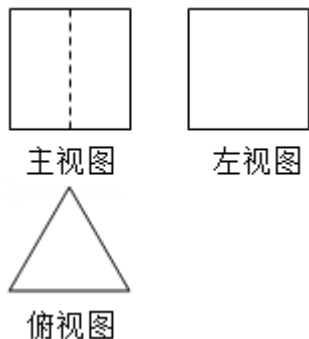


# 2021 北京西城初三一模

## 数 学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. (2 分) 如图是某几何体的三视图，该几何体是( )



- A. 圆柱                      B. 三棱锥                      C. 三棱柱                      D. 正方体

2. (2 分) 2021 年 2 月 27 日，由嫦娥五号带回的月球样品（月壤）正式入藏中国国家博物馆，盛放月球样品的容器整体造型借鉴自国家博物馆馆藏的系列青铜“尊”造型，以体现稳重大方之感，它的容器整体外部造型高  $38.44\text{cm}$ ，象征地球与月亮的平均间距约  $384400\text{km}$ 。将  $384400$  用科学记数法表示应为( )

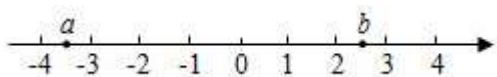


- A.  $38.44 \times 10^4$                       B.  $3.844 \times 10^5$                       C.  $3.844 \times 10^4$                       D.  $0.3844 \times 10^6$

3. (2 分) 下列图形中，是轴对称图形，但不是中心对称图形的是( )



4. (2 分) 若实数  $a$ ， $b$  在数轴上的对应点的位置如图所示，则以下结论正确的是( )

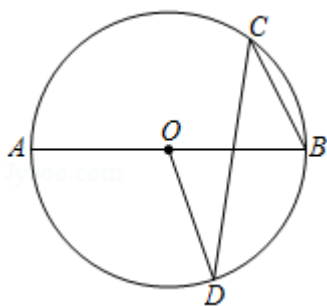


- A.  $a - b > 0$                       B.  $ab > 0$                       C.  $b > -a$                       D.  $a < 2b$

5. (2 分) 如果一个多边形的内角和等于它的外角和的 2 倍，那么这个多边形的边数是( )

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 8

6. (2 分) 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $CD$  是弦 (点  $C$  不与点  $A$ , 点  $B$  重合, 且点  $C$  与点  $D$  位于直径  $AB$  两侧), 若  $\angle AOD = 110^\circ$ , 则  $\angle BCD$  等于 ( )



- A.  $25^\circ$                       B.  $35^\circ$                       C.  $55^\circ$                       D.  $70^\circ$

7. (2 分) 春回大地万物生, “微故宫”微信公众号设计了互动游戏, 与大家携手走过有故宫猫陪伴的四季. 游戏规则设计如下: 每次在公众号对话框中回复【猫春图】, 就可以随机抽取 7 款“猫春图”壁纸中的一款, 抽取次数不限, 假定平台设置每次发送每款图案的机会相同, 小春随机抽取了两次, 她两次都抽到“东风纸鸢”的概率是 ( )



- 九九圆满      焕新春浴      东风纸鸢      秋千飞荡      品品春茶      赏花扑蝶      春游晚归

- A.  $\frac{1}{7}$                       B.  $\frac{2}{7}$                       C.  $\frac{1}{49}$                       D.  $\frac{2}{49}$

8. (2 分) 风寒效应是一种因刮风所引起的使体感温度较实际气温低的现象, 科学家提出用风寒温度描述刮风时的体感温度, 并通过大量实验找出了风寒温度和风速的关系. 下表中列出了当气温为  $5^\circ\text{C}$  时, 风寒温度  $T(^{\circ}\text{C})$  和风速  $v(\text{km}/\text{h})$  的几组对应值, 那么当气温为  $5^\circ\text{C}$  时, 风寒温度  $T$  与风速  $v$  的函数关系最可能是 ( )

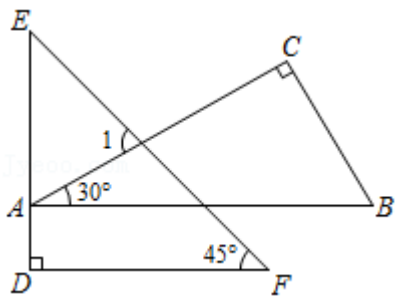
风速 $v$ (单位: $\text{km}/\text{h}$ )	0	10	20	30	40
风寒温度 $T$ (单位: $^{\circ}\text{C}$ )	5	3	1	-1	-3

- A. 正比例函数关系                      B. 一次函数关系  
C. 二次函数关系                      D. 反比例函数关系

## 二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

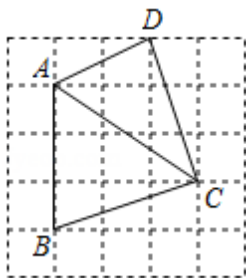
9. (2 分) 如果分式  $\frac{x-3}{x+2}$  的值为 0, 那么  $x$  的值为 \_\_\_\_.

10. (2 分) 将一副直角三角板如图摆放, 点  $A$  落在  $DE$  边上,  $AB \parallel DF$ , 则  $\angle 1 =$  \_\_\_\_  $^\circ$ .



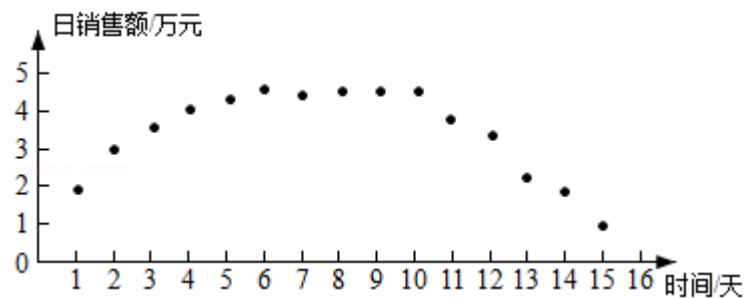
11. (2分) 比 $\sqrt{7}$ 大的整数中, 最小的是\_\_\_\_\_.

12. (2分) 如图所示的网格是正方形网格,  $A, B, C, D$  是网格线的交点, 那么  $\angle DAC$  与  $\angle ACB$  的大小关系为:  $\angle DAC$  \_\_\_\_\_  $\angle ACB$  (填“>”, “=”或“<”).



13. (2分) 已知方程组  $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ , 则  $x + y$  的值为\_\_\_\_\_.

14. (2分) 某公司销售一批新上市的产品, 公司收集了这个产品 15 天的日销售额的数据, 制作了如下的统计图.



关于这个产品销售情况有以下说法:

- ①第 1 天到第 5 天的日销售额的平均值低于第 6 天到第 10 天的日销售额的平均值;
- ②第 6 天到第 10 天日销售额的方差小于第 11 天到第 15 天日销售额的方差;
- ③这 15 天日销售额的平均值一定超过 2 万元.

所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

15. (2分) 将二次函数  $y = x^2$  的图象向右平移 3 个单位得到一个新函数的图象, 请写出一个自变量  $x$  的取值范围, 使得在所写的取值范围内, 上述两个函数中, 恰好其中一个函数的图象从左往右上升, 而另一个函数的图象从左往右下降, 写出的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. (2分) 某商家需要更换店面的瓷砖, 商家打算用 1500 元购买彩色和单色两种地砖进行搭配, 并且把 1500 元全部花完. 已知每块彩色地砖 25 元, 每块单色地砖 15 元, 根据需要, 购买的单色地砖数要超过彩色地砖数的 2 倍, 并且单色地砖数要少于彩色地砖数的 3 倍, 那么符合要求的一种购买方案是\_\_\_\_\_.

