2020 北京燕山初三二模

数　　学

2020 年 6 月

考生须知	1．本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。 2．在试卷和答题纸上准确填写学校名称、班级、姓名和考号。 3．试题答案一律填涂或书写在答题纸上，在试卷上作答无效。 4．在答题纸上，选择题、画图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 5．考试结束，请将本试卷和答题纸一并交回。

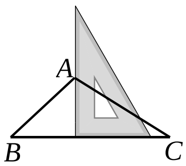
一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

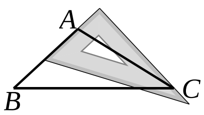
1．2020 年 5 月 5 日 18 时，长征五号 B 运载火箭首飞成功，标志着我国空间站工程建设进入实质阶段．长征五号 B 运载火箭运载能力超过 22000 千克，是目前我国近地轨道运载能力最大的火箭．将 22000 用科学记数法表示应为

A．2.2×10^4　　B．2.2×10^5　　C．22×10^3　　D．0.22×10^5

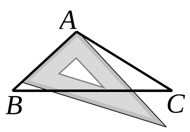
2．如图，用三角板作△ABC 的边 AB 上的高线，下列三角板的摆放位置正确的是



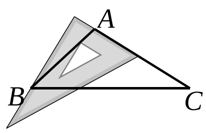
A．



B．



C．



D．

3．下列防控疫情的图标中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是

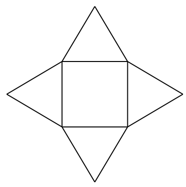
A．

B．

C．

D．

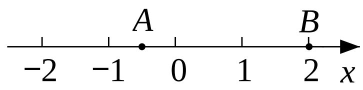
4．如图是某几何体的展开图，则该几何体是



A．四棱锥　　　　　B．三棱锥

C．四棱柱　　　　　D．长方体

5．如图，在数轴上，实数 a，b 的对应点分别为点 A，B，则 ab=



A．1.5　　　　　B．1

C．−1　　　　　D．−4

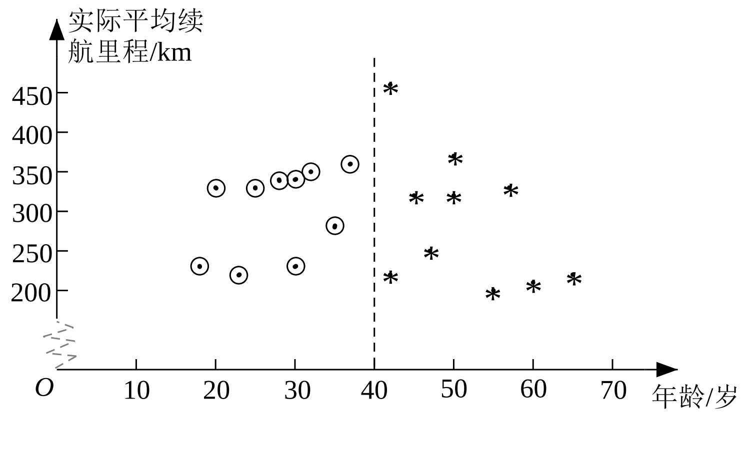
6．2019 年 10 月 20 日，第六届世界互联网大会在浙江乌镇举行，会议发布了 15 项“世界互联网领先科技成果”，其中有 5 项成果属于芯片领域．小飞同学要从这 15 项“世界互联网领先科技成果”中任选 1 项进行了解，则他恰好选中芯片领域成果的概率为

A．$\frac{1}{5}$　　　　B．$\frac{1}{3}$　　　　C．$\frac{1}{10}$　　　　D．$\frac{1}{15}$

7．若 $a^2+4a=5$，则代数式 $2a(a+2)-(a+1)(a-1)$ 的值为

A．1　　　　B．2　　　　C．4　　　　D．6

8．“实际平均续航里程”是指电动汽车的行驶总里程与充电次数的比值，是反映电动汽车性能的重要指标．某汽车生产厂家为了解某型号电动汽车的“实际平均续航里程”，收集了使用该型号电动汽车 1 年以上的部分客户的相关数据，按年龄不超过 40 岁和年龄在 40 岁以上将客户分为 A，B 两组，从 A，B 组各抽取 10 位客户的电动汽车的“实际平均续航里程”数据整理成下图，其中“⊙”表示 A 组的客户，“*”表示 B 组的客户．



下列推断不正确的是

A．A 组客户的电动汽车的“实际平均续航里程”的最大值低于 B 组

B．A 组客户的电动汽车的“实际平均续航里程”的方差低于 B 组

C．A 组客户的电动汽车的“实际平均续航里程”的平均值低于 B 组

D．这20位客户的电动汽车的“实际平均续航里程”的中位数落在 B 组

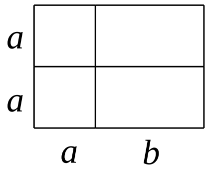
二、填空题（本题共16分，每小题2分）

9．函数 $y=\sqrt{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是__________.

