# 2021 北京西城初三二模

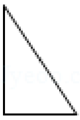
# 数　学

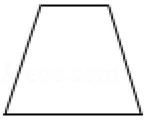
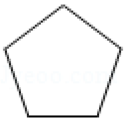
**一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1～8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个**

1．（2 分）“沿着高速看中国”，镶嵌于正阳门前的“中国公路零公里点”标志牌见证了中国高速公路从“零”出发的跨越式发展．截至 2020 年底，我国高速公路总里程已达 160000 公里．将 160000 用科学记数法表示应为(　　)

A．$0.16\times10^{6}$　　B．$1.6\times10^{6}$　　C．$1.6\times10^{5}$　　D．$16\times10^{4}$

2．（2 分）下列图形中是中心对称图形的是(　　)

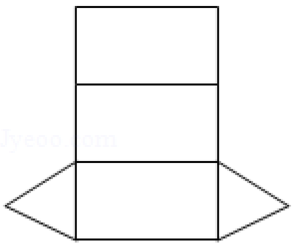
A．　　B．

C．　　D．

3．（2 分）以下变形正确的是(　　)

A．$\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{4}$　　B．$3\sqrt{2}=\sqrt{3\times2}$　　C．$(\sqrt{2})^{3}=3\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{2}}$

4．（2 分）若如图是某几何体的表面展开图，则这个几何体是(　　)



A．正三棱柱　　B．正方体　　C．圆柱　　D．圆锥

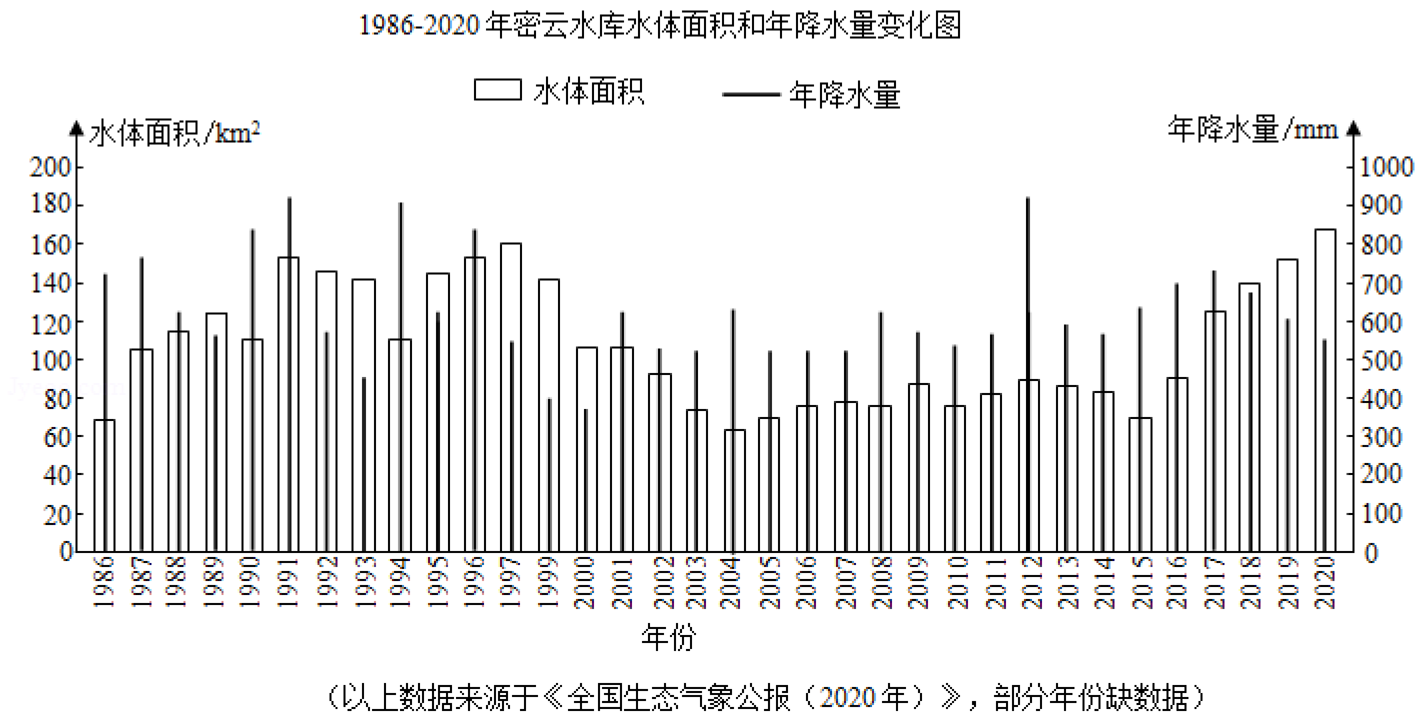
5．（2 分）半径为 $2cm$，圆心角为 $90^{\circ}$ 的扇形的面积等于(　　)

A．$1cm^{2}$　　B．$\pi cm^{2}$　　C．$2\pi cm^{2}$　　D．$4\pi cm^{2}$

6．（2 分）若相似三角形的相似比为 $1:4$，则面积比为(　　)

A．$1:16$　　B．$16:1$　　C．$1:4$　　D．$1:2$

7．（2 分）密云水库是首都北京重要水源地，水源地生态保护对保障首都水源安全及北京市生态和城市可持续发展具有不可替代的作用，以下是 $1986-2020$ 年密云水库水体面积和年降水量变化图．




对于现有数据有以下结论：

①2004 年的密云水库水体面积最小，仅约为 $20km^{2}$；

② 2015 – 2020 年，密云水库的水体面积呈持续增加趋势，表明水资源储备增多；

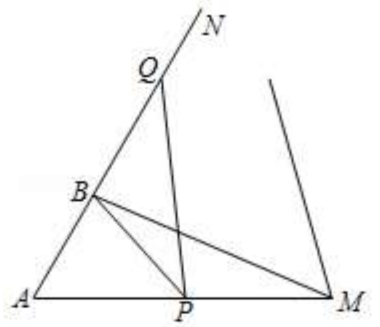
③在 1986 – 2020 年中，2020 年的密云水库水体面积最大，约为 $170km^{2}$；

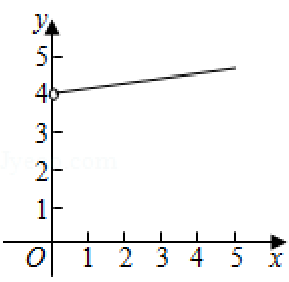
④在 1986 – 2020 年中，密云水库年降水量最大的年份，水体面积也最大．

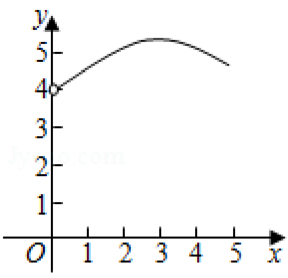
其中结论正确的是(　　)

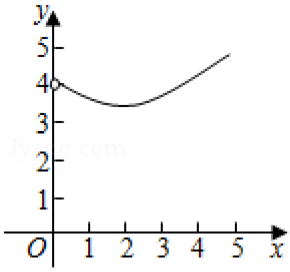
A．②③　　B．②④　　C．①②③　　D．③④

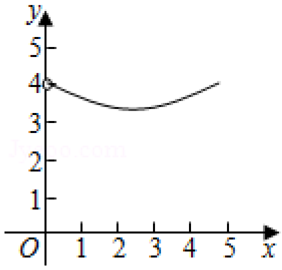
8．（2 分）如图，$\angle MAN = 60^{\circ}$，点 $B$ 在射线 $AN$ 上，$AB = 2$．点 $P$ 在射线 $AM$ 上运动（点 $P$ 不与点 $A$ 重合），连接 $BP$，以点 $B$ 为圆心，$BP$ 为半径作弧交射线 $AN$ 于点 $Q$，连接 $PQ$．若 $AP = x$，$PQ = y$，则下列图象中，能表示 $y$ 与 $x$ 的函数关系的图象大致是(　　)



A．

B．

C. 

