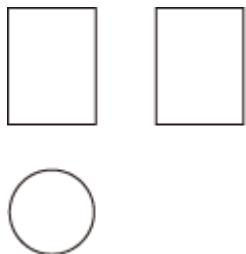


2022 北京丰台初三一模

数 学

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 如图是某几何体的三视图，该几何体是（ ）

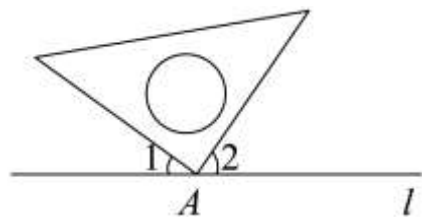


- A. 长方体 B. 三棱柱 C. 圆柱 D. 圆锥

2. 根据国家统计局统计结果，从北京冬奥会申办成功至 2021 年 10 月，全国参与冰雪运动的人数达到 3.46 亿，“带动三亿人参与冰雪运动”的承诺已经实现，这是北京冬奥会最大的遗产成果。将 346000000 用科学记数法表示应为（ ）

- A. 346×10^6 B. 3.46×10^8 C. 3.46×10^9 D. 0.346×10^9

3. 如图，直角三角板的直角顶点 A 在直线 l 上，如果 $\angle 1 = 35^\circ$ ，那么 $\angle 2$ 的度数是（ ）

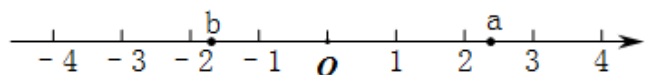


- A. 55° B. 45° C. 35° D. 25°

4. 下列图形中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（ ）



5. 实数 a , b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（ ）



- A. $a+b < 0$ B. $a-b > 0$ C. $ab > 0$ D. $|b| > 2$

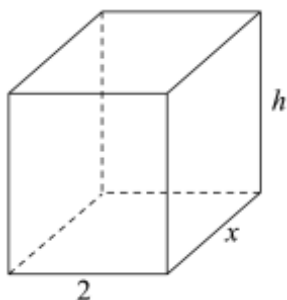
6. 不透明的袋子中有 3 个小球，其中有 1 个红球，1 个黄球，1 个绿球，除颜色外 3 个小球无其他差别，从中随机摸出一个小球，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，那么两次摸出的小球都是红球的概率是（ ）

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{9}$

7. 如果 $3x - 2y = 0$, 那么代数式 $(\frac{x}{y} + 1) \cdot \frac{3x}{x+y}$ 的值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. 如图, 长方体的体积是 100m^3 , 底面一边长为 2m . 记底面另一边长为 $x\text{m}$, 底面的周长为 $l\text{m}$, 长方体的高为 $h\text{m}$. 当 x 在一定范围内变化时, l 和 h 都随 x 的变化而变化, 则 l 与 x , h 与 x 满足的函数关系分别是 ()



- A. 一次函数关系, 二次函数关系
B. 反比例函数关系, 二次函数关系
C. 反比例函数关系, 一次函数关系
D. 一次函数关系, 反比例函数关系

二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

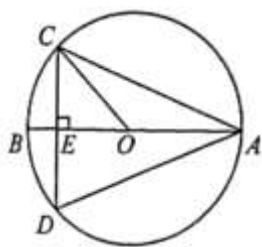
9. 若分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义, 则实数 x 取值范围是_____.

10. 分解因式: $2m^2 - 8 =$ _____.

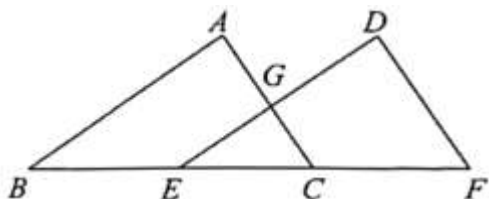
11. 写出一个比 3 大且比 5 小的无理数_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 交于点 $A(2, m)$, 则 k 的值是_____.

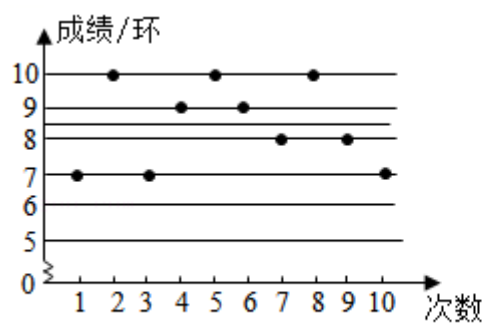
13. 如图, $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD , 垂足为 E , $\angle CAD = 45^\circ$, 则 $\angle BOC =$ _____.



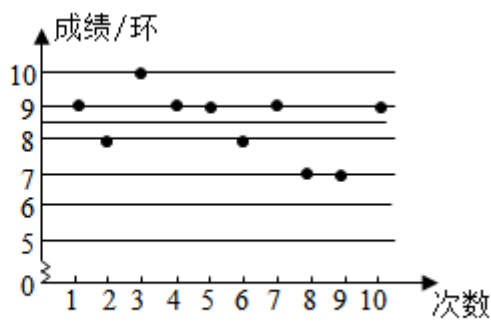
14. 如图, 点 B, E, C, F 在一条直线上, $BC = EF$, $\angle B = \angle DEF$. 只需添加一个条件即可证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 这个条件可以是_____ (写出一个即可).



15. 如图是甲、乙两名射击运动员 10 次射击训练成绩统计图, 如果甲、乙这 10 次射击成绩的方差为 $s_{\text{甲}}^2$, $s_{\text{乙}}^2$, 那么 $s_{\text{甲}}^2$ _____ $s_{\text{乙}}^2$. (填“>”, “=”或“<”)



甲的射击成绩统计图



乙的射击成绩统计图

16. 某工厂有甲、乙、丙、丁、戊五台车床. 若同时启动其中两台车床, 加工 10000 个 W 型零件所需时间如表:

车床编号	甲、乙	乙、丙	丙、丁	丁、戊	甲、戊
所需时间 (h)	13	9	10	12	8

则加工 W 型零件最快的一台车床的编号是 _____.

三、解答题

17. 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2\cos 30^\circ + |-\sqrt{12}| - (3.14 - \pi)^0$.

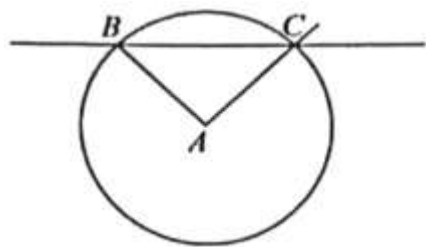
18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 3(x-1) < 2x+1 \\ \frac{x-1}{2} \leq x+2 \end{cases}$$

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+2)x + m+1 = 0$.

(1) 求证: 该方程总有两个实数根;

(2) 若该方程的两个实数根互为相反数, 求 m 的值.

20. 《周髀算经》中记载了一种确定东南西北方向的方法. 大意是: 在平地上点 A 处立一根杆, 记录日出时杆影子的长度 AB , 并以点 A 为圆心, 以 AB 为半径画圆, 记录同一天日落时杆影子的痕迹与此圆的交点 C , 那么直线 CB 表示的方向就是东西方向, $\angle BAC$ 的角平分线所在的直线表示的方向就是南北方向.



(1) 上述方法中, 点 A , B , C 位置如图所示, 使用直尺和圆规, 在图中作 $\angle BAC$ 的角平分线 AD (保留作图痕迹);

(2) 在图中, 确定了直线 CB 表示的方向为东西方向, 根据南北方向与东西方向互相垂直, 可以判断直线 AD 表示的方向为南北方向, 完成如下证明.

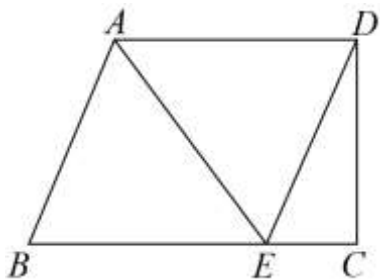
证明: \because 点 B , C 在 $\odot O$ 上,

$\therefore AB = \underline{\hspace{1cm}}$.

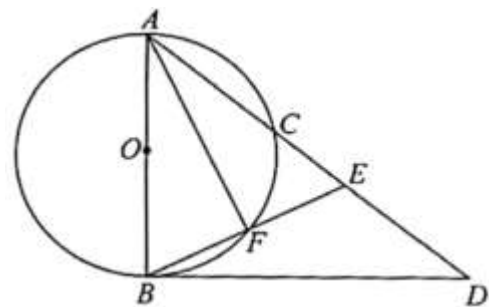
$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.

