

2023 北京海淀初三二模

数 学

2023.05

学校_____ 姓名_____ 准考证号_____

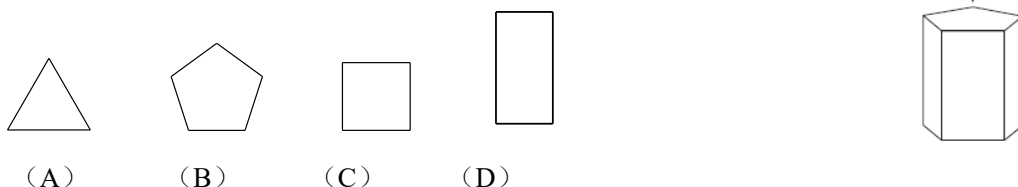
考生须知	<p>1. 本试卷共 6 页，共两部分，共 28 道题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。</p> <p>2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号。</p> <p>3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。</p> <p>4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。</p> <p>5. 考试结束，请将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回。</p>
------	---

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

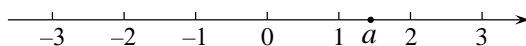
1. 一个正五棱柱如右图摆放，光线由上到下照射此正五棱柱时的正投影是



2. 下列运算正确的是

- (A) $2a + 3a = 5a^2$ (B) $a \cdot a \cdot a = 3a$
 (C) $(a^3)^2 = a^5$ (D) $a(m+n) = am + an$

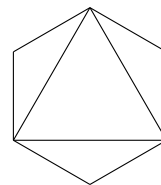
3. 实数 a 在数轴上对应点的位置如图所示. 若实数 b 满足 $a+b < 0$, 则 b 的值可以是



- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

4. 如图, 由正六边形和正三角形组成的图形为轴对称图形, 该图形的对称轴的条数为

- (A) 1 (B) 2
 (C) 3 (D) 4



5. 投掷两枚质地均匀的骰子, 两枚骰子向上一面的点数相同的概率是

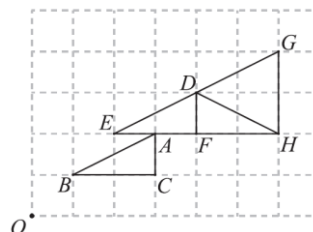
- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

6. 如果 $a-b=2$, 那么代数式 $\frac{2}{a+b} \cdot \left(1 + \frac{2b}{a-b}\right)$ 的值是

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

7. 如图，在正方形网格中，以点 O 为位似中心， $\triangle ABC$ 的位似图形可以是

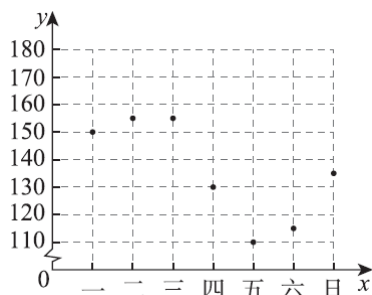
- (A) $\triangle DEF$ (B) $\triangle DHF$
(C) $\triangle GEH$ (D) $\triangle GDH$



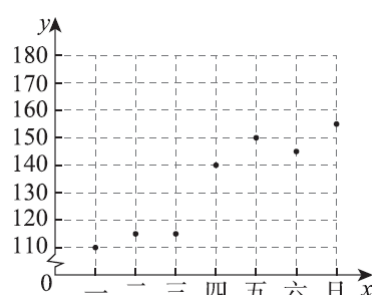
8. 小明近期计划阅读一本总页数不低于 300 页的名著，他制定的阅读计划如下：

星期	一	二	三	四	五	六	日
页数	15	20	15	10	20	40	30

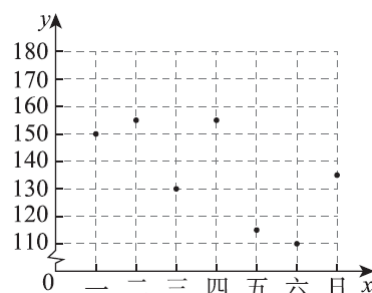
若小明按照计划从星期 x 开始连续阅读，10 天后剩下的页数为 y ，则 y 与 x 的图象可能为



