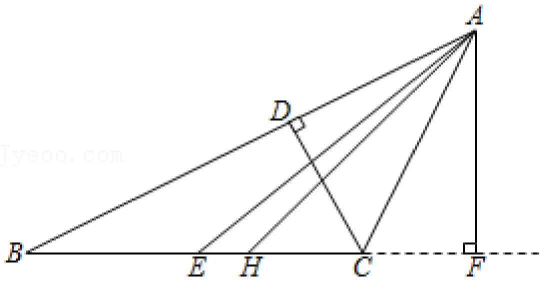
2021 北京门头沟初三一模

数　　学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1．如图，在 ΔABC 中，BC 边上的高是(　　)

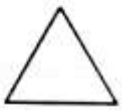
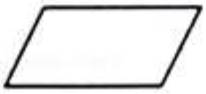


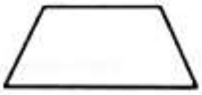
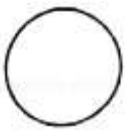
A．CD　　B．AE　　C．AF　　D．AH

2．根据国家卫健委官网统计，截至 2021 年 4 月 10 日，31 个省（自治区、直辖市）和新疆生产建设兵团累计报告接种新冠病毒疫苗 16447.1 万剂次，将 16447.1 万用科学记数法表示为(　　)

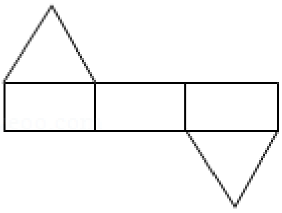
A．1.64471×10^{4}　　B．1.64471×10^{8}　　C．1.64471×10^{9}　　D．1.64471×10^{10}

3．在下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是(　　)

A．等边三角形　　B．平行四边形

C．等腰梯形　　D．圆

4．某个几何体的展开图如图所示，该几何体是(　　)

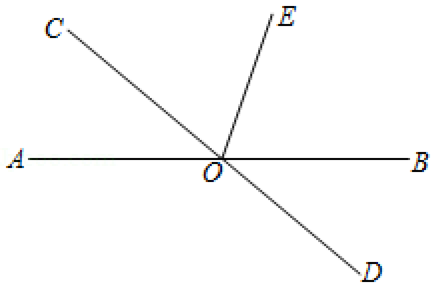


A．三棱柱　　B．三棱锥　　C．长方体　　D．圆柱

5．内角和与外角和相等的图形是(　　)

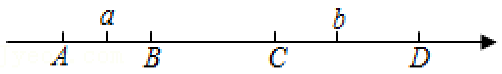
A．三角形　　B．四边形　　C．五边形　　D．六边形

6．如图，直线 AB，CD 交于点 O，射线 OE 平分 $\angle COB$，若 $\angle BOD=40^\circ$，则 $\angle AOE$ 等于(　　)



A．40°　　B．100°　　C．110°　　D．140°

7．点 a，b 在数轴上的位置如图所示，且满足 $a+b>0$，$a\cdot b<0$，则原点所在的位置有可能是(　　)



A．点 A　　B．点 B　　C．点 C　　D．点 D

8．在物理实验室实验中，为了研究杠杆的平衡条件，设计了如下实验，如图，铁架台左侧钩码的个数与位置都不变，在保证杠杆水平平衡的条件下，右侧采取变动钩码数量即改变力 F，或调整钩码位置即改变力臂 L，确保杠杆水平平衡，则力 F 与力臂 L 满足的函数关系是(　　)

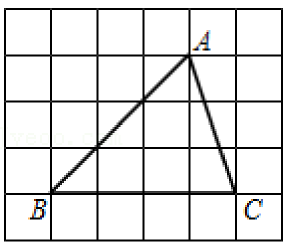
A．正比例函数关系　　B．反比例函数关系

C．一次函数关系　　D．二次函数关系

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．如果式子 $\sqrt{x+3}$ 在实数范围内有意义，那么 x 的取值范围是____.

10．如图所示的网格是正方形网格，点 A，B，C 是网格线交点，那么 $\angle BAC+\angle ACB=$____$^{\circ}$.

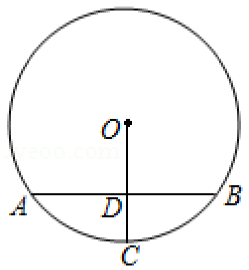


11．请你写出一个大于 2 小于 3 的无理数是____.

12．已知 $x+y=-1$ 且 $|x|>1$，写出一组符合条件的值____.

13．已知一元二次方程 $ax^2-x+1=0(a\neq 0)$，有两个实数根，则 a 的取值范围是____.

14．如图，在 $\odot O$ 中，$AC=BC$，$AB=8$，半径 $r=5$，则 $DC=$____.



15．下面是某小区随机抽取的100户家庭的月用电量情况统计表：

月户用电量 x（千瓦时/户/月）	$x\leqslant 240$	$240<x\leqslant 300$	$300<x\leqslant 350$	$350<x\leqslant 400$	>400
户数（户）	5	22	27	31	15

从中任意抽出一个家庭进行用电情况调查，则抽到的家庭月用电量为第二档（用电量大于240小于等于400为第二档）的概率为____.

16．以下是小亮的妈妈做晚饭的食材准备及加工时间列表，有一个炒菜锅，一个电饭煲，一个煲汤锅，两个燃气灶可用，做好这顿晚餐一般情况下至少需要____分钟.

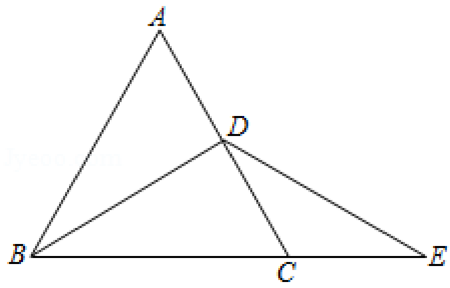
用时 种类	准备时间（分钟）	加工时间（分钟）
米饭	3	30
炒菜1	5	6
炒菜2	5	8
汤	5	15

三、解答题（本题共68分，第17～21题每小题5分，第22～24题每小题5分，第25题5分，第26题6分，第27～28题每小题5分）解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（5分）计算：$|-\sqrt{2}|-(\pi-2021)^{0}-2\sin 45^{\circ}+(\frac{1}{2})^{-1}$.

18.（5分）解不等式组：$\begin{cases}2x-1>3(x-1)\\ \dfrac{5-x}{2}<x+3\end{cases}$.

19.（5分）已知，如图，ΔABC是等边三角形，$BD\perp AC$于D，E是BC延长线上的一点，$DB=DE$．求$\angle E$的度数.



