

2021 北京延庆初三一模

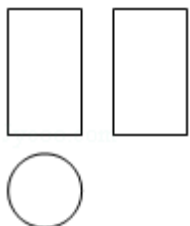
数 学

一、选择题：（共 8 个小题，每小题 2 分，共 16 分）下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的。

1. (2 分) 中国财政部 2021 年 3 月 18 日发布数据显示，前 2 个月，全国一般公共预算收入约为 41800 亿元，将 41800 用科学记数法表示应为()

- A. 0.418×10^6 B. 4.18×10^5 C. 4.18×10^4 D. 41.8×10^3

2. (2 分) 如图是某几何体的三视图，该几何体是()



- A. 正方体 B. 圆锥 C. 四棱柱 D. 圆柱

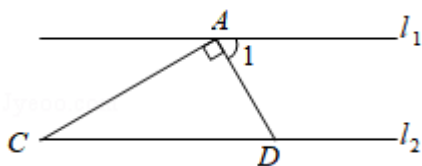
3. (2 分) 正五边形的外角和为()

- A. 180° B. 360° C. 540° D. 720°

4. (2 分) 下列给出的等边三角形、圆、平行四边形、矩形中是轴对称图形而不是中心对称图形的是()



5. (2 分) 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ，点 A, C, D 分别是 l_1, l_2 上的点，且 $CA \perp AD$ 于点 A ，若 $\angle ACD = 30^\circ$ ，则 $\angle 1$ 度数为()

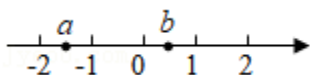


- A. 30° B. 50° C. 60° D. 70°

6. (2 分) 一个不透明的盒子中装有 4 个除颜色外都相同的小球，其中 3 个是白球，1 个是红球，从中随机同时摸出两个小球，那么摸出小球的颜色不同的概率为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

7. (2 分) 如图，数轴上两点 A, B 所对应的实数分别为 a, b ，则 $b - a$ 的结果可能是()



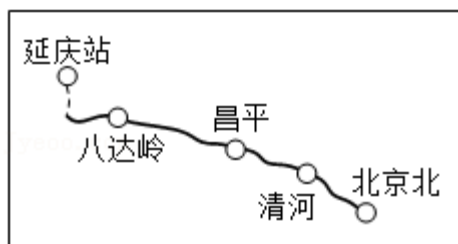
A. 3

B. 2

C. 1

D. -1

8. (2分) 2020年12月1日下午6点,京张高铁延庆线正式启用,“复兴号”列车在北京北站与延庆站之间往返,途经清河站、昌平站、八达岭站、如图是从北京北站到延庆站的线路图,其中延庆站到八达岭站,全长9.33公里、某天“复兴号”列车从八达岭站出发,终点为北京北.列车始终以每小时160公里的速度匀速行驶,那么在到达昌平站之前,“复兴号”列车到延庆站的距离与对应的行驶的时间满足的函数关系是()



A. 正比例函数关系

B. 反比例函数关系

C. 一次函数关系

D. 二次函数关系

二、填空题(共8个小题,每题2分,共16分)

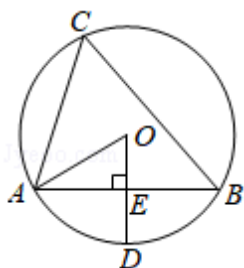
9. (2分) 在函数 $y = \sqrt{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 ____.

10. (2分) 方程组 $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解为 ____.

11. (2分) 分解因式: $a^3 - 2a^2 + a =$ ____.

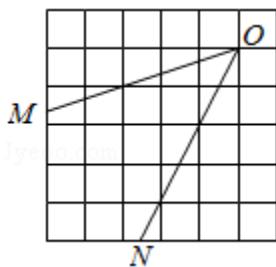
12. (2分) 请写出一个大于1且小于2的无理数 ____.

13. (2分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, C 是 $\odot O$ 上的一点, 且 $\angle ACB = 60^\circ$, $OD \perp AB$ 于点 E , 交 $\odot O$ 于点 D . 若 $\odot O$ 的半径为6, 则弦 AB 的长为 ____.



14. (2分) 如果 $a+2b=-1$ 时, 那么代数式 $(\frac{4b}{a-2b} + 2) \cdot \frac{a^2 - 4b^2}{a}$ 的值 ____.

15. (2分) 如图所示, $\angle MON$ 是放置在正方形网格中的一个角, 则 $\tan \angle MON$ 的值是 ____.



16. (2分) 把图1中边长为10的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形, 且此菱形的一条对角线长为16, 将这四个直角三角形拼成如图2所示的正方形, 则图2中的阴影的面积为 ____.

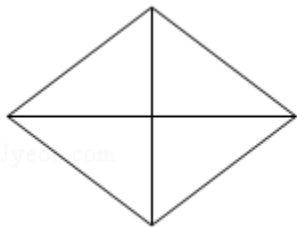


图 1

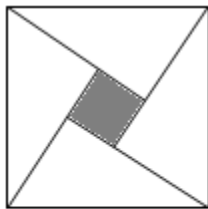


图 2

三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22-24 题，每小题 5 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每小题 5 分）

17. (5 分) 计算： $(\frac{1}{3})^{-1} - 4\sin 60^\circ + \sqrt{12} - (\sqrt{3} - 2)^0$.

18. (5 分) 解不等式组：
$$\begin{cases} 2(x+1) \geq 3x-5 \\ \frac{4x+1}{3} > x \end{cases}$$
.

19. (5 分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + 3m - 2 = 0$ 有实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 m 为正整数，求出此时方程的根.

20. (5 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$.

求作：线段 CD ，使得点 D 在线段 AB 上，且 $CD = \frac{1}{2}AB$.

作法：①分别以点 A ， B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径作弧，两弧相交于点 M ， N 两点；

②作直线 MN ，交 AB 于点 D ；

③连接 CD .

所以线段 CD 即为所求的线段.

(1) 使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

(2) 完成下面的证明.

