

# 2020 北京东城初三二模

## 数 学

2020. 6

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

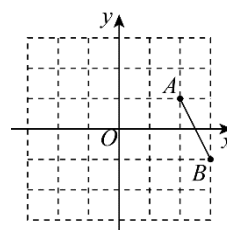
第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1. 在实数  $|-3.14|$ ,  $-3$ ,  $-\sqrt{3}$ ,  $\pi$  中, 最小的数是

- A.  $-\sqrt{3}$       B.  $-3$       C.  $|-3.14|$       D.  $\pi$

2. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $A(2, 1)$ , 点  $B(3, -1)$ , 平移线段  $AB$ , 使点  $A$  落在点  $A_1(-2, 2)$  处, 则点  $B$  的对应点  $B_1$  的坐标为

- A.  $(-1, -1)$       B.  $(-1, 0)$   
C.  $(1, 0)$       D.  $(3, 0)$



3. 判断命题“如果  $x < 1$ , 那么  $x^2 - 1 < 0$ ”是假命题, 只需举出一个反例. 反例中的  $x$  可以为

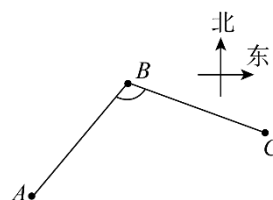
- A.  $-2$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $0$       D.  $\frac{1}{2}$

4. 若点  $A(1, y_1)$ ,  $B(2, y_2)$  在抛物线  $y = a(x+1)^2 + 2$  ( $a < 0$ ) 上, 则下列结论正确的是

- A.  $2 > y_1 > y_2$       B.  $2 > y_2 > y_1$       C.  $y_1 > y_2 > 2$       D.  $y_2 > y_1 > 2$

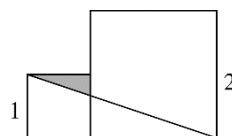
5. 如图, 小明从  $A$  处出发沿北偏东  $40^\circ$  方向行走至  $B$  处, 又从  $B$  处沿南偏东  $70^\circ$  方向行走至  $C$  处, 则  $\angle ABC$  等于

- A.  $130^\circ$       B.  $120^\circ$   
C.  $110^\circ$       D.  $100^\circ$

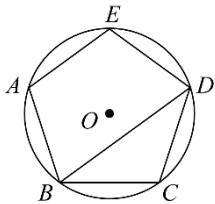


6. 把边长分别为 1 和 2 的两个正方形按如图的方式放置. 则图中阴影部分的面积为

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{4}$   
C.  $\frac{1}{5}$       D.  $\frac{1}{6}$



7. 如图，正五边形  $ABCDE$  内接于  $\odot O$ ，连接  $BD$ ，则  $\angle ABD$  的度数是



- A.  $60^\circ$
- B.  $70^\circ$
- C.  $72^\circ$
- D.  $144^\circ$

8. 五名学生投篮，每人投 10 次，统计他们每人投中的次数，得到五个数据，并对数据进行整理和分析，给出如下信息：

平均数	中位数	众数
$m$	6	7

则下列选项正确的是

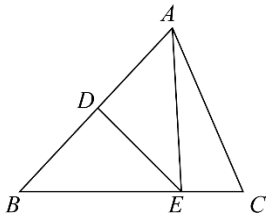
- A. 可能会有学生投中了 8 个
- B. 五个数据之和的最大值可能为 30
- C. 五个数据之和的最小值可能为 20
- D. 平均数  $m$  一定满足  $4.2 \leq m \leq 5.8$  之间

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 分解因式： $3a^3 - 6a^2 + 3a =$ \_\_\_\_\_.
10. 在“中国汉字听写大赛”选拔赛中，甲、乙两位同学的平均分都是 90 分，甲同学成绩的方差是 15，乙同学成绩的方差是 3，由此推断甲、乙两人中成绩稳定的是\_\_\_\_\_.
11. 若点  $(a, 10)$  在直线  $y = 3x + 1$  上，则  $a$  的值等于\_\_\_\_\_.
12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中， $\triangle ABO$  三个顶点的坐标分别为  $A(-2, 4)$ ， $B(-4, 0)$ ， $O(0, 0)$ . 以原点  $O$  为位似中心，把这个三角形缩小为原来的  $\frac{1}{2}$ ，得到  $\triangle CDO$ ，则点  $A$  的对应点  $C$  的坐标

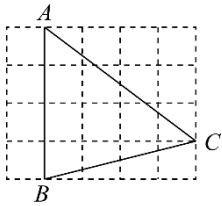
是\_\_\_\_\_.

13. 已知圆锥的母线长为 5cm，侧面积为  $15\pi \text{ cm}^2$ ，则这个圆锥的底面半径为\_\_\_\_\_ cm.



14. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB$  的垂直平分线交  $AB$  于点  $D$ ，交  $BC$  于点  $E$ ，若  $BC = 6\text{cm}$ ， $AC = 5\text{cm}$ ，则  $\triangle ACE$  的周长为\_\_\_\_\_ cm.

15. 如图, 在  $5 \times 4$  的正方形网格中, 每个小正方形的边长都是 1,  $\triangle ABC$  的顶点都在这些小正方形的顶点上, 则  $\sin \angle BAC$  的值为\_\_\_\_\_.



16. 某快餐店外卖促销, 佳佳和点点想点外卖, 每单需支付送餐费 5 元, 每种餐食外卖价格如下表:

餐食种类	价格 (单位: 元)
汉堡套餐	40
鸡翅	16
鸡块	15
冰激凌	14
蔬菜沙拉	9

促销活动:

- (1) 汉堡套餐 5 折优惠, 每单仅限一套;
- (2) 全部商品 (包括打折套餐) 满 20 元减 4 元, 满 40 元减 10 元, 满 60 元减 15 元, 满 80 元减 20 元. 佳佳想要汉堡套餐、鸡翅、冰激凌、蔬菜沙拉各一份; 点点想要汉堡套餐、鸡块、冰激凌各一份, 若他们把想要的都买全, 最少要花\_\_\_\_\_元 (含送餐费).

三、解答题 (本题共 68 分, 第 17-22 题, 每小题 5 分, 第 23-26 题, 每小题 6 分, 第 27-28 题, 每小题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 下面是 “作一个  $45^\circ$  角” 的尺规作图过程.

已知: 平面内一点  $A$ .

求作:  $\angle A$ , 使得  $\angle A = 45^\circ$ .

作法: 如图,

- ① 作射线  $AB$ ;
- ② 在射线  $AB$  上取一点  $O$ , 以  $O$  为圆心,  $OA$  长为半径作圆, 与射线  $AB$  相交于点  $C$ ;
- ③ 分别以  $A, C$  为圆心, 大于  $\frac{1}{2}AC$  长为半径作弧, 两弧交于点  $D$ , 作射线  $OD$  交  $\odot O$  于点  $E$ ;
- ④ 作射线  $AE$ .

则  $\angle EAB$  即为所求的角.

(1) 使用直尺和圆规, 补全图形; (保留作图痕迹)

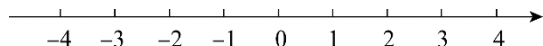
(2) 完成下面的证明.

证明:  $\because AD=CD, AO=CO,$

$\therefore \angle AOE = \angle \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}^\circ.$

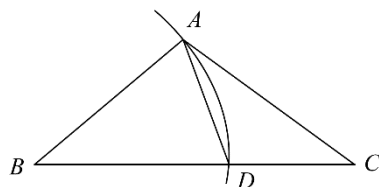
$\therefore \angle EAB = \underline{\hspace{1cm}}^\circ. (\underline{\hspace{3cm}})$  (填推理的依据)

18. 解不等式  $\frac{x-2}{5} - \frac{x+4}{2} > -3$ , 并把它的解集在数轴上表示出来.



19. 如果  $a-2b=0$ , 求代数式  $1 - \left( \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2} \right) \div \frac{a+3b}{a^2-6ab+9b^2}$  的值.