10．分解因式：$x^3-4x=$__________.

11．右图中的四边形均为矩形，根据图形的面积关系，

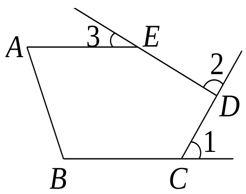
写出一个正确的等式：__________.



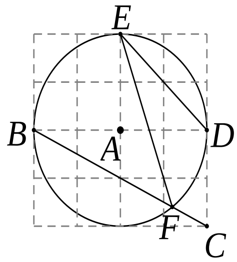
12．用一个 a 的值说明命题“若 $a^2>1$，则 $a>1$”是假命题，这个值可以是 $a=$__________.

13．如图，∠1，∠2，∠3均是五边形 $ABCDE$ 的外角，$AE\parallel BC$，则∠1＋∠2＋∠3＝__________°．

14．如图，边长为1的小正方形网格中，点 A，B，C，D，E 均在格点上，半径为2的⊙A 与 BC 交于点 F，则 tan∠DEF＝__________.



第13题图



第14题图

15．《算法统宗》是中国古代数学名著，作者是明代数学家程大位．其中有一个“绳索量竿”问题：“一支竿子一条索，索比竿子长一托，对折索子来量竿，却比竿子短一托，问索长几尺”．

译文：现有一根杆和一条绳索，用绳索去量杆，绳索比杆子长5尺；如果将绳索对折后再去量竿，就比竿子短5尺，问绳索长几尺？　注：一托＝5尺

设绳索长 x 尺，竿子长 y 尺，依题意，可列方程组为_______________.

16．四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 交于点 O，点 M，N，P，Q 分别为边 AB，BC，CD，DA 的中点．有下列四个推断，

①对于任意四边形 $ABCD$，四边形 $MNPQ$ 都是平行四边形；

②若四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 MP 与 NQ 交于点 O；

③若四边形 $ABCD$ 是矩形，则四边形 $MNPQ$ 也是矩形；

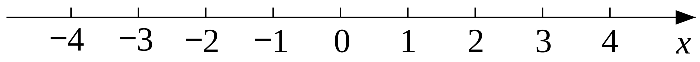
④若四边形 $MNPQ$ 是正方形，则四边形 $ABCD$ 也一定是正方形．

所有正确推断的序号是____________.

三、解答题（本题共 68 分，第 17－22 题，每小题 5 分，第 23－26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17．计算：$-3^2+2\tan 60°-\sqrt{12}+\left(3-\pi\right)^0$.

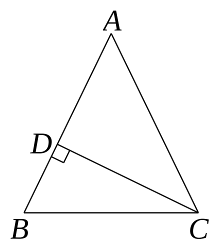
18．解不等式 $\dfrac{x-1}{3}-2(x+1)\geq 1$，并把它的解集在数轴上表示出来.



19．如图，△*ABC* 中，*AB*＝*BC*，*CD*⊥*AB* 于点 *D*，∠*BAC* 的平分线 *AE* 交 *BC* 于点 *E*.

（1）使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

（2）求证：∠*BCD*＝∠*CAE*.



20．已知关于 x 的方程 $mx^2-(2m+1)x+2=0(m\neq 0)$.

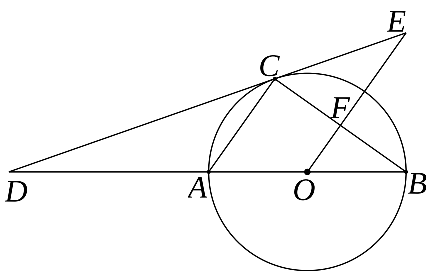
（1）求证：方程总有两个实数根；

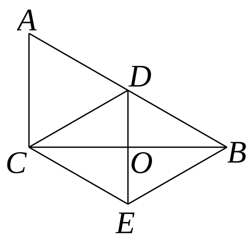
（2）若方程的两个根均为正整数，写出一个满足条件的 m 的值，并求此时方程的根.

21．如图，Rt△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，*D* 为 *AB* 中点，*O* 为 *BC* 中点，连结 *DO* 并延长到点 *E*，使 *OE*＝*OD*，连接 *BE*，*CE*.

（1）求证：四边形 *DCEB* 为菱形；

（2）若 *AC*＝6，∠*DCB*＝30°，求四边形 *DCEB* 的面积.