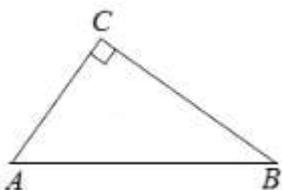
证明： $\because AM = BM$ ， $AN = BN$ ，

$\therefore MN$ 是 AB 的垂直平分线(____). (填推理的依据)

\therefore 点 D 是 AB 的中点.

$\because \angle C = 90^\circ$

$\therefore CD = \frac{1}{2}AB$ (____). (填推理的依据)



21. (5 分) 小林和小明在信息技术课上设计了一个小游戏程序：开始时两人的屏幕上显示的数分别是 9 和 4，如图，每按一次屏幕，小林的屏幕上的数就会加上 a^2 ，同时小明的屏幕上的数就会减去 $2a$ ，且均显示化简后的结果。如表就是按一次后及两次后屏幕显示的结果。

	开始数	按一次后	按两次后	按三次后	按四次后
小林	9	$9+a^2$	$9+2a^2$		
小明	4	$4-2a$	$4-4a$		

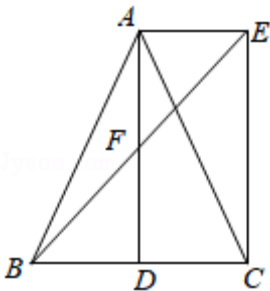
根据以上的信息回答问题：从开始起按 4 次后，

- (1) 两人屏幕上显示的结果是：小林____；小明____；
 (2) 判断这两个结果的大小，并说明理由。



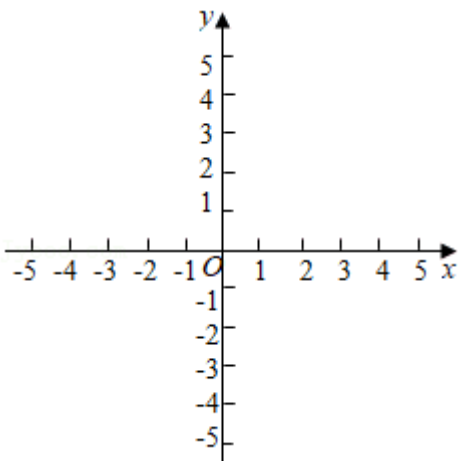
22. (6 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为 D ，过点 A 作 $AE \parallel BC$ ，且 $AE=BD$ ，连接 BE ，交 AD 于点 F ，连接 CE 。

- (1) 求证：四边形 $ADCE$ 为矩形；
 (2) 若 $CE=4$ ，求 AF 的长。



23. (6 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 由函数 $y=x$ 平移得到，且与函数 $y=\frac{3}{x}(x>0)$ 的图象交于点 $A(3,m)$ 。

- (1) 求一次函数的表达式；
 (2) 已知点 $P(n, 0)(n>0)$ ，过点 P 作平行于 y 轴的直线，交直线 $y=kx+b(k \neq 0)$ 于点 $M(x_1, y_1)$ ，交函数 $y=\frac{3}{x}(x>0)$ 的图象于点 $N(x_2, y_2)$ 。当 $y_1 < y_2$ 时，直接写出 n 的取值范围。

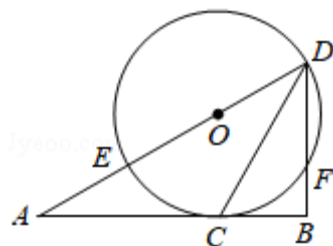


24. (6 分) 如图， DE 是 $\odot O$ 的直径， CA 为 $\odot O$ 的切线，切点为 C ，交 DE 的延长线于点 A ，点 F 是 $\odot O$ 上的一点，

且点 C 是弧 EF 的中点，连接 DF 并延长交 AC 的延长线于点 B 。

(1) 求证： $\angle ABD = 90^\circ$ ；

(2) 若 $BD = 3$ ， $\tan \angle DAB = \frac{3}{4}$ ，求 $\odot O$ 的半径。



25. (5 分) 在世园会开幕一周年之际，延庆区围绕“践行‘两山’理论，聚力冬奥筹办，建设美丽延庆”主题，同筑生态文明。近年来，在延庆区政府的积极治理下，空气质量得到极大改善。如图是根据延庆区环境保护局公布的 2014~2020 年各年的全年空气质量优良天数绘制的折线统计图。

请结合统计图解答下列问题：

(1) 2020 年比 2016 年的全年空气质量优良天数增加了 ____ 天；

(2) 这七年的全年空气质量优良天数的中位数是 ____；

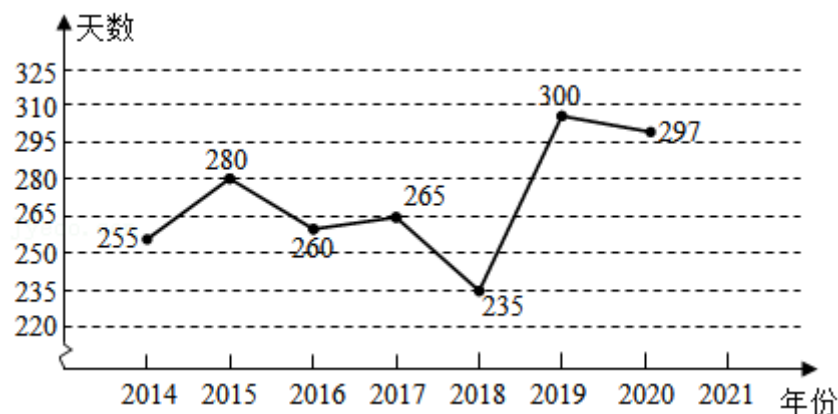
(3) 在生态环境部 2 月 25 日举行的例行新闻发布会上透露，“十四五”空气质量改善目标指标设置仍然坚持 $PM_{2.5}$ 和优良天数两个指标；其中，全国优良天数达标指标将提升至 87.5%。