- ∵ AD 平分 $\angle BAC$,
 ∴ $AD \perp BC$ (____) (填推理的依据).
 ∵ 直线 CB 表示的方向为东西方向,
 ∴ 直线 AD 表示的方向为南北方向.

21. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle DCB=90^\circ$, $AD \parallel BC$, 点 E 在 BC 上, $AB \parallel DE$, AE 平分 $\angle BAD$.



- (1) 求证: 四边形 $ABED$ 为菱形;
 (2) 连接 BD , 交 AE 于点 O . 若 $AE=6$, $\sin \angle DBE = \frac{3}{5}$, 求 CD 的长.
22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象由函数 $y=2x$ 的图象平移得到, 且经过点 $(2, 1)$.
- (1) 求这个一次函数的解析式;
 (2) 当 $x > 0$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y=mx$ ($m \neq 0$) 的值大于一次函数 $y=kx+b$ 的值, 直接写出 m 的取值范围.
23. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\odot O$ 上一点, 连接 AC . 过点 B 作 $\odot O$ 的切线, 交 AC 的延长线于点 D , 在 AD 上取一点 E , 使 $AE=AB$, 连接 BE , 交 $\odot O$ 于点 F , 连接 AF .



- (1) 求证: $\angle BAF = \angle EBD$;
 (2) 过点 E 作 $EG \perp BD$ 于点 G . 如果 $AB=5$, $BE=2\sqrt{5}$, 求 EG , BD 的长.
24. 某公园在人工湖里安装一个喷泉, 在湖心处竖直安装一根水管, 在水管的顶端安一个喷水头, 水柱从喷水头喷出到落于湖面的路径形状可以看作是抛物线的一部分. 若记水柱上某一位置与水管的水平距离为 d 米, 与湖面的垂直高度为 h 米. 下面的表中记录了 d 与 h 的五组数据:

d (米)	0	1	2	3	4
h (米)	0.5	1.25	1.5	1.25	0.5

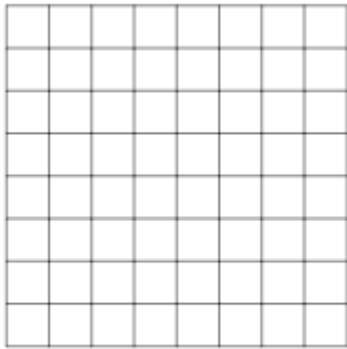


图1

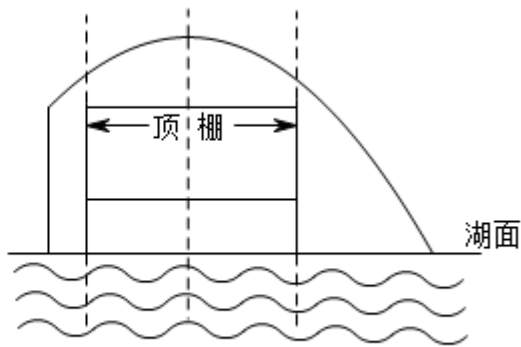
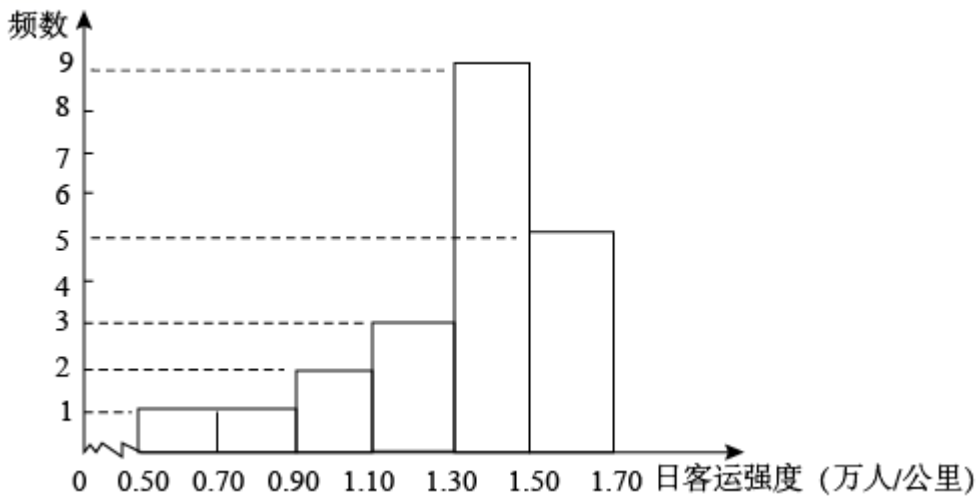


图2

根据上述信息，解决以下问题：

- (1) 在下面网格（图1）中建立适当的平面直角坐标系，并根据表中所给数据画出表示 h 与 d 函数关系的图象；
- (2) 若水柱最高点距离湖面的高度为 m 米，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (3) 现公园想通过喷泉设立新的游玩项目，准备通过只调节水管露出湖面的高度，使得游船能从水柱下方通过．如图2所示，为避免游船被喷泉淋到，要求游船从水柱下方中间通过时，顶棚上任意一点到水柱的竖直距离均不小于 0.5 米．已知游船顶棚宽度为 3 米，顶棚到湖面的高度为 2 米，那么公园应将水管露出湖面的高度（喷水头忽略不计）至少调节到多少米才能符合要求？请通过计算说明理由（结果保留一位小数）．

25. 为了解地铁 14 号线与 7 号线的日客运强度，获得了它们 2022 年 1 月份工作日（共 21 天）日客运强度（单位：万人/公里）的数据，并对数据进行了整理、描述和分析．下面给出了部分信息：



- a. 地铁 14 号线 2022 年 1 月份工作日日客运强度的数据的频数分布直方图如下（数据分成 6 组： $0.50 \leq x < 0.70$, $0.70 \leq x < 0.90$, $0.90 \leq x < 1.10$, $1.10 \leq x < 1.30$, $1.30 \leq x < 1.50$, $1.50 \leq x < 1.70$ ）；
- b. 地铁 14 号线 2022 年 1 月份工作日日客运强度的数据在 $1.30 \leq x < 1.50$ 这一组是：
1.37 1.37 1.37 1.38 1.41 1.47 1.48 1.48 1.49
- c. 地铁 14 号线与 7 号线 2022 年 1 月份工作日日客运强度的平均数、中位数如下：

	平均数	中位数
地铁 14 号线	1.37	m

地铁 7 号线	1.08	1.1
---------	------	-----

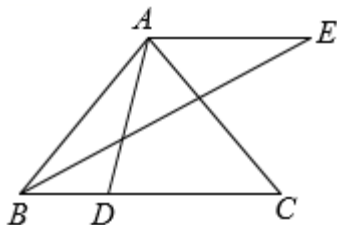
根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 写出表中 m 的值；
- (2) 日客运强度反映了地铁的拥挤程度，小明每天上班均需乘坐地铁，可以选择乘坐地铁 14 号线或乘坐地铁 7 号线。请帮助小明选择一种乘坐地铁的方式，并说明理由；
- (3) 2022 年一共有 249 个工作日，请估计 2022 年全年的工作日中，地铁 14 号线日客运强度不低于 1.3 万人/公里的天数（直接写出结果）。

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M(2, m)$ ， $N(4, n)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a > 0$) 上。

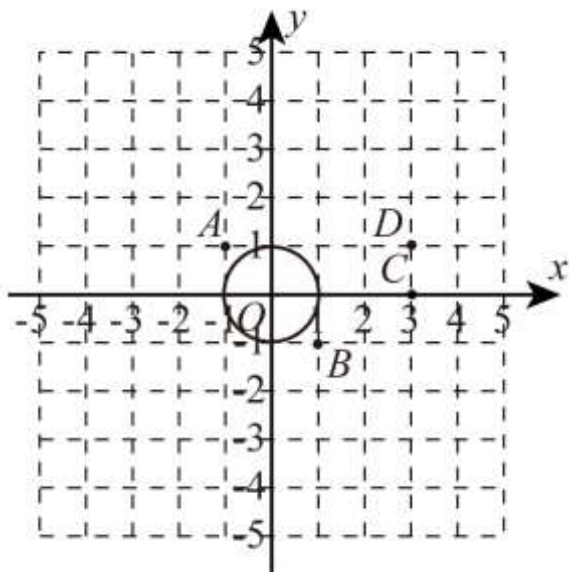
- (1) 若 $m = n$ ，求该抛物线的对称轴；
- (2) 已知点 $P(-1, p)$ 在该抛物线上，设该抛物线的对称轴为 $x = t$ 。若 $mn < 0$ ，且 $m < p < n$ ，求 t 的取值范围。

