2021 北京昌平初三二模

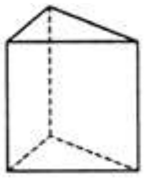
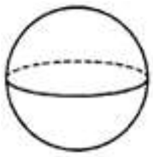
数　　学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

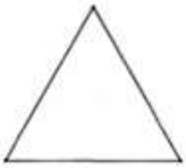
1．（2 分）自 2021 年 1 月 1 日起，全市启动九类重点人群新冠疫苗接种工作．昌平设置 46 个疫苗接种点位，共配备医务人员 1200 多名．截至 3 月 28 日 18 时，昌平区累计新冠疫苗接种共完成 1015000 人次，整体接种秩序井然．将 1015000 用科学记数法表示应为(　　)

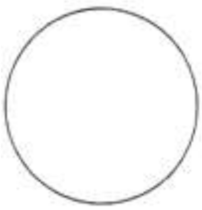
A．10.15×10^{6}　　B．1.015×10^{6}　　C．0.1015×10^{7}　　D．1.015×10^{7}

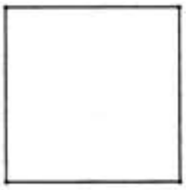
2．（2 分）下列几何体的主视图和俯视图完全相同的是(　　)

A．
B．
C．
D．

3．（2 分）下列图形中是轴对称图形，但不是中心对称图形的是(　　)

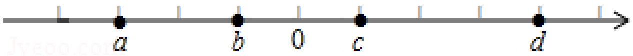
A．等边三角形

B．圆

C．正方形

D．正六边形

4．（2 分）实数 a，b，c，d 在数轴上对应的点的位置如图所示，下列结论正确的是(　　)

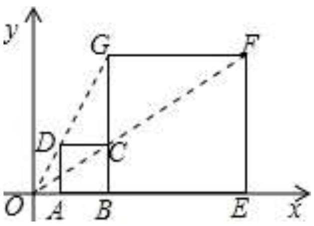


A．$|a|<|b|$　　B．$ad>0$　　C．$a+c>0$　　D．$d-a>0$

5．（2 分）如果一个多边形的内角和与外角和相等，那么这个多边形的边数是(　　)

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

6．（2 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABCD$ 和正方形 $BEFG$ 是以原点 O 为位似中心的位似图形，且相似比是 $\frac{1}{3}$，点 A，B，E 在 x 轴上，若正方形 $BEFG$ 的边长为 12，则点 C 的坐标为(　　)



A．$(6,2)$　　B．$(6,4)$　　C．$(4,4)$　　D．$(8,4)$

7．（2 分）疫情期间进入学校都要进入测温通道，体温正常才可进入学校，昌平某校有 2 个测温通道，分别记为A、B通道，学生可随机选取其中的一个通道测温进校园．某日早晨该校所有学生体温正常．小王和小李两同学该日早晨进校园时，选择同一通道测温进校园的概率是(　　)

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

8．（2 分）世界各国温度的计量单位尚不统一，常用的有摄氏温度$(^{\circ}C)$和华氏温度$(^{\circ}F)$两种，它们之间的换算关系如表所示：

摄氏（单位$^{\circ}C$）	…	0	1	2	3	4	5	6	…
华氏（单位$^{\circ}F$）	…	32	33.8	35.6	37.4	39.2	41	42.8	…

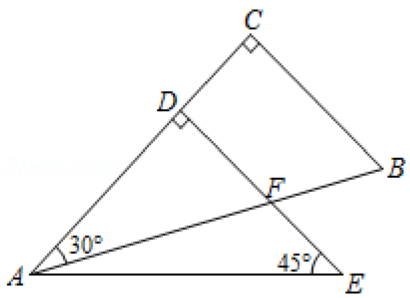
那么当华氏度与摄氏度对应相等时的温度值是(　　)

A．32　　B．-20　　C．-40　　D．40

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分

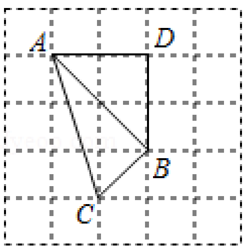
9．（2 分）代数式$\sqrt{2x-4}$有意义时，x应满足的条件是____．

10．（2 分）将一副三角板如图摆放，斜边AB与直角边DE相交于点F，则$\angle BFE=$____．



11．（2 分）写出一个比$\sqrt{8}$小的正整数是____．

12．（2 分）如图所示的网格是正方形网格，点A，B，C，D是网格线交点，则ΔABC的面积与ΔADB的面积大小关系为：$S_{\Delta ABC}$____$S_{\Delta ADB}$（填“$>$”“$=$”或“$<$”）．



13．（2 分）方程组$\begin{cases}2x+y=4\\x-y=2\end{cases}$的解为____．

14．（2 分）今年五月某中学举行一次“新冠”防疫知识竞赛，该校九年级 1 班、2 班各选派了 6 名学生参赛，为了全面了解、比较两个班级的参赛学生的实力，请你根据表格成绩对他们进行统计分析：

1 班	65	70	70	70	75	82
2 班	55	70	70	75	80	82

请问：$\overline{x_1}$____$\overline{x_2}$，s_1^2____s_2^2．（填“$>$”“$=$”或“$<$”）

15．（2 分）有一条抛物线，两位同学分别说了它的一个特点：

甲：对称轴是直线 $x=4$；

乙：顶点到 x 轴的距离为 2．

请你写出一个符合条件的解析式：____．

16．（2 分）盒子里有甲、乙、丙三种粒子，若相同种类的两颗粒子发生碰撞，则变成一颗乙粒子；不同种类的两颗粒子发生碰撞，会变成第三种粒子．例如一颗甲粒子和一颗乙粒子发生碰撞则变成一颗丙粒子，现有甲粒子 6 颗，乙粒子 4 颗，丙粒子 5 颗，如果经过各种两两碰撞后，只剩下 1 颗粒子，给出下列结论：

①最后一颗粒子可能是甲粒子；

②最后一颗粒子一定不是乙粒子；

③最后一颗粒子可能是丙粒子．

其中正确结论的序号是：____．

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程

17．（5 分）计算：$\sqrt{8}-(\frac{1}{2})^{-1}+|-2|-4\sin 45^{\circ}$．

18．（5 分）解不等式组：$\begin{cases}4x-6<2x\\ \dfrac{3x-2}{5}>\dfrac{x}{3}\end{cases}$，并把解集表示在数轴上．