截止到 3 月 31 日，延庆区 2021 年空气质量优良天数如下：

月份	1 月 (31 天)	2 月 (28 天)	3 月 (31 天)
优良天数 / 天	28	25	28

①该小区 2021 年 1 月 1 日至 3 月 31 日的空气质量优良天数的平均数约为 ____。

②试根据以上信息预测延庆区 2021 年（共 365 天）全年空气质量优良天数能否达标？达标的天数约为多少天？



26. (6 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: y = -2x + 6$ 与 y 轴交于点 A ，与 x 轴交于点 B ，二次函数的图象过 A ， B 两点，且与 x 轴的另一交点为点 C ， $BC = 2$ ；

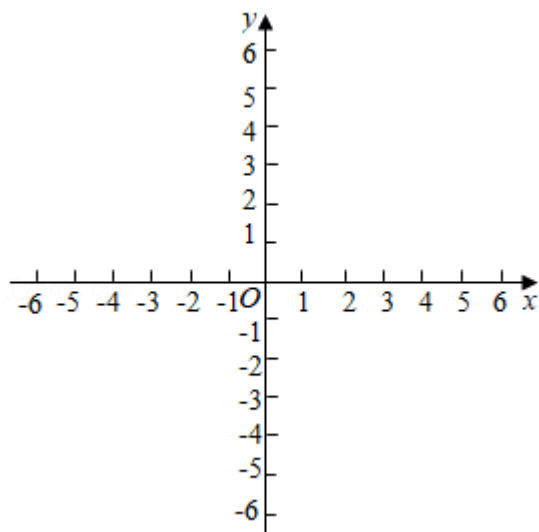
(1) 求点 C 的坐标；

(2) 对于该二次函数图象上的任意两点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ ，当 $x_1 > x_2 > 2$ 时，总有 $y_1 > y_2$ 。

①求二次函数的表达式；

②设点 A 在抛物线上的对称点为点 D ，记抛物线在 C ， D 之间的部分为图象 G （包含 C ， D 两点）。若一次函数

$y = kx - 2 (k \neq 0)$ 的图象与图象 G 有公共点，结合函数图象，求 k 的取值范围.



27. (7 分) 在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在射线 BC 上（不与点 B 、 C 重合），连接 DB ， DE ，将 DE 绕点 E 逆时针旋转 90° 得到 EF ，连接 BF 。

(1) 如图 1，点 E 在 BC 边上.

①依题意补全图 1；

②若 $AB = 6$ ， $EC = 2$ ，求 BF 的长；

(2) 如图 2，点 E 在 BC 边的延长线上，用等式表示线段 BD ， BE ， BF 之间的数量关

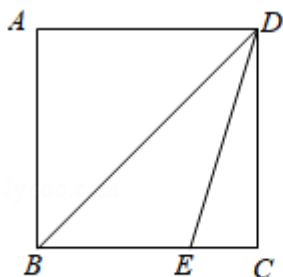


图 1

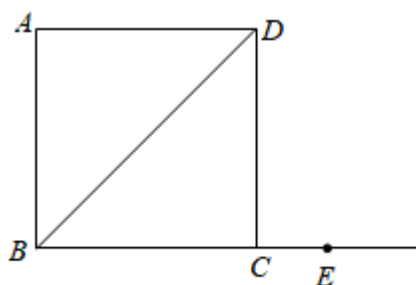


图 2

系.

28. (7 分) 规定如下：图形 M 与图形 N 恰有两个公共点（这两个公共点不重合），则称图形 M 与图形 N 是和谐图形.

(1) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $\odot O$ 的半径为 2，若直线 $x = k$ 与 $\odot O$ 是和谐图形，请你写出一个满足条件的 k 值，即 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(t, 0)$ ，直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 B ， C 两点（其中点 A 不与点 B 重合），则线段 AB 与直线 l 组成的图形我们称为图形 V ；

① $t = \sqrt{3}$ 时，以 A 为圆心， r 为半径的 $\odot A$ 与图形 V 是和谐图形，求 r 的取值范围；

②以点 A 为圆心， $2\sqrt{3}$ 为半径的 $\odot A$ 与图形 V 均组成和谐图形，求 t 的取值范围.

参考答案

一、选择题：（共8个小题，每小题2分，共16分）下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的.

1. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负整数.

【解答】解： $41800 = 4.18 \times 10^4$.

故选：C.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

2. 【分析】根据几何体的三个视图即可判断.

【解答】解：该几何体的视图为一个圆形和两个矩形.

则该几何体可能为圆柱.

故选：D.

【点评】此题考查了由三视图判断几何体，关键是熟练掌握三视图，主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形.

3. 【分析】根据多边形的外角和等于 360° ，即可求解.

【解答】解：任意多边形的外角和都是 360° ，

故正五边形的外角和的度数为 360° .

故选：B.

【点评】本题主要考查多边形的外角和定理，解答本题的关键是掌握任意多边形的外角和都是 360° .

4. 【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解：A、等边三角形是轴对称图形而不是中心对称图形，故本选项符合题意；

B、圆既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项不合题意；

C、平行四边形不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不合题意；

D、矩形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项不合题意；

故选：A.

【点评】本题考查了轴对称图形及中心对称图形的知识，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形沿对称轴叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，图形旋转 180° 后与原图形重合.

5. 【分析】首先根据 $l_1 \parallel l_2$ ，可得 $\angle 1 = \angle ADC$ ，再根据 $\angle ACD = 30^\circ$ ， $CA \perp AD$ ，可得 $\angle 1 = 60^\circ$.

【解答】解： $\because l_1 \parallel l_2$.

$\therefore \angle 1 = \angle ADC$.

$\because CA \perp AD$ ， $\angle ACD = 30^\circ$.

$\therefore \angle ADC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$\therefore \angle 1 = 60^\circ$.

故选：C.