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = \alpha$ ，点 D 在边 BC 上（不与点 B ， C 重合），连接 AD ，以点 A 为中心，将线段 AD 逆时针旋转 $180^\circ - \alpha$ 得到线段 AE ，连接 BE 。



- (1) $\angle BAC + \angle DAE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；
- (2) 取 CD 中点 F ，连接 AF ，用等式表示线段 AF 与 BE 的数量关系，并证明。

28. 在平面直角坐标系 xOy 中， $\odot O$ 的半径为 1， $T(0, t)$ 为 y 轴上一点， P 为平面上一点。给出如下定义：若在 $\odot O$ 上存在一点 Q ，使得 $\triangle TQP$ 是等腰直角三角形，且 $\angle TQP = 90^\circ$ ，则称点 P 为 $\odot O$ 的“等直点”， $\triangle TQP$ 为 $\odot O$ 的“等直三角形”。如图，点 A ， B ， C ， D 的横、纵坐标都是整数。



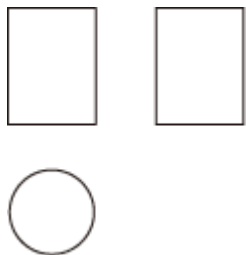
- (1) 当 $t = 2$ 时，在点 A ， B ， C ， D 中， $\odot O$ 的“等直点”是_____；

(2) 当 $t=3$ 时, 若 $\triangle TQP$ 是 $\odot O$ “等直角三角形”, 且点 P, Q 都在第一象限, 求 $\frac{CP}{OQ}$ 的值.

参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 如图是某几何体的三视图，该几何体是（ ）



A. 长方体

B. 三棱柱

C. 圆柱

D. 圆锥

【答案】C

【解析】

【分析】根据几何体的三视图进行一一判断即可.

【详解】解：∵主视图和左视图为长方形

∴几何体不是三棱柱和圆锥

∵俯视图为圆

∴几何体不是长方体

∴该几何体为圆柱

故选 C.

【点睛】本题考查了几何体的三视图. 解题的关键在于熟练掌握几何体从前面，左面，上面看到的分别为主视图，左视图，俯视图.

2. 根据国家统计局统计结果，从北京冬奥会申办成功至 2021 年 10 月，全国参与冰雪运动的人数达到 3.46 亿，“带动三亿人参与冰雪运动”的承诺已经实现，这是北京冬奥会最大的遗产成果. 将 346000000 用科学记数法表示应为（ ）

A. 346×10^6

B. 3.46×10^8

C. 3.46×10^9

D. 0.346×10^9

【答案】B

【解析】

【分析】346000000 用科学记数法表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $a = 3.46$ ， $n = 8$ ，代入可得结果.

【详解】解：346000000 的绝对值大于 10 表示成 $a \times 10^n$ 的形式

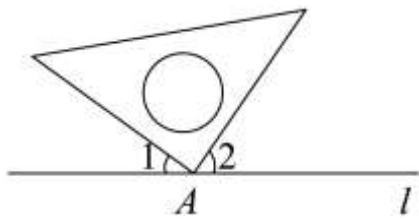
∵ $a = 3.46$ ， $n = 9 - 1 = 8$

∴ 346000000 表示成 3.46×10^8

故选：B.

【点睛】本题考查了科学记数法. 解题的关键在于确定 a 、 n 的值.

3. 如图，直角三角板的直角顶点 A 在直线 l 上，如果 $\angle 1 = 35^\circ$ ，那么 $\angle 2$ 的度数是（ ）



A. 55°

B. 45°

C. 35°

D. 25°

【答案】A

【解析】

【分析】根据图形可判断 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，继而可得出答案.

【详解】解：由图形可得 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

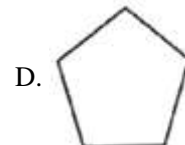
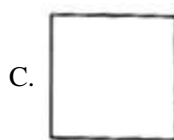
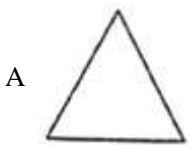
$\therefore \angle 1 = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

故选：A.

【点睛】本题考查了补角和余角的知识，难度一般，解答本题的关键是熟记互余两角之和等于 90° .

4. 下列图形中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义进行判断即可.

【详解】解：A. 是轴对称图形，但不是中心对称图形，不符合题意；

B. 不是轴对称图形，是中心对称图形，不符合题意；

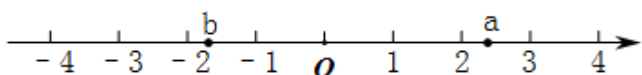
C. 既是轴对称图形，又是中心对称图形，符合题意；

D. 是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

故选 C.

【点睛】中心对称图形是指把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形；轴对称图形是指如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，熟练地掌握概念是解决本题的关键.

5. 实数 a , b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（ ）



A. $a+b < 0$

B. $a - b > 0$

C. $ab > 0$

D. $|b| > 2$

【答案】B

【解析】

【分析】由数轴可得 $-2 < b < -1 < 0 < 2 < a < 3$ ，对各选项进行判断即可.

【详解】解：由数轴可得 $-2 < b < -1 < 0 < 2 < a < 3$

$$\therefore a > -b, a > b, ab < 0, |b| < 2$$

$$\therefore a + b > 0, a - b > 0$$

\therefore A、C、D 错误，不符合题意；B 正确，符合题意；

故选 B.

【点睛】本题考查了实数与数轴. 解题的关键在于从数轴上确定 a, b 的取值与大小.

6. 不透明的袋子中有 3 个小球，其中有 1 个红球，1 个黄球，1 个绿球，除颜色外 3 个小球无其他差别，从中随机摸出一个小球，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，那么两次摸出的小球都是红球的概率是（ ）

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{9}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用列表法或树状图法列出所有结果，找出满足条件的结果，即可得出结果.

【详解】解：列表如下，

	红	黄	绿
红	(红, 红)	(红, 黄)	(红, 绿)
黄	(黄, 红)	(黄, 黄)	(黄, 绿)
绿	(绿, 红)	(绿, 黄)	(绿, 绿)

由表可知，共有 9 种等可能结果，其中满足条件的两次都是红球的结果只有 1 种，

$$\therefore P(\text{两次都是红球}) = \frac{1}{9},$$

故选：D.

【点睛】题目主要考查利用列表法或树状图法求概率，熟练掌握列表法或树状图法是解题关键.

7. 如果 $3x - 2y = 0$ ，那么代数式 $(\frac{x}{y} + 1) \cdot \frac{3x}{x+y}$ 的值为（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】由已知得 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ，再化简代数式求值即可.

【详解】解： $\because 3x - 2y = 0$

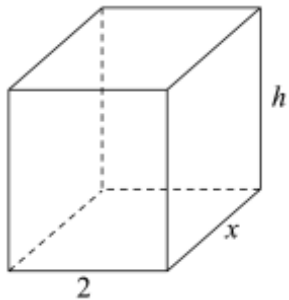
$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore (\frac{x}{y} + 1) \cdot \frac{3x}{x+y} = (\frac{x}{y} + 1) \cdot \frac{3}{1 + \frac{y}{x}} = (\frac{2}{3} + 1) \times \frac{3}{1 + \frac{3}{2}} = 2$$

故选：B.

【点睛】本题考查分式的化简求值，正确地计算能力是解决问题的关键.

8. 如图，长方体的体积是 100m^3 ，底面一边长为 2m . 记底面另一边长为 $x\text{m}$ ，底面的周长为 $l\text{m}$ ，长方体的高为 $h\text{m}$. 当 x 在一定范围内变化时， l 和 h 都随 x 的变化而变化，则 l 与 x ， h 与 x 满足的函数关系分别是（ ）



- A. 一次函数关系，二次函数关系
- B. 反比例函数关系，二次函数关系
- C. 反比例函数关系，一次函数关系
- D. 一次函数关系，反比例函数关系

【答案】D

【解析】

【分析】根据底面的周长公式“底面周长=2（长+宽）”可表示出 l 与 x 的关系式，根据长方体的体积公式“长方体体积=长×宽×高”可表示出 h 与 x ，根据各自的表达式形式判断函数类型即可.

【详解】解：由底面的周长公式：底面周长=2（长+宽）

可得： $l = 2(x + 2)$

即： $l = 2x + 4$

$\therefore l$ 与 x 的关系为：一次函数关系.

根据长方体的体积公式：长方体体积=长×宽×高

可得： $100 = 2xh$

$$h = \frac{50}{x}$$

$\therefore h$ 与 x 的关系为：反比例函数关系.

