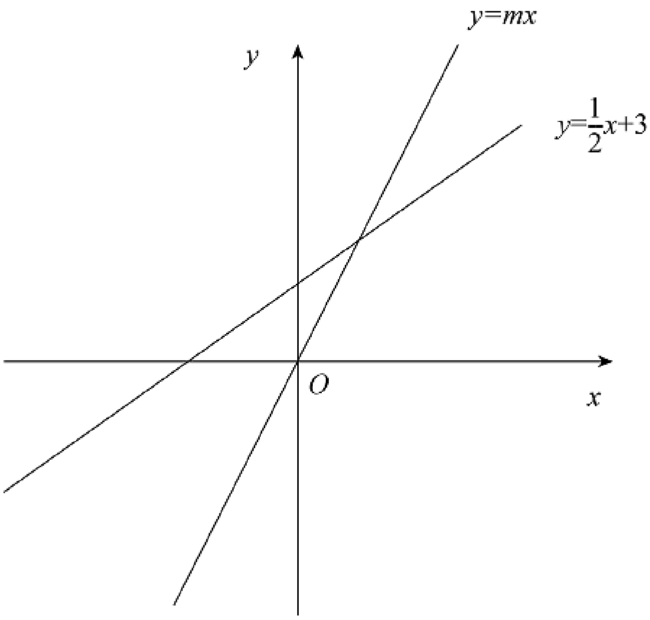
∴这个一次函数的解析式为 $y=\dfrac{1}{2}x+3$；

【小问 2 详解】

假设 $x=2$ 时，$2m=\frac{1}{2}\times 2+3$

$\therefore m=2$

如下图：



$\because$ 当 $x>2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx(m\neq 0)$ 的值大于一次函数 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的值，

$\therefore m$ 的取值范围是 $m\geq 2$.

【点睛】本题考查了一次函数、平移的知识；解题的关键是熟练掌握平移、一次函数图像的性质，从而完成求解.

23. 农业农村经济在国民经济中占有重要地位，科技兴农、为促进乡村产业振兴提供有力支撑．为了解甲、乙两种新品猕猴桃的质量，进行了抽样调查．在相同条件下，随机抽取了甲、乙各 25 份样品，对大小、甜度等各方面进行了综合测评，并对数据进行收集、整理、描述和分析，下面给出了部分信息.

a．测评分数（百分制）如下：

甲 77　79　80　80　85　86　86　87　88　89　89　90　91

91　91　91　91　92　93　95　95　96　97　98　98

乙 69　87　79　79　86　79　87　89　90　89　90　90　90

91　90　92　92　94　92　95　96　96　97　98　98

b．按如下分组整理、描述这两组样本数据：

	$60\leq x<70$	$70\leq x<80$	$80\leq x<90$	$90\leq x\leq 100$
甲	0	a	9	14
乙	1	3	b	16

注：分数 90 分及以上为优秀，80~89 分为合格，80 分以下为不合格.