【点评】本题考查平行线的判定和性质，平行线的判定是由角的数量关系判断两直线的位置关系，平行线的性质是由平行关系来寻找角的数量关系。

6. 【分析】列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可。

【解答】解：列表如下，

	白	白	白	红
白		(白，白)	(白，白)	(红，白)
白	(白，白)		(白，白)	(红，白)
白	(白，白)	(白，白)		(红，白)
红	(白，红)	(白，红)	(白，红)	

由表可知，共有 12 种等可能结果，其中摸出小球的颜色不同的有 6 种结果，

所以从中随机同时摸出两个小球，那么摸出小球的颜色不同的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ，

故选：A。

【点评】此题考查了列表法与树状图法，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。

7. 【分析】根据 a ， b 在数轴上的位置可确定 a 和 $-b$ 的取值范围，相加之后可得 $b-a$ 的范围。

【解答】解：由题意： $0 < b < 1$ ， $-2 < a < -1$ ，

$$\therefore 1 < -a < 2.$$

$$\therefore 1+0 < b-a < 1+2.$$

$$\text{即 } 1 < b-a < 3.$$

$$\therefore b-a \text{ 的结果可能是：} 2.$$

故选：B。

【点评】本题主要考查了实数与数轴，根据数轴上点的位置确定出字母的取值范围是解题的关键。

8. 【分析】设列车到延庆站的距离为 y ，行驶时间为 x ，根据题意列出关系式判断。

【解答】解：设列车到延庆站的距离为 y ，行驶时间为 x ，

$$\text{由题意得 } y = 9.33 + 160x.$$

故选：C。

【点评】本题考查函数与实际问题的应用，根据题意列出函数关系式是解题关键。

二、填空题（共 8 个小题，每题 2 分，共 16 分）

9. 【分析】根据二次根式有意义的条件是被开方数大于或等于 0 即可求解。

【解答】解：在函数 $y = \sqrt{x-2}$ 中，有 $x-2 \geq 0$ ，解得 $x \geq 2$ ，

故其自变量 x 的取值范围是 $x \geq 2$ 。

故答案为 $x \geq 2$ 。

【点评】本题考查了函数自变量的取值范围，函数自变量的范围一般从三个方面考虑：

(1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；

(2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；

(3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数为非负数。

10. 【分析】应用加减消元法，即可求出方程组的解.

【解答】解：
$$\begin{cases} x+3y=5 \text{①} \\ x-y=1 \text{②} \end{cases},$$

① - ②，得 $4y=4$ ，解得 $y=1$ ，

把 $y=1$ 代入②，得 $x-1=1$ ，解得 $x=2$ ，

故方程组的解为
$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

故答案为：
$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

【点评】此题主要考查了解二元一次方程组的方法，要熟练掌握，注意代入消元法和加减消元法的应用.

11. 【分析】此多项式有公因式，应先提取公因式 a ，再对余下的多项式进行观察，有 3 项，可利用完全平方公式继续分解.

【解答】解： $a^3 - 2a^2 + a$

$$= a(a^2 - 2a + 1)$$

$$= a(a-1)^2.$$

故答案为： $a(a-1)^2$.

【点评】本题考查了提公因式法与公式法分解因式，要求灵活使用各种方法对多项式进行因式分解，一般来说，如果可以先提取公因式的要先提取公因式，再考虑运用公式法分解.

12. 【分析】由于所求无理数大于 1 且小于 2，则该数的平方大于 1 小于 4，所以可选其中的任意一个数开平方即可.

【解答】解：大于 1 且小于 2 的无理数是 $\sqrt{3}$ ，答案不唯一.

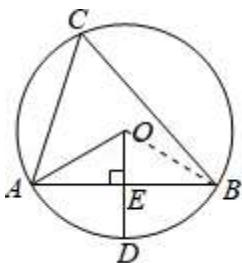
故答案为： $\sqrt{3}$.

【点评】此题主要考查了无理数的估算，现实生活中经常需要估算，估算应是我们具备的数学能力，“夹逼法”是估算的一般方法，也是常用方法.

13. 【分析】连接 OB ，由圆周角定理得出 $\angle AOB = 2\angle ACB = 120^\circ$ ，再由垂径定理得出 $\angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOB = 60^\circ$ 、

$AB = 2AE$ ，在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，由 $AE = AO \sin \angle AOE$ 求解可得答案.

【解答】解：如图，连接 OB ，



则 $\angle AOB = 2\angle ACB = 120^\circ$ ，

$\therefore OD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOB = 60^\circ,$$

$$\because AO = 6,$$

$$\therefore AE = AO \sin \angle AOE = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 2AE = 6\sqrt{3},$$

故答案为: $6\sqrt{3}$.

【点评】本题主要考查圆周角定理，解题的关键是掌握圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．

14. 【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 $a + 2b$ 的值代入计算即可．

$$\text{【解答】解：原式} = \left(\frac{4b}{a-2b} + \frac{2a-4b}{a-2b} \right) \cdot \frac{(a+2b)(a-2b)}{a}$$

$$= \frac{2a}{a-2b} \cdot \frac{(a+2b)(a-2b)}{a}$$

$$= 2(a+2b),$$

当 $a + 2b = -1$ 时，

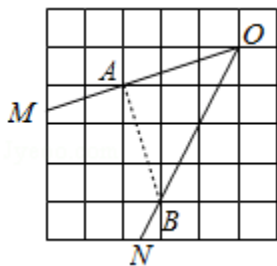
$$\text{原式} = 2 \times (-1) = -2,$$

故答案为: -2 .

【点评】本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则．

15. 【分析】由勾股定理的逆定理可证 $\triangle ABO$ 是等腰直角三角形，即可求解．

【解答】解：如图，连接 AB ，



$$\because AB^2 = 1^2 + 3^2 = 10, \quad AO^2 = 1^2 + 3^2 = 10, \quad BO^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

$$\therefore AB^2 + AO^2 = BO^2,$$

$\therefore \triangle ABO$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle AOB = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle MON = 1,$$

故答案为 1.

【点评】本题考查了解直角三角形：在直角三角形中，由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形．灵活应用勾股定理和锐角三角函数．也考查了勾股定理的逆定理．

16. 【分析】根据菱形的性质对角线互相垂直，利用勾股定理可得另一条对角线长的一半为 6，所以图 2 所示的阴影的正方形边长为 $8 - 6 = 2$ ，进而可得结论．

【解答】解：因为菱形的一条对角线长为 16，

所以它的一半是 8，

菱形的边长为 10，

因为菱形对角线互相垂直，

根据勾股定理，得

所以另一条对角线长的一半为 6，

所以图 2 所示的阴影的正方形边长为 $8 - 6 = 2$ ，

所以图 2 中的阴影的面积为 4.