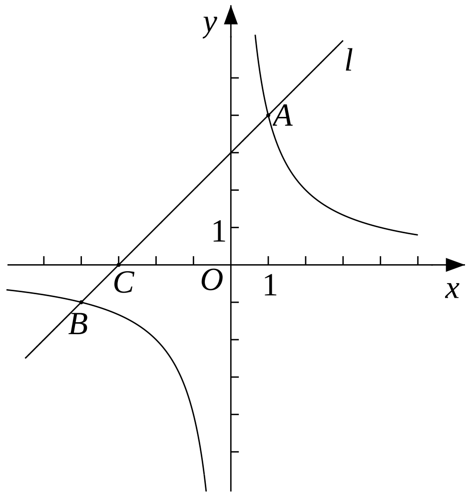




22．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=mx+3$ 与 x 轴交于点 C，与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象交于点 $A(1，4)$ 和点 B.

（1）求 m，k 的值及点 C 的坐标；

（2）若点 P 是 x 轴上一点，且 $S_{\triangle ABP}=5$，直接写出点 P 的坐标.



23．如图，AB 为⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，过点 C 作⊙O 切线 CD 交 BA 的延长线于点 D，过点 O 作 $OE/\!/AC$ 交切线 DC 于点 E，交 BC 于点 F.

（1）求证：$\angle B=\angle E$；

（2）若 $AB=10$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，求 EF 的长.

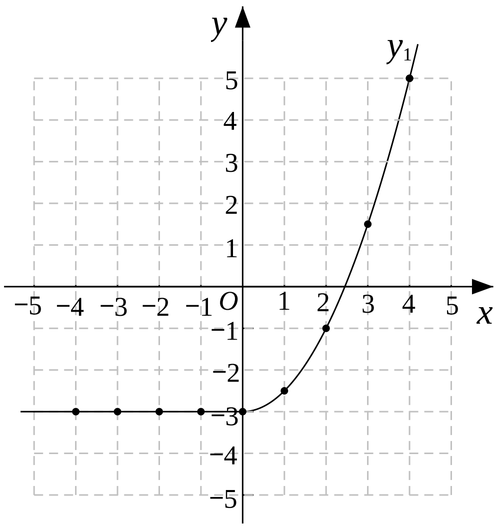
24．已知 y_1，y_2均是 x 的函数，下表是 y_1，y_2与 x 的几组对应值：

x	…	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	…
y_1	…	−3	−3	−3	−3	−3	−2.5	−1	1.5	5	…
y_2	…	−1.88	−2.4	−3.2	−4	0	4	3.2	2.4	1.88	…

小聪根据学习函数的经验，利用上述表格所反映出的 y_1，y_2与 x 之间的变化规律，分别对函数 y_1，y_2的图象与性质进行了探究.

下面是小聪的探究过程，请补充完整：

(1) 如图，在同一平面直角坐标系 xOy 中，描出上表中各组数值所对应的点$(x，y_1)$，$(x，y_2)$，并画出函数 y_1，y_2的图象；



(2) 结合画出的函数图象，解决问题：

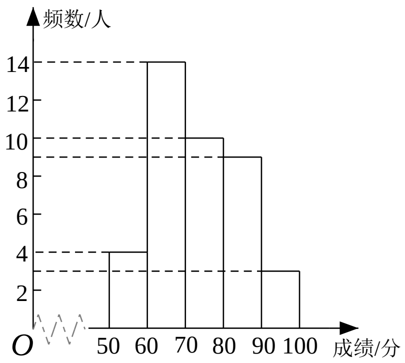
① 当 x=3.5 时，对应的函数值 y_1约为__________；

② 写出函数 y_2的一条性质：______________________________；

③ 当 y_1> y_2时，x 的取值范围是________________.

25．某学校八、九年级各有学生 200 人，为了提高学生的身体素质，学校开展了主题为“快乐运动，健康成长”的系列体育健身活动．为了了解学生的运动状况，从八、九年级各随机抽取 40 名学生进行了体能测试，获得了他们的成绩(百分制)，并对数据(成绩)进行了整理、描述和分析．下面给出了部分信息．(说明：成绩 80 分及以上为优秀，70--79 分为良好，60--69 分为合格，60 分以下为不合格)

a．八年级学生成绩的频数分布直方图如下（数据分为五组：$50\le x<60$，$60\le x<70$，$70\le x<80$，$80\le x<90$，$90\le x\le 100$）



b．八年级学生成绩在 $70\le x<80$ 这一组的是：

70　　71　　73　　73　　73　　74　　76　　77　　78　　79

c．九年级学生成绩的平均数、中位数、众数、优秀率如下：

平均数	中位数	众数	优秀率
79	76	84	40%

根据以上信息，回答下列问题:

