2022北京顺义初三一模

数　　学

第一部分 选择题

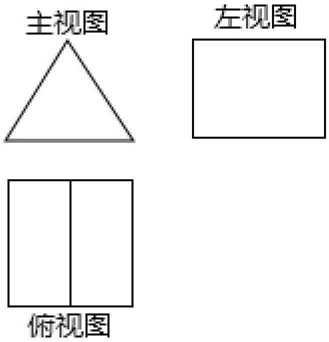
一、选择题（共16分，每题2分）

第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 北京冬奥会期间，共有近1.9万名赛会志愿者和20余万人次城市志愿者参与服务，他们默默奉献并积极传递正能量，共同用实际行动生动地诠释了“奉献、友爱、互助、进步”的志愿精神．将1.9万用科学记数法表示应为（　）

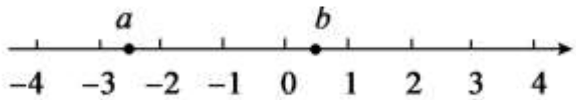
A. 19×10^{3}　　B. 1.9×10^{3}　　C. 1.9×10^{4}　　D. 0.19×10^{5}

2. 一个几何体的三视图如图所示，该几何体是(　　)



A. 直三棱柱　　B. 长方体　　C. 圆锥　　D. 立方体

3. 实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



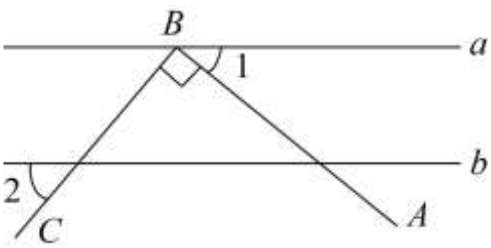
A. $a+2>0$　　B. $|a|>b$　　C. $a+b>0$　　D. $ab>0$

4. 下列计算正确的是（　）

A. $a^{2}+2a^{2}=3a^{4}$　　B. $a^{6}\div a^{3}=a^{2}$

C. $(a^{2})^{3}=a^{5}$　　D. $(ab)^{2}=a^{2}b^{2}$

5. 如图，直线 $a\parallel b$，点 B 在直线 a 上，$AB\perp BC$，若∠1=40°，则∠2的度数为（　）



A. 40°　　B. 50°　　C. 80°　　D. 140°

6. 下列采用的调查方式中，合适的是（　）

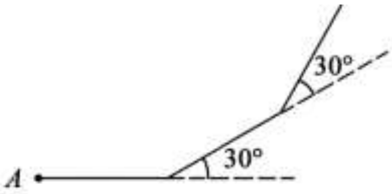
A. 为了解潮白河的水质情况，采用抽样调查的方式

B. 某工厂为了解所生产的产品的合格率，采用普查的方式

C. 某小型企业给在职员工做工作服前进行尺寸大小的调查，采用抽样调查的方式

D. 为了解神舟飞船设备零件的质量情况，采用抽样调查的方式

7. 如图，小明从 A 点出发，沿直线前进 20 米后左转 30°，再沿直线前进 20 米，又向左转 30°，…，照这样走下去，他第一次回到出发地 A 点时，一共走了（   ）



A. 120 米　　　　B. 200 米　　　　C. 160 米　　　　D. 240 米

8. 如图 1，点 P 从△ABC 的顶点 B 出发，沿 $B \to C \to A$ 匀速运动到点 A，图 2 是点 P 运动时，线段 BP 的长度 y 随时间 x 变化的关系图象，其中 M 是曲线部分的最低点，则△ABC 的面积是（   ）

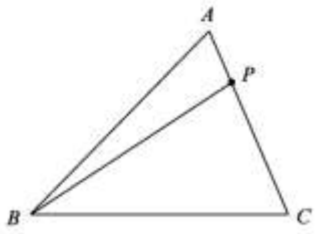


图 1

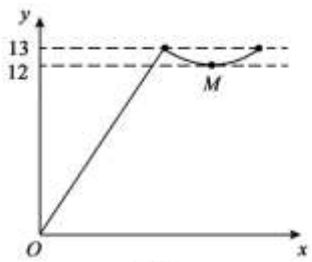


图 2

A. 30　　　　B. 60　　　　C. 78　　　　D. 156

第二部分 非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

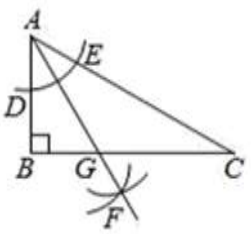
9. 若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是____________.

10. 分解因式：$3x^3-12x=$______________________.

11. 如果 $a+b=2$，那么代数式 $\left(\dfrac{a^2+b^2}{b}+2a\right)\cdot\dfrac{2b}{a+b}$ 的值为_______.