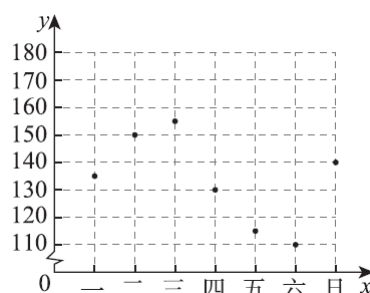
(A)



(B)



(C)



(D)

第二部分 非选择题

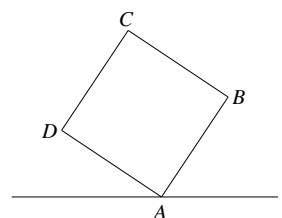
二、填空题（共 16 题，每题 2 分）

9. 若代数式 $\frac{1}{2-x}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

10. 分解因式： $ax^2 - 4a =$ _____.

11. 用一个 x 的值说明 “ $\sqrt{x^2} = x$ ” 是错误的，则 x 的值可以是_____.

12. 如图，正方形 $ABCD$ ，点 A 在直线 l 上，点 B 到直线 l 的距离为 3，点 D 到直线 l 的距离为 2，则正方形的边长为_____.



13. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1, y_1)$ 和点 $B(3, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上. 若 $y_1 < y_2$ ，写出一个满足条件的 k 的值_____.

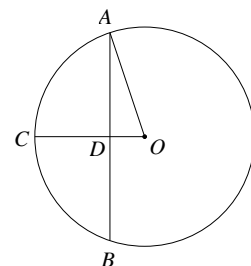
14. 咖啡树种子的发芽能力会随着保存时间的增长而减弱. 咖啡树种子保存到三个月时，发芽率约为

95%；从三个月到五个月，发芽率会逐渐降到 75%；从五个月到九个月，发芽率会逐渐降到 25%．农科院记录了某批咖啡树种子的发芽情况，结果如下表所示：

种子数量 n	10	50	150	300	500	800
发芽数量 m	9	41	133	261	431	689
发芽率 $\frac{m}{n}$	0.9	0.82	0.887	0.87	0.862	0.861

据此推测，下面三个时间段中，这批咖啡树种子的保存时间是_____（填“三个月内”“三至五个月”或“五至九个月”）．

15. 如图， AB 为 $\odot O$ 的弦， C 为 $\odot O$ 上一点， $OC \perp AB$ 于点 D ．若 $OA = \sqrt{10}$ ， $AB = 6$ ，则 $\tan \angle AOD =$ _____．



16. 四个互不相等的实数 a, b, c, m 在数轴上的对应点分别为 A, B, C, M ，其中 $a=4, b=7, c$ 为整数， $m=0.2(a+b+c)$ ．

- (1) 若 $c=10$ ，则 A, B, C 中与 M 距离最小的点为_____；
 (2) 若在 A, B, C 中，点 C 与点 M 的距离最小，则符合条件的点 C 有_____个．

三、解答题（共 68 分，第 17 - 20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22 题 5 分，第 23 - 24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27 - 28 题，每题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

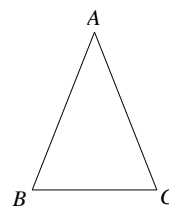
17. 计算： $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |1 - \sqrt{3}| - \tan 60^\circ - (\pi + 2023)^0$ ．

18. 解不等式 $\frac{x-1}{2} \geq \frac{2}{3}x - 1$ ，并把它解集在数轴上表示出来．

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ．

- (1) 使用直尺和圆规，作 $AD \perp BC$ 交 BC 于点 D （保留作图痕迹）；
 (2) 以 D 为圆心， DC 的长为半径作弧，交 AC 于点 E ，连接 BE, DE ．

- ① $\angle BEC =$ _____°；
 ② 写出图中一个与 $\angle CBE$ 相等的角_____．



20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ ($m < 0$)．

- (1) 判断方程根的情况，并说明理由；
 (2) 若方程一个根为 -1 ，求 m 的值和方程的另一个根．

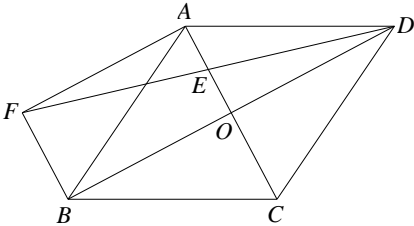
21. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx - 1$ 与 $y = \frac{1}{2}x$ 交于点 $A(2, m)$ ．

