2022 北京朝阳初三一模

数　　学

学校__________ 班级__________ 姓名__________ 考号__________

考生须知

1．本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题，满分 100 分．考试时间 120 分钟．

2．在试卷和答题卡上认真填写学校名称，班级、姓名和考号．

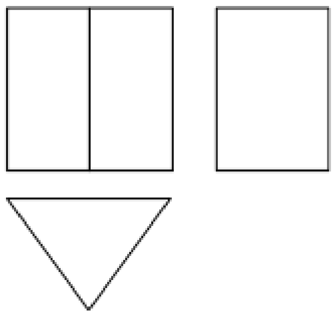
3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．

4．在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答．

5．考试结束，请将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回．

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，其中符合题意的选项只有一个．

1. 如图是某几何体的三视图，该几何体是（　）

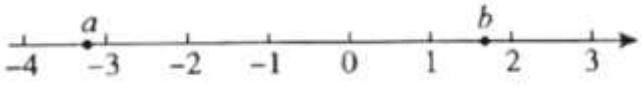


A. 三棱柱　　B. 长方体　　C. 圆锥　　D. 圆柱

2. 2022 年 3 月 5 日，国务院总理李克强代表国务院，向十三届全国人大五次会议作政府工作报告．报告中指出过去一年是党和国家历史上具有里程碑意义的一年，“十四五”实现良好开局，我国发展又取得新的重大成就．2021 年国内生产总值达 114 万亿元，增长8.1%．将 1140000 用科学记数法表示应为（　）

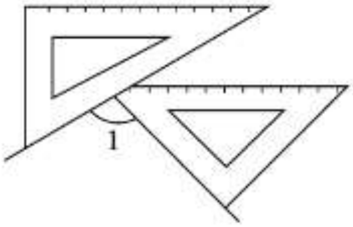
A. 0.114×10^7　　B. 1.14×10^5　　C. 1.14×10^6　　D. 11.4×10^4

3. 实数 a，b 在数轴上对应的点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



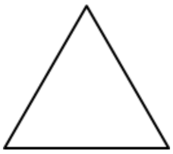
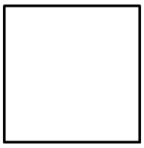
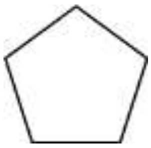
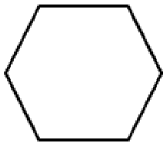
A. $a+b>0$　　B. $ab>0$　　C. $a-b>0$　　D. $|a|>|b|$

4. 将一副三角尺（厚度不计）如图摆放，使有刻度的两条边互相平行，则图中 $\angle1$ 的大小为（　）



A. 100°　　B. 105°　　C. 115°　　D. 120°

5. 下列多边形中，内角和与外角和相等的是（　　）

A 　B. 　C. 　D. 

6. 不透明袋子中装有红、绿小球各一个，除颜色外无其他差别，随机摸出一个小球后，放回并摇匀，再随机摸出一个，两次都摸到红球的概率为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

7. 下图是国家统计局公布的2021年居民消费价格月度涨跌幅度，月度同比和月度环比的平均数分别为$\overline{x}_{同},\overline{x}_{环}$，方差分别为$s_{同}^2,s_{环}^2$，则（　）

A. $\overline{x}_{同}>\overline{x}_{环},s_{同}^2>s_{环}^2$　　B. $\overline{x}_{同}>\overline{x}_{环},s_{同}^2<s_{环}^2$　　C. $\overline{x}_{同}<\overline{x}_{环},s_{同}^2>s_{环}^2$　　D. $\overline{x}_{同}<\overline{x}_{环},s_{同}^2<s_{环}^2$

8. 点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$在反比例函数$y=\frac{1}{x}$的图象上，下列推断正确的是（　）

A. 若$x_1<x_2$，则$y_1<y_2$　　B. 若$x_1<x_2$，则$y_1>y_2$

C. 若$x_1+x_2=0$，则$y_1+y_2=0$　　D. 存在$x_1=x_2$，使得$y_1\neq y_2$

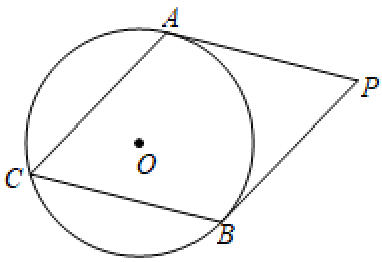
二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若代数式 $\frac{1}{x-1}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是__________.

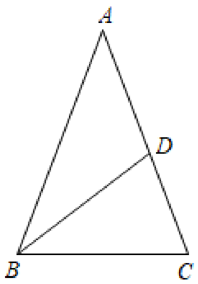
10. 分解因式：$2a^2-4ab+2b^2=$_________.

11. 写出一个比 4 大且比 5 小的无理数：__________.

12. 如图，AC,BC 是⊙O 的弦，PA,PB 是⊙O 的切线，若 $\angle C=60^\circ$，则 $\angle P=$_________$^\circ$.



13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D 在 AC 上（不与点 A，C 重合），只需添加一个条件即可证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDC$ 相似，这个条件可以是____________（写出一个即可）.



14. 如图，2022 年北京冬奥会上，一些可看作正六边形的“小雪花”对称地排列在主火炬周围，中间空出了 13 个“小雪花”的位置来突出主火炬，在其中 91 个“小雪花”上面写有此次参会的国家或地区的名称，此外还有几个“小雪花”上面只有中国结图案，这些只有中国结图案的“小雪花”共有_________个.

15. 若关于 x 一元二次方程 $(a-1)x^2+a^2x-a=0$ 有一个根是 $x=1$，则 $a=$___________.

16. 尊老敬老是中华民族的传统美德，某校文艺社团的同学准备在“五一”假期去一所敬老院进行慰问演出，他们一共准备了 6 个节目，全体演员中有 8 人需参加两个或两个以上的节目演出，情况如下表：

	演员 1	演员 2	演员 3	演员 4	演员 5	演员 6	演员 7	演员 8
节目 A	√		√		√	√		√
节目 B	√		√	√				
节目 C				√		√		√
节目 D		√			√			
节目 E		√					√	
节目 F					√		√	

从演员换装的角度考虑，每位演员不能连续参加两个节目的演出，从节目安排的角度考虑，首尾两个节目分别是 A，F，中间节目的顺序可以调换，请写出一种符合条件的节目先后顺序____________（只需按演出顺序填写中间 4 个节目的字母即可）.

三、解答题（共 68 分，第 17-21 题，每题 5 分，第 22-24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27，28 题，每题 7 分）

17. 计算：$2\cos 30°+|-\sqrt{3}|-(\pi-\sqrt{3})^0-\sqrt{12}$.

18. 解不等式组：$\begin{cases} x-3(x-2)\geq 4 \\ x-1<\dfrac{1+2x}{3} \end{cases}$

19. 已知 $x^2+x-3=0$，求代数式 $(2x+3)(2x-3)-x(x-3)$ 的值.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-ax+a-1=0$.

（1）求证：该方程总有两个实数根；

（2）若该方程的两个实数根都是整数，且其中一个根是另一个根的 2 倍，求 a 的值.

21. 中国古代数学家李子金在《几何易简集》中记载了圆内接正三角形的一种作法：“以半径为度，任用圆界一点为心，作两圆相交，又移一心，以交线为界，再作一交圆，其三线相交处为一角，其两线相交处为两角，直线界之亦得所求”.

由记载可得作法如下：

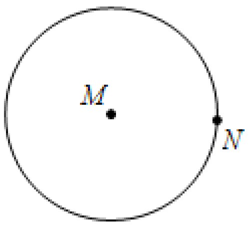
①作$\odot M$，在$\odot M$上取一点N，以点N为圆心，MN为半径作$\odot N$，两圆相交于A，B两点，连接AB；

②以点B为圆心，AB为半径作$\odot B$，与$\odot M$相交于点C，与$\odot N$相交于点D;

③连接AC，AD，BC，BD.

$\triangle ABC$，$\triangle ABD$都是圆内接正三角形.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；



（2）完成下面的证明，

证明：连接AM，AN，MN，BM.

$\because MA = MN = NA$，

$\therefore \triangle AMN$为①________.

$\therefore \angle AMN = 60^\circ$.

同理可得，$\angle BMN = 60^\circ$.

$\therefore \angle AMB = 120^\circ$.

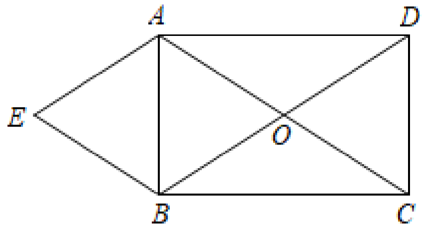
$\therefore \angle ACB = 60^\circ$（②____________）（填推理的依据）.

