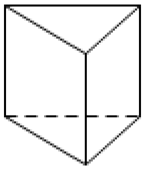
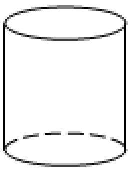
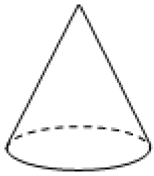
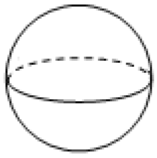
2022 北京东城区初三一模

数　　学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

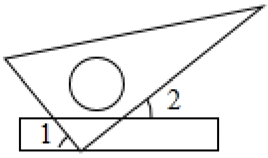
1. 下列立体图形中，主视图是圆的是（ ）

A. 　B. 　C. 　D. 

2. 国家统计局发布 2021 年国内生产总值达到 1140000 亿元，比上年增长 8.1%．将 1140000 用科学记数法表示应为（　）

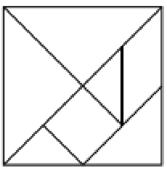
A. 114×10^{4}　B. 11.4×10^{5}　C. 1.14×10^{6}　D. 1.14×10^{5}

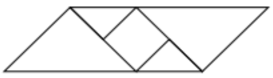
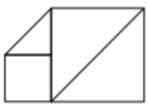
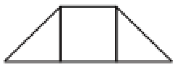
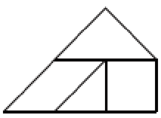
3. 如图，将一块直角三角板的直角顶点放在直尺的一边上．若∠2＝40°，则∠1 的度数是（　　）



A. 60°　B. 50°　C. 40°　D. 30°

4. 七巧板是我国古代劳动人民的发明之一，被誉为“东方魔板”．将右图的七巧板的其中几块，拼成一个多边形，为轴对称图形的是（　）

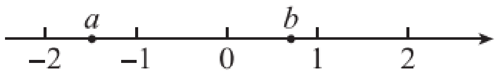


A. 　B. 　C. 　D. 

5. 五边形的内角和是（　）

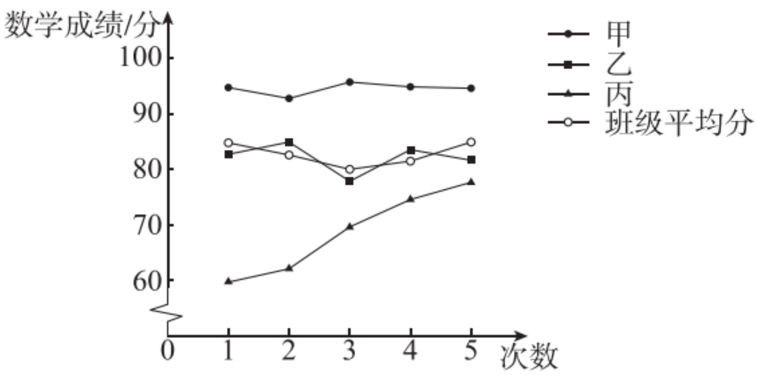
A. $360°$　B. $540°$　C. $720°$　D. $1080°$

6. 实数 a，b 在数轴上对应的点的位置如图所示，下列结论正确的是（　）



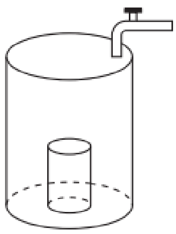
A. $a>b$　　B. $-a<b$　　C. $|a|<|b|$　　D. $a+b<0$

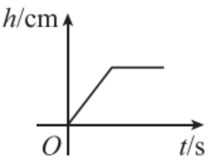
7. 某班甲、乙、丙三位同学 5 次数学成绩及班级平均分的折线统计图如下，则下列判断错误的是（　）

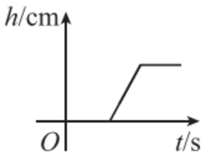


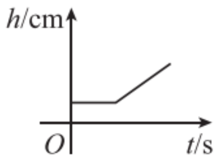
A. 甲的数学成绩高于班级平均分　　B. 乙的数学成绩在班级平均分附近波动　　C. 丙的数学成绩逐次提高　　D. 甲、乙、丙三人中，甲的数学成绩最不稳定

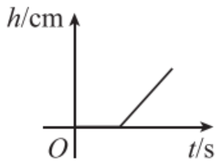
8. 将一圆柱形小水杯固定在大圆柱形容器底面中央，现用一个注水管沿大容器内壁匀速注水，如图所示，则小水杯水面的高度 $h(\text{cm})$ 与注水时间 $t(\text{s})$ 的函数图象大致是（　）



A 

B. 

C. 

D. 

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 若 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是__________.

10 分解因式：$2x^2-2y^2=$______.

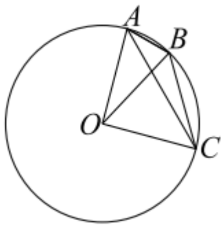
11. 方程 $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x}$ 的解是_______

12. 请写出一个大于 1 且小于 2 的无理数：___.

13. 北京 2022 年冬奥会和冬残奥会的吉祥物"冰墩墩"和"雪容融"广受大家的喜爱．即将在 2022 年 9 月举行的杭州亚运会的吉祥物"宸宸""踪踪""莲莲"也引起了大家的关注．现将五张正面分别印有以上 5 个吉祥物图案的卡片（卡片的形状、大小、质地都相同）背面朝上并洗匀，随机翻开一张正好是"冰墩墩"的概率是________.

冰墩墩　雪容融　宸宸　琮琮　莲莲

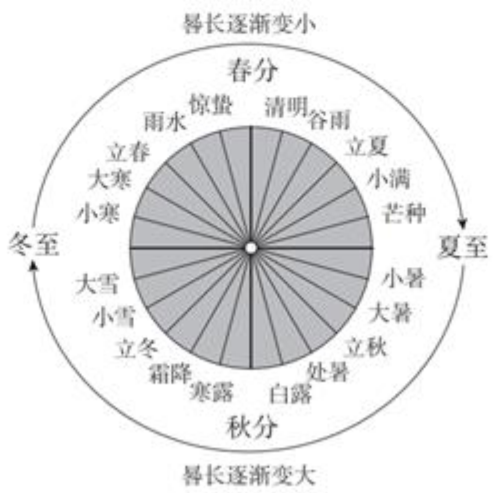
14. 如图，点 A，B，C 是⊙O 上的三点．若∠AOC=90°，∠BAC=30°，则∠AOB 的度数为________.



15. 已知 $x^2-x=3$，则代数式 $(x+1)(x-1)+x(x-2)=$________.

16. 我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中提到：一年有二十四个节气，每个节气的晷（guǐ）长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度），二十四节气如图所示．从冬至到夏至晷长逐渐变小，从夏至到冬至晷长逐渐变大，相邻两个节气晷长减少或增加的量均相同，周而复始．若冬至的晷长为 13.5 尺，夏至的晷长为 1.5 尺，则相邻两个节气晷长减少或增加的量为________尺，立夏的晷长为_______尺.

晷



二十四节气

三、解答题（本题共 68 分，第 17—21 题，每小题 5 分，第 22—23 题，每小题 6 分，第 24 题 5 分，第 25—26 题，每小题 6 分，第 27—28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$\sqrt{12}+2\sin 60°-2022^{0}-\left|-\sqrt{3}\right|$.

18. 解不等式组$\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}<1,\\ 2\left(x+1\right)\geq x-1\end{cases}$.

19. 已知：线段 AB.

求作：$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使得$\angle BAC=90°$，$\angle C=30°$.

作法：

①分别以点 A 和点 B 为圆心，AB 长为半径作弧，两弧交于点 D；

②连接 BD，在 BD 的延长线上截取 $DC=BD$；

③连接 AC.

则$\triangle ABC$为所求作的三角形.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：连接 AD.

$\because AB=AD=BD$，

$\therefore \triangle ABD$为等边三角形（　　　　）．（填推理的依据）

$\therefore \angle B=\angle ADB=60°$.

$\because CD=BD$，

$\therefore AD=CD$.

$\therefore \angle DAC=$__________（　　　　）．（填推理的依据）

$\therefore \angle ADB=\angle C+\angle DAC=60°$.

$\therefore \angle C=30°$.

在$\triangle ABC$中，

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 90^\circ$.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + k - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根.

（1）求 k　取值范围；

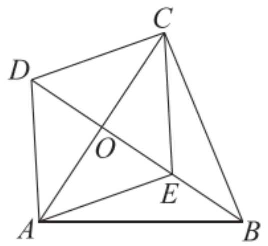
（2）若 k 为正整数，且方程的两个根均为整数，求 k 的值及方程的两个根.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = x - 2$ 的图象与 x 轴交于点 A，与反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}(k \neq 0)$ 的图象交于点 $B(3, m)$，点 P 为反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}(k \neq 0)$ 的图象上一点.

（1）求 m，k 的值；

（2）连接 OP，AP．当 $S_{\triangle OAP} = 2$ 时，求点 P 的坐标.