c．甲、乙两种猕猴桃测评分数的平均数、众数、中位数如下表所示：

品种	平均数	众数	中位数

甲	89.4	91	d
乙	89.4	c	90

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 a，b，c，d 的值；

（2）记甲种猕猴桃测评分数的方差为 S_1^2，乙种猕猴桃测评分数的方差为 S_2^2，则 S_1^2，S_2^2 的大小关系为

____________；

（3）根据抽样调查情况，可以推断____________种猕猴桃的质量较好，理由为____________．（至少从两个不同的角度说明推断的合理性）

【答案】（1）$a=2$，$b=5$，$c=90$，$d=91$

（2）$S_1^2<S_2^2$

（3）甲，理由见解析

【解析】

【分析】（1）根据众数和中位数的定义分别进行解答即可．

（2）按照方差的计算公式，分别计算出甲，乙的方差，然后比较大小即可．

（3）根据甲和乙的平均数，中位数，众数，方差进行综合分析，判断，注意至少从两个不同的角度说明推断的合理性．

【详解】（1）$a=2$，$b=5$，$c=90$，$d=91$

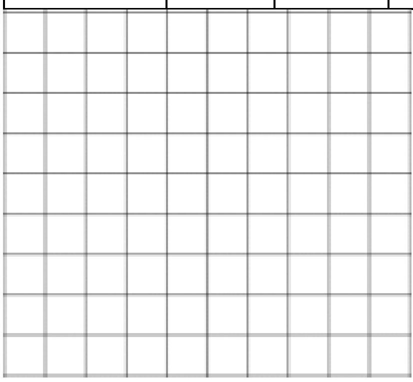
（2）则 S_1^2，S_2^2 的大小关系为 $S_1^2<S_2^2$；

（3）可以推断甲种猕猴桃的质量较好，理由为①甲种猕猴桃测评分数的众数、中位数都大于乙种猕猴桃测评分数②$S_1^2<S_2^2$ 也就是甲猕猴桃测评分数的方差小于乙种猕猴桃测评分数的方差，质量均匀较好；

【点睛】本题主要考查了平均数，众数，中位数，方差在实际问题中的正确运用，熟练掌握定义和计算公式，是解题的关键．

24. 某景观公园内人工湖里有一组小型喷泉，水柱从垂直于湖面的水枪喷出，水柱落于湖面的路径形状是抛物线．现测量出如下数据，在湖面上距水枪水平距离为 d 米的位置，水柱距离湖面高度为 h 米．

d（米）	0.5	1.0	2.0	3.0	3.5	4.5	…
h（米）	1.6	2.1	2.5	2.1	m	0	…



请解决以下问题：

（1）以水枪与湖面交点为原点，原点与水柱落地处所在直线为 x 轴，水枪所在直线为 y 轴，在下边网格中建立平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接.

（2）请结合表中所给数据或所画图象，写出水柱最高点的坐标.

（3）湖面上距水枪水平距离为 3.5 米时，水柱距离湖面的高度 m = ____________米.

（4）现公园想通过喷泉设立新的游玩项目，准备通过调节水枪高度，使得公园湖中的游船能从喷泉下方通过．游船左右两边缘最宽处有一个长方体形状的遮阳棚，若游船宽（指船的最大宽度）为 2 米，从水面到棚顶的高度为 2.1 米，要求是游船从喷泉水柱中间通过时，为避免游船被喷泉淋到，顶棚到水柱的垂直距离均不小于 0.5 米．请问公园该如何调节水枪高度以符合要求？请通过计算说明理由.

【答案】（1）见解析　（2）（2，2.5）

（3）1.6　（4）水枪高度至少向上平移 0.5 米，理由见解析

【解析】

【分析】（1）建立合适的坐标系，根据表格依次描点，用平滑的曲线连接即可；

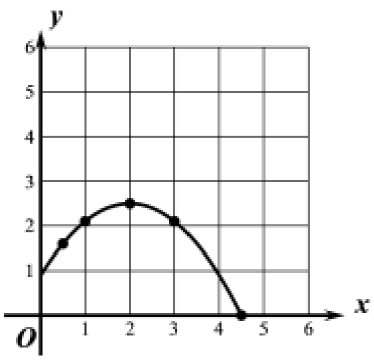
（2）根据函数图象，找到最高点；

（3）设顶点式 $h=a(d-2)^2+2.5$，再代入（4.5，0），求出 $a=-0.4$，进而求出解析式，当 $d=3.5$ 时，代入求值即可；

（4）由题意得，设平移后　解析式为 $h_2=-0.4(d-2)^2+2.5+m$，当横坐标为 3 时，纵坐标的值大于等于 2.6 即可；

【小问 1 详解】

解：以水枪与湖面的交点为原点，水枪所在的直线为 y 轴建立平面直角坐标系，如图所示：



【小问 2 详解】

解：由图象可得，最高点的坐标是（2，2.5）；

【小问 3 详解】

解：设二次函数的顶点式 $h=a(d-2)^2+2.5$

将（4.5，0）代入，得

$a\times(4.5-2)^2+2.5=0$

解得 $a=-0.4$

∴二次函数的解析式为：$h=-0.4(d-2)^2+2.5$

当 $d=3.5$ 时，$h=-0.4\times(3.5-2)^2+2.5$

解得 $h=1.6$

故答案为：1.6；

【小问 4 详解】

解：根据题意设平移后的解析式为 $h_2=-0.4(d-2)^2+2.5+m$

当横坐标为 2+1=3 时，纵坐标的值大于等于 2.1+0.5=2.6，

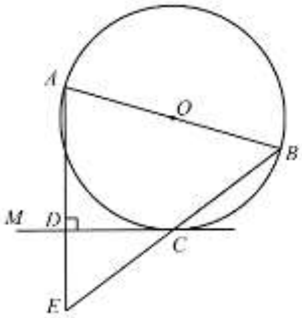
∴$-0.4\times(3-2)^2+2.5+m\geq 2.6$

解得：$m\geq 0.5$

∴水枪高度至少向上平移 0.5 米.