$\because BA = BC$，

$\therefore \triangle ABC$是等边三角形.

同理可得，$\triangle ABD$　等边三角形.

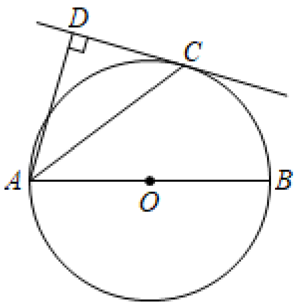
22. 如图，在矩形$ABCD$中，AC，BD相交于点O，$AE//BD$，$BE//AC$.



（1）求证：四边形 $AEBO$ 是菱形；

（2）若 $AB=OB=2$，求四边形 $AEBO$ 的面积.

23. 如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，AD 和过点 C 的切线互相垂直，垂足为 D.



（1）求证：AC 平分 $\angle DAB$；

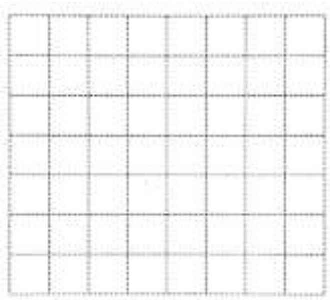
（2）若 $\cos\angle CAD=\dfrac{4}{5}$，$AB=5$，求 CD 的长.

24. 某公园在人工湖里建造一道喷泉拱门，工人在垂直于湖面的立柱上安装喷头，从喷头喷出的水柱的形状可以看作是抛物线的一部分．安装后，通过测量获得如下数据，喷头高出湖面 3 米，在距立柱水平距离为 d 米的地点，水柱距离湖面高度为 h 米.

d（米）	0.50	1.00	1.5	2 00	2.50	3.00
h（米）	3.75	4.00	3.75	3.00	1.75	0

请解决以下问题：

（1）在网格中建立适当的平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；



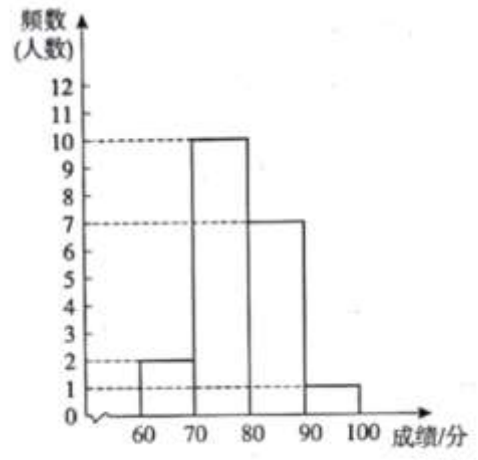
（2）结合表中所给数据或所画图象，直接写出水柱最高点距离湖面的高度；

（3）求 h 关于 d 的函数表达式；

（4）公园希望游船能从喷泉拱门下穿过，已知游船的宽度约为 2 米，游船的平顶棚到湖面的高度约为 1 米，从安全的角度考虑，要求游船到立柱的水平距离不小于 1 米，顶棚到水柱的竖直距离也不小于 1 米，工人想只通过调整喷头距离湖面的高度（不考虑其他因素）就能满足上述要求，请通过计算说明应如何调整.

25. 某校初三年级有两个校区，其中甲校区有 200 名学生，乙校区有 300 名学生，两个校区所有学生都参加了一次环保知识竞赛，为了解两个校区学生的答题情况，进行了抽样调查，从甲、乙两个校区各随机抽取 20 名学生，对他们本次环保知识竞赛的成绩（百分制）进行了整理、描述和分析．下面给出了部分信息.

a．甲校区成绩的频数分布直方图如下（数据分成 4 组：$60\le x<70$，$70\le x<80$，$80\le x<90$，$90\le x\le100$）；



b．甲校区成绩在 $70\le x<80$ 这一组的是：

74　74　75　77　77　77　77　78　79　79

c．甲、乙两校区成绩的平均数、中位数如下：

	平均数	中位数
甲校区	79.5	m
乙校区	77	81.5

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m 的值；

（2）两个校区分别对本次抽取的学生的成绩进行等级赋分，超过本校区的平均分就可以赋予等级 A，判断在本次抽取的学生中哪个校区赋予等级 A 的学生更多，并说明理由；

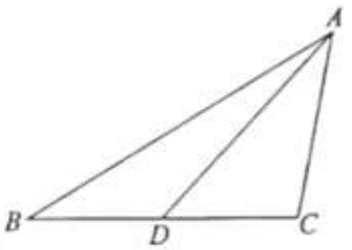
（3）估计该校初三年级所有学生本次环保知识竞赛的平均分为__________（直接写出结果）.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(-2,0),(-1,y_1),(1,y_2),(2,y_3)$ 在抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上.

（1）若 $y_1 = y_2$，求 y_3 值；

（2）若 $y_2 < y_1 < y_3$，求 y_3 值的取值范围.

27. 在$\triangle ABC$中，D是BC的中点，且$\angle BAD \neq 90°$，将线段AB沿AD所在直线翻折，得到线段AB'，作$CE /\!/ AB$交直线AB'于点E.



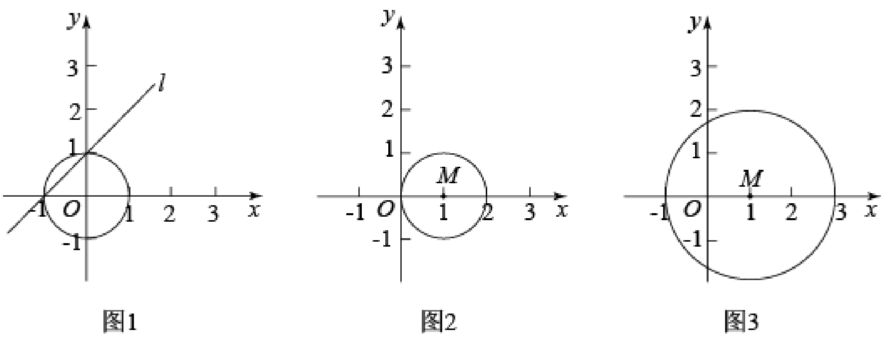
（1）如图，若$AB > AC$，

①依题意补全图形；

②用等式表示线段AB, AE, CE之间的数量关系，并证明；

（2）若$AB < AC$，上述结论是否仍然成立？若成立，简述理由：若不成立，直接用等式表示线段AB, AE, CE之间新的数量关系（不需证明）.

28. 在平面直角坐标系xOy中，对于直线$l: y = kx + b$，给出如下定义：若直线l与某个圆相交，则两个交点之间的距离称为直线l关于该圆的“圆截距”.



（1）如图1，$\odot O$的半径为1，当$k = 1, b = 1$时，直接写出直线l关于$\odot O$的“圆截距”；

（2）点M的坐标为$(1, 0)$，

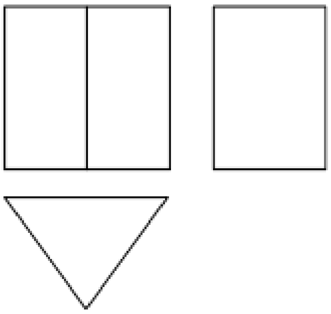
①如图2，若$\odot M$的半径为1，当$b = 1$时，直线l关于$\odot M$的“圆截距”小于$\frac{4}{5}\sqrt{5}$，求k的取值范围；

②如图 3，若$\odot M$ 的半径为 2，当 k 的取值在实数范围内变化时，直线 l 关于$\odot M$ 的“圆截距”的最小值为 2，直接写出 b 的值.

参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，其中符合题意的选项只有一个.

1. 如图是某几何体的三视图，该几何体是（   ）



A. 三棱柱　　B. 长方体　　C. 圆锥　　D. 圆柱

【答案】A

【解析】

【分析】由三视图想象几何体的形状，首先，应分别根据主视图、俯视图和左视图想象几何体的前面、上面和左侧面的形状，然后综合起来考虑整体形状.

【详解】解：根据主视图和左视图为矩形判断出是柱体，根据俯视图是三角形可判断出这个几何体应该是三棱柱.

故选：A.

【点睛】此题考查了由三视图判断几何体，解题的关键是熟记一些简单的几何体的三视图.