故答案为：4.

【点评】本题考查了正方形的性质，菱形的性质，勾股定理，全等图形，解决本题的关键是求出图 2 中小正方形的边长.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22-24 题，每小题 5 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每小题 5 分）

17. 【分析】依据实数的运算法则进行运算即可.

【解答】解：原式 $= 3 - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} - 1$

$$= 3 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 1$$
$$= 2.$$

【点评】本题主要考查了实数的运算，零指数幂，负整数指数幂，特殊角的三角函数值等知识点，熟练运用实数的运算法则是解题的关键.

18. 【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【解答】解：解不等式 $2(x+1) \geq 3x - 5$ ，得： $x \leq 7$ ，

解不等式 $\frac{4x+1}{3} > x$ ，得： $x > -1$ ，

则不等式组的解集为 $-1 < x \leq 7$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大大小小中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

19. 【分析】（1）一元二次方程有实数根说明 $b^2 - 4ac \geq 0$ ，

（2）选择合适的方法解方程即可.

【解答】解：（1） \because 方程有实数根，

$$\therefore (-2)^2 - 4 \times 1 \times (3m - 2) \geq 0,$$

$$\therefore m \leq 1;$$

（2） $\because m$ 为正整数，

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore \text{方程为：} x^2 - 2x + 1 = 0,$$

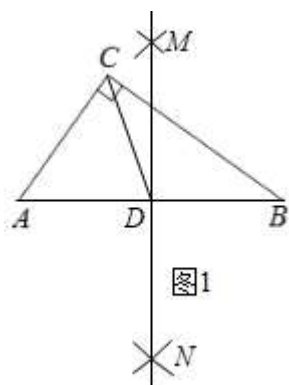
$$\therefore x_1 = x_2 = 1.$$

【点评】本题考查一元二次方程根的判别式和解法，属于基础题.

20. 【分析】（1）根据作法作图可得线段 CD ；

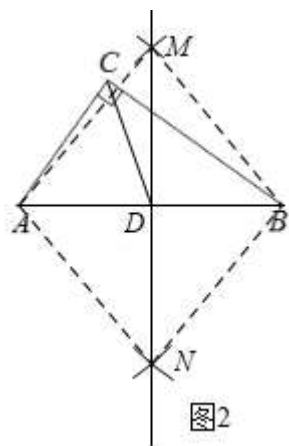
(2) 先根据线段垂直平分线的逆定理可得 MN 是 AB 的垂直平分线，又根据直角三角形斜边中线的性质可得结论.

【解答】解：(1) 如图 1，线段 CD 即为所求的线段.



(2) 证明：连接 AM ， BM ， AN ， BN ，

$\because AM = BM$ ， $AN = BN$ ，



$\therefore MN$ 是 AB 的垂直平分线（与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上），

\therefore 点 D 是 AB 的中点，

$\because \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore CD = \frac{1}{2}AB$ （直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半）.

故答案为：与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

【点评】本题考查线段的垂直平分线的性质及作图，直角三角形斜边中线的性质，解题的关键是学会基本作图：作一条线段的垂直平分线.

21. 【分析】(1) 根据每按一次屏幕，小林的屏幕上的数就会加上 a^2 ，同时小明的屏幕上的数就会减去 $2a$ 求解即可；

(2) 利用作差法得出 $9 + 4a^2 - (4 - 8a) = 4a^2 + 8a + 5 = 4(a+1)^2 + 1 > 0$ ，据此可得答案.

【解答】解：(1) 由题意知，小林按三次后显示的数为 $9 + 3a^2$ ，按四次后显示的数为 $9 + 4a^2$ ，

小明按三次后显示的数为 $4 - 6a$ ，按四次后显示的数为 $4 - 8a$ ，

故答案为： $9 + 4a^2$ ， $4 - 8a$.

(2) $\because 9 + 4a^2 - (4 - 8a)$

$$= 9 + 4a^2 - 4 + 8a$$

$$= 4a^2 + 8a + 5$$

$$\begin{aligned}
&= 4a^2 + 8a + 4 + 1 \\
&= 4(a^2 + 2a + 1) + 1 \\
&= 4(a+1)^2 + 1 > 0, \\
\therefore 9 + 4a^2 > 4 - 8a.
\end{aligned}$$

【点评】本题主要考查列代数式，解题的关键是理解题意，并掌握代数式书写规范及作差法比较大小的方法.

22. 【分析】(1) 由等腰三角形的性质得 $BD = CD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，再证 $AE = CD$ ，得四边形 $ADCE$ 是平行四边形，即可得出结论；

(2) 由矩形的性质得 $AD = CE = 4$ ，再证 $\triangle AEF \cong \triangle DBF$ (AAS)，得 $AF = DF = \frac{1}{2}AD = 2$.

【解答】(1) 证明： $\because AB = AC$ ， $AD \perp BC$ ，

$$\therefore BD = CD, \quad \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because AE = BD,$$

$$\therefore AE = CD,$$

$$\because AE \parallel BC,$$

\therefore 四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$$\text{又} \because \angle ADC = 90^\circ,$$

\therefore 四边形 $ADCE$ 为矩形；

(2) 解：由 (1) 得：四边形 $ADCE$ 为矩形，

$$\therefore AD = CE = 4,$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle DBF,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DBF$ 中，

$$\begin{cases}
\angle AEF = \angle DBF \\
\angle AFE = \angle DFB, \\
AE = DB
\end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DBF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AF = DF = \frac{1}{2}AD = 2.$$

【点评】本题考查了矩形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、平行线的性质等知识；熟练掌握矩形的判定与性质、等腰三角形的性质是解题的关键.

23. 【分析】(1) 由图象平移的特点可得一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ $k = 1$ ，再根据反比例函数求出 A 点坐标，代入一次函数即可求出表达式.