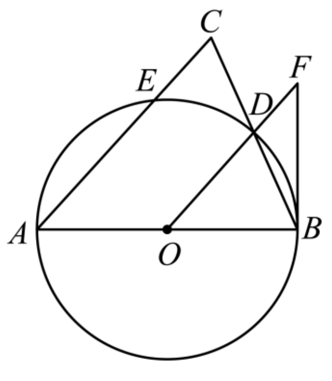
22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，且 $AO = CO$，点 E 在 BD 上，$\angle EAO = \angle DCO$.



（1）求证：四边形 $AECD$ 是平行四边形；

（2）若 $AB = BC$，$CD = 5$，$AC = 8$，$\tan \angle ABD = \dfrac{2}{3}$，求 BE 的长.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，以 AB 为直径作 $\odot O$，交 BC 于点 D，交 AC 于点 E，过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 OD 的延长线于点 F.



（1）求证：$\angle A = \angle BOF$；

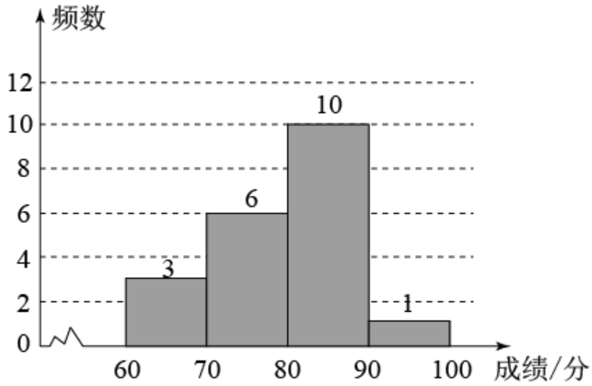
（2）若 $AB = 4$，$DF = 1$，求 AE 的长.

24. 2022 年是中国共产主义青年团建团 100 周年．某校举办了一次关于共青团知识的竞赛，七、八年级各有 300 名学生参加了本次活动，为了解两个年级的答题情况，从两个年级各随机抽取了 20 名学生的成绩进行调查分析．下面给出了部分信息：

a．七年级学生的成绩整理如下（单位：分）：

57 67 69 75 75 75 77 77 78 78 80 80 80 80 86 86 88 88 89 96

b．八年级学生成绩的频数分布直方图如下（数据分成四组：$60 \le x < 70$，$70 \le x < 80$，$80 \le x < 90$，$90 \le x \le 100$）：



其中成绩在 $80 \le x < 90$ 的数据如下（单位：分）：

80 80 81 82 83 84 85 86 87 89

c．两组样本数据的平均数、中位数、众数如下表所示：

年级	平均数	中位数	众数
七年级	79.05	79	m
八年级	79.2	n	74

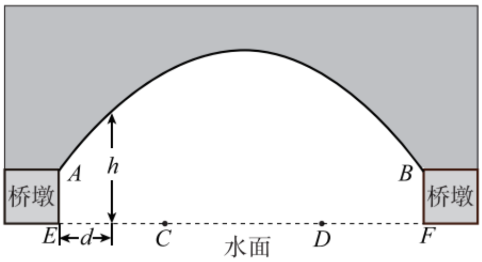
根据所给信息，解答下列问题：

（1）$m=$_______，$n=$_______；

（2）估计_______年级学生的成绩高于平均分的人数更多；

（3）若成绩达到 80 分及以上为优秀，估计七年级和八年级此次测试成绩优秀的总人数．

25. 某公园内人工湖上有一座拱桥（横截面如图所示），跨度 AB 为 4 米．在距点 A 水平距离为 d 米的地点，拱桥距离水面的高度为 h 米．小红根据学习函数的经验，对 d 和 h 之间的关系进行了探究．



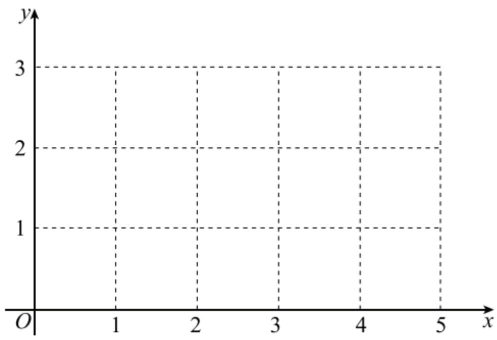
下面是小红的探究过程，请补充完整：

（1）经过测量，得出了 d 和 h 的几组对应值，如下表.

d/米	0	0.6	1	1.8	2 4	3	3.6	4
h/米	0.88	1.90	2.38	2.86	2.80	2.38	1.60	0.88

在 d 和 h 这两个变量中，________是自变量，________是这个变量　函数；

（2）在下面的平面直角坐标系 xOy 中，画出（1）中所确定的函数的图象；



（3）结合表格数据和函数图象，解决问题：

①桥墩露出水面的高度 AE 为_______米；

②公园欲开设游船项目，现有长为 3.5 米，宽为 1.5 米，露出水面高度为 2 米的游船．为安全起见，公园要在水面上的 C，D 两处设置警戒线，并且 $CE=DF$ ，要求游船能从 C，D 两点之间安全通过，则 C 处距桥墩的距离 CE 至少为_______米．（精确到 0.1 米）

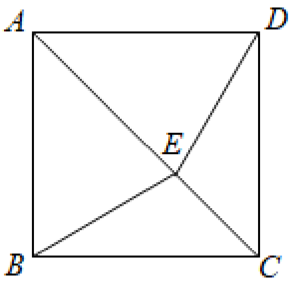
26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2-2mx+m^2+1$ 与 y 轴交于点 A． 点 $B\left(x_1,y_1\right)$ 是抛物线上的任意一点，且不与点 A 重合，直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 经过 A，B 两点．

（1）求抛物线的顶点坐标（用含 m 的式子表示）；

（2）若点 $C(m-2,a)$， $D(m+2,b)$ 在抛物线上，则 a_______b（用“<”，“=”或“>”填空）；

（3）若对于 $x_1<-3$ 时，总有 $k<0$，求 m 的取值范围．

27. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为对角线 AC 上一点（ $AE>CE$ ），连接 BE，DE．



（1）求证： $BE=DE$ ；

（2）过点 E 作 $EF\perp AC$ 交 BC 于点 F，延长 BC 至点 G，使得 $CG=BF$ ，连接 DG．

①依题意补全图形；

②用等式表示 BE 与 DG 的数量关系，并证明．

28. 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 C 及图形 G，有如下定义：若图形 G 上存在 A，B 两点，使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 $\angle ABC=90°$，则称点 C 为图形 G 的“友好点”．

（1）已知点 $O(0,0)$， $M(4,0)$，在点 $C_1(0,4)$， $C_2(1,4)$， $C_3(2,-1)$ 中，线段 OM 的“友好点”是_______；

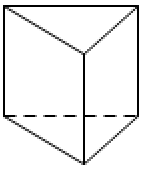
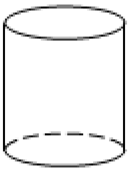
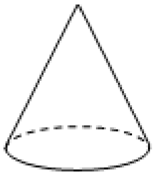
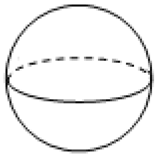
（2）直线 $y=-x+b$ 分别交 x 轴、y 轴于 P，Q 两点，若点 $C(2,1)$ 为线段 PQ 的“友好点”，求 b 的取值范围；

（3）已知直线 $y=x+d\,(d>0)$ 分别交 x 轴、y 轴于 E，F 两点，若线段 EF 上的所有点都是半径为 2 的 $\odot O$ 的“友好点”，直接写出 d 的取值范围．

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1. 下列立体图形中，主视图是圆的是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】分别得出棱柱，圆柱，圆锥，球体的主视图，得出结论．

【详解】解：棱柱的主视图是矩形（中间只有一条线段），不符合题意；

圆柱的主视图是矩形，不符合题意；

圆锥的主视图是等腰三角形，不符合题意；

球体的主视图是圆，符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图．

2. 国家统计局发布 2021 年国内生产总值达到 1140000 亿元，比上年增长 8.1%．将 1140000 用科学记数法表示应为（ ）

A. 114×10^4 B. 11.4×10^5 C. 1.14×10^6 D. 1.14×10^5

【答案】C

【解析】

【分析】1140000 用科学记数法表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $a=1.14$，$n=6$，代入可得结果．

【详解】解：1140000 的绝对值大于 10 表示成 $a\times10^n$ 的形式，

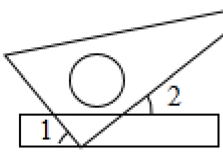
$\because a=1.14$，$n=7-1=6$，

$\therefore 1140000$ 表示成 1.14×10^6，

故选 C．

【点睛】本题考查了科学记数法．解题的关键在于确定a、n的值．

3. 如图，将一块直角三角板的直角顶点放在直尺的一边上．若∠2＝40°，则∠1的度数是（　　）

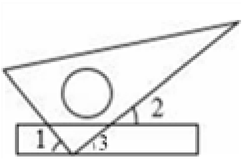


A. 60°　　B. 50°　　C. 40°　　D. 30°

【答案】B

【解析】

详解】如图,



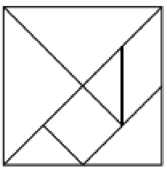
∵∠2=40°,

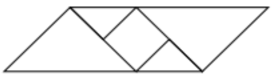
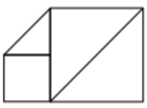
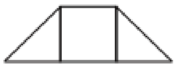
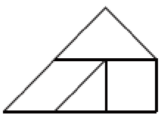
∴∠3=∠2=40°,

∴∠1=90°−40°=50°.