- (1) 求 k, m 的值；

(2) 已知点 $P(n, 0)$ ，过点 P 作垂直于 x 轴的直线交直线 $y = kx - 1$ 于点 M ，交直线 $y = \frac{1}{2}x$ 于点 N 。若 $MN=2$ ，直接写出 n 的值。

22. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 交于点 O ， E 为 OA 中点。连接 DE 并延长至点 F ，使得 $EF=DE$ 。连接 AF ， BF 。

- (1) 求证：四边形 $AFBO$ 为平行四边形；
 (2) 若 $\angle BDA = \angle BDC$ ，求证：四边形 $AFBO$ 为矩形。



23. 某企业生产甲、乙两款红茶，为了解两款红茶的质量，请消费者和专业机构分别测评。随机抽取 25 名消费者对两款红茶评分，并对数据进行整理、描述和分析，下面给出了部分信息。

a. 甲款红茶分数（百分制）的频数分布表如下：

分数	$70 \leq x < 75$	$75 \leq x < 80$	$80 \leq x < 85$	$85 \leq x < 90$	$90 \leq x < 95$	$95 \leq x \leq 100$
频数	2	1	4			4

b. 甲款红茶分数在 $85 \leq x < 90$ 这一组的是：

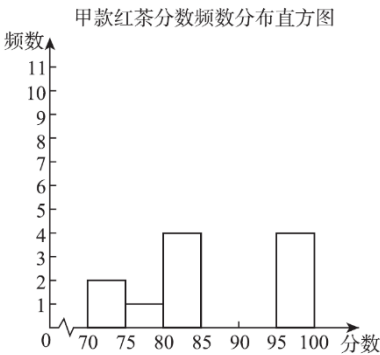
86 86 86 86 86 87 87 88 88 89

c. 甲、乙两款红茶分数的平均数、众数、中位数如下表所示：

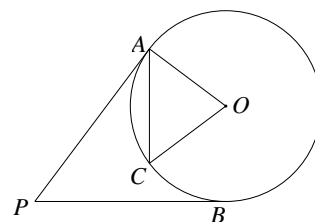
品种	平均数	众数	中位数
甲	86.6	m	n
乙	87.5	90	86

根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 补全甲款红茶分数的频数分布直方图；
 (2) 表格中 m 的值为_____， n 的值为_____；
 (3) 专业机构对两款红茶的条索、色泽、整碎、净度、内质、香气、滋味醇厚度、汤色、叶底来进行综合评分如下：甲款红茶 93 分，乙款红茶 87 分。若以这 25 名消费者评分的平均数和专业机构的评分按照 6:4 的比例确定最终成绩，可以认定_____款红茶最终成绩更高（填“甲”或“乙”）。



24. 如图, P 为 $\odot O$ 外一点, PA, PB 是 $\odot O$ 的切线, A, B 为切点, 点 C 在 $\odot O$ 上, 连接 OA, OC, AC .



(1) 求证: $\angle AOC = 2\angle PAC$;

(2) 连接 OB , 若 $AC \parallel OB$, $\odot O$ 的半径为 5, $AC = 6$, 求 AP 的长.

25. 小明发现某乒乓球发球器有“直发式”与“间发式”两种模式. 在“直发式”模式下, 球从发球器出口到第一次接触台面的运动轨迹近似为一条抛物线; 在“间发式”模式下, 球从发球器出口到第一次接触台面的运动轨迹近似为一条直线, 球第一次接触台面到第二次接触台面的运动轨迹近似为一条抛物线. 如图 1 和图 2 分别建立平面直角坐标系 xOy .

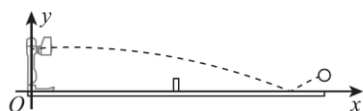


图 1 直发式

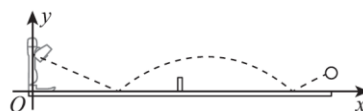


图 2 间发式

通过测量得到球距离台面高度 y (单位: dm) 与球距离发球器出口的水平距离 x (单位: dm) 的相关数据, 如下表所示:

表 1 直发式

x (dm)	0	2	4	6	8	10	16	20	...
y (dm)	3.84	3.96	4	3.96	m	3.64	2.56	1.44	...