19．（5 分）已知 $x^{2}+x-1=0$，求代数式 $(3x+1)^{2}-x(x-2)$ 的值．

20．（5 分）下面是小明同学设计的“作一个角等于已知角的 2 倍”的尺规作图过程．

已知：$\angle AOB$．

求作：$\angle ADC$，使 $\angle ADC=2\angle AOB$．

作法：如图，

①在射线 OB 上任取一点 C；

②作线段 OC 的垂直平分线，交 OA 于点 D，交 OB 于点 E，连接 DC．

所以 $\angle ADC$ 即为所求的角．

根据小明设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面证明（说明：括号里填写作图依据）．

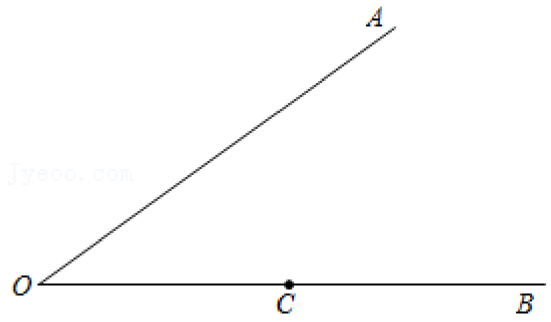
证明：$\because DE$ 是线段 OC 的垂直平分线，

$\therefore OD=$____（____），

$\therefore \angle AOB=$____（____），

$\because \angle ADC=\angle AOB+\angle DCO$，

$\therefore \angle ADC=2\angle AOB$．



21.（5 分）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+a=0$ 有两个不相等的实数根.

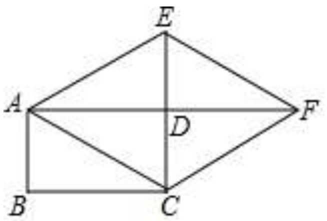
（1）求 a 的取值范围；

（2）请你给出一个符合条件的 a 的值，并求出此时方程的解.

22.（5 分）如图，矩形 $ABCD$，延长 AD 至点 F，使 $DF=AD$，连接 AC，CF，过点 A 作 $AE//CF$ 交 CD 的延长线于点 E，连接 EF.

（1）求证：四边形 $ACFE$ 是菱形；

（2）连接 BE 交 AD 于点 G．当 $AB=2$，$\tan\angle ACB=\dfrac{1}{2}$ 时，求 BE 的长.



23.（6 分）为了解昌平区两校学生对垃圾分类知识的掌握情况，从甲、乙两所学校各随机抽取 40 名学生进行垃圾分类知识的测试，获得了他们的成绩（百分制）并对数据（成绩）进行了整理、描述和分析．下面给出了部分信息.

a．甲、乙两校 40 名学生成绩的频数分布统计表如表：

成绩 x 学校	$50\leqslant x<60$	$60\leqslant x<70$	$70\leqslant x<80$	$80\leqslant x<90$	$90\leqslant x\leqslant 100$
甲	4	15	9	10	2
乙	6	3	15	14	2

（说明：成绩 80 分及以上为优秀，70～79 分为良好，60～69 分为合格，60 分以下为不合格）

b．甲校成绩在 $70\leqslant x<80$ 这一组的是：70，70，71，72，73，74，76，77，79.

c．甲、乙两校成绩的平均分、中位数、众数如表：

学校	平均分	中位数	众数
甲	74.2	n	85
乙	73.5	76	84

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 n 的值；

（2）估计乙校 200 名学生中，成绩优秀的学生人数是____；

（3）假设甲校 200 名学生都参加此次测试，并决定年级排名在前 100 名的学生都可以被评为“垃圾分类知识标兵”荣誉称号，预估甲校学生至少要达到____分可以获得此荣誉称号.

24.（6 分）在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象与直线 $l: y=-x-2$ 交于点 $A(a,-4)$，直线 l 与 x 轴交于点 B.

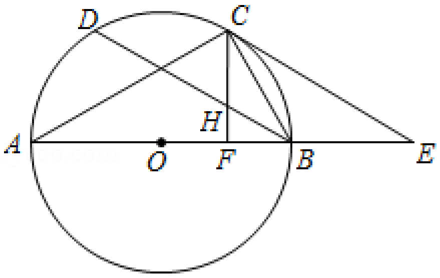
（1）求 a，k 的值；

（2）在 y 轴上存在一点 C，使得 $S_{\Delta ABC}=3$，求点 C 的坐标.

25.（6 分）如图，AB 为 $\odot O$ 直径，点 C，D 在 $\odot O$ 上，且 $CD=CB$，过点 C 作 $CE//BD$，交 AB 延长线于点 E.

（1）求证：CE 为 $\odot O$ 切线；

（2）过点 C 作 $CF\perp AE$ 交 BD 于 H 点，$\angle E=30°$，$CH=6$，求 BE 的长.



26.（6 分）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+3a(a\neq 0)$ 与 x 轴的交点为点 $A(1,0)$ 和点 B.

（1）直接写出抛物线的对称轴和点 B 的坐标；

（2）分别过点 $P(t,0)$ 和点 $Q(t+2,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 M 和点 N，记抛物线在 M，N 之间的部分为图象 G（包括 M，N 两点）．记图形 G 上任意一点的纵坐标的最大值是 m，最小值为 n.

①当 $a=2$ 时，画出抛物线的图象，根据图象直接写出 $m-n$ 的最小值；

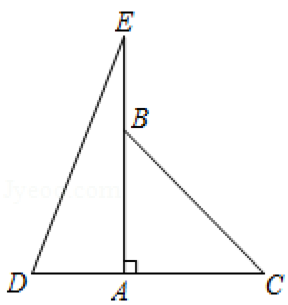
②若存在实数 t，使得 $m-n=2$，直接写出 a 的取值范围.

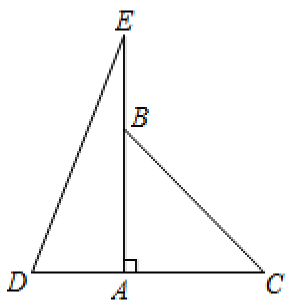
27.（7 分）如图，在等腰直角 ΔABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，点 D 是 CA 延长线上一点，点 E 是 AB 延长线上一点，且 $AD=BE$，过点 A 作 DE 的垂线交 DE 于点 F，交 BC 的延长线于点 G.