2. 2022 年 3 月 5 日，国务院总理李克强代表国务院，向十三届全国人大五次会议作政府工作报告．报告中指出过去一年是党和国家历史上具有里程碑意义的一年，“十四五”实现良好开局，我国发展又取得新的重大成就．2021 年国内生产总值达 114 万亿元，增长8.1%．将 1140000 用科学记数法表示应为（   ）

A. 0.114×10^{7}　　B. 1.14×10^{5}　　C. 1.14×10^{6}　　D. 11.4×10^{4}

【答案】C

【解析】

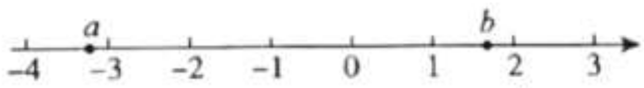
【分析】先确定 a=1.14，再确定 n=6，用科学记数法形式表示出来即可.

【详解】解：∵1140000=1.14×10^{6}，

故选 C.

【点睛】本题考查了大数的科学记数法，熟练掌握如何确定 a 值，n 值是解题的关键.

3. 实数 a，b 在数轴上对应的点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



A. $a+b>0$　　B. $ab>0$　　C. $a-b>0$　　D. $|a|>|b|$

【答案】D

【解析】

【分析】根据数轴上的位置确定 a，b 的正负和绝对值大小，再根据实数运算法则判断即可.

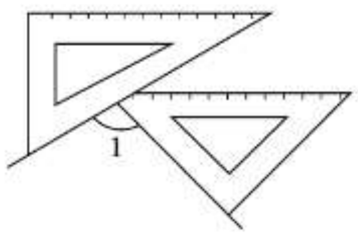
【详解】解：根据实数 a，b 在数轴上对应点的位置可知，$a<0$，$b>0$，$|a|>3>|b|$，

所以，$a+b<0$，$ab<0$，$a-b<0$，$|a|>|b|$，

故选：D.

【点睛】本题考查了实数在数轴上表示和实数的运算法则，解题关键是树立数形结合思想，熟练运用实数运用法则判断式子符号.

4. 将一副三角尺（厚度不计）如图摆放，使有刻度的两条边互相平行，则图中 $\angle 1$ 的大小为（　）



A. 100°　　B. 105°　　C. 115°　　D. 120°

【答案】B

【解析】

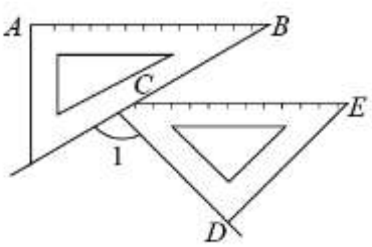
【分析】先根据平行线的性质求出 $\angle BCE$ 的度数，然后根据平角的定义求解即可.

详解】解：如图所示，由题意得，$\angle ABC=30°$，$\angle DCE=45°$，$AB\parallel CE$

$\therefore \angle BCE=\angle ABC=30°$，

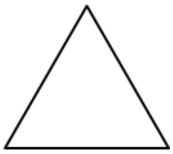
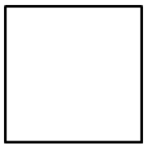
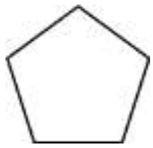
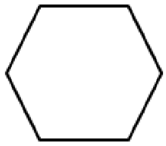
$\therefore \angle 1=180°-\angle BCE-\angle DCE=105°$，

故选：B．



【点睛】本题主要考查了三角板中角度的计算，平行线的性质，熟知平行线的性质是解题的关键．

5. 下列多边形中，内角和与外角和相等的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式（n-2）•180°与多边形的外角和定理列式进行计算即可得解．

【详解】解：设所求多边形的边数为 n，根据题意得：

（n-2）•180°=360°，

解得 n=4．

故选：B．

【点睛】本题考查了多边形的内角和公式与外角和定理，熟记公式与定理是解题的关键．

6. 不透明袋子中装有红、绿小球各一个，除颜色外无其他差别，随机摸出一个小球后，放回并摇匀，再随机摸出一个，两次都摸到红球的概率为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】用列表法或树状图法可以列举出所有等可能出现的结果，然后看符合条件的占总数的几分之几即可．

【详解】解：两次摸球的所有的可能性树状图如下：

第一次 第二次

$$\text{开始}\begin{cases}\text{红球}\begin{cases}\text{红球}\\\text{绿球}\end{cases}\\\text{绿球}\begin{cases}\text{红球}\\\text{绿球}\end{cases}\end{cases}$$

$\therefore P$ 两次都是红球 $=\dfrac{1}{4}$.

故选 D.

【点睛】考查用树状图或列表法，求等可能事件发生的概率，关键是列举出所有等可能出现的结果数，然后用分数表示，同时注意“放回”与“不放回”的区别.

7. 下图是国家统计局公布的 2021 年居民消费价格月度涨跌幅度，月度同比和月度环比的平均数分别为 $\overline{x}_{同},\overline{x}_{环}$ ，方差分别为 $s_{同}^2,s_{环}^2$，则（　）

A. $\overline{x}_{同}>\overline{x}_{环},s_{同}^2>s_{环}^2$　　B. $\overline{x}_{同}>\overline{x}_{环},s_{同}^2<s_{环}^2$　　C. $\overline{x}_{同}<\overline{x}_{环},s_{同}^2>s_{环}^2$　　D. $\overline{x}_{同}<\overline{x}_{环},s_{同}^2<s_{环}^2$

【答案】A

【解析】

【分析】先确定数组中的数据，分别计算平均数和方差，比较判断即可.

【详解】解：∵环比的数据为：1，0.6，-0.5，-0.3，-0.2，-0.4，0.3，0.1，0，0.7，0.4，-0.3，

$$\therefore \overline{x}_{环}=\frac{1+0.6-0.5-0.3+\ldots+(-0.3)}{12}\approx 0.1,$$

$$S^2{}_{环}=\frac{(1-0.1)^2+(0.6-0.1)^2+(-0.5-0.1)^2+\ldots+(-0.3-0.1)^2}{12}\approx 0.2$$

∵同比的数据为：-0.3，-0.2，0.4，0.9，1.3，1.1，1.0，0.8，0.7，1.5，2.3，1.5，

$\therefore \overline{x}_{同}=\dfrac{(-0.3)+(-0.2)+0.4+0.9+\ldots+1.5}{12}\approx 0.9$，

$S^2{}_{同}=\dfrac{(-0.3-0.9)^2+(-0.2-0.9)^2+(0.4-0.9)^2+\ldots+(1.5-0.9)^2}{12}\approx 0.5$

$\therefore \overline{x}_{同}>\overline{x}_{环}, s_{同}^2>s_{环}^2$，

故选 A．

【点睛】本题考查了折线统计图，平均数，方差的计算，熟练掌握计算公式是解题的关键．

8. 点 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象上，下列推断正确的是（　）

A. 若 $x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$

B. 若 $x_1<x_2$，则 $y_1>y_2$

C. 若 $x_1+x_2=0$，则 $y_1+y_2=0$

D. 存在 $x_1=x_2$，使得 $y_1\neq y_2$

【答案】C

【解析】

【分析】反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象在一三象限，且在每个象限内，y 随 x 到增大而减小．据此可判断．

【详解】解：反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象在一三象限，且在每个象限内，y 随 x 到增大而减小，那么：

A、若 $x_1<x_2$，且（x_1，y_1）、(x_2，y_2)在同一个象限，则 $y_1>y_2$，故选项错误，不符合题意；

B、若 $x_1<x_2$，且（x_1，y_1）、(x_2，y_2)分别在三、一象限内，则 $y_1<y_2$，故选项错误，不符合题意；

C、若 $x_1+x_2=0$，则 $y_1+y_2=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1 \bullet x_2}=0$，故选项正确，符合题意；

D、若 $x_1=x_2$，则 $\dfrac{1}{y_1}=\dfrac{1}{y_2}$，即 y_1=y_2，另外，还可根据函数的定义：对于自变量 x 的值，y 都有唯一确定的值和它相对应，所以当 $x_1=x_2$ 时，$y_1\neq y_2$ 不可能．故选项错误，不符合题意．

故选：C．

【点睛】此题考查了比较反比例函数值的大小,，解题的关键是数形结合，掌握函数的定义和反比例函数图象的性质．

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若代数式 $\frac{1}{x-1}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是__________.

【答案】$x\neq1$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件即可求得.

【详解】解：∵代数式 $\frac{1}{x-1}$ 有意义，

$\therefore\ x-1\neq0$，

解得 $x\neq1$，

故答案为：$x\neq1$.

【点睛】本题考查了分式有意义的条件，熟练掌握和运用分式有意义的条件是解决本题的关键.

10. 分解因式：$2a^2-4ab+2b^2=$__________.