【点睛】本题考查二次函数的喷水问题，利用待定系数法求函数解析式，以及求函数最值，读懂题意，利用函数图象的性质解决问题是解决本题的关键.

25. 如图，AB 为$\odot O$ 的直径，点 C 在$\odot O$ 上，过点 C 作$\odot O$ 的切线CM，过点 A 作 $AD\perp CM$ 于点 D，交 BC 的延长线于点 E.



（1）求证：$AB=AE$；

（2）若 $AB=10$，$\cos B=\frac{3}{5}$，求 CD 的长.

【答案】（1）见解析　（2）$\frac{24}{5}$

【解析】

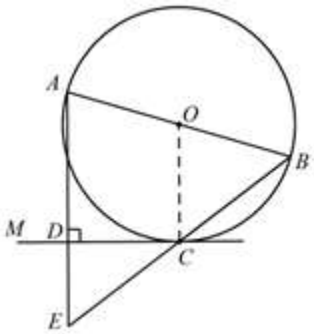
【分析】（1）连接OC，根据切线的性质得到$OC\perp CD$，根据平行线的性质、等腰三角形的判定和性质定理证明即可；

（2）连接 AC，根据余弦的定义求出 BC，根据勾股定理求出 AC，根据余弦的定义计算，得到答案.

【小问 1 详解】

证明：连结OC，

∵CD 是$\odot O$ 的切线，OC 为$\odot O$ 的半径



∴$OC\perp CD$，

又∵$AD\perp CM$，

∴$OC//AE$.

∴$\angle OCB=\angle E$

$\because OB=OC$

$\therefore \angle OCB=\angle B$

$\therefore \angle E=\angle B$

$\therefore AB=AE$；

【小问 2 详解】

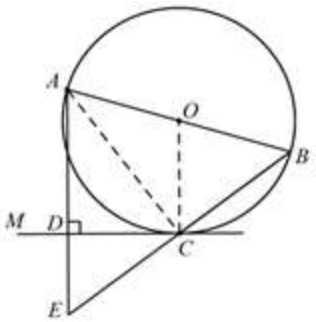
解：连接 AC，

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径

$\therefore \angle ACB=\angle ACE=90^\circ$

在 $Rt\triangle ACB$ 中， $AB=10$， $\cos B=\dfrac{3}{5}$.

$\therefore CB=6$，



$\therefore AC=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

$\because \angle DCE+\angle E=\angle DCE+\angle ACD=90^\circ$

$\therefore \angle E=\angle ACD$

$\therefore \cos\angle ACD=\cos E=\cos B=\dfrac{3}{5}$

又$\because AC=8$，

$\therefore CD=\dfrac{24}{5}$.

【点睛】本题考查的是切线的性质、锐角三角函数的定义，解题的关键是掌握圆的切线垂直于经过切点的半径.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+3a\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴的交点为点 A $1,0$ 和点 B.

（1）用含 a 的式子表示 b；

（2）求抛物线的对称轴和点 B 的坐标；

（3）分别过点 $P\left(t,0\right)$ 和点 $Q\left(t+2,0\right)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 M 和点 N，记抛物线在 M，N 之间的部分为图象 G（包括 M，N 两点）．记图形 G 上任意一点的纵坐标的最大值是 m，最小值为 n.

①当 $a=1$ 时，求 $m-n$ 的最小值；

②若存在实数 t，使得 $m-n=1$，直接写出 a 的取值范围.