表 2 间发式

x (dm)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	...
y (dm)	3.36	n	1.68	0.84	0	1.40	2.40	3	3.20	3	...

根据以上信息, 回答问题:

(1) 表格中 $m =$ _____, $n =$ _____;

(2) 求“直发式”模式下, 球第一次接触台面前的运动轨迹的解析式;

(3) 若“直发式”模式下球第一次接触台面时距离出球点的水平距离为 d_1 , “间发式”模式下球第二次接触台面时距离出球点的水平距离为 d_2 , 则 d_1 _____ d_2 (填 “ $>$ ” “ $=$ ” 或 “ $<$ ”).

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + a + 2$ ($a > 0$) 过点 $(1, 4a + 2)$.

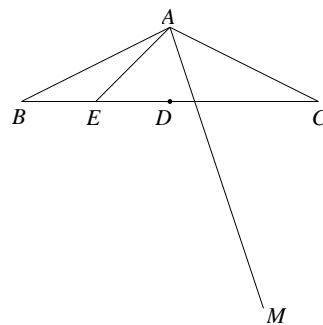
(1) 求该抛物线的顶点坐标;

(2) 过抛物线与 y 轴的交点作 y 轴的垂线 l , 将抛物线在 y 轴右侧的部分沿直线 l 翻折, 其余部分保持不变, 得到图形 G , $M(-1-a, y_1)$, $N(-1+a, y_2)$ 是图形 G 上的点, 设 $t = y_1 + y_2$.

①当 $a = 1$ 时, 求 t 的值;

②若 $6 \leq t \leq 9$ ，求 a 的取值范围.

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=2\alpha$ ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$)， D 是 BC 的中点， E 是 BD 的中点，连接 AE . 将射线 AE 绕点 A 逆时针旋转 α 得到射线 AM ，过点 E 作 $EF \perp AE$ 交射线 AM 于点 F .



(1) ①依题意补全图形；

②求证： $\angle B = \angle AFE$ ；

(2) 连接 CF ， DF ，用等式表示线段 CF ， DF 之间的数量关系，并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于 $\triangle OAB$ 和点 P (不与点 O 重合) 给出如下定义：若边 OA ， OB 上分别存在点 M ，点 N ，使得点 O 与点 P 关于直线 MN 对称，则称点 P 为 $\triangle OAB$ 的“翻折点”.

(1) 已知 $A(3, 0)$ ， $B(0, 3\sqrt{3})$.

①若点 M 与点 A 重合，点 N 与点 B 重合，直接写出 $\triangle OAB$ 的“翻折点”的坐标；

② P 是线段 AB 上一动点，当 P 是 $\triangle OAB$ 的“翻折点”时，求 AP 长的取值范围；

(2) 直线 $y = -\frac{3}{4}x + b$ ($b > 0$) 与 x 轴， y 轴分别交于 A ， B 两点，若存在以直线 AB 为对称轴，且斜

边长为 2 的等腰直角三角形，使得该三角形边上任意一点都为

$\triangle OAB$ 的“翻折点”，直接写出 b 的取值范围.

参考答案

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	C	B	B	C	A

第二部分 非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. $x \neq 2$ 10. $a(x+2)(x-2)$ 11. -1（答案不唯一）
 12. $\sqrt{13}$ 13. -1（答案不唯一） 14. 三至五个月
 15. 3 16. A, 3

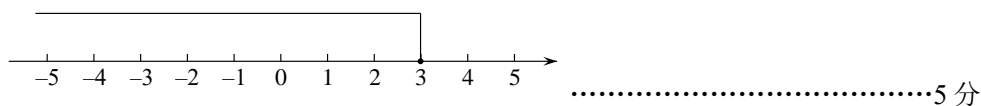
三、解答题（共 68 分，第 17-20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22 题 5 分，第 23-24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分） 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17.（本题满分 5 分）