三、解答题 (本题共 68 分, 第 17~21 题, 每小题 5 分, 第 22 题 6 分, 第 23 题 5 分, 第 24~26 题, 每小题 5 分, 第 27~28 题, 每小题 5 分) 解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. (5分) 计算:  $4\sin 60^\circ + (-\frac{1}{3})^{-2} - \sqrt{12} + |-5|$ .

18. (5分) 解不等式组  $\begin{cases} 5(x+1) > 7x-1, \\ \frac{x-1}{3} > \frac{x-2}{4}, \end{cases}$  并求它的整数解.

19. (5分) 已知  $x^2 + 3x - 4 = 0$ , 求代数式  $(2x+1)(2x-1) - 3x(x-1)$  的值.

20. (5分) 阅读材料并解决问题:

已知: 如图,  $\angle AOB$  及内部一点  $P$ .

求作: 经过点  $P$  的线段  $EF$ , 使得点  $E, F$  分别在射线  $OA, OB$  上, 且  $OE = OF$ .

作法: 如图.

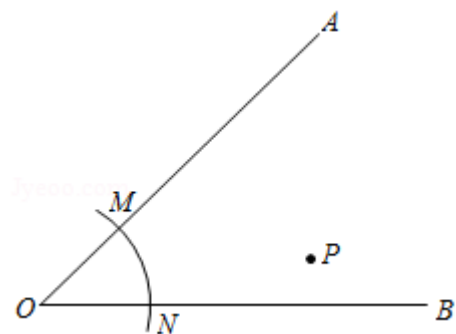
①以点  $O$  为圆心, 以任意长为半径作弧, 分别交射线  $OA, OB$  于点  $M, N$ ;

②连接  $NP$ , 作线段  $NP$  的垂直平分线, 得到线段  $NP$  的中点  $C$ ;

③连接  $MC$  并在它的延长线上截取  $CD = MC$ ;

④作射线  $DP$ , 分别交射线  $OB, OA$  于点  $F, E$ . 线段  $EF$  就是所求作的线段.

(1) 使用直尺和圆规, 依作法补全图形 (保留作图痕迹);



(2) 完成下面的证明证明: 连接  $MN$ .

由②得, 线段  $CN$  \_\_\_\_  $CP$  (填“>”, “=”或“<”).

在  $\triangle MCN$  和  $\triangle DCP$  中,

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---}, \\ \text{---} \end{cases}$$

$\therefore \triangle MCN \cong \triangle DCP$ .

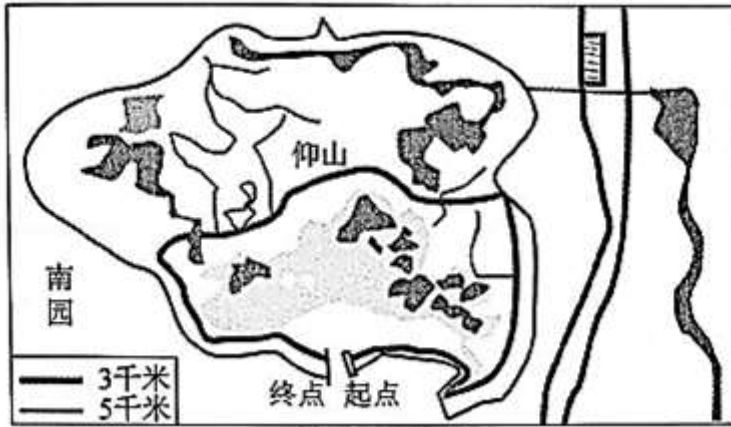
$\therefore \angle NMC = \angle PDC$ .

$\therefore MN \parallel EF$ (\_\_\_\_) (填推理的依据).

又由①得, 线段  $OM = ON$ .

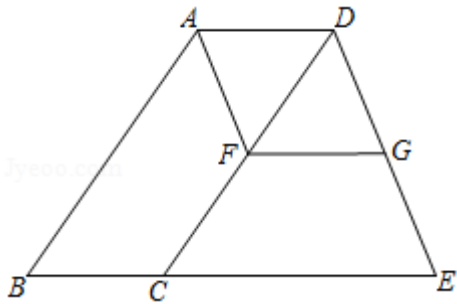
可得  $OE = OF$ .

21. (5分) 奥林匹克森林公园南园 (奥森南园) 是深受北京长跑爱好者追捧的跑步地点. 小华和小萱相约去奥森南园跑步踏青, 奥森南园有 5 千米和 3 千米的两条跑道 (如图所示). 小华选择了 5 千米的路线, 小萱选择了 3 千米的路线, 已知小华平均每分钟比小萱平均每分钟多跑 100 米, 两人同时出发, 结果同时到达终点. 求小萱的速度.



22. (6 分) 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 点  $E$  在  $BC$  的延长线上,  $CE = DE = 2BC$ .  $DC$  的中点为  $F$ ,  $DE$  的中点为  $G$ , 连接  $AF$ ,  $FG$ .

- (1) 求证: 四边形  $AFGD$  为菱形;
- (2) 连接  $AG$ , 若  $BC = 2$ ,  $\tan B = \frac{3}{2}$ , 求  $AG$  的长.



23. (5 分) 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $y = -x + b$  与双曲线  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$  交于  $A$ ,  $B$  两点, 点  $A$ , 点  $B$  的横坐标  $x_A$ ,  $x_B$  满足  $x_A > x_B$ , 直线  $y = -x + b$  与  $x$  轴的交点为  $C(3, 0)$ , 与  $y$  轴的交点为  $D$ .

- (1) 求  $b$  的值;
- (2) 若  $x_A = 2$ , 求  $k$  的值;
- (3) 当  $AD \geq 2BD$  时, 直接写出  $k$  的取值范围.

24. (6 分) 国家大力提倡节能减排和环保, 近年来纯电动汽车普及率越来越高, 纯电动汽车的续航里程是人们选择时参考的重要指标. 某汽车杂志根据当前汽车行业常用的两种续航里程测试标准 (标准  $M$  和标准  $N$ ), 对市面上常见的 9 种车型进行了续航里程实测, 并与这些厂家公布的工信部续航里程进行了对比, 下面是部分信息:

- a. 标准  $M$  下的实测续航里程数据为 324.8, 355.8, 378.2, 385, 403.7, 407.9, 441.2, 445, 463.2 (单位:  $km$ );
- b. 标准  $N$  下实测续航里程与工信部续航里程情况统计图 (图1);
- c. 标准  $N$  下实测续航里程频数分布直方图, 为方便记录, 将续航里程设为  $x$  (单位:  $km$ ), 数据分为  $A \sim F$  六组 (图2).

