2023 北京丰台初三二模

数　　学

2023. 05

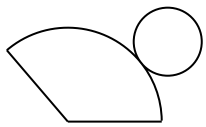
考生须知	1. 本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题. 满分 100 分. 考试时间 120 分钟. 2. 在试卷和答题卡上认真填写学校名称、班级、姓名和考号. 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效. 4. 选择题和作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答. 5. 考试结束，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 右图是某几何体的展开图，该几何体是

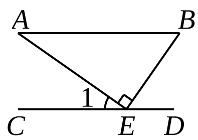


（A）圆柱　　（B）三棱柱

（C）圆锥　　（D）球

2. 如图，AB // CD，点 E 为 CD 上一点，$AE \perp BE$，

若 $\angle B$=55°，则 $\angle 1$ 的度数为



（A）35°　　（B）45°

（C）55°　　（D）65°

3. 实数 a，b，c 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是

（A）$a>c$　　（B）$|b|>1$　　（C）$-b<c$　　（D）$ac>0$

4. 以下图形绕点 O 旋转一定角度后都能与原图形重合，其中旋转角最小的是

（A）　　（B）　　（C）　　（D）

5. 已知 3.5^2=12.25，3.6^2=12.96，3.7^2=13.69，3.8^2=14.44，那么 $\sqrt{13}$ 精确到 0.1 的近似值是

（A）3.5　　（B）3.6　　（C）3.7　　（D）3.8

6. 掷一枚质地均匀的硬币 m 次，正面向上 n 次，则 $\dfrac{n}{m}$ 的值

（A）一定是$\frac{1}{2}$　　　　　　　　　　（B）一定不是$\frac{1}{2}$

（C）随着 m 的增大，越来越接近$\frac{1}{2}$　　（D）随着 m 的增大，在$\frac{1}{2}$附近摆动，呈现一定的稳定性

7. 我国明代数学读本《算法统宗》一书中有这样一道题：一支竿子一条索，索比竿子长一托，对折索子来量竿，却比竿子短一托，索和竿子各几何？（1 托为 5 尺）其大意为：现有一根竿和一条绳索，如果用绳索去量竿，绳索比竿长 5 尺，如果将绳索对折后再去量竿，就比竿短 5 尺，那么绳索和竿各长几尺？设绳索长为 x 尺，竿长为 y 尺，根据题意列方程组，正确的是

（A）$\begin{cases} x-y=5, \\ y-\frac{1}{2}x=5 \end{cases}$　（B）$\begin{cases} x-y=5, \\ \frac{1}{2}x-y=5 \end{cases}$　（C）$\begin{cases} y-x=5, \\ x-2y=5 \end{cases}$　（D）$\begin{cases} x-y=5, \\ y-2x=5 \end{cases}$

8. 下面三个问题中都有两个变量：

①如图 1，货车匀速通过隧道（隧道长大于货车长），货车在隧道内的长度 y 与从车头进入隧道至车尾离开隧道的时间 x；

②如图 2，实线是王大爷从家出发匀速散步行走的路线（圆心 O 表示王大爷家的位置），他离家的距离 y 与散步的时间 x；

③如图 3，往空杯中匀速倒水，倒满后停止，一段时间后，再匀速倒出杯中的水，杯中水的体积 y 与所用时间 x

图 1

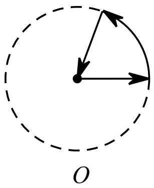
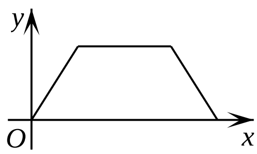


图 2


图 3

其中，变量 y 与 x 之间的函数关系大致符合右图的是

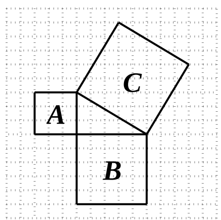


（A）①②　　　　　　　　（B）①③

（C）②③　　　　　　　　（D）①②③

第二部分 非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

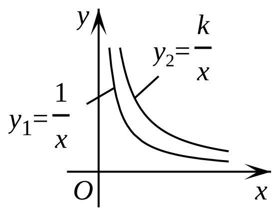


9. 若$\sqrt{x-5}$在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是________.

10. 分解因式：$3x^2-3y^2=$________.

11. 正十边形的外角和为________°.

12. 如图所示，正方形网格中，三个正方形 A，B，C 的顶点都在格点上，用等式表示三个正方形的面积 S_A，S_B，S_C 之间的关系________.