故选：D

【点睛】本题考查了函数关系式的综合应用，涉及到一次函数、二次函数、反比例函数等知识，熟知函数的相关类型并且能够根据实际问题列出函数关系式是解决本题的关键.

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq 5$

【解析】

【分析】由于分式的分母不能为 0，因此 $x-5 \neq 0$ ，解得 x .

【详解】解：∵分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，

∴ $x-5 \neq 0$ ，即 $x \neq 5$ 。

故答案为 $x \neq 5$ 。

【点睛】本题主要考查分式有意义的条件：分式有意义，分母不能为 0。

10. 分解因式： $2m^2 - 8 =$ _____。

【答案】 $2(m+2)(m-2)$

【解析】

【分析】先提出公因式，再根据平方差公式分解即可。

【详解】原式 $= 2(m^2 - 4) = 2(m+2)(m-2)$ 。

故答案为： $2(m+2)(m-2)$ 。

【点睛】本题主要考查了因式分解，掌握因式分解的步骤是解题的关键。即先提出公因式，再根据乘法公式分解到不能再分为止。

11. 写出一个比 3 大且比 5 小的无理数 _____。

【答案】答案不唯一，如： π 。

【解析】

【分析】由于 $3 = \sqrt{9}$, $5 = \sqrt{25}$, 所以可写出一个二次根式，此根式的被开方数大于 9 且小于 25 即可，如 π 等。

【详解】解：写出一个比 3 大且比 4 小的无理数： π （答案不唯一）。

故答案为： π （答案不唯一）。

【点睛】此题主要考查了无理数的定义，注意带根号的要开不尽方才是无理数，无限不循环小数为无理数。如 π , 6, 0.8080080008. . . .（每两个 8 之间依次多 1 个 0）等形式。

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 交于点 $A(2, m)$ ，则 k 的值是 _____。

【答案】 4

【解析】

【分析】将 $A(2, m)$ 代入 $y = x$ 中得， $m = 2$ ，将 $A(2, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 求解即可。

【详解】解：将 $A(2, m)$ 代入 $y = x$ 中得， $m = 2$

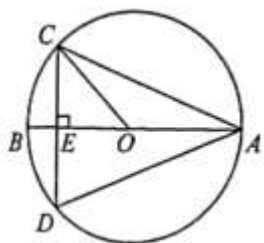
∴ $A(2, 2)$

将 $A(2, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得， $k = 4$

故答案为： 4。

【点睛】本题考查了反比例函数与一次函数综合。解题的关键在于求出 A 点坐标。

13. 如图， $\odot O$ 的直径 AB 垂直于弦 CD ，垂足为 E ， $\angle CAD = 45^\circ$ ，则 $\angle BOC =$ _____°。



【答案】45

【解析】

【分析】根据垂径定理可得 $\triangle ACD$ 是等腰三角形， $\angle BAC = 22.5^\circ$ ，然后再利用圆周角定理可得 $\angle BOC = 45^\circ$ ．

【详解】解： $\because \odot O$ 直径 AB 垂直于弦 CD ，

$\therefore CE = DE$ ，

$\therefore AB$ 垂直平分 CD

$\therefore AC = AD$

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰三角形

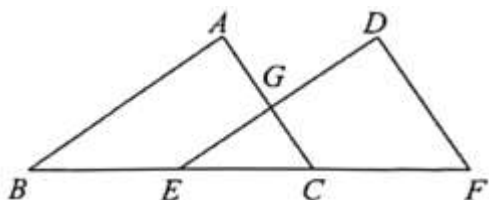
$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle CAD = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ$

$\therefore \angle BOC = 2 \angle BAC = 45^\circ$ ，

故答案为：45．

【点睛】此题主要考查了圆周角定理、垂径定理、等腰三角形的判定和性质，关键是掌握垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧；在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．

14. 如图，点 B, E, C, F 在一条直线上， $BC = EF$ ， $\angle B = \angle DEF$ ．只需添加一个条件即可证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，这个条件可以是 _____（写出一个即可）．



【答案】 $AB = DE$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】根据全等三角形的判定定理结合图形即可得出结果．

【详解】解：添加条件为 $AB = DE$ ，

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中，

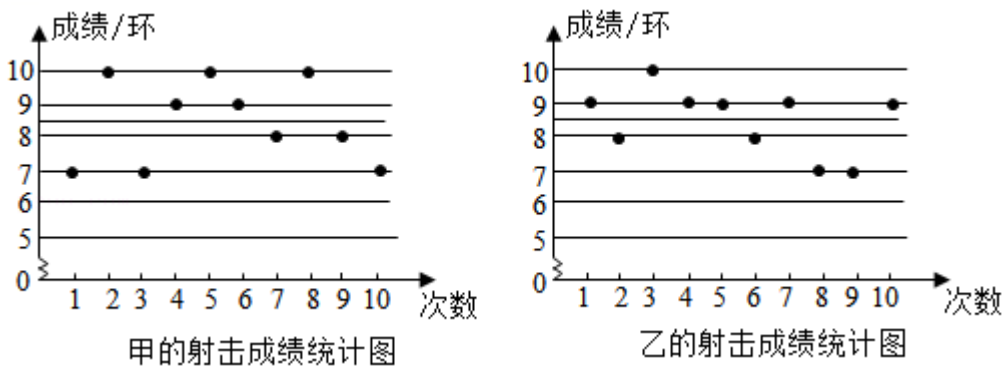
$$\begin{cases} AB = DE, \\ \angle B = \angle DEF, \\ BC = EF, \end{cases}$$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ （SAS），

故答案为 $AB = DE$ （答案不唯一）．

【点睛】题目主要考查全等三角形的判定定理，熟练掌握全等三角形的判定是解题关键．

15. 如图是甲、乙两名射击运动员 10 次射击训练成绩的统计图，如果甲、乙这 10 次射击成绩的方差为 $s_{甲}^2$, $s_{乙}^2$ ，那么 $s_{甲}^2$ $s_{乙}^2$. （填“>”，“=”或“<”）



【答案】>

【解析】

【分析】从统计图中得出甲乙的射击成绩，再利用方差的公式计算.

【详解】解：由图中知，甲的成绩为 7，10，7，9，10，9，8，10，8，7，
乙的成绩为 9，8，10，9，9，8，9，7，7，9，

$$\overline{x}_{甲} = \frac{1}{10} \times (7 + 10 + 7 + 9 + 10 + 9 + 8 + 10 + 8 + 7) = 8.5,$$

$$\overline{x}_{乙} = \frac{1}{10} \times (9 + 8 + 10 + 9 + 9 + 8 + 9 + 7 + 7 + 9) = 8.5,$$

$$甲的方差 s_{甲}^2 = [3 \times (7 - 8.5)^2 + 2 \times (8 - 8.5)^2 + 3 \times (10 - 8.5)^2 + 2 \times (9 - 8.5)^2] \div 10 = 1.45,$$

$$乙的方差 s_{乙}^2 = [2 \times (7 - 8.5)^2 + 2 \times (8 - 8.5)^2 + 5 \times (9 - 8.5)^2 + (10 - 8.5)^2] \div 10 = 0.85,$$

$$\therefore s_{甲}^2 > s_{乙}^2,$$

故答案为：>.

【点睛】本题考查方差的定义与意义，解题的关键是熟记方差的计算公式，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立.

16. 某工厂有甲、乙、丙、丁、戊五台车床. 若同时启动其中两台车床，加工 10000 个 W 型零件所需时间如表：

车床编号	甲、乙	乙、丙	丙、丁	丁、戊	甲、戊
所需时间 (h)	13	9	10	12	8

则加工 W 型零件最快的一台车床的编号是 ____.

【答案】丙

【解析】

【分析】根据表格分别求出两个一起的工作效率，然后比较即可得出结果.