图1 标准N下实测续航里程与  
工信部续航里程情况统计图

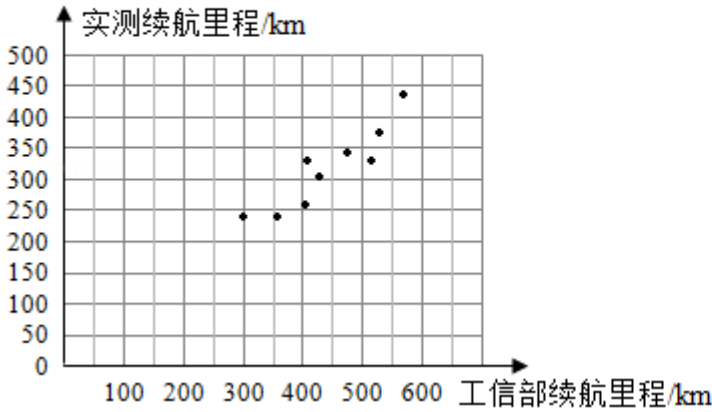
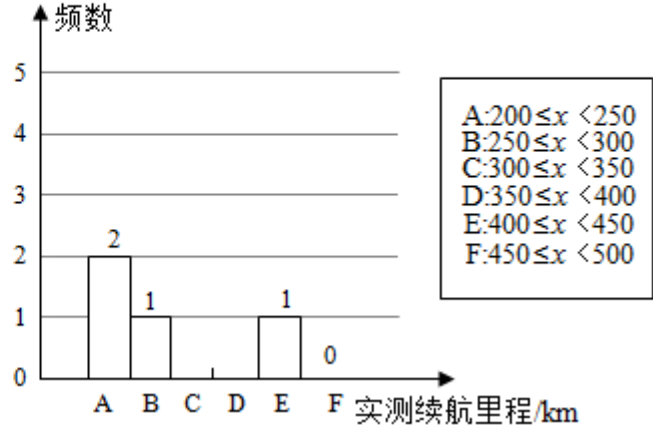


图2 标准N下实测续航里程  
频数分布直方图



不同标准下实测续航里程统计表（单位：km）

	标准 M 下实测续航里程	标准 N 下实测续航里程
平均数	400.5	316.6
中位数	$a$	$b$

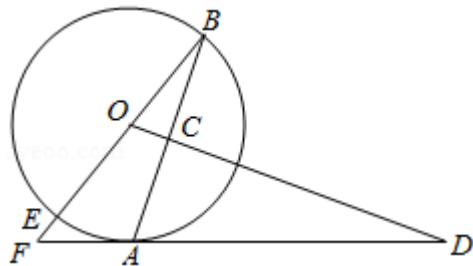
根据信息回答以下问题：

- (1) 补全图 2；
- (2) 不同标准下实测续航里程统计表中， $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，在  $A \sim F$  六组数据中， $b$  所在的组是  $\underline{\hspace{2cm}}$ （只填写  $A \sim F$  中的相应代号即可）；
- 判断  $a$  与  $b$  的大小关系为  $a \underline{\hspace{1cm}} b$ （填“ $>$ ”，“ $=$ ”或“ $<$ ”）。

(3) 在选购纯电动汽车时，实测续航里程与工信部续航里程的比值（简称“续航里程达成比”）越高越好，但续航里程达成比受到实测时各种实际条件的限制只能达到一定比例，晓春打算为家里选购纯电动汽车，如果在标准  $N$  下，他希望续航里程达成比不低于 75%，请在图 1 中圈出实测续航里程不低于 300km 的车型中，符合他要求的车型所对应的点。

25.（6 分）如图， $AB$  为  $\odot O$  的弦， $C$  为  $AB$  的中点， $D$  为  $OC$  延长线上一点， $DA$  与  $\odot O$  相切，切点为  $A$ ，连接  $BO$  并延长，交  $\odot O$  于点  $E$ ，交直线  $DA$  于点  $F$ 。

- (1) 求证： $\angle B = \angle D$ ；
- (2) 若  $AF = 4\sqrt{2}$ ， $\sin B = \frac{1}{3}$ ，求  $\odot O$  的半径。



26.（6 分）在平面直角坐标系  $xOy$  中，抛物线  $y = ax^2 - 2a^2x + 1 (a \neq 0)$  与  $y$  轴交于点  $A$ ，过点  $A$  作  $x$  轴的平行线与抛物线交于点  $B$ 。

- (1) 直接写出抛物线的对称轴；

(2) 若  $AB=4$ ，求抛物线所对应的函数解析式；

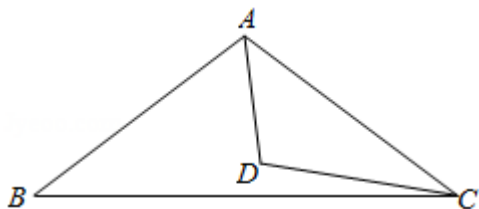
(3) 已知点  $P(a+4,1)$ ， $Q(0,a+1)$ ，如果抛物线与线段  $PQ$  恰有一个公共点，结合函数图象，求  $a$  的取值范围。

27. (7 分) 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=AC$ ， $\angle BAC > 90^\circ$ ， $D$  是  $\triangle ABC$  内一点， $\angle ADC = \angle BAC$ 。过点  $B$  作  $BE \parallel CD$  交  $AD$  的延长线于点  $E$ 。

(1) 依题意补全图形；

(2) 求证： $\angle CAD = \angle ABE$ ；

(3) 在 (1) 补全的图形中，不添加其他新的线段，在图中找出与  $CD$  相等的线段并加以证明。



28. (7 分) 对于平面直角坐标系  $xOy$  中的线段  $PQ$ ，给出如下定义：若存在  $\triangle PQR$  使得  $S_{\triangle PQR} = PQ^2$ ，则称  $\triangle PQR$  为线段  $PQ$  的“等幂三角形”，点  $R$  称为线段  $PQ$  的“等幂点”。

(1) 已知  $A(3,0)$ 。

①在点  $P_1(1,3)$ ， $P_2(2,6)$ ， $P_3(-5,1)$ ， $P_4(3,-6)$  中，是线段  $OA$  的“等幂点”的是\_\_\_\_\_；

②若存在等腰  $\triangle OAB$  是线段  $OA$  的“等幂三角形”，求点  $B$  的坐标；

(2) 已知点  $C$  的坐标为  $C(2,-1)$ ，点  $D$  在直线  $y=x-3$  上，记图形  $M$  为以点  $T(1,0)$  为圆心，2 为半径的  $\odot T$  位于  $x$  轴上方的部分。若图形  $M$  上存在点  $E$ ，使得线段  $CD$  的“等幂三角形”  $\triangle CDE$  为锐角三角形，直接写出点  $D$  的横坐标  $x_D$  的取值范围。

## 参考答案与试题解析

一、选择题（本题共16分，每小题2分）第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 【分析】根据一个空间几何体的主视图和左视图都是宽度相等的长方形，可判断该几何体是柱体，进而根据俯视图的形状，可判断柱体侧面形状，得到答案.

【解答】解：由几何体的主视图和左视图都是宽度相等的长方形，

故该几何体是一个柱体，

又 $\because$ 俯视图是一个三角形，

故该几何体是一个三棱柱.

故选：C.

【点评】本题考查的知识点是三视图，如果有两个视图为三角形，该几何体一定是锥，如果有两个矩形，该几何体一定柱，其底面由第三个视图的形状决定.

2. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， $n$ 为整数. 确定 $n$ 的值时，要看把原数变成 $a$ 时，小数点移动了多少位， $n$ 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 $\geq 10$ 时， $n$ 是正整数；当原数的绝对值 $< 1$ 时， $n$ 是负整数.

【解答】解： $384400 = 3.844 \times 10^5$ .

故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， $n$ 为整数，表示时关键要正确确定 $a$ 的值以及 $n$ 的值.