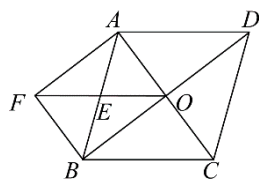
20. 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 以点  $B$  为圆心,  $BA$  长为半径画弧, 交  $BC$  边于点  $D$ , 连接  $AD$ . 若  $\angle B=40^\circ$ ,  $\angle C=36^\circ$ , 求  $\angle DAC$  的度数.



21. 在菱形  $ABCD$  中, 对角线  $AC, BD$  相交于点  $O$ ,  $E$  为  $AB$  的中点, 连接  $OE$  并延长到点  $F$ , 使  $EF=OF$ , 连接  $AF, BF$ .

(1) 求证: 四边形  $AOBF$  是矩形;

(2) 若  $AD=5, \sin \angle AFO = \frac{3}{5}$ , 求  $AC$  的长.



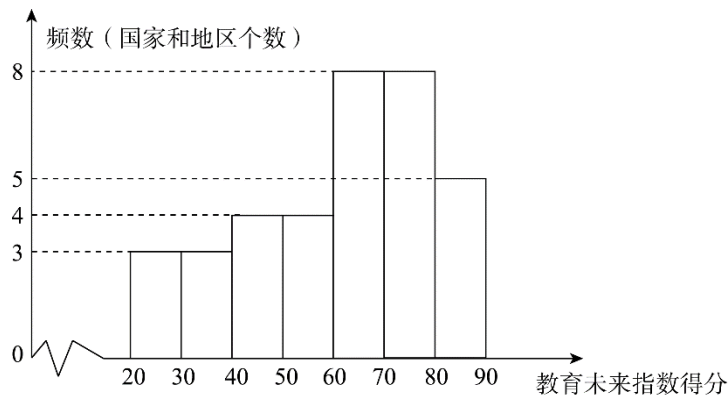
22. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0, x > 0$ ) 的图象经过点  $A(1, -4)$ ，直线  $y = -2x + m$  与  $x$  轴交于点  $B(1, 0)$ .

(1) 求  $k, m$  的值.

(2) 已知点  $P(n, -2n)$  ( $n > 0$ )，过点  $P$  作平行于  $x$  轴的直线，交直线  $y = -2x + m$  于点  $C$ ，过点  $P$  作平行于  $y$  轴的直线交函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0, x > 0$ ) 的图象于点  $D$ ，当  $PD = 2PC$  时，结合函数的图象，求出  $n$  的值.

23. 教育未来指数是为了评估教育系统在培养学生如何应对快速多变的未来社会方面所呈现的效果. 现对教育未来指数得分前 35 名的国家和地区的有关数据进行收集、整理、描述和分析后，给出了部分信息.

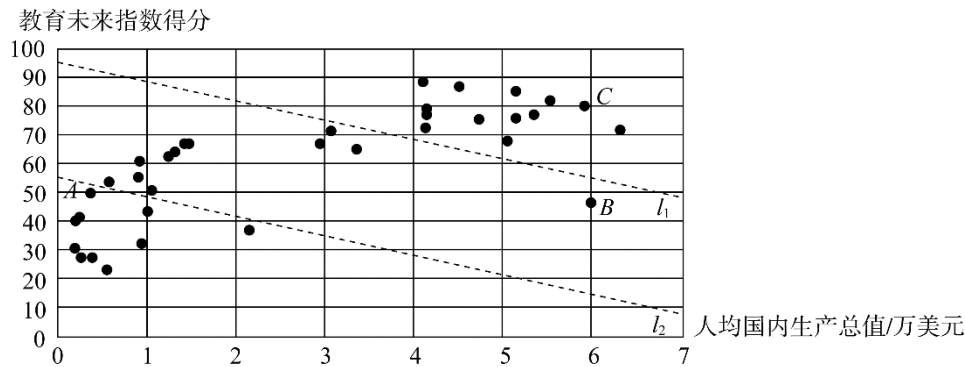
a. 教育未来指数得分的频数分布直方图（数据分成 7 组：  $20 \leq x < 30$ ，  $30 \leq x < 40$ ，  $40 \leq x < 50$ ，  $50 \leq x < 60$ ，  $60 \leq x < 70$ ，  $70 \leq x < 80$ ，  $80 \leq x \leq 90$ ）;



b. 未来教育指数得分在  $60 \leq x < 70$  这一组的是:

61.2      62.8      64.6      65.2      67.2      67.3      67.5      68.5

c. 35 个国家的人均国内生产总值和教育未来指数得分情况统计图

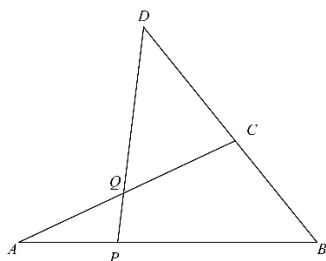


d. 中国和中国香港的未来教育指数得分分别为 32.9 和 68.5.

根据以上信息,回答下列问题:

- (1) 中国香港的教育未来指数得分排名世界第\_\_\_\_\_;
- (2) 在 35 个国家和地区的人均国内生产总值和国家教育未来指数得分情况统计图中,包括中国香港在内的少数几个国家和地区所对应的点位于虚线  $l$  的上方,请在图中用“○”画出代表中国香港的点;
- (3) 在教育未来指数得分比中国高的国家和地区中,人均国内生产总值的最大值约为\_\_\_\_\_万美元;(结果保留一位小数)
- (4) 下列推断合理的是\_\_\_\_\_.(只填序号即可)
- ①相比于点  $A, C$  所代表的国家和地区,中国的教育未来指数得分还有一定差距,“十三五”规划提出“教育优先发展,教育强则国家强”的任务,进一步提高国家教育水平;
- ②相比于点  $B, C$  所代表的国家和地区,中国的人均国内生产总值还有一定差距,中国提出“决胜全国建成小康社会”的奋斗目标,进一步提高人均国内生产总值.

24. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6\text{cm}$ ,  $P$ 是 $AB$ 上的动点,  $D$ 是 $BC$ 延长线上的定点,连接 $DP$ 交 $AC$ 于点 $Q$ .



小明根据学习函数的经验,对线段 $AP$ ,  $DQ$ ,  $DQ$ 的长度之间的关系进行了探究.

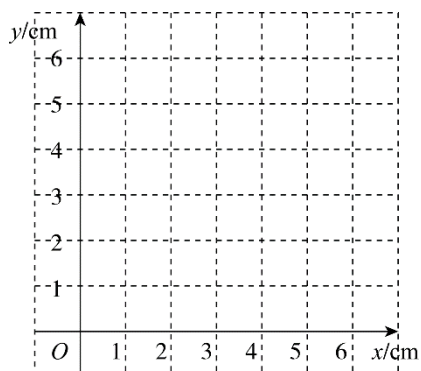
下面是小明的探究过程,请补充完整:

- (1) 对于点 $P$ 在 $AB$ 上的不同位置,画图、测量,得到了线段 $AP$ ,  $DQ$ ,  $DQ$ 的长度(单位:  $\text{cm}$ )的几组值,如下表

	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7
$AP$	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00
$DP$	4.99	4.56	4.33	4.32	4.53	4.95	5.51
$DQ$	4.99	3.95	3.31	2.95	2.80	2.79	2.86

在  $AP$ ,  $DQ$ ,  $DQ$  的长度这三个量中, 确定\_\_\_\_\_的长度是自变量, \_\_\_\_\_的长度和\_\_\_\_\_的长度都是这个自变量的函数;

(2) 在同一平面直角坐标系  $xOy$  中, 画出 (1) 中所确定的函数的图象;

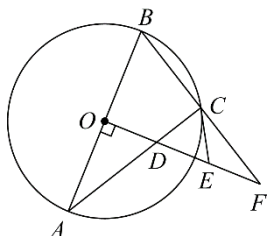


(3) 结合函数图象, 解决问题: 当  $AP = \frac{1}{2}(DP + DQ)$  时,  $AP$  的长度约为\_\_\_\_\_cm.