【答案】$2\left(a-b\right)^2$

【解析】

【分析】首先提取公因式 2，再根据完全平行方公式即可分解因式.

【详解】解：$2a^2-4ab+2b^2$

$=2\left(a^2-2ab+b^2\right)$

$=2\left(a-b\right)^2$，

故答案为：$2\left(a-b\right)^2$.

【点睛】本题考查了利用提公因式法和完全平方公式分解因式，熟练掌握和运用分解因式的方法是解决本题的关键.

11. 写出一个比 4 大且比 5 小的无理数：__________.

【答案】答案不唯一，如：$\sqrt{17}$

【解析】

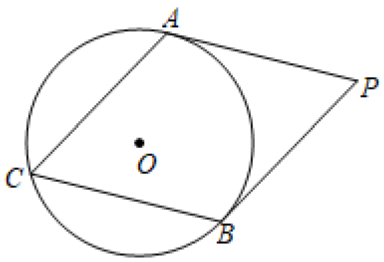
【分析】根据无理数的定义即可得出答案.

【详解】∵$4^2=16$，$5^2=25$，∴$\sqrt{16}$到$\sqrt{25}$之间的无理数都符合条件，如：$\sqrt{17}$．

故答案为答案不唯一，如：$\sqrt{17}$．

【点睛】本题考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有：π，2π等；开方开不尽的数；以及像0.1010010001…，等有这样规律的数.

12. 如图，AC,BC是$\odot O$的弦，PA,PB是$\odot O$的切线，若$\angle C=60^\circ$，则$\angle P=$________°．

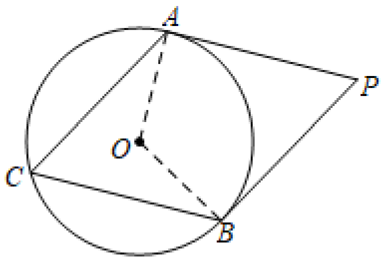


【答案】60

【解析】

【分析】因为PA,PB是$\odot O$ 切线，由切线的性质得出$PA\perp OA$，$PB\perp OB$，得出$\angle PAO=\angle PBO=90°$，由圆周角定理可得$\angle AOB=2\angle C=120°$. ，再由四边形内角和等于360°，即可得出结果.

【详解】解：如图，连接OA，OB，



∵PA,PB是$\odot O$的切线，

∴$PA\perp OA$，$PB\perp OB$

∴$\angle PAO=\angle PBO=90°$

∵$\angle C=60^\circ$，

∴$\angle AOB=2\angle C=120°$，

∵四边形内角和等于360°.

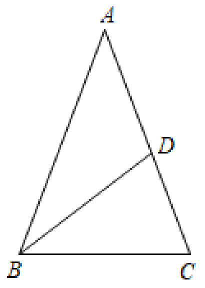
∴在四边形$AOBP$中，

$\angle P=360^{\circ}-90^{\circ}-90^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$.

故答案为：60．

【点睛】此题考查了切线的性质、圆周角定理以及四边形内角和定理；解题的关键是利用切线的性质和圆周角定理结合四边形内角和等于 360° 求角．

13. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D在AC上（不与点A，C重合），只需添加一个条件即可证明$\triangle ABC$和$\triangle BDC$相似，这个条件可以是__________（写出一个即可）．



【答案】$\angle A=\angle CBD$或$\angle ABC=\angle BDC$或$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{BC}{DC}$或$BC^2=AC\cdot DC$（答案不唯一）

【解析】

【分析】相似三角形的判定定理：①两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似；②两角对应相等的两个三角形相似．据此解答即可．

【详解】解：∵$\angle C=\angle C$

∴添加$\angle A=\angle CBD$或$\angle ABC=\angle BDC$或$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{BC}{DC}$或$BC^2=AC\cdot DC$.

故答案为：$\angle A=\angle CBD$或$\angle ABC=\angle BDC$或$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{BC}{DC}$或$BC^2=AC\cdot DC$（答案不唯一）．

【点睛】此题考查了补充条件使两个三角形相似．解题的关键是熟知相似三角形的判定定理，特别注意用对应边成比例和一个角相等判定三角形相似的时候，其中相等的角一定要是这两条边的夹角．

14. 如图，2022 年北京冬奥会上，一些可看作正六边形的“小雪花”对称地排列在主火炬周围，中间空出了 13 个“小雪花”的位置来突出主火炬，在其中 91 个“小雪花”上面写有此次参会的国家或地区的名称，此外还有几个“小雪花”上面只有中国结图案，这些只有中国结图案的“小雪花”共有________个．

【答案】5

【解析】

【分析】根据图形先计算图中共有的小雪花的数量，再减去上面写有此次参会的国家或地区名称的小雪花，即可得答案.

【详解】解：仔细观察图像可知，图中共有小雪花

3×2+4×2+4×2+9×2+10×2＋9×2+6×2+3×2=96（个）

其中有在其中 91 个“小雪花”上面写有此次参会的国家或地区的名称，

∴“小雪花”上面只有中国结图案有 96-91=5（个）

故答案为：5.

【点睛】本题考查了图形的规律，以及有理数的加减运算，解题的关键是仔细看图.

15. 若关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+a^2x-a=0$ 有一个根是 $x=1$，则 $a=$__________.

【答案】-1

【解析】

【分析】根据一元二次方程和一元二次方程根　定义，可得 $a-1+a^2-a=0$，且 $a-1\neq 0$，即可求解.

【详解】解：根据题意得：$a-1+a^2-a=0$，

解得：$a=1$ 或 $a=-1$，

∵ $a-1\neq 0$，即 $a\neq 1$，

∴ $a=-1$.

故答案为：-1.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程和一元二次方程根的定义，熟练掌握含有一个未知数，且未知数的最高次数为 2 的整式方程是一元二次方程是解题的关键.

16. 尊老敬老是中华民族的传统美德，某校文艺社团的同学准备在“五一”假期去一所敬老院进行慰问演出，他们一共准备了 6 个节目，全体演员中有 8 人需参加两个或两个以上的节目演出，情况如下表：

	演员 1	演员 2	演员 3	演员 4	演员 5	演员 6	演员 7	演员 8
节目 A	√		√		√	√		√
节目 B	√		√	√				
节目 C				√		√		√
节目 D		√			√			
节目 E		√					√	
节目 F					√		√	

从演员换装的角度考虑，每位演员不能连续参加两个节目的演出，从节目安排的角度考虑，首尾两个节目分别是 A，F，中间节目的顺序可以调换，请写出一种符合条件的节目先后顺序__________（只需按演出顺序填写中间 4 个节目的字母即可）.

【答案】$EBDC$##$ECDB$

【解析】

【分析】根据题意，可先确定第二个节目为节目 E，继而确定第三个节目和第五个节目的可能性，最后确定了第四个节目，即可得到答案.

【详解】由题意得，首尾两个节目分别是 A，F，节目 A 参演演员有 1、3、5、6、8，节目 F 参演演员有 5、7，

由于从演员换装的角度考虑，每位演员不能连续参加两个节目的演出

故可先确定第二个节目为不含演员 1、3、5、6、8 的节目，即节目 E;

第三个节目为不含 2、7 的节目，即节目 B 或 C

第五个节目为不含 5、7 的节目，即节目 B 或 C

所以，可确定第四个节目为节目 D

综上，演出顺序为节目 $AEBDCF$ 或 $AECDBF$

故答案为：$EBDC$ 或 $ECDB$（写一种即可）.

【点睛】本题考查了统计表、利用信息做出决策或方案，能够正确理解题意是解题的关键.

三、解答题（共 68 分，第 17-21 题，每题 5 分，第 22-24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27，28 题，每题 7 分）

17. 计算：$2\cos 30°+|-\sqrt{3}|-(\pi-\sqrt{3})^0-\sqrt{12}$.

【答案】-1

【解析】

【分析】根据实数的计算，把各个部分的值求出来进行计算即可.

【详解】解：原式=$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}$

=$\sqrt{3}+\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}$

=-1.

【点睛】本题考查了实数的混合运算，准确记忆特殊角的锐角三角函数值、绝对值化简、零指数幂、二次根式的化简是解题的关键.

18. 解不等式组：$\begin{cases} x-3(x-2)\ge 4 \\ x-1<\frac{1+2x}{3} \end{cases}$

【答案】不等式组的解集为 $x\le 1$

【解析】

【分析】先根据不等式的基本性质分别解两个不等式，再确定不等式组的解集即可.

【详解】$\begin{cases} x-3(x-2)\ge 4 ① \\ x-1<\frac{1+2x}{3} ② \end{cases}$

解①得 $x\le 1$

解②得 $x<4$

所以，不等式组的解集为 $x\le 1$.