3. 【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【解答】解：A. 等腰三角形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项符合题意；

B. 平行四边形不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C. 既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D. 既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项不符合题意.

故选：A.

【点评】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转180度后与原图重合.

4. 【分析】根据数轴上点的位置，先确定 $a$ 、 $b$ 对应点的数，再逐个判断得结论.

【解答】解：根据数轴， $a < 0$ ， $b > 0$ .

$\therefore a - b < 0$ ， $ab < 0$ ，故A、B选项错误.

$\because -4 < a < -3$ ， $2 < b < 3$ .

$\therefore 3 < -a < 4$ .

$\therefore b < -a$ .

故C错误.

$\because -4 < a < -3$ ， $2 < b < 3$ .

$\therefore a < 2b$ ，故D正确.



故选：D．

【点评】本题考查了实数与数轴的对应关系、绝对值及有理数乘法的符号法则．认真分析数轴得到有用信息是解决本题的关键．

5. 【分析】任何多边形的外角和是  $360^\circ$ ，内角和等于外角和的 2 倍则内角和是  $720^\circ$ ． $n$  边形的内角和是  $(n-2)\cdot 180^\circ$ ，如果已知多边形的内角和，就可以得到一个关于边数的方程，解方程就可以求出多边形的边数．

【解答】解：根据题意，得：

$$(n-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ,$$

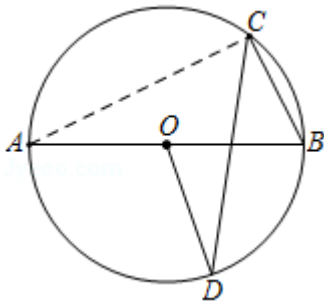
解得：  $n = 6$  ．

故选：C．

【点评】本题考查内角和与外角和的知识，关键在于设立未知数，转化为方程的问题来解决．属于基础题．

6. 【分析】连接  $AC$ ，求出  $\angle ACB$  和  $\angle ACD$ ，即可得到答案．

【解答】解：连接  $AC$ ，如图：



$\because AB$  是  $\odot O$  的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle AOD = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACB - \angle ACD = 35^\circ,$$

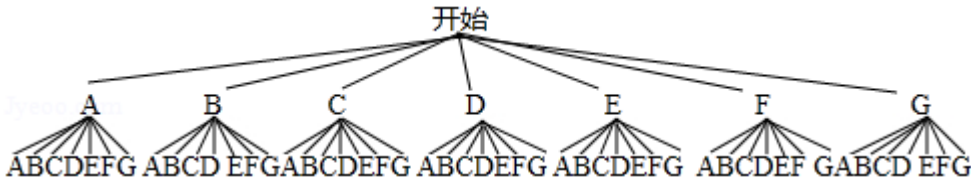
故选：B．

【点评】本题考查圆心角及圆周角的关系，掌握同（等）圆中，同弧所对圆周角是圆心角的一半是解题的关键．

7. 【分析】画树状图，共有 49 个等可能的结果，小春两次都抽到“东风纸鸢”的结果有 1 个，再由概率公式求解即可．

【解答】解：把 7 款“猫春图”分别记为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$ ，

画树状图如图：



共有 49 个等可能的结果，小春两次都抽到“东风纸鸢”的结果有 1 个，

$$\therefore \text{小春两次都抽到“东风纸鸢”的概率为 } \frac{1}{49},$$

故选：C．

【点评】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

8. 【分析】利用待定系数法求解即可．

【解答】解：当气温为一定时，风寒温度 $T$ 和风速 $v$ 成一次函数关系，

设风寒温度 $T$ 和风速 $v$ 的关系式为： $T = kv + b$ ，

根据题意，得： $\begin{cases} b = 5 \\ 10k + b = 3 \end{cases}$ ，

解得 $\begin{cases} k = -0.2 \\ b = 5 \end{cases}$ ，

所以 $T = -0.2v + 5$ ，

故选： $B$ ．

【点评】本题考查了一次函数的应用，熟练掌握待定系数法是解答本题的关键．

## 二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 【分析】根据分式的分子为 0，分母不为 0，可得答案．

【解答】解： $x - 3 = 0$ ，且 $x + 2 \neq 0$ ，

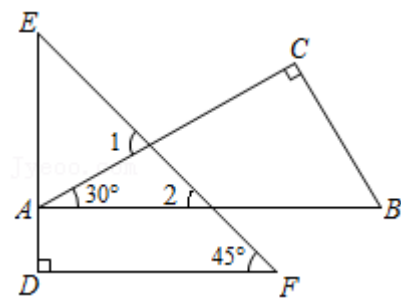
$x = 3$ ，

故答案为：3．

【点评】本题考查了分式值为 0 的条件，分式的分子为 0，分母不为 0 是解题关键．

10. 【分析】根据平行线的性质可得 $\angle 2$ 的度数，再利用外角的性质可得 $\angle 1$ ．

【解答】解：如图：



$\because AB \parallel DF$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle F = 45^\circ$ ．

由外角的性质可得： $\angle 1 = \angle CAB + \angle F$ ，

$\therefore \angle 1 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ ．

故答案为：75．

【点评】本题考查平行线的性质和三角形外角的性质，得出 $\angle 2$ 的度数是解题关键．

11. 【分析】估算出 $\sqrt{7}$ 的大小即可求解．

【解答】解： $\because 4 < 7 < 9$ ，

$\therefore 2 < \sqrt{7} < 3$ ，

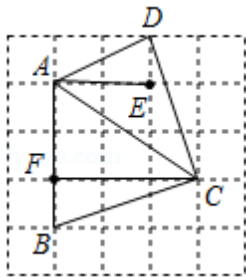
$\therefore$ 比 $\sqrt{7}$ 大的整数中，最小的是 3．

故答案为：3.

【点评】本题主要考查了估算无理数的大小，估算出 $\sqrt{7}$ 的范围是解答本题的关键.

12. 【分析】把 $\angle DAC$ 和 $\angle ACB$ 分别拆分成两个角的和，再进行比较.

【解答】解：如图，



由图形可知， $AE \parallel CF$ ，

$\therefore \angle EAC = \angle ACF$ ，

$$\because \tan \angle DAE = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\tan \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{1}{3},$$

$\therefore \angle DAE > \angle BCF$ ，

又 $\because \angle DAC = \angle DAE + \angle EAC$ ， $\angle ACB = \angle ACF + \angle BCF$ ，

$\therefore \angle DAC > \angle ACB$ .

故答案为：>.

【点评】本题主要考查角度的和差计算，角度的正切值等；利用背景图形去判断角度大小是常见的一种做题方法.

13. 【分析】将两方程相加后，再两边同除以3即可得到答案.

【解答】解： 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \text{ ①} \\ x + 2y = 1 \text{ ②} \end{cases}$$

①+②得， $3x + 3y = 6$

$\therefore x + y = 2$ .

故答案为：2.

【点评】此题考查的是解二元一次方程组，掌握其解法是解决此题关键.

14. 【分析】读出图中显示的数据；①计算第1天到第5天的日销售额的平均值和第6天到第10天的日销售额的平均值，然后再比较即可；②计算第6天到第10天日销售额的方差和第11天到第15天日销售额的方差，再进行比较；③计算这15天日销售额的平均值跟2万元比较即可.