20．（5 分）已知 $x^2+4x-1=0$，求代数式 $(x+2)^2-(x+3)(x-3)+x^2$ 的值．

21．（5 分）已知：ΔABC， CD 平分 $\angle ACB$．

求作：菱形 $DFCE$，使点 F 在 BC 边上点 E 在 AC 边上，下面是尺规作图过程作法：①分别以 C 、 D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}CD$ 为半径作弧，两弧分别交于点 M 、 N；

②作直线 MN 分别与 AC 、 BC 交于点 E 、 F；

③连接 DE 、 DF， DC 与 EF 的交点记为点 G；四边形 $DFCE$ 为所求作的菱形．

（1）利用直尺和圆规依做法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：$\because DE=EC$， $DF=FC$，

$\therefore EF$ 为 DC 的垂直平分线．

$\because DE=EC$，

$\therefore \angle EDC=\angle ECD$．

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$，

$\therefore \angle ECD=\angle DCB$．

$\therefore \angle EDC=\angle DCB$．

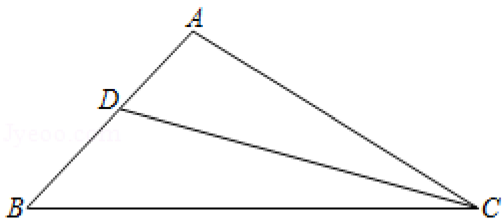
$\therefore$____//____(____)（填推理依据）．

同理可证 $DF//CE$，

$\therefore$四边形 $DFCE$ 为平行四边形．

又$\because$____，

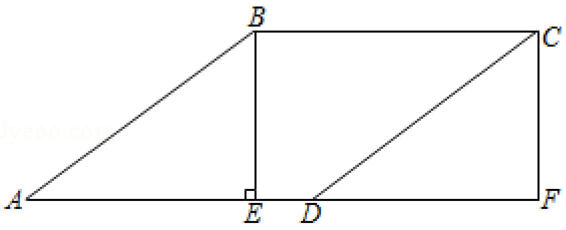
$\therefore$四边形 $DFCE$ 为菱形．



22．（6 分）已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $BE\perp AD$ 于点 E，延长 AD 至 F，使 $DF=AE$，连接 CF．

（1）求证：四边形 $EBCF$ 是矩形；

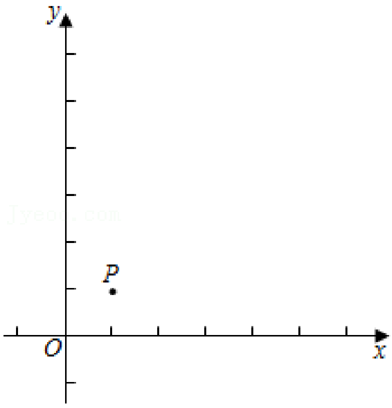
（2）若 $\sin\angle A=\frac{3}{5}$， $CF=3$，求 AF 的长．



23．（6 分）在平面直角坐标系 xOy 中，正比例函数 $y=x$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0,x\neq 0)$ 的图象相交于点 $P(1,1)$．

（1）求 k 的值；

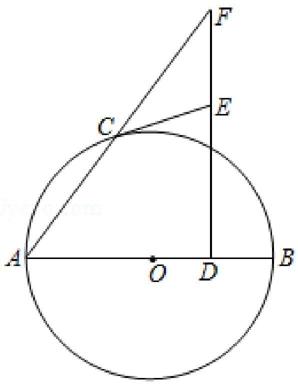
（2）过点 $M(0,a)$ 平行于 x 轴的直线，分别与第一象限内的正比例函数 $y=x$、反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象相交于 $A(x_1$，$y_1)$、$B(x_2$，$y_2)$ 当 $\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$ 时，求 x_1+x_2 的取值范围．



24．（6 分）如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，C 是 $\odot O$ 上一点，D 是 OB 中点，过点 D 作 AB 的垂线交 AC 的延长线于点 F，FD 上有一点 E，$CE=EF$．

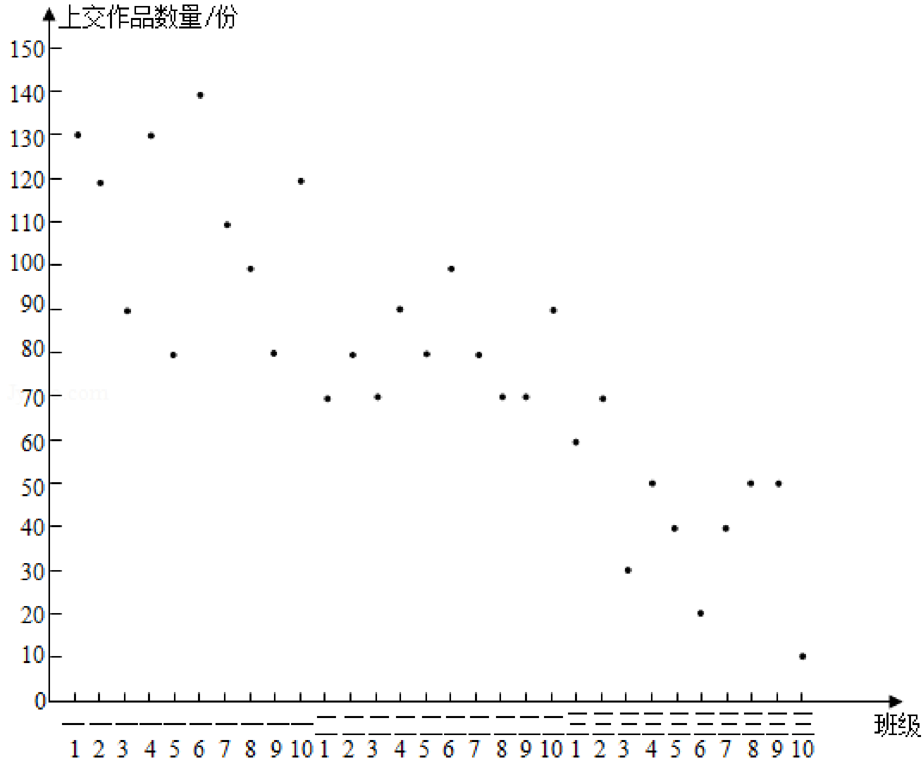
（1）求证：CE 是 $\odot O$ 的切线；

（2）如果 $\sin F=\dfrac{3}{5}$，$EF=1$，求 AB 的长．



25．（5 分）2021 年是中国共产党成立 100 周年某中学面向学校全体师生征集“礼赞百年”活动作品，作品类别包括征文、书法、绘画．该中学学生小明统计了学校 30 个教学班上交活动作品的数量（单位：份），相关信息如下：