D. 

**二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）**

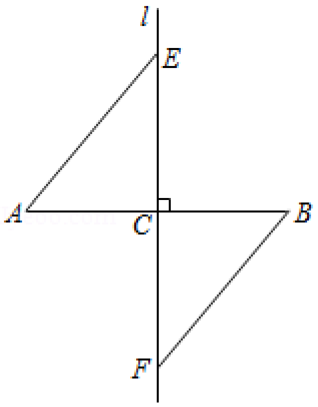
9.（2 分）若 $\sqrt{x+3}$ 在实数范围内有意义，则 $x$ 的取值范围是____.

10.（2 分）分解因式：$x^{3}-10x^{2}+25x=$____.

11.（2 分）50 件外观相同的产品中有 2 件不合格，现从中随机抽取 1 件进行检测，抽到不合格产品的概率是____.

12.（2 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $y=x+2$ 与 $x$ 轴的交点的坐标为____.

13.（2 分）如图，直线 $l$ 为线段 $AB$ 的垂直平分线，垂足为 $C$，直线 $l$ 上的两点 $E$，$F$ 位于 $AB$ 异侧 ($E$，$F$ 两点不与点 $C$ 重合). 只需添加一个条件即可证明 $\Delta ACE\cong\Delta BCF$，这个条件可以是____.



14.（2 分）图 1 是用一种彭罗斯瓷砖平铺成的图案，它的基础部分是“风筝”和“飞镖”两部分，图 2 中的“风筝”和“飞镖”是由图 3 所示的特殊菱形制作而成. 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=72^{\circ}$，在对角线 $AC$ 上截取 $AE=AB$，连接 $BE$，$DE$，可将菱形分割为“风筝”（凸四边形 $ABED$) 和“飞镖”（凹四边形 $BCDE$) 两部分，则图 2 中的 $\alpha=$____°.

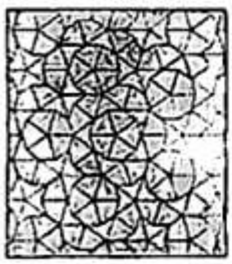


图 1

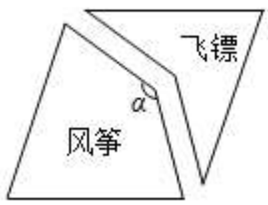



图 2

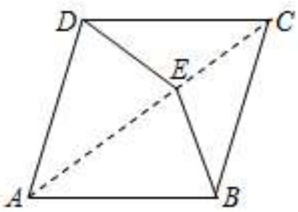
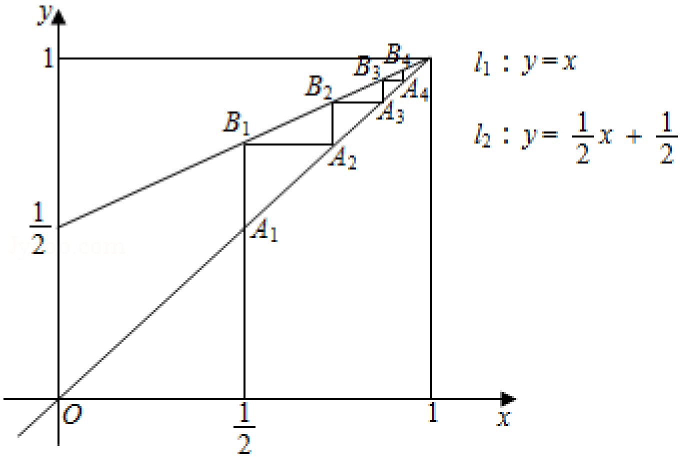


图 3

15.（2 分）从 1，2，3，4，5 中选择四个数字组成四位数 $\overline{abcd}$，其中 $a$，$b$，$c$，$d$ 分别代表千位、百位、十位、个位数字，若要求这个四位数同时满足以下条件：① $\overline{abcd}$ 是偶数；② $a>b>c$；③ $a+c=b+d$，请写出一个符合要求的数____.

16.（2 分）如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知直线 $l_1: y=x$，直线 $l_2: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，直线 $x=\frac{1}{2}$ 交 $l_1$ 于点 $A_1$，交 $l_2$ 于点 $B_1$，过点 $B_1$ 作 $y$ 轴的垂线交 $l_1$ 于点 $A_2$，过点 $A_2$ 作 $x$ 轴的垂线，交 $l_2$ 于点 $B_2$，过点 $B_2$ 作 $y$ 轴的垂线交 $l_1$ 于点

$A_3$，…，按此方式进行下去，则 $B_1$ 的坐标为____， $B_n$ 的坐标为____（用含 $n$ 的式子表示， $n$ 为正整数）.




**三、解答题（本题共 68 分，第 17-19 题，每小题 5 分，第 20 题 6 分，第 21-23 题，每小题 5 分，第 24-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程。**

17．（5 分）计算： $4\sin 45^\circ-\sqrt{8}+(\pi-4)^0+|1-\sqrt{2}|$ .

18．（5 分）解不等式： $\frac{x+1}{2}\leqslant\frac{x-1}{3}+x$ .

19．（5 分）已知 $a^2+2a-1=0$ ，求代数式 $(a-\frac{4}{a})\div\frac{a-2}{a^2}$ 的值.

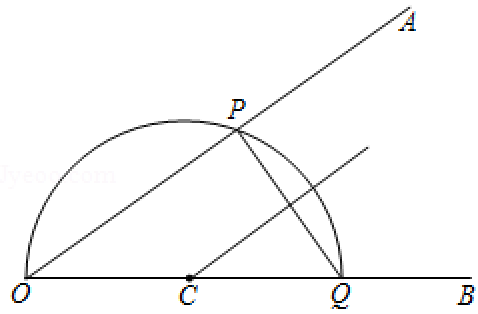
20．（6 分）已知关于 $x$ 的方程 $(k-1)x^2-2x+1=0$ 有两个实数根.

（1）求 $k$ 的取值范围；

（2）当 $k$ 取最大整数时，求此时方程的根.

21．（5 分）下面是小华设计的“作 $\angle AOB$ 的角平分线”的尺规作图过程，请帮助小华完成尺规作图并填空（保留作图痕迹）.