（1）依题意补全图形；

（2）当 $\angle AED=\alpha$，请你用含 α 的式子表示 $\angle AGC$；

（3）用等式表示线段 CG 与 AD 之间的数量关系，并写出证明思路.





备用图

28.（7 分）对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 M，N，给出如下定义：P 为图形 M 上任意一点，Q 为图形 N 上任意一点，如果 P，Q 两点间的距离有最小值，那么称这个最小值为图形 M，N 间的“闭距离”，记作 $d(M,N)$．特殊地，当图形 M 与图形 N 有公共点时，规定 $d(M,N)=0$.

已知点 $A(-2,0)$，$B(0$，$2\sqrt{3})$，$C(2,0)$，$D(0,m)$.

（1）①求 d（点 O，线段 AB）；

②若 d（线段 CD，直线 AB）$=1$，直接写出 m 的值；

（2）$\odot O$ 的半径为 r，若 $d(\odot O, AB) \leqslant 1$，直接写出 r 的取值范围；

（3）若直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 上存在点 E，使 $d(E, \Delta ABC)=1$，直接写出 b 的取值范围．

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1.【分析】科学记数法的表示形式为$a\times 10^{n}$的形式，其中$1\leqslant |a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值$\geqslant 10$时，n是正数；当原数的绝对值<1时，n是负数．

【解答】解：将 1015000 用科学记数法表示为：1.015×10^{6}．

故选：B．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为$a\times 10^{n}$的形式，其中$1\leqslant |a|<10$，n为整数，表示时关键要正确确定a的值以及n的值．

2.【分析】主视图、俯视图是分别从物体正面、上面看，所得到的图形．

【解答】解：A、主视图是矩形，俯视图是圆，故本选项不合题意；

B、主视图是等腰三角形，俯视图是带圆心的圆，故本选项不合题意；

C、主视图是矩形，俯视图是三角形，故本选项不合题意；

D、主视图和俯视图完全相同，是等圆，故本选项符合题意．

故选：D．

【点评】本题考查了几何体的三种视图，掌握定义是关键．注意所有的看到的棱都应表现在三视图中．

3.【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解．

【解答】解：A、等边三角形是轴对称图形，但不是中心对称图形．故本选项符合题意；

B、圆既是轴对称图形，又是中心对称图形．故本选项不合题意；

C、正方形既是轴对称图形，又是中心对称图形．故本选项不合题意；

D、正六边形既是轴对称图形，又是中心对称图形．故本选项不合题意．

故选：A．

【点评】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合．

4.【分析】根据实数在数轴上的位置，得出各个数的大小关系，再根据绝对值的大小，判断相关代数式的符号．

【解答】解：由实数a，b，c，d在数轴上对应的点的位置可知，$a<b<0<c<d$，

$\therefore |a|>|b|$，$ad<0$，$a+c<0$，$d-a>0$，

因此选项D正确，

故选：D．

【点评】本题考查数轴表示数，有理数的四则运算法则，理解符号、绝对值是确定有理数的必要条件．

5.【分析】利用多边形的内角和与外角和公式列出方程，然后解方程即可．

【解答】解：设多边形的边数为n，根据题意

$(n-2)\cdot 180^{\circ}=360^{\circ}$，

解得$n=4$．

故选：B．

【点评】本题考查了多边形的内角和公式与多边形的外角和定理，需要注意，多边形的外角和与边数无关，任何多边形的外角和都是360°.

6.【分析】根据位似图形的概念得到$BC//EF$，进而证明$\Delta OBC\backsim\Delta OEF$，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可.

【解答】解：$\because$正方形$ABCD$和正方形$BEFG$是以原点O为位似中心的位似图形，且相似比是$\dfrac{1}{3}$，正方形$BEFG$的边长为12，

$\therefore BC//EF$，$\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{1}{3}$，$BC=4$，

$\therefore \Delta OBC\backsim\Delta OEF$，

$\therefore \dfrac{OB}{OE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{1}{3}$，即$\dfrac{OB}{OB+12}=\dfrac{1}{3}$，

解得，$OB=6$，

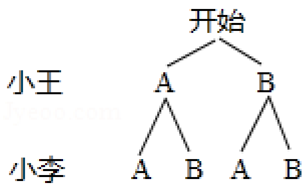
$\therefore$点C的坐标为$(6,4)$，

故选：B.

【点评】本题考查的是位似图形的概念、相似三角形的性质，掌握位似变换的两个图形相似、对应边平行是解题的关键.

7.【分析】画树状图，得出所有等可能的结果和满足条件的结果，再由概率公式求解即可.

【解答】解：画树状图如图：



共有4个等可能的结果，小王和小李两同学该日早晨进校园时，选择同一通道测温进校园的结果有2个，

$\therefore$小王和小李两同学该日早晨进校园时，选择同一通道测温进校园的概率为$\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

故选：C.

【点评】此题考查了列表法或树状图法求概率．用到的知识点为：概率$=$所求情况数与总情况数之比.

8.【分析】根据题意目中的数据可以求得y与x的函数关系式，令$y=x$即可解答本题.

【解答】解：设华氏度y与摄氏度x的函数关系式是$y=kx+b$，

$\begin{cases}b=32\\5k+b=41\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\dfrac{9}{5}\\b=32\end{cases}$，

即y与x的函数关系式是$y=\dfrac{9}{5}x+32$；

令$y=x$，

则$x=\dfrac{9}{5}x+32$，

解得，$x=-40$，

即当华氏度与摄氏度对应相等时的温度值是 -40 度．

故选：C．

【点评】本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质解答．

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分

9．【分析】根据二次根式的被开方数是非负数得到 $2x-4\geqslant 0$，求解即可．

【解答】解：由题意，得 $2x-4\geqslant 0$，

解得 $x\geqslant 2$．

故答案为：$x\geqslant 2$．

【点评】考查了二次根式的意义和性质．概念：式子 $\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$ 叫二次根式．性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义．

10．【分析】根据已知条件得到 $\angle DAE=\angle E=45^{\circ}$，$\angle CAF=30^{\circ}$，根据角的和差得到 $\angle EAF=\angle DAE-\angle DAF=15^{\circ}$，由外角的性质即可得到结论．