a．小明所在中学 30 个教学班上交作品的数量统计图：



b．小明所在中学各班学生上交作品数量的平均数如表：

班级	初一年级（10 个班）	初二年级（10 个班）	初三年级（10 个班）
平均数	110	80	40

（1）该中学各班学生上交作品数量的平均数约为____（结果取整数）；

（2）已知该中学全体教师上交作品的数量恰好是该校各班级中，上交作品数量最多的班级与最少的班级的数量差，则全体教师上交作品的数量为____份．

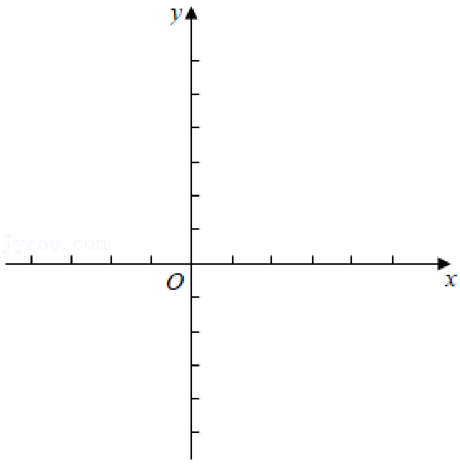
（3）记该中学初一年级学生上交作品数量的方差为 s_1^2，初二年级学生上交作品数量的方差为 s_2^2，初三年级学生上交作品数量的方差为 s_3^2．直接写出 s_1^2，s_2^2，s_3^2 的大小关系．

26．（6 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知关于 x 的二次函数 $y=x^2-2tx+1$．

（1）求该二次函数图象的对称轴；

（2）若点 $M(t-2,m)$，$N(t+3,n)$ 在抛物线 $y=x^2-2tx+1$ 上，试比较 m、n 的大小；

（3）$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 是抛物线 $y=x^2-2tx+1$ 上的任意两点，若对于 $-1\leqslant x_1<3$ 且 $x_2=3$，都有 $y_1\leqslant y_2$，求 t 的取值范围．



27．（7 分）在正方形 $ABCD$ 中，将边 AD 绕点 A 逆时针旋转 $\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ 得到线段 AE， AE 与 CD 延长线相交于点 F，过 B 作 $BG//AF$ 交 CF 于点 G，连接 BE．

（1）如图 1，求证：$\angle BGC=2\angle AEB$；

（2）当 $(45^\circ<\alpha<90^\circ)$ 时，依题意补全图 2，用等式表示线段 AH， EF， DG 之间的数量关系，并证明．

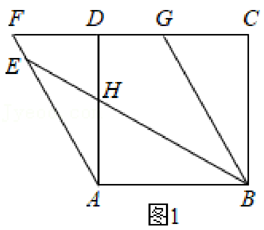


图1

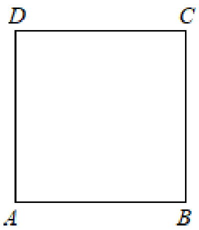


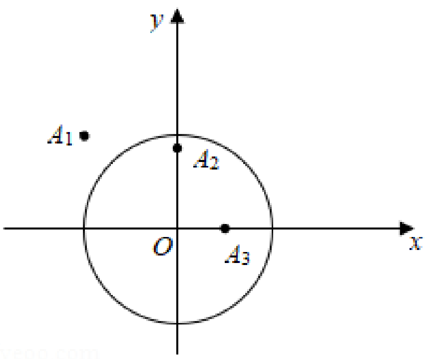
图2

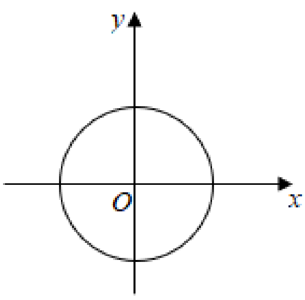
28．（7 分）在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1，点 A 是平面内一点，过点 A 的直线交 $\odot O$ 于点 B 和点 $C(AB\leqslant AC)$， $0\leqslant BC\leqslant 1$，我们把点 B 称为点 A 关于 $\odot O$ 的“斜射点”．

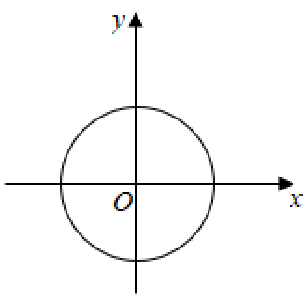
（1）如图，在点 $A_1(-1,1)$， $A_2(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$， $A_3(\dfrac{1}{2}，0)$ 中，存在关于 $\odot O$ 的“斜射点”的是____．

（2）已知若 $A(0,2)$，点 A 关于 $\odot O$ 的斜射点”为点 B，则点 B 的坐标可以是____．（写出两个即可）

（3）若点 A 直线 $y=kx+k$ 上，点 A 关于 $\odot O$ 的“斜射点”为 $B(-1,0)$，画出示意图，直接写出 k 的取值范围．







参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1.【分析】根据三角形的高的概念解答．

【解答】解：$\because AF\perp BC$，

$\therefore BC$ 边上的高是 AF，

故选：C．

【点评】本题考查的是三角形的高的概念，从三角形的一个顶点向底边作垂线，垂足与顶点之间的线段叫做三角形的高．

2.【分析】科学记数法的表示形式为 $a\times 10^{n}$ 的形式，其中 $1\leqslant |a|<10$，n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 $\geqslant 10$ 时，n 是正整数；当原数的绝对值 <1 时，n 是负整数．

【解答】解：16447.1 万 $=1.64471\times 10^{8}$．

故选：B．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a\times 10^{n}$ 的形式，其中 $1\leqslant |a|<10$，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

3.【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解．

【解答】解：A、是轴对称图形，不是中心对称图形．故此选项错误；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形．故此选项错误；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形．故此选项错误；

D、是轴对称图形，也是中心对称图形．故此选项正确．

故选：D．

【点评】此题主要考查了中心对称图形和轴对称，掌握中心对称图形与轴对称图形的概念．

如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴；在同一平面内，如果把一个图形绕某一点旋转 180 度，旋转后的图形能和原图形完全重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个旋转点，就叫做中心对称点．

4.【分析】由平面图形的折叠及立体图形的表面展开图的特点解题．

【解答】解：三个长方形和两个等腰三角形折叠后，能围成的几何体是三棱柱．

故选：A．

【点评】本题考查了由三视图判断几何体的知识，熟记常见几何体的平面展开图的特征，是解决此类问题的关键．

5.【分析】任何多边形的外角和是 360 度，因而这个多边形的内角和是 360 度．n 边形的内角和是 $(n-2)\cdot 180^{\circ}$，如果已知多边形的内角和，就可以得到一个关于边数的方程，解方程就可以求出多边形的边数．

【解答】解：设多边形的边数为 n，根据题意

$(n-2)\cdot 180^{\circ}=360^{\circ}$，

解得 $n=4$．

故选：B．

【点评】本题考查了多边形的内角和公式与多边形的外角和定理，需要注意，多边形的外角和与边数无关，任何多边形的外角和都是360°.