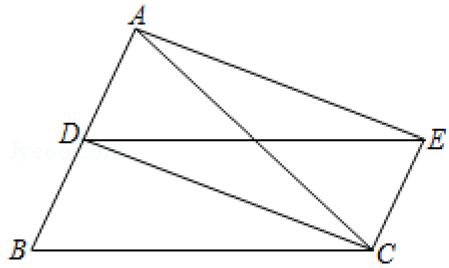
| 步骤 | 作法 | 推断 |
| --- | --- | --- |
| 第一步 | 在 $OB$ 上任取一点 $C$ ，以点 $C$ 为圆心， $OC$ 为半径作半圆，分别交射线 $OA$ ， $OB$ 于点 $P$ ，点 $Q$ ，连接 $PQ$ | $\angle OPQ=$ °，理由是 |
| 第二步 | 过点 $C$ 作 $PQ$ 的垂线，交 $PQ$ 于点 $D$ ，交 $PQ$ 于点 $E$ | $PD=DQ$ ， $PE=$ |
| 第三步 | 作射线 $OE$ | 射线 $OE$ 平分 $\angle AOB$ |
| 射线 $OE$ 为所求作 | | |




22.（5 分）如图，在 $\Delta ABC$ 中， $AC=BC$ ， $CD$ 为 $\Delta ABC$ 的角平分线， $AE//DC$ ， $AE=DC$ ，连接 $CE$ .

（1）求证：四边形 $ADCE$ 为矩形；

（2）连接 $DE$ ，若 $AB=10$ ， $CD=12$ ，求 $DE$ 的长.




23.（5 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直线 $l: y=kx-k+2(k>0)$ ，函数 $y=\dfrac{2k}{x}(x>0)$ 的图象为 $F$ .

（1）若 $A(2,1)$ 在函数 $y=\dfrac{2k}{x}(x>0)$ 的图象 $F$ 上，求直线 $l$ 对应的函数解析式；

（2）横、纵坐标都是整数的点叫做整点．记直线 $l: y=kx-k+2(k>0)$ ，图象 $F$ 和直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 围成的区域（不含边界）为图形 $G$ .

①在（1）的条件下，写出图形 $G$ 内的整点的坐标；

②若图形 $G$ 内有三个整点，直接写出 $k$ 的取值范围.

24.（6 分）某大学共有 9000 名学生，为了解该大学学生的阅读情况，小华设计调查问卷，用随机抽样的方式调查了 150 名学生，并对相关数据进行了收集、整理、描述和分析下面是其中的部分信息：

$a$ ．所调查的 150 名学生最常用的一种阅读方式统计图如图 1.

$b$ ．选择手机阅读为最常用的一种阅读方式的学生中，平均每天阅读时长统计表如表 1；

表 1 使用手机阅读的学生平均每天阅读时长统计表

| 平均每天阅读时长 $x$（单位：分钟） | 人数 |
|---|---|
| $0\leqslant x<30$ | 6 |
| $30\leqslant x<60$ | $n$ |
| $60\leqslant x<90$ | 17 |
| $x\geqslant 90$ | 9 |

$c$ ．使用手机阅读的学生中，平均每天阅读时长在 $60\leqslant x<90$ 这一组的具体数据如下：

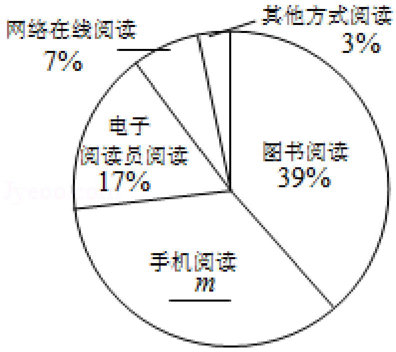
60 60 66 68 68 69 70 70 72 72 72 73 75 80 83 84 85

根据以上信息解答下列问题：

（1）图 1 中 $m=$____，表 1 中 $n=$____；

（2）使用手机阅读的学生中，平均每天阅读时长的中位数是____，平均每天阅读时长在 $60\leqslant x<90$ 这一组的数据的众数是____；

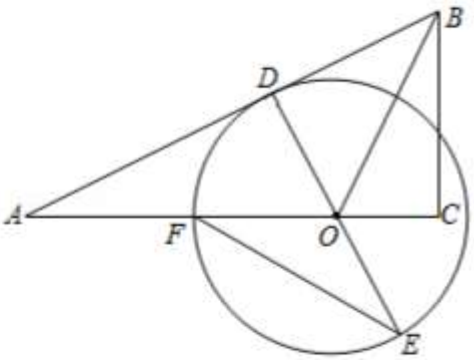
（3）根据所调查的这 150 名学生的阅读情况，估计该校使用手机阅读的学生中，平均每天阅读时长少于半小时的人数．




25．（6 分）如图，在 Rt$\Delta$ABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，点 $O$ 在 $AC$ 上，$\angle OBC=\angle A$，点 $D$ 在 $AB$ 上，以点 $O$ 为圆心，$OD$ 为半径作圆，交 $DO$ 的延长线于点 $E$，交 $AC$ 于点 $F$，$\angle E=\dfrac{1}{2}\angle BOC$．

（1）求证：$AB$ 为 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $\odot O$ 的半径为 3，$\tan\angle OBC=\dfrac{1}{2}$，求 $BD$ 的长．




26．（6 分）在平面直角坐标系 $xOy$ 中，$M(a,y_1)$，$N(a+t,y_2)$ 为抛物线 $y=x^2+x$ 上两点，其中 $t>0$．

（1）求抛物线与 $x$ 轴的交点坐标；

（2）若 $t=1$，点 $M$，点 $N$ 在抛物线上运动，过点 $M$ 作 $y$ 轴的垂线，过点 $N$ 作 $x$ 轴的垂线，两条垂线交于点 $Q$，当 $\Delta MNQ$ 为等腰直角三角形时，求 $a$ 的值；

（3）记抛物线在 $M$，$N$ 两点之间的部分为图象 $G$（包含 $M$，$N$ 两点），若图象 $G$ 上最高点与最低点的纵坐标之差为 1，直接写出 $t$ 的取值范围．

27．（7 分）如图，在 $\Delta ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=BC$，点 $P$ 为 $\Delta ABC$ 外一点，点 $P$ 与点 $C$ 位于直线 $AB$ 异侧，且 $\angle APB=45^{\circ}$，过点 $C$ 作 $CD\perp PA$，垂足为 $D$．

（1）当 $\angle ABP=90^{\circ}$ 时，在图 1 中补全图形，并直接写出线段 $AP$ 与 $CD$ 之间的数量关系；

（2）如图 2，当 $\angle ABP>90^{\circ}$ 时，

①用等式表示线段 $AP$ 与 $CD$ 之间的数量关系，并证明；

②在线段 $AP$ 上取一点 $K$，使得 $\angle ABK=\angle ACD$，画出图形并直接写出此时 $\frac{KP}{BP}$ 的值．

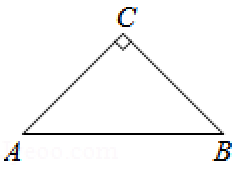



图1

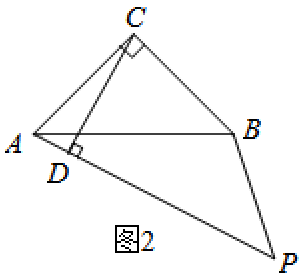



图2

28．（7 分）对于平面内的点 $M$，如果点 $P$，点 $Q$ 与点 $M$ 所构成的 $\Delta MPQ$ 是边长为 1 的等边三角形，则称点 $P$，点 $Q$ 为点 $M$ 的一对“关联点”．进一步地，在 $\Delta MPQ$ 中，若顶点 $M$，$P$，$Q$ 按顺时针排列，则称点 $P$，点 $Q$ 为点 $M$ 的一对“顺关联点”；若顶点 $M$，$P$，$Q$ 按逆时针排列，则称点 $P$，点 $Q$ 为点 $M$ 的一对“逆关联点”．已知 $A(1,0)$．