【解答】解：$\because \angle DAE=\angle E=45^{\circ}$，$\angle CAF=30^{\circ}$，

$\therefore \angle EAF=\angle DAE-\angle DAF=15^{\circ}$，

$\therefore \angle BFE=\angle FAE+\angle E=15^{\circ}+45^{\circ}=60^{\circ}$，

故答案为：60°．

【点评】本题考查了三角形外角的性质，三角形的内角和定理，熟练掌握三角形的内角和定理是解题的关键．

11．【分析】先估计 $\sqrt{8}$ 的大小，再根据条件确定答案．

【解答】解：$\because 4<8<9$，

$\therefore 2<\sqrt{8}<3$，

$\therefore$ 写出一个比 $\sqrt{8}$ 小的正整数是 2．

故答案为：2（答案不唯一）．

【点评】本题考查了估计无理数的大小，知道算术平方根与平方的关系是解题的关键．

12．【分析】根据勾股定理逆定理证明 ΔABC 是直角三角形，然后分别求出 ΔABC 的面积和 ΔABD 的面积，即可求解．

【解答】解：$\because AB^{2}=8$，$BC^{2}=2$，$AC^{2}=10$，

$\therefore AB^{2}+BC^{2}=AC^{2}$，

$\therefore \Delta ABC$ 是直角三角形，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=2$，$S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}$，

故答案为：$=$．

【点评】本题考查了三角形的面积，勾股定理逆定理，掌握三角形的面积公式是本题的关键．

13．【分析】①＋②得出 $3x=6$，求出 x 把 $x=2$ 代入②求出 y 即可．

【解答】解：$\begin{cases}2x+y=4 ① \\ x-y=2 ②\end{cases}$，

①+②，得 $3x=6$，

解得：$x=2$，

把 $x=2$ 代入②，得 $2-y=2$，

解得：$y=0$，

所以方程组的解是 $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$，

故答案为：$\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.

【点评】本题考查了解二元一次方程组，能把二元一次方程组转化成一元一次方程是解此题的关键.

14．【分析】根据算术平均数和方差的定义分别列式计算即可.

【解答】解：$\because \overline{x_1}=\dfrac{65+70\times3+75+82}{6}=72$，$\overline{x_2}=\dfrac{55+70\times2+75+80+82}{6}=72$，

$\therefore s_1^2=\dfrac{1}{6}\times[(65-72)^2+3\times(70+72)^2+(75-72)^2+(82-72)^2]=\dfrac{85}{3}$，

$s_2^2=\dfrac{1}{6}\times[(55-72)^2+2\times(70+72)^2+(75-72)^2+(82-72)^2+(80-72)^2]=\dfrac{235}{3}$，

$\therefore \overline{x_1}=\overline{x_2}$，$s_1^2<s_2^2$.

故答案为：$=$，$<$.

【点评】本题主要考查方差，解题的关键是掌握算术平均数和方差的定义.

15．【分析】设抛物线 $y=ax^2+bx+c$，根据对称轴公式得对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=4$，顶点到 x 轴的距离为 2，即可得顶点坐标为 $(4,-2)$ 或 $(4,2)$，把顶点坐标代入抛物线解析式，即 $2b+c=\pm2$，满足这样条件的抛物线不唯一．设 $a=2$，根据 b、c 的关系取值即可得到抛物线解析式.

【解答】解：设抛物线的表达式为：$y=ax^2+bx+c$，

则其对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=4$，

$\because$ 顶点到 x 轴的距离为 2，

额顶点坐标为 $(4,-2)$ 或 $(4,2)$，

把顶点坐标代入抛物线解析式得：$16a+4b+c=\pm2$，

$\because -\dfrac{b}{2a}=4$，

即：$2b+c=\pm2$，

故满足这样条件的抛物线不唯一.

设 $a=2$，当 $2b+c=2$ 时，

则 $\begin{cases}a=2\\b=-16\\c=34\end{cases}$，

设 $a=2$，当 $2b+c=-2$ 时，

则$\begin{cases} a=2 \\ b=-16 \\ c=30 \end{cases}$，

故其中一个符合条件解析式为：$y=-2x^2-16x+34$．

故答案为：$y=-2x^2-16x+34$．答案不唯一．

【点评】本题考查了二次函数的性质．解本题的关键熟练掌握二次函数的顶点坐标和对称轴．

16．【分析】由题目可知每次碰撞都会减少一个粒子，分别从每种粒子的角度分析碰撞后有没有剩余来判断最后的粒子是什么粒子．

【解答】解：由题目知每次碰撞都会减少一个粒子，现在共有 15 颗粒子，碰撞 14 次后只剩 1 颗粒子，

（1）每次碰撞后乙粒子的数量增多或者减少一个，题目中开始有 8 颗乙粒子，14 次碰撞之后剩余的乙粒子也是偶数不可能是 1 个；

（2）每次碰撞之后，甲，丙粒子的总数不变或者减少两个，题目中甲和丙粒子之和为 11 个，无论碰撞多少次甲和丙都没有了是不可能的，

综上，剩下的粒子可能是甲或丙不可能是乙，

故答案为：①②③．

【点评】本题是一道推理论证题，找出每次碰撞后粒子的变化规律是解题的关键．

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程

17．【分析】直接利用特殊角的三角函数值以及负整数指数幂的性质、二次根式的性质分别化简得出答案．

【解答】解：原式$=2\sqrt{2}-2+2-4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=2\sqrt{2}-2+2-2\sqrt{2}$

$=0$．

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键．

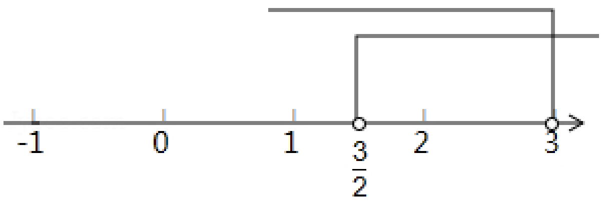
18．【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集．

【解答】解：解不等式$4x-6<2x$，得：$x<3$，

解不等式$\dfrac{3x-2}{5}>\dfrac{x}{3}$，得：$x>\dfrac{3}{2}$，

则不等式组的解集为$\dfrac{3}{2}<x<3$，

将不等式组的解集表示在数轴上如下：



【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大

小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

19.【分析】根据完全平方公式、单项式乘多项式把原式化简，把已知等式变形，代入计算即可.