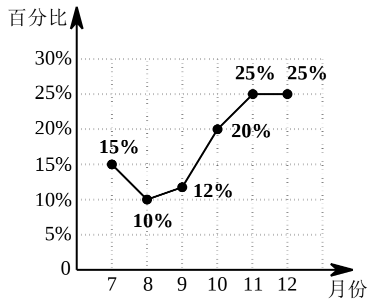


13. 在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y_1=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）和 $y_2=\dfrac{k}{x}$（$x>0$）的图象如图所示，k 的值可以是________（写出一个即可）.

14. 若 $a-b=2$，则代数式 $\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2-2ab}{a-b}$ 的值为________.

15. 右图是某书店 2022 年 7 月至 12 月教育类图书销售额占当月全部图书销售额的百分比折线统计图. 小华认为，8 月份教育类图书销售额比 7 月份减少了. 他的结论____（填“正确”或“错误”），理由是__________.

教育类图书销售额占当月全部图书销售额的百分比折线统计图



16. 甲地组织 20 辆汽车装运食品、药品、生活用品三种物资共 100 吨到乙地. 每辆汽车可装运物资的运载量和每吨所需运费如下表.

物资种类	食品	药品	生活用品
每辆汽车运载量/吨	6	5	4
每吨所需运费/元	120	160	100

如果 20 辆汽车都要装运，每辆汽车只能装运同一种物资且必须装满，每种物资至少装运 1 辆车，那么总运费最少的车辆安排方案为：装运食品、药品、生活用品的汽车辆数依次是______，此时总运费为_____元.

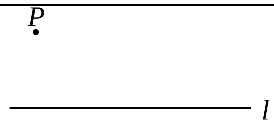
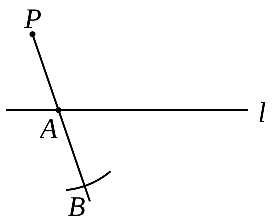
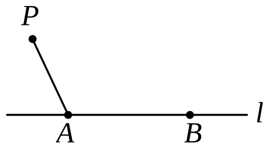
三、解答题（共 68 分，第 17–21，23 题，每题 5 分，第 22，24–26 题，每题 6 分，第 27–28 题，每题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$2\sin 30^\circ+(-1)^3-\sqrt{8}+(\dfrac{1}{2})^{-1}$.

18. 解方程：$\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=1$.

19. 下面是过直线外一点，作已知直线的平行线的两种方法. 请选择一种作法，使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹），并完成证明.

<table>
<tr><td colspan="2">已知：如图，直线 l 及直线 l 外一点 P.
求作：直线 PQ，使得 $PQ\parallel l$.
</td></tr>
<tr><td>作法一：如图，

①在直线 l 上取一点 A，作射线 PA，以点 A 为圆心，AP 长为半径画弧，交 PA 的延长线于点 B；
②在直线 l 上取一点 C（不与点 A 重合），作射线 BC，以点 C 为圆心，CB 长为半径画弧，交 BC 的延长线于点 Q；
③作直线 PQ.
所以直线 PQ 就是所求作的直线.</td><td>作法二：如图，

①在直线 l 上取两点 A，B，连接 AP；
②分别以点 P，点 B 为圆心，AB，AP 的长为半径画弧，两弧在 l 上方交于点 Q；
③作直线 PQ.
所以直线 PQ 就是所求作的直线.</td></tr>
<tr><td>证明：∵$AB=$___，$CB=$___，
∴$PQ\parallel l$（______）
（填推理的依据）.</td><td>证明：连接 BQ.
∵$AP=$___，$AB=$___，
∴四边形 $APQB$ 是平行四边形
（_____）（填推理的依据）.
∴$PQ\parallel l$（_____）
（填推理的依据）.</td></tr>
</table>

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m^2-4=0$.

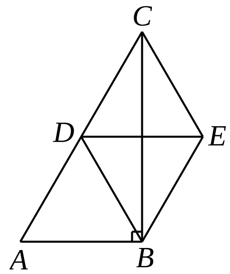
（1）求证：该方程总有两个不相等的实数根；

（2）选择一个 m 的值，使得方程至少有一个正整数根，并求出此时方程的根.

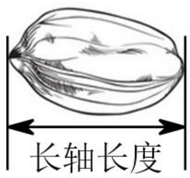
21. 如图，在△ABC 中，∠ABC=90°，点 D 为 AC 的中点，连接 DB，过点 C 作 $CE\parallel DB$，且 $CE=DB$，连接 BE，DE.