(1) 在此次测试中，小腾的成绩是 74 分，在年级排名是第 17 名，由此可知他是

__________年级的学生（填“八”，或“九”）；

(2) 根据上述信息，推断__________年级学生运动状况更好，理由为

____；

（至少从两个不同的角度说明推断的合理性）

(3) 假设八、九年级全体学生都参加了此次测试，

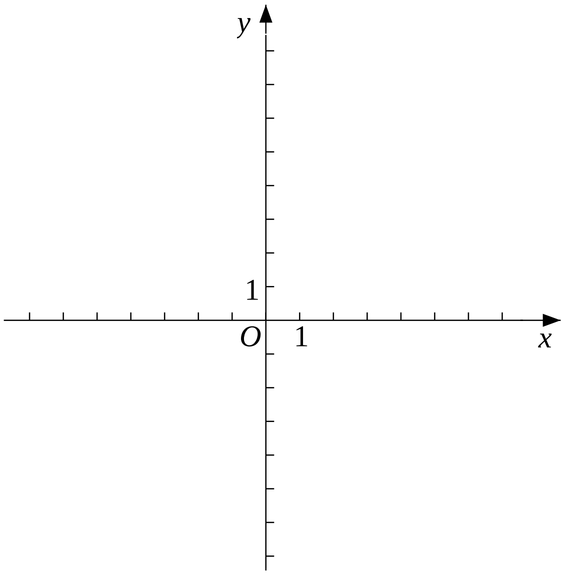
① 预估九年级学生达到优秀的约有__________人；

② 如果年级排名在前 70 名的学生可以被评选为“运动达人”，预估八年级学生至少要达到__________分才可以入选．

26．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-4ax(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 A，B(A 在 B 的左侧)．

(1) 求点 A，B 的坐标及抛物线的对称轴；

(2) 已知点 $P(2，2)$，$Q(2+2a，5a)$，若抛物线与线段 PQ 有公共点，请结合函数图象，求 a 的取值范围．

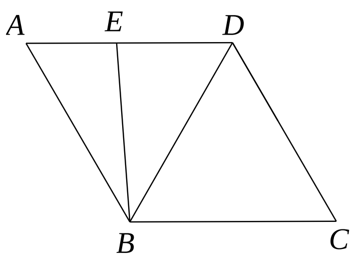


27．已知菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，点 E 为边 AD 上一个动点(不与点 A，D 重合)，点 F 在边 DC 上，且 $AE=DF$，将线段 DF 绕着点 D 逆时针旋转 $120°$ 得线段 DG，连接 GF，BF，EF.

(1) 依题意补全图形；

(2) 求证：$\triangle BEF$ 为等边三角形；

(3) 用等式表示线段 BG，GF，CF 的数量关系，并证明．



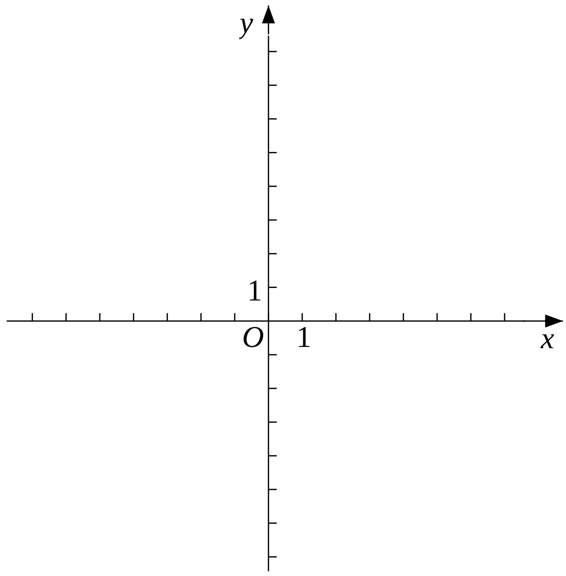
28．对于平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和图形 G，给出如下定义：若图形 G 上存在两个点 A，B，使得△PAB 是边长为 2 的等边三角形，则称点 P 是图形 G 的一个“和谐点”．

已知直线 l：$y=\sqrt{3}x+n(n\geq 0)$ 与 x 轴交于点 M，与 y 轴交于点 N，⊙O 的半径为 r．

(1) 若 $n=0$，在点 P_1(2，0)，P_2(0，$2\sqrt{3}$)，P_3(4，1)中，直线 l 的和谐点是__________；

(2) 若 $r=2$，⊙O 上恰好存在 2 个直线 l 的和谐点，求 n 的取值范围；

(3) 若 $n=3\sqrt{3}$，线段 MN 上存在⊙O 的和谐点，直接写出 r 的取值范围．



2020 北京燕山初三二模数学

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	A	B	D	A	C	B	D	C

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．$x \geq 2$；　　10．$x(x+2)(x-2)$；

11．答案不唯一，如，$2a(a+b)=2a^2+2ab$；　　12．答案不唯一，如，－2；

13．180；　　14．$\frac{1}{2}$；　　15．$\begin{cases} x = y+5, \\ \frac{1}{2}x = y-5. \end{cases}$　　16．①②.