【解答】解：$(3x+1)^2-x(x-2)$

$=9x^2+6x+1-x^2+2x$

$=8x^2+8x+1$，

$\because x^2+x-1=0$，

$\therefore x^2+x=1$，

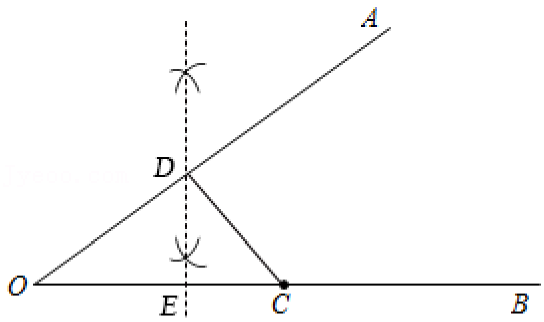
$\therefore$ 原式 $=8(x^2+x)+1=9$.

【点评】本题考查的是整式的化简求值，掌握整式的混合运算法则是解题的关键.

20.【分析】(1) 根据几何语言画出对应的几何图形；

(2) 先根据线段垂直平分线的性质得到 $OD=DC$，则根据等腰三角形的性质得到 $\angle O=\angle DCO$，然后根据三角形外角性质得到 $\angle ADC=2\angle AOB$.

【解答】解：(1) 如图，



$\angle ADC$ 即为所求作；

(2) 证明：$\because ED$ 是线段 OC 的垂直平分线，

$\therefore OD=DC$ （线段垂直平分线上任意一点，到线段两端点的距离相等），

$\therefore \angle O=\angle DCO$ （等边对等角），

$\because \angle ADC=\angle O+\angle DCO$，

$\therefore \angle ADC=2\angle AOB$，

故答案为线段垂直平分线上任意一点，到线段两端点的距离相等.

【点评】本题考查了作图 $-$ 复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法，解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作.

21.【分析】(1) 根据判别式的意义得到 $\triangle=4^2-4\times1\times a>0$，然后解不等式即可.

(2) 根据 (1) 中 a 的取值范围，任取一 a 的值，然后解方程即可.

【解答】解：(1) $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x+a=0$ 有两个不相等的实数根.

$\therefore \triangle=4^2-4\times1\times a>0$，

解得 $a<4$.

(2) 由 (1) 知，实数 a 的取值范围为 $a<4$，

故取 $a=3$，

则 $x^2-4x+3=0$，即 $(x-3)(x-1)=0$，

解得，$x_1=3$，$x_2=1$．

【点评】本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式$\triangle=b^2-4ac$：当$\triangle>0$，方程有两个不相等的实数根；当$\triangle=0$，方程有两个相等的实数根；当$\triangle<0$，方程没有实数根．

22．【分析】(1)利用矩形的性质证得 $AF\perp CE$，利用垂直平分线的性质证得 $AE=EF$，$AC=CF$，进而证得 $AE=EF=AC=CF$，可求证；

(2)利用(1)可求得$CE=4$，利用三角函数求得BC，进而利用勾股定理可求得．

【解答】解：(1)证明：$\because$矩形$ABCD$，

$\therefore\angle ADC=90^{\circ}$，

$\therefore AF\perp CE$，

$\because DF=AD$，

$\therefore AE=EF$，$AC=CF$，

$\therefore\angle AED=\angle FED$，

$\because AE//CF$，

$\therefore\angle AED=\angle ECF$，

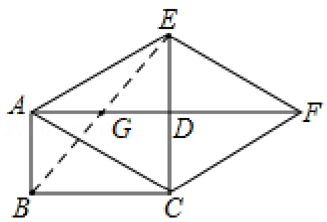
$\therefore\angle FED=\angle ECF$，

$\therefore EF=CF$，

$\therefore AE=EF=AC=CF$，

$\therefore$四边形$ACFE$是菱形；

(2)解：如图，



$\because$矩形$ABCD$，

$\therefore\angle ABC=\angle BCE=90^{\circ}$，$CD=AB=2$，

由(1)知四边形$ACFE$是菱形，

$\therefore CD=DE=2$，

$\therefore EC=4$，

$\because AB=2$，$\tan\angle ACB=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore BC=4$，

$\therefore BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=4\sqrt{2}$．

【点评】本题考查了矩形的性质，垂直平分线的性质和勾股定理等知识，关键是熟练运用这些性质解答．

23．【分析】(1)根据中位数的意义求解即可；

(2)求出乙校优秀学生占调查人数的百分比即可；

（3）根据中位数的意义进行判断即可．

【解答】解：(1）甲校 40 名学生的成绩从小到大排列，处在中间位置的两个数，即第 20、第 21 位的两个数都是 70，因此中位数是 70，即 $n=70$；

（2）$200\times\dfrac{14+2}{40}=80$（人），

故答案为：80；

（3）由甲校学生成绩的中位数是 70 分，即一半学生在 70 分以上，一半学生在 70 分以下，

200 名学生中的前 100 名，即一半获奖，因此至少要在 70 分，

故答案为：70．

【点评】本题考查中位数、众数，理解中位数、众数的意义是正确解答的前提．

24．【分析】(1）先将点 A 坐标代入 $y=-x-2$ 中可求出 $a=2$，然后把 A 点坐标代入反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 中可确定 k 的值；

（2）利用一次函数解析式可确定 B 点坐标，设 $C(0,t)$，利用三角形面积公式得到 $\dfrac{1}{2}\times|t+2|\times2+\dfrac{1}{2}\times|t+2|\times2=3$，然后求出 t 可得到 C 点坐标．

【解答】解：(1）将点 $A(a,-4)$ 的坐标代入 $y=-x-2$ 中，

得 $-4=-a-2$，

解得 $a=2$；

$\therefore$ 点 $A(2,-4)$，

将点 $A(2,-4)$ 的坐标代入反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 中，

得 $k=2\times(-4)=-8$；

答：a，k 的值为 2，-8；

（2）当 $y=0$，$-x-2=0$，解得 $x=-2$，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-2,0)$．

设 $C(0,t)$，

$\because S_{\Delta ABC}=3$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\times|t+2|\times2+\dfrac{1}{2}\times|t+2|\times2=3$，

即 $|t+2|=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore t=-\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{7}{2}$，