（1）求证：四边形 $BECD$ 是菱形；

（2）连接 AE，当∠ACB=30°，AB=2 时，求 AE 的长.



22. 某校兴趣小组在学科实践活动中，从市场上销售的 A，B 两个品种的花生仁中各随机抽取 30 粒，测量其长轴长度，然后对测量数据进行了收集、整理和分析．下面是部分信息.



a. 两种花生仁的长轴长度统计表：

花生仁长轴长度（mm）	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
A 品种花生仁粒数	5	10	6	7	2	0	0	0	0	0
B 品种花生仁粒数	0	0	2	3	6	4	5	4	4	2

b. 两种花生仁的长轴长度的平均数、中位数、众数、方差如下：

	平均数	中位数	众数	方差
A 品种花生仁	a	13.5	c	1.4
B 品种花生仁	17.5	b	16	3.9

根据以上信息，回答下列问题：

（1）兴趣小组的同学在进行抽样时，以下操作正确的是______（填序号）；

①从数量足够多的两种花生仁中挑取颗粒大的各 30 粒；

②将数量足够多的两种花生仁分别放在两个不透明的袋子中，摇匀后从中各取出 30 粒；

（2）写出 a，b，c 的值；

（3）学校食堂准备从 A，B 两个品种的花生仁中选购一批做配菜食材，根据菜品质量要求，花生仁大小要均匀，那么兴趣小组应向食堂推荐选购_____（填“A”或“B”）品种花生仁，理由是_________________.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点（2，0），（3，1）.

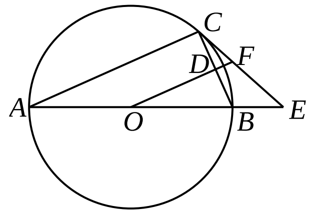
（1）求这个一次函数的表达式；

（2）当 $x>m$ 时，对于 x 的每一个值，正比例函数 $y=mx$ 的值大于一次函数 $y=kx+b$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

24. 如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，AB 是⊙O 的直径，点 D 是 BC 的中点，点 E 是 AB 的延长线上的一点，$\angle BCE=\angle BOD$，OD 的延长线交 CE 于点 F.

（1）求证：CE 是⊙O 的切线；

（2）若 $\sin E=\dfrac{2}{3}$，$AC=5$，求 DF 的长.



25. 学校新建的体育器材室的一面外墙如图 1 所示，它的轮廓由抛物线和矩形 $ABCD$ 构成．数学兴趣小组要为器材室设计一个矩形标牌 $EFGH$，要求矩形 $EFGH$ 的顶点 E，H 在抛物线上，顶点 F，G 在矩形 $ABCD$ 的边 AD 上．为了设计面积最大的矩形 $EFGH$，兴趣小组对矩形 $EFGH$ 的面积与它的一边 FG 的长之间的关系进行研究．

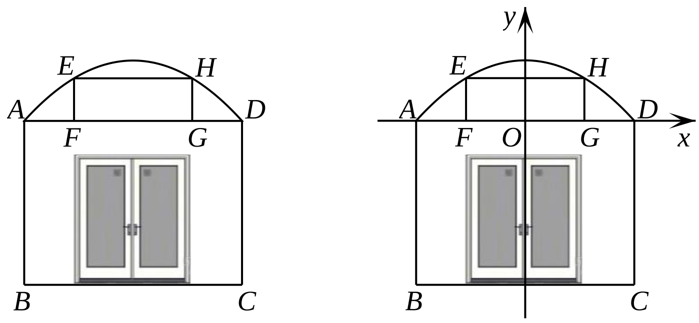


图 1　　　　图 2

具体研究过程如下，请补充完整.

（1）建立模型：

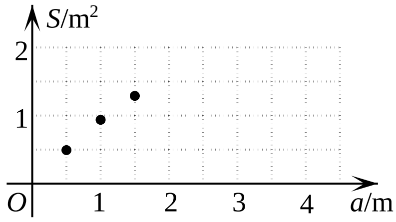
以 FG 的中点为坐标原点，建立如图 2 所示的平面直角坐标系 xOy，通过研究发现，抛物线满足函数关系 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+1$（$-2\leqslant x\leqslant 2$）. 设矩形 $EFGH$ 的 面积为 S m^2，FG 的长为 a m，则另一边 HG 的长为________m（用含 a 的代数式表示），得到 S 与 a 的关系式为：__________（$0<a<4$）；

（2）探究函数：

列出 S 与 a 的几组对应值：

a / m	…	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	…
S / m^2	…	0.49	0.94	1.29	1.50	1.52	1.31	0.82	…

在下面的平面直角坐标系中，描出表中各组数值对应的点，并画出该函数的图象；



（3）解决问题：

结合函数图象得到，FG 的长约为________m时，矩形面积最大.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点（4，3）在抛物线 $y=ax^2+bx+3$（$a\neq 0$）上.