6.【分析】由对顶角的性质和平角的定义得到$\angle AOC=40^{\circ}$，$\angle BOC=140^{\circ}$，由角平分线的定义得到$\angle COE=70^{\circ}$，根据角的和差即可求得$\angle AOE$.

【解答】解：$\because \angle BOD=40^{\circ}$，

$\therefore \angle AOC=\angle BOD=40^{\circ}$，$\angle BOC=180^{\circ}-\angle BOD=140^{\circ}$，

$\therefore \angle COE=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}\times 140^{\circ}=70^{\circ}$，

$\therefore \angle AOE=\angle AOC+\angle COE=40^{\circ}+70^{\circ}=110^{\circ}$，

故选：C.

【点评】此题主要考查了对顶角的性质，角平分线的定义以及平角的定义，正确的利用角平分线的定义和对顶角的性质是解题的关键.

7.【分析】先确定a，b的正负情况，再根据数轴上原点与正负数的位置关系确定原点的可能位置.

【解答】解：$\because a\cdot b<0$，且数轴上a在b的左侧，

$\therefore a<0$，$b>0$，

$\because a+b>0$，

$\therefore |a|<|b|$，即a离原点的距离小于b离原点的距离，

$\therefore$点B可能是原点，

故选：B.

【点评】本题考查了数轴及有理数加法、乘法的符号法则，判断a，b的符号和绝对值的大小关系是解决本题的关键.

8.【分析】根据动力乘以动力臂等于阻力乘以阻力臂即可得到结论.

【解答】解：$\because$确保杠杆水平平衡，

$\therefore$力F与力臂L满足的函数关系是反比例函数关系，

故选：B.

【点评】本题考查了反比例函数的应用，正确的理解题意是解题的关键.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9.【分析】先根据二次根式有意义的条件列出关于x的不等式，求出x的取值范围即可.

【解答】解：$\because \sqrt{x+3}$在实数范围内有意义，

$\therefore x+3\geqslant 0$，

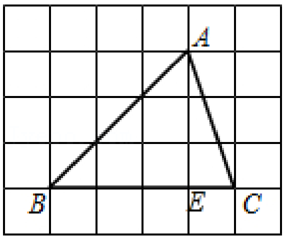
解得$x\geqslant -3$.

故答案为：$x\geqslant -3$.

【点评】本题考查的是二次根式有意义的条件，即被开方数大于等于 0，此题基础题，比较简单.

10.【分析】设小正方形的边长是 1，过A作$AE\perp BC$于E，则$AE=BE$，得出ΔABE是等腰直角三角形，求出$\angle ABC=45^{\circ}$，再根据三角形内角和定理求出答案即可.

【解答】解：设小正方形的边长是 1，过A作$AE\perp BC$于E，则$AE=BE=3$，



$\therefore \Delta AEB$是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABC = 45^\circ$，

$\therefore \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC = 135^\circ$，

故答案为：135．

【点评】本题考查了三角形内角和定理和等腰直角三角形的性质和判定等知识点，能正确作出辅助线是解此题的关键．

11．【分析】根据算术平方根的性质可以把2和3写成带根号的形式，再进一步写出一个被开方数介于两者之间的数即可．

【解答】解：$\because 2 = \sqrt{4}$，$3 = \sqrt{9}$，

$\therefore$写出一个大于2小于3的无理数是$\sqrt{5}$等．

故答案为$\sqrt{5}$等．本题答案不唯一．

【点评】此题考查了无理数大小的估算，熟悉算术平方根的性质．

12．【分析】根据绝对值的意义，求出x的取值范围，然后根据方程解答即可．

【解答】解：$\because |x| > 1$，

$\therefore x < -1$或$x > 1$，

取$x = -2$，则$x + y = -1$，

$\therefore y = 1$

$\therefore \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

故答案为：$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$．

【点评】本题考查了绝对值的意义，掌握绝对值意义是解题的关键．

13．【分析】由关于x的一元二次方程$ax^2 - x + 1 = 0$有两个实数根，即可得判别式△$\geqslant 0$且$a \neq 0$，继而可求得a的取值范围．

【解答】解：$\because$关于x的一元二次方程$ax^2 - x + 1 = 0$有两个实数根，

$\therefore \triangle = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times a \times 1 = 1 - 4a \geqslant 0$，

解得：$a \leqslant \dfrac{1}{4}$，

$\therefore a$的取值范围是$a \leqslant \dfrac{1}{4}$且$a \neq 0$．

故答案为：$a \leqslant \dfrac{1}{4}$且$a \neq 0$．

【点评】此题考查了一元二次方程判别式的知识．此题比较简单，注意掌握一元二次方程有两个实数根，即可得△≥0．同时考查了一元二次方程的定义．

14．【分析】由垂径定理得$OC\perp AB$，$AD=BD=\frac{1}{2}AB=4$，再由勾股定理求出$OD=3$，即可求解．

【解答】解：连接OA，如图所示：

$\because AC=BC$，$AB=8$，

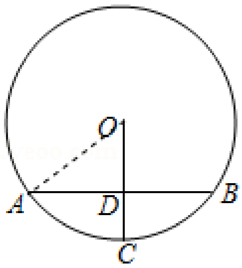
$\therefore OC\perp AB$，$AD=BD=\frac{1}{2}AB=4$，

$\therefore \angle ADO=90^{\circ}$，

在RtΔOAD中，由勾股定理得：$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

$\therefore DC=OC-OD=5-3=2$，

故答案为：2．



【点评】本题考查了垂径定理和勾股定理；熟练掌握垂径定理和勾股定理是解题的关键．

15．【分析】根据随机事件概率大小的求法，找准两点：

①符合条件的情况数目；

②全部情况的总数．

二者的比值就是其发生的概率的大小．

【解答】解：$\because$100户家庭中，用电量大于240小于等于400有$22+27+31=80$户，

$\therefore$抽到的家庭月用电量为第二档（用电量大于240小于等于400为第二档）的概率为$\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$，

故答案为：$\frac{4}{5}$．

【点评】本题考查概率的求法与运用，一般方法为：如果一个事件有n种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件A出现m种结果，那么事件A的概率P（A）$=\frac{m}{n}$．

16．【分析】由题意可知，熬饭准备时间需3分钟，熬饭需要30钟，妈妈可在等待饭熟的这30分钟内先完成煲汤和炒菜，所以妈妈做这顿饭至少需要$3+30=33$分钟．

【解答】解：$3+30=33$（分钟），

答：妈妈做晚饭最少要用33分钟，

故答案为：33．

【点评】本题考查了学生在生活中利用统筹方法解决实际问题的能力

三、解答题（本题共68分，第17～21题每小题5分，第22～24题每小题5分，第25题5分，第26题6分，第27～28题每小题5分）解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.【分析】直接利用绝对值的性质以及零指数幂的性质和特殊角的三角函数值、负整数指数幂的性质分别化简得出答案.