（1）在 $O(0,0)$，$B(0,1)$，$C(2,0)$，$D(\frac{3}{2}，-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 中，点 $A$ 的一对关联点是____，它们为点 $A$ 的一对____关联点（填“顺”或“逆”）；

（2）以原点 $O$ 为圆心作半径为 1 的圆，已知直线 $l: y=\sqrt{3}x+b$．

①若点 $P$ 在 $\odot O$ 上，点 $Q$ 在直线 $l$ 上，点 $P$，点 $Q$ 为点 $A$ 的一对关联点，求 $b$ 的值；

②若在 $\odot O$ 上存在点 $R$，在直线 $l$ 上存在两点 $T(x_1，y_1)$ 和 $S(x_2，y_2)$，其中 $x_1>x_2$，且点 $T$，点 $S$ 为点 $R$ 的一对顺关联点，求 $b$ 的取值范围．

# 参考答案

**一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1～8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个**

1．【分析】科学记数法的表示形式为$a\times10^{n}$的形式，其中$1\leqslant|a|<10$，$n$为整数．确定$n$的值时，要看把原数变成$a$时，小数点移动了多少位，$n$的绝对值与小数点移动的位数相同．

【解答】解：$160000=1.6\times10^{5}$．

故选：$C$．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为$a\times10^{n}$的形式，其中$1\leqslant|a|<10$，$n$为整数，表示时关键要正确确定$a$的值以及$n$的值．

2．【分析】根据中心对称图形的概念求解．

【解答】解：$A$、不是中心对称图形，故本选项不合题意；

$B$、是中心对称图形，故本选项符合题意；

$C$、不是中心对称图形，故本选项不合题意；

$D$、不是中心对称图形，故本选项不合题意；

故选：$B$．

【点评】本题考查了中心对称图形的概念，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合．

3．【分析】根据二次根式的性质和运算法则逐个判断．

【解答】解：$\because\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore A$错误．

$\because 3\sqrt{2}=\sqrt{9\times2}$．

$\therefore B$错误．

$\because(\sqrt{2})^{3}=\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^{2}$

$=2\sqrt{2}$．

$\therefore C$错误．

$\because\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{4}=2$，$\sqrt{\dfrac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$．

故$D$正确．

故选：$D$．

【点评】本题考查二次根式的运算，掌握二次根式运算法则是求解本题的关键．

4．【分析】由平面图形的折叠及正三棱柱的展开图的特征作答．

【解答】解：由平面图形的折叠及三棱柱的展开图的特征可知，这个几何体是正三棱柱．

故选：$A$．

【点评】考查了几何体的展开图，解题时勿忘记正三棱柱的特征．

5．【分析】利用扇形的面积公式$S=\dfrac{n\pi r^{2}}{360}$即可求解．

【解答】解：扇形的面积是：$\dfrac{90\pi\cdot2^{2}}{360}=\pi(cm^{2})$．

故选： $B$ .

【点评】本题考查了扇形的面积公式，正确理解公式是关键.

6.【分析】根据相似三角形的面积比等于相似比的平方解答.

【解答】解：两个相似三角形的相似比为$1:4$，相似三角形面积的比等于相似比的平方是$1:16$ .

故选： $A$ .

【点评】本题考查对相似三角形性质的理解，相似三角形面积的比等于相似比的平方.

7.【分析】根据图形中表示的含义，代入到各个选项判断正误即可.

【解答】解：①2004 年的水体面积超过 60，不符合题意；

②符合题意；

③符合题意；

④降水量最大的年份是 2012 年，水体面积最大的年份是 2020 年，不符合题意.

故选： $A$ .

【点评】此题考查的是直方图，仔细审题判断，只要粗略计算即可.

8.【分析】此题属于选择题，可以通过推理和代入特殊值得出答案，点 $P$ 在射线 $AM$ 上运动，随着 $AP$ 的变大 $PQ$ 先变小后变大，再确定最小值大概的位置即可确定大致图象.

【解答】解：由题知，点 $P$ 在射线 $AM$ 上运动， $AP=x$ ， $PQ=y$ ，

随着 $x$ 增大 $y$ 值先变小后变大，

故选项 $A$ 、 $B$ 错误，

在 $C$ 和 $D$ 选项中当 $x=5$ 时对应函数值差别较大，

$\therefore$选当 $x=5$ 时为特殊值求此时的函数值，

作 $QH\perp AM$ 于 $H$ ，作 $BR\perp AM$ 于 $R$ ，

$\because\angle MAN=60^{\circ}$， $AB=2$， $AP=5$ ，

$\therefore AR=1$， $BR=\sqrt{3}$， $RP=AP-AR=5-1=4$ ，

$\therefore BQ=BP=\sqrt{BR^{2}+RP^{2}}=\sqrt{19}$ ，

$\therefore AQ=AB+BQ=2+\sqrt{19}$ ，

$\because\angle MAN=60^{\circ}$ ，

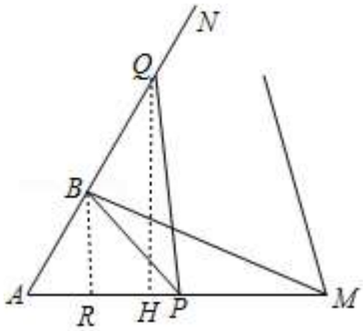
$\therefore AH=\frac{1}{2}AQ=1+\frac{\sqrt{19}}{2}$， $QH=\frac{\sqrt{3}}{2}AQ=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{57}}{2}$ ，

$\therefore PH=AP-AH=5-(1+\frac{\sqrt{19}}{2})=4-\frac{\sqrt{19}}{2}$ ，

$\therefore QP=\sqrt{QH^{2}+PH^{2}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{57}}{2})^{2}+(4-\frac{\sqrt{19}}{2})^{2}}=\sqrt{38-\frac{5\sqrt{19}}{2}}\approx 5.2$ ，

观察选项 $C$ 和 $D$ 的图象可以发现 $C$ 的图象符合，

故选： $C$ .




【点评】本题主要考查动点函数图象问题，用特值法判断函数图象是解决此题的关键．

**二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）**

9．【分析】直接利用二次根式的定义求出 $x$ 的取值范围．

【解答】解：若式子 $\sqrt{x+3}$ 在实数范围内有意义，

则 $x+3\geqslant 0$，

解得：$x\geqslant -3$，

则 $x$ 的取值范围是：$x\geqslant -3$．

故答案为：$x\geqslant -3$．

【点评】此题主要考查了二次根式有意义的条件，正确把握二次根式的定义是解题关键．

10．【分析】首先提取公因式 $x$，进而利用完全平方公式分解因式得出即可．

【解答】解：$x^3-10x^2+25x$

$=x(x^2-10x+25)$

$=x(x-5)^2$．

故答案为：$x(x-5)^2$．

【点评】此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式，熟练应用完全平方公式是解题关键．

11．【分析】直接根据概率公式求解．

【解答】解：$\because 50$ 件外观相同的产品中有 2 件不合格，

$\therefore$ 从中随机抽取 1 件进行检测，抽到不合格产品的概率是 $\dfrac{2}{50}=\dfrac{1}{25}$；

故答案为：$\dfrac{1}{25}$．

【点评】本题考查了概率公式：随机事件 $A$ 的概率 $P$（A）$=$ 事件 $A$ 可能出现的结果数除以所有可能出现的结果数．

12．【分析】令解析式中的 $y=0$，求得 $x$ 的值即可得到结论．

【解答】解：令 $y=0$，

则 $x+2=0$．

$\therefore x=-2$．

$\therefore$ 直线 $y=x+2$ 与 $x$ 轴的交点的坐标为 $(-2,0)$．

故答案为：$(-2,0)$．

【点评】本题主要考查了一次函数的图象上的点的坐标的特征．

13．【分析】本题是一道开放型的题目，答案不唯一，只要符合全等三角形的判定定理即可．

【解答】解：条件可以是$\angle A=\angle B$，

理由是：$\because$直线$l$是线段$AB$的垂直平分线，

$\therefore AC=BC$，

在$\Delta ACE$和$\Delta BCF$中

$$\begin{cases}\angle A=\angle B\\ AC=BC\\ \angle ACE=\angle BCF\end{cases},$$

$\therefore \Delta ACE\cong\Delta BCF(ASA)$，

故答案为：$\angle A=\angle B$（答案不唯一）.