三、解答题（本题共 68 分，第 17－22 题，每小题 5 分，第 23－26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）

17．解：原式＝$-9+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1$

＝-8.

18．解：去分母，得 $x-1-6(x+1) \geq 3$，

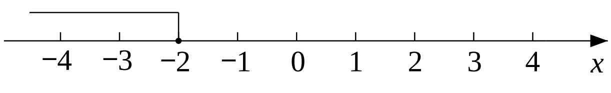
去括号，得 $x-1-6x-6 \geq 3$，

移项合并同类项，得 $-5x \geq 10$，

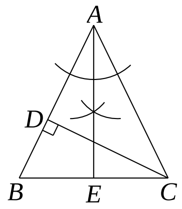
系数化为 1，得 $x \leq -2$，

∴原不等式的解集为 $x \leq -2$.

在数轴上表示如下：



19．(1) 解：补全的图形如下图；



(2) 证明：∵$AB=BC$，

∴$\angle B=\angle ACB$.

又∵AE是$\angle BAC$的平分线，

∴$AE\perp BC$，

∴$\angle ACB+\angle CAE=90°$.

∵$CD\perp AB$，

∴$\angle B+\angle BCD=90°$ ，

∴$\angle BCD=\angle CAE$.

20．解：(1) 由题意，得 $\Delta=[-(2m+1)]^2-4\times m\times 2$

$$=(4m^2+4m+1)-8m$$

$$=4m^2-4m+1$$

$$=(2m-1)^2.$$

∵不论m为何实数，$(2m-1)^2\geq 0$恒成立，即$\Delta\geqslant 0$恒成立，

∴方程总有两个实数根.

(2) 此题答案不唯一

由求根公式，得

$$x_{1,2}=\frac{(2m+1)\pm\sqrt{(2m-1)^2}}{2m},$$

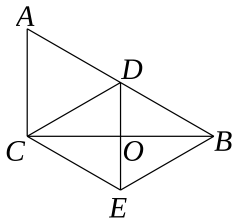
∴原方程的根为$x_1=2$，$x_2=\dfrac{1}{m}$.

∵方程的两个根都是正整数，

∴取$m=1$，

此时方程的两根为$x_1=2$，$x_2=1$.

21．(1)证明：∵O是BC边中点，



∴$OC=OB$,

又∵$OE=OD$,

∴四边形$DCEB$是平行四边形.

∵Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，D为AB中点，

∴$CD=BD$,

∴四边形$DCEB$为菱形.

(2) 解：∵$CD=BD$，$\angle DCB=30°$，

∴$\angle ABC=\angle DCB=30°$.

∵Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$\angle ABC=30°$，

∴$AB=12$，$BC=6\sqrt{3}$.

∵D为AB中点，O是BC中点，

∴$DO=\dfrac{1}{2}AC=3$，

∴$S_{菱形DCEB}=BC\cdot DO=18\sqrt{3}$.

22．解：(1) 将点$A(1，4)$的坐标代入$y=mx+3$中，

得 $4=m\times1+3$，解得$m=1$.

在$y=x+3$中，令$y=0$，得$x=-3$，

∴点C的坐标为$(-3，0)$.

将点$A(1，4)$的坐标代入$y=\dfrac{k}{x}$中，

得 $k=1\times4=4$.

(2) $P(-5，0)$或$P(-1，0)$.

23．(1)证明：如图，连接OC,

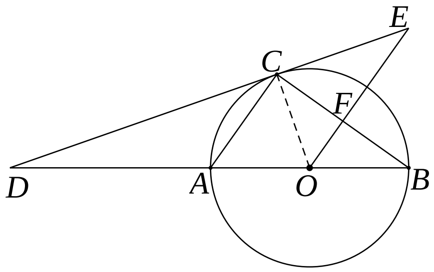
∵AB为⊙O的直径，

∴$\angle ACB=\angle ACO+\angle OCB=90°$.

∵DE是⊙O的切线，

∴$\angle OCD=\angle ACO+\angle ACD=90°$，

∴$\angle OCB=\angle ACD$.