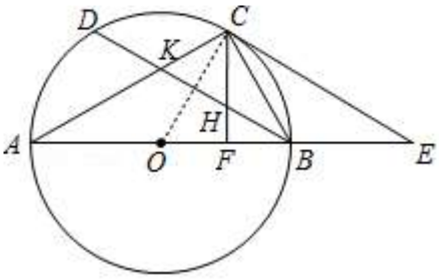
$\therefore C(0,-\dfrac{1}{2})$ 或 $C(0,-\dfrac{7}{2})$．

【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题：求反比例函数与一次函数的交点坐标，把两个函数关系式联立成方程组求解，若方程组有解则两者有交点，方程组无解，则两者无交点．也考查了待定系数法求函数解析式．

25．【分析】（1）连接CO，BD与AC交于点K，由垂径定理得出$OC\perp BD$，由平行线的性质得出$OC\perp CE$，则可得出结论；

（2）证明ΔBOC为等边三角形，由等边三角形的性质得出$\angle CBO=\angle BCO=60^{\circ}$，求出$CK=CH=6$，由锐角三角函数的定义可得出答案．

【解答】（1）证明：连接CO，BD与AC交于点K，



$\because CD=BD$，

$\therefore OC\perp BD$，

$\because CE//BD$，

$\therefore OC\perp CE$，

$\therefore CE$为$\odot O$切线；

（2）解：在RtΔCEO中，$\angle E=30^{\circ}$，

$\therefore \angle EOC=60^{\circ}$，

$\because OB=OC$，

$\therefore \Delta BOC$为等边三角形，

$\therefore \angle CBO=\angle BCO=60^{\circ}$，

$\because BD\perp OC$，$CF\perp OB$，

$\therefore \angle CBD=\angle OCF=\angle BCE=30^{\circ}$，

$\therefore \angle CKH=\angle CHK=\angle KCH=60^{\circ}$，$BC=BE$，

$\therefore CK=CH=6$，

在RtΔBCK中，$\tan\angle CBK=\tan 30^{\circ}=\dfrac{CK}{BC}=\dfrac{6}{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore BC=BE=6\sqrt{3}$．