(2) 由图象分析可得，过点 P 与 y 轴平行的直线，应该位于两函数图形的左侧，因此可推出 n 的取值范围.

【解答】解：(1) \because 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 由函数 $y = x$ 平移得到，

$$\therefore k = 1,$$

$$\therefore y = x + b,$$

\because 点 A 是 $y = \frac{3}{x}$ 和 $y = x + b$ 的交点,

\therefore 将 $A(3, m)$ 代入 $y = \frac{3}{x}$ 中,

解得 $m = 1$,

\therefore 将 $A(3, 1)$ 代入 $y = x + b$ 中,

解得 $b = -2$.

\therefore 一次函数的表达式为 $y = x - 2$.

(2) $\because y_1 < y_2$, 反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$,

\therefore 在第一象限内, 两函数图象的交点 A 的左侧符合情况,

又 \because 点 $P(n, 0) (n > 0)$,

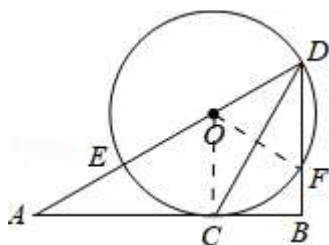
$\therefore n$ 的取值范围为 $0 < n < 3$.

【点评】本题主要考查一次函数与反比例函数的综合应用, 其中在待定系数法求解一次函数表达式时需要注意先通过反比例求出交点坐标, 再代入求解. 在求解 n 的取值范围时要注意函数图象所需要分析的象限.

24. 【分析】(1) 分别连接 OC , OB , 通过等弧所对圆心角相等可得 $\angle EOC = \angle COF$, 再根据同弧所对圆周角是圆心角一半得出 $\angle EDC = \angle CDF$, 再根据 $OD = OC$ 得出 $\angle ODC = \angle OCD$, 推出 $OC \parallel DB$, 再根据切线性质可证 $\angle ABD = 90^\circ$.

(2) 根据 $\tan \angle DAB = \frac{3}{4}$ 可得 $AD = 5$, 再由 $\triangle AOC \sim \triangle ADB$, 即可求出半径长度.

【解答】(1) 证明: 连接 OC , OF , 如图所示:



$\because CA$ 为 $\odot O$ 的切线, 切点为 C ,

$\therefore \angle ACO = 90^\circ$,

\because 点 C 是弧 EF 的中点,

$\therefore \angle EOC = \angle COF$,

又 $\because \angle EDC = \frac{1}{2} \angle EOC$, $\angle CDF = \frac{1}{2} \angle COF$,

$\therefore \angle ODC = \angle CDF$,

$\because OD = OC$,

$\therefore \angle ODC = \angle OCD$,

$\therefore \angle OCD = \angle CDF$,

$\therefore OC \parallel DB$,

$\therefore \angle ABD = \angle ACO = 90^\circ$.

$$(2) \because BD = 3, \tan \angle DAB = \frac{3}{4},$$

$$\therefore AB = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD = 5$.

由图可知 $\triangle AOC \sim \triangle ADB$,

设半径为 x ,

$$\therefore \frac{OC}{DB} = \frac{AO}{AD}$$

$$\text{即 } \frac{x}{3} = \frac{5-x}{5},$$

$$\text{解得 } x = \frac{15}{8}.$$

【点评】本题主要考查圆的基本性质, 正确转化角度关系是解决此题的关键.

25. 【分析】(1) 由图表可得 2020 年全年空气质量优良天数为 297 天, 2016 年全年空气质量优良天数为 260 天, 两数相减即可.

(2) 将七年的数据按照大小顺序排列, 再找出中位数即可.

(3) ①将 1~3 月份优良天数相加之和除以月份数即可.

②根据每月平均天数可求出全年优良天数之和, 再除以 365 可得出优良天数的指标, 再与 87.5% 进行比较即可.

【解答】解: (1) 由折线统计图得:

2020 年全年空气质量优良天数为 297 天,

2016 年全年空气质量优良天数为 260 天,

$$\therefore 297 - 260 = 37 \text{ (天)}.$$

故答案为: 37.

(2) 将七年的数据按照从大到小顺序排列如下:

300、297、280、265、260、255、235,

\therefore 中位数为 265.

故答案为: 265.

$$(3) \text{ ① } \frac{28+25+28}{3} = 27 \text{ (天)}.$$

故答案为: 27.

$$\text{② } \frac{12 \times 27}{365} \times 100\% \approx 88.8\%$$

$$88.8\% > 87.5\%,$$

\therefore 能够达标.

达标天数为: $27 \times 12 = 324$ (天).

【点评】本题主要考查对折线统计图的分析能力, 正确理解题目要求是解题关键.

26. 【分析】(1) 令 $y = 0$ 代入 $y = -2x + 6$ 中, 可得 B 的坐标, 已知中 $BC = 2$, 即可得 C 的坐标;

(2) ①令 $y = -2x + 6$ 中令 $x = 0$, 则可求 A 的坐标. 设二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 分别把 A 、 B 代入抛物线解析式,

当 $C(1,0)$ 抛物线解析式可求，当 $C(5,0)$ 时抛物线解析式可求。由已知条件，知 $x > 2$ 时，二次函数单调递增，即可得抛物线表达式 $y = 2x^2 - 8x + 6$ ；

②把 $y = 6$ 代入抛物线可得 $x = 0$ 或 4 ，即可得 D 坐标为 $(4,6)$ ， $y = kx - 2$ 必过 $E(0,-2)$ ，两点确定一条直线解析式， CD 的直线解析式为 $y = 2x - 2$ ，代入可得 E 在直线 CD 上。 E 、 C 、 D 直线表达式为 $y = k_1x - 2$ ，设过 E 、 F 点的表达式为 $y = k_2x - 2$ ， $k_2 \leq k \leq k_1$ ，将 $y = k_2x - 2$ 与抛物线联立可得一元二次方程，令 $\Delta = 0$ ，解得 $k_2 = 0$ ，即可得 k 的取值范围。