∵OB，OC是⊙O的半径，

∴$OB=OC$，

∴$\angle B=\angle OCB$.

∵$OE// AC$，

∴$\angle ACD=\angle E$，

∴$\angle B=\angle E$.

(2)解：在Rt△ACB中，$\cos B=\dfrac{CB}{AB}=\dfrac{4}{5}$，$AB=10$，

∴$BC=8$，$AC=6$.

∵$\angle ACB=\angle OCE=90°$，$\angle B=\angle E$，

∴$\triangle ACB\backsim\triangle OCE$，

∴$\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{AB}{OE}$，

∴$\dfrac{6}{5}=\dfrac{10}{OE}$，

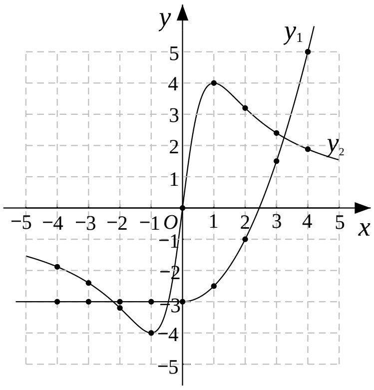
∴$OE=\dfrac{25}{3}$.

∵$OF// AC$，O为AB中点，

∴$OF=\dfrac{1}{2}AC=3$，

∴$EF=OE-OF=\dfrac{16}{3}$.

24．解：本题答案不唯一，如，

(1) 

(2) ① 3.13；

②当 $x=-1$ 时，y_2有最小值-4；

③ $-2.22<x<-0.45$，或 $x>3.24$．

25．解：(1)八；

(2)九；

理由：①九年级优秀率 40%，八年级优秀率 30%，说明九年级体能测试优秀人数更多；

②九年级中位数为 76，八年级为 72，说明九年级一半的同学测试成绩高于 76 分，而八年级一半同学的测试成绩仅高于 72 分.

③通过图表，估计八年级成绩平均数为 73.25，低于九年级的 79 分，说明九年级整体水平高于八年级.

综合以上三个(两个)理由，说明九年级学生的运动状况更好.

(3) ①80；

②78.

26．解：(1) ∵ $y=ax^2-4ax=ax(x-4)$，

∴抛物线与 x 轴交于点 $A(0，0)$，$B(4，0)$.

抛物线 $y=ax^2-4ax$ 的对称轴为直线：$x=-\dfrac{-4a}{2a}=2$.

(2) $y=ax^2-4ax=a(x^2-4x)=a(x-2)^2-4a$，

抛物线的顶点坐标为$(2，-4a)$.

令 $y=5a$，得 $ax^2-4ax=5a$，

$a(x-5)(x+1)=0$，

解得 $x=-1$，或 $x=5$，

∴当 $y=5a$ 时，抛物线上两点 $M(-1，5a)$，$N(5，5a)$.

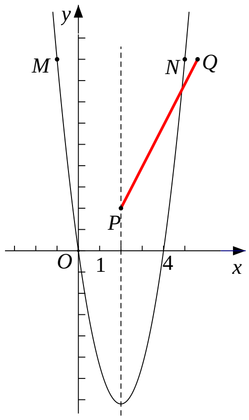


图 1

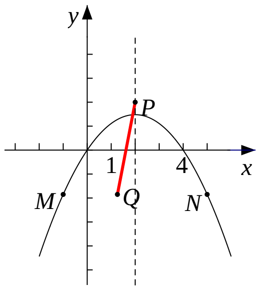


图 2

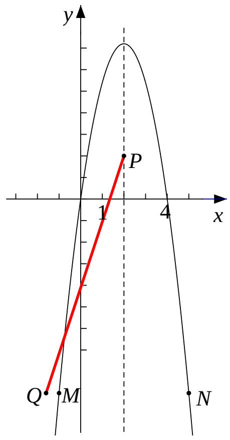


图 3

①当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，顶点位于 x 轴下方，且 $Q(2+2a，5a)$ 位于点 P 的右侧，

如图 1，当点 N 位于点 Q 左侧时，抛物线与线段 PQ 有公共点，

此时 $2+2a\geqslant 5$，

解得 $a>\dfrac{3}{2}$.

②当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点位于 x 轴上方，点 $Q(2+2a，5a)$ 位于点 P 的左侧，

（ⅰ）如图 2，当顶点位于点 P 下方时，抛物线与线段 PQ 有公共点，

此时 $-4a<2$，

解得 $a>-\dfrac{1}{2}$.