【解答】解：原式$=\sqrt{2}-1-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2$

$=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+2$

$=1$.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

18.【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】解：解不等式$2x-1>3(x-1)$，得$x<2$，

解不等式$\frac{5-x}{2}<x+3$，得$x>-\frac{1}{3}$，

则不等式组的解集为$-\frac{1}{3}<x<2$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知"同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到"的原则是解答此题的关键.

19.【分析】根据等边三角形的性质得出$AB=BC$，$\angle ABC=60^{\circ}$，根据"三线合一"得出$\angle DBC=\angle ABD=30^{\circ}$，根据等腰三角形的性质得出即可.

【解答】解：$\because\Delta ABC$是等边三角形，

$\therefore AB=BC$，$\angle ABC=60^{\circ}$，

$\because BD\perp AC$，

$\therefore\angle DBC=\angle ABD=\frac{1}{2}\times60^{\circ}=30^{\circ}$，

$\because DB=DE$，

$\therefore\angle E=\angle DBC=30^{\circ}$.

【点评】本题考查了等边三角形的性质和等腰三角形的性质，注意：①等边三角形的三边都相等，并且每个角都等于60°，②等腰三角形底边上的高平分顶角.

20.【分析】先根据完全平方公式和平方差公式展开，再合并同类项即可化简原式，继而根据已知等式得出$x^2+4x=1$，代入计算即可.

【解答】解：原式$=x^2+4x+4-x^2+9+x^2$

$=x^2+4x+13$，

$\because x^2+4x-1=0$，

$\therefore x^2+4x=1$，

则原式$=1+13=14$.

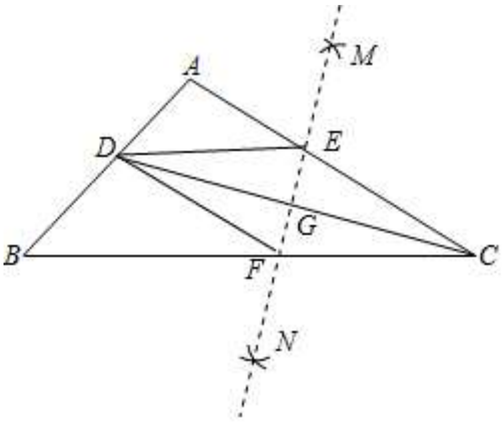
【点评】本题主要考查整式的混合运算$-$化简求值，解题的关键是掌握整式的混合运算顺序和运算法则.

21.【分析】(1）根据几何语言画出对应的几何图形；

（2）先证明$DE//CF$，$DF//CE$，则可判断四边形$DFCE$为平行四边形，然后利用$ED=EC$得到四边形$DFCE$为

菱形.

【解答】(1）解：如图，四边形 $DFCE$ 为所求作；



(2）证明：$\because DE=EC$， $DF=FC$，

$\therefore EF$ 为 DC 的垂直平分线.

$\because DE=EC$，

$\therefore \angle EDC=\angle ECD$.

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$，

$\therefore \angle ECD=\angle DCB$.

$\therefore \angle EDC=\angle DCB$.

$\therefore DE//CF$ （内错角相等两直线平行），

同理可证 $DF//CE$，

$\therefore$ 四边形 $DFCE$ 为平行四边形.

又 $\because ED=EC$，

$\therefore$ 四边形 $DFCE$ 为菱形.

故意答案为 DE， CF，内错角相等两直线平行； $ED=EC$.

【点评】本题考查了作图－复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法．解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作．也考查了平行四边形和菱形的判定.

22．【分析】(1）由菱形的性质得出 $AD=BC$， $AD//BC$，求出 $EF=BC$，再由平行四边形的判定得出四边形 $EBCF$ 是平行四边形，然后由矩形的判定即可得出结论；

(2）由菱形的性质得 $AB=BC$，再由矩形的性质得 $EF=BC$， $BE=CF=3$，然后由锐角三角函数定义得 $AB=5$，则 $EF=BC=AB=5$，由勾股定理求出 $AE=4$，即可求解.

【解答】(1）证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 菱形，

$\therefore AD=BC$， $AD//BC$，

又 $\because DF=AE$，

$\therefore DF+DE=AE+DE$，

即： $EF=AD$，

$\therefore EF=BC$，

$\therefore$ 四边形 $EBCF$ 是平行四边形，

又$\because BE \perp AD$，

$\therefore \angle BEF = 90°$.

$\therefore$四边形$EBCF$是矩形；

（2）解：$\because$四边形$ABCD$菱形，

$\therefore AB = BC$，

$\because$四边形$EBCF$是矩形，

$\therefore EF = BC$， $BE = CF = 3$，

$\because BE \perp AD$，

$\therefore \angle AEB = 90°$，

$\because \sin \angle A = \frac{3}{5} = \frac{BE}{AB}$， $BE = 3$，

$\therefore AB = 5$，

$\therefore EF = BC = AB = 5$， $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$，

$\therefore AF = AE + EF = 4 + 5 = 9$.

【点评】本题考查了矩形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、菱形的性质以及勾股定理等知识；熟练掌握矩形的判定与性质和菱形的性质是解题的关键.

23.【分析】(1）运用待定系数法将点$P(1,1)$代入$y = \frac{k}{x}(k \neq 0, x \neq 0)$，求出$k$即可；

（2）由题意得： $y_1 = y_2 = a$，进而可得$x_1 + x_2 = a + \frac{1}{a}$，根据$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$，即可求出$x_1 + x_2 \geqslant 2$，再由$\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$，即可得出结论.