12. 已知点 $A(1,y_1)$，$B(3,y_2)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{m-2}{x}$ 的图象上，且 $y_1<y_2$，则 m 的取值范围是_______.

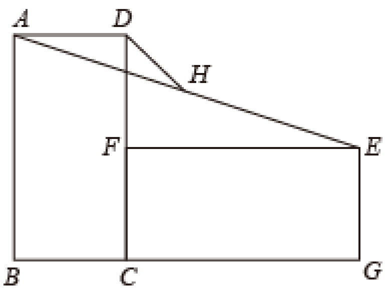
13. .如图，在 Rt△ABC 中，∠B＝90°，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AB、AC 于点 D，E，再分别以点 D、E 为圆心，大于$\frac{1}{2}$DE 为半径画弧，两弧交于点 F，作射线 AF 交边 BC 于点 G，若 BG＝1，AC＝4，则△ACG　面积是________.



14. 中共中央办公厅、国务院办公厅印发了《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》（简称"双减"）．为全面落实"双减"工作，某校成立了三个义务宣讲团，为学生家长做双减政策解读．现招募宣讲教师，如果张老师和李老师每人随机选报其中的一个宣讲团，则他们恰好选到同一个宣讲团的概率是________.

15.《九章算术》之"粟米篇"中记载了中国古代的"粟米之法"："粟率五十，粝米三十……"（粟指带壳的谷子，粝米指糙米），其意为："50 单位的粟，可换得 30 单位的粝米……"问题：有 3 斗的粟（1 斗＝10 升），若按照此"粟米之法"，则可以换得粝米为 ___升.

16. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，将矩形 $ABCD$ 绕顶点 C 顺时针旋转 90°，得到矩形 $EFCG$，连接 AE，取 AE 的中点 H，连接 DH，则 $DH=$________.



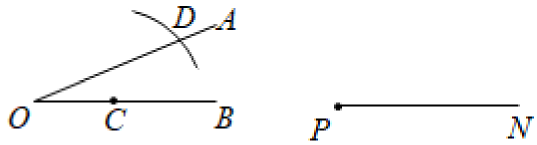
三、解答题（共 68 分，第 17-19 题，每题 5 分，第 20-21 题，每题 6 分，第 22 题 5 分，第 23 题 6 分，第 24-25 题，每题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$2\tan 60°-\sqrt{27}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}+\left|1-\sqrt{3}\right|$.

18. 解不等式组 $\begin{cases}2(x+1)\le 5x+8\\ 2x-5<\dfrac{x-1}{2}\end{cases}$ ，并写出它的所有整数解.

19. 已知：如图，$\angle AOB$ 和射线 PN.



求作：射线 PM，使得 $\angle MPN=2\angle AOB$.

作法：①在射线 OB 上任取一点 C，以点 C 为圆心，OC 的长为半径画弧，交 OA 于点 D；

②以点 P 为圆心，OC 的长为半径画圆，交射线 PN 的反向延长线于点 E；

③以点 E 为圆心，OD 的长为半径画弧，在射线 PN 上方，交 OP 于点 M；

④作射线 PM.

所以射线 PM 就是所求作的射线.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：连接 CD，EM.

∵$PM=PE=CD=CO$，$EM=OD$，

∴ $\triangle MEP \cong \triangle DOC$（________）（填推理依据）.

∴ $\angle MEP = \angle DOC$.

又∵ $\angle MPN = 2\angle MEP$（________）（填推理依据）.

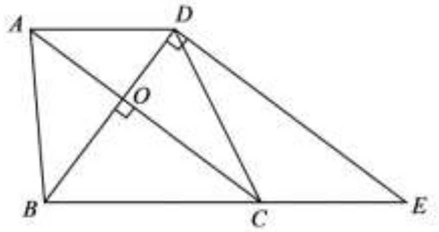
∴ $\angle MPN = 2\angle AOB$.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$ 有两个不相等的实数根.

（1）求 m 的取值范围;

（2）若方程有一个根是 0，求方程的另一个根.

21. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD // BC$ ， $AC \perp BD$ ，垂足为 O，过点 D 作 BD 的垂线交 BC 的延长线于点 E.



（1）求证：四边形 $ACED$ 是平行四边形;

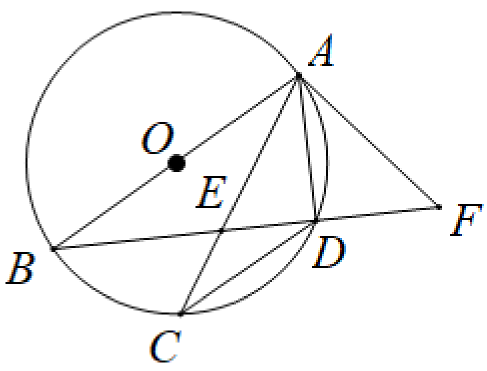
（2）若 AC=4，AD=2，$\cos\angle ACB = \dfrac{4}{5}$，求 BC 的长.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的图象平行于直线 $y = \dfrac{1}{2}x$，且经过点 $A(2,2)$.