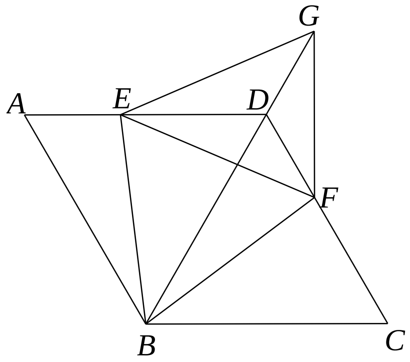
（ⅱ）如图 3，当顶点位于点 P 上方，点 M 位于点 Q 右侧时，抛物线与线段 PQ 有公共点，

此时 $2+2a<-1$，

解得 $a<-\dfrac{3}{2}$.

综上，a 的取值范围是 $a>\frac{3}{2}$，或 $-\frac{1}{2}<a<0$，或 $a<-\frac{3}{2}$.

27．(1)解：补全图形，如图.



(2)证明：∵菱形 $ABCD$,

∴$AB=AD$.

又∵$\angle A=60°$，

∴$\triangle ABD$ 为等边三角形，

∴$\angle ABD=\angle BDC=60°$，$AB=BD$.

在$\triangle ABE$ 和$\triangle DBF$ 中，

$AB=BD$，$\angle A=\angle BDF$，$AE=DF$,

∴$\triangle ABE\cong\triangle DBF$,

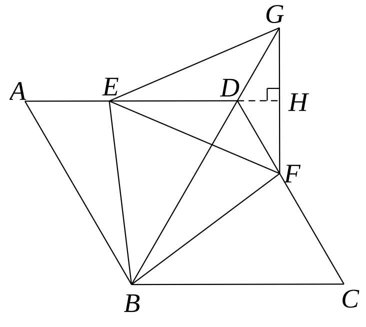
∴$BE=BF$，$\angle ABE=\angle DBF$,

∴$\angle EBF=\angle EBD+\angle DBF=\angle EBD+\angle ABE=\angle ABD=60°$，

∴$\triangle BEF$ 为等边三角形.

(3) BG，GF，CF 的数量关系为 $\sqrt{3}(BG-CF)=2GF$.

证明：如图 2，取 FG 中点 H，连接 DH,



∵$AE=DF=DG$，$\angle FDG=120°$，

∴$\angle DFG=\angle DGF=30°$，$DH\perp GF$,

∴$GF=2GH=2DG\cdot\cos30°=\sqrt{3}DG$.

又∵$\triangle BCD$ 为等边三角形，

∴$BD=CD$，$\angle BDC=60°$．

∵$\angle FDG=120°$，

∴$\angle BDC+\angle FDG=180°$，即 B，D，G 三点在同一条直线上，

∴$BG=BD+DG=CD+DG=CF+DF+DG=CF+2DG$，

∴$BG-CF=2DG$.

∴$\sqrt{3}(BG-CF)=2\sqrt{3}DG=2GF$.

28．解：(1)直线 l 的和谐点是 $\underline{P_1,\ P_2}$；

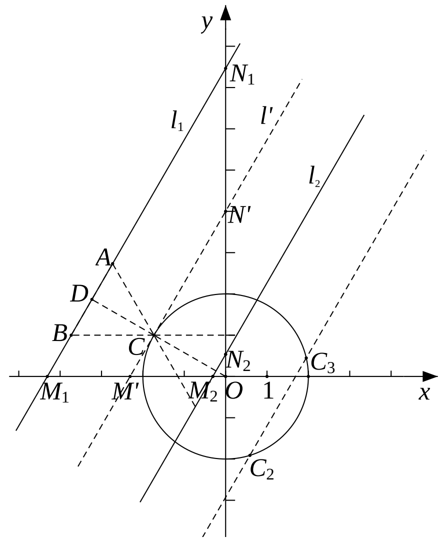
(2) 如图，设 A，B 在直线 l 上，点 C 在⊙O 上，△ABC 是边长为 2 的等边三角形，

∵$n\geq 0$，∴当直线 l 位于 l_1 时，⊙O 上只有 1 个点 C 是直线 l 的和谐点，

当直线 l 位于 l_2 时，⊙O 上有 3 个点 C，C_2，C_3 都是直线 l 的和谐点，

∴满足条件的直线 l 应位于直线 l_1 和 l_2 之间.