故选B.

4. 七巧板是我国古代劳动人民的发明之一，被誉为“东方魔板”．将右图的七巧板的其中几块，拼成一个多边形，为轴对称图形的是（　）



A. 　　B. 　　C. 　　D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据在平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形叫做轴对称图形对各选项进行判断即可.

【详解】解：由题意知，C 中图形为轴对称图形；

故选：C.

【点睛】本题考查了轴对称图形的定义．解题的关键在于熟练掌握轴对称图形的定义.

5. 五边形的内角和是（　）

A. $360°$　　B. $540°$　　C. $720°$　　D. $1080°$

【答案】B

【解析】

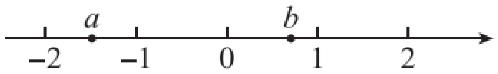
【分析】根据n边形的内角和为$(n-2)\times180°$，将$n=5$代入，计算求解即可.

【详解】解：由题意知，五边形的内角和为$(5-2)\times180°=540°$，

故选：B.

【点睛】本题考查了多边形的内角和．解题的关键在于明确n边形的内角和为$(n-2)\times180°$.

6. 实数 a，b 在数轴上对应的点的位置如图所示，下列结论正确的是（　）



A. $a>b$　　B. $-a<b$　　C. $|a|<|b|$　　D. $a+b<0$

【答案】D

【解析】

【分析】由数轴可知，$-2<a<-1<0<b<1$，可判断 A 的正误；根据$b<1<-a<2$，可判断 B 的正误；根据$|b|<1<|a|<2$，可判断 C 的正误；根据$a<-1$，$a+b<-1+b<0$，可判断 D 的正误.

【详解】解：由数轴可知，$-2<a<-1<0<b<1$，

$\therefore a<b$，故 A 错误，不符合题意；

$\because b<1<-a<2$，

$\therefore -a>b$，故 B 错误，不符合题意；

$\because |b| < 1 < |a| < 2$，

$\therefore |a| > |b|$，故 C 错误，不符合题意；

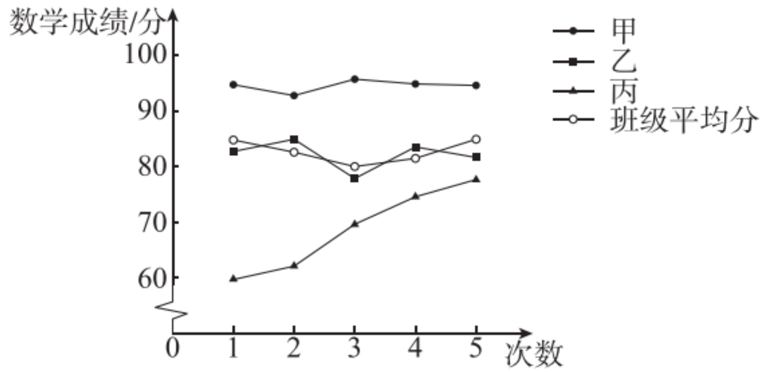
$\because a < -1$，$a + b < -1 + b < 0$，

$\therefore a + b < 0$，故 D 正确，符合题意；

故选 D.

【点睛】本题考查了利用数轴比较有理数的大小，根据点在数轴的位置判断式子的正负，不等式的性质等知识．解题的关键在于明确 $-2 < a < -1 < 0 < b < 1$．

7. 某班甲、乙、丙三位同学 5 次数学成绩及班级平均分的折线统计图如下，则下列判断错误的是（　）



A. 甲的数学成绩高于班级平均分　　　　B. 乙的数学成绩在班级平均分附近波动　C. 丙的数学成绩逐次提高　　　　D. 甲、乙、丙三人中，甲的数学成绩最不稳定

【答案】D

【解析】

【分析】观察折线统计图，然后对各选项进行判断即可．

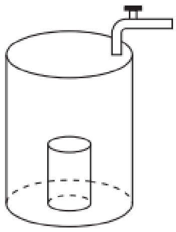
【详解】解：由折线图可知，甲的数学成绩高于班级平均分；乙的数学成绩在班级平均分附近波动；丙的数学成绩逐次提高；甲、乙、丙三人中，丙的数学成绩最不稳定；

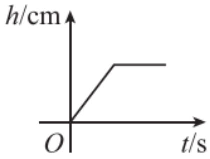
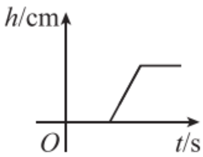
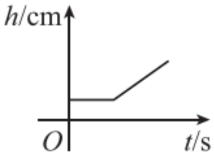
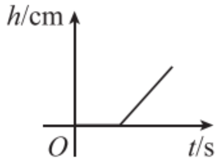
∴A、B、C 正确，不符合题意；D 错误，符合题意；

故选 D.

【点睛】本题考查了折线统计图．解题的关键在于从折线图中获取正确的信息．

8. 将一圆柱形小水杯固定在大圆柱形容器底面中央，现用一个注水管沿大容器内壁匀速注水，如图所示，则小水杯水面的高度 $h(\mathrm{cm})$ 与注水时间 $t(\mathrm{s})$ 的函数图象大致是（　）



A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据注水开始一段时间内，当大容器中书面高度小于 h 时，小水杯中无水进入，此时小水杯水面的高度 h 为 0cm；当大容器中书面高度大于 h 时，小水杯先匀速进水，此时小水杯水面的高度不断增加，直到 h；然后小水杯水面的高度一直保持在 h 不再发生变化，对各选项进行判断即可．

【详解】解：由题意知，当大容器中书面高度小于 h 时，小水杯水面的高度 h 为 0cm；

当大容器中书面高度大于 h 时，小水杯先匀速进水，此时小水杯水面的高度不断增加，直到 h；然后小水杯水面的高度一直保持在 h 不再发生变化；

故选：B．

【点睛】本题考查了一次函数的应用，函数的图象．解题的关键在于理解题意，抽象出一次函数．

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 若 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是__________．

【答案】$x \geq 2$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件列出不等式，解不等式即可求得．

【详解】解：$\because \sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义

$\therefore x-2 \geq 0$

解得 $x \geq 2$

故答案为：$x \geq 2$

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，熟练掌握和运用二次根式有意义的条件是解决本题的关键．

10. 分解因式：$2x^2-2y^2=$______.

【答案】$2\left(x+y\right)\left(x-y\right)$

【解析】

【分析】先提取公因式 2，再根据平方差公式进行二次分解即可求得答案．

【详解】$2x^2-2y^2=2(x^2-y^2)=2(x+y)(x-y)$．

故答案为 2（x+y）（x-y）．

【点睛】本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用平方差公式进行二次分解，注意分解要彻底．

11. 方程 $\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{3}{x}$ 的解是_______

【答案】x=9

【解析】

【分析】观察可得最简公分母是 $x(x-3)$，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解．

【详解】解：方程的两边同乘 $x(x-3)$，得

$3x-9=2x$，

解得 $x=9$．

检验：把 $x=9$ 代入 $x(x-3)=54\neq0$．

∴原方程的解为：$x=9$．

故答案为：$x=9$．

12. 请写出一个大于 1 且小于 2 的无理数：___.