25. 如图,  $\triangle ABC$  内接于  $\odot O$ ,  $AB$  为直径, 过点  $O$  作  $AB$  的垂线, 交  $AC$  于点  $D$ , 分别延长  $BC$ ,  $OD$  交于点  $F$ , 过点  $C$  作  $\odot O$  的切线  $CE$ , 交  $OF$  于点  $E$ .

(1) 求证:  $EC = ED$ ;

(2) 如果  $OA = 4$ ,  $EF = 3$ , 求弦  $AC$  的长.



26. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $A$  的坐标为  $(0, 4)$ , 点  $B$  的坐标为  $(6, 4)$ , 抛物线  $y = x^2 - 5x + a - 2$  的顶点为  $C$ .

(1) 当抛物线经过点  $B$  时, 求顶点  $C$  的坐标;

(2) 若抛物线与线段  $AB$  恰有一个公共点, 结合函数图象, 求  $a$  的取值范围;

(3) 若满足不等式  $x^2 - 5x + a - 2 \leq 0$  的  $x$  的最大值为 3, 直接写出实数  $a$  的值.

27. 在 $\triangle ABC$ 中  $AB=AC$ ,  $\angle BAC=\alpha$ ,  $D$ 是 $\triangle ABC$ 外一点, 点  $D$ 与点  $C$ 在直线  $AB$  的异侧, 且点  $D, A, E$ 不共线, 连接  $AD, BD, CD$ .

(1) 如图 1, 当  $\alpha=60^\circ$ ,  $\angle ADB=30^\circ$  时, 画出图形, 直接写出  $AD, BD, CD$  之间的数量关系;

(2) 当  $\alpha=90^\circ$ ,  $\angle ADB=45^\circ$  时, 利用图 2, 继续探究  $AD, BD, CD$  之间的数量关系并证明;

(提示: 尝试运用图形变换, 将要研究的有关线段尽可能转移到一个三角形中)

(3) 当  $\angle ADB=\frac{1}{2}\alpha$  时, 进一步探究  $AD, BD, CD$  之间的数量关系, 并用含  $\alpha$  的等式直接表示出它们之间的关系.

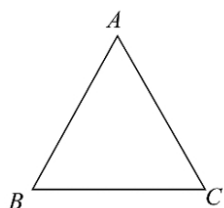


图 1

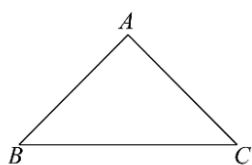
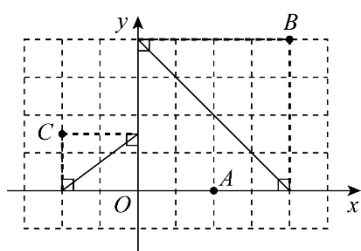


图 2

28. 对于平面直角坐标系  $xOy$  内任意一点  $P$ , 过  $P$  点作  $PM \perp x$  轴于点  $M$ ,  $PN \perp y$  轴于点  $N$ , 连接  $MN$ , 则称  $MN$  的长度为点  $P$  的垂点距离, 记为  $h$ . 特别地, 点  $P$  与原点重合时, 垂点距离为 0.

(1) 点  $A(2, 0)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $C(-2, \sqrt{2})$  的垂点距离分别为\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_;



(2) 点  $P$  在以  $Q(\sqrt{3}, 1)$  为圆心, 半径为 3 的  $\odot M$  上运动, 直接写出点  $P$  的垂点距离  $h$  的取值范围;

(3) 点  $T$  为直线  $l: y=\sqrt{3}x+6$  位于第二象限内的一点, 对于点  $T$  的垂点距离  $h$  的每个值有且仅有一个点  $T$  与之对应, 求点  $T$  的横坐标  $t$  的取值范围.



# 2020 北京东城初三二模数学

## 参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 【答案】B

【解析】

【分析】

根据实数的比较大小的规则比较即可.

【详解】解：  $|-3.14|=3.14$ ；

因此根据题意可得-3 是最小的

故选 B.

【点睛】本题主要考查实数的比较大小，关键在于绝对值符号的去掉，根据负数绝对值越大，反而越小.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】

由点  $A(2,1)$  平移后  $A_1(-2,2)$  可得坐标的变化规律，由此可得点  $B$  的对应点  $B_1$  的坐标.

【详解】解：由点  $A(2,1)$  平移后  $A_1(-2,2)$  可得坐标的变化规律是：左移 4 个单位，上移 1 个单位，

$\therefore$  点  $B$  的对应点  $B_1$  的坐标  $(-1,0)$ .

故选 C.

【点睛】本题运用了点的平移的坐标变化规律，解题关键得出点  $B$  的对应点  $B_1$  的坐标.

3. 【答案】A

【解析】

【分析】

反例中的  $n$  满足  $n < 1$ ，使  $n^2 - 1 \geq 0$ ，从而对各选项进行判断.

【详解】解：当  $n = -2$  时，满足  $n < 1$ ，但  $n^2 - 1 = 3 > 0$ ，

所以判断命题“如果  $n < 1$ ，那么  $n^2 - 1 < 0$ ”是假命题，“举出  $n = -2$ .”

故选 A.

【点睛】本题考查了命题与定理，命题的“真”“假”是就命题的内容而言，任何一个命题非真即假，要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】

根据二次函数的性质与 A,B 点横坐标到对称轴的距离即可判定.

【详解】  $y = a(x+1)^2 + 2(a < 0)$  的开口向下, 对称轴为  $x = -1$

$\because$  点 A, 点 B 在对称轴的右侧,  $y$  随着  $x$  的增大而减小, 且  $x_A < x_B$

$\therefore 2 > y_1 > y_2$

故选: A

【点睛】 本题考查了二次函数上函数值的大小比较; 解题的关键是熟悉二次函数的性质, 判断开口方向和对称轴.

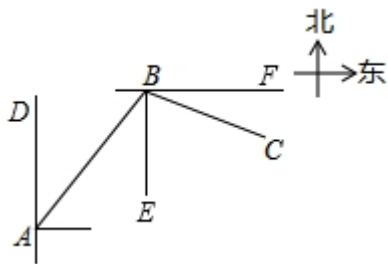
5. 【答案】 C

【解析】

【分析】

根据方位角和平行线性质求出  $\angle ABE$ , 再求出  $\angle EBC$  即可得出答案.

【详解】 解: 如图:



$\because$  小明从 A 处沿北偏东  $40^\circ$  方向行走至点 B 处, 又从点 B 处沿南偏东  $70^\circ$  方向行走至点 C 处,

$\therefore \angle DAB = 40^\circ$ ,  $\angle CBE = 70^\circ$ ,

$\because$  向北方向线是平行的, 即  $AD \parallel BE$ ,

$\therefore \angle ABE = \angle DAB = 40^\circ$ ,

$\therefore \angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$ ,

故选: C.

【点睛】 本题考查了方向角及平行线的性质, 熟练掌握平行线的性质: 两直线平行, 内错角相等是解题的关键.

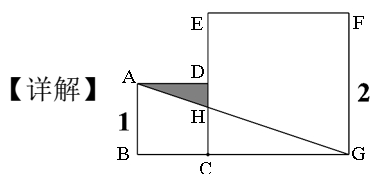
6. 【答案】 A

【解析】

【分析】

对图上各边标上字母, 由题意可证得  $\triangle ADH \sim \triangle GCH$ , 利用相似三角形对应线段成比例可知  $\frac{1}{2} = \frac{DH}{1-DH}$ , 可求

得阴影部分面积的高 DH，进而求得阴影部分面积.



$$\because \angle CHG = \angle DHA, \angle HCG = \angle ADH$$

$$\therefore \triangle ADH \sim \triangle GCH$$

$$\therefore \frac{AD}{CG} = \frac{DH}{CH}$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} = \frac{DH}{1-DH}$$

$$\text{解得 } DH = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{阴影部分面积} = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定，求阴影部分的面积，解本题的关键是求得阴影部分的高进而即可解题.

#### 7. 【答案】 C

【解析】

【分析】

根据多边形内角和定理、正五边形的性质求出  $\angle ABC$ 、 $CD=CB$ ，根据等腰三角形的性质求出  $\angle CBD$ ，计算即可.