（1）求抛物线的对称轴；

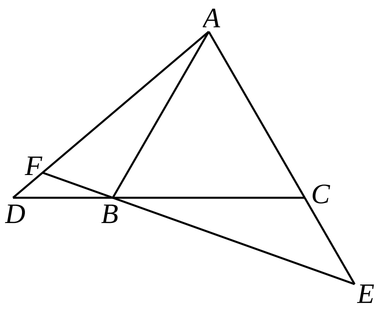
（2）若点（x_1，5），（x_2，-3）在抛物线上，求 a 的取值范围；

（3）若点（m，y_1），（$m+1$，y_2）在抛物线上，对于任意的 $m\geqslant 3$，都有 $|y_2-y_1|\geqslant 3$，直接写出 a 的取值范围.

27. 如图，在等边△ABC 中，点 D，E 分别在 CB，AC 的延长线上，且 $BD=CE$，EB 的延长线交 AD 于点 F.

（1）求∠AFE 的度数；

（2）延长 EF 至点 G，使 $FG=AF$，连接 CG 交 AD 于点 H. 依题意补全图形，猜想线段 CH 与 GH 的数量关系，并证明.



28. 对于⊙W和⊙W的弦PQ，以PQ为边的正方形为PQ关于⊙W的“关联正方形”. 在平面直角坐标系xOy中，已知点T（m，0），点M（m，-1），以点T为圆心，TM的长为半径作⊙T，点N为⊙T上的任意一点（不与点M重合）.

（1）当$m=0$时，若直线$y=x+t$上存在点在MN关于⊙T的“关联正方形”上，求t的取值范围；

（2）若点A在MN关于⊙T的“关联正方形”上，点B（$-m+2$，3）与点A的最大距离为d，当d取最小值时，直接写出此时m和d的值.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	D	B	D	A	D

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. $x\geqslant 5$　　10. $3(x+y)(x-y)$　　11. 360

12. $S_A+S_B=S_C$（答案不唯一，其他形式相应给分）　　13. 2（答案不唯一，$k>1$ 即可）

14. 2　　15. 错误；理由合理即可　　16. 9，2，9；11680.

三、解答题（共 68 分，第 17-21，23 题，每题 5 分，第 22，24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）

17.解：原式$=1-1-2\sqrt{2}+2$.　　……4 分

$=2-2\sqrt{2}$.　　……5 分

18.解：

去分母，得 $x(x+1)+(x-1)=(x+1)(x-1)$.

去括号，得 $x^2+x+x-1=x^2-1$.

移项，得 $2x=0$.

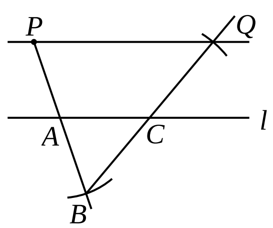
系数化为 1，得 $x=0$.　　……4 分

检验：当 $x=0$ 时，$(x+1)(x-1)\neq 0$.

∴原分式方程的解为 $x=0$.　　……5 分

19.解：选择作法一：

正确补全图形；　　……2 分

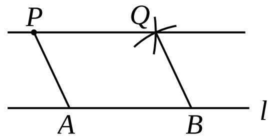


证明：∵$AB=$ <u>AP</u>，$CB=$ <u>CQ</u>，

∴$PQ\parallel l$（<u>三角形的中位线定理</u>）.　5 分

选择作法二：

正确补全图形；　　　　　　……2 分



证明：∵AP=<u>BQ</u>，AB=<u>PQ</u>，

∴四边形 $APQB$ 是平行四边形

（<u>两组对边分别相等的四边形是平行四边形</u>）.

∴PQ∥l (<u>平行四边形的对边平行</u>).　　　　　　……5 分

20.（1）证明：

∵ $\Delta=b^2-4ac=4m^2-4(m^2-4)=16>0$.