【答案】$\sqrt{2}$（答案不唯一）．

【解析】

【分析】由于所求无理数大于 1 且小于 2，两数平方得大于 2 小于 4，所以可选其中的任意一个数开平方即可．

【详解】大于 1 且小于 2 的无理数可以是 $\sqrt{2},\sqrt{3},\pi-2$ 等，

故答案为：$\sqrt{2}$（答案不唯一）．

13. 北京2022年冬奥会和冬残奥会的吉祥物“冰墩墩”和“雪容融”广受大家的喜爱．即将在2022年9月举行的杭州亚运会的吉祥物“宸宸”“踪踪”“莲莲”也引起了大家的关注．现将五张正面分别印有以上5个吉祥物图案的卡片（卡片的形状、大小、质地都相同）背面朝上并洗匀，随机翻开一张正好是“冰墩墩”的概率是_________．

【答案】$\frac{1}{5}$

【解析】

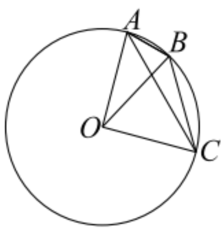
【分析】根据概率公式即可求得．

【详解】解：从5张卡片中，随机翻开一张正好是“冰墩墩”的概率是$\frac{1}{5}$

故答案为：$\frac{1}{5}$

【点睛】本题考查了概率公式的应用，熟练掌握和运用概率公式是解决本题的关键．

14. 如图，点A，B，C是$\odot O$上的三点．若$\angle AOC=90°$，$\angle BAC=30°$，则$\angle AOB$的度数为________．



【答案】30°##30度

【解析】

【分析】由圆周角定理可得$\angle BOC=2\angle BAC=60°$，继而$\angle AOB=\angle AOC-\angle BOC=90°-60°=30°$．

【详解】解：$\because \angle BAC$与$\angle BOC$所对弧为$\overset{\frown}{BC}$，

由圆周角定理可知：$\angle BOC=2\angle BAC=60°$，

又∠AOC=90°，

∴∠AOB=∠AOC-∠BOC=90°-60°=30°．

故答案为：30°．

【点睛】本题主要考查了圆周角定理，熟练运用圆周角定理是解题关键．圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．

15. 已知$x^2-x=3$，则代数式$(x+1)(x-1)+x(x-2)=$________．

【答案】5

【解析】

【分析】根据$(x+1)(x-1)+x(x-2)=2\left(x^2-x\right)-1$，将代数式$x^2-x=3$代入求解即可．

【详解】解：$(x+1)(x-1)+x(x-2)=x^2-1+x^2-2x=2\left(x^2-x\right)-1$，

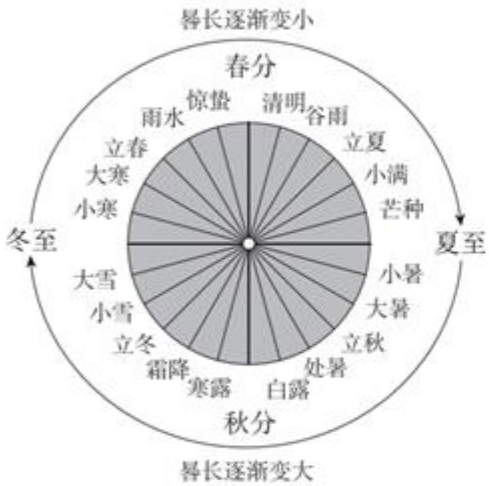
将$x^2-x=3$代入得，原式$=2\times3-1=5$，

故答案为：5．

【点睛】本题考查了代数式求值，平方差公式．解题的关键在于将代数式进行正确的化简．

16. 我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中提到：一年有二十四个节气，每个节气的晷（guǐ）长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度），二十四节气如图所示．从冬至到夏至晷长逐渐变小，从夏至到冬至晷长逐渐变大，相邻两个节气晷长减少或增加的量均相同，周而复始．若冬至的晷长为13.5尺，夏至的晷长为1.5尺，则相邻两个节气晷长减少或增加的量为________尺，立夏的晷长为_______尺．

晷



二十四节气

【答案】 ①. 1 ②. 4.5

【解析】

【分析】设相邻两个节气晷长减少的量为x尺，由题意知，$13.5-12x=1.5$，计算求出相邻两个节气晷长减少或增加的量；根据立夏到夏至的减少量求解立夏的晷长即可.

【详解】解：设相邻两个节气晷长减少的量为x尺，

由题意知，$13.5-12x=1.5$，

解得，$x=1$，

∴相邻两个节气晷长减少或增加的量为 1 尺；

∵$1.5+3\times1=4.5$，

∴立夏的晷长为 4.5 尺；

故答案为：1；4.5.

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用．解题的关键在于根据题意列方程.

三、解答题（本题共 68 分，第 17—21 题，每小题 5 分，第 22—23 题，每小题 6 分，第 24 题 5 分，第 25—26 题，每小题 6 分，第 27—28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$\sqrt{12}+2\sin 60^\circ-2022^0-\left|-\sqrt{3}\right|$.

【答案】$2\sqrt{3}-1$##$-1+2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质进行化简，计算正弦，零指数幂，绝对值，然后进行加减运算即可.

【详解】解：原式$=2\sqrt{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-1$.

【点睛】本题考查了二次根式的性质，正弦，零指数幂，绝对值．解题的关键在于正确的计算.

18. 解不等式组$\begin{cases}\frac{x-3}{2}<1, \\ 2\left(x+1\right)\ge x-1\end{cases}$.

【答案】$-3\le x<5$

【解析】

【分析】先分别求出不等式的解集，然后求出不等式组的解集即可.

【详解】解：$\begin{cases}\dfrac{x-3}{2}<1\\2\left(x+1\right)\ge x-1\end{cases}$，

解不等式$\dfrac{x-3}{2}<1$得，$x<5$；

解不等式$2\left(x+1\right)\ge x-1$得，$x\ge -3$；

∴不等式组的解集为$-3\le x<5$.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组．解题的关键在于正确的计算．

19. 已知：线段 AB.

求作：$\mathrm{Rt}\triangle ABC$，使得$\angle BAC=90°$，$\angle C=30°$.

作法：

①分别以点 A 和点 B 为圆心，AB 长为半径作弧，两弧交于点 D；

②连接 BD，在 BD 的延长线上截取 $DC=BD$；

③连接 AC.

则$\triangle ABC$为所求作的三角形．

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：连接 AD.

∵ $AB=AD=BD$，

∴ $\triangle ABD$为等边三角形（　　　　）．（填推理的依据）

∴ $\angle B=\angle ADB=60°$.

∵ $CD=BD$，

∴ $AD=CD$.

∴ $\angle DAC=$__________（　　　　）．（填推理的依据）

$\therefore \angle ADB=\angle C+\angle DAC=60^{\circ}$.

$\therefore \angle C=30^{\circ}$.

在$\triangle ABC$中，

$\therefore \angle BAC=180^{\circ}-(\angle B+\angle C)=90^{\circ}$.

【答案】（1）见解析　（2）等边三角形的定义；$\angle C$；三角形中等边对等角

【解析】

【分析】(1)根据题意和作法即可画出图形；

(2) 连接AD，根据等边三角形的定义及性质，可得$\angle B=\angle ADB=60^{\circ}$，再根据三角形中等边对等角，可证得$\angle DAC=\angle C$，根据三角形外角的性质即可求得$\angle C=30^{\circ}$，据此即可证得$\triangle ABC$为所求作的三角形.

【小问1详解】

解：如图：

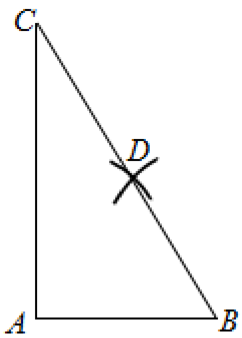
作法：

①分别以点A和点B为圆心，AB长为半径作弧，两弧交于点D；

②连接BD，在BD的延长线上截取$DC=BD$；

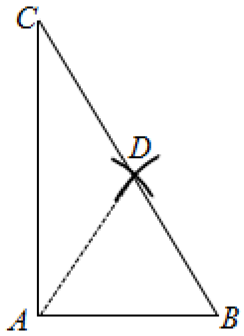
③连接AC.

则$\triangle ABC$为所求作的三角形.



【小问2详解】

证明：如图：连接AD.



∵ $AB=AD=BD$，

∴ $\triangle ABD$ 为等边三角形（等边三角形　定义）.

∴ $\angle B=\angle ADB=60°$.

∵ $CD=BD$，

∴ $AD=CD$.

∴ $\angle DAC=\angle C$ （三角形中等边对等角）.

∵ $\angle ADB=\angle C+\angle DAC=60°$.

∴ $\angle C=30°$.

在 $\triangle ABC$ 中，

∴ $\angle BAC=180°-(\angle B+\angle C)=180°-(60°+30°)=90°$.

【点睛】本题考查了作直角三角形，等边三角形的判定及性质，等边对等角，三角形内角和定理及外角的性质，按要求作出图形是解决本题的关键.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+k-2=0$ 有两个不相等的实数根.

（1）求 k 的取值范围；

（2）若 k 为正整数，且方程的两个根均为整数，求 k 的值及方程的两个根.

【答案】（1）$k<3$

（2）k=2，方程的两个根为 $x_1=0$， $x_2=2$

【解析】

【分析】(1)根据题意和一元二次方程根的判别式得到 $\Delta=(-2)^2-4(k-2)>0$，解不等式即可求得；

(2)首先根据(1)可知，k 的值只能是 1 或 2，分别代入方程，解方程，再根据方程的两个根均为整数，即可解答.

【小问 1 详解】

解：$\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+k-2=0$ 有两个不相等的实数根

$\therefore \Delta=\left(-2\right)^2-4\left(k-2\right)>0$

解得 $k<3$

故 k 的取值范围为 $k<3$

【小问 2 详解】

解：$\because k<3$ 且 k 为正整数

$\therefore k$ 的值只能是 1 或 2

当 k=1 时，方程为 $x^2-2x-1=0$

解得 $x=\dfrac{2\pm\sqrt{\left(-2\right)^2-4\times\left(-1\right)}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$\because$ 方程的两个根均为整数

$\therefore k$=1 不合题意，舍去

当 k=2 时，方程为 $x^2-2x=0$

解得 $x_1=0$， $x_2=2$

方程的两个根均为整数，符合题意

故 k=2，方程的两个根为 $x_1=0$， $x_2=2$

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式及解一元二次方程的方法，熟练掌握和运用一元二次方程根的判别式及解一元二次方程的方法是解决本题的关键.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=x-2$ 的图象与 x 轴交于点 A，与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象交于点 $B(3,m)$，点 P 为反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 的图象上一点.