【详解】  $\because$  五边形  $ABCDE$  为正五边形

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{5}(5-2) \times 180^\circ = 108^\circ$$

$$\because CD = CB$$

$$\therefore \angle CBD = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle CBD = 72^\circ$$

故选 C.

【点睛】 本题考查的是正多边形和圆、多边形的内角和定理，掌握正多边形和圆的关系、多边形内角和等于  $(n-2) \times 180^\circ$  是解题的关键.

#### 8. 【答案】 D

【解析】

【分析】

先根据中位数和众数的定义得到 7 出现的次数是 2 次，6 出现 1 次，则最大的三个数分别是 6、7、7，据此一一判断选项即可得到答案；

【详解】解：因为中位数是 6，众数是 7，

则 7 至少出现 2 次，因此最大的三个数只能为：6、7、7，

故 8 不能出现，故 A 选项错误；

当 5 个数的和最大时这 5 个数是：4、5、6、7、7，此时和为：29，故 B 选项错误；

两个较小的数一定是小于 6 的非负整数，且不相等，故最小的两个数最小只能是 0、1，故五个数的和的最小是  $0+1+6+7+7=21$ ，故 C 选项错误；

当 5 个数的和最大时这 5 个数是：4、5、6、7、7，平均数为： $\frac{4+5+6+7+7}{5}=5.8$ ，

当 5 个数的和最小时这 5 个数是：0、1、6、7、7，平均数为： $\frac{0+1+6+7+7}{5}=4.2$ ，

故平均数  $m$  一定满足  $4.2 \leq m \leq 5.8$ ，D 选项正确；

故选：D.

【点睛】本题主要考查了中位数、众数、平均数的定义以及相关应用，能根据题目的已知条件得到这一组数据的特征是解题的关键.

## 二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分），

9. 【答案】  $3a(a-1)^2$

【解析】

【分析】

先提取公因式  $3a$ ，再根据完全平方公式进行二次分解即可.

【详解】  $3a^3 - 6a^2 + 3a = 3a(a^2 - 2a + 1) = 3a(a-1)^2$ .

故答案为  $3a(a-1)^2$

【点睛】本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用完全平方公式进行二次分解，注意分解要彻底.

10. 【答案】 乙

【解析】

【分析】

根据方差的意义判断. 方差反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立.

【详解】解：  $\because S_{\text{甲}}^2 = 15$ ，  $S_{\text{乙}}^2 = 3$ ，

$\therefore S_{\text{甲}}^2 > S_{\text{乙}}^2$ ，

$\therefore$  甲、乙两人中成绩稳定的是乙；

故答案为：乙.

【点睛】本题考查了方差的意义：反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立.

11. 【答案】3

【解析】

【分析】

根据一次函数的性质，将点代入求解即可.

【详解】解：将  $(a, 10)$  代入直线  $y = 3x + 1$

得：  $10 = 3a + 1$

解得：  $a = 3$

故答案是：3.

【点睛】本题考查了一次函数的性质，解决本题的关键是正确理解题意，理解点在图像上，即点的横纵坐标满足一次函数解析式.

12. 【答案】  $(-1, 2)$  或  $(1, -2)$

【解析】

【分析】

根据位似图形的中心和位似比例即可得到点 A 的对应点 C.

【详解】解：以原点  $O$  为位似中心，把这个三角形缩小为原来的  $\frac{1}{2}$ ，点 A 的坐标为  $(-2, 4)$ ，

$\therefore$  点 C 的坐标为  $(-2 \times \frac{1}{2}, 4 \times \frac{1}{2})$  或  $(2 \times \frac{1}{2}, -4 \times \frac{1}{2})$ ，即  $(-1, 2)$  或  $(1, -2)$ ，

故答案为  $(-1, 2)$  或  $(1, -2)$  .

【点睛】本题主要考查位似图形的对应点，关键在于原点的位似图形，要注意方向.

13. 【答案】3

【解析】

【分析】

根据圆锥的侧面积和圆锥的母线长求得圆锥的弧长，利用圆锥的侧面展开扇形的弧长等于圆锥的底面周长求得圆锥的底面半径即可.

【详解】 $\because$  圆锥的母线长是 5cm，侧面积是  $15\pi \text{ cm}^2$ ，

$\therefore$  圆锥的侧面展开扇形的弧长为：  $\frac{2 \times 15\pi}{5} = 6\pi$ ，

$\because$  锥的侧面展开扇形的弧长等于圆锥的底面周长，

$\therefore r = \frac{6\pi}{2\pi} = 3\text{cm}$ ，

故答案为 3.

【点睛】本题考查了圆锥的计算，解题的关键是正确地进行圆锥与扇形的转化.

14. 【答案】11.

【解析】

【分析】

根据垂直平分线的性质：垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等，即可得到  $AE=BE$ ，则

$C_{\triangle ACE} = AE+AC+EC$ ，代入即可求解.

【详解】解：∵  $AB$  的垂直平分线交  $A$  于点  $D$ ，交  $BC$  于点  $E$

$$\therefore AE=BE$$

$$\therefore C_{\triangle ACE} = AE+AC+EC$$

$$\therefore C_{\triangle ACE} = BE+AC+EC = BC+AC$$

$$\therefore BC = 6, AC = 5,$$

$$\therefore C_{\triangle ACE} = 6+5=11$$

故答案为：11.

【点睛】本题主要考查的是垂直平分线的性质，垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等，掌握垂直平分线的性质是解题的关键.

15. 【答案】  $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】

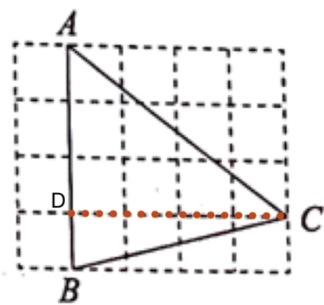
结合图形，根据锐角三角函数的定义即可求解.

【详解】在网格上取个点  $D$ ，得  $\angle ADC = 90^\circ$

$$\therefore CD=4, AD=3$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 5$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{CD}{AC} = \frac{4}{5}$$



故答案为：  $\frac{4}{5}$

【点睛】本题考查解直角三角形，涉及勾股定理逆定理，勾股定理，锐角三角函数，属于学生灵活运用所学知识.

16. 【答案】93

【解析】

【分析】

分合买和单买两种情况讨论

【详解】两人合买： $40+40\times 0.5+16+15+14\times 2+9=128$ （元）， $128+5-20=113$ （元）

两人单买：佳佳买汉堡套餐，鸡翅，鸡块，冰激凌花费： $40\times 0.5+16+14+15+5-15=55$ （元）

点点买汉堡套餐，冰激凌，蔬菜沙拉花费：

$40\times 0.5+14+9+5-10=38$ （元）

总花费为： $55+38=93$ （元）

$\therefore 113>93$ ，故两人单买花费最少

故答案为：93.

【点睛】知道需要分合买和单买两种情况讨论，同时记得满减是解题的关键.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 【答案】（1）作图见解析；（2） $COE$ ，90，45，一条弧所对的圆周角是它所对圆心角的一半.

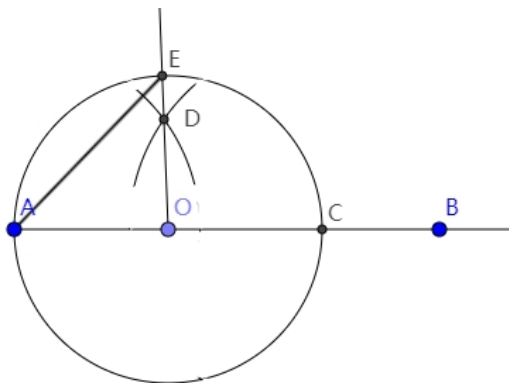
【解析】

【分析】

（1）根据题意则可所求角；

（2）根据三角形全等求出  $\angle COE$  的度数为  $90^\circ$ ，再根据同弧所对的圆周角等于圆心角的一半这一知识点，即可求出  $\angle EAB = 45^\circ$ ，即可求证.