【点评】本题考查了线段垂直平分线的性质和全等三角形的判定定理，注意：全等三角形的判定定理有$SAS$，$ASA$，$AAS$，$SSS$，两直角三角形全等还有$HL$.

14.【分析】由菱形的性质可求$\angle DAC=\angle BAC=36^{\circ}$，$AE=AB=AD$，由等腰三角形的性质可求解.

【解答】解：$\because$四边形$ABCD$是菱形，$\angle BAD=72^{\circ}$，

$\therefore \angle DAC=\angle BAC=36^{\circ}$，$AD=AB$，

$\because AE=AB=AD$，

$\therefore \angle DEA=72^{\circ}=\angle AEB$，

$\therefore \angle\alpha=72^{\circ}+72^{\circ}=144^{\circ}$，

故答案为144.

【点评】本题考查了菱形的性质，等腰三角形的性质，掌握菱形的性质是本题的关键.

15.【分析】由$\overline{abcd}$是偶数，求出$d=2$或$d=4$，再分两种情况，求解即可得出结论.

【解答】解：$\because\overline{abcd}$是偶数，

$\therefore d=2$或$d=4$，

当$d=2$时，$\because a+c=b+d$，

$\therefore a+c=b+2$，

$\therefore b=a+c-2$，

$\because a>b>c$，

$\therefore a=5$，$b=4$，$c=1$或$a=4$，$b=3$，$c=1$，

$\therefore$四位数为5412或4312；

当$d=4$时，$\because a+c=b+d$，

$\therefore a+c=b+4$，

$\therefore b=a+c-4$，

$\because a>b>c$，

$\therefore a=5$，$b=3$，$c=2$或$a=5$，$b=2$，$c=1$，

$\therefore$四位数为5324或5214，

即符合条件的四位数为5412或4312或5324或5214，

故答案为5412或4312或5324或5214（填其中的一个即可）.

【点评】此题主要考查了偶数的性质，用分类讨论的思想解决问题是解本题的关键.

16．【分析】根据直线 $l_1: y=x$，直线 $l_2: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，直线 $x=\frac{1}{2}$ 交 $l_1$ 于点 $A_1$，交 $l_2$ 于点 $B_1$，可得 $A_1(\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2})$，$B_1(\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4})$，过点 $B_1$ 作 $y$ 轴的垂线交 $l_1$ 于点 $A_2$，可得 $A_2$ 的纵坐标为 $\frac{3}{4}$，过点 $A_2$ 作 $x$ 轴的垂线，交 $l_2$ 于点 $B_2$，可得 $B_2(\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8})$，过点 $B_2$ 作 $y$ 轴的垂线交 $l_1$ 于点 $A_3$，…，进而发现规律即可得 $B_n$ 的坐标为 $(\frac{2^n-1}{2^n}$，$\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$．

【解答】解：$\because$ 直线 $l_1: y=x$，直线 $l_2: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，直线 $x=\frac{1}{2}$ 交 $l_1$ 于点 $A_1$，交 $l_2$ 于点 $B_1$，

$\therefore A_1(\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2})$，$B_1(\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4})$，

$\therefore A_2$ 的纵坐标为 $\frac{3}{4}$，

$\therefore A_2(\frac{3}{4}$，$\frac{3}{4})$，

$\therefore B_2(\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8})$，

同理：$A_3(\frac{7}{8}$，$\frac{7}{8})$，$B_3(\frac{7}{8}$，$\frac{15}{16})$，

$A_4(\frac{15}{16}$，$\frac{15}{16})$，$B_4(\frac{15}{16}$，$\frac{31}{32})$，

……，

$\therefore B_n$ 的坐标为 $(\frac{2^n-1}{2^n}$，$\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$．

故答案为：$(\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4})$，$(\frac{2^n-1}{2^n}$，$\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}})$．

【点评】此题考查规律型：点的坐标，一次函数的性质，两条直线相交或平行问题，关键是利用一次函数的性质解决问题．

**三、解答题（本题共 68 分，第 17-19 题，每小题 5 分，第 20 题 6 分，第 21-23 题，每小题 5 分，第 24-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 5 分）解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程。**

17．【分析】直接利用绝对值的性质以及零指数幂的性质、二次根式的性质、特殊角的三角函数值分别化简得出答案．

【解答】解：原式 $=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1$

$=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1$

$=\sqrt{2}$．

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键．

18．【分析】不等式去分母，去括号，移项合并，把 $x$ 系数化为 1，求出解集即可．

【解答】解：去分母，得 $3x+3\leqslant 2x-2+6x$，

移项得 $3x-2x-6x\leqslant -2-3$，

合并，得 $-5x\leqslant -5$，

系数化为 1，得 $x \geqslant 1$ .

【点评】本题主要考查解一元一次不等式的基本能力，严格遵循解不等式的基本步骤是关键，尤其需要注意不等式两边都乘以或除以同一个负数不等号方向要改变.

19．【分析】先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再根据已知等式可得答案.

【解答】解：原式$=(\frac{a^2}{a}-\frac{4}{a})\div\frac{a-2}{a^2}$

$=\frac{(a+2)(a-2)}{a}\cdot\frac{a^2}{a-2}$

$=a(a+2)$

$=a^2+2a$，

$\because a^2+2a-1=0$，

$\therefore a^2+2a=1$，

则原式$=1$.

【点评】本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

20．【分析】（1）根据二次项系数非零及根的判别式$\triangle \geqslant 0$，即可得出关于 $k$ 的一元一次不等式组，解之即可得出 $k$ 的取值范围.

（2）由（1）中 $k$ 的取值范围得出符合条件的 $k$ 的最大整数值，代入原方程，利用因式分解法即可求出 $x$ 的值.

【解答】解：（1）$\because$ 关于 $x$ 的方程 $(k-1)x^2-2x+1=0$ 有两个实数根，

$\therefore \begin{cases} k-1\neq 0 \\ (-2)^2-4(k-1)\times 1 \geqslant 0 \end{cases}$，

解得：$k \leqslant 2$ 且 $k\neq 1$.

（2）当 $k=2$ 时，方程为：$x^2-2x+1=0$，即 $(x-1)^2=0$，

解得：$x_1=x_2=1$.

【点评】本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式$\triangle=b^2-4ac$：当$\triangle>0$，方程有两个不相等的实数根；当$\triangle=0$，方程有两个相等的实数根；当$\triangle<0$，方程没有实数根．也考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根与系数的关系.