【解答】解：由图可知这15天的数据大概是：2，3，3.5，4，4.2，4.6，4.4，4.5，4.5，4.5，3.5，3.2，2，1.8，0.8.  
第1天到第5天的日销售额的平均值=3.57；

第6天到第10天的日销售额的平均值=4.5>3.57，故①正确；

由图中的数据可知，第6天到第10天日销售额的波动小于第11天到第15天日销售额的波动，即第6天到第10天日销售额的方差小于第11天到第15天日销售额的方差；故②正确；

这15天的平均值=3.36>2，故③正确.

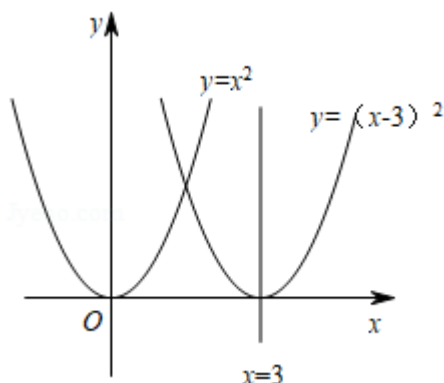
故答案为：①②③.

【点评】本题主要考查数据的平均值，方差，理解方差表示的是这组数据的波动情况可避免繁杂计算.

15. 【分析】由函数  $y = x^2$  的图象平移可得出平移后函数的解析式为:  $y = (x-3)^2$ ，分别得出两个函数的增减性即可.

【解答】解：将二次函数  $y = x^2$  的图象向右平移 3 个单位得到新函数:  $y = (x-3)^2$ ，

函数图象如图所示：



由  $y = x^2$  可知，当  $x > 0$  时， $y$  随  $x$  的增大而增大，即函数的图象从左往右上升； $x < 0$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小，即函数的图象从左往右下降；

由  $y = (x-3)^2$ ，当  $x > 3$  时， $y$  随  $x$  的增大而增大，即函数的图象从左往右上升；当  $x < 3$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小，即函数的图象从左往右下降.

∴ 当  $0 \leq x \leq 3$  时，恰好其中一个函数的图象从左往右上升，而另一个函数的图象从左往右下降.

故答案为:  $0 \leq x \leq 3$ .

【点评】本题主要考查二次函数图象的性质，二次函数的平移等内容，同时利用数形结合思想解决问题，使问题更直观.

16. 【分析】设购买  $x$  块彩色地砖，则购买  $\frac{1500-25x}{15}$  块单色地砖，根据“购买的单色地砖数要超过彩色地砖数的 2 倍，并且单色地砖数要少于彩色地砖数的 3 倍”，即可得出关于  $x$  的一元一次不等式组，解之即可得出  $x$  的取值范围，结合  $x$ ， $\frac{1500-25x}{15}$  均为正整数，即可得出各购买方案，任写一种即可.

【解答】解：设购买  $x$  块彩色地砖，则购买  $\frac{1500-25x}{15}$  块单色地砖，

$$\text{依题意得: } \begin{cases} \frac{1500-25x}{15} > 2x \\ \frac{1500-25x}{15} < 3x \end{cases},$$

$$\text{解得: } \frac{150}{7} < x < \frac{300}{11},$$

又  $\because x$ ， $\frac{1500-25x}{15}$  均为正整数，

∴  $x$  可以取 24, 27.

∴ 当  $x = 24$  时， $\frac{1500-25x}{15} = 60$ ；

当  $x = 27$  时， $\frac{1500-25x}{15} = 55$ .

故答案为：购买 24 块彩色地砖、60 块单色地砖（或购买 27 块彩色地砖、55 块单色地砖）。

【点评】本题考查了一元一次不等式组的应用，根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式组是解题的关键。

三、解答题（本题共 68 分，第 17~21 题，每小题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24~26 题，每小题 5 分，第 27~28 题，每小题 5 分）解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. 【分析】直接利用二次根式以及负整数幂的性质、特殊角的三角函数值分别化简得出答案。

【解答】解：原式  $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 9 - 2\sqrt{3} + 5$

$$= 2\sqrt{3} + 9 - 2\sqrt{3} + 5$$
$$= 14.$$

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键。

18. 【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集。

【解答】解：解不等式  $5(x+1) > 7x-1$ ，得：  $x < 3$ ，

解不等式  $\frac{x-1}{3} > \frac{x-2}{4}$ ，得：  $x > -2$ ，

则不等式组的解集为  $-2 < x < 3$ ，

所以不等式组的整数解为  $-1$ 、 $0$ 、 $1$ 、 $2$ 。

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大大小小中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键。

19. 【分析】先根据整式的运算法则进行化简，然后将  $x^2 + 3x = 4$  整体代入即可求出答案。

【解答】解：原式  $= 4x^2 - 1 - 3x^2 + 3x$

$$= x^2 + 3x - 1,$$

当  $x^2 + 3x = 4$  时，

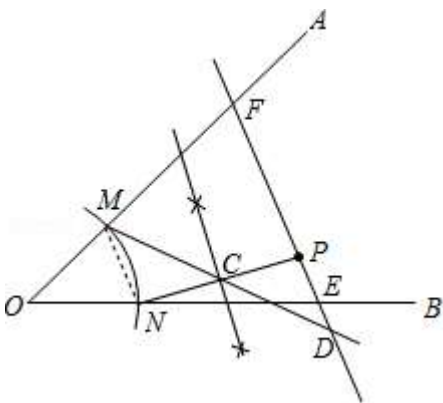
$$\text{原式} = 4 - 1$$
$$= 3.$$

【点评】本题考查整式的运算，解题的关键是熟练运用整式的运算法则，本题属于基础题型。

20. 【分析】（1）根据要求作出图形即可。

（2）利用全等三角形的性质解决问题即可。

【解答】解：（1）图形如图所示：



(2) 连接  $MN$  .

由作图可知,  $CN = CP$  ,

在  $\triangle MCN$  和  $\triangle DCP$  中,

$$\begin{cases} CM = CD \\ \angle MCN = \angle DCP , \\ CN = CP \end{cases}$$

$\therefore \triangle MCN \cong \triangle DCP(SAS)$  ,

$\therefore \angle NMC = \angle PDC$  ,

$\therefore MN \parallel EF$  (内错角相等两直线平行),

又由①得, 线段  $OM = ON$  ,

可得  $OE = OF$  .

故答案为: = ,  $CM = CD$  ,  $\angle MCN = \angle DCP$  ,  $CN = CP$  , 内错角相等两直线平行.

【点评】本题考查作图—复杂作图, 全等三角形的判定和性质, 线段的垂直平分线的性质等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

21. 【分析】设小萱的速度为  $x$  米/分, 根据  $t = \frac{s}{v}$  可分别求出小华小萱的时间, 再让两者相等, 建立分式方程求解即可.

【解答】解: 设小萱的速度为  $x$  米/分, 则小华的速度为  $(x+100)$  米/分,

5 千米 = 5000 米, 3 千米 = 3000 米,

由题意得:

$$\frac{5000}{x+100} = \frac{3000}{x} ,$$

解得  $x = 150$  ,

经检验,  $x = 150$  是原方程的解, 且符合题意.

$\therefore$  小萱的速度为 150 米/分.

【点评】本题主要考查分式方程的应用, 正确寻找二者存在的等量关系是解决此题的关键.