【解答】解：(1）$\because$反比例函数$y = \frac{k}{x}(k \neq 0, x \neq 0)$的图象经过点$P(1,1)$，

$\therefore 1 = \frac{k}{1}$，

$\therefore k = 1$，

（2）由题意得： $y_1 = y_2 = a$，

$\therefore x_1 = y_1 = a$， $x_2 = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{a}$，

$\therefore x_1 + x_2 = a + \frac{1}{a}$，

$\because a > 0$，

$\therefore a + \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 2$，

$\therefore x_1 + x_2 \geqslant 2$，

当$a = \frac{1}{2}$时， $M(0, \frac{1}{2})$， $A(\frac{1}{2}$， $\frac{1}{2})$， $B(2, \frac{1}{2})$，

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$，

当 $a=2$，$M(0,2)$，$A(2,2)$，$B(\frac{1}{2}，2)$，

$\therefore x_1+x_2=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，

$\therefore x_1+x_2$ 的取值范围为：$2\leqslant x_1+x_2\leqslant\frac{5}{2}$.

【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，待定系数法求函数解析式，不等式性质等知识，熟练掌握待定系数法及反比例函数图象和性质等相关知识是解题关键.

24.【分析】(1) 连接 OC，由 $FD\perp AB$ 得到 $\angle1+\angle F=90°$，由等腰三角形的性质得到 $\angle3=\angle F$，$\angle1=\angle2$，进而得到 $\angle2+\angle3=90°$，即 $\angle ECO=90°$，由切线的判定可得 CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 根据三角函数，设出 $AD=3k$，$AF=5k$，可得 $FD=4k$，连接 CB 交 FD 于点 G，由 AB 为 $\odot O$ 直径，得到 $\angle ACB=\angle FCB=90°$，推出 $\angle F=\angle B$，再根据边角关系得出结论.

【解答】(1) 证明：如图 1，连接 OC，

$\because FD\perp AB$，

$\therefore \angle1+\angle F=90°$，

$\because CE=EF$，$OA=OC$，

$\therefore \angle3=\angle F$，$\angle1=\angle2$，

$\therefore \angle2+\angle3=90°$，

$\therefore \angle ECO=90°$，

$\therefore OC\perp CE$，

$\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore CE$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解：如图 2

$\because FD\perp AB$，$\sin\angle F=\frac{3}{5}$，

设 $AD=3k$，$AF=5k$，可得 $FD=4k$，

$\because D$ 为 OB 中点，

$\therefore OD=DB=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{3}AD$，

$\therefore DB=k$，

连接 CB 交 FD 于点 G，

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径，

$\therefore \angle ACB=\angle FCB=90°$，

$\therefore \angle F=\angle B$，

$\because DB=k$，

$\therefore GD=\frac{3}{4}k$，可得 $FG=\frac{13}{4}k$，

$\because \angle FCB=90°$，

$\therefore \angle 5+\angle F=\angle 3+\angle 4$，

$\because \angle F=\angle 3$，

$\therefore \angle 4=\angle 5$，

$\therefore CE=EF=EG$，

$\because EF=1$，

$\therefore FG=2$，

$\therefore \dfrac{13k}{4}=2$，$k=\dfrac{8}{13}$，

$\therefore AB=4k=\dfrac{32}{13}$.

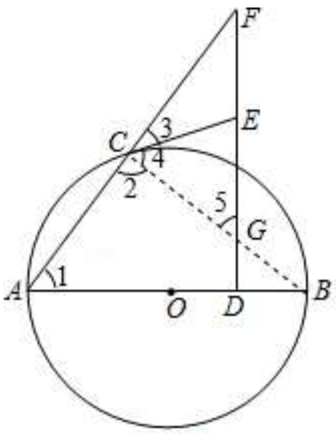


图2

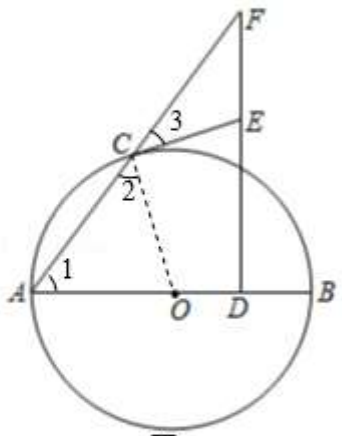


图1

【点评】本题考查了切线的性质，圆周角定理，等腰三角形的判定与性质，解题的关键是正确的作出辅助线.

25.【分析】(1) 利用加权平均数公式求该中学各班学生上交作品数量的平均数即可;

(2) 从统计图中找出上交作品数量最多的班级是初一年级 6 班 140 份，找出最少的班级是初三年级 10 班 10 份，全体教师上交作品的数量$=140-10=130$份;

(3) 先求出初一年级学生上交作品数量的方差为$s_1^{\ 2}=420$，初二年级学生上交作品数量的方差为$s_2^{\ 2}=100$，初三年级学生上交作品数量的方差为$s_3^{\ 2}=250$，再比较大小即可.

【解答】解:(1) 该中学各班学生上交作品数量的平均数为:

$\dfrac{110\times 10+80\times 10+40\times 10}{10+10+10}=\dfrac{2300}{30}\approx 77$（份），

故答案为：77.

（2）上交作品数量最多的班级是初一年级 6 班 140 份，最少的班级是初三年级 10 班 10 份，

全体教师上交作品的数量$=140-10=130$份，

故答案为：130；

（3）初一年级学生上交作品数量的方差为：

$${s_1}^2=\frac{1}{10}(20^2+10^2+20^2+20^2+30^2+30^2+0+10^2+30^2+10^2)=420,$$

初二年级学生上交作品数量的方差为：

$${s_2}^2=\frac{1}{10}(10^2+0^2+10^2+10^2+0^2+20^2+0+10^2+10^2+10^2)=100,$$

初三年级学生上交作品数量的方差为：

$${s_3}^2=\frac{1}{10}(20^2+30^2+10^2+10^2+0^2+20^2+0+10^2+10^2+20^2)=250,$$

$\because 420>250>100$，

$\therefore {s_1}^2>{s_3}^2>{s_2}^2$.

【点评】本题考查了加权平均数，极差，方差，掌握加权平均数，极差，方差的概念及计算方法，熟记方差公式是解题关键.

26.【分析】（1）把解析式化成顶点式即可求得；

（2）根据二次函数的性质即可判断；

（3）当$t\leqslant 1$时，此时$-1\leqslant x_1<3$，$x_2=3$都有$y_1\leqslant y_2$，当$t>1$时，令$x_1=-1$时，$y_1>y_2$，不符合题意，由此即可解决问题.