【点睛】本题考查了解不等式组，根据不等式的基本性质解不等式是解题的关键.

19. 已知 $x^2+x-3=0$，求代数式 $(2x+3)(2x-3)-x(x-3)$ 的值.

【答案】0

【解析】

【分析】根据整式的乘法对代数式进行化简，整体代入即可得到答案.

【详解】解：$(2x+3)(2x-3)-x(x-3)$

$=(2x)^2-3^2-(x^2-3x)$

$=4x^2-9-x^2+3x$

$=3x^2+3x-9$

$=3(x^2+x-3)$

∵ $x^2+x-3=0$

∴原式=0

即代数式 $(2x+3)(2x-3)-x(x-3)$ 的值为 0.

【点睛】本题考查整式的化简求值，根据整式的运算法则和乘法公式进行准确计算是解题的关键.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-ax+a-1=0$.

（1）求证：该方程总有两个实数根；

（2）若该方程的两个实数根都是整数，且其中一个根是另一个根的 2 倍，求 a 的值.

【答案】（1）见解析　（2）a 的值为 3

【解析】

【分析】（1）根据一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(\mathrm{a}\neq 0)$，根的判别式为△=$\triangle=b^2-4ac$，进行化简即可证明；

（2）根据根与系数的关系，以及根的倍数关系，列方程，解方程可得答案.

【小问 1 详解】

证明：�$=\left(-a\right)^2-4\left(a-1\right)=a^2-4a+4=\left(a-2\right)^2$，

∵ $\left(a-2\right)^2\geq 0$，

∴该方程总有两个实数根.

【小问 2 详解】

解：设该方程的一个根为 x_1，则另外一个根为 2 x_1，

则$\begin{cases} x_1+2x_1=a① \\ 2x_1^{\ 2}=a-1② \end{cases}$，

由①得 $x_1=\dfrac{a}{3}$，

代入②可得：$2a^2-9a+9=0$，

解之得 $a_1=3$，$a_2=\dfrac{3}{2}$，

又因为该方程的两个实数根都是整数，

所以 $a=3$．

【点睛】本题考查一元二次方程根的判别式，根与系数的关系，根据题意，灵活运用所学知识是解题的关键.

21. 中国古代数学家李子金在《几何易简集》中记载了圆内接正三角形的一种作法："以半径为度，任用圆界一点为心，作两圆相交，又移一心，以交线为界，再作一交圆，其三线相交处为一角，其两线相交处为两角，直线界之亦得所求".

由记载可得作法如下：

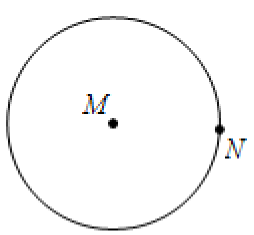
①作$\odot M$，在$\odot M$上取一点 N，以点 N 为圆心，MN 为半径作$\odot N$，两圆相交于 A，B 两点，连接 AB；

②以点 B 为圆心，AB 为半径作$\odot B$，与$\odot M$ 相交于点 C，与$\odot N$ 相交于点 D;

③连接 AC，AD，BC，BD．

$\triangle ABC$，$\triangle ABD$ 都　圆内接正三角形.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；



（2）完成下面的证明，

证明：连接 AM， AN， MN， BM .

∵ $MA = MN = NA$，

∴ $\triangle AMN$ 为①________.

∴ $\angle AMN = 60^\circ$.

同理可得， $\angle BMN = 60^\circ$.

∴ $\angle AMB = 120^\circ$.

∴ $\angle ACB = 60^\circ$（②____________）（填推理的依据）.

∵ $BA = BC$，

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

同理可得， $\triangle ABD$ 是等边三角形.

【答案】（1）见解析　（2）①等边三角形，②同弧上的圆周角等于圆心角的一半

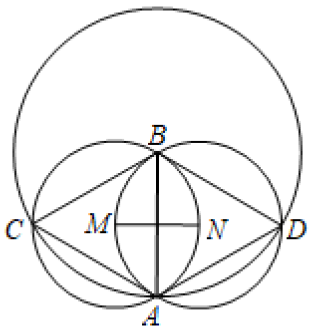
【解析】

【分析】(1)按照作图的基本步骤规范画图即可.

(2)根据圆的性质，等边三角形的判定解答.

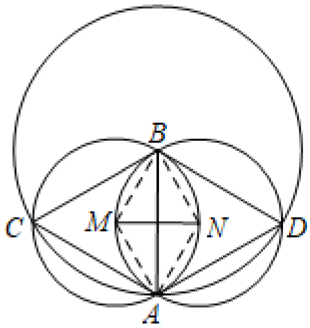
【小问 1 详解】

根据作步骤，画图如下：



【小问 2 详解】

证明：如图，连接 AM， AN， MN， BM .



$\because MA = MN = NA$，

$\therefore \triangle AMN$ 为等边三角形.

$\therefore \angle AMN = 60^\circ$.

同理可得，$\angle BMN = 60^\circ$.

$\therefore \angle AMB = 120^\circ$.

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$（同弧上的圆周角等于圆心角的一半）（填推理的依据）.

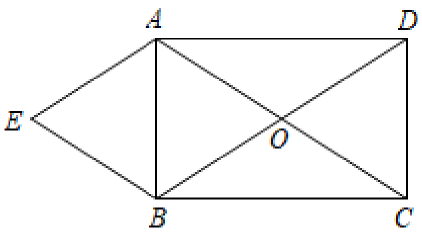
$\because BA = BC$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

同理可得，$\triangle ABD$ 是等边三角形.

【点睛】本题考查了圆的基本作图，等边三角形的判定，圆周角定理，熟练掌握等边三角形的判定，灵活运用圆周角定理是解题的关键.

22. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，AC，BD 相交于点 O，$AE//BD$，$BE//AC$.



（1）求证：四边形 $AEBO$ 是菱形；

（2）若 $AB = OB = 2$，求四边形 $AEBO$ 的面积.

【答案】（1）见解析　（2）$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1)根据矩形的性质得出 $OA=OB$，进而利用菱形的判定解答即可；

(2)根据菱形的性质及面积公式，解直角三角形即可求得.

【小问 1 详解】

证明：$\because AE//BD$，$BE//AC$

$\therefore$ 四边形 $AEBO$ 是平行四边形

又$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

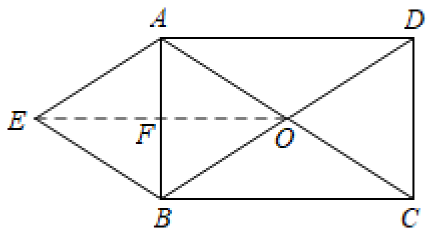
$\therefore BD=AC$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$

$\therefore AO=BO$

$\therefore$ 四边形 $AEBO$ 是菱形

【小问 2 详解】

解：如图：连接 EO，交 AB 于点 F



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

$\therefore BD=AC$，$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$

$\therefore AO=BO$

又$\because AB=OB=2$

$\therefore AB=OB=OA=2$

$\therefore \triangle ABO$ 是等边三角形，$\angle BAO=60°$

$\because$ 四边形 $AEBO$ 是菱形

$\therefore AB\perp EO$，$EF=OF$

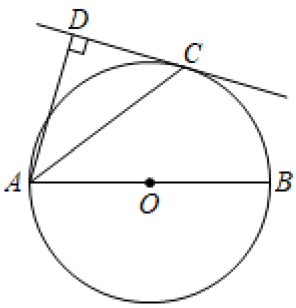
$\therefore EO=2OF=2OA\cdot\sin 60^\circ=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\therefore$ 四边形 $AEBO$ 的面积为：

$\frac{1}{2}EO\cdot AB=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$

【点睛】本题考查了矩形的性质，菱形的判定与性质，等边三角形的判定与性质，解直角三角形，作出辅助线是解决本题的关键.

23. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，C 为 $\odot O$ 上一点，AD 和过点 C 的切线互相垂直，垂足为 D.



（1）求证：AC 平分 $\angle DAB$；

（2）若 $\cos\angle CAD=\frac{4}{5}$，$AB=5$，求 CD 的长.

【答案】（1）证明见详解

（2）$\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】（1）连接 OC，可证明 $OC//AD$，推导出 $\angle OCA=\angle CAD$，又因为 $OA=OC$，可得 $\angle OCA=\angle OAC$，即可证明 $\angle CAD=\angle OAC$，即 AC 平分 $\angle DAB$；

（2）连接 BC，由 AB 为 $\odot O$ 的直径可证明 $\angle ACB=90^\circ$，由（1）可知 $\angle CAD=\angle OAC$，利用三角函数分别解 $Rt\triangle ABC$、$Rt\triangle ADC$，解得 AC、AD 长度，再由勾股定理计算 CD 的长即可.