（1）求 m，k 的值；

（2）连接 OP，AP．当 $S_{\triangle OAP}=2$ 时，求点 P 的坐标．

【答案】（1）m 的值为 1，k 的值为 3

（2）$\left(\frac{3}{2},2\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},-2\right)$

【解析】

【分析】（1）将 $(3,m)$ 代入 $y=x-2$，可求得 $m=1$，则 $B(3,1)$，将 $B(3,1)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，计算求解 k 值即可；

（2）设 $P\left(a,\frac{3}{a}\right)$，则 P 到 x 轴的距离 h 为 $\left|\frac{3}{a}\right|$，将 $y=0$ 代入 $y=x-2$，解得 $x=2$，则 $A(2,0)$，$OA=2$，根据 $S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}\times OA\times h=\frac{1}{2}\times 2\times\left|\frac{3}{a}\right|=2$，计算求解满足要求的 a 值，进而可求 P 点坐标．

【小问 1 详解】

解：将 $(3,m)$ 代入 $y=x-2$ 得，$m=3-2$，

解得 $m=1$，

$\therefore B(3,1)$，

将 $B(3,1)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得，$1=\frac{k}{3}$，

解得 $k=3$，

$\therefore y=\frac{3}{x}$，

$\therefore m$ 的值为 1，k 的值为 3．

【小问 2 详解】

解：设 $P\left(a,\frac{3}{a}\right)$，则 P 到 x 轴的距离 h 为 $\left|\frac{3}{a}\right|$，

将 $y=0$ 代入 $y=x-2$，解得 $x=2$，

$\therefore A(2,0)$，

$\therefore OA=2$，

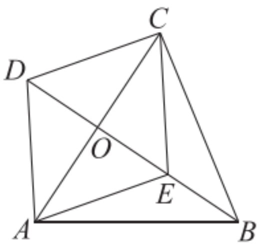
$\therefore S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}\times OA\times h=\frac{1}{2}\times 2\times\left|\frac{3}{a}\right|=2$，

解得 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=-\frac{3}{2}$，

$\therefore P$ 点坐标为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},-2\right)$.

【点睛】本题考查了反比例函数与一次函数的综合，反比例函数解析式，反比例函数与几何综合．解题的关键在于对反比例函数的解析式、图象等的熟练掌握与灵活运用．

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O，且 $AO=CO$，点 E 在 BD 上，$\angle EAO=\angle DCO$.



（1）求证：四边形 $AECD$ 是平行四边形；

（2）若 $AB=BC$，$CD=5$，$AC=8$，$\tan\angle ABD=\frac{2}{3}$，求 BE 的长．

【答案】（1）证明见解析　（2）3

【解析】

【分析】（1）由 $\angle EAO=\angle DCO$，可知 $AE\parallel CD$，证明 $\triangle EAO\cong\triangle DCO(ASA)$，则 $AE=CD$，进而结论得证；

（2）由 $AB=BC$，$AO=CO$，可知 $BO\perp AC$，由平行四边形的性质可知 $OE=OD$，$\angle COD=\angle BOA=90^{\circ}$，在 $Rt\triangle COD$ 中，由勾股定理得 $OD=\sqrt{CD^2-CO^2}$，求出 OD 的值，根据 $\tan\angle ABO=\frac{AO}{BO}=\tan\angle ABD=\frac{2}{3}$，求解 BO 的值，根据 $BE=BO-OE$，求解 BE 的值即可．

【小问 1 详解】

证明：$\because\angle EAO=\angle DCO$，

$\therefore AE\parallel CD$，

在 $\triangle EAO$ 和 $\triangle DCO$ 中，

$\because \begin{cases} \angle EAO=\angle DCO \\ CO=AO \\ \angle AOE=\angle COD \end{cases}$，

$\therefore \triangle EAO \cong \triangle DCO(\text{ASA})$，

$\therefore AE=CD$，

$\therefore$四边形 $AECD$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

解：$\because AB=BC$，$AO=CO$，

$\therefore BO\perp AC$，

$\because$四边形 $AECD$ 是平行四边形，

$\therefore OE=OD$，$\angle COD=\angle BOA=90°$，

$\because CD=5$，$AC=8$，

$\therefore CO=AO=\frac{1}{2}AC=4$，

在 $Rt\triangle COD$ 中，由勾股定理得 $OD=\sqrt{CD^2-CO^2}=3$，

$\therefore OE=OD=3$，

$\therefore \tan\angle ABO=\frac{AO}{BO}=\tan\angle ABD=\frac{2}{3}$，即 $\frac{4}{BO}=\frac{2}{3}$，

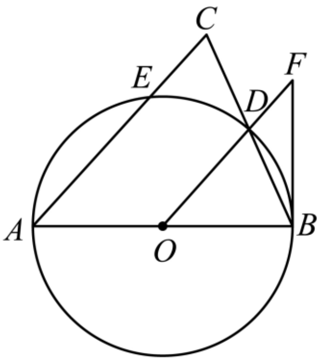
解得 $BO=6$，

$\therefore BE=BO-OE=3$，

$\therefore BE$ 的长为 3.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，平行四边形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，勾股定理，正切等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径作 $\odot O$，交 BC 于点 D，交 AC 于点 E，过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 OD 的延长线于点 F.



（1）求证：$\angle A=\angle BOF$；

（2）若 $AB=4$，$DF=1$，求 AE 的长.

【答案】（1）见解析　（2）$AE=\dfrac{8}{3}$

【解析】

【分析】(1)首先根据等边对等角可证得$\angle C=\angle ODB$，再根据平行线的判定与性质，即可证得结论；

(2)首先根据圆周角定理及切线的性质，可证得$\angle AEB=\angle OBF$，即可证得$\triangle ABE\backsim\triangle OFB$，再根据相似三角形的性质即可求得.

【小问 1 详解】

证明：$\because AB=AC$

$\therefore \angle C=\angle ABC$

$\because OB=OD$

$\therefore \angle ODB=\angle OBD$

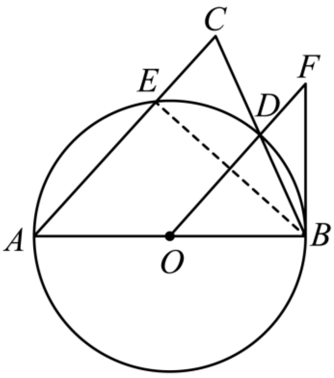
$\therefore \angle C=\angle ODB$

$\therefore AC\parallel OD$

$\therefore \angle A=\angle BOF$

【小问 2 详解】

解：如图：连接 BE



$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，AB=4

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$，$OB = OD = \frac{1}{2}AB = 2$

$\because BF$ 是$\odot O$ 的切线

$\therefore \angle OBF = 90^\circ$

$\therefore \angle AEB = \angle OBF$

又$\because \angle A = \angle BOF$

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle OFB$

$\therefore \frac{AE}{OB} = \frac{AB}{OF}$

又$\because OF = OD + DF = 2 + 1 = 3$

$\therefore \frac{AE}{2} = \frac{4}{3}$，解得 $AE = \frac{8}{3}$

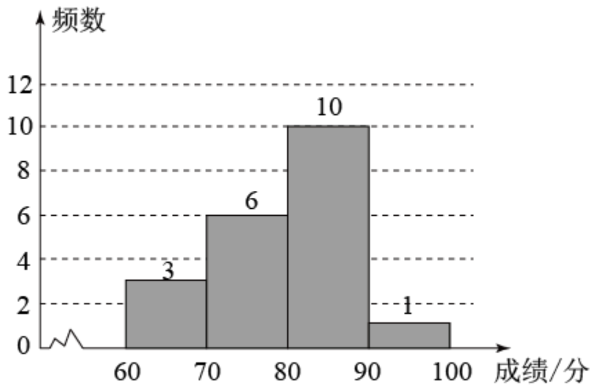
【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，平行线的判定与性质，圆周角定理，切线的性质，相似三角形的判定与性质，作出辅助线，证得$\triangle ABE \backsim \triangle OFB$是解决本题的关键．

24. 2022 年是中国共产主义青年团建团 100 周年．某校举办了一次关于共青团知识的竞赛，七、八年级各有 300 名学生参加了本次活动，为了解两个年级的答题情况，从两个年级各随机抽取了 20 名学生的成绩进行调查分析．下面给出了部分信息：

a．七年级学生的成绩整理如下（单位：分）：

57 67 69 75 75 75 77 77 78 78 80 80 80 80 86 86 88 88 89 96

b．八年级学生成绩的频数分布直方图如下（数据分成四组：$60 \le x < 70$，$70 \le x < 80$，$80 \le x < 90$，$90 \le x \le 100$）：