（1）求这个一次函数的表达式;

（2）当 $x < 2$ 时，对于 x 的每一个值，一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的值大于一次函数 $y = mx - 1(m \neq 0)$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

23. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，AB 为$\odot O$ 的直径，点 D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，对角线 AC，BD 交于点 E，$\odot O$ 的切线 AF 交 BD 的延长线于点 F，切点为 A.



（1）求证：AE=AF;

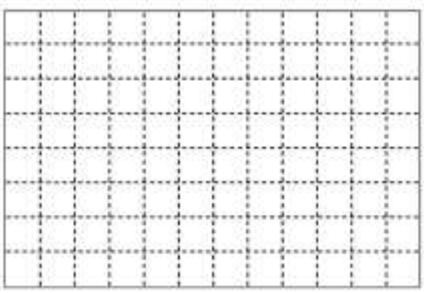
（2）若 AF=6，BF=10，求 BE 的长.

24. 某公园内的人工湖里有一组小型喷泉，水柱从位于湖面上方的水枪喷出，水柱落于湖面的路径形状是抛物线．现测量出如下数据，在距离水枪水平距离为 d 米的地点，水柱距离湖面高度为 h 米.

d（米）	0	0.5	2.0	3.5	5
h（米）	1.67	2. 25	3.00	2. 25	0

请解决以下问题：

（1）在下面网格中建立适当　平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；



（2）请结合所画图象，水柱最高点距离湖面的高度是______米；

（3）求抛物线的表达式，并写出自变量的取值范围；

（4）现有一游船宽度为 2 米，顶棚到湖面的高度为 2.5 米．要求游船从喷泉水柱中间通过时，顶棚不碰到水柱．请问游船是否能符合上述要求通过？并说明理由．

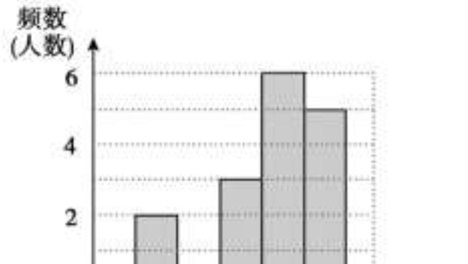
25. 为了进一步加强中小学国防教育，教育部研究制定了《国防教育进中小学课程教材指南》．某中学开展了形式多样的国防教育培训活动．为了解培训效果，该校组织七、八年级全体学生参加了国防知识竞赛（百分制），并规定 90 分及以上为优秀，80-89 分为良好，60~79 分为及格，59 分及以下为不及格．学校随机抽取了七、八年级各 20 名学生的成绩进行了整理与分析，下面给出了部分信息．

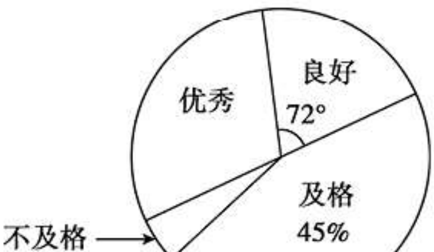
a．抽取七年级 20 名学生的成绩如下：

65 87 57 96 79 67 89 97 77 100

83 69 89 94 58 97 69 78 81 88

b．抽取七年级 20 名学生成绩的频数分布直方图如下（数据分成 5 组：$50 \le x < 60$，$60 \le x < 70$，$70 \le x < 80$，$80 \le x < 90$，$90 \le x \le 100$）：





c．抽取八年级 20 名学生成绩的扇形统计图如下：

d．七年级、八年级各抽取的 20 名学生成绩的平均数、中位数、方差如下表：

年级	平均数	中位数	方差
七年级	81	m	167.9

八年级	82	81	108.3

请根据以上信息，回答下列问题：

（1）补全七年级 20 名学生成绩　频数分布直方图，写出表中 m 的值；

（2）该校目前七年级有学生 300 人，八年级有学生 200 人，估计两个年级此次测试成绩达到优秀的学生各有多少人？

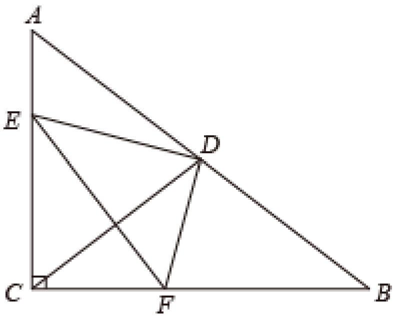
（3）你认为哪个年级的学生成绩较好，并说明理由．

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(2,-2)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx-2(a<0)$ 上．