21．【分析】根据要求作出图形，再利用圆周角定理可证 $\angle OPQ=90$，利用垂径定理可证 $PE=EC$ .

【解答】解：如图，射线 $OE$ 即为所求作.

理由：$\because OQ$ 是直径，

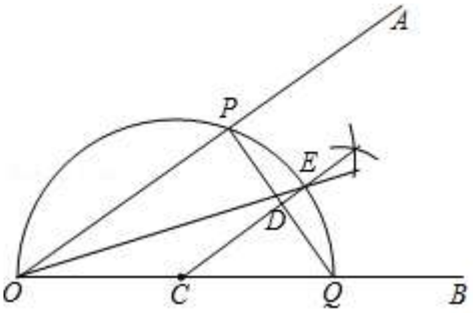
$\therefore \angle OPQ=90^\circ$（直径所对的圆周角是直角），

$\because OE\perp PQ$，

$\therefore PD=DQ$，$PE=EQ$，

$\therefore OE$ 平分 $\angle AOB$ .

故答案为：90，直径所对的圆周角是直角，$EQ$ .




【点评】本题考查作图－复杂作图，圆周角定理，垂径定理等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

22.【分析】(1）先证四边形 $ADCE$ 是平行四边形，再由等腰三角形的性质得 $CD\perp AB$，则 $\angle ADC=90^{\circ}$，即可得出平行四边形 $ADCE$ 为矩形；

（2）由等腰三角形的性质得 $BD=AD=\frac{1}{2}AB=5$，$CD\perp AB$，再由勾股定理求出 $AC=13$，然后由矩形的性质求解即可.

【解答】(1）证明：$\because AE//DC$，$AE=DC$，

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$\because AC=BC$，$CD$ 为 $\Delta ABC$ 的角平分线，

$\therefore CD\perp AB$，

$\therefore \angle ADC=90^{\circ}$，

$\therefore$ 平行四边形 $ADCE$ 为矩形；

（2）解：$\because AC=BC$，$CD$ 为 $\Delta ABC$ 的角平分线，

$\therefore BD=AD=\frac{1}{2}AB=5$，$CD\perp AB$，

$\therefore \angle BDC=90^{\circ}$，

$\therefore AC=\sqrt{AD^{2}+CD^{2}}=\sqrt{5^{2}+12^{2}}=13$，

由（1）得：四边形 $ADCE$ 为矩形，

$\therefore DE=AC=13$.

【点评】本题考查了矩形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、等腰三角形的性质、平行线的性质等知识；熟练掌握矩形的判定与性质、等腰三角形的性质是解题的关键.

23.【分析】(1）把 $A(2,1)$ 代入 $y=\frac{2k}{x}(x>0)$ 中可得 $k$ 的值，从而求得直线 $l$ 对应的函数解析式；

（2）①画图可得整点的个数；

②画图计算边界时 $k$ 的值，可得 $k$ 的取值范围.

【解答】解：(1）把 $A(2,1)$ 代入 $y=\frac{2k}{x}(x>0)$ 得 $2k=2\times1$，

$\therefore k=1$，

$\therefore$ 直线 $l$ 对应的函数解析式为 $y=x+1$；

（2）①解方程 $\frac{2}{x}=x+1$ 得 $x_{1}=-2$（舍去），$x_{2}=1$，则直线 $l: y=kx-k+2(k>0)$ 与函数 $y=\frac{2k}{x}(x>0)$ 的图象的交点

为$(1,2)$，

如图1所示，区域$G$内的整点有$(1,1)$一个；

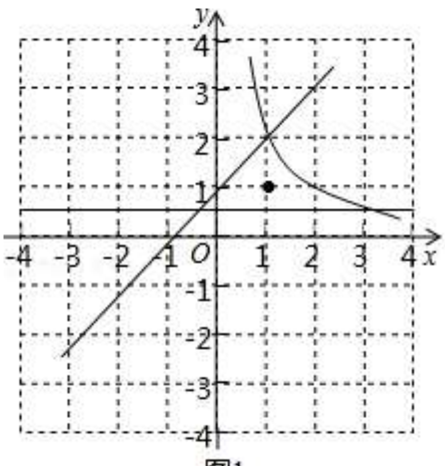


图1

②如图2，当$k=2$时，则直线$l: y=2x$，函数$y=\frac{4}{x}(x>0)$经过点$(2,2)$、$(1,4)$、$(4,1)$，此时图形$G$内有$(1,1)$，$(2,1)$，$(3,1)$三个整点；

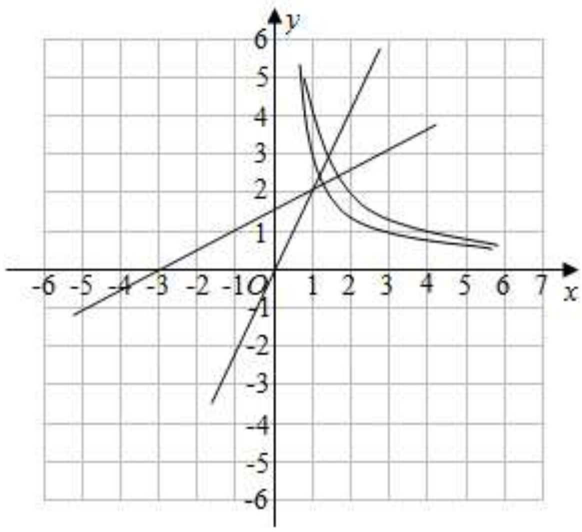
当$k=\frac{3}{2}$时，则直线$l: y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，函数$y=\frac{3}{x}(x>0)$经过点$(1,3)$和$(3,1)$，此时图形$G$内有$(1,1)$，$(2,1)$两个整点，

当$k=1$时，则直线$l: y=x+1$，函数$y=\frac{2}{x}(x>0)$经过点$(1,2)$和$(2,1)$，此时图形$G$内有$(1,1)$一个整点；

当$k=\frac{1}{2}$时，则直线$l: y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$，函数$y=\frac{1}{x}(x>0)$经过点$(1,1)$，此时图形$G$内没有整点；

当$k=\frac{1}{3}$时，则直线$l: y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$，函数$y=\frac{2}{3x}(x>0)$，此时图形$G$内有$(-1,1)$、$(0,1)$两个整点；

当$k=\frac{1}{4}$时，则直线$l: y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$，函数$y=\frac{1}{2x}(x>0)$此时图形$G$内有$(-2,1)$、$(-1,1)$、$(0,1)$3个整点；




观察图象可知：当$\frac{3}{2}<k\leqslant 2$或$\frac{1}{4}\leqslant k<\frac{1}{3}$时，区域$G$内有三个整点．

【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题：求反比例函数与一次函数的交点坐标，把两个函数关系式

联立成方程组求解，本题理解整点的定义是关键，并利用数形结合的思想．

24．【分析】（1）根据百分比之和为 1 可求得 $m$ 的值，用总人数乘以使用手机阅读对应的百分比得出使用手机阅读的人数，再减去其它分组的人数即可求出 $n$ 的值；