解：原式 $= 2 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1$ 4 分
 $= 0$5 分

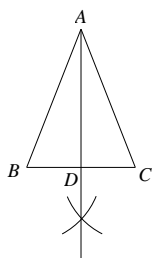
18.（本题满分 5 分）

解：去分母，得 $3(x-1) \geq 4x-6$1 分
 去括号，得 $3x-3 \geq 4x-6$2 分
 移项，得 $3x-4x \geq -6+3$.
 合并同类项，得 $-x \geq -3$3 分
 系数化为 1，得 $x \leq 3$4 分
 解集在数轴上表示如图所示：



19.（本题满分 5 分）

解：（1）



$\therefore AD$ 即为所求.2 分

(2) ① 90° ;4 分

② $\angle DEB$ (答案不唯一).5 分

20. (本题满分 5 分)

解: (1) 方程有两个不相等的实数根.1 分

理由如下:

$$\because a=1, b=-2, c=m,$$

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m = 4 - 4m.$$

$$\because m < 0,$$

$$\therefore \Delta > 0.$$

\therefore 方程有两个不相等的实数根.2 分

(2) \because 方程的一个根为 -1 ,

$$\therefore 1 + 2 + m = 0.$$

$$\therefore m = -3.3 分$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$$\therefore x_1 = 3, x_2 = -1.$$

\therefore 方程的另一个根为 $x = 3$5 分

21. (本题满分 6 分)

解: (1) \because 点 $A(2, m)$ 在直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上,

$$\therefore m = \frac{1}{2} \times 2 = 1.2 分$$

\therefore 点 $A(2, 1)$ 在直线 $y = kx - 1$ 上.

$$\therefore 2k - 1 = 1.$$

$$\therefore k = 1.4 分$$

(2) -2 或 66 分

22. (本题满分 5 分)

(1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

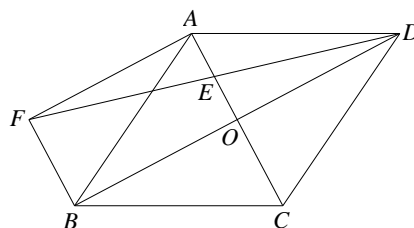
$$\therefore OB = OD.1 分$$

$$\because EF = DE,$$

$$\therefore OE \parallel BF, OE = \frac{1}{2}BF.$$

$\because E$ 为 OA 中点,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OA.$$



$$\therefore OA = BF.$$

\therefore 四边形 $AFBO$ 为平行四边形.3 分

(2) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle CBD = \angle BDA.$$

$$\because \angle BDA = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle BDC.$$

$$\therefore CB = CD.$$

\therefore 平行四边形 $ABCD$ 为菱形.

$$\therefore AC \perp BD.$$

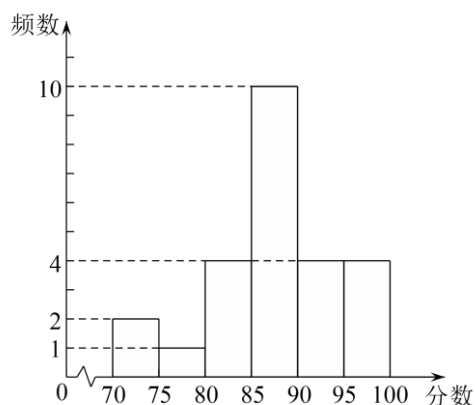
$$\therefore \angle AOB = 90^\circ.$$

\because 四边形 $AFBO$ 为平行四边形,

\therefore 四边形 $AFBO$ 为矩形.5 分

23. (本题满分 6 分)

(1) 补全甲款红茶分数的频数分布直方图



.....2 分

(2) 86, 87;4 分

(3) 甲.6 分

24. (本题满分 6 分)

(1) 证明: $\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线, 切点为 A ,

$$\therefore OA \perp PA.$$

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ.$$

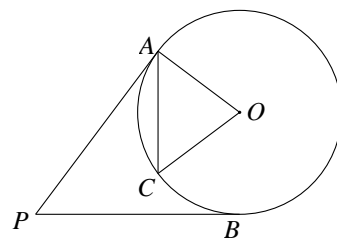
$$\therefore \angle OAC = 90^\circ - \angle PAC.$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA.$$

$$\therefore \angle AOC = 180^\circ - 2\angle OAC.$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle PAC. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$