∴该方程总有两个不相等的实数根.　…3 分

（2）取 $m=0$,

原方程可化为 $x^2-4=0$

解得 $x_1=2$，$x_2=-2$.　　……5 分

（答案不唯一，取符合题意的 m 值相应给分）

21.（1）

证明：∵CE∥DB, 且 $CE=DB$,

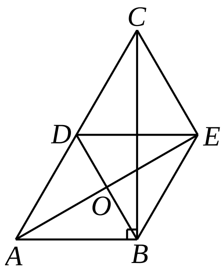
∴四边形 $BECD$ 是平行四边形.

……1 分

∵ $\angle ABC=90°$，点 D 是 AC 边中点，

∴$BD=\dfrac{1}{2}AC=CD$.

∴四边形 $BECD$ 是菱形.　……2 分



（2）证明：∵四边形 $BECD$ 是菱形，

∴AC∥BE, $CD=BE$.

∵点 D 是 AC 中点，

∴$AD=CD=BE$.

∵AD∥BE, $AD=BE$.

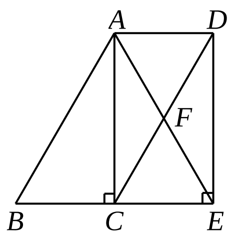
∴四边形 $ABED$ 是平行四边形.

∵ $\angle ACB=30°$，$\angle ABC=90°$，

∴$AB=\dfrac{1}{2}AC=AD$.

∴四边形 $ABED$ 是菱形.

∴$AE\perp BD$，$AE=2AO$.



∴$\angle AOB$=90°．

∵$\angle ACB$=30°，

∴$\angle CAB$=60°．

∴$\angle EAB=\dfrac{1}{2}\angle CAB$=30°．

∴$AO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$．

∴$AE=2AO=2\sqrt{3}$．　　　　　……5 分

22. 解：（1）②；　　　　……1 分

（2）a=13.7，b=17.5，c=13；　……4 分

（3）A，A 品种花生仁长轴长度方差小，说明该品种花生仁大小更均匀. 6 分

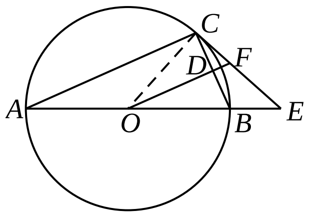
23.解：（1）∵一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点（2，0），（3，1），

∴$\begin{cases}2k+b=0,\\3k+b=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=-2.\end{cases}$

∴一次函数表达式为 $y=x-2$．…3 分

（2）$m\geqslant 1$.　　　　……5 分

24.（1）证明：连接 OC．



∵D 是 BC 的中点，

∴$OD\perp BC$.　　　　　　……1 分

∵$OC=OB$，

∴$\angle OBC=\angle OCB$.

∵$\angle BOD=\angle BCF$，

∴$\angle BOD+\angle OBC=\angle BCF+\angle OCB$.

∴$\angle BCF+\angle OCB$=90°．　　　……2 分

即$\angle OCE$=90°．　∴$OC\perp CE$.

∵OC ⊙O 的半径，

∴CE 是⊙O 的切线.　　　……3 分

（2）解：∵$\angle OCE$=90°，$\sin E=\dfrac{2}{3}$，

∴$\dfrac{OC}{OE}=\dfrac{2}{3}$．

设 $OC=2k$，$OE=3k$，则 $BE=OE-OB=k$.

∴$AE=AB+BE=5k$.

∵AB 是⊙O 的直径，

∴$\angle ACB=90°$

∴$\angle ACB=\angle ODB$，

∴$AC\parallel OF$.

∴$\triangle EOF\backsim\triangle EAC$. ......4 分

∴$\dfrac{OF}{AC}=\dfrac{OE}{AE}=\dfrac{3}{5}$.

∵$AC=5$,

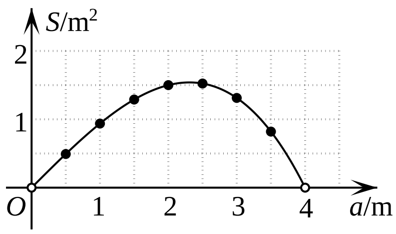
∴$OF=3$. ......5 分

∵$CD=BD$, $AO=BO$, ∴$OD=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{5}{2}$.

∴$DF=OF-OD=\dfrac{1}{2}$. ......6 分

25.解：（1）$(-\dfrac{a^2}{16}+1)$，$S=-\dfrac{a^3}{16}+a$； 2 分

（2）正确画出该函数的图象； …4 分



（3）2.3 . ……6 分

26. 解：（1）由题意得抛物线经过点（0，3）和点（4，3），

∴抛物线的对称轴 $x=\dfrac{0+4}{2}=2$. …1 分

（2）∵抛物线的对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=2$，

∴$b=-4a$.