【详解】解：（1）如下图所示：



（2） $\because AD=CD$ ， $AO=CO$

$\therefore \angle AOE = \angle COE = 90^\circ$ .

$\therefore \angle EAB = 45^\circ$ .（一条弧所对的圆周角是它所对圆心角的一半）（填推理的依据）

故答案为： $COE$ ，90，45，一条弧所对的圆周角是它所对圆心角的一半.

【点睛】本题考查了尺规作图的知识点，熟练应用尺规作图作出所求角及应用圆的性质求证是解题的关键.

18. 【答案】  $x < 2$ ，解集见解析；

【解析】

【分析】

先求出不等式的解集，然后画出数轴表示即可.

【详解】解：  $2(x-2)-5(x+4) > -30$ .

$$2x-4-5x-20 > -30.$$

$$-3x > -6.$$

$$x < 2.$$

不等式的解集在数轴上表示为：



【点睛】此题主要考查了不等式的解法，以及在数轴上表示不等式的解集，关键是用数轴表示不等式的解集时，要注意“两定”：一是定界点，一般在数轴上只标出原点和界点即可. 定界点时要注意，点是实心还是空心，若边界点含于解集为实心点，不含于解集，即为空心点；二是定方向，定方向的原则是：“小于向左，大于向右”.

19. 【答案】  $\frac{6b}{a+3b}$ ，  $\frac{6}{5}$

【解析】

【分析】

将代数式化简得到  $\frac{6b}{a+3b}$ ，再根据题意  $a-2b=0$ ，可得  $a=2b$ ，用  $b$  表示  $a$  代入  $\frac{6b}{a+3b}$ ，即可得出答案.

$$\text{【详解】解： } 1 - \left( \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2} \right) \div \frac{a+3b}{a^2-6ab+9b^2}$$

$$= 1 - \left[ \frac{a-3b}{(a+3b)(a-3b)} + \frac{6b}{(a+3b)(a-3b)} \right] \div \frac{a+3b}{(a-3b)^2}$$

$$= 1 - \frac{a-3b+6b}{(a+3b)(a-3b)} \cdot \frac{(a-3b)^2}{a+3b}$$

$$= 1 - \frac{a-3b}{a+3b}$$

$$= \frac{6b}{a+3b}.$$

当  $a-2b=0$ ，即  $a=2b$  时，



$$\text{原式} = \frac{6b}{2b+3b} = \frac{6}{5}.$$

【点睛】本题考查了分式化简求值的知识点，熟练掌握分式化简，以及用  $b$  表示  $a$  代入化简的代数式是解题的关键.

20. 【答案】  $\angle DAC = 34^\circ$

【解析】

【分析】

由三角形内角和计算出  $\angle BAC$  的度数，由  $BA=BD$ ， $\angle B = 40^\circ$ ，计算出  $\angle BAD$  的度数，进而得到  $\angle DAC$  的度数.

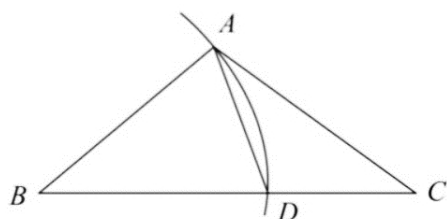
【详解】解：如图， $\because \angle B = 40^\circ, \angle C = 36^\circ$ ,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 104^\circ.$$

由作图可知， $AB = DB$ .

$$\therefore \angle BAD = \angle ADB = (180^\circ - \angle B) \div 2 = 70^\circ.$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC - \angle BAD = 34^\circ.$$



【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，三角形内角和定理，掌握等边对等角是解题的关键，注意三角形外角性质的应用.

21. 【答案】 (1) 证明见解析； (2)  $AC = 6$

【解析】

【分析】

(1) 首先证明四边形  $AOBF$  是平行四边形，再由菱形  $ABCD$  的性质得  $\angle AOB = 90^\circ$  即可推出四边形  $AOBF$  是菱形.

(2) 首先根据矩形对角线相等和菱形的四边相等可以求得  $OF = AD = 5$ ，然后在直角三角形  $AOF$  中，解直角三角形可以求出  $AO$  的长，从而得到  $AC$  的长.

【详解】(1) 证明： $\because$  点  $E$  是  $AB$  的中点， $EF = EO$ ,

$\therefore$  四边形  $AOBF$  是平行四边形.

又  $\because$  四边形  $ABCD$  是菱形，

$\therefore AC \perp BD$ ，即  $\angle AOB = 90^\circ$ .

∴ 四边形  $AOBF$  是矩形.

(2) 解: ∵ 四边形  $AOBF$  是矩形,

$$\therefore AB = OF, \angle FAO = 90^\circ.$$

又 ∵ 四边形  $ABCD$  是菱形,

$$\therefore AB = AD = 5.$$

$$\therefore OF = 5.$$

在  $Rt\triangle AFO$  中,  $OF = 5, \sin \angle AFO = \frac{3}{5}$ ,

$$\therefore AO = 3.$$

$$\therefore AC = 6.$$

【点睛】本题考查了矩形的性质与判定, 菱形的性质, 解直角三角形等知识, 灵活运用这些性质解决问题是本题的关键.

22. 【答案】(1)  $k = -4$ ,  $m = 2$ ; (2)  $n = 1$  或  $n = 2$ .

【解析】

【分析】

(1) 将 A 点代入反比例函数解析式, 将 B 点代入一次函数解析式, 即可求出答案;

(2) 由题意可得,  $PC = 1$ ,  $PD = |\frac{4}{n} - 2n|$ , 在分点  $D$  在点  $P$  的下方时和点  $D$  在点  $P$  的上方时两种情况求解即可.

【详解】解: (1) ∵ 反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0, x > 0)$  的图象经过点  $A(1, -4)$ ,

$$\therefore k = -4.$$

又 ∵ 直线  $y = -2x + m$  与  $x$  轴交于点  $B(1, 0)$ ,

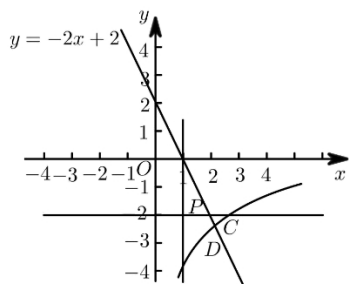
$$\therefore m = 2;$$

(2) 由 (1) 知,  $k = -4$ ,  $m = 2$ ,

则反比例函数为:  $y = \frac{-4}{x}$ ,

直线函数解析式为:  $y = -2x + 2$ ,

如图点  $P(n, -2n)$ ,



过 P 点平行于 x 轴的直线为:  $y = -2n$ ,

过 P 点平行于 y 轴的直线为:  $x = n$ ,

则把  $y = -2n$  代入  $y = -2x + 2$ ,

则有  $-2n = -2x + 2$ , 解得  $x = n + 1$ ,

则 C 点坐标为  $(n + 1, -2n)$ ,

则  $PC = n + 1 - n = 1$ ,

把  $x = n$  代入  $y = \frac{-4}{x}$ ,

则有  $y = -\frac{4}{n}$ ,

则 P 点坐标为  $(n, -\frac{4}{n})$ ,

则  $PD = |-\frac{4}{n} - 2n|$ ,

又  $\because PD = 2PC$ ,

当  $-\frac{4}{n} - 2n > 0$  时,  $-\frac{4}{n} - 2n = 2 \times 1$ ,

$n^2 + n - 2 = 0$ ,

$(n + 2)(n - 1) = 0$ ,

$n_1 = 1, n_2 = -2$  (舍去),

经检验  $n = 1$  是原方程的解,

当  $-\frac{4}{n} - 2n < 0$  时,  $2n - \frac{4}{n} = 2 \times 1$ ,

$n^2 - n - 2 = 0$ ,

$(n - 2)(n + 1) = 0$ ,

$n_1 = 2, n_2 = -1$  (舍去),

经检验  $n = 2$  是原方程的解,

综上, 当  $PD = 2PC$  时,  $n = 1$  或  $n = 2$ .