【答案】（1）$b=-4a$

（2）$x=2$， $3,0$

（3）①1；② $0<a\leq 1$ 或 $-1\leq a<0$

【解析】

【分析】（1）把点 $A(1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+3a$ 即可得 $b=-4a$；

（2）由对称轴公式可得抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4a}{2a}=2$，由抛物线对称性得点 B 坐标 $(3,0)$；

（3）①当 $a=1$ 时，$y=ax^2-4ax+3a=a(x-1)(x-3)=(x-1)(x-3)$，即得抛物线与 x 轴交点坐标为 $(1,0)$，$(3,0)$，与 y 轴交点坐标为 $(0,3)$，顶点坐标为 $(2,-1)$，当图象 G 为对称图形时 $m-n$ 有最小值，可得 $2-t=(t+2)-2$，$t=1$，即得 $m-n$ 的最小值为 $0-(-1)=1$；

②由（1）知抛物线为 $y=ax^2-4ax+3a$，得 $M(t,at^2-4at+3a)$，$N(t+2$，$a(t+2)^2-4a(t+2)+3a)$，顶点坐标为 $(2,-a)$，可分四种情况讨论 a 的取值：（I）当 $a>0$，且 $t+2\leqslant 2$ 时，

$at^2-4at+3a-[a(t+2)^2-4a(t+2)+3a]=1$，解得 $t=1-\dfrac{1}{4a}$，可得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$；（II）当 $a>0$，且 $t\geqslant 2$ 时，

$a(t+2)^2-4a(t+2)+3a-(at^2-4at+3a)=1$，可得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{4}$，（III）当 $a>0$，且 $0<t\leqslant 1$ 时，

$at^2-4at+3a-(-a)=1$，可得 $\dfrac{1}{4}\leqslant a<1$；（IV）当 $a>0$，且 $1<t\leqslant 2$ 时，$a(t+2)^2-4a(t+2)+3a-(-a)=1$，可得 $\dfrac{1}{4}<a\leqslant 1$，即知当 $0<a\leqslant 1$ 时，$m-n=1$，同理可得：当 $a<0$ 时，$-1\leqslant a<0$ 也符合条件.

【小问 1 详解】

解：把点 $A(1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+3a$ 得：

$a+b+3a=0$，

$\therefore b=-4a$；

【小问 2 详解】

解：由（1）知抛物线为 $y=ax^2-4ax+3a$，

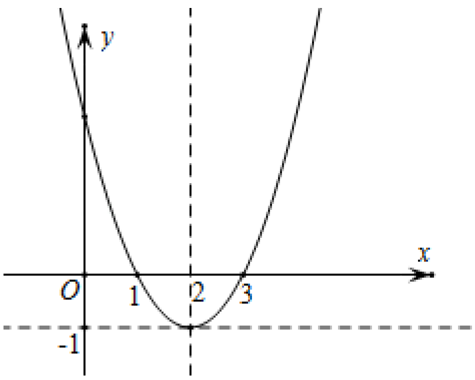
$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-4a}{2a}=2$，