22. 【分析】(1) 由平行四边形的性质得到  $AD \parallel BC$  ,  $AD = BC$  , 由三角形的中位线定理得到  $FG \parallel CE$  ,  $FG = \frac{1}{2}CE$  , 即  $CE = 2FG$  , 结合条件得到  $AD = FG$  , 证得四边形  $AFGD$  是平行四边形, 由已知条件证得  $AD = DG$  ,

根据菱形的判定定理即可证得结论;

(2) 由菱形的性质得到  $AO = GO$  ,  $AG \perp DF$  , 根据三角函数和勾股定理求出  $AO$  , 即可得到  $AG$  .

【解答】(1) 证明: 四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$  ,  $AD = BC$  ,

$\because F$  为  $DC$  的中点,  $G$  为  $DE$  的中点,

$$\therefore FG \parallel CE , FG = \frac{1}{2}CE ,$$

即  $CE = 2FG$  ,

$\therefore FG \parallel BC$  ,

$$\therefore FG \parallel AD,$$

$$\because CE = 2BC = 2AD,$$

$$\therefore AD = FG,$$

$\therefore$  四边形  $AFGD$  是平行四边形,

$$\because CE = DE = 2BC = 2AD, \quad G \text{ 为 } DE \text{ 的中点},$$

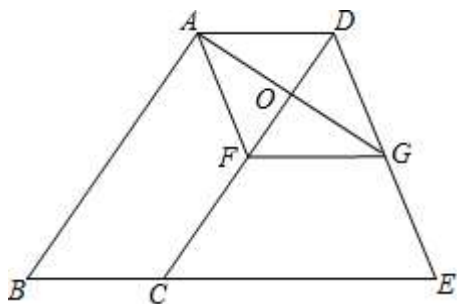
$$\therefore CE = 2DG,$$

$$\therefore AD = DG,$$

$\therefore$  四边形  $AFGD$  为菱形;

(2) 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$$\therefore AD = BC = 2, \quad \angle ADO = \angle B,$$



$\because$  四边形  $AFGD$  为菱形,

$$\therefore AO = GO, \quad AG \perp DF,$$

$$\because \tan B = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \tan \angle ADO = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{AO}{DO} = \frac{3}{2},$$

$$\text{设 } AO = 3x, \quad DO = 2x,$$

$$\because AO^2 + DO^2 = AD^2,$$

$$\therefore (3x)^2 + (2x)^2 = 2^2,$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\therefore AO = \frac{6\sqrt{13}}{13},$$

$$\therefore AG = 2AO = \frac{12\sqrt{13}}{13}.$$

【点评】本题主要考查了平行四边形的性质，菱形的性质和判定，三角形中位线定理，勾股定理，熟练掌握菱形的性质和判定是解决问题的关键.

23. 【分析】(1) 将点  $C$  代入  $y = -x + b$  求解.

(2) 把  $x_A = 2$  代入一次函数解析式求出点坐标，再代入反比例函数解析式求解.

(3) 分类讨论  $k > 0$  与  $k < 0$  两种情况，根据坐标系中中点公式求解.

【解答】解：（1）把  $(3,0)$  代入  $y = -x + b$  得  $0 = -3 + b$ ,

$$\therefore b = 3.$$

（2）将  $x = 2$  代入  $y = -x + 3$  得  $y = -2 + 3 = 1$ ,

$\therefore$  点  $A$  坐标为  $(2,1)$ .

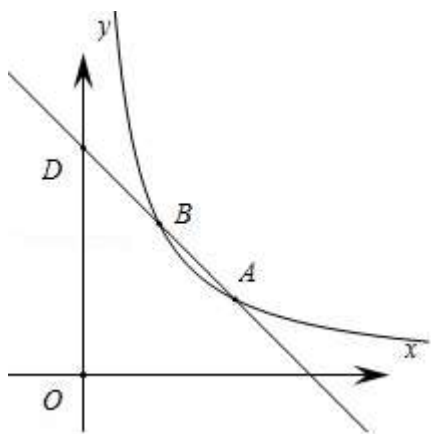
将  $(2,1)$  代入  $y = \frac{k}{x}$  得  $1 = \frac{k}{2}$ ,

解得  $k = 2$ .

（3）由（1）得一次函数解析式为  $y = -x + 3$ .

$\therefore$  直线与  $y$  轴交点  $D$  的坐标为  $(0,3)$ .

如图，当  $k > 0$  时，直线与双曲线交点在第一象限，



当  $AD = 2BD$  时点  $B$  为  $AD$  中点，设点  $A$  坐标为  $(m, \frac{k}{m})$ ，点  $B$  坐标为  $(a, b)$ ,

$$\therefore \begin{cases} \frac{0+m}{2} = a \\ 3 + \frac{\frac{k}{m}}{2} = b \end{cases},$$

$$\therefore b = \frac{k}{a},$$

$$\therefore \frac{3 + \frac{k}{m}}{2} = \frac{k}{\frac{m}{2}},$$

解得  $m = k$ ,

$$\therefore b = \frac{k}{\frac{m}{2}} = 2,$$

将  $y = 2$  代入  $y = -x + 3$  中得  $x = 1$ ,

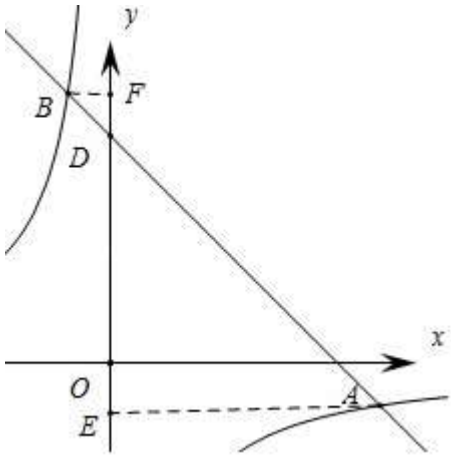
$\therefore$  点  $B$  坐标为  $(1,2)$ ， $k = 1 \times 2 = 2$ .

$\therefore |k|$  越大双曲线越远离坐标轴，

$$\therefore 0 < k \leq 2.$$

当  $k < 0$  时，交点  $B$  在第二象限，交点  $A$  在第四象限，作  $AE$ ， $BF$  垂直于  $y$  轴.





$$\text{联立方程} \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = \frac{k}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得 } x_A = \frac{3 + \sqrt{9 - 4k}}{2}, \quad x_B = \frac{3 - \sqrt{9 - 4k}}{2}$$

$$\therefore BF \parallel AE,$$

$$\therefore \triangle BDF \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{x_A}{-x_B},$$

$$\text{当 } AD \geq 2BD \text{ 时, } -\frac{3 + \sqrt{9 - 4k}}{3 - \sqrt{9 - 4k}} \geq 2,$$

$$\text{解得 } k \geq -18,$$

$$\therefore -18 \leq k < 0.$$

综上所述,  $0 < k \leq 2$  或  $-18 \leq k < 0$ .

【点评】本题考查一次函数与反比例函数的综合应用, 解题关键是熟练掌握一次函数及反比例函数的性质.

24. 【分析】(1) 根据题目中的信息, 可以得到 C 组和 D 组的频数, 从而可以将图 2 补充完整;

(2) 根据题目中的信息, 可以得到 a 的值, b 在哪一组, a 和 b 的大小情况;

(3) 根据题意, 可以将相应的点圈出来.