（1）求该抛物线的对称轴；

（2）已知点 $(n-2,y_1)$，$(n-1,y_2)$，$(n+1,y_3)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx-2(a<0)$ 上．若 $0<n<1$，比较 y_1，y_2，y_3 的大小，并说明理由．

27. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是斜边 AB 上　中线，EF 垂直平分 CD，分别交 AC，BC 于点 E，F，连接 DE，DF．



（1）求∠EDF 的度数；

（2）用等式表示线段 AE，BF，EF 之间的数量关系，并证明．

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O　半径为 2．对于直线 $l: y=x+1$ 和线段 BC，给出如下定义：若将线段 BC 沿直线 l 翻折可以得到⊙O 的弦 $B'C'$（B'，C' 分别是 B，C 的对应点），则称线段 BC 是以直线 l 为轴的⊙O 的“关联线段”．例如：在图 1 中，线段 BC 的是以直线 l 为轴的⊙O 的“关联线段”．

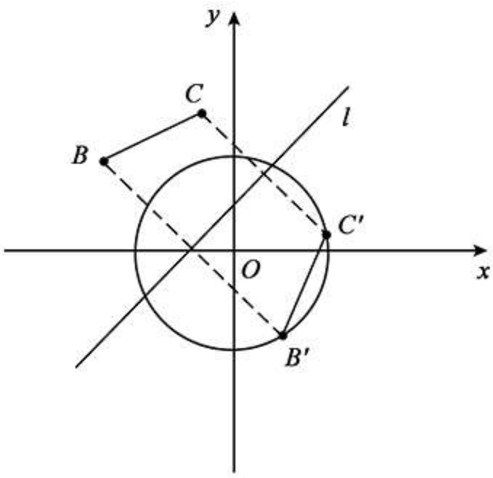


图 1

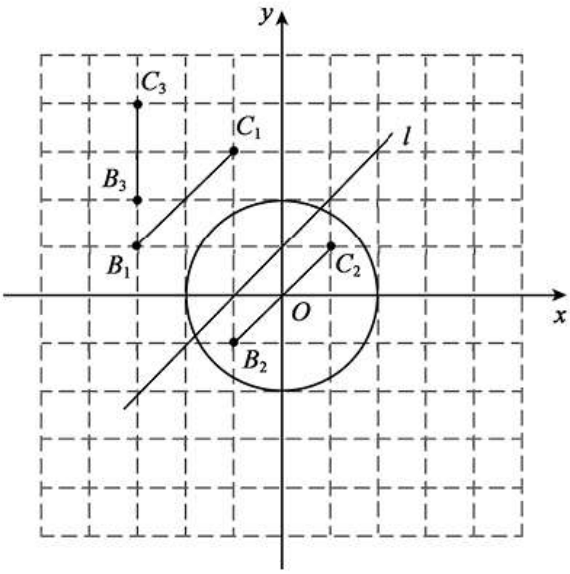


图 2

（1）如图 2，点 B_1，C_1，B_2，C_2，B_3，C_3 的横、纵坐标都是整数．在线段 B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3 中，以直线 l 为轴的 $\odot O$ 的“关联线段”是______；

（2）$\triangle ABC$ 是边长为 a 的等边三角形，点 $A(0,1)$，若 BC 是以直线 l 为轴的 $\odot O$ 的“关联线段”，求 a 的值；

（3）如果经过点 $P(-1,5)$ 的直线上存在以直线 l 为轴的 $\odot O$ 的“关联线段”，直接写出这条直线与 y 轴交点的纵坐标 m 的取值范围．

参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 北京冬奥会期间，共有近 1.9 万名赛会志愿者和 20 余万人次城市志愿者参与服务，他们默默奉献并积极传递正能量，共同用实际行动生动地诠释了“奉献、友爱、互助、进步”的志愿精神．将 1.9 万用科学记数法表示应为（　）

A. 19×10^{3}　　B. 1.9×10^{3}　　C. 1.9×10^{4}　　D. 0.19×10^{5}

【答案】C

【解析】

【分析】绝对值大于 1 的数可以用科学记数法表示，一般形式为 $a\times10^{n}$，n 为正整数，且比原数的整数位数少 1，据此可以解答.

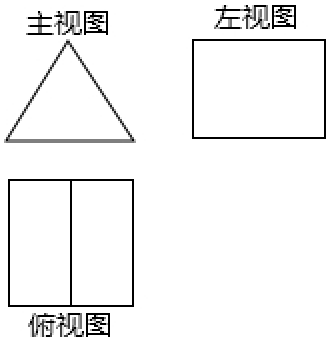
【详解】解：∵1.9 万=19000，

∴1.9 万用科学记数法表示应为1.9×10^{4}.

故选：C

【点睛】本题考查用科学记数法表示较大的数，熟练掌握科学记数法表示较大的数一般形式为$a\times10^{n}$，其中$1\le|a|<10$，n是正整数，正确确定a的值和n的值是解题的关键.