设过点 C 且与⊙O 相切的直线为 l'，直线 l_1，l_2，l' 分别与 x 轴，y 轴交于点 M_1，N_1，M_2，N_2，M'，N'．连接 OC，则 $OC\perp l'$，$OC=2$．取 AB 中点 D，连接 CD，则 $CD=\sqrt{3}$，且 O，C，D 三点共线，∴$OD=2+\sqrt{3}$．



∵直线 l：$y=\sqrt{3}x+n$ 与 x 轴交于点 M，

与 y 轴交于点 N，

∴$M(-\frac{\sqrt{3}}{3}n,\ 0)$，$N(0,\ n)$，

∴$\tan\angle MNO=\frac{OM}{ON}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\angle MNO=30°$．

∴在 Rt△OCN' 和 Rt△ODN_1 中，

$ON'=2OC=4$，

$ON_1=2OD=4+2\sqrt{3}$，

∴$N'N_1=ON_1-ON'=2\sqrt{3}$，

由对称性得 $N'N_2=2\sqrt{3}$，即 $N_2(0，4-2\sqrt{3})$，

∴n 的取值范围是 $4-2\sqrt{3}<n<4+2\sqrt{3}$.

(3) r 的取值范围是 $\frac{\sqrt{7}}{2}\le r\le 7$.

详解如下：

∵ $y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$，∴$N(0，3\sqrt{3})$，$ON=3\sqrt{3}$，$\angle ONM=30°$.

如图，设 A，B 在⊙O 上，P 是 MN 上的点，△ABP 是边长为 2 的等边三角形，

设 AB 的中点为 D，则 O，P，D 三点共线，

∴$r=OB=\sqrt{BD^2+OD^2}$，

又 $OD=OP-PD$（图 1），或 $OD=OP+PD$（图 2），而 $BD=1$，$PD=\sqrt{3}$ 为定值，

∴只需考虑 OP 的取值范围即可.

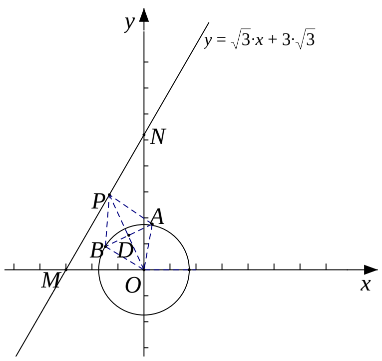


图 1

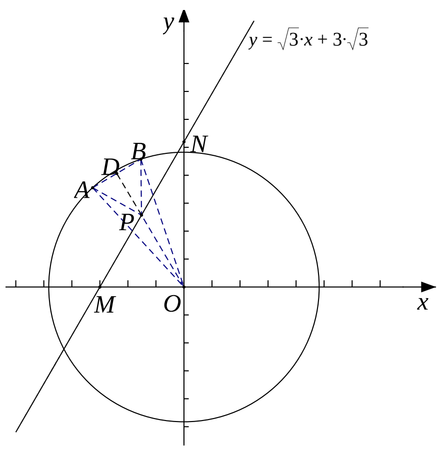


图 2

如图 3，当 $OP\perp MN$ 时，OP 最小，此时⊙O 的半径最小.

∵ $ON=3\sqrt{3}$，$\angle ONP=30°$，

∴$OP=\frac{1}{2}ON=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

又∵$PD=\sqrt{3}$，

∴$OD=OP-PD=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

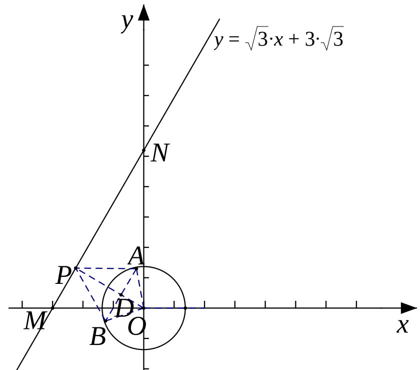


图 3

∴在 Rt△OBD 中，$BD=1$，$OD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$r=OB=\sqrt{1^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$．

如图 4，当⊙O的和谐点恰好是 N点(即 P点与 N点重合)时，OP最大，此时⊙O的半径最大，

∵$ON=3\sqrt{3}$，$ND=\sqrt{3}$，

∴$OD=4\sqrt{3}$，

又 $BD=1$，

∴$r=OB=\sqrt{1^2+(4\sqrt{3})^2}=7$.

综上，r 的取值范围是$\frac{\sqrt{7}}{2}\le r\le 7$．

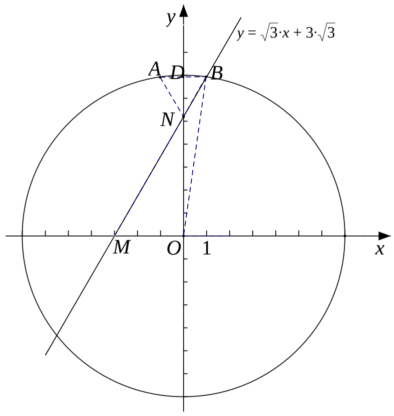


图 4