【小问 1 详解】

证明：如图 1，连接 OC，

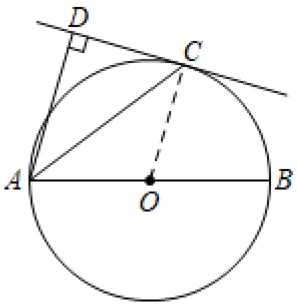


图1

∵CD为⊙O切线，

∴$OC \perp CD$，

∵ $AD \perp CD$，

∴$OC // AD$，

∴$\angle OCA = \angle CAD$，

又∵$OA = OC$，

∴$\angle OCA = \angle OAC$，

∴$\angle CAD = \angle OAC$，即AC平分$\angle DAB$；

【小问2详解】

解：如图2，连接BC，

∵ AB为⊙O的直径，

∴$\angle ACB = 90^\circ$，

∵ $\angle CAD = \angle OAC$，

∴$\cos\angle OAC = \frac{AC}{AB} = \cos\angle CAD$，即$\frac{AC}{5} = \frac{4}{5}$，

解得$AC = 4$，

∵$\cos\angle CAD = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{5}$，

∴$AD = \frac{4}{5}AC = \frac{4}{5} \times 4 = \frac{16}{5}$，

$\therefore CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{4^2-(\frac{16}{5})^2}=\frac{12}{5}$.

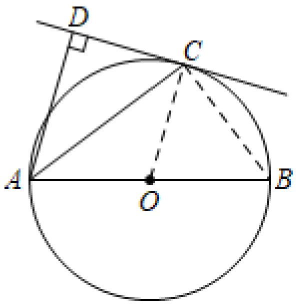


图2

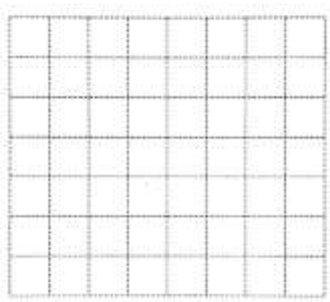
【点睛】本题主要考查了切线的性质、圆周角定理、三角函数解直角三角形以及勾股定理等知识，正确作出辅助线是解题关键.

24. 某公园在人工湖里建造一道喷泉拱门，工人在垂直于湖面的立柱上安装喷头，从喷头喷出的水柱的形状可以看作是抛物线的一部分．安装后，通过测量获得如下数据，喷头高出湖面 3 米，在距立柱水平距离为 d 米的地点，水柱距离湖面高度为 h 米.

d（米）	0.50	1.00	1.5	2.00	2.50	3.00
h（米）	3.75	4.00	3.75	3.00	1.75	0

请解决以下问题：

（1）在网格中建立适当的平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；



（2）结合表中所给数据或所画图象，直接写出水柱最高点距离湖面的高度；

（3）求 h 关于 d 的函数表达式；

（4）公园希望游船能从喷泉拱门下穿过，已知游船的宽度约为 2 米，游船的平顶棚到湖面的高度约为 1 米，从安全的角度考虑，要求游船到立柱的水平距离不小于 1 米，顶棚到水柱的竖直距离也不小于 1 米，工人想只通过调整喷头距离湖面的高度（不考虑其他因素）就能满足上述要求，请通过计算说明应如何调整.

【答案】（1）图见解析；

（2）4 米　（3）h=-d^2+2d+3

（4）水枪高度调节到 5 米以上

【解析】

【分析】（1）建立坐标系，描点，用平滑的曲线连线即可；

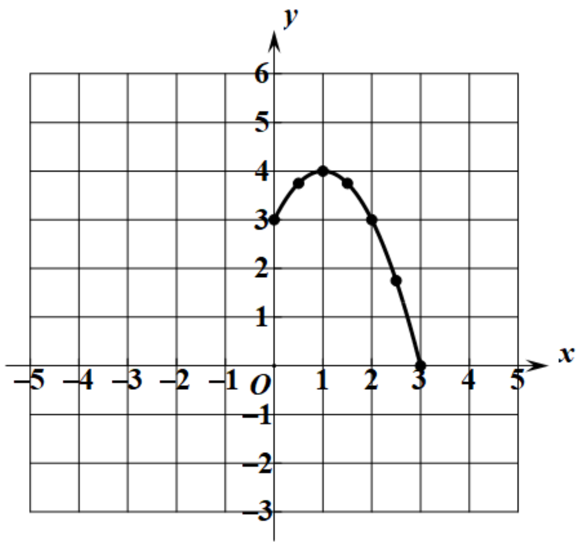
（2）结合图象，得出最高点坐标为（1，4），进而得出结论；

（3）利用顶点式 h=a(d-1)^2+4 和点（3，0）即可求出 h 关于 d 的函数表达式；

（4）设平移后的解析式为 h_1=-d^2+2d+3+m，根据题意求解即可.

【小问 1 详解】

解：如图所示



【小问 2 详解】

解：由图象得，

最高点坐标为（1，4），

∴水柱最高点距离湖面的高度为 4 米；

【小问 3 详解】

解：由题意，得

设顶点式为 h=a(d-1)^2+4，

又图象过点（3，0），

∴a(3-1)^2+4=0，

解得 a=-1，

∴函数解析式 $h=-(d-1)^2+4=-d^2+2d+3$；

【小问 4 详解】

解：设水枪高度向上调整 m 米时，游船恰好能从喷泉拱门下穿过，

则平移后的解析式为 $h_1=-d^2+2d+3+m$，

当横坐标为 1+2=3 时，纵坐标的值大于等于 1+1=2，

∴$-3^2+6+3+m\geq 2$，

解得 $m\geq 2$，

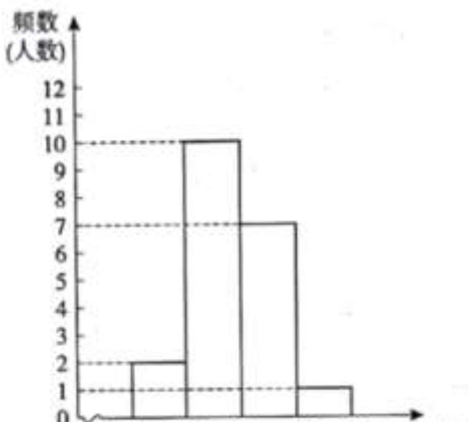
∴水枪高度至少向上调整 2 米，

∴水枪高度调节到 5 米以上.

【点睛】本题考查二次函数喷泉的应用，二次函数解析式，二次函数图象的平移，解题的关键在于熟练掌握二次函数的图象建立二次函数模型.

25. 某校初三年级有两个校区，其中甲校区有 200 名学生，乙校区有 300 名学生，两个校区所有学生都参加了一次环保知识竞赛，为了解两个校区学生的答题情况，进行了抽样调查，从甲、乙两个校区各随机抽取 20 名学生，对他们本次环保知识竞赛的成绩（百分制）进行了整理、描述和分析．下面给出了部分信息.

a．甲校区成绩的频数分布直方图如下（数据分成 4 组：$60\leq x<70$，$70\leq x<80$，$80\leq x<90$，$90\leq x\leq 100$）；



b．甲校区成绩在 $70\leq x<80$ 这一组的是：

74　74　75　77　77　77　77　78　79　79

c．甲、乙两校区成绩的平均数、中位数如下：

	平均数	中位数
甲校区	79.5	m
乙校区	77	81.5

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m 的值；

（2）两个校区分别对本次抽取的学生的成绩进行等级赋分，超过本校区的平均分就可以赋予等级 A，判断在本次抽取的学生中哪个校区赋予等级 A 的学生更多，并说明理由；

（3）估计该校初三年级所有学生本次环保知识竞赛的平均分为__________（直接写出结果）.

【答案】（1）78.5

（2）乙校区赋予等级 A 的学生更多，理由见解析

（3）78

【解析】

【分析】（1）根据中位数的定义，将甲校区同学的成绩按从小到大顺序排序，找到第 10、第 11 位的成绩，取平均值即可；

（2）根据两个校区成绩的中位数和平均数，求出成绩超过平均数的人数，进行比较即可；

（3）利用抽样调查学生的平均数估计总体学生的平均数即可求出答案.

【小问 1 详解】

解：甲校区成绩的中位数 $m=\dfrac{78+79}{2}=78.5$.