(2) 解：延长 AC 交 PB 于点 D ，过点 O 作 $OE \perp AC$ 于 E 。

$$\therefore \angle OEC = 90^\circ.$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore AE = EC, \angle AOE = \angle COE.$$

$$\because \angle AOC = 2\angle PAC,$$

$$\therefore \angle AOE = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle PAC.$$

$$\because AC = 6, \odot O \text{ 的半径为 } 5,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AC = 3.$$

$$\therefore OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = 4.$$

$$\therefore \cos \angle AOE = \frac{OE}{OA} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore \cos \angle PAC = \cos \angle AOE = \frac{4}{5}.$$

$$\because PB \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线, 切点为 } B,$$

$$\therefore OB \perp PB.$$

$$\therefore \angle OBP = 90^\circ.$$

$$\because AC \parallel OB,$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle OBP = 90^\circ.$$

$$\because \angle OEC = 90^\circ,$$

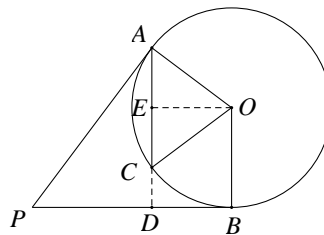
$$\therefore \text{四边形 } OEDB \text{ 是矩形}.$$

$$\therefore ED = OB = 5.$$

$$\therefore AD = AE + ED = 8.$$

$$\text{在 } \triangle APD \text{ 中, } \angle APD = 90^\circ,$$

$$\therefore AP = \frac{AD}{\cos \angle PAC} = 10. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$



25. (本题满分 5 分)

(1) 3.84, 2.52; $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(2) 由题意可知, 抛物线的顶点为 (4, 4),

$$\therefore \text{设抛物线的解析式为 } y = a(x - 4)^2 + 4.$$

$$\because \text{当 } x = 6 \text{ 时, } y = 3.96,$$

$$\therefore 3.96 = a(6 - 4)^2 + 4, \text{ 解得 } a = -0.01.$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -0.01(x - 4)^2 + 4. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(3) = . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

26. (本题满分 6 分)

(1) \because 抛物线 $y = ax^2 + bx + a + 2$ 过点 $(1, 4a + 2)$,

$$\therefore 4a + 2 = a + b + a + 2.$$

$$\therefore b = 2a. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore y = ax^2 + 2ax + a + 2 = a(x+1)^2 + 2.$$

$$\therefore \text{抛物线的顶点坐标为 } (-1, 2). \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) ① $\because a = 1$,

$$\therefore \text{点 } M(-2, y_1), N(0, y_2), y = (x+1)^2 + 2.$$

$$\therefore y_1 = y_2 = 3.$$

$$\therefore t = y_1 + y_2 = 6. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

② $\because y = ax^2 + 2ax + a + 2$,

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的解析式为 } y = a + 2.$$

当 $0 < a < 1$ 时, $-1 - a < -1 + a < 0$,

\therefore 点 M, N 在原抛物线上.

\therefore 点 M, N 关于 $x = -1$ 对称.

$$\therefore y_1 = y_2.$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y_0 = a + 2.$$

$$\because a > 0,$$

\therefore 抛物线开口向上.

$\therefore x \geq -1$ 时, y 随 x 的增大而增大.

$$\therefore y_2 < y_0.$$

$$\therefore t = y_1 + y_2 < 2(a + 2) < 6, \text{ 不符合题意.}$$

当 $a = 1$ 时, 由①可知 $t = 6$, 符合题意.

当 $a > 1$ 时, $-1 - a < 0 < -1 + a$.

\therefore 点 M 在原抛物线上,

点 N 在原抛物线沿直线 l 翻折后的抛物线上.