【点睛】本题考查了反比例函数和一次函数的综合, 一元二次方程, 根据题意得出  $PD = |-\frac{4}{n} - 2n|$  是解题关键.

23. 【答案】(1) 14; (2) 见解析; (3) 6.3; (4) ①, ②.

【解析】

【分析】

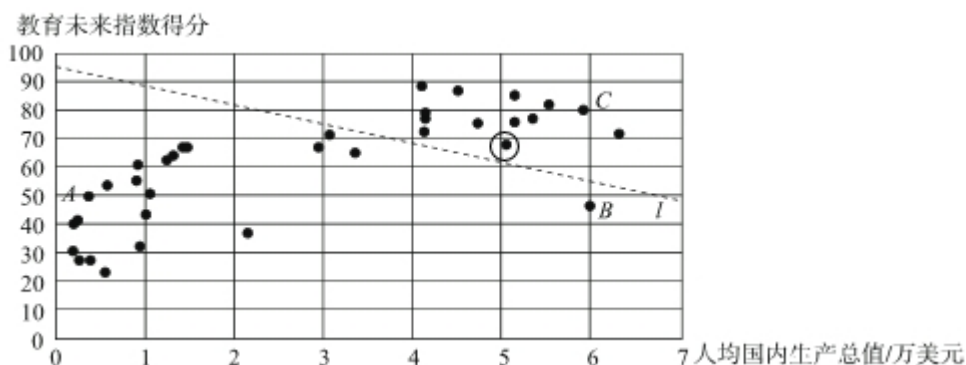
- (1) 在频率分布直方图中，计算 70 分以上的频数，将  $60 \leq x < 70$  之间的数据按照从大到小排列，即可确定；
- (2) 根据 (1) 在图中画出即可；
- (3) 根据统计图中提供的人均国内生产总值和和教育未来指数分析即可；
- (4) 根据统计图分析合理即可在.

【详解】(1) 由条形统计图可知： $70 \leq x < 90$  的国家数为：8+5=13

在  $60 \leq x < 70$  这一组中，将数据按照从大到小排列，68.5 排在第一位，故香港位于第 14 位

故答案为：14.

(2) 补充如图所示：



(3) 根据统计图中提供的人均国内生产总值和和教育未来指数分析，得人均国内生产总值的最大值约为 6.3 万美元.

故答案为：6.3.

(4) 根据统计图中提供的人均国内生产总值和和教育未来指数分析：

- ①相较于点 A, C 所代表的国家和地区，中国的教育未来指数得分还有一定差距，“十三五”规划提出“教育优先发展，教育强则国家强”的任务，进一步提高国家教育水平；合理.
- ②相较于点 B, C 所代表的国家和地区，中国的人均国内生产总值还有一定差距，中国提出“决胜全面建成小康社会”的奋斗目标，进一步提高人均国内生产总值；合理.

【点睛】本题考查了数据的分析，读懂统计图，并理解题意是解题的关键.

24. 【答案】(1)  $AP, DP, DQ$ ；(2) 图形见解析；(3) 2

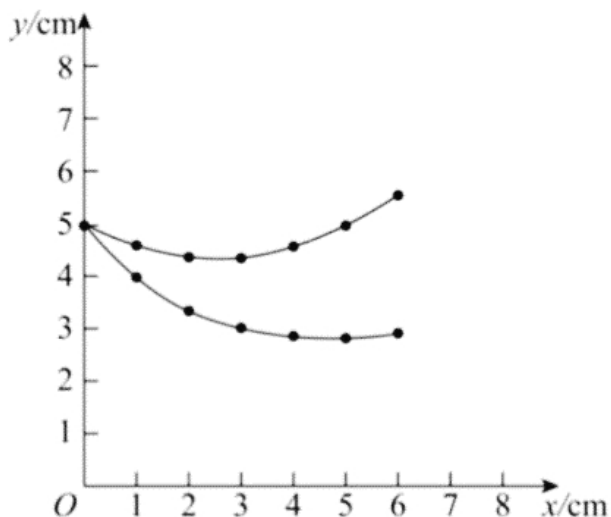
【解析】

【分析】

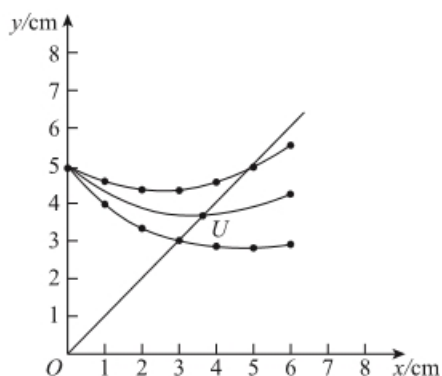
- (1) 根据变量的定义即可求解；
- (2) 依据表格中的数据描点、连线即可得；
- (3) 画出直线 AP 的图象  $y=x$ ，画出  $\frac{1}{2}(DP+DQ)$  的函数图象，两函数图象交点的横坐标即为所求.

【详解】解：（1）根据变量的定义，AP 是自变量，DP、DQ 是因变量，即 DP、DQ 是 AP 的函数，

（2）如图所示：



（3）在图象上画出直线 AP 的图象  $y=x$ ，画出  $\frac{1}{2}(DP+DQ)$  的函数图象，新画的两个函数的交点 U，即为  $AP=\frac{1}{2}(DP+DQ)$  的点，此时 AP 的长度约为 3.63.



【点睛】本题是动点问题的函数图象，解题的关键是理解题意，学会利用数形结合的思想思考问题，属于中考常考题型.

25. 【答案】（1）见解析；（2） $AC = \frac{16\sqrt{5}}{5}$ .

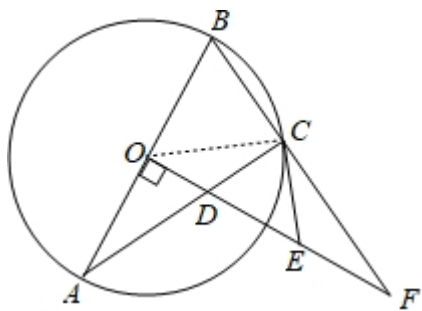
【解析】

【分析】

（1）连接 OC，由切线的性质可证得  $\angle ACE + \angle A = 90^\circ$ ，又  $\angle CDE + \angle A = 90^\circ$ ，可得  $\angle CDE = \angle ACE$ ，则结论得证；

（2）先根据勾股定理求出 OE，OD，AD 的长，证明  $Rt\triangle AOD \sim Rt\triangle ACB$ ，得出比例线段即可求出 AC 的长.

【详解】（1）证明：连接 OC，



$\because CE$  与  $\odot O$  相切,  $OC$  是  $\odot O$  的半径,

$\therefore OC \perp CE$ ,

$\therefore \angle OCA + \angle ACE = 90^\circ$ .

$\because OA = OC$ ,

$\therefore \angle A = \angle OCA$ ,

$\therefore \angle ACE + \angle A = 90^\circ$ .

$\because OD \perp AB$ ,

$\therefore \angle ODA + \angle A = 90^\circ$ .

$\therefore \angle CDE = \angle ACE$ ,

$\therefore EC = ED$ .

(2)  $\because AB$  为直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ .

在  $Rt\triangle DCF$  中,  $\angle DCE + \angle ECF = 90^\circ$ ,

又  $\angle DCE = \angle CDE$ ,

$\therefore \angle CDE + \angle ECF = 90^\circ$ ,

又  $\because \angle CDE + \angle F = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ECF = \angle F$ ,

$\therefore EC = EF$ .

$\because EF = 3$ ,

$\therefore EC = DE = 3$ .

在  $Rt\triangle OCE$  中,  $OC = 4$ ,  $CE = 3$ ,

$\therefore OE = \sqrt{OC^2 + EC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ .

$\therefore OD = OE - DE = 2$ .

在  $Rt\triangle OAD$  中,  $AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ .

在  $Rt\triangle AOD$  和  $Rt\triangle ACB$  中,

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore Rt\triangle AOD \sim Rt\triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AO}{AC} = \frac{AD}{AB}, \text{ 即 } \frac{4}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{8},$$

$$\therefore AC = \frac{16\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径．若出现圆的切线，必连过切点的半径，构造定理图，得出垂直关系．也考查了圆周角定理和相似三角形的判定与性质．

26. 【答案】(1)  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{33}{4}\right)$ ; (2)  $a$  的取值范围是  $0 \leq a < 6$  或  $a = \frac{49}{4}$ ; (3)  $a = 8$ .

【解析】

【分析】

(1) 将 B 点坐标代入抛物线即可求出  $a$  的值，从而求出抛物线的解析式，再根据顶点坐标公式即可求出顶点坐标；

(2) 讲 A 点和 B 点的坐标分别代入抛物线解析式即可求出相应的  $a$  值，通过观察图象，上下移动图象即可知道抛物线与线段 AB 有交点时  $a$  的范围；

(3) 抛物线  $y = x^2 - 5x + a - 2$  的对称轴为  $x = \frac{5}{2}$ ，抛物线开口向上，当  $x > \frac{5}{2}$  时， $y$  越来越大，则  $x^2 - 5x + a - 2 \leq 0$  的  $x$  的最大值为 3，可知，当  $x=3$  时， $x^2 - 5x + a - 2 = 0$ ，代入即可求出  $a$  的值．

【详解】解：(1) 依据题意，将得点 B 的坐标 (6,4) 代入抛物线得：

$$4 = 36 - 30 + a - 2,$$

解得  $a = 0$ ．

$$\text{此时, } y = x^2 - 5x - 2.$$

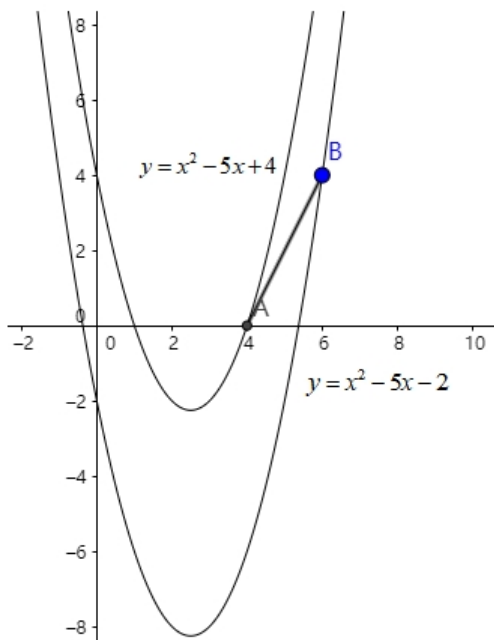
$$\text{所以顶点 } C \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{33}{4}\right).$$

$$(2) \text{ 当抛物线过 } A(0,4) \text{ 时, } a = 6, \text{ 此时, } y = x^2 - 5x + 4.$$

$$\text{当抛物线过 } B(6,4) \text{ 时, } a = 0, \text{ 此时, } y = x^2 - 5x - 2.$$

$$\text{当抛物线顶点在线段 AB 上时, } a = \frac{49}{4}.$$

结合下面图象可知， $a$  的取值范围是  $0 \leq a < 6$  或  $a = \frac{49}{4}$ ．



(3) 抛物线  $y = x^2 - 5x + a - 2$  的对称轴为  $x = \frac{5}{2}$ ，抛物线开口向上，当  $x > \frac{5}{2}$  时， $y$  越来越大，则  $x^2 - 5x + a - 2 \leq 0$  的  $x$  的最大值为 3，可知，当  $x=3$  时，不等式有最大值且最大值为 0，则  $x^2 - 5x + a - 2 = 0$ ，代入得  $3^2 - 5 \times 3 + a - 2 = 0$ ，解得  $a = 8$ 。

则实数  $a$  的值为 8。

【点睛】本题考查了二次函数的解析式、图象及二次函数与一元二次不等式的相关知识点，熟练掌握公式以及灵活观察图象是解题的关键。

27. 【答案】(1) 图形见解析， $AD, BD, CD$  之间的数量关系是  $AD^2 + BD^2 = CD^2$ ；(2)  $2AD^2 + BD^2 = CD^2$ ；

$$(3) \left( 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot AD \right)^2 + BD^2 = CD^2$$

【解析】

【分析】

(1) 画出图形即可证得  $\triangle ABC$  是等边三角形，以  $BD$  为边向外作等边  $\triangle BDE$ ，利用 SAS 可证明  $\triangle ABE \cong \triangle CBD$  故  $AE = CD$ ，运用勾股定理即可得出答案；

(2) 过点  $A$  作  $AE \perp AD$ ，且  $AE = AD$ ，利用勾股定理可得  $DE^2 = AD^2 + AE^2 = 2AD^2$ ，利用 SAS 可证明  $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ ，可得  $CD = BE$ 。

运用勾股定理在  $Rt\triangle BDE$  中， $DE^2 + BD^2 = BE^2$ ，即可得出答案；

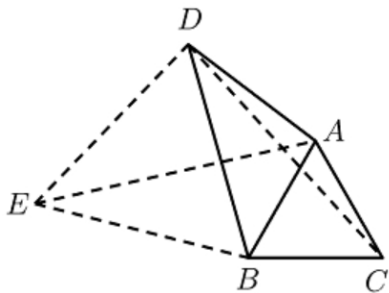
(3) 以  $BD$  为底边构造等腰  $\triangle BDE$ ，使  $\angle BED = \alpha$ ，连接  $AE, CD$ ，过点  $A$  作  $AH \perp BC$  于点  $H$ ，由两边成比例和它们的夹角相等可判定  $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ ，故  $\angle ABC = \angle ACB = \angle EBD = \angle EDB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ，可得  $\angle ADE = 90^\circ$ 。

由  $\triangle BED \sim \triangle BAC$  可得  $\frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$ ，进而证明  $\triangle EBA \sim \triangle DBC$ ，可得  $\frac{AE}{CD} = \frac{AB}{BC}$  有三角函数可得  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{AB}$



推出  $AE = \frac{CD}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ ,  $DE = \frac{BD}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ , 利用勾股定理, 将 AE、DE 代入  $AD^2 + DE^2 = AE^2$  即可得出答案

【详解】解: (1)



$\because \alpha = 60^\circ$ ,  $AB = AC$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ$

$\therefore \triangle ABC$  是等边三角形

以 BD 为边向外作等边  $\triangle BDE$  连接 AE, CD

$\because \triangle ABC, \triangle BDE$  都是等边三角形

$\therefore BA = BC = AC, BD = BE = DE$

$\angle ABC = \angle DBE = 60^\circ$

$\therefore \angle ABC + \angle ABD = \angle DBE + \angle ABD$

$\therefore \angle CBD = \angle ABE$

在  $\triangle ABE$  和  $\triangle CBD$  中

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle ABE = \angle CBD \\ BE = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD$  (SAS)

$\therefore AE = CD$

$\because \angle ADB = 30^\circ, \angle BDE = 60^\circ$

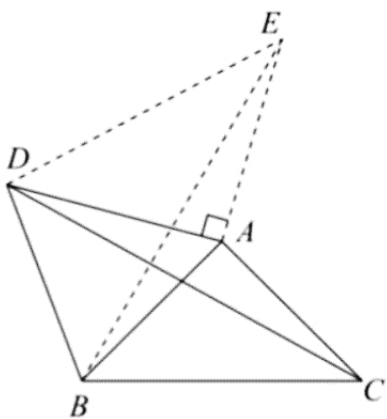
$\therefore \angle ADE = \angle ADB + \angle BDE = 90^\circ$

在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中  $AD^2 + DE^2 = AE^2$

即  $AD^2 + BD^2 = CD^2$

故答案为:  $AD^2 + BD^2 = CD^2$

(2) 如图, 过点 A 作  $AE \perp AD$ , 且  $AE = AD$ , 连接  $BE, DE$ .