其中成绩在 $80 \le x < 90$ 的数据如下（单位：分）：

80 80 81 82 83 84 85 86 87 89

c．两组样本数据的平均数、中位数、众数如下表所示：

年级	平均数	中位数	众数
七年级	79.05	79	m
八年级	79.2	n	74

根据所给信息，解答下列问题：

（1）$m =$_______，$n =$_______；

（2）估计_______年级学生的成绩高于平均分的人数更多；

（3）若成绩达到 80 分及以上为优秀，估计七年级和八年级此次测试成绩优秀的总人数．

【答案】（1）80；80 （2）八 （3）315

【解析】

【分析】（1）根据众数的定义确定七年级学生的成绩中出现次数最多的即可；根据中位数是八年级学生的成绩中第 10、第 11 位数字的算术平均数，计算求解即可；

（2）分别求出七、八年级的成绩在平均数以上人数的占比，然后乘以总人数可得七、八年级的学生的成绩高于平均分的总人数，然后比较大小即可；

（3）由题意知，七年级成绩优秀的人数占比为 $\frac{1}{2}$；八年级成绩优秀的人数占比为 $\frac{11}{20}$；根据 $300 \times \frac{1}{2} + 300 \times \frac{11}{20}$ 计算求解可得七年级和八年级此次测试成绩优秀的总人数．

【小问 1 详解】

解：由七年级学生的成绩可知，$m=80$，

由题意知，八年级学生的成绩中第 10、第 11 位数字分别为 80，80，

$\therefore n=\frac{80+80}{2}=80$，

故答案为：80，80．

【小问 2 详解】

解：由题意知，七年级成绩在平均分以上的有10人，占总人数的$\frac{1}{2}$，

$\therefore$估计七年级学生的成绩高于平均分的人数为$300\times\frac{1}{2}=150$人；

八年级成绩在平均分以上的有11人，占总人数的$\frac{11}{20}$，

$\therefore$估计八年级学生的成绩高于平均分的人数为$300\times\frac{11}{20}=165$人；

$\because 150<165$，

$\therefore$估计八年级学生的成绩高于平均分的人数更多；

故答案为：八．

【小问 3 详解】

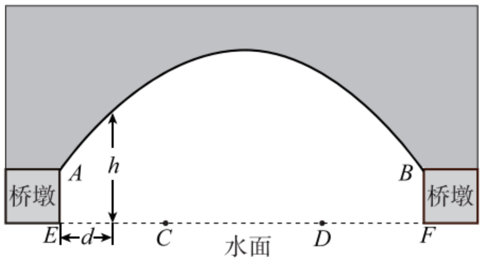
解：由题意知，七年级成绩优秀的人数占比为$\frac{1}{2}$；八年级成绩优秀的人数占比为$\frac{11}{20}$；

$\therefore$估计七年级和八年级此次测试成绩优秀的总人数为$300\times\frac{1}{2}+300\times\frac{11}{20}=315$人；

$\therefore$估计七年级和八年级此次测试成绩优秀的总人数为315人．

【点睛】本题考查了频数分布直方图，众数，中位数，样本估计总体等知识．解题的关键在于从图表中获取正确的信息．

25. 某公园内人工湖上有一座拱桥（横截面如图所示），跨度 AB 为 4 米．在距点 A 水平距离为 d 米的地点，拱桥距离水面的高度为 h 米．小红根据学习函数的经验，对 d 和 h 之间的关系进行了探究．



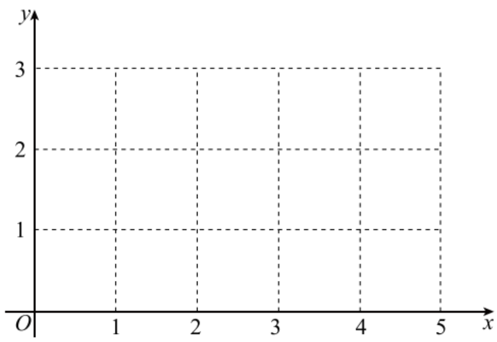
下面是小红的探究过程，请补充完整：

（1）经过测量，得出了 d 和 h 的几组对应值，如下表.

d/米	0	0.6	1	1.8	2.4	3	3.6	4
h/米	0.88	1.90	2.38	2.86	2.80	2.38	1.60	0.88

在 d 和 h 这两个变量中，________是自变量，________是这个变量的函数；

（2）在下面的平面直角坐标系 xOy 中，画出（1）中所确定的函数的图象；



（3）结合表格数据和函数图象，解决问题：

①桥墩露出水面的高度 AE 为_______米；

②公园欲开设游船项目，现有长为 3.5 米，宽为 1.5 米，露出水面高度为 2 米的游船．为安全起见，公园要在水面上的 C，D 两处设置警戒线，并且 $CE=DF$ ，要求游船能从 C，D 两点之间安全通过，则 C 处距桥墩的距离 CE 至少为_______米．（精确到 0.1 米）

【答案】（1）d，h　（2）见解析

（3）①0.88；②则 C 处距桥墩的距离 CE 至少为 0.7 米．

【解析】

【分析】（1）根据函数的定义即可解答；

（2）描点，连线，画出图象即可；

（3）①观察图象即可得出结论；②求出抛物线的解析式，令 $h=2$ 解答 d 的值即可得答案．

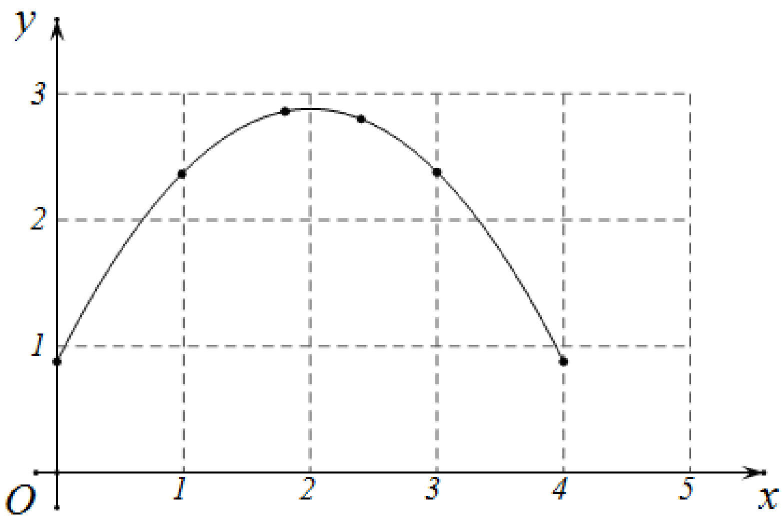
【小问 1 详解】

解：根据函数的定义，我们可以确定，在 d 和 h 这两个变量中，d 是自变量，h 是这个变量的函数；

故答案为：d，h；

【小问 2 详解】

解：描点，连线，画出图象如图：



；

【小问 3 详解】

解：①观察图象，桥墩露出水面的高度 AE 为 0.88 米；

故答案为：0.88；

②设根据图象设二次函数的解析式为 $h=ad^2+bd+0.88$，

把(1，2.38)，(3，2.38)代入得：$\begin{cases} 2.38=a+b+0.88 \\ 2.38=9a+3b+0.88 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} a=-0.5 \\ b=2 \end{cases}$，

∴二次函数的解析式为 $h=-0.5d^2+2d+0.88$，

令 $h=2$ 得：$-0.5d^2+2d+0.88=2$，

解得 $d\approx3.3$ 或 $d\approx0.7$，

∴则 C 处距桥墩的距离 CE 至少为 0.7 米．

【点睛】本题考查二次函数的应用，解题的关键是读懂题意，用待定系数法求出二次函数的解析式．

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=x^2-2mx+m^2+1$ 与 y 轴交于点 A．点 $B\left(x_1, y_1\right)$ 是抛物线上的任意一点，且不与点 A 重合，直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 经过 A，B 两点．

（1）求抛物线的顶点坐标（用含 m 的式子表示）；

（2）若点 $C(m-2,a)$，$D(m+2,b)$ 在抛物线上，则 a_______b（用“<”，“=”或“>”填空）；

（3）若对于 $x_1<-3$ 时，总有 $k<0$，求 m 的取值范围．

【答案】（1）$\left(m,1\right)$

（2）＝

（3）$m\geq-\dfrac{3}{2}$

【解析】

【分析】（1）由 $y=x^2-2mx+m^2+1=\left(x-m\right)^2+1$，可得抛物线的顶点坐标；

（2）由（1）可知，抛物线的对称轴为直线 $x=m$，可知 $C(m-2,a)$ 关于对称轴对称的点坐标为 $\left(m+2,a\right)$，进而可知 a,b 的关系；

（3）将 $x=0$ 代入 $y=x^2-2mx+m^2+1$，得 $y=m^2+1$，则 $A\left(0,m^2+1\right)$，过 A，B 两点的直线解析式为 $y=kx+m^2+1$，当 $m\geq0$ 时，由题意知，当 $x<m$ 时，y 随 x 的增大而减小，$y_1>y_A>0$，即 $y_1=kx_1+m^2+1>m^2+1$，可得 $k<0$，可得 $m\geq0$；当 $m<0$ 时，由题意知，当 $x<m$ 时，y 随 x 的增大而减小，点 $A\left(0,m^2+1\right)$ 关于直线 $x=m$ 的对称点为 $\left(2m,m^2+1\right)$，则 $-3<2m$，计算求出此时 m 的取值范围；进而可得 m 的取值范围．

【小问 1 详解】

解：∵ $y=x^2-2mx+m^2+1=\left(x-m\right)^2+1$，

∴抛物线的顶点坐标为 $(m,1)$．

小问 2 详解】

解：由（1）可知，抛物线的对称轴为直线 $x=m$，

$\therefore C(m-2,a)$ 关于对称轴对称　点坐标为 $(m+2,a)$，

$\therefore a=b$，

故答案为：＝.