【解答】解：（1）$\because y=x^2-2tx+1=(x-t)^2-t^2+1$，

$\therefore$抛物线的对称轴为直线$x=t$；

（2）抛物线开口向上，对称轴为直线$x=t$，

$\therefore$点$M(t-2,m)$关于对称轴的对称点为$(t+2,m)$，

$t<t+2<t+3$，

$\therefore m<n$，

故答案为：$<$；

（3）当$t\leqslant -1$时，此时$-1\leqslant x_1<3$，$x2=3$都有$y_1\leqslant y_2$，符合题意；

只要满足$x1$到对称轴距离小于 3 到对称轴距离，从而取-1与 3 的中点 1，即可得之.

综上所述：$t\leqslant 1$.

【点评】本题考查了二次函数的性质，掌握性质是解题的关键.

27.【分析】（1）根据$BG//AF$，得到$\angle GBE=\angle AEB$，由AD绕点A逆时针旋转α得到线段AE，得到$AE=AB$，$\angle ABE=\angle AEB=\angle GBE$，由正方形性质得到$CD//AB$，得到$\angle BGC=2\angle AEB$；

（2）按照题意补全图形即可，在DC上取$DN=AH$，连接AN交BG于M，交BE于P，连接HM，EM，利用$\Delta ADN\cong\Delta BAH$、$\Delta ABP\cong\Delta MBP$、$\Delta ABH\cong\Delta MBH$证明$A$、$H$、$M$、$B$共圆，从而可得$\angle DNA=\angle GMN$，$GN=GM$，再证明$EF=GM$，即可得到$EF=AH+DG$.

【解答】解：（1）证明：$\because$边AD绕点A逆时针旋转$\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$得到线段$AE$，

$\therefore AD=AE$，

$\because$ 正方形 $ABCD$，

$\therefore AB=AD=AE$，

$\therefore \angle AEB=\angle ABE$，

$\because BG//AF$，

$\therefore \angle AEB=\angle GBE$，

$\therefore \angle ABE=\angle AEB=\angle GBE$，

$\therefore \angle ABG=2\angle AEB$，

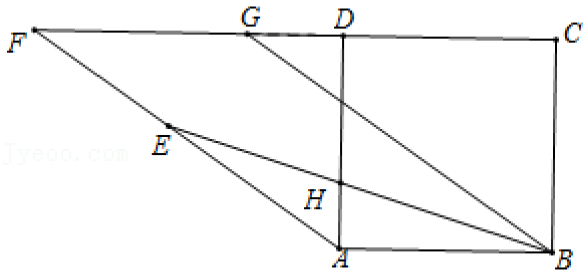
$\because$ 正方形 $ABCD$，

$\therefore AB//CD$，

$\therefore \angle BGC=\angle ABG$，

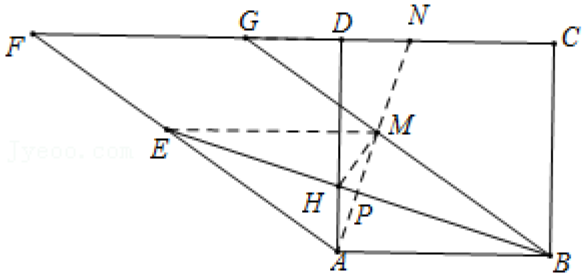
$\therefore \angle BGC=2\angle AEB$；

（2）补全图 2 如下：



线段 AH， EF， DG 之间的数量关系为： $EF=AH+DG$， 理由如下：

在 DC 上取 $DN=AH$， 连接 AN 交 BG 于 M， 交 BE 于 P， 连接 HM， EM， 如图：



$\because$ 正方形 $ABCD$，

$\therefore AB=AD$， $\angle ADN=\angle BAH=90^\circ$，

又 $DN=AH$，

$\therefore \Delta ADN\cong \Delta BAH(SAS)$，

$\therefore \angle DNA=\angle AHB$， $\angle DAN=\angle ABH$，

$\because \angle DNA+\angle DAN=90^\circ$，

$\therefore \angle DAN+\angle AHB=90^\circ$，

$\therefore \angle APH=90^\circ$，

$\therefore \angle BPM=\angle BPA=90^\circ$，

由（1）知 $\angle ABE=\angle GBE$，

且 $BP=BP$，

$\therefore \Delta ABP \cong \Delta MBP(ASA)$，

$\therefore AB = MB$，

而 $BH = BH$， $\angle ABE = \angle GBE$，

$\therefore \Delta ABH \cong \Delta MBH(SAS)$，

$\therefore \angle HAB = \angle HMB = 90^\circ$，

$\therefore A$、H、M、B 共圆，

$\therefore \angle AHB = \angle AMB = \angle GMN$，

$\therefore \angle DNA = \angle GMN$，

$\therefore GN = GM$，

$\because CF//AB$， $BG//AF$，

$\therefore$ 四边形 $ABGF$ 是平行四边形，

$\therefore BG = AF$，

$\because AE = AD = AB = MB$，

$\therefore EF = GM$，

$\therefore EF = GN$，

$\because GN = DG + DN$，

$\therefore EF = DG + AH$．

【点评】本题考查正方形性质应用及全等三角形的性质和判定，难度较大，解题的关键是构造辅助线，将 $AH + DG$ 转化为 GN．

28．【分析】（1）由图象直接判断点 A_1 存在关于 $\odot O$ 的"斜射点"；对于点 A_2，过点 A_2 作弦 $B_2C_2 \perp y$ 轴，用勾股定理求出弦 B_2C_2 的长为 1，可得点 A_2 存在关于 $\odot O$ 的"斜射点"；过点 A_3 作弦 $B_3C_3 \perp x$ 轴，说明此时弦 B_3C_3 的值最小，再用勾股定理求 B_3C_3 的长，可得 B_3C_3 的值大于 1，因此点 A_3 不存在关于 $\odot O$ 的"斜射点"；

（2）设 $\odot O$ 交 x 轴于点 C，连接 AC 交 $\odot O$ 于点 B，先证明点 B 是点 A 关于 $\odot O$ 的"斜射点"，再根据相似三角的性质求出点 B 的坐标，点 B 关于 y 轴的对称点也符合题意；

（3）先证明当直线 $y = kx + k$ 与 x 轴成 60° 角时， $BC = 1$，求出此时 k 的值，这个值就是 $k > 0$ 时的最小值或 $k < 0$ 时的最大值，由此求出 k 的取值范围.