【详解】解：根据表格可得：

$$甲乙一起的效率为 \frac{10000}{13}, 乙丙一起的效率为 \frac{10000}{9},$$

\therefore 甲的效率<丙的效率；

乙丙一起的效率为 $\frac{10000}{9}$ ，丙丁一起的效率为1000，

∴丁的效率<乙的效率；

丙丁一起的效率为1000，丁戊一起的效率为 $\frac{2500}{3}$ ，

∴戊的效率<丙的效率；

丁戊一起的效率为 $\frac{2500}{3}$ ，甲戊一起的效率为1250，

∴丁的效率<甲的效率；

甲乙一起的效率为 $\frac{10000}{13}$ ，甲戊一起的效率为1250，

∴乙的效率<戊的效率；

综上可得：丁的效率<乙的效率<戊的效率<丙的效率，甲的效率<丙的效率；

最快的车床编号为丙，

故答案为：丙．

【点睛】题目主要考查有理数的大小比较的应用，理解题意，找准突破口是解题关键．

三、解答题

17. 计算： $(\frac{1}{2})^{-1} - 2\cos 30^\circ + |-\sqrt{12}| - (3.14 - \pi)^0$ ．

【答案】 $\sqrt{3} + 1$

【解析】

【分析】分别根据负整数指数幂、特殊角的三角函数值、绝对值的性质、零指数幂计算出各数，再根据混合运算的法则进行计算；

【详解】解： $(\frac{1}{2})^{-1} - 2\cos 30^\circ + |-\sqrt{12}| - (3.14 - \pi)^0$

$$= 2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} - 1$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 1$$

$$= \sqrt{3} + 1$$

【点睛】此题考查了负整数指数幂、特殊角的三角函数值、绝对值的性质、零指数幂，掌握相关运算法则是解题的关键．

$$18. \text{解不等式组: } \begin{cases} 3(x-1) < 2x+1 \\ \frac{x-1}{2} \leq x+2 \end{cases} .$$

【答案】 $-5 \leq x < 4$

【解析】

【分析】分别求出两不等式的解集，根据：“大小小大中间找”确定不等式组解集．

【详解】解：
$$\begin{cases} 3(x-1) < 2x+1 \text{①} \\ \frac{x-1}{2} \leq x+2 \text{②} \end{cases}$$

由①得 $3x-3 < 2x+1$ ，即 $x < 4$

由②得 $x-1 \leq 2x+4$ ，即 $x \geq -5$

∴ 不等式组的解集为： $-5 \leq x < 4$

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组：求解出两个不等式的解集，然后按照“同大取大，同小取小，大于小的小于大的取中间，小于小的大于大的无解”确定不等式组的解集。

19. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+2)x + m+1 = 0$.

(1) 求证：该方程总有两个实数根；

(2) 若该方程的两个实数根互为相反数，求 m 的值.

【答案】(1) 见解析 (2) $m = -2$

【解析】

【分析】(1) 先计算根的判别式的值，再利用非负数的性质判断 $\Delta \geq 0$ ，然后根据根的判别式的意义得到结论；

(2) 根据根与系数的关系得到 $x_1 + x_2 = m+2$ ，则由方程的两个实数根互为相反数得到 $m+2=0$ ，然后解得 m 的值即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{证明：} \because \Delta &= [-(m+2)]^2 - 4(m+1) = m^2 + 4m + 4 - 4m - 4 \\ &= m^2 \geq 0, \end{aligned}$$

∴ 无论 m 取何值，此方程总有两个实数根；

【小问 2 详解】

解：根据题意得 $x_1 + x_2 = m+2$,

∵ 方程的两个实数根互为相反数，

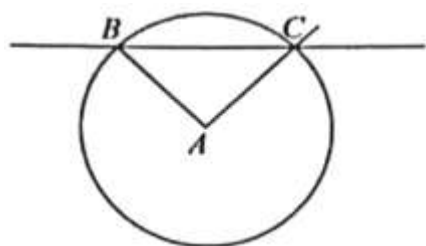
$$\therefore m+2=0,$$

解得 $m = -2$,

即 m 的值为 -2 .

【点睛】此题考查了根与系数的关系及根的判别式， x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，根据方程的两个实数根互为相反数列式是解题的关键.

20. 《周髀算经》中记载了一种确定东南西北方向的方法. 大意是：在平地上点 A 处立一根杆，记录日出时杆影子的长度 AB ，并以点 A 为圆心，以 AB 为半径画圆，记录同一天日落时杆影子的痕迹与此圆的交点 C ，那么直线 CB 表示的方向就是东西方向， $\angle BAC$ 的角平分线所在的直线表示的方向就是南北方向.



(1) 上述方法中，点 A, B, C 的位置如图所示，使用直尺和圆规，在图中作 $\angle BAC$ 的角平分线 AD （保留作图痕迹）；

(2) 在图中，确定了直线 CB 表示的方向为东西方向，根据南北方向与东西方向互相垂直，可以判断直线 AD 表示的方向为南北方向，完成如下证明．

证明： \because 点 B, C 在 $\odot O$ 上，

$\therefore AB = \underline{\quad}$ ．

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形．

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore AD \perp BC$ （ ）（填推理的依据）．

\because 直线 CB 表示的方向为东西方向，

\therefore 直线 AD 表示的方向为南北方向．

【答案】（1）见解析 （2） AC ；等腰三角形的顶角平分线，底边上的中线，底边上的高相互重合

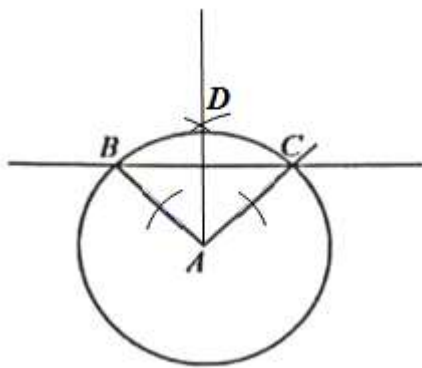
【解析】

【分析】（1）以点 A 为圆心，以适当的长度为半径画弧分别与 AB, AC 交于一点，分别以这两点为圆心，以大于两点间距离的一半为半径画弧交于点 D ，作射线 AD ，则 AD 即为所求；

（2）先证明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，由 AD 平分 $\angle BAC$ ，根据等腰三角形的性质证明 $AD \perp BC$ ，即可得到结论．

【小问 1 详解】

解：如图所示，射线 AD 即为 $\angle BAC$ 的角平分线；



【小问 2 详解】

解：证明： \because 点 B, C 在 $\odot O$ 上，

$\therefore AB = \underline{AC}$ ．

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形．

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore AD \perp BC$ （等腰三角形的顶角平分线，底边上的中线，底边上的高相互重合）（填推理的依据）．

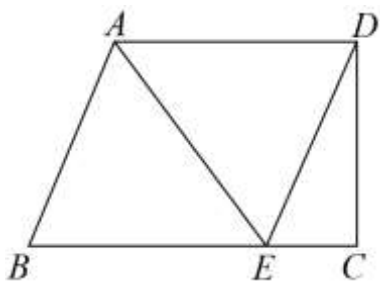
\because 直线 CB 表示的方向为东西方向，

\therefore 直线 AD 表示的方向为南北方向．

故答案为： AC ；等腰三角形的顶角平分线，底边上的中线，底边上的高相互重合

【点睛】此题考查了基本作图中的角平分线作图、等腰三角形的判定和性质、圆的相关知识，熟练掌握等腰三角形的性质和判定是解题的关键．

21. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle DCB = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，点 E 在 BC 上， $AB \parallel DE$ ， AE 平分 $\angle BAD$ ．



(1) 求证：四边形 $ABED$ 为菱形；

(2) 连接 BD ，交 AE 于点 O 。若 $AE=6$ ， $\sin \angle DBE = \frac{3}{5}$ ，求 CD 的长。

【答案】 (1) 见解析 (2) $CD = \frac{24}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 先证明四边形 $ABED$ 为平行四边形，再证一组邻边相等，可得结论；

(2) 先根据菱形的性质及解直角三角形求得 BE 及 BD 的长，再通过面积法求得 CD 的长。

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \parallel BC, AB \parallel DE,$

\therefore 四边形 $ABED$ 为平行四边形，

$\because AE$ 平分 $\angle BAD,$

$\therefore \angle BAE = \angle DAE.$

$\because AD \parallel BC,$

$\therefore \angle DAE = \angle AEB,$

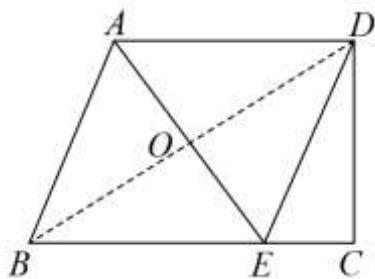
$\therefore \angle BAE = \angle AEB,$

$\therefore AB = BE,$

$\therefore \square ABED$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：如图，连接 BD ，



\because 四边形 $ABED$ 是菱形，

$\therefore AE \perp BD, AO = OE = \frac{1}{2} AE = 3, OB = OD,$

$$\therefore \sin \angle DBE = \frac{OE}{BE} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BE = 5,$$

$$\therefore OB = \sqrt{BE^2 - OE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BD = 2OB = 8,$$

$$\because \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABED} = \frac{1}{2} AE \cdot BD = BE \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 5 \cdot CD$$

$$\therefore CD = \frac{24}{5}.$$

【点睛】本题考查了菱形的判定和性质，平行线的性质，等腰三角形的判定，掌握菱形的面积等于对角线积的一半是解题的关键。

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象由函数 $y=2x$ 的图象平移得到，且经过点 $(2, 1)$.