\therefore 点 N 关于直线 l 的对称点 N' 在原抛物线上.

$$\therefore \text{点 } M(-1-a, y_1) \text{ 与点 } N'(-1+a, 2a+4-y_2) \text{ 关于 } x = -1 \text{ 对称.}$$

$$\therefore y_1 = 2a + 4 - y_2.$$

$$\therefore t = y_1 + y_2 = 2a + 4.$$

$$\because 6 \leq t \leq 9,$$

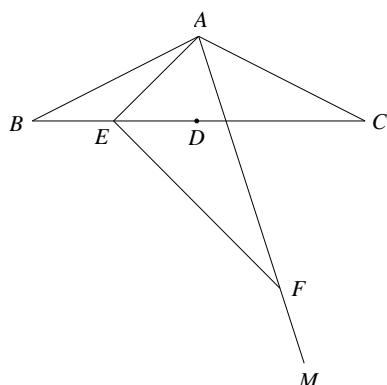
$$\therefore 1 \leq a \leq \frac{5}{2}.$$

$$\therefore 1 < a \leq \frac{5}{2}.$$

综上所述, a 的取值范围是 $1 \leq a \leq \frac{5}{2}$6 分

27. (本题满分 7 分)

(1) ①依题意补全图形.



.....1 分

② $\because AB = AC$, $\angle BAC = 2\alpha$,

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

$\because EF \perp AE$,

$\therefore \angle AEF = 90^\circ$.

$\because \angle EAF = \alpha$,

$\therefore \angle AFE = 90^\circ - \alpha$.

$\therefore \angle B = \angle AFE$3 分

(2) 线段 CF 与 DF 的数量关系为 $CF = DF$4 分

证明: 延长 FE 至点 G , 使 $EG = EF$, 连接 AG , BG .

$\because AE \perp EF$,

$\therefore AE$ 垂直平分 GF .

$\therefore AG = AF$.

$\therefore \angle GAE = \angle EAF = \alpha$.

$\therefore \angle GAF = \angle GAE + \angle EAF = 2\alpha$.

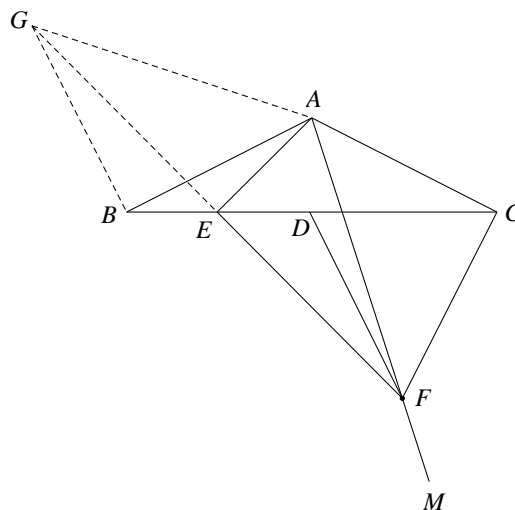
$\because \angle BAC = 2\alpha$,

$\therefore \angle GAF = \angle BAC$.

$\therefore \angle GAB = \angle FAC$.

$\because AB = AC$, $AG = AF$,

$\therefore \triangle AGB \cong \triangle AFC$ (SAS).



$$\therefore GB = FC.$$

$\because E$ 为 BD 中点,

$$\therefore BE = DE.$$

$$\therefore \angle GEB = \angle DEF,$$

$$\therefore \triangle GBE \cong \triangle FDE \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore GB = DF.$$

$$\therefore DF = CF. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

28. (本题满分 7 分)

(1) ① $(\frac{9}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$; $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

② \because 如图, 点 O 与点 P 关于直线 MN 对称,

$$\therefore MN \text{ 垂直平分 } OP.$$

$$\therefore OM = PM, ON = PN.$$

\therefore 点 P 为分别以点 M, N 为圆心, MO, NO 为半径的圆的交点

(其中一个交点为 O , 另一个交点为 P).

$$\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

\because 点 M, N 分别在 OB, OA 上,

\therefore 如图, 点 P 所在的区域为分别以点 A, B 为圆心, OA, OB 为半径的两圆内部的公共部分

(含边界, 不含点 O), 设两圆与线段 AB 分别交于 C, D 两点,

则点 P 在线段 CD 上运动.

$$\therefore A(3, 0), B(0, 3\sqrt{3}),$$

$$\therefore OA = AC = 3, OB = BD = 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = 6.$$

$$\therefore AP \text{ 的最大值为 } 3, AP \text{ 的最小值为 } 6 - 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore 6 - 3\sqrt{3} \leq AP \leq 3. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) $b \geq \frac{1+\sqrt{7}}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