【解答】解：（1）如图 1，由图象可知，对于 $\odot O$ 外的任意一点 A，都存在点 A 关于 $\odot O$ 的"斜射点"，

$\because$ 点 A_1 在 $\odot O$ 外，

$\therefore$ 点 A_1 存在关于 $\odot O$ 的"斜射点"；

过点 A_2 作弦 B_2C_2 与 y 轴垂直，连接 OC_2，

则 $A_2C_2 = A_2B_2 = \sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{2}$，

$\therefore B_2C_2 = 1$，

$\therefore$ 点 A_2 存在关于 $\odot O$ 的"斜射点"；

过点 A_3 作弦 B_3C_3 与 x 轴垂直，连接 OB_3，

设点 O 到弦 B_3C_3 的距离为 d，

则 $A_3B_3=\sqrt{1^2-d^2}=\sqrt{1-d^2}$，

当 $B_3C_3\perp x$ 轴时，d 的值最大，此时 A_3B_3 的值最小，B_3C_3 的值也最小；

$\because A_3B_3=\sqrt{1^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore B_3C_3=\sqrt{3}$，

$\therefore B_3C_3>1$，

$\therefore$ 点 A_3 不存在关于 $\odot O$ 的“斜射点”.

故答案为：A_1，A_2.

（2）如图 2，设 $\odot O$ 交 x 轴于点 C，

连接 AC 交 $\odot O$ 于点 B，作 $OD\perp AC$ 于点 D、$BE\perp y$ 轴于点 E，

则 $\angle ODC=\angle ODB=\angle AEB=90^\circ$，

$\because OA=2$，$OC=1$，$\angle AOC=90^\circ$，

$\therefore AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore BD=CD=OC\cdot\cos\angle ACO=1\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore BC=\frac{2\sqrt{5}}{5}<1$，

$\therefore$ 点 B 是点 A 关于 $\odot O$ 的“斜射点”；

$\because AB=\sqrt{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore BE=AB\cdot\sin\angle OAC=\frac{3\sqrt{5}}{5}1\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$；

$\because \frac{BE}{AE}=\tan\angle OAC=\frac{1}{2}$，

$\therefore AE=2BE=2\times\frac{3}{5}=\frac{6}{5}$，

$\therefore OE=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$，

$\therefore B(-\frac{3}{5}，\frac{4}{5})$.

同理，点 B 关于 y 轴的对称点也符合题意，其坐标为 $(\frac{3}{5}，\frac{4}{5})$.

故答案为：$(-\frac{3}{5}，\frac{4}{5})$，$(\frac{3}{5}，\frac{4}{5})$.

（3）如图 3，当 $k>0$ 时，直线 $y=kx+k$ 交 y 轴于点 $D(0,k)$，

当 $\angle OBD=60^\circ$ 时，连接 OC，

$\because OC=OB$，

$\therefore \Delta BOC$ 是等边三角形，

$\therefore BC = OB = 1$，

此时，点 B 是点 A 关于 $\odot O$ 的"斜射点"， $OD = OB \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$，

$\because$ 当 $OD \geqslant \sqrt{3}$ 时， $BC \leqslant 1$，

$\therefore k \geqslant \sqrt{3}$；

如图 4，当 $k < 0$ 时，同理可得，当 $k \leqslant -\sqrt{3}$ 时，点 B 是点 A 关于 $\odot O$ 的"斜射点".

综上所述， k 的取值范围是： $k \geqslant \sqrt{3}$ 或 $k \leqslant -\sqrt{3}$.

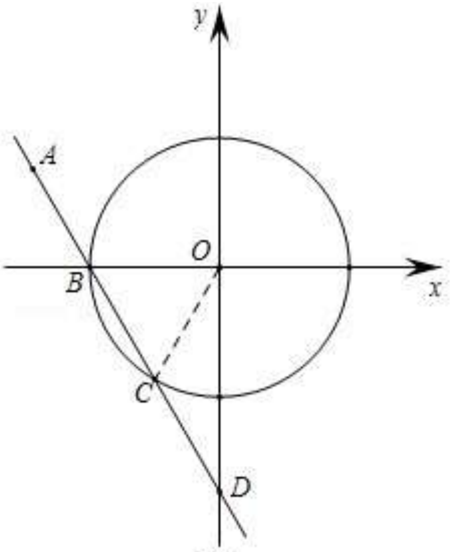


图4

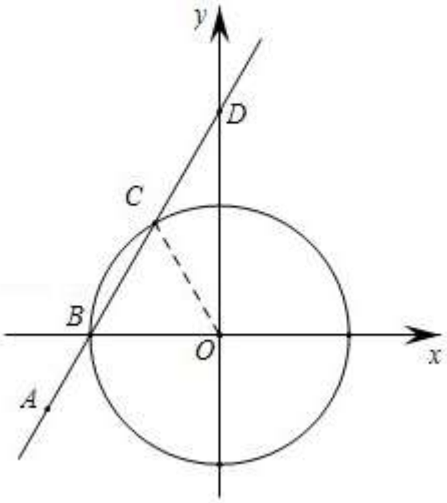


图3

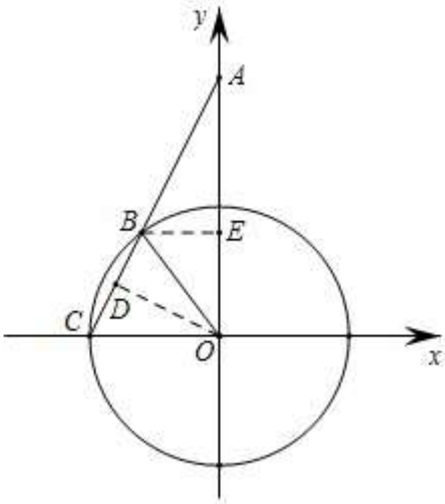


图2

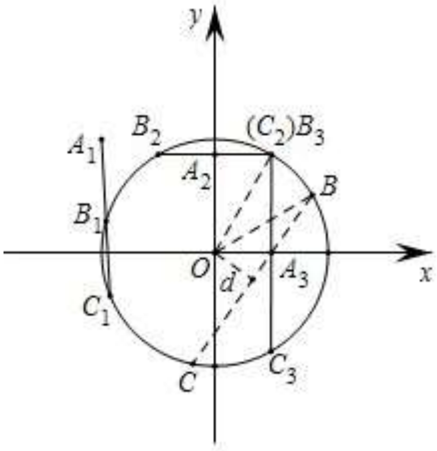


图1

【点评】此题重点考查圆的对称性、垂径定理、勾股定理、相似三角形的判定与性质等知识的综合运用，其中第（2）题应注意某些特殊点的坐标的求法，并且利用圆的对称性，使解题思路更简捷清晰；第（3）题要注意分类讨论、利用“边界值”求范围等思想方法的应用．此题中等难度，是一道较有新意的试题．