而 $A(1,0)$ 关于直线 $x=2$ 对称点是 $(3,0)$，

由抛物线对称性得：点 B 坐标 $(3,0)$；

【小问 3 详解】

解：①如图：



当$a=1$时，$y=ax^2-4ax+3a=a(x-1)(x-3)=(x-1)(x-3)$，

$\therefore$抛物线与x轴交点坐标为$(1,0)$，$(3,0)$，与y轴交点坐标为$(0,3)$，顶点坐标为$(2,-1)$，

由图象知：当图象G为对称图形时$m-n$有最小值，

又$P(t，0)$，$Q(t+2，0)$，

$\therefore 2-t=(t+2)-2$，

$\therefore t=1$，

$\because$过点$P(t,0)$和点$Q(t+2,0)$作x轴的垂线，交抛物线于点M和点N，

$\therefore M(1,0)$，$N(3,0)$，

$\because$顶点坐标 $(2,-1)$，

$\therefore m-n$的最小值为$0-(-1)=1$；

②$\because$点$P(t,0)$和点$Q(t+2,0)$作x轴的垂线，交抛物线于点M和点N，

由（1）知抛物线为$y=ax^2-4ax+3a$，

$\therefore M(t,at^2-4at+3a)$，$N(t+2，a(t+2)^2-4a(t+2)+3a)$，

又$\because$抛物线对称轴为直线$x=2$，顶点坐标为$(2,-a)$，

$\therefore$根据M、N点的相对位置和抛物线的开口方向可分以下四种情况讨论a的取值：

（I）当$a>0$，且$t+2\leqslant 2$时，即图象G在对称轴左侧时，

此时M点的纵坐标最大，N点的纵坐标最小，

$\therefore at^2-4at+3a-[a(t+2)^2-4a(t+2)+3a]=1$，

解得$t=1-\frac{1}{4a}$，

又$\because t\leqslant 0$，$a>0$，

$\therefore 1-\frac{1}{4a}\leqslant 0$且$a>0$，

$\therefore 0<a\leqslant\frac{1}{4}$；

（II）当$a>0$，且$t\geqslant 2$时，即图象G在对称轴右侧时，

此时N点的纵坐标最大，M点的纵坐标最小，

$\therefore a(t+2)^2-4a(t+2)+3a-(at^2-4at+3a)=1$，

解得$t=1+\frac{1}{4a}$，

又$\because t\geqslant 2$，$a>0$，

$\therefore 1+\frac{1}{4a}\geqslant 2$且$a>0$，

$\therefore 0<a\leqslant\frac{1}{4}$，

（III）当$a>0$，且$0<t\leqslant 1$时，即最低点是抛物线顶点且M点纵坐标大时，

此时 $m=at^2-4at+3a$， $n=-a$，

$\therefore at^2-4at+3a-(-a)=1$，

解得 $t=2\pm\dfrac{\sqrt{a}}{a}$，

又 $\because 0<t\leqslant 1$， $a>0$，

$\therefore t=2-\dfrac{\sqrt{a}}{a}$，

$\therefore 0<2-\dfrac{\sqrt{a}}{a}\leqslant 1$，

$\therefore \dfrac{1}{4}<a\leqslant 1$；

（IV）当 $a>0$，且 $1<t\leqslant 2$ 时，即最低点是抛物线顶点时且 N 点纵坐标大，

此时 $m=a(t+2)^2-4a(t+2)+3a$， $n=-a$，

$\therefore a(t+2)^2-4a(t+2)+3a-(-a)=1$，

解得 $t^2=\dfrac{1}{a}$，

又 $\because 1<t\leqslant 2$， $a>0$，

$\therefore 1<\dfrac{1}{a}\leqslant 4$，

$\therefore \dfrac{1}{4}\leqslant a<1$，

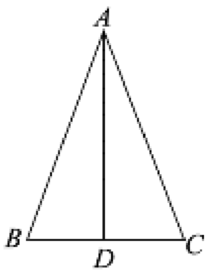
综上所述，当 $0<a\leqslant 1$ 时， $m-n=1$，

同理可得：当 $a<0$ 时， $-1\leqslant a<0$ 也符合条件，

$\therefore a$ 的取值范围为 $0<a\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant a<0$.

【点睛】本题考查二次函数的综合应用，难度较大，解题的关键是分类讨论图象 G 上纵坐标的大小值.

27. 如图，在三角形 ABC 中， $AB=AC$， $\angle BAC<60^\circ$， AD 是 BC 边的高线，将线段 AC 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到线段 AE，连接 BE 交 AD 于点 F.



（1）依题意补全图形，写出 $\angle CAE=$__________°

（2）求 $\angle BAF+\angle ABF$ 和 $\angle FBC$ 的度数；

（3）用等式表示线段 AF，BF，EF 之间的数量关系，并证明.

【答案】（1）图见解析，$60°$

（2）$60°$，$30°$

（3）$AF+BF=EF$，证明见解析

【解析】

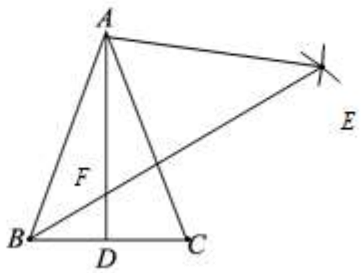
【分析】（1）根据等边三角形的性质，补全图形即可；

（2）根据等腰三角形三线合一的性质，求得$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，由旋转的性质可得$\angle ABE=\angle E$，由三角形内角和定理在$\triangle ABE$中，$\angle ABE+\angle E+\angle BAC=180°-\angle CAE$，便可求得$\angle BAF+\angle ABF$，再由三角形外角的性质可得$\angle FBC$；