【小问 2 详解】

解：乙校区赋予等级 A 的学生更多，理由如下：

甲校区成绩的平均数是 79.5，第 12 位的成绩是 79，$80\le x<90$ 之间有 7 人，$90\le x\le 100$ 之间有 1 人，可知成绩超过平均数的学生有 8 人，即赋予等级 A 的学生有 8 人；

乙校区成绩的平均数是 77，中位数是 81.5，可知成绩超过平均数的学生至少有 10 人，即赋予等级 A 的学生至少有 10 人；

所以乙校区赋予等级 A 的学生更多.

【小问 3 详解】

解：估计甲校区 200 名学生成绩的平均数为 79.5，乙校区 300 名学生成绩的平均数为 77，

因此估计该校初三年级所有学生本次环保知识竞赛的平均分为 $\frac{79.5\times200+77\times300}{200+300}=78$，

故答案为：78．

【点睛】本题考查抽样调查的相关知识，熟练掌握平均数、中位数的定义以及利用样本估计总体的思想是解决问题的关键．

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(-2,0),\left(-1,y_1\right),\left(1,y_2\right),\left(2,y_3\right)$ 在抛物线 $y=x^2+bx+c$ 上．

（1）若 $y_1=y_2$，求 y_3 的值；

（2）若 $y_2<y_1<y_3$，求 y_3 值的取值范围．

【答案】（1）0　（2）$-4<y_3<0$

【解析】

【分析】（1）将 $\left(-1,y_1\right)$ 和 $\left(1,y_2\right)$ 分别代入函数解析式，根据 $y_1=y_2$，可解出 b 的值，再将 $(-2,0)$ 代入函数解析式，可解出 c 的值；

（2）若 $y_2<y_1<y_3$，由于函数图像开口向上，函数值越小离对称轴越近，函数值越大离对称轴越远，结合二次函数对称性可判断出对称轴 $\frac{b}{2}$ 的取值范围，把点 $(-2,0)$ 带入 $y=x^2+bx+c$ 中求出 $c=2b-4$，进而可求出 y_3 值的取值范围．

【小问 1 详解】

解：将 $\left(-1,y_1\right)$ 和 $\left(1,y_2\right)$ 分别代入解析式 $y=x^2+bx+c$，

得 $y_1=(-1)^2-b+c=1-b+c$，

$y_2=1^2+b+c=1+b+c$，

$\because y_1=y_2$，

$\therefore 1-b+c=1+b+c$，

解得 $b=0$，

把点$(-2,0)$带入$y=x^2+c$中，

得$0=(-2)^2+c$，

解得$c=-4$，

$\therefore$函数解析式为$y=x^2-4$

当$x=2$，

$y_3=2^2-4=0$；

小问2详解】

解：，$\because y=x^2+bx+c$中，$\boldsymbol{a=1>0}$，

$\therefore$函数图像开口向上，

又$\because y_2<y_1<y_3$

$\because \frac{-1+1}{2}=0$，$\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore 0<-\frac{b}{2}<\frac{1}{2}$，

解得$-1<b<0$，

把点$(-2,0)$带入$y=x^2+bx+c$中，

得$4-2b+c=0$，

$\therefore c=2b-4$，

将$\left(2,y_3\right)$代入解析式$y=x^2+bx+c$，

得$y_3=4+2b+c$，

$\because c=2b-4$，

$\therefore y_3=4+4b-4=4b$，

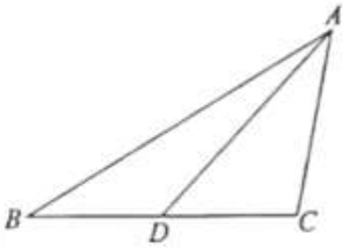
$\because -1<b<0$，

$\therefore -4<4b<0$，

即 $-4<y_3<0$.

【点睛】本题主要考查了待定系数法求二次函数解析式和二次函数图像的性质，牢固掌握以上知识点并学会数形结合是做出本题的关键.

27. 在$\triangle ABC$中，D是BC的中点，且$\angle BAD\neq 90°$，将线段AB沿AD所在直线翻折，得到线段AB'，作$CE\parallel AB$交直线AB'于点E.



（1）如图，若$AB>AC$，

①依题意补全图形；

②用等式表示线段AB,AE,CE之间的数量关系，并证明；

（2）若$AB<AC$，上述结论是否仍然成立？若成立，简述理由：若不成立，直接用等式表示线段AB,AE,CE之间新的数量关系（不需证明）.

【答案】（1）①见解析；②$AB=AE+CE$，理由见解析

（2）不成立，$AB=AE-CE$

【解析】

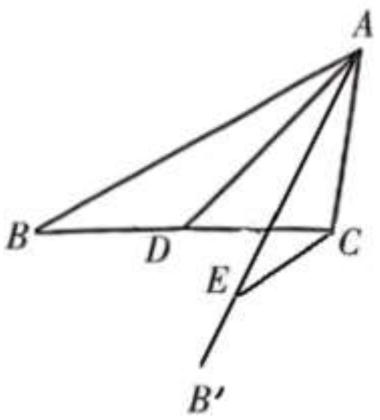
【分析】（1）①根据题意作图即可；

②连接，由折叠的性质可证，推出，再由平行线的性质及等腰直角三角形的性质得出，即可推出答案；

（2）连接，由折叠的性质可证，推出，再由平行线的性质及等腰直角三角形的性质得出，即可推出答案.

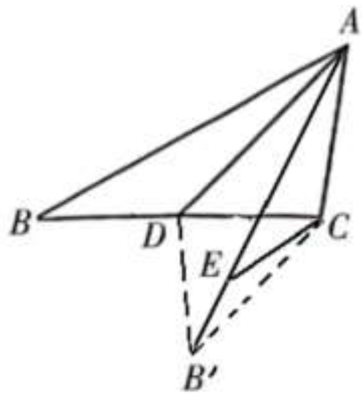
【小问1详解】

①补全图形如图所示：



② $AB = AE + CE$ ，理由如下：

如图，连接 $B'D$，$B'C$ ，



$\because$ 将线段 AB 沿 AD 所在直线翻折，得到线段 AB'，

$\therefore AB' = AB, \angle B'AD = \angle BAD$ ，

又$\because$ $AD = AD$ ，

$\therefore \Delta B'AD \cong \Delta BAD(\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle AB'D = \angle ABD, B'D = BD$,

$\because CE \mathbin{/\mkern-6mu/} AB$ ，

$\therefore \angle BCE = \angle ABD$,

$\therefore \angle AB'D = \angle BCE$,

$\because$ D 是 BC 的中点，

$\therefore BD = CD$ ，

$\therefore B'D = CD$ ，

$\therefore \angle DB'C=\angle DCB'$，

即 $\angle AB'D+\angle EB'C=\angle BCE+\angle ECB'$，

$\therefore \angle EB'C=\angle ECB'$，

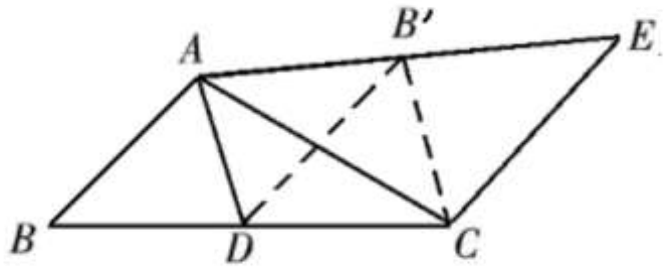
$\therefore B'E=CE$ ，

$\therefore AB'=AE+B'E=AE+CE$ ，

$\therefore AB=AB'=AE+CE$ ；

【小问 2 详解】

不成立， $AB=AE-CE$，理由如下：



如图，连接 $B'D$，$B'C$，

$\because$ 将线段 AB 沿 AD 所在直线翻折，得到线段 AB'，

$\therefore AB'=AB,\angle B'AD=\angle BAD$ ，

又$\because AD=AD$ ，

$\therefore \Delta B'AD\cong\Delta BAD(\mathrm{SAS})$ ，

$\therefore \angle AB'D=\angle ABD,B'D=BD$，

$\because$ D 是 BC 的中点，

$\therefore BD=CD$ ，

$\therefore B'D=CD$，

$\therefore \angle DB'C=\angle DCB'$，

$\because CE /\!/ AB$ ，

$\therefore \angle DCE+\angle ABD=180^{\circ}$，

即 $\angle ABD+\angle DCB'+\angle ECB'=180^\circ$，

$\because \angle AB'D+\angle DB'C+\angle EB'C=180^\circ$，

$\therefore \angle AB'D+\angle DB'C+\angle EB'C=180^\circ=\angle ABD+\angle DCB'+\angle ECB'$，