（2）根据中位数和众数的概念求解即可；

（3）用总人数乘以使用手机阅读时间不超过半小时人数占被调查人数的比例即可．

【解答】解：（1）$m=1-(17\%+7\%+3\%+39\%)=34\%$，

$n=150\times34\%-(6+17+9)=19$，

故答案为：34%，19；

（2）使用手机阅读的学生中，平均每天阅读时长的中位数是第 26 个数据，

$\therefore$ 使用手机阅读的学生中，平均每天阅读时长的中位数是 60，

平均每天阅读时长在 $60\leqslant x<90$ 这一组的数据的众数是 72，

故答案为：60、72；

（3）根据所调查的这 150 名学生的阅读情况，估计该校使用手机阅读的学生中，平均每天阅读时长少于半小时的人数 $\dfrac{6}{150}\times9000=360$（人）．

【点评】本题考查频数分布表、扇形统计图、用样本估计总体、中位数，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

25．【分析】（1）由圆周角定理得出 $\angle DOF=\angle BOC$，由直角三角形的性质得出 $OD\perp AD$，则可得出结论；

（2）由勾股定理求出 $OA=3\sqrt{5}$，设 $OC=x$，则 $BC=2x$，得出 $\dfrac{2x}{x+3\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$，求出 $x=\sqrt{5}$，由勾股定理可得出答案．

【解答】（1）证明：$\because \angle E=\dfrac{1}{2}\angle DOF$，$\angle E=\dfrac{1}{2}\angle BOC$，

$\therefore \angle DOF=\angle BOC$，

$\because \angle C=90^\circ$，

$\therefore \angle OBC+\angle BOC=90^\circ$，

$\therefore \angle OBC+\angle DOF=90^\circ$，

$\because \angle OBC=\angle A$，

$\therefore \angle A+\angle DOF=90^\circ$，

$\therefore \angle ADO=90^\circ$，

$\therefore OD\perp AD$，

$\therefore AB$ 为 $\odot O$ 的切线；

（2）解：$\because \angle OBC=\angle A$，

$\therefore \tan\angle OBC=\tan\angle A=\dfrac{OD}{AD}=\dfrac{1}{2}$，

$\because OD=3$，

$\therefore AD=2OD=6$，

$\therefore OA=\sqrt{AD^2+OD^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，

设 $OC=x$，则 $BC=2x$，

在 RtΔABC 中，$\tan\angle A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{2x}{x+3\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $x=\sqrt{5}$，

$\therefore OC=\sqrt{5}$，$BC=2\sqrt{5}$，

$\therefore OB=\sqrt{OC^2+BC^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2}=5$，

$\therefore BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$．

【点评】本题考查了切线的判定，锐角三角函数的定义，直角三角形的性质，勾股定理等知识点；熟练掌握切线的判定与性质和勾股定理是解此题的关键．

26．【分析】（1）令 $y=x^2+x=0$，解得 $x=0$ 或 $-1$，即可求解；

（2）由题意得，此时点 $Q$ 的坐标为 $(a+t,y_1)$，再利用 $MQ=NQ$，即可求解；

（3）①当点 $M$、$N$ 在对称轴同侧时，当点 $M$、$N$ 均为对称轴的右侧时，即 $a\geqslant -\dfrac{1}{2}$，则 $y_2-y_1=t^2+2at+t=1$，进而求解；当点 $M$、$N$ 均在对称轴左侧时，同理可解；②当点 $M$、$N$ 在对称轴两侧时，同理可解．

【解答】解：（1）令 $y=x^2+x=0$，解得 $x=0$ 或 $-1$，

故抛物线与 $x$ 轴的交点坐标为 $(0,0)$ 或 $(-1,0)$；

（2）由题意得，此时点 $Q$ 的坐标为 $(a+t,y_1)$，

$\because \Delta MNQ$ 为等腰直角三角形，故 $MQ=NQ$，

则 $MQ=a+t-a=t=1$，

$NQ=|y_1-y_2|=|(a+1)^2+a+1-a^2-a|=MQ=1$，

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{3}{2}$；

（3）由抛物线的表达式知，顶点坐标为 $(-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{4})$，

①当点 $M$、$N$ 在对称轴同侧时，

当点 $M$、$N$ 均为对称轴的右侧时，即 $a\geqslant -\dfrac{1}{2}$，

则 $y_2-y_1=(a+t)^2+(a+t)-a^2-a=t^2+2at+t=1$，

$\therefore a=\dfrac{1}{2t}(1-t-t^2)\geqslant -\dfrac{1}{2}$，解得 $0\leqslant t\leqslant 1$；

当点 $M$、$N$ 均在对称轴左侧时，可得：$0\leqslant t\leqslant 1$；

$\therefore 0\leqslant t\leqslant 1$；

②当点 $M$ 、 $N$ 在对称轴两侧时，

则最小值为$-\frac{1}{4}$，最大值为 $y_1$ 或 $y_2$ ，

当最大值为 $y_1$ 时，则 $y_1-(-\frac{1}{4})=1$，

即 $a^2+a+\frac{1}{4}=1$，解得 $a=-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ （舍去），

则与点 $M$ 关于抛物线对称轴对称的点的横坐标为 $\frac{1}{2}$，

故点 $N$ 的横坐标 $a+t$ 在 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 之间，即 $-\frac{1}{2}\leqslant t-\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，

解得 $1\leqslant t\leqslant 2$；

当最大值为 $y_2$ 时，同理可得，$1\leqslant t\leqslant 2$；

故 $1\leqslant t\leqslant 2$；

综上，$0<t\leqslant 2$ .

【点评】本题是二次函数综合题，主要考查了一次函数的性质、等腰直角三角形性质、解不等式等，其中（3），要注意分类求解，避免遗漏.

27.【分析】（1）首先画出图形，得出 $CD$ 和 $CA$ 重合，根据等腰直角三角形的性质即可求解；

（2）①根据等腰直角三角形的性质，可得 $AP$ 与 $AF$ 的关系，根据相似三角形的判定与性质，可得 $AF$ 与 $CD$ 的关系，根据等量代换，可得答案；

②延长 $CD$ 、 $BK$ 交于点 $Q$ ，先证 $\Delta AGC\backsim\Delta QGB$ ，据相似三角形的性质可得 $\angle CAG=\angle Q=45°$ ，再证 $\Delta QDK\backsim\Delta PBK$ ，据相似三角形的性质可得 $\angle PBK=\angle QDK=90°$ ，根据等腰直角三角形的性质即可求解.

【解答】解：（1）如图 1，

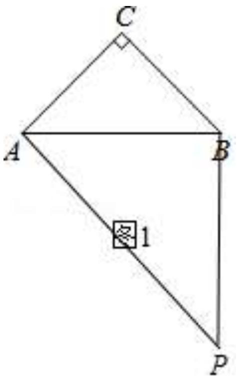


图1

$\because \angle ACB=90°$， $AC=BC$，

$\therefore \angle CAB=45°$，

$\therefore AB=\sqrt{2}AC$，

$\because \angle ABP=90°$， $\angle APB=45°$，

$\therefore \angle BAP=45°$，

$\therefore \angle CAP=\angle CAB+\angle BAP=90°$，

$\because CD\perp PA$，

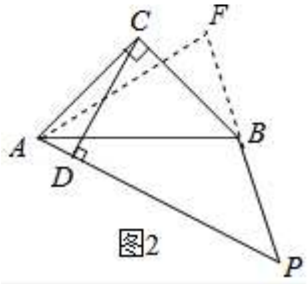
$\therefore CD$ 和 $CA$ 重合，

$\therefore AP=\sqrt{2}AB$，

$\therefore AP=\sqrt{2}\times\sqrt{2}AC=2AC=2CD$；

（2）① $AP=2CD$，

证明：过点 $A$ 作 $AF\perp BP$ 于点 $F$，




$\because \angle BPA=45^\circ$，

$\therefore \angle FAP=\angle FPA=45^\circ$，

$\therefore \dfrac{AP}{AF}=\sqrt{2}$，

$\therefore AP=\sqrt{2}AF$ .