2. 一个几何体的三视图如图所示，该几何体是(　　)



A. 直三棱柱　　B. 长方体　　C. 圆锥　　D. 立方体

【答案】A

【解析】

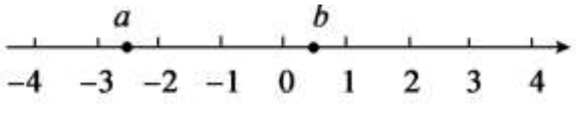
【分析】根据三视图的形状可判断几何体的形状.

【详解】观察三视图可知，该几何体是直三棱柱.

故选 A.

本题考查了几何体的三视图和结构特征，根据三视图的形状可判断几何体的形状是关键.

3. 实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



A. $a+2>0$　　B. $|a|>b$　　C. $a+b>0$　　D. $ab>0$

【答案】B

【解析】

【分析】观察数轴可得$a<-2<0<b<1$，再根据有理数四则运算法则，逐项判断即可求解．

【详解】解：根据题意得：$a<-2<0<b<1$，

A、$a+2<0$，故本选项错误，不合题意；

B、$|a|>b$，故本选项正确，符合题意；

C、$a+b<0$，故本选项错误，不合题意；

D、$ab<0$，故本选项错误，不合题意；

故选：B

【点睛】本题主要考查了数轴，有理数运算，根据题意得到$a<-2<0<b<1$是解题的关键．

4. 下列计算正确的是（　）

A. $a^2+2a^2=3a^4$　　　　B. $a^6\div a^3=a^2$

C. $(a^2)^3=a^5$　　　　D. $(ab)^2=a^2b^2$

【答案】D

【解析】

【分析】由合并同类项、同底数幂除法，幂的乘方、积的乘方，分别进行判断，即可得到答案．

【详解】解：A. $a^2+2a^2=3a^2$，故 A 错误；

B. $a^6\div a^3=a^3$，故 B 错误；

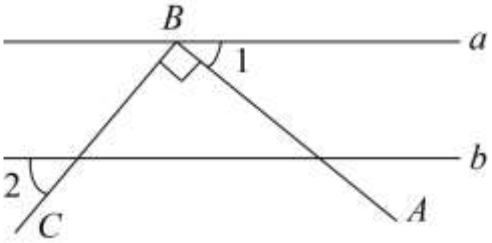
C. $(a^2)^3=a^6$，故 C 错误；

D. $(ab)^2=a^2b^2$，故 D 正确；

故选：D．

【点睛】本题考查了同底数幂除法，积的乘方，幂的乘方，合并同类项，解题的关键是熟练掌握运算法则进行解题．

5. 如图，直线 $a \parallel b$，点 B 在直线 a 上，$AB\perp BC$，若∠1=40°，则∠2 的度数为（　）



A. 40°　　　　B. 50°　　　　C. 80°　　　　D. 140°

【答案】B

【解析】

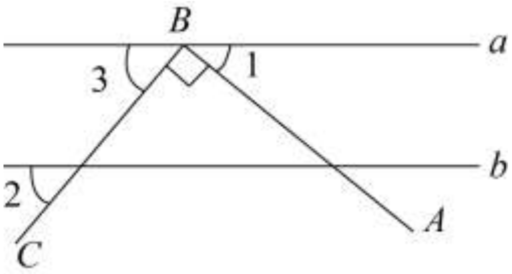
【分析】由平角的定义和两直线平行同位角相等即可求出．

【详解】解：如图可得：$\angle1+\angle3+90^\circ=180^\circ$，

$\therefore\angle3=50^\circ$，

$\because a\parallel b$，

$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 50°$ （两直线平行同位角相等）.



故选 B.

【点睛】本题考查了平行线性质以及平角定义，熟练掌握平行线性质是解题关键.

6. 下列采用的调查方式中，合适的是（　）

A. 为了解潮白河的水质情况，采用抽样调查的方式

B. 某工厂为了解所生产的产品的合格率，采用普查的方式

C. 某小型企业给在职员工做工作服前进行尺寸大小的调查，采用抽样调查的方式

D. 为了解神舟飞船设备零件的质量情况，采用抽样调查的方式

【答案】A

【解析】

【分析】根据普查得到的调查结果比较准确，但所费人力、物力和时间较多，而抽样调查得到的调查结果比较近似解答.

【详解】解：A．为了解潮白河的水质情况，采用抽样调查的方式，此选项符合题意；

B．某工厂为了解所生产的产品的合格率，采用普查的方式，此选项不符合题意；

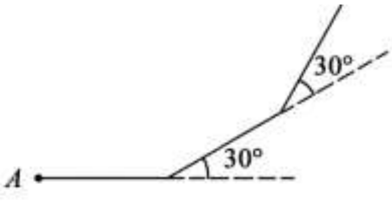
C．某小型企业给在职员工做工作服前进行尺寸大小的调查，采用抽样调查的方式，此选项不符合题意；

D．为了解神舟飞船设备零件的质量情况，采用抽样调查的方式，此选项不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查的是抽样调查和全面调查的区别，选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象的特征，灵活选用。一般来说，对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的调查往往选用普查.