【小问 3 详解】

解：将 $x=0$ 代入 $y=x^2-2mx+m^2+1$，得 $y=m^2+1$，

$\therefore A(0,m^2+1)$，

将 $A(0,m^2+1)$ 代入 $y=kx+b$，解得 $b=m^2+1$，

$\therefore y=kx+m^2+1$，

当 $m\ge 0$ 时，由题意知，当 $x<m$ 时，y 随 x 的增大而减小，

$\because x_1<-3<0$，

$\therefore y_1>y_A>0$，即 $y_1=kx_1+m^2+1>m^2+1$，

解得 $k<\frac{y_1}{x_1}$，

$\therefore k<0$，

$\therefore m\ge 0$；

当 $m<0$ 时，由题意知，当 $x<m$ 时，y 随 x 的增大而减小，

点 $A(0,m^2+1)$ 关于直线 $x=m$ 的对称点为 $(2m,m^2+1)$，

$\because$ 对于 $x_1<-3$ 时，总有 $k<0$，

$\therefore -3<2m$，

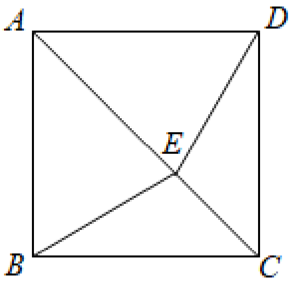
解得 $m>-\frac{3}{2}$，

$\therefore -\frac{3}{2} < m < 0$；

综上所述，m 的取值范围为 $m \ge -\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了二次函数的顶点式，二次函数的图象与性质，二次函数与一次函数的综合等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

27. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为对角线 AC 上一点（ $AE > CE$ ），连接 BE，DE.



（1）求证： $BE = DE$ ；

（2）过点 E 作 $EF \perp AC$ 交 BC 于点 F，延长 BC 至点 G，使得 $CG = BF$ ，连接 DG.

①依题意补全图形；

②用等式表示 BE 与 DG 的数量关系，并证明.

【答案】（1）见解析 （2）①见解析；② $DG = \sqrt{2}BE$

【解析】

【分析】（1）根据正方形的性质可得 $AB = AD,\ \angle BAE = \angle DAE,$ 依据 SAS 证明 $\Delta ABE \cong \Delta ADE$ 即可得出结论；

（2）①根据题中作图步骤补全图形即可；②连接 EG，证明 $\Delta BEF \cong \Delta DEG$,得 $GE=BE, \angle BEF = \angle GEC$ ， 由（1）得 $DE = EG, \angle DEG = 90°,$ 再运用勾股定理可得出结论.

【小问 1 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD = AB, \angle BAD = \angle BCD = 90^{\circ}$ ，

$\because AC$ 是正方形的对角线，

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \frac{1}{2} \times 90^{\circ} = 45^{\circ},$

在△ABE和△ADE中，

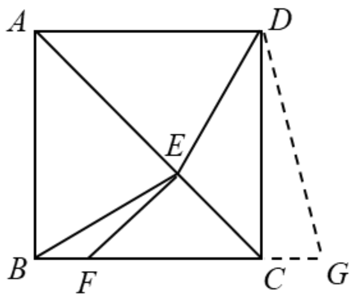
$$\begin{cases} AD=AB \\ \angle DAE=\angle BAE \\ AE=AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADE,$

$\therefore BE=DE;$

【小问 2 详解】

①补全图形如下：



②连接 GE，如图，

$\because EF \perp AC, \angle ECF=45^{\circ},$

$\therefore \angle EFC=45^{\circ},$

$\therefore \angle ECF=\angle EFC,$

$\therefore EF=EC$， $\angle EFB=\angle ECG=135^{\circ}$，

又 $BF=CG,$

$\therefore \triangle BEF \cong \Delta GEC,$

$\therefore BE=GE, \angle BEF=\angle GEC,$

$\therefore GE=DE$，

由（1）知：$\triangle ABE \cong \Delta ADE.$，

$\therefore \angle AEB=\angle AED,$

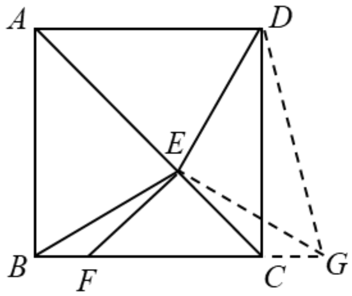
$\therefore \angle BEC=\angle DEC,$ 即$\angle BEF+\angle FEC=\angle GEC+\angle DEG$，

$\therefore \angle DEG=\angle FEC=90^{\circ}$

由勾股定理得，$DG^2=DE^2+GE^2$，

$\therefore DG^2=2GE^2=2BE^2$，

$\therefore DG=\sqrt{2}BE$.



【点睛】本题主要考查了正方形的性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理等知识，证明$\Delta ABE\cong\Delta ADE$是解答本题的关键.

28. 对于平面直角坐标系xOy中的点C及图形G，有如下定义：若图形G上存在A，B两点，使得$\triangle ABC$为等腰直角三角形，且$\angle ABC=90°$，则称点C为图形G的"友好点".

（1）已知点$O(0,0)$，$M(4,0)$，在点$C_1(0,4)$，$C_2(1,4)$，$C_3(2,-1)$中，线段OM的"友好点"是_______；

（2）直线$y=-x+b$分别交x轴、y轴于P，Q两点，若点$C(2,1)$为线段PQ的"友好点"，求b的取值范围；

（3）已知直线$y=x+d\,(d>0)$分别交x轴、y轴于E，F两点，若线段EF上的所有点都是半径为2的$\odot O$的"友好点"，直接写出d的取值范围.