【点评】本题主要考查了切线的判定与性质，锐角三角函数的定义，勾股定理，等边三角形的判定与性质，直角三角形的性质，垂径定理，熟练掌握切线的判定是解题的关键．

26．【分析】（1）根据A点的坐标代入函数可以得出系数关系式，根据对称轴公式可求出对称轴，再根据对称性求出B点坐标；

（2）①当$a=2$时，根据函数解析式可以求出顶点坐标，根据给出的P、Q点坐标可以确定t值，即进一步确定G的图象，即可求出$m-n$最小值；

②分$a>0$和$a<0$两大情况，再每种情况下按t的取值范围分四小类，分别讨论a的取值范围．

【解答】解：（1）$\because$抛物线$y=ax^{2}+bx+3a(a\neq 0)$与x轴的交点为点$A(1,0)$，

$\therefore 0=a+b+3a$，

即$b=-4a$，

$\therefore$对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}=2$，

$\because B$点是函数图象与x轴的另一交点，

根据对称性可得，$B(3,0)$；

（2）①当$a=2$时，函数解析式为$y=2x^{2}-8x+6(a\neq 0)$，图象如右图，

$\therefore$对称轴为直线$x=2$，顶点坐标为$(2,-2)$，

$\because$由图象知当图象G为对称图形时$m-n$有最小值，$P(t，0)Q(t+2，0)$，

$\therefore 2-t=t+2-2$，

$\therefore t=1$，

$\because$点$P(t,0)$和点$Q(t+2,0)$作x轴的垂线，交抛物线于点M和点N，

$\therefore M(1,0)$，$N(3,0)$，

$\because$顶点坐标为$(2,-2)$，

$\therefore m-n$的最小值为$0-(-2)=2$；

②$\because$点$P(t,0)$和点$Q(t+2,0)$作x轴的垂线，交抛物线于点M和点N，

由（1）知$b=-4a$，

$\therefore M(t,at^{2}-4at+3a)$，$N(t+2，a(t+2)^{2}-4a(t+2)+3a)$，

又$\because$抛物线对称轴为 2，顶点坐标为$(2,-2)$，

$\therefore$根据M、N点的相对位置和抛物线的开口方向可分以下四种情况讨论a的取值：

（Ⅰ）当$a>0$，且$t\leqslant 0$时，即图象G在对称轴左侧时，

此时M点的纵坐标最大，N点的纵坐标最小，

$\therefore at^{2}-4at+3a-[a(t+2)^{2}-4a(t+2)+3a]=2$，

解得$t=1-\frac{1}{2a}$，

又$\because t\leqslant 0$，$a>0$，

$\therefore 1-\frac{1}{2a}\leqslant 0$且$a>0$，

$\therefore 0<a\leqslant\frac{1}{2}$，

（Ⅱ）当$a>0$，且$t\geqslant 2$时，即图象G在对称轴右侧时，

此时N点的纵坐标最大，M点的纵坐标最小，

$\therefore a(t+2)^{2}-4a(t+2)+3a-(at^{2}-4at+3a)=2$，

解得$t=1+\frac{1}{2a}$，

又$\because t\geqslant 2$，$a>0$，

$\therefore 1+\frac{1}{2a}\geqslant 2$且$a>0$，

$\therefore 0 < a \leqslant \frac{1}{2}$，

（Ⅲ）当 $a > 0$，且 $0 < t \leqslant 1$ 时，即最低点是图形顶点时且 M 点纵坐标大，

此时 M 点的纵坐标最大，当 $x = 2$ 时的纵坐标最小，

$\therefore m = at^2 - 4at + 3a$，

$n = 4a - 8a + 3a = -a$，

即 $at^2 - 4at + 3a - (-a) = 2$，

解得 $t = 2 \pm \frac{\sqrt{2a}}{a}$，

又 $\because 0 < t \leqslant 1$，$a > 0$，

$\therefore t = 2 - \frac{\sqrt{2a}}{a}$，

即 $0 < 2 - \frac{\sqrt{2a}}{a} \leqslant 1$，

$\therefore \frac{1}{2} \leqslant a < 2$，

（Ⅳ）当 $a > 0$，且 $1 < t < 2$ 时，即最低点是图形顶点时且 N 点纵坐标大，

此时 N 点的纵坐标最大，当 $x = 2$ 时的纵坐标最小，

$\therefore m = a(t+2)^2 - 4a(t+2) + 3a$，

$n = 4a - 8a + 3a = -a$，

即 $a(t+2)^2 - 4a(t+2) + 3a - (-a) = 2$，

解得 $t^2 = \frac{2}{a}$，

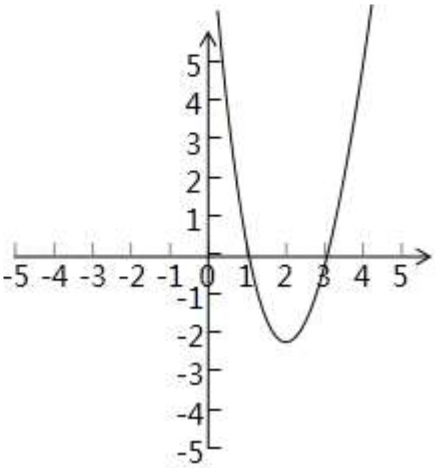
又 $\because 1 < t < 2$，$a > 0$，

$\therefore 1 < \frac{2}{a} < 4$，

$\therefore \frac{1}{2} < a < 2$，

同理可得当 $a < 0$ 时，$-2 \leqslant a < 0$ 也符合条件，

综上，a 的取值范围为 $0 < a \leqslant 2$ 或 $-2 \leqslant a < 0$．



【点评】本题考查二次函数的综合应用，难度较大，解题的关键是分类讨论图象G上纵坐标的大小值.

27.【分析】(1）依题意补全图形即可;

（2）由等腰直角三角形的性质和三角形的外角性质得$AGC+\angle CAG=45^{\circ}$，再证$\angle CAG=\angle DAF=\alpha$，即可求解;

（3）过G作$GH\perp AC$交AC的延长线于H，则ΔCGH是等腰直角三角形，得$CH=GH$，$CG=\sqrt{2}GH$，设$AB=AC=a$，$AD=BE=b$，$CH=GH=m$，再证$\Delta ADE\backsim\Delta HGA$，得$\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{HA}{HG}$，得出$m=b$，即可得出结论.

【解答】解:(1）依题意补全图形如图1所示:

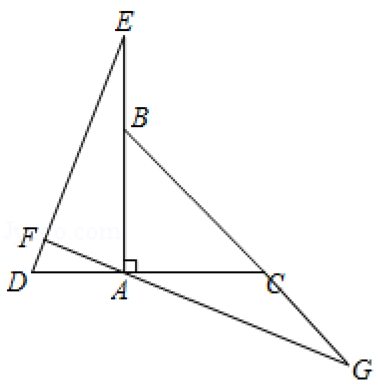


图1

（2）$\because AB=AC$，$\angle BAC=90^{\circ}$，

$\therefore\angle ACB=45^{\circ}$，

$\therefore\angle AGC+\angle CAG=\angle ACB=45^{\circ}$，

$\because\angle AF\perp DE$，

$\therefore\angle AFE=90^{\circ}=\angle DAE$，

$\therefore\angle AED+\angle EAF=\angle DAF+\angle EAF=90^{\circ}$，

$\therefore\angle DAF=\angle AED=\alpha$，

$\therefore\angle CAG=\angle DAF=\alpha$，

$\therefore\angle AGC=45^{\circ}-\alpha$；

（3）$CG=\sqrt{2}AD$，证明思路如下:

过G作$GH\perp AC$交AC的延长线于H，如图2所示:

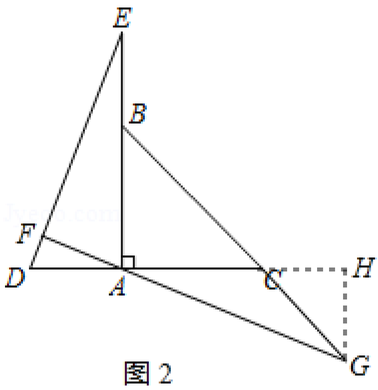


图 2

则 $\angle GHA=90^{\circ}=\angle DAE$， ΔCGH 是等腰直角三角形，

得 $CH=GH$， $CG=\sqrt{2}GH$，

设 $AB=AC=a$， $AD=BE=b$， $CH=GH=m$，

由（2）可知， $\angle AED=\angle HAG$，则 $\Delta ADE\backsim\Delta HGA$，

得 $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{HA}{HG}$，即 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{a+m}{m}$，

整理得： $am+bm=ab+bm$，则 $m=b$，

故 $CG=\sqrt{2}m=\sqrt{2}b=\sqrt{2}AD$.

【点评】本题考查了等腰直角三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质等知识；熟练掌握等腰直角三角形的判定与性质和相似三角形的判定与性质是解题的关键.

28.【分析】(1) ①如图 1 中，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于 H . 解直角三角形求出 OH，可得结论.

②如图 2 中，过点 D 作 $DF\perp AB$ 于 F . 由 d（线段 CD，直线 $AB)=1$，推出 $DF=1$，求出点 D 的坐标可得结论.

（2）求出两种特殊位置 r 的值即可判断．如图 3 中，当 $\odot O$ 与直线 AB 相离时， $d(\odot O,AB)=1$ 时， $r=\sqrt{3}-1$. 当线段 AB 在 $\odot O$ 内部时，设 $\odot O$ 与 y 轴交于 W，当 $d(\odot O,AB)=1$ 时， $W(0$， $2\sqrt{3}+1)$，此时 $r=2\sqrt{3}+1$，由此可得结论.

（3）分两种情形：如图 4 中，当直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 在直线 AB 的上方时，设直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 交 x 轴于 P，过点 A 作 $AM\perp$ 直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 于 M . 当直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 在直线 AB 的下方时，设直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 交 x 轴于 Q，过点 C 作 $CN\perp$ 直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 于 N . 分别求出 $AM=CN=1$ 时 b 的值，可得结论.

【解答】解：(1) ①如图 1 中，过点 O 作 $OH\perp AB$ 于 H .