【解答】解: (1) 由图 1 可得,

C 组的频数为 4, D 组的频数为 1,

补全的图 2 如右图所示;

(2)  $\therefore$  标准 M 下的实测续航里程数据为 324.8, 355.8, 378.2, 385, 403.7, 407.9, 441.2, 445, 463.2,

$$\therefore a = 403.7,$$

由图 1 可知, b 在 C 组,

$$a > b,$$

故答案为: 403.7, C, >;

(3) 由图 1 可知,

不低于 300km 的车型中对应的实际续航里程各数据约为: 330, 300, 350, 330, 380, 440, 相对应的工程续航里程为: 410, 440, 475, 510, 525, 570, 相对应的“续航里程达成比”为:  $330 \div 410 \approx 80\%$ ,  $300 \div 440 \approx 68\%$ ,

$350 \div 475 \approx 74\%$  ,  $330 \div 510 \approx 65\%$  ,  $380 \div 525 \approx 72\%$  ,  $440 \div 570 \approx 77\%$  ,

符合晓春要求的车型所对应的点如下图所示.

图1 标准N下实测续航里程与  
工信部续航里程情况统计图

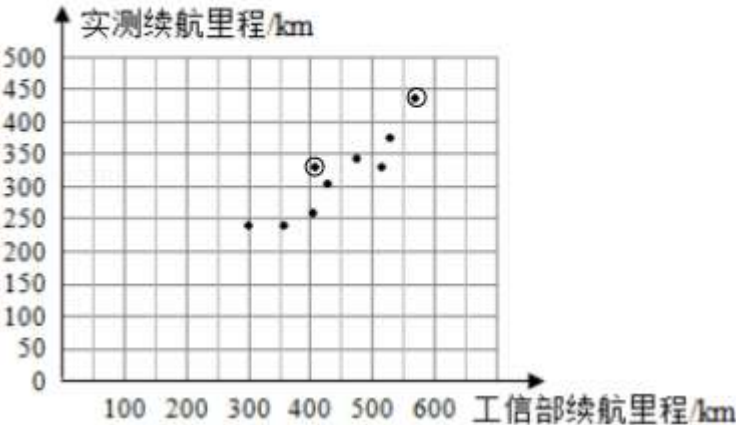
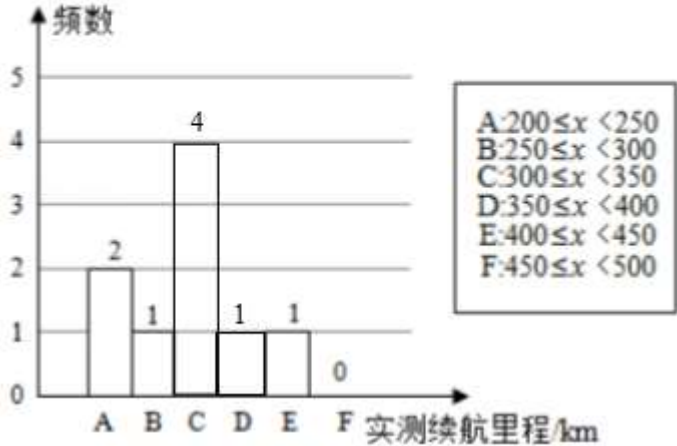


图2 标准N下实测续航里程  
频数分布直方图

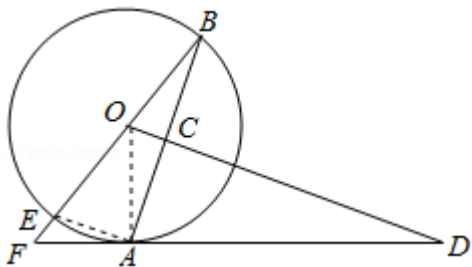


【点评】 本题考查频数分布直方图、频数分布表、解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

25. 【分析】（1）由切线的性质可得 $\angle OAD=90^{\circ}$ ，由余角的性质可求解；

（2）通过证明 $\triangle FAE\sim \triangle FBA$ ，可得 $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{BF}=\frac{EF}{AF}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ，即可求解．

【解答】解：（1）连接  $OA$ ， $AE$ ，



$$\because OA=OB\,,$$

$$\therefore \angle B=\angle OAB\,,$$

$$\because DA\text{与}\odot O\text{相切},$$

$$\therefore \angle OAD=90^{\circ}\,,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle DAC = 90^\circ = \angle D + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle D = \angle OAB = \angle B;$$

(2)  $\because BE$  是直径,

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\because \sin B = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{设 } AE = x, \quad EB = 3x,$$

$$\therefore AB = \sqrt{BE^2 - AE^2} = 2\sqrt{2}x,$$

$$\because OA = OE,$$

$$\therefore \angle OEA = \angle OAE,$$

$$\because \angle OAE + \angle FAE = 90^\circ = \angle B + \angle BEA,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle B,$$

$$\text{又 } \because \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle FAE \sim \triangle FBA,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{BF} = \frac{EF}{AF},$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{BF} = \frac{EF}{AF} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2\sqrt{2}} AF = 2, \quad BF = 16,$$

$$\therefore BE = 14,$$

$$\therefore OB = 7,$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 7.$$

【点评】本题考查了切线的性质，圆的有关知识，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数等知识，证明  $\triangle FAE \sim \triangle FBA$  是本题的关键。

26. 【分析】(1) 根据抛物线对称轴公式即可得；

(2) 根据题意求得  $a = \pm 2$ ，即可求得抛物线所对应的函数解析式；

(3) 根据点  $P(a+4, 1)$ ， $Q(0, a+1)$ ，如果抛物线与线段  $PQ$  恰有一个公共点，结合函数图象，即可求  $a$  的取值范围。

【解答】解：(1)  $\because$  抛物线  $y = ax^2 - 2a^2x + 1 (a \neq 0)$ ，

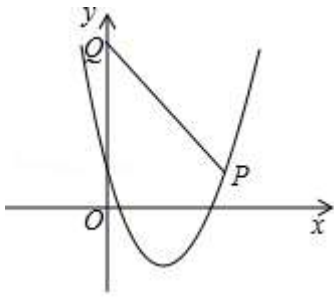
$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{-2a^2}{2a} = a;$$

(2) 由题意可知抛物线的对称轴为直线  $x = \pm 2$ ，

$$\therefore a = \pm 2,$$

$$\therefore \text{抛物线所对应的函数解析式为 } y = 2x^2 - 8x + 1 \text{ 或 } y = -2x^2 - 8x + 1;$$

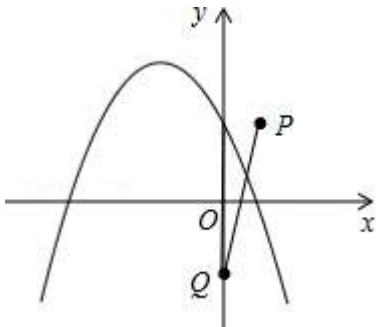
(3) 当  $a > 0$  时，抛物线过点  $P(a+4, 1)$  时，则  $\frac{a+4}{2} = a$ ，解得  $a = 4$ ，



$\therefore Q(0,5)$ ,

此时, 抛物线与线段  $PQ$  有一个公共点.

当  $a < 0$  时, 抛物线过点  $P(a+4,1)$  时,  $a+4=0$ , 解得  $a=-4$ ,



此时,  $Q(0,-3)$ , 抛物线与线段  $PQ$  有一个公共点;

综上所述, 当  $0 < a \leq 4$  或  $-4 \leq a < 0$  时, 抛物线与线段  $PQ$  恰有一个公共点.