【解答】解：（1）令 $y = -2x + 6$ 中 $y = 0$ ，

则 $x = 3$ ，

$\therefore B$ 点为 $(3,0)$ ，

C 在 x 轴上且 $BC = 2$ ，

$\therefore C$ 为 $(1,0)$ 或 C 为 $(5,0)$ ；

（2）①设 $y = ax^2 + bx + c$ ，

令 $y = -2x + 6$ 中 $x = 0$ ，则 $y = 6$ ，

$\therefore A$ 点为 $(0,6)$ ，把 A 点为 $(0,6)$ 代入到二次函数中，得 $6 = c$ ，

又由（1） B 为 $(3,0)$ 代入到二次函数中得，

$$0 = 9a + 3b + 6，$$

当 C 为 $(1,0)$ 时，得 $0 = a + b + c = a + b + 6$ ，

解得 $a = 2$ ， $b = -8$ ，

$$\therefore y = 2x^2 - 8x + 6，$$

当 C 为 $(5,0)$ 时，得 $0 = 25a + 5b + c = 25a + 5b + 6$ ，

$$\text{解得 } a = \frac{2}{5}, b = -\frac{16}{5}，$$

$$\therefore y = \frac{2}{5}x^2 - \frac{16}{5}x + 6，$$

由题目任意两点 $P_1(x_1, y_1)P_2(x_2, y_2)$ ，当 $x_1 > x_2 > 2$ 时，总有 $y_1 > y_2$ ，

\therefore 当 $x > 2$ 时，

二次函数单调递增，

当 $y = 2x^2 - 8x + 6$ 时，

$$\text{对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2，$$

$$\because a = 2 > 0，$$

\therefore 抛物线开口向上，

$\therefore x = 2$ 左边函数单调递减， $x = 2$ 右边函数单调递增，符合要求；

$$\text{当 } y = \frac{2}{5}x^2 - \frac{16}{5}x + 6，$$

对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = 4$, $a = \frac{2}{5} > 0$,

抛物线开口向上,

∴ 在 $x = 4$ 左边函数单调递减,

即当 $2 < x < 4$ 时,

函数单调递减, 与题干分歧,

∴ 舍去,

综上, $y = 2x^2 - 8x + 6$;

② 令 $y = 6$,

$$\therefore 6 = 2x^2 - 8x + 6,$$

$$\therefore 2x^2 - 8x = 0,$$

$$\therefore 2x(x - 4) = 0,$$

$$\therefore x_1 = 0, \quad x_2 = 4,$$

$$\because A \text{ 点 } x = 0,$$

$$\therefore D \text{ 点坐标为 } (4, 6),$$

可知 $y = kx - 2$ 必过点 $E(0, 2)$,

C 、 D 坐标分别为 $(1, 0)$, $(4, 6)$,

设 CD 直线解析式为 $y = ax + b$, 把 C 、 D 代入上式,

$$\text{得 } 0 = a + b,$$

$$6 = 4a + b,$$

$$\therefore y = 2x - 2,$$

∴ 直线 CD 必过点 E ,

如图作 $y = k_1x - 2$ 过 C 、 D 、 E 点,

过 $y = k_2x - 2$ 过 E 、 F 点,

$$\text{已知 } k_1 = 2,$$

$$k_2 \leq k \leq k_1,$$

当 $y = k_2x - 2$, 与二次函数有交点时,

$$k_2x - 2 = 2x^2 - 8x + 6,$$

$$\text{得 } 2x^2 - (8 + k_2)x + 9 = 0,$$

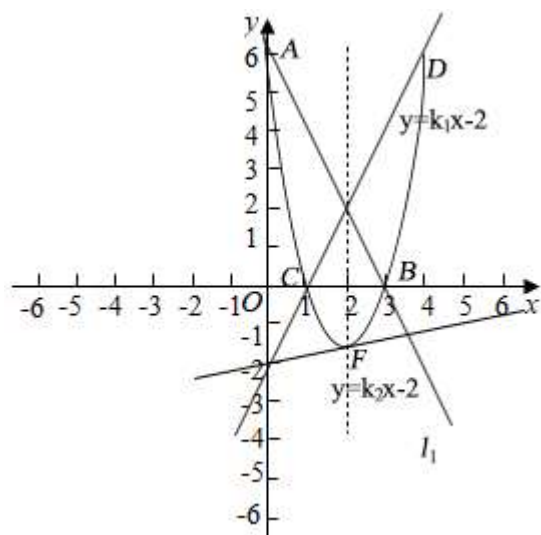
而 $y = k_2x - 2$ 与二次函数恰有一公共点, 即 x 恰有解,

$$\therefore \Delta = (8 + k_2)^2 - 2 \times 4 \times 9 = 0,$$

$$\text{解得 } k_2 = 0,$$

$$\text{又 } k_2 \neq 0,$$

综上 $0 < k \leq 2$.



【点评】本题考查二次函数应用，解本题关键代入法求二次函数解析式和一次函数的解析式，二次函数的性质，一元一次方程根的情况等。

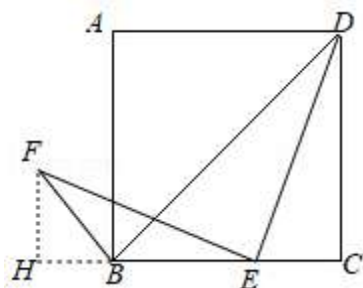
27. 【分析】（1）①根据要求画出图形即可；

②过点 F 作 $FH \perp CB$ ，交 CB 的延长线于 H 。证明 $\triangle DCE \cong \triangle EHF(AAS)$ ，推出 $EC = FH$ ， $DC = EH$ ，推出 $CE = BH = FH$ ，再利用勾股定理解决问题即可；

（2）由②可得 $\triangle DCE \cong \triangle EHF$ ，推出 $EC = FH$ ， $DC = EH$ ，推出 $CE = BH = FH$ ，再利用等腰直角三角形的性质解决问题即可