(1) 求这个一次函数的解析式；

(2) 当 $x > 0$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx$ ($m \neq 0$) 的值大于一次函数 $y=kx+b$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

【答案】 (1) $y = 2x - 3$

(2) $m \geq 2$

【解析】

【分析】 (1) 由一次函数图象平移可知 $k = 2$ ，将 $(2, 1)$ 代入 $y = 2x + b$ ，求 b 的值，进而可得一次函数解析式；

(2) 如图，由图象可知， $m \geq 2$ 时，当 $x > 0$ 时，对于 x 的每一个值均有 $mx > kx + b$ ，进而可得答案.

【小问 1 详解】

解：由题意知， $k = 2$

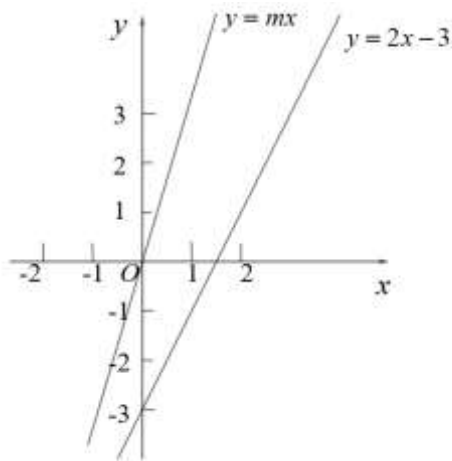
将 $(2, 1)$ 代入 $y = 2x + b$ 得， $2 \times 2 + b = 1$

解得 $b = -3$

\therefore 一次函数解析式为 $y = 2x - 3$.

【小问 2 详解】

解：如图，

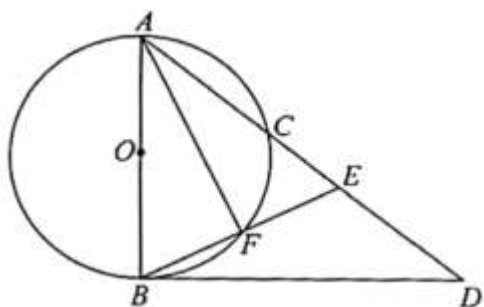


由图象可知， $m \geq 2$ 时，当 $x > 0$ 时，对于 x 的每一个值均有 $mx > kx + b$

$\therefore m$ 的取值范围为 $m \geq 2$.

【点睛】本题考查了一次函数图象的平移，一次函数解析式，一次函数与不等式等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

23. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C 是 $\odot O$ 上一点，连接 AC ．过点 B 作 $\odot O$ 的切线，交 AC 的延长线于点 D ，在 AD 上取一点 E ，使 $AE = AB$ ，连接 BE ，交 $\odot O$ 于点 F ，连接 AF ．



(1) 求证： $\angle BAF = \angle EBD$ ；

(2) 过点 E 作 $EG \perp BD$ 于点 G ．如果 $AB = 5$ ， $BE = 2\sqrt{5}$ ，求 EG ， BD 的长．

【答案】(1) 证明见解析

(2) $EG = 2$ ， $BD = \frac{20}{3}$

【解析】

【分析】(1) 由直径所对的圆周角为 90° ，可得 $\angle AFB = 90^\circ$ ，由切线的性质可得 $\angle ABD = 90^\circ$ ，由 $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$ ， $\angle ABF + \angle EBD = 90^\circ$ 可得 $\angle BAF = \angle EBD$ ；

(2) 如图，由 $AE = AB$ ， $\angle AFB = 90^\circ$ ，可得 $BF = EF = \frac{1}{2}BE = \sqrt{5}$ ，由 $\sin \angle BAF = \sin \angle EBD$ 可得

$\frac{BF}{AB} = \frac{EG}{BE}$ ，求出 EG 的值，在 $Rt\triangle BEG$ ，由勾股定理得 $BG = \sqrt{BE^2 - EG^2}$ ，求出 BG 的值，证明

$\triangle EDG \sim \triangle ADB$ ，则 $\frac{DG}{BD} = \frac{EG}{AB}$ ，计算求解即可．

【小问1详解】

证明： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ$$

$\because BD$ 是 $\odot O$ 的切线

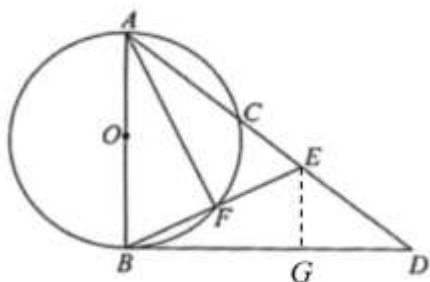
$$\therefore \angle ABD = 90^\circ$$

$$\because \angle BAF + \angle ABF = 90^\circ, \angle ABF + \angle EBD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EBD.$$

【小问 2 详解】

解：如图，



$$\because AE = AB, \angle AFB = 90^\circ$$

$$\therefore BF = EF = \frac{1}{2}BE = \sqrt{5}$$

$$\because \angle BAF = \angle EBD$$

$$\therefore \sin \angle BAF = \sin \angle EBD$$

$$\therefore \frac{BF}{AB} = \frac{EG}{BE} \text{ 即 } \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{EG}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{解得 } EG = 2$$

$$\text{在 } Rt\triangle BEG \text{ 中, 由勾股定理得 } BG = \sqrt{BE^2 - EG^2} = 4$$

$$\because \angle EDG = \angle ADB, \angle EGD = \angle ABD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle EDG \sim \triangle ADB$$

$$\therefore \frac{DG}{BD} = \frac{EG}{AB} \text{ 即 } \frac{BD-4}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$\text{解得 } BD = \frac{20}{3}$$

$$\therefore EG \text{ 的长为 } 2, BD \text{ 的长为 } \frac{20}{3}.$$

【点睛】本题考查了切线的性质，直径所对的圆周角为 90° ，等腰三角形的性质，正弦，勾股定理，相似三角形的判定与性质等知识。解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用。

24. 某公园在人工湖里安装一个喷泉，在湖心处竖直安装一根水管，在水管的顶端安一个喷水头，水柱从喷水头喷出到落于湖面的路径形状可以看作是抛物线的一部分。若记水柱上某一位置与水管的水平距离为 d 米，与湖面的垂直高度为 h 米。下面的表中记录了 d 与 h 的五组数据：

d (米)	0	1	2	3	4
---------	---	---	---	---	---

h (米)	0.5	1.25	1.5	1.25	0.5
---------	-----	------	-----	------	-----



图1

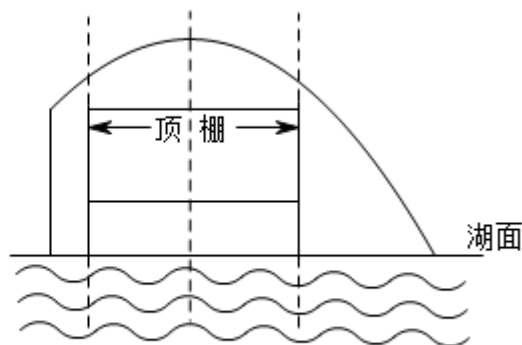


图2

根据上述信息，解决以下问题：

- (1) 在下面网格（图1）中建立适当的平面直角坐标系，并根据表中所给数据画出表示 h 与 d 函数关系的图象；
- (2) 若水柱最高点距离湖面的高度为 m 米，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (3) 现公园想通过喷泉设立新的游玩项目，准备通过只调节水管露出湖面的高度，使得游船能从水柱下方通过．如图2所示，为避免游船被喷泉淋到，要求游船从水柱下方中间通过时，顶棚上任意一点到水柱的竖直距离均不小于 0.5 米．已知游船顶棚宽度为 3 米，顶棚到湖面的高度为 2 米，那么公园应将水管露出湖面的高度（喷水头忽略不计）至少调节到多少米才能符合要求？请通过计算说明理由（结果保留一位小数）．

【答案】(1) 图见解析， $h = -\frac{1}{4}(d-2)^2 + 1.5 (0 \leq d \leq 2 + \sqrt{6})$

(2) 1.5 (3) 2.1 米，理由见解析

【解析】

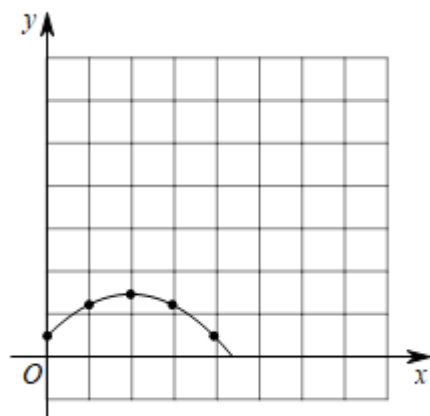
【分析】(1) 根据表中数据得出抛物线的顶点坐标，然后设抛物线解析式 $h = a(d-2)^2 + 1.5$ ，代入点求解即可得；