（3）在EF上取点M，使$EM=BF$，连接AM，由$\triangle ABF\cong\triangle AEM$求得$AF=AM$，$\angle BAF=\angle EAM$，再由$\angle CAE=60°$可得$\triangle AFM$是等边三角形，便可解答；

【小问1详解】

解：如图分别以A，C为圆心，以AC为半径作弧，两弧交于点E，连接BE交AD于点F，则$\angle CAE=60°$；



【小问2详解】

解：$\because AB=AC$，AD是BC边的高线，

$\therefore \angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，

$\because$线段AC绕点A逆时针旋转$60°$得到线段AE，

$\therefore AB=AE$，又$\angle CAE=60°$，

$\therefore \angle ABE=\angle E$，

在$\triangle ABE$中，$\angle ABE+\angle E+\angle BAC=180°-\angle CAE=120°$，

$\therefore \frac{1}{2}\left(\angle ABE+\angle E+\angle BAC\right)=60°$

$\therefore \angle BAF+\angle ABF=60°$

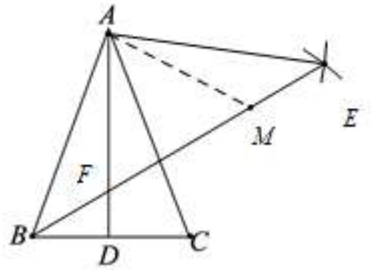
又$\because AD$是BC边的高线，$\therefore \angle ADB=90°$

$\because \angle BFD=\angle BAF+\angle ABF$，

$\therefore \angle FBC=90°-\left(\angle BAF+\angle ABF\right)=30°$.

【小问3详解】

解：如图，在EF上取点M，使$EM=BF$，连接AM，



∵$AB=AE$，$\angle ABF=\angle AEM$，$BF=EM$，∴$\triangle ABF\cong\triangle AEM$（SAS），

∴$AF=AM$，$\angle BAF=\angle EAM$，

∵$\angle DAC=\angle BAF$，∴$\angle DAC=\angle EAM$，

∵$\angle CAE=60°$，∴$\angle FAM=60°$，

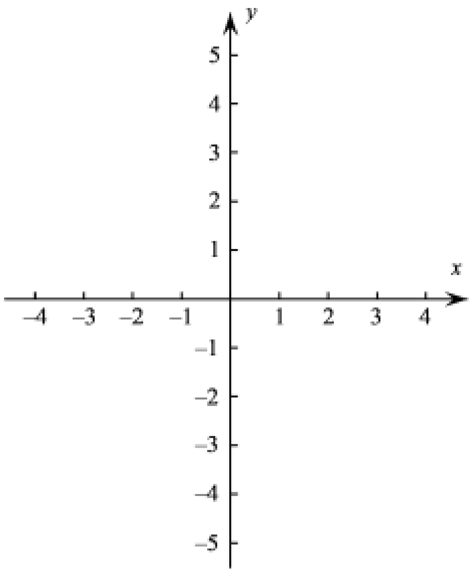
∴$\triangle AFM$是等边三角形，

∴$FM=AF$，

∴$AF+BF=EF$；

【点睛】本题考查了旋转的性质，等腰三角形判定的性质，三角形内角和定理，全等三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质；熟练掌握相关性质是解题关键.

28. 对于平面直角坐标系xOy中的线段PQ，给出如下定义：若存在$\triangle PQR$使得$S_{\triangle PQR}=PQ^2$，则称$\triangle PQR$为线段PQ的“等幂三角形”，点R称为线段PQ的“等幂点”.



（1）已知$A(2,0)$.

①在点$P_1(2,4)$, $P_2(1,2)$, $P_3(-4,1)$, $P_4(1,-4)$中，线段OA的“等幂点”是__________；

②若存在等腰$\triangle OAB$是线段OA的“等幂三角形”，求点B的坐标；

（2）已知点C的坐标为$C(2,-1)$，点D在直线$y=x-3$上，记图形M为以点$T(1,0)$为圆心，2为半径的$\odot T$位于x轴上方的部分．若图形M上存在点E，使得线段CD的“等幂三角形”$\triangle CDE$为锐角三角形，直接写出点D的横坐标x_D的取值范围.