7. 如图，小明从 A 点出发，沿直线前进 20 米后左转 30°，再沿直线前进 20 米，又向左转 30°，…，照这样走下去，他第一次回到出发地 A 点时，一共走了（　）



A. 120 米　　B. 200 米　　C. 160 米　　D. 240 米

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知小华走出了一个正多边形，根据正多边形的外角和公式可求解.

【详解】已知多边形的外角和为 360°，而每一个外角为 30°，可得多边形的边数为 360°÷30°=12，所以小明一共走了：12×20=240 米.

故答案选：D.

【点睛】本题考查多边形内角与外角，熟记公式是关键.

8. 如图 1，点 P 从△ABC 的顶点 B 出发，沿 $B\to C\to A$ 匀速运动到点 A，图 2 是点 P 运动时，线段 BP 的长度 y 随时间 x 变化的关系图象，其中 M 是曲线部分的最低点，则△ABC 的面积是（　）

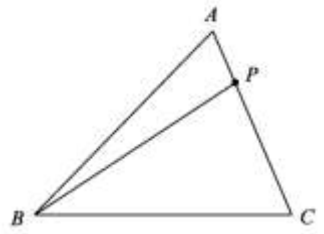


图 1

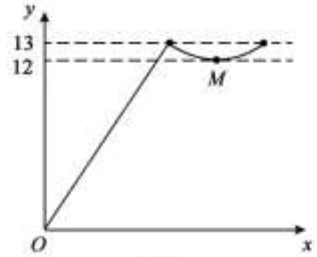


图 2

A. 30　　B. 60　　C. 78　　D. 156

【答案】B

【解析】

【分析】将点 P 的运动轨迹和图象结合起来，进行分析可知：$AB=BC=13$，所以$\triangle ABC$为等腰三角形，当 $BP\perp AC$ 时，BP=12，对应图象中的点 M 的 y 值，根据三线合一可知，当 $BP\perp AC$ 时，点 P 为 AC 的中点，根据勾股定理可求 CP，进而可求 AC，根据三角形面积公式可得最后结果.

【详解】解：由图象可知：$AB=BC=13$

∴$\triangle ABC$ 为等腰三角形

当点 P 在 C-A 上运动时，对于图象中的曲线部分

由于 M 是曲线部分的最低点

∴此时 BP 最小，

即 $BP\perp AC$，$BP=12$

∴由勾股定理可知：$PC=5$

∴$PA=PC=5$（根据等腰三角形三线合一可知）

∴$AC=10$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 10\times 12=60$$

故选：B

【点睛】本题考查了函数图象的理解和应用以及等腰三角形的性质，数形结合是解决本题的关键.

第二部分　非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是____________.

【答案】$x\geq 2$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件可得 x-2≥0，再解不等式即可.

【详解】解：由题意得：x-2≥0，

解得：x≥2，

故答案为：x≥2．

【点睛】此题主要考查了二次根式有意义的条件，关键是掌握二次根式中的被开方数是非负数．

10. 分解因式： $3x^3-12x=$________________________.

【答案】$3x(x-2)(x+2)$

【解析】

【分析】直接提取公因式 3x，进而利用公式法分解因式得出答案．

【详解】解：$3x^3$-12x=3x（x^2-4）

=3x（x+2）（x-2）．

故答案为：$3x(x-2)(x+2)$

【点睛】此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式，正确应用公式是解题关键．

11. 如果 $a+b=2$，那么代数式 $\left(\dfrac{a^2+b^2}{b}+2a\right)\cdot\dfrac{2b}{a+b}$ 的值为_______.

【答案】4

【解析】

【分析】先根据分式的混合运算法则化简原式,，然后把 a+b=2 整体代入计算即可．

【详解】解：原式=$\left(\dfrac{a^2+b^2}{\text{b}}+\dfrac{2ab}{b}\right)$�$\dfrac{2b}{a+b}$

=$\left(\dfrac{a^2+b^2+2ab}{b}\right)$�$\dfrac{2b}{a+b}$

=$\dfrac{(a+b)^2}{b}$�$\dfrac{2b}{a+b}$

=$2(a+b)$，

∵a+b=2，

∴原式=2×2=4.

故答案为：4．

【点睛】本题主要考查了分式的化简求值，以及因式分解，熟练掌握运算法则是解题的关键．

12. 已知点 $A(1,y_1)$， $B(3,y_2)$ 在反比例函数 $y=\dfrac{m-2}{x}$ 的图象上，且 $y_1<y_2$，则 m 的取值范围是_______.