$\because \angle ABF=\angle BAP+\angle P=\angle BAP+45^\circ$，

又$\because \angle CAD=\angle BAP+\angle CAB=\angle BAP+45^\circ$，

$\therefore \angle CAD=\angle FBA$ .

又$\because \angle ADC=\angle AFB=90^\circ$，

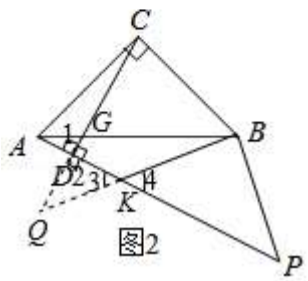
$\therefore \Delta CAD\backsim\Delta ABF$，

$\therefore \dfrac{AF}{CD}=\dfrac{AB}{AC}=\sqrt{2}$，

$\therefore AF=\sqrt{2}CD$，

$\therefore AP=\sqrt{2}AF=2CD$；

②延长 $CD$ 、 $BK$ 交于点 $Q$，




$\because \angle 1=\angle 2$， $\angle ACG=\angle ABK$ ，

$\therefore \Delta AGC\backsim\Delta QGB$，

$\therefore \angle CAG=\angle Q=45^\circ$，

$\because \angle P=45^\circ$，

$\therefore \angle Q=\angle P$，

$\because \angle 3=\angle 4$，

$\therefore \Delta QDK \backsim \Delta PBK$，

$\therefore \angle PBK = \angle QDK = 90°$，

$\because \angle P = 45°$，

$\therefore KP = \sqrt{2}BP$，

$\therefore \dfrac{KP}{BP} = \sqrt{2}$．

【点评】本题是三角形综合题，考查了相似形三角形的判定与性质，利用了等腰直角三角形的性质，正确作出辅助线，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键．

28．【分析】（1）画出图形，可得$\Delta ADC$是等边三角形，根据“关联点”以及“顺关联点”，“逆关联点”的定义判断即可．

（2）①如图$2-1$中，点$P$，点$Q$为点$A$的一对关联点，有三种情形如图所示，求出直线经过原点，$A(1,0)$，$Q''(\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$b$的值即可．

②如图$2-2$中，当直线$y=\sqrt{3}x+b$与$\odot O$相切于$E$，$F$时，解析法分别为：$y=\sqrt{3}x-2$，$y=\sqrt{3}x+2$．以$ST$为边向上构造等边三角形（边长1)，当等边三角形与$\odot O$有交点时，满足条件（这个交点为点$R$)，求出两种特殊位置，$b$的值可得结论．

【解答】解：（1）如图1中，

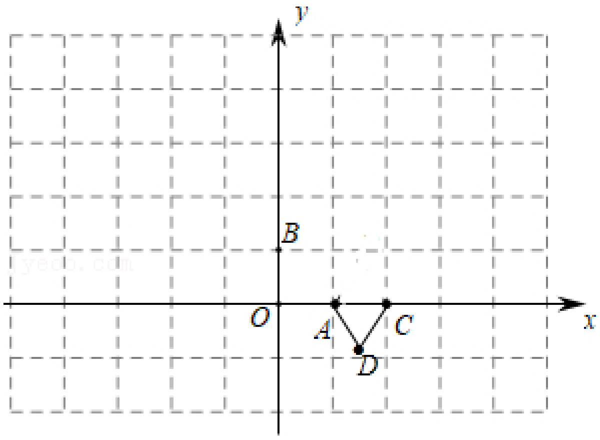



图1

观察图象可知，$\Delta ADC$是边长为1的等边三角形，

$\therefore$点$A$的一对关联点是$D$，$C$，是点$A$的一对顺关联点．

故答案为：$D$，$C$，顺．

（2）①如图$2-1$中，点$P$，点$Q$为点$A$的一对关联点，有三种情形如图所示，

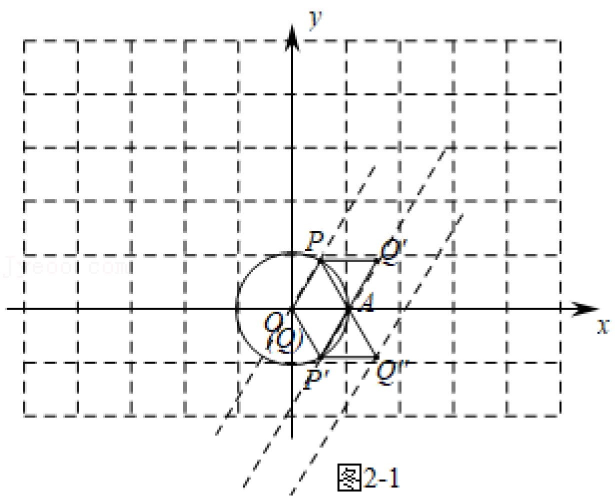



图2-1

当直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 经过原点 $(0,0)$，满足条件，此时 $b=0$．

当直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 经过点 $A(1,0)$，满足条件，此时 $b=-\sqrt{3}$．

当直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 经过点 $Q''(\frac{3}{2}$，$-\frac{\sqrt{3}}{2})$，满足条件，此时 $b=-2\sqrt{3}$．

综上所述，满足条件的 $b$ 的值为 0 或 $-\sqrt{3}$ 或 $-2\sqrt{3}$．

②如图 $2-2$ 中，当直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 与 $\odot O$ 相切于 $E$，$F$ 时，解析法分别为：$y=\sqrt{3}x-2$，$y=\sqrt{3}x+2$．

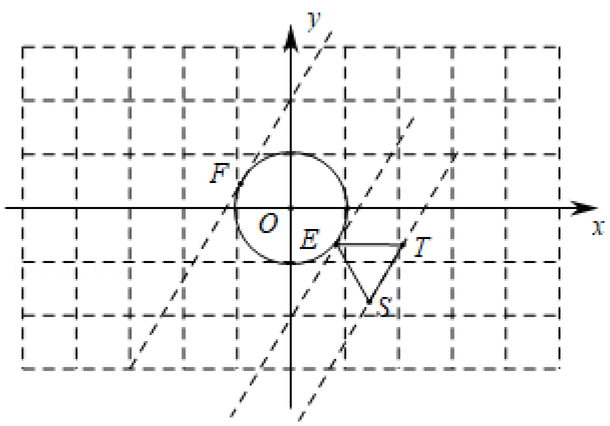



图2-2

以 $ST$ 为边向上构造等边三角形（边长1），当等边三角形与 $\odot O$ 有交点时，满足条件（这个交点为点 $R$），

当 $R$ 与 $E$ 重合时，直线的解析式为 $y=\sqrt{3}x-2-\sqrt{3}$，

当 $R$ 与 $F$ 重合时，直线的解析式为 $y=\sqrt{3}x+2-\sqrt{3}$，

观察图象可知，满足条件的 $b$ 的值为 $-2-\sqrt{3}\leqslant b\leqslant 2-\sqrt{3}$．

【点评】本题属于圆综合题，考查了直线与圆的位置关系，等边三角形的判定和性质，“关联点”以及“顺关联点”，“逆关联点”的定义等知识，解题的关键是理解题意，学会寻找特殊点解决问题，属于中考压轴题．