【答案】（1）①P_1，P_4；②$(1,4)$或$(1,-4)$

（2）$\frac{3-\sqrt{2}}{2}<x_D<1$或$3<x_D<\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】（1）①根据定义求出三角形面积与 OA^2 进行比较即可确定线段 OA 的“等幂点”；

②根据定义可得 $S_{\triangle OAB}=OA^2$，然后求出 OA 边上　高为 h，再结合△OAB 为等腰三角形即可求出点 B 的坐标；

（2）设半圆与 x 轴交于 G，H 两点，过 T 作 CH 的平行线与半圆交于 R，作 CH 的垂线交半圆于 Q，直线 $y=x-3$ 与 y 轴交于 N，设 D（x，$x-3$），过 D 作 y 轴平行线，与过 C 作 x 轴平行线交于 F，求出 $N(0，-3)$, $H(3，0)$，可证△ONH 为等腰直角三角形，点 D 运动分两种情况，分别求出对应的取值范围即可.

【小问 1 详解】

解：①$\because A(2,0)$，$\therefore OA=2, OA^2=4$，

$S_{\triangle OP_1A}=\frac{1}{2}\times OA\cdot y_{P_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4=OA^2$，$P_1$是线段 OA 的“等幂点”.

$S_{\triangle OP_2A}=\frac{1}{2}\times OA\cdot y_{P_2}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2<OA^2$，$P_2$不是线段 OA 的“等幂点”.

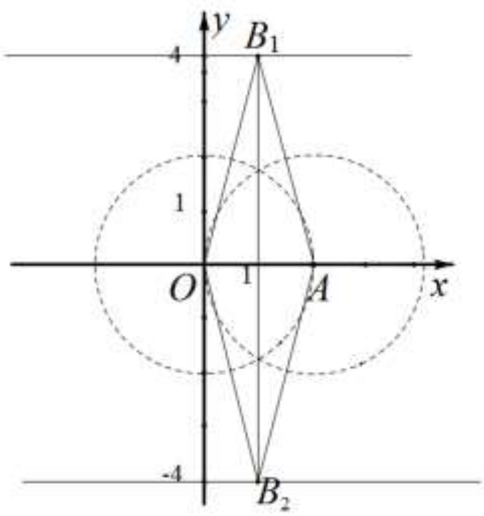
$S_{\triangle OP_3A}=\frac{1}{2}\times OA\cdot y_{P_3}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1<OA^2$，$P_3$不是线段 OA 的“等幂点”.

$S_{\triangle OP_4A}=\frac{1}{2}\times OA\cdot \left|y_{P_4}\right|=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4=OA^2$，$P_4$是线段 OA 的“等幂点”.

$\therefore$是线段 OA 的“等幂点”的是 P_1, P_4，

故答案为：P_1, P_4；

②如图，



$\because \triangle OAB$ 是线段 OA 的“等幂三角形”，

$\therefore S_{\triangle OAB}=OA^2$

$\because$点 $A(2,0)$，

设$\triangle OAB$中OA边上的高为h，

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times OA\times h=\frac{1}{2}\times 2\times h=4,$$

$\therefore h=4$，

$\therefore$点B在直线$y=4$或$y=-4$上，

又$\because \triangle OAB$是等腰三角形，

$\therefore$点B在半径为2的$\odot O$上，或在半径为2的$\odot A$上，或线段OA的垂直平分线上，

$\therefore$综上，点B的坐标为$(1,4)$或$(1,-4)$；

【小问2详解】

解：设半圆与x轴交于G，H两点，过T作CH的平行线与半圆交于R，作CH的垂线交半圆于Q，直线$y=x-3$与y轴交于N，

设D（x，$x-3$），过D作y轴平行线，与过C作x轴平行线交于F，

当$x=0$时，$y=-3$,$N(0，-3)$,当$y=0$时，$x-3=0$，$x=3$，$H(3，0)$，

$\therefore ON=3=OH$，$\triangle ONH$为等腰直角三角形，$\angle OHN=\angle ONH=45°$，

点D运动分两种情况，

第一种情况点D在射线CH，去掉线段CH部分运动，

$\because TC\perp NH$，$\angle OHN=45°$，

$\therefore \triangle TCH$为等腰直角三角形，

在$Rt\triangle TCH$中$TH=2$，$TC=CH=TH\times\sin45°=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，$QC=2+\sqrt{2}$，