【答案】$m\neq 2$

【解析】

【分析】把点 A、B 坐标代入反比例函数 $y_1=\dfrac{m-2}{1}$， $y_2=\dfrac{m-2}{3}$，可知 $y_1=3y_2$=m-2．由 y_1 与 y_2 同号且 $y_1<y_2$，考虑 A、B 在不同象限情况即可求解．

【详解】根据题意，把点 A、B 坐标代入反比例函数 $y=\frac{m-2}{x}$.

$y_1=\frac{m-2}{1}$， $y_2=\frac{m-2}{3}$，

可知 $y_1=3y_2$ =m-2.

∴ $y_1=3y_2$，

∴ y_1 与 y_2 同号，

∵ $y_1<y_2$，

∴当 $y_1<y_2<0$，点 A、B 在第四象限， $m-2<0$，且 $m<2$.

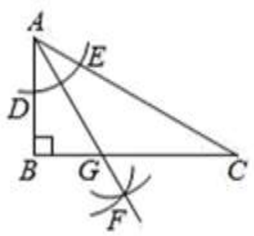
当 $0<y_1<y_2$，点 A、B 在第一象限， $m-2>0$，且 $m>2$.

综上， $m\neq 2$

故答案为： $m\neq 2$.

【点睛】本题主要考查反比例函数性质与图象，掌握反比例函数性质与图象位置与 m-2 的关系．会根据函数值的大小确定点的位置是解题关键.

13. .如图，在 Rt△ABC 中，∠B＝90°，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AB、AC 于点 D，E，再分别以点 D、E 为圆心，大于$\frac{1}{2}$DE 为半径画弧，两弧交于点 F，作射线 AF 交边 BC 于点 G，若 BG＝1，AC＝4，则△ACG 的面积是________.



【答案】2

【解析】

【分析】先作 GH⊥AC 于 H，由题意可得 BG=GH，再根据面积公式即可得出答案.

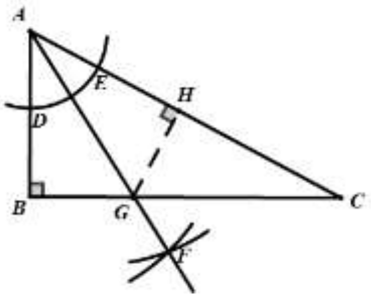
【详解】作 GH⊥AC 于 H

根据题意可得 AG 是∠BAC 的角平分线

∴BG=GH=1

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times GH\times AC=\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$

故答案为 2.



【点睛】本题考查的是角平分线，需要熟练掌握角平分线的做法.

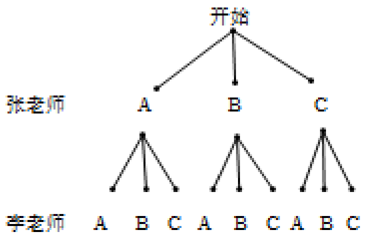
14. 中共中央办公厅、国务院办公厅印发了《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》（简称“双减”）．为全面落实“双减”工作，某校成立了三个义务宣讲团，为学生家长做双减政策解读．现招募宣讲教师，如果张老师和李老师每人随机选报其中的一个宣讲团，则他们恰好选到同一个宣讲团的概率是_______.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】首先画出树状图表示所有可能出现的结果，再确定符合条件的结果，然后根据公式计算即可.

【详解】如图所示.



一共有 9 中可能出现的结果，每种结果出现的可能性相同，即（A，A），（A，B），（A，C），（B，A），（B，B），（B，C），（C，A），（C，B），（C，C），可知他们恰好选到同一个宣讲团有 3 种，所以他们恰好选到同一个宣讲团的概率是 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$.

【点睛】本题主要考查了树状图求概率，掌握概率公式是解题的关键.

15. 《九章算术》之“粟米篇”中记载了中国古代的“粟米之法”：“粟率五十，粝米三十……”（粟指带壳的谷子，粝米指糙米），其意为：“50 单位的粟，可换得 30 单位的粝米……”问题：有 3 斗的粟（1 斗＝10 升），若按照此“粟米之法”，则可以换得粝米为 ___升.

【答案】18

【解析】

【分析】先将单位换成升，根据：“50 单位的粟，可换得 30 单位的粝”可得“1 单位的粟，可换得 $\frac{3}{5}$ 单位的粝”，故可求解.