∴抛物线顶点坐标为 $2,3-4a$.

∵点 $(x_1,5)$，$(x_2,-3)$ 在抛物线上，

∴当 $a>0$ 时，$3-4a\leqslant-3$，解得 $a\geqslant\dfrac{3}{2}$；

当 $a<0$ 时，$3-4a\geqslant5$，解得 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

综上所述，$a \geqslant \frac{3}{2}$ 或 $a \leqslant -\frac{1}{2}$. ……4 分

（3）$a \geqslant 1$ 或 $a \leqslant -1$.　　　　……6 分

27.（1）解：∵等边△ABC，

∴$AB=BC$, $\angle ACB=\angle ABC=60°$.

∴$\angle ABD=\angle BCE=120°$.

∵$CE=BD$，

∴△ABD≌△BCE.　　　　……1 分

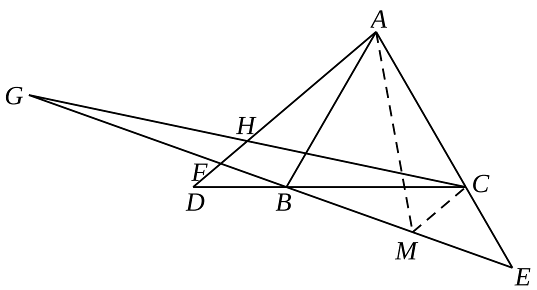
∴$\angle D=\angle E$.

∵ $\angle DBF=\angle CBE$，

∴$\angle D+\angle DBF=\angle E+\angle CBE$.

即$\angle AFE=\angle ACB=60°$.　……2 分

（2）正确补全图形；



……3 分

$CH=GH$；　　　　……4 分

证明：在 EF 上截取 $FM=FA$,连接 AM，CM.

∵$\angle AFE=60°$，

∴ △AFM 是等边三角形.

∴$\angle FAM=\angle AFM=60°$，$AM=AF=MF$.

∵△ABC 是等边三角形,

∴$\angle BAC=60°$, $AB=AC$.

∴$\angle BAC-\angle MAB=\angle FAM-\angle MAB$.

即$\angle CAM=\angle BAF$.

∴△ACM ≌△ABF.　　　　……5 分

∴$\angle AMC=\angle AFE=60°$.

∴$\angle CMF=\angle AMC+\angle AMB=120°$.

∴$\angle CMF+\angle AFE=180°$.

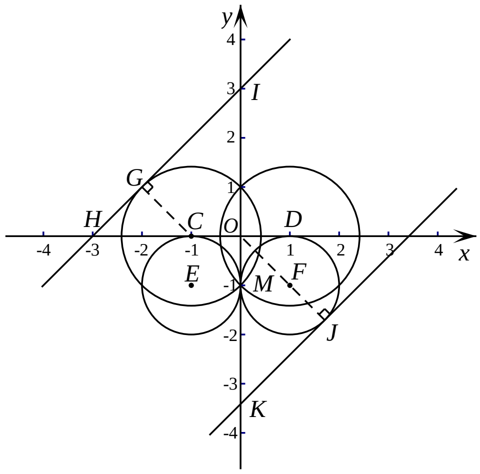
∴$CM \parallel HF$.　　　　……6 分

∴$\frac{GH}{CH}=\frac{GF}{MF}$.

∵$FM=AF$，$AF=GF$，∴$FM=GF$.

∴$CH=GH$. ……7 分

28. 解：（1）



如图，MN 关于⊙T 的“关联正方形”上的所有点在以 C（−1，0）和 D（1，0）为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径，以 E（−1，−1），F（1，−1）和 O（0，0）为圆心，1 为半径的五个圆上及圆内.由直线 $y=x+t$ 上存在点在 MN 关于⊙T 的“关联正方形”上，可知：当直线与⊙C 相切时，设切点为 G，交 x 轴于点 H，交 y 轴于点 I，由 $CG=\sqrt{2}$，得 $CH=2$，

∴$OH=OI=3$，此时 $t=3$；

当直线与⊙F 相切时，设切点为 J，交 y 轴于点 K，由 $OJ=1+\sqrt{2}$，$OK=\sqrt{2}OJ=\sqrt{2}+2$，

∴此时 $t=-\sqrt{2}-2$.

综上所述，$-\sqrt{2}-2\leqslant t\leqslant 3$. ……3 分

（2）$m=1$；$d=\sqrt{17}+1$. ……7 分