$$\therefore \angle ADE = 45^\circ .$$

$$\text{可得 } DE^2 = AD^2 + AE^2 = 2AD^2 .$$

$$\because \angle CAB = \angle DAE = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BAE .$$

$$\text{又} \because AC = AB ,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE . (SAS)$$

$$\therefore CD = BE .$$

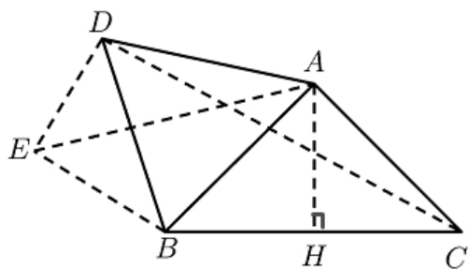
$$\text{在 } Rt\triangle BDE \text{ 中, } DE^2 + BD^2 = BE^2 .$$

$$\therefore 2AD^2 + BD^2 = CD^2 .$$

(3) 以 BD 为底边构造等腰  $\triangle BDE$

使  $\angle BED = \alpha$  , 连接 AE, CD

过点 A 作  $AH \perp BC$  于点 H



$$\because AB = AC, BE = DE, \angle BAC = \angle BED = \alpha$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{DE}$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle EBD = \angle EDB$$

$$= \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

$$= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ADB + \angle EDB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle BAC$$

$$\therefore \frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

$$\therefore \angle EBD + \angle ABD = \angle ABC + \angle ABD$$

$$\therefore \angle EBA = \angle DBC$$

$$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$$

$$\therefore \triangle EBA \sim \triangle DBC$$

$$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore AB = AC, AH \perp BC$$

$$\therefore BH = CH = \frac{1}{2}BC, \angle BAH = \angle CAH = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BH}{AB}$$

$$\therefore BC = 2AB \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{AB}{2AB \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\therefore AE = \frac{CD}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{同理 } BD = 2DE \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore DE = \frac{BD}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADE \text{ 中 } AD^2 + DE^2 = AE^2$$

$$\therefore AD^2 + \left( \frac{BD}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \left( \frac{CD}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2$$

$$\therefore 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} AD^2 + BD^2 = CD^2$$

$$\text{即 } \left( 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot AD \right)^2 + BD^2 = CD^2.$$

故答案为:  $\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot AD\right)^2 + BD^2 = CD^2$

【点睛】本题考查了三角函数，相似三角形的判定和性质，旋转的性质，勾股定理，难度系数较大，准确画出图形，运用好三角函数，相似三角形的判定和性质，旋转的性质，勾股定理等知识点是解体的关键.

28. 【答案】(1)  $h_A = 2, h_B = 4\sqrt{2}, h_C = \sqrt{6}$ ; (2)  $1 \leq h \leq 5$ ; (3)  $t = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$  或  $-\sqrt{3} \leq t < 0$

【解析】

【分析】

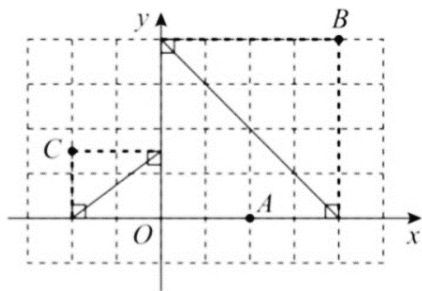
(1) 运用勾股定理计算出三点的垂点距离;

(2) 过点  $P$  作  $PM \perp x$  轴于点  $M$ ,  $PN \perp y$  轴于点  $N$ , 易证四边形  $PMON$  是矩形, 所以  $OP=MN$ , 则求点  $P$  的垂点距离  $h$  的取值范围, 及求圆上一点  $P$  到坐标原点  $O$  的取值范围;

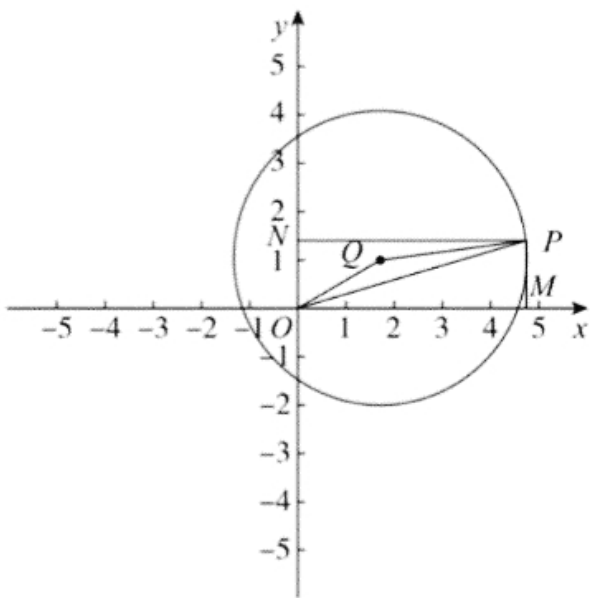
(3) 设直线  $l$  与  $x$  轴,  $y$  轴的交点分别为  $A, B$ , 过点  $O$  作  $OM \perp$  直线  $l$  于点  $M$ , 以  $OA$  为半径作  $\odot O$ , 交直线  $l$  于点  $N$ , 过点  $M, N$  分别作  $x$  轴的垂线, 垂足分别为  $C, D$ , 求出  $OC, OD$  的距里, 从而找到  $t$  的取值范围.

【详解】解: (1) 如图所示:

$$\begin{aligned} h_A &= 2, \\ \therefore h_B &= \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \\ h_C &= \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}. \end{aligned}$$



(2) 如图, 过点  $P$  作  $PM \perp x$  轴于点  $M$ ,  $PN \perp y$  轴于点  $N$ .



$$\because \angle PMO = \angle PNO = \angle MON = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $PMON$  是矩形.

$$\therefore OP = MN.$$

$$\because Q \text{ 点坐标为 } (\sqrt{3}, 1),$$

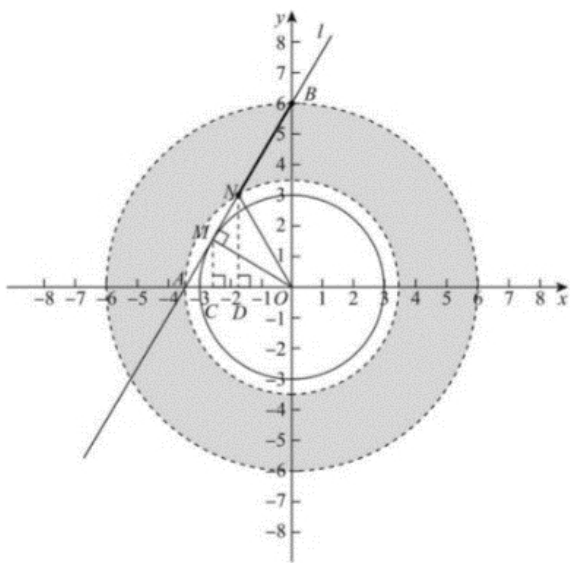
$$\therefore OQ = 2.$$

$$\because PQ - OQ \leq OP \leq PQ + OQ,$$

$$\therefore 3 - 2 \leq OP \leq 3 + 2.$$

$$\therefore 1 \leq h \leq 5.$$

(3) 如图, 设直线  $l$  与  $x$  轴,  $y$  轴的交点分别为  $A, B$ , 过点  $O$  作  $OM \perp$  直线  $l$  于点  $M$ , 以  $OA$  为半径作  $\odot O$ , 交直线  $l$  于点  $N$ .



$$\because \angle BAO = 60^\circ, AO = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AM = \sqrt{3}.$$

过点  $M, N$  分别作  $x$  轴的垂线，垂足分别为  $C, D$ ，

$$\text{则 } AC = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } OC = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$\because \triangle AON$  是等边三角形，

$$\therefore OD = \frac{1}{2}AO = \sqrt{3}.$$

$$\therefore t = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } -\sqrt{3} \leq t < 0.$$

**【点睛】** 本题考查圆的综合题、一次函数的图象与性质、垂线的性质、点的坐标与图形的性质等知识，解题的关键是理解题意，搞清楚垂点距离的定义，学会利用数形结合的思想解决问题，属于中考创新题目。