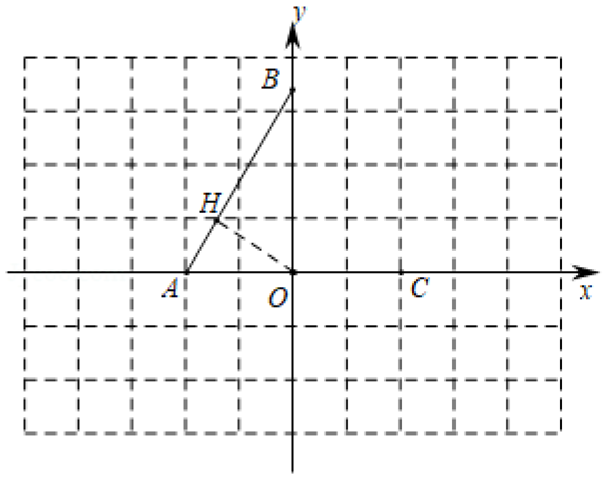


图1

$\because A(-2,0)$， $B(0$， $2\sqrt{3})$，

$\therefore OA=2$， $OB=2\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\angle ABO=\dfrac{AO}{OB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \angle ABO=30^\circ$，

$\because \angle OHB=90^\circ$，

$\therefore OH=\dfrac{1}{2}OB=\sqrt{3}$，

$\therefore d$ （点O，线段$AB)=\sqrt{3}$．

②如图 2 中，过点D作$DF\perp AB$于F．

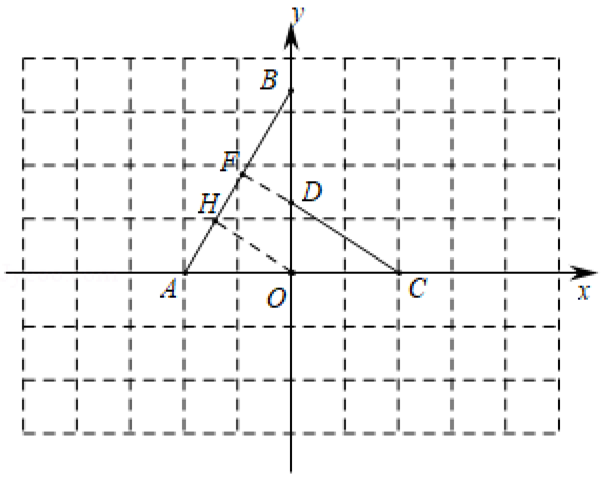


图2

$\because d$ （线段CD，直线$AB)=1$，

$\therefore DF=1$，

$\because \angle DBF=30^\circ$， $\angle DFB=90^\circ$，

$\therefore BD=2DF=2$，

$\therefore OD=2\sqrt{3}-2$，

$\therefore D(0$， $2\sqrt{3}-2)$，

$\therefore m=2\sqrt{3}-2$.

（2）如图 3 中，当$\odot O$与直线AB相离时，$d(\odot O, AB)=1$时，$r=\sqrt{3}-1$.

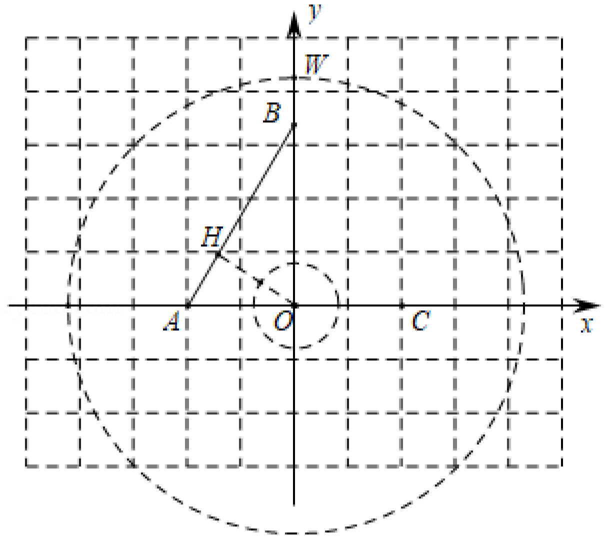


图3

当线段AB在$\odot O$内部时，设$\odot O$与y轴交于W，

当$d(\odot O, AB)=1$时，$W(0，2\sqrt{3}+1)$，此时$r=2\sqrt{3}+1$，

观察图象可知，满足条件的r的值为$\sqrt{3}-1\leqslant r\leqslant 2\sqrt{3}+1$.

（3）如图 4 中，当直线$y=\sqrt{3}x+b$在直线AB的上方时，设直线$y=\sqrt{3}x+b$交x轴于P，过点A作$AM\perp$直线$y=\sqrt{3}x+b$于M .

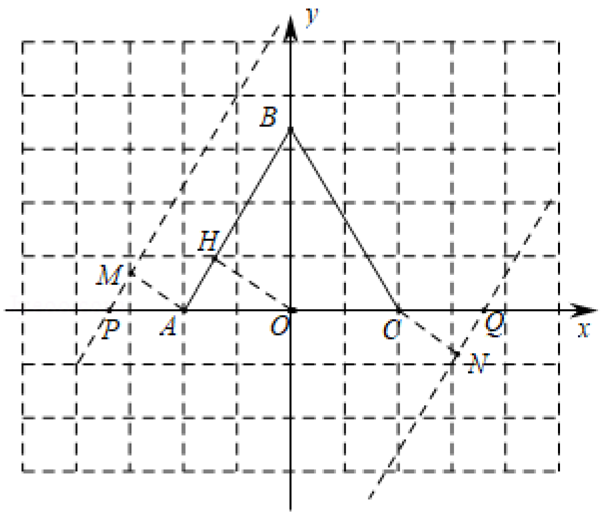


图4

$\because \angle APM=\angle BAC=60^\circ$，

$\therefore AB//PM$ ，

当使$d(E, \Delta ABC)=1$时，$AM=1$，

$\therefore PA=\dfrac{AM}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore P(-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}，0)$，

把 P 点坐标代入 $y=\sqrt{3}x+b$，得到 $b=2\sqrt{3}+2$，

当直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 在直线 AB 的下方时，设直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 交 x 轴于 Q，过点 C 作 $CN\perp$ 直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 于 N．

同法可得 $Q(2+\frac{2\sqrt{3}}{3})$，

把 Q 点坐标代入 $y=\sqrt{3}x+b$ 中，得到 $b=-2\sqrt{3}-2$，

观察图象可知，满足条件的 b 的值为 $-2\sqrt{3}-2\leqslant b\leqslant 2\sqrt{3}+2$．

【点评】本题属于圆综合题，考查了直线与圆的位置关系，解直角三角形，图形 M，N 间的“闭距离”的定义等知识，解题的关键是理解图形 M，N 间的“闭距离”的定义，学会利用特殊位置解决问题，属于中考压轴题。