又因为$\triangle ECD$为锐角三角形，

点E在QR上运动，

点E到CD的距离h的范围是$\sqrt{2}\le h\le 2+\sqrt{2}$，

$CD=CF\div\cos45°=\sqrt{2}\,CF=\sqrt{2}\,(x-2)$，

$\because$线段CD的“等幂三角形”，

$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}h\cdot CD=CD^2$，

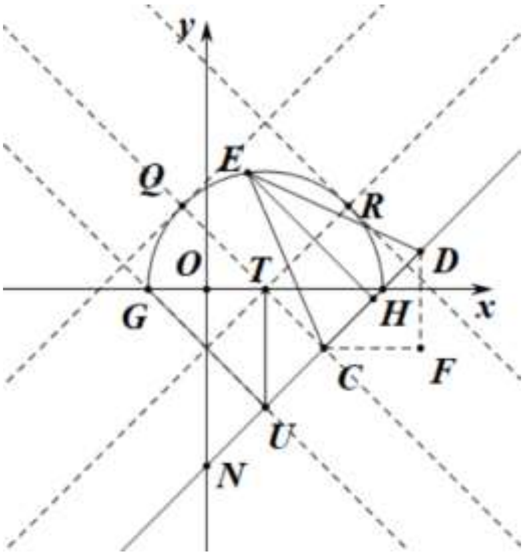
$\therefore h=2CD=2\sqrt{2}\,(x-2)$，

$\therefore \sqrt{2}<2\sqrt{2}\left(x-2\right)<2+\sqrt{2}$，

解得$\frac{5}{2}<x<\frac{5+\sqrt{2}}{2}$，

点D在H右侧，$x>3$，

$\therefore 3<x_D<\frac{5+\sqrt{2}}{2}$；



第二种情况点 D 在射线 CU 上，去掉线段 CU 部分运动，点 E 在 $\overset{\frown}{QG}$ 上运动，

又因为△ECD 为锐角三角形，

$GU=GH\times\cos45°=2\sqrt{2}$，

$\therefore 2\sqrt{2}\le h\le 2+\sqrt{2}$，

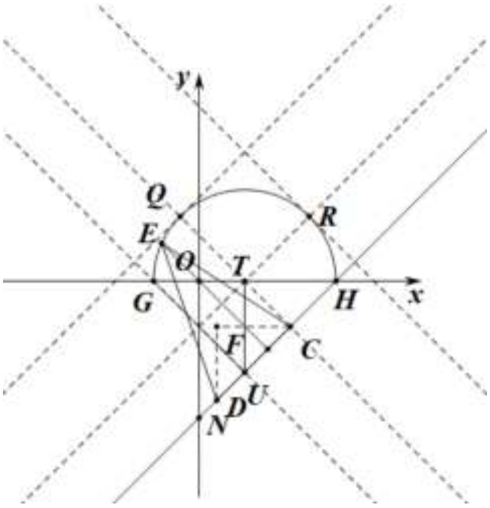
$\because$ 线段 CD 的"等幂三角形"，

$S_{\triangle CDE}=\dfrac{1}{2}h\cdot CD=CD^2$,

$\therefore h=2CD=2\sqrt{2}(2-x)$,

则 $2\sqrt{2}\le 2\sqrt{2}\left(2-x\right)\le 2+\sqrt{2}$，

解得 $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}<x_D<1$，



D 的横坐标 x_D 的取值范围为 $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}<x_D<1$ 或 $3<x_D<\dfrac{5+\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题考查新定义问题，仔细阅读新定义，抓住三角形的高为底的二倍，涉及三角形面积，等腰三角形，线段垂直平分线，直线与圆的位置关系，锐角三角函数，列双边不等式，解不等式等知识，难度较大，综合较强，熟练掌握多方面知识才是解题关键.