$\because \angle DCB'=\angle DB'C$，

$\therefore \angle ECB'=\angle EB'C$，

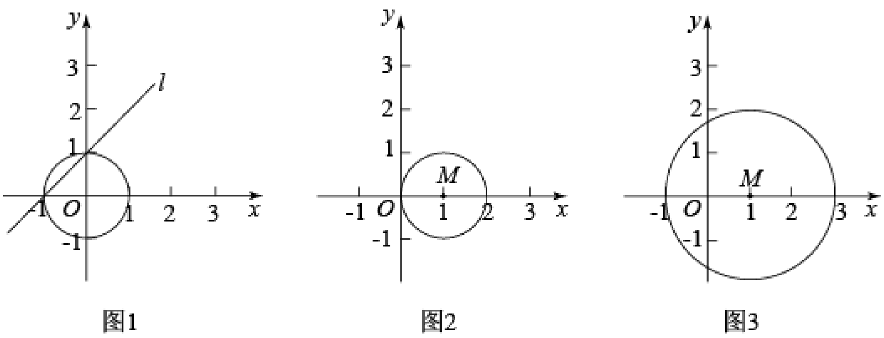
$\therefore B'E=CE$ ，

$\therefore AB'=AE-B'E=AE-CE$ ，

$\therefore AB=AB'=AE-CE$.

【点睛】本题考查了折叠的性质，平行线的性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，熟练掌握并灵活运用上述知识点是解题的关键.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于直线 $l: y\equiv kx+b$ ，给出如下定义：若直线 l 与某个圆相交，则两个交点之间的距离称为直线 l 关于该圆的“圆截距”.



（1）如图 1，$\odot O$ 的半径为 1，当 $k=1, b=1$ 时，直接写出直线 l 关于 $\odot O$ 的“圆截距”；

（2）点 M 的坐标为 $(1,0)$，

①如图 2，若 $\odot M$ 的半径为 1，当 $b=1$ 时，直线 l 关于 $\odot M$ 的“圆截距”小于 $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$，求 k 的取值范围；

②如图 3，若 $\odot M$ 的半径为 2，当 k 的取值在实数范围内变化时，直线 l 关于 $\odot M$ 的“圆截距”的最小值为 2，直接写出 b 的值.

【答案】（1）$\sqrt{2}$

（2）①$k<-2$ 或 $-\frac{1}{2}<k\leqslant 0$ ②$-3\sqrt{3}\leq b\leq 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1)直线与圆的交点分别为 $A(0，1)$和 $B(-1，0)$，则 $OA=OB=1$，根据勾股定理计算即可.

(2) ① 根据圆的垂径定理，确定弦长为$\frac{4}{5}\sqrt{5}$时，弦的位置，注意分类，确定直线的解析式，根据直线的增减性，确定 k 的范围.

②分最短弦长 2 的弦在 x 轴上方和下方，两种情形求解.

【小问 1 详解】

解：如图 1，∵ $k=1, b=1$，

∴直线 l 的解析式为 $y=x+1$，

∴直线与 y 轴的交点为 $A(0，1)$，与 x 轴的交点为 $B(-1，0)$，

∵ ⊙O 的半径为 1，

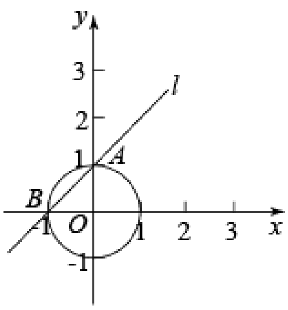


图1

∴圆 O 与 y 轴的正半轴交点为 $A(0，1)$，与 x 轴的负半轴交点为 $B(-1，0)$，

∴直线 l 关于该圆的"圆截距"为 AB，

∵$OA=OB=1$，

∴$AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

【小问 2 详解】

①如图 2，设直线与 y 轴正半轴交点为 A，且 $A(0，1)$

∵点 M 的坐标为$(1,0)$，⊙M 的半径为 1，

∴圆与 x 轴正半轴交点为 $B(2，0)$，

当 $b=1$时，直线 l 的解析式为 $y=kx+1$，

当直线经过点 B 时，$2k+1=0$，

解得 $k=-\frac{1}{2}$；

过点 M 作 $MF\perp AB$，垂足为 F，

∵$OA=1$，$OB=2$，

∴$AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，

∴$\sin\angle ABO=\frac{OA}{AB}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∵$MB=1$，$\sin\angle ABO=\frac{MF}{MB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴ $MF=\frac{\sqrt{5}}{5}$， $BF=\sqrt{1^2-(\frac{\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

设直线 AB 与圆 M 的另一个交点为 C，

则 $BC=2BF=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

∵关于$\odot M$ 的“圆截距”小于$\frac{4}{5}\sqrt{5}$，

∴k 的取值范围是$-\frac{1}{2}<k\leqslant 0$；

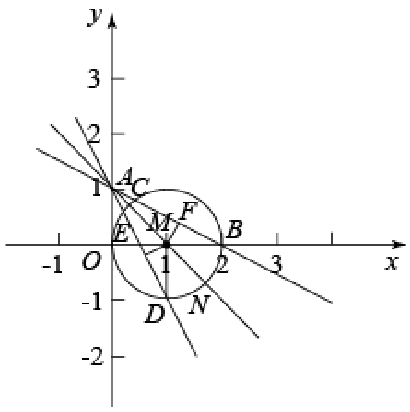


图2

设直线 AM 与圆的一个交点为 N，

∵点 $A(0，1)$，点 M 的坐标为 $(1,0)$，

∴$OA=OM$，

∴$\angle AMO=45°$，

∴$\angle BMN=45°$，

根据圆的对称性，直线 AB 和直线 AD 关于直线 AN 对称，此时 $ED=CB$，

∴$\angle DMN=45°$，

∴$\angle DMB=90°$，

∴D 的坐标为$(1，-1)$，

∴$k+1=-1$，

解得 $k=-2$，

直线 AD 的解析式为 $y=-2x+1$，

∵关于$\odot M$ 的"圆截距"小于 $\frac{4}{5}\sqrt{5}$，

∴k 的取值范围是 $k<-2$；

综上所述，k 的取值范围是 $k<-2$ 或 $-\frac{1}{2}<k\leqslant 0$．

②如图 3，设圆 M 与 x 轴的正半轴交点为 A,

当 $AF=2$ 时，作直线 AB 交 y 轴的正半轴于点 B，此时 b 的值最大，

过点 M 作 $MD\perp AB$，垂足为 D，

$\because AF=2$，

$\therefore AD=1$，

$\because MA=2$，

$\therefore \angle DMA=30°$，$\angle BAO=60°$，

$\because OA=3$，$tan\angle BAO=\dfrac{OB}{OA}$，

$\therefore OB=OAtan60°=3\sqrt{3}$，

此时 b 的最大值为 $3\sqrt{3}$；

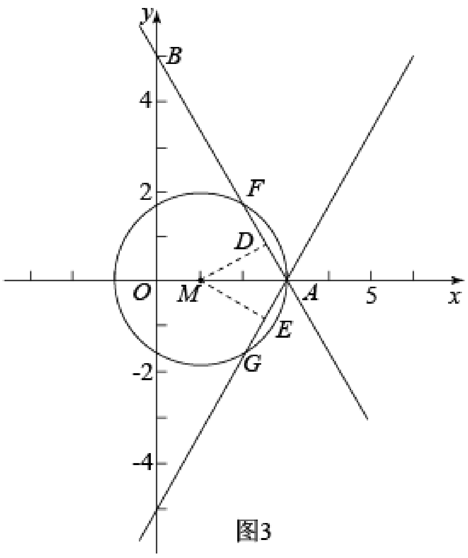


图3

设圆 M 与 x 轴的正半轴交点为 A,

当 $AF=2$ 时，作直线 AC 交 y 轴的负半轴于点 C，此时 b 的值最小，

过点 M 作 $ME\perp AC$，垂足为 E，

$\because AG=2$，

$\therefore AE=1$，

$\because MA=2$，

$\therefore \angle EMA=30°$，$\angle CAO=60°$，

$\because OA=3$，$tan\angle CAO=\dfrac{OC}{OA}$，

$\therefore OC=OAtan60°=3\sqrt{3}$，

此时 b 的最小值为$-3\sqrt{3}$；

故 b 的取值范围$-3\sqrt{3}\leq b\leq 3\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了了垂径定理，一次函数的解析式和性质，特殊角的三角函数值，勾股定理，熟练掌握圆的性质，灵活运用特殊角的三角函数值是解题的关键.