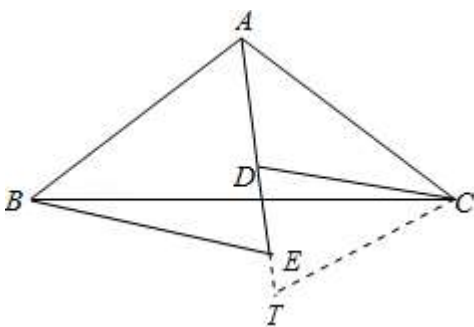
【点评】本题考查二次函数的图象及性质; 熟练掌握二次函数的图象及性质, 能对  $a$  进行分类讨论, 并能数形结合解决函数与线段的交点问题是解题的关键.

27. 【分析】(1) 根据要求作出图形即可.

(2) 利用三角形内角和定理以及平行线的性质证明即可.

(3) 结论:  $CD = AE$ , 证明  $\triangle ABE \cong \triangle CAT(AAS)$ , 即可解决问题.

【解答】(1) 解: 图形如图所示.



(2) 证明:  $\because CD \parallel BE$ ,

$\therefore \angle CDE = \angle AEB$ ,

$\because \angle ADC = \angle BAC$ ,

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = \angle DAC + \angle ACD = \angle CDE = \angle AEB$ ,

$\because \angle BAE + \angle ABE + \angle AEB = 180^\circ$ ,  $\angle BAE + \angle DAC + 2\angle ABC = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle BAE + \angle ABE + 2\angle ABC = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle CAD = \angle ABE$ .

(3) 解: 结论:  $CD = AE$ .

理由: 在  $AE$  的延长线上取一点  $T$ , 使得  $CD = CT$ ,

$$\because CD = CT,$$

$$\therefore \angle T = \angle CDT,$$

$$\because CD \parallel BE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle T,$$

$$\because AB = AC, \angle ABE = \angle CAT,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAT(AAS),$$

$$\therefore AE = CT,$$

$$\therefore CD = AE.$$

【点评】本题考查作图—复杂作图，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

28. 【分析】(1) ①分别计算出对应三角形的面积，和  $OA^2$  进行比较，若相等即为线段  $OA$  的等幂点；

②若  $\triangle OAB$  既是线段  $OA$  的“等幂三角形”，又是等腰三角形，需要分类讨论，当若  $OB = AB$ ， $OA = OB = 3$ ， $OA = AB = 3$  时，分别求点  $B$  的坐标；

(2) 先找到使得线段  $CD$  的“等幂三角形”  $\triangle CDE$  为锐角三角形的点  $E$ ，再根据题目中的条件求出点  $D$  的横坐标的取值范围即可.

【解答】解: (1) ①  $\because A(3,0)$ ，则  $OA = 3$ ， $OA^2 = 9$ ，

$$\because P_1(1,3), P_2(2,6), P_3(-5,1), P_4(3,-6),$$

$$\therefore S_{\triangle OAP_1} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}, S_{\triangle OAP_2} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9,$$

$$S_{\triangle OAP_3} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}, S_{\triangle OAP_4} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9,$$

$\therefore$  是线段  $OA$  的“等幂点”的是  $P_2, P_4$ ；

②若  $OB = AB$ ， $\triangle OAB$  为  $OA$  的等幂三角形，则  $y_B = \pm 6$ ，

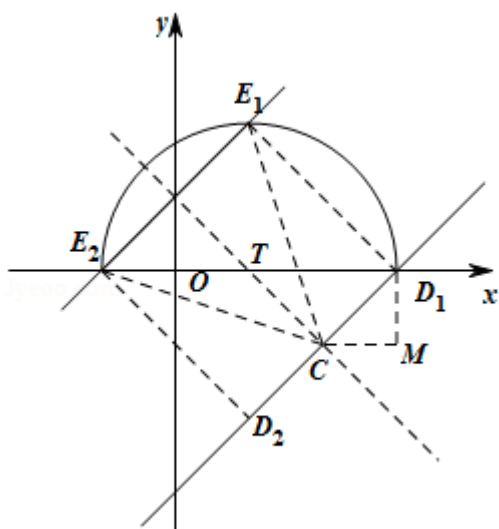
$$\therefore B(1.5,6) \text{ 或 } B(1.5,-6)；$$

若  $OA = OB = 3$ ， $\triangle OAB$  为  $OA$  的等幂三角形，则  $y_B = \pm 6$ ，即  $OB = 6$ ，显然不成立；

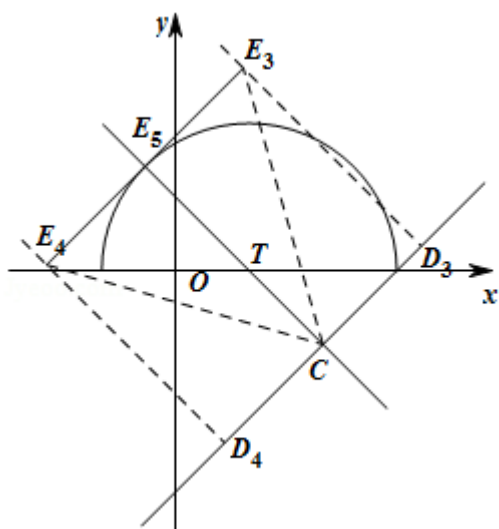
若  $OA = AB = 3$ ， $\triangle OAB$  为  $OA$  的等幂三角形，则  $y_B = \pm 6$ ，即  $OB = 6$ ，显然不成立；

$$\therefore B(1.5,6) \text{ 或 } B(1.5,-6)；$$

(2) 如图，第一个临界点，当点  $E_1$  和  $E_2$  在  $\odot T$  上，等幂三角形刚好是直角三角形， $E_1(1,2)$ ， $E_2(-1,0)$ ， $E_1E_2$  平行于直线  $y = x - 3$ ，过点  $E_1$ ， $E_2$  作直线的垂线  $D_1$ ， $D_2$ ，设  $CD_1 = a$ ， $D_1E_1 = 2a$ ，在  $Rt \triangle E_1D_1C$  中， $CD_1^2 + D_1E_1^2 = CE_1^2$ ，即  $a^2 + (2a)^2 = (\sqrt{10})^2$ ，解得  $a = \sqrt{2}$ ，则  $CD_1 = \sqrt{2}$ ，根据对称性可知  $CD_2 = \sqrt{2}$ 。作  $CM \parallel x$  轴， $D_1M \parallel y$  轴，则  $\angle D_1CM = 45^\circ$ ，易求得  $CM = \frac{\sqrt{2}}{2} CD_1 = 1$ ，从而求得  $x_{D_1} = x_M = 3$ ，同理可得， $x_{D_2} = 1$ 。



如图 2，第一个临界点， $E_3E_4$  平行于直线  $y = x - 3$ ，与圆相切于点  $E_5$ ，等幂三角形刚好是直角三角形， $CE_5 = 2 + \sqrt{2}$ ，则  $E_3E_5 = \frac{1}{2}CE_5 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ ，所以  $CE_3 = E_3E_5 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ ，则  $x_{D_3} = x_C + \frac{\sqrt{2}}{2}CD_1 = \frac{5 + \sqrt{2}}{2}$ ，同理可得  $x_{D_4} = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$ ，



结合图象可知， $\frac{3 - \sqrt{2}}{2} < x_D < 1$ ， $3 < x_D < \frac{5 + \sqrt{2}}{2}$ 。

【点评】本题属于新定义类问题，并在平面直角坐标系的背景下考查三角形的面积问题；理解给出的定义“等幂三角形”是解题关键。