(2) 由(1)中确定的顶点式即可得出结果；

(3) 设水管高度至少向上调节 m 米，根据题意得出不等式，代入求解即可得出结果．

【小问1详解】

解：以水管与湖面的交点为原点，水管所在的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图所示：



根据表格数据可得， $d=1$ 与 $d=3$ 的函数值相同，

\therefore 对称轴为 $d=2$ ， $h=1.5$ ，

∴ 抛物线的顶点坐标为 (2, 1.5),

∴ 设抛物线的解析式为 $h=a(d-2)^2+1.5$, 将点 (0, 0.5) 代入可得

$$0.5=4a+1.5,$$

$$\text{解得: } a=-\frac{1}{4},$$

$$h=-\frac{1}{4}(d-2)^2+1.5,$$

当 $h=0$ 时, $d=2+\sqrt{6}$,

$$\therefore h=-\frac{1}{4}(d-2)^2+1.5 \quad (0 < d < 2+\sqrt{6});$$

【小问 2 详解】

由 (1) 可得: 当 $d=2$ 时, h 最大为 1.5,

故答案为: 1.5;

【小问 3 详解】

设水管高度至少向上调节 m 米,

由题意可知调节后的水管喷出的抛物线的解析式为 $h=-\frac{1}{4}d^2+d+0.5+m$,

当横坐标为 $2+\frac{3}{2}=3.5$ 时, 纵坐标的值大于等于 $2+0.5=2.5$,

$$\therefore -\frac{1}{4} \times 3.5^2 + 3.5 + 0.5 + m \geq 2.5,$$

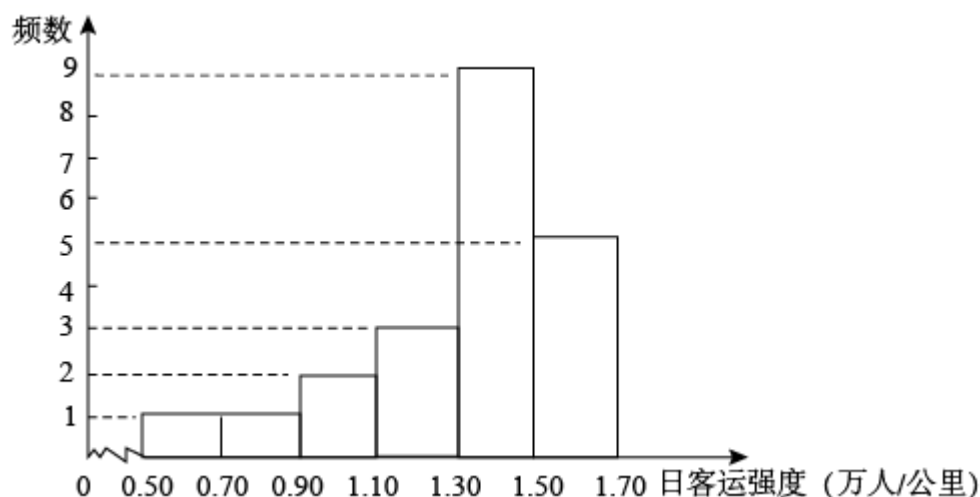
$$\text{解得: } m \geq \frac{25}{16},$$

$$0.5 + \frac{25}{16} = \frac{33}{16} \approx 2.1 \text{ 米},$$

水管高度至少要调节到 2.1 米.

【点睛】本题主要考查二次函数的应用, 顶点式的应用以及不等式的应用, 理解题意, 确定二次函数解析式是解题关键.

25. 为了解地铁 14 号线与 7 号线的日客运强度, 获得了它们 2022 年 1 月份工作日 (共 21 天) 日客运强度 (单位: 万人/公里) 的数据, 并对数据进行整理、描述和分析. 下面给出了部分信息:



a. 地铁 14 号线 2022 年 1 月份工作日日客运强度的数据的频数分布直方图如下（数据分成 6 组： $0.50 \leq x < 0.70$, $0.70 \leq x < 0.90$, $0.90 \leq x < 1.10$, $1.10 \leq x < 1.30$, $1.30 \leq x < 1.50$, $1.50 \leq x < 1.70$ ）；

b. 地铁 14 号线 2022 年 1 月份工作日日客运强度的数据在 $1.30 \leq x < 1.50$ 这一组是：
1.37 1.37 1.37 1.38 1.41 1.47 1.48 1.48 1.49

c. 地铁 14 号线与 7 号线 2022 年 1 月份工作日日客运强度的平均数、中位数如下：

	平均数	中位数
地铁 14 号线	1.37	m
地铁 7 号线	1.08	1.1

根据以上信息，回答下列问题：

- 写出表中 m 的值；
- 日客运强度反映了地铁的拥挤程度，小明每天上班均需乘坐地铁，可以选择乘坐地铁 14 号线或乘坐地铁 7 号线。请帮助小明选择一种乘坐地铁的方式，并说明理由；
- 2022 年一共有 249 个工作日，请估计 2022 年全年的工作日中，地铁 14 号线日客运强度不低于 1.3 万人/公里的天数（直接写出结果）。

【答案】（1）1.38

（2）7 号线，理由见解析

（3）166

【解析】

【分析】（1）由条形统计图的频数可确定 14 号线的中位数第 11 个数据在 $1.30 \leq x < 1.50$ 这一组第 4 个数据，由此即可得出结果；

（2）根据平均数及中位数可得选择 7 号线最好；

（3）使用总天数乘以 1.3 万人/公里以上站一月工作日的比例即可得出结果。

【小问 1 详解】

解：根据条形统计图可得， $1+1+2+3+9=16$ ，

14 号线的中位数第 11 个数据在 $1.30 \leq x < 1.50$ 这一组第 4 个数据为 1.38，

故答案为：1.38；

【小问 2 详解】

选择 7 号线，理由如下：

7 号线的客运强度的平均数及中位数均小于 14 号线，说明人流量较小，所以选择 7 号线；

【小问 3 详解】

$$\text{解：} 249 \times \frac{9+5}{21} = 166,$$

地铁 14 号线日客运强度不低于 1.3 万人/公里的天数为 166 天.

【点睛】题目主要考查从条形统计图获取相关数据，求中位数，利用中位数、平均数做决策，估算总体等，理解题意，熟练掌握运用这些知识点是解题关键.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M(2, m)$ ， $N(4, n)$ 在抛物线 $y = ax^2 + bx$ ($a > 0$) 上.

(1) 若 $m = n$ ，求该抛物线的对称轴；

(2) 已知点 $P(-1, P)$ 在该抛物线上，设该抛物线的对称轴为 $x = t$. 若 $mn < 0$ ，且 $m < p < n$ ，求 t 的取值范围.

$$\text{【答案】 (1) } x=3 \quad (2) 1 < t < \frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 根据函数值相同的两个点关于对称轴对称求解即可；

(2) 根据题意列出相应不等式，然后将不等式化简为对称轴的形式得出相应不等式解集，根据不等式解集的确定方法求解即可.

【小问 1 详解】

解：当 $m = n$ 时，

$$\text{对称轴为 } x = \frac{2+4}{2} = 3;$$

【小问 2 详解】

解：根据题意可得：

$$m = 4a + 2b, \quad n = 16a + 4b, \quad p = a - b,$$

$$\because m < p < n, \quad mn < 0,$$

$$\therefore m < 0, \quad n > 0,$$

$$\therefore 4a + 2b < 0, \quad 16a + 4b > 0,$$

$$\text{化简得：} -\frac{b}{2a} > 1 \text{ ①, } -\frac{b}{2a} < 2 \text{ ②,}$$

$$\because m < p < n,$$

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b < a - b \text{ ③} \\ a - b < 16a + 4b \text{ ④} \end{cases}$$

$$\text{化简③得 } -\frac{b}{2a} > \frac{1}{2},$$

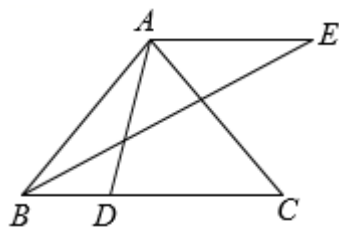
化简④得 $-\frac{b}{2a} < \frac{3}{2}$,

$$\therefore t = -\frac{b}{2a}$$

\therefore 综合①②③④可得: $1 < t < \frac{3}{2}$.