【解答】解（1）图形如图所示。

过点 F 作 $FH \perp CB$ ，交 CB 的延长线于 H ，



\because 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore CD = AB = 6$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\because \angle DEF = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DEC + \angle FEH = 90^\circ$ ， $\angle DEC + \angle EDC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle FEH = \angle EDC$ ，

在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle EFH$ 中，

$$\begin{cases} \angle H = \angle C = 90^\circ \\ \angle FEH = \angle EDC, \\ EF = DE \end{cases}$$

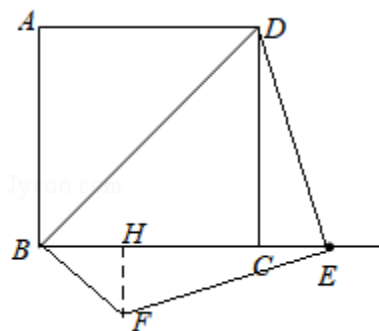
$\therefore \triangle DEC \cong \triangle EFH(AAS)$ ，

$\therefore EC = FH = 2$ ， $CD = BC = EH = 6$ ，

$\therefore HB = EC = 2$ ，

∴ Rt△FHB 中， $BF = \sqrt{FH^2 + BH^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

(2) 结论： $BF + BD = \sqrt{2}BE$.



理由：过点 F 作 $FH \perp CB$ ，交 CB 于 H ，

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $CD = AB = 6$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

∵ $\angle DEF = \angle ACB = 90^\circ$ ，

∴ $\angle DEC + \angle FEH = 90^\circ$ ， $\angle DEC + \angle EDC = 90^\circ$ ，

∴ $\angle FEH = \angle EDC$ ，

在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle EFH$ 中，

$$\begin{cases} \angle FHE = \angle DCE = 90^\circ \\ \angle FEH = \angle EDC \\ EF = DE \end{cases},$$

∴ $\triangle DEC \cong \triangle EFH$ (AAS)，

∴ $EC = FH$ ， $CD = BC = EH$ ，

∴ $HB = EC = HF$ ，

∴ $\triangle DCB$ 和 $\triangle BHF$ 都是等腰直角三角形，

∴ $BD = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}HE$ ， $BF = \sqrt{2}BH$ ，

∴ $HE + BH = BE$ ，

∴ $BF + BD = \sqrt{2}BE$.

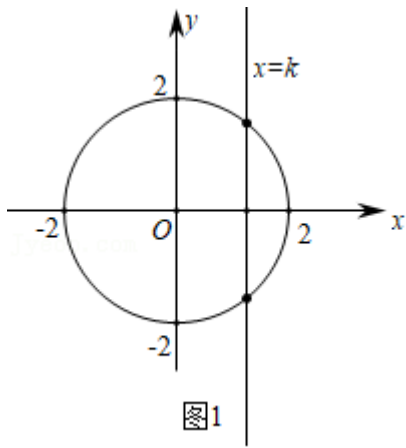
【点评】本题考查作图—旋转变换，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质和判定等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

28. 【分析】(1) 根据图形 M 与图形 N 是和谐图形的定义可知，如图 1 中，当直线 $x = k$ 与 $\odot O$ 有两个交点，即满足条件.

(2) ①如图 2 中，连接 AC . 求出两种特殊位置 r 的值，即可判断.

②求出 $\odot A$ 与直线 BC 相切时 t 的值，求出 $\odot A$ 经过点 B 时 t 的值，即可判断.

【解答】解：(1) 如图 1 中，当直线 $x = k$ 与 $\odot O$ 有两个交点，即满足条件.

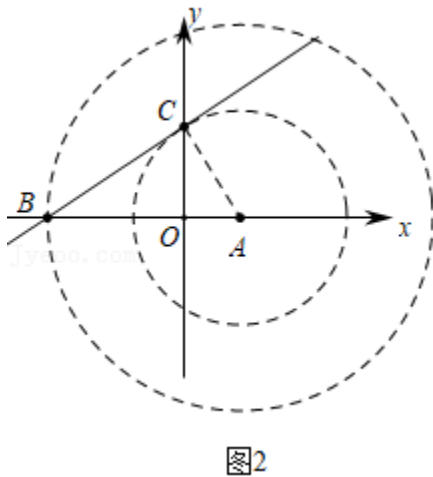


$$\therefore -2 < k < 2,$$

k 可以取 1 等 (答案不唯一).

故答案为: 1 (答案不唯一).

(2) ①如图 2 中, 连接 AC .



$$\text{当 } t = \sqrt{3} \text{ 时, } OA = \sqrt{3},$$

$$\text{由题意 } C(0, 3), B(-3\sqrt{3}, 0),$$

$$\therefore OC = 3, OB = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore OC^2 = OB \cdot OA,$$

$$\therefore \frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC},$$

$$\because \angle COB = \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BOC \sim \triangle COA,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle ACO,$$

$$\because \angle OBC + \angle BCO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle BCO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{当 } r = AC = 2\sqrt{3} \text{ 时, 直线 } BC \text{ 与 } \odot A \text{ 相切,}$$

当 $\odot A$ 经过点 B 时， $r=4\sqrt{3}$ ，

观察图象可知，满足条件的 r 的值： $r=2\sqrt{3}$ 或 $r\geq 4\sqrt{3}$ ．

②当 $\odot A$ 与直线 BC 相切时， $t=\sqrt{3}$ 或 $-7\sqrt{3}$ ，

当 $\odot A$ 经过点 B 时， $t=-\sqrt{3}$ 或 $-5\sqrt{3}$ ，

当 A ， B 重合时， $t=-3\sqrt{3}$ ，

观察图象可知，满足条件的 t 的值为： $t=\sqrt{3}$ 或 $t=-7\sqrt{3}$ 或 $-5\sqrt{3}\leq t\leq -\sqrt{3}$ 且 $t\neq -3\sqrt{3}$ ．

【点评】本题属于圆综合题，考查了直线与圆的位置关系，解直角三角形，切线的判定和性质，图形 M 与图形 N 是和谐图形的定义等知识，解题的关键是理解题意，学会寻找特殊点，特殊位置解决问题，属于中考常考题型。