【答案】（1）C_1、C_3

（2）$1\le b<3$或$b>3$

（3）$2\le d\le 2\sqrt{2}+2$

【解析】

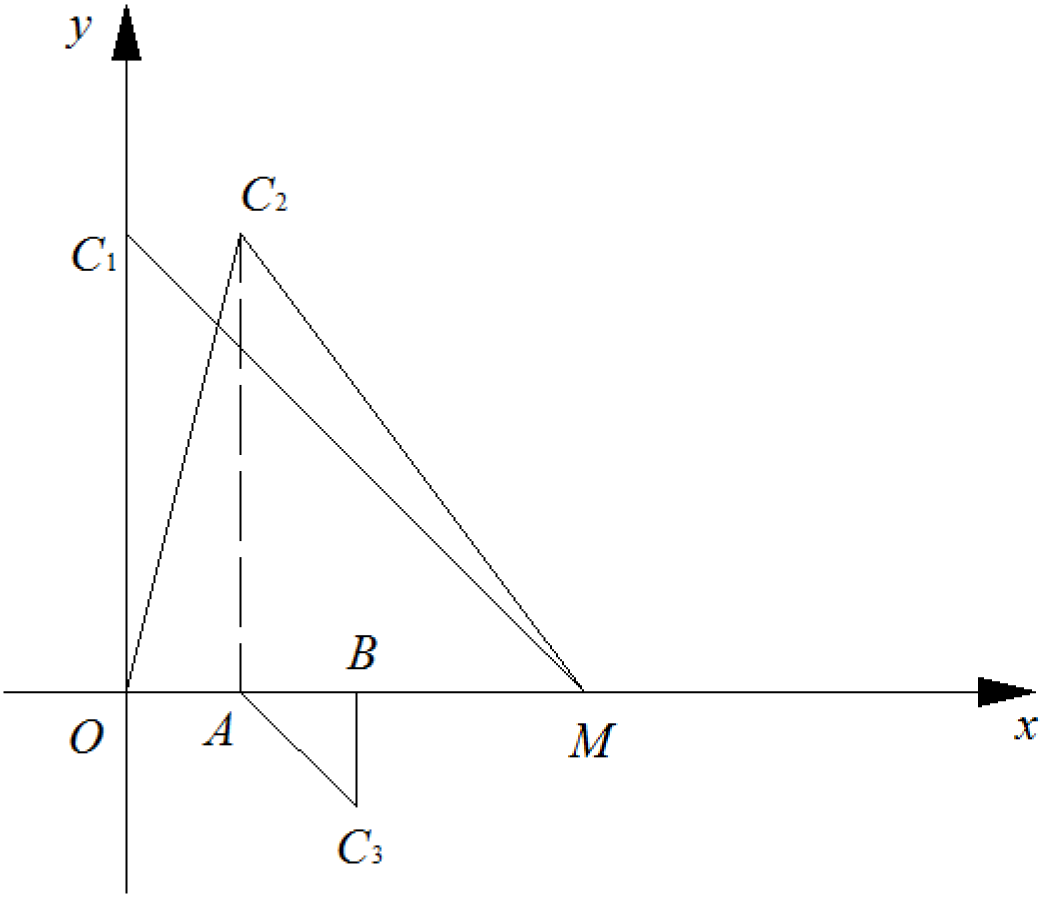
【分析】（1）根据"友好点"的定义逐个判断即可；

（2）分两种情况讨论，直线PQ在点C上方或下方．过B作PQ的垂线，垂足为B，交x轴于H，根据题目中的定义知：BQ或BP的长度要大于或等于BC的长度，求解即可；

（3）首先分析得到E点的运动范围，作出图形知$OE\ge 2$，当EH平分$\angle FEO$时，其中H（2，0），是其最大临界值，根据勾股定理求出最大值为$2\sqrt{2}+2$，即得结论.

【小问 1 详解】

解：如图所示，



由题意知三角形 OC_1M 为等腰直角三角形，C_1 符合题意；

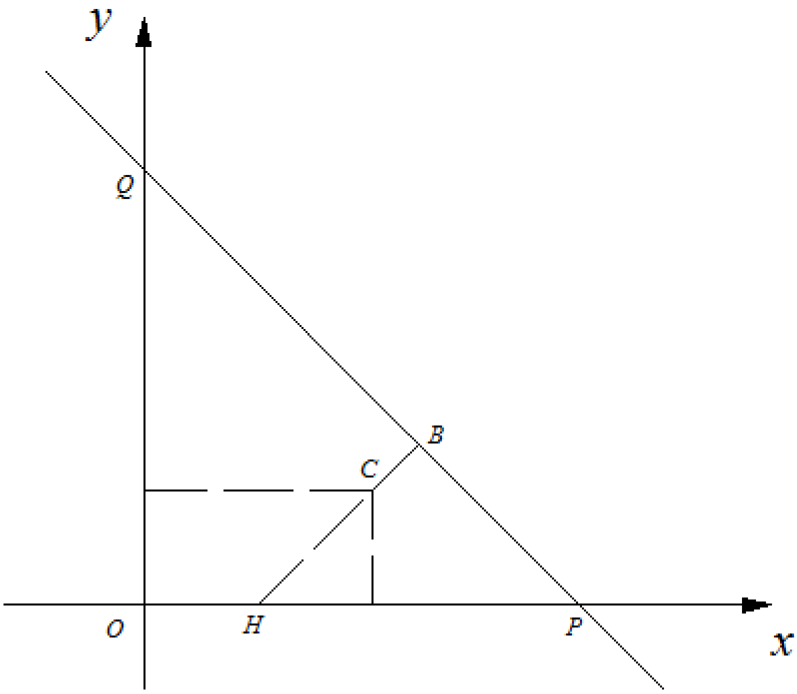
过 C_2 作 $C_2A \perp OM$ 于 A，则 $AM=3$，$C2A=4$，三角形 AMC_2 不是等腰三角形，C_2 不符合题意；

过 C_3 作 $C_3B \perp OM$ 于 B，则 $C_3B=AB=1$，三角形 ABC_3 是等腰直角三角形，符合题意；

故答案为：C_1、C_3.

【小问 2 详解】

解：分两种情况讨论，当直线 PQ 在 C 点上方时，过 C 作 $CB \perp PQ$ 于 B，延长 BC 交 x 轴于 H，如图所示，



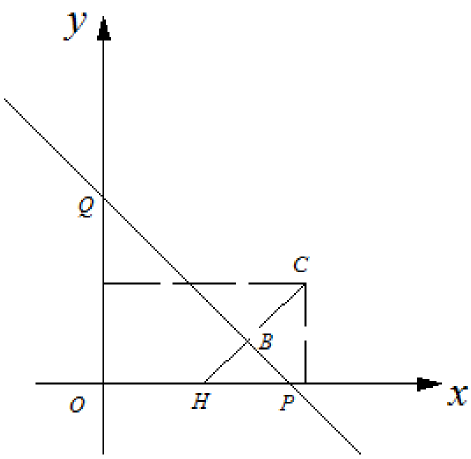
则△BPH 为等腰直角三角形，$BP=BH>BC$，

故　线段 PQ 上必存在 A 点，使得∠$ABC=90°$，$AB=BC$，

将 $x=2$，$y=1$ 代入 $y=-x+b$ 得：$b=3$，

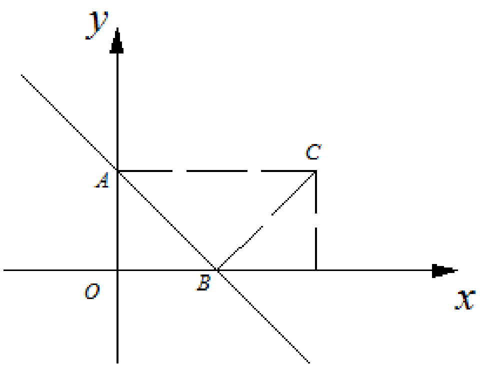
即 $b>3$；

当直线 PQ 在 C 点下方时，过 C 作 $CB\perp PQ$ 于 B，CB 延长线交 x 轴于 H，



则当 $BQ\geq BC$ 时，符合题意，

当直线 PQ 过 H 点时，$BQ=BC$，如图所示，



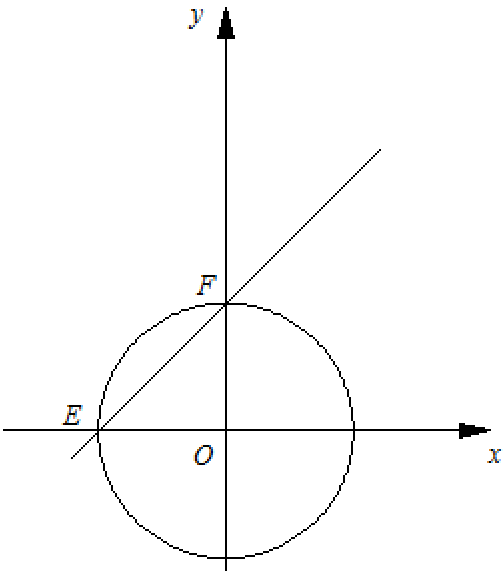
此时，$-1+b=0$，即 $b=1$，

即 $1\le b<3$，

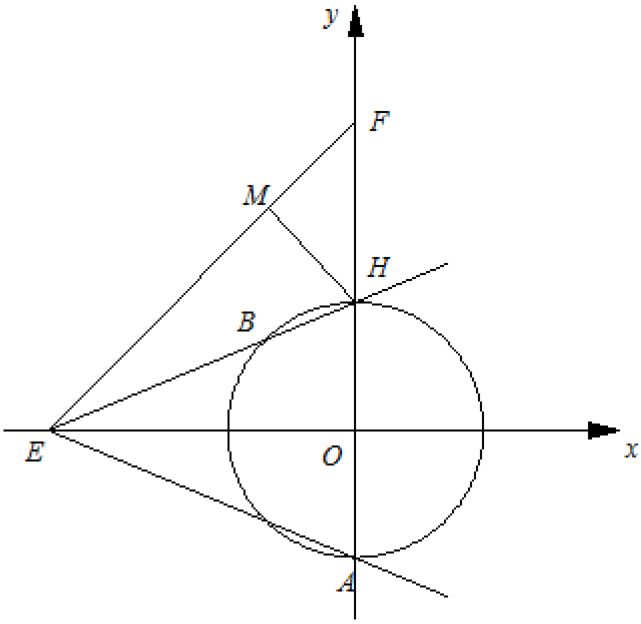
综上所述，b 的取值范围为：$1\le b<3$ 或 $b>3$．

【小问 3 详解】

解：通过分析可知，当直线 EF 在下图中的位置之间运动时，符合要求，



此时，$OE=OF=2$，即 $d=2$，



此时，$\angle HEO$=22.5°，即 EH 为$\angle EHF$ 的平分线，

过 H 作 $HM\perp EF$ 于 M，则 $HM=OH=2$，

∴$FM=2$，

由勾股定理得：$FH=2\sqrt{2}$，

即 $OE=OF=2\sqrt{2}+2$，即 $d=2\sqrt{2}+2$

∴$2\le d\le 2\sqrt{2}+2$．

【点睛】本题考查了新定义的问题，涉及到一次函数与圆的性质的综合应用，所用到的数学思想方法为数形结合、分类讨论，该题综合性较强．解题关键是读懂题意，借助定义作出符合题意的图形．