【点睛】题目主要考查二次函数 基本性质及利用不等式确定解集，理解题意，掌握不等式的性质及二次函数的基本性质是解题的关键.

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=\alpha$ ，点 D 在边 BC 上（不与点 B ， C 重合），连接 AD ，以点 A 为中心，将线段 AD 逆时针旋转 $180^\circ - \alpha$ 得到线段 AE ，连接 BE .



(1) $\angle BAC + \angle DAE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$;

(2) 取 CD 中点 F ，连接 AF ，用等式表示线段 AF 与 BE 的数量关系，并证明.

【答案】(1) 180 (2) $AF = \frac{1}{2}BE$ ，证明见解析；

【解析】

【分析】(1) 由旋转可知 $\angle DAE = 180^\circ - \alpha$ ，所以得到: $\angle BAC + \angle DAE = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$;

(2) 连接并延长 AF ，使 $FG=AF$ ，连接 DG ， CG ；因为 $DF=CF$ ， $AF=GF$ ；可以得到四变形 $ADGC$ 为平行四边形；从而有 $\angle DAC + \angle ACG = 180^\circ$ ，再证 $\angle ACG = \angle BAE$ 继而证明 $\triangle ABE \cong \triangle CAG$ 得到 $BE=AG$ ，即可得线段 AF 与 BE 的数量关系；

【小问 1 详解】

解：由旋转可知 $\angle DAE = 180^\circ - \alpha$,

$$\angle BAC + \angle DAE = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

故答案为: 180

【小问 2 详解】

解：如图所示：连接并延长 AF ，使 $FG=AF$ ，连接 DG ， CG ；

$$\therefore DF=CF, AF=GF;$$

\therefore 四变形 $ADGC$ 为平行四边形；

$$\therefore \angle DAC + \angle ACG = 180^\circ,$$

$$\text{即 } \angle ACG = 180^\circ - \angle DAC,$$

$$\angle BAE = \angle BAC + \angle DAE - \angle DAC = 180^\circ - \angle DAC,$$

所以 $\angle ACG = \angle BAE$,

\therefore 四变形 $ADGC$ 为平行四边形；

$$\therefore AD=CG,$$

$$\text{又} \because AD=AE,$$

$$AE=CG,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAG$ 中,

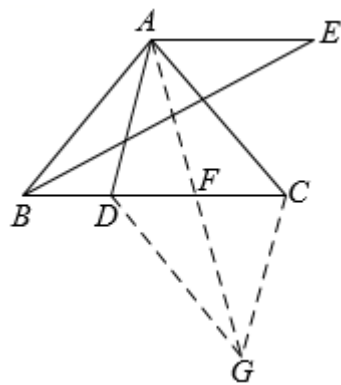
$$\begin{aligned} &AB=CA \\ &\{\angle BAE=\angle ACG \\ &AE=CG \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAG,$$

$$\therefore BE=AG,$$

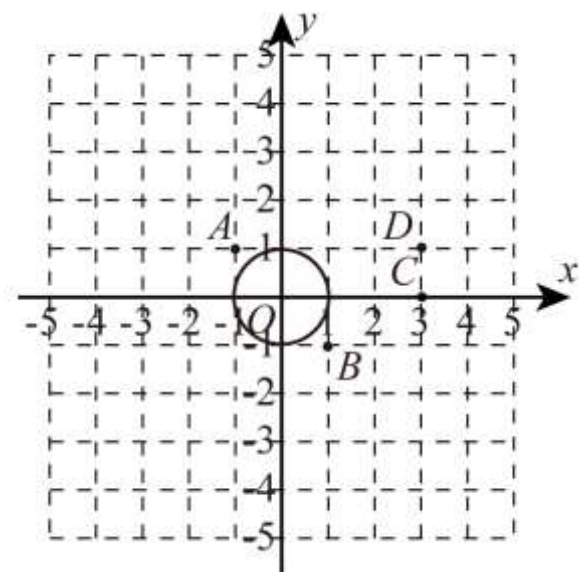
$$\therefore AF=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}BE,$$

故线段 AF 与 BE 的数量关系: $AF=\frac{1}{2}BE$;



【点睛】本题考查了旋转的性质，旋转角的定义，以及全等三角形的性质的判定，解题的关键是熟悉并灵活应用以上性质.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 1, $T(0, t)$ 为 y 轴上一点, P 为平面上一点. 给出如下定义: 若在 $\odot O$ 上存在一点 Q , 使得 $\triangle TQP$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle TQP=90^\circ$, 则称点 P 为 $\odot O$ 的“等直点”, $\triangle TQP$ 为 $\odot O$ 的“等直角三角形”. 如图, 点 A, B, C, D 的横、纵坐标都是整数.



(1) 当 $t=2$ 时, 在点 A, B, C, D 中, $\odot O$ 的“等直点”是_____;

(2) 当 $t=3$ 时, 若 $\triangle TQP$ 是 $\odot O$ “等直三角形”, 且点 P, Q 都在第一象限, 求 $\frac{CP}{OQ}$ 的值.

【答案】 (1) A, B, D

(2) $\sqrt{2}$

【解析】

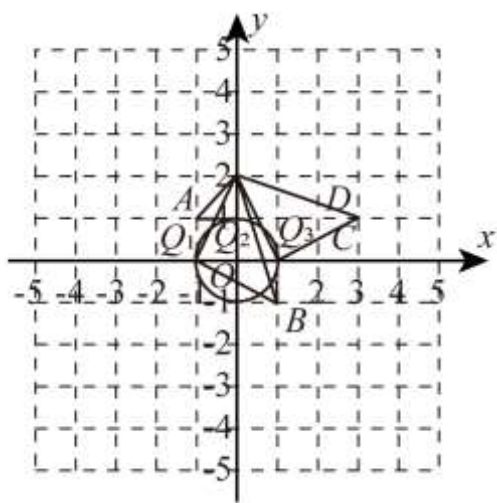
【分析】 (1) 根据坐标的特点及“等直三角形”的定义作图即可判断;

(2) 根据题意作图, 设 $Q(x, y)$, 求出 P 点坐标, 进而求出 CP, OQ , 故可求解.

【小问 1 详解】

如图, $\triangle AQ_1T, \triangle BQ_2T, \triangle DQ_3T$ 是等腰直角三角形, $Q_1Q_2Q_3$ 在 $\odot O$ 上, 故为等直点”

故答案为: A, B, D ;



【小问 2 详解】

如图, 依题意作 $\odot O$ 的“等直三角形” $\triangle TQP$

$$\therefore TQ=PQ, \angle TQP=90^\circ$$

过 Q 点作 $MH \parallel x$ 轴, 交 y 轴于 M 点, 过点 P 作 $PH \perp MH$ 于 H 点

$$\therefore \angle TMQ = \angle QHP = 90^\circ$$

$$\therefore \angle TQM + \angle MTQ = \angle TQM + \angle HQP = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MTQ = \angle HQP$$

$$\therefore \triangle TMQ \cong \triangle QHP \text{ (AAS)}$$

$$\therefore TM=QH, MQ=HP$$

设 $Q(x, y)$

$$\therefore HM=MQ+QH=MQ+TM=x+3-y, PH=MQ=x$$

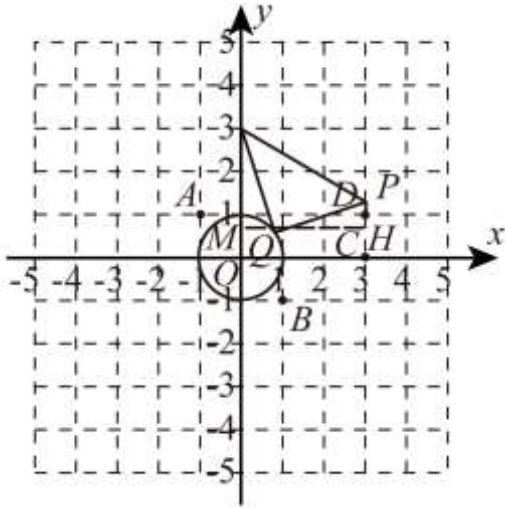
$$\therefore P(x-y+3, x+y)$$

$$\because C(3, 0)$$

$$\therefore PC = \sqrt{(x-y+3-3)^2 + (x+y)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\because OQ = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \frac{CP}{OQ} = \sqrt{2}.$$



【点睛】此题主要考查直角坐标系、圆与全等三角形综合，解题的关键是熟知等腰直角三角形的性质、勾股定理的应用．