【详解】解：根据题意得：3 斗＝30 升，

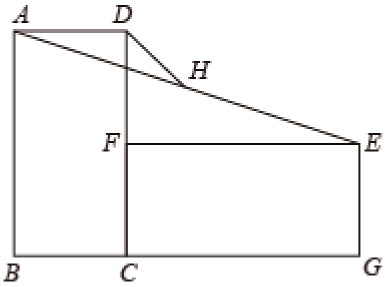
∵“50 单位的粟，可换得 30 单位的粝”，

∴30 升的粟，可换得粝的数量为 30×$\frac{3}{5}$=18 升

故选：18．

【点睛】本题考查有理数乘除的应用，本题首先要弄清题意，得到“1 单位的粟，可换得$\frac{3}{5}$单位的粝”是解题的关键．

16. 如图，矩形 *ABCD* 中，*AB*=2，*BC*=1，将矩形 *ABCD* 绕顶点 *C* 顺时针旋转 90°，得到矩形 *EFCG*，连接 *AE*，取 *AE* 的中点 *H*，连接 *DH*，则 $DH=$_______.

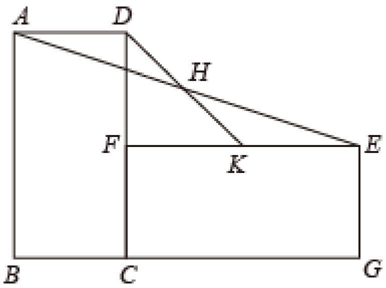


【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】根据题意构造并证明$\Delta DAH\cong\Delta KEH\left(ASA\right)$，通过全等得到$KE=AD$，$DH=HK$，再结合矩形的性质、旋转的性质，及可求解；

【详解】如图，延长 *DH* 交 *EF* 于点 *k*，



∵*H* 是 *AE* 的中点

$\therefore AH=HE$

又∵ $AD//FE$

∴$\angle DAH=\angle KEH$

∴$\Delta DAH\cong\Delta KEH\left(ASA\right)$

∴$KE=AD$，$DH=HK$

∵$EF=AB=CD=2$，$AD=FC=1$

∴$DF=FK=KE=AD=1$

则 $DK=\sqrt{DF^2+FK^2}=\sqrt{2}$

$\therefore DH=\frac{1}{2}DK=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【点睛】本题主要考查了矩形的性质、三角形的全等证明，掌握相关知识并结合旋转的性质正确构造全等三角形是解题的关键．

三、解答题（共 68 分，第 17-19 题，每题 5 分，第 20-21 题，每题 6 分，第 22 题 5 分，第 23 题 6 分，第 24-25 题，每题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17 计算：$2\tan 60°-\sqrt{27}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left|1-\sqrt{3}\right|$．

【答案】3

【解析】

【分析】直接利用二次根式的性质、绝对值的性质、特殊角的三角函数值、负整数指数幂的性质分别化简得出答案．

【详解】解：原式$=2\times\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4+\sqrt{3}-1$

$=3$

【点睛】此题主要考查了特殊角的三角函数值、实数运算，正确化简各数是解题关键．

18. 解不等式组$\begin{cases}2(x+1)\le 5x+8\\ 2x-5<\frac{x-1}{2}\end{cases}$，并写出它的所有整数解．

【答案】-2≤x＜3，它的整数解为-2、-1、0、1、2．

【解析】

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集．

【详解】解：$\begin{cases}2(x+1)\le 5x+8\\ 2x-5<\frac{x-1}{2}\end{cases}$

由第一个不等式得 $2x+2\le 5x+8$，

解得 $x\ge -2$，

由第二个得 $4x-10<x-1$

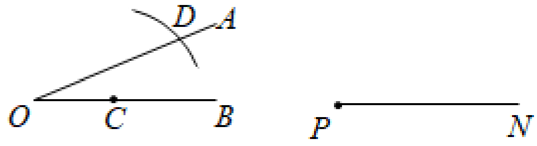
解得 $x<3$

∴不等式组的解集为$-2\le x<3$，

它的整数解为-2、-1、0、1、2．

【点睛】本题考查解一元一次不等式组，求符合条件的整数解．正确掌握一元一次不等式解集确定方法是解题的关键．

19. 已知：如图，$\angle AOB$ 和射线 PN．



求作：射线 *PM*，使得 $\angle MPN = 2\angle AOB$.

作法：①在射线 *OB* 上任取一点 *C*，以点 *C* 为圆心，*OC* 的长为半径画弧，交 *OA* 于点 *D*；

②以点 *P* 为圆心，*OC* 的长为半径画圆，交射线 *PN* 的反向延长线于点 *E*；

③以点 *E* 为圆心，*OD* 的长为半径画弧，在射线 *PN* 上方，交 *OP* 于点 *M*；

④作射线 *PM*.

所以射线 *PM* 就是所求作的射线.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：连接 *CD*，*EM*.

∵*PM*=*PE*=*CD*=*CO*，*EM*=*OD*，

∴$\triangle MEP \cong \triangle DOC$（_________）（填推理依据）.

∴$\angle MEP = \angle DOC$.

又∵$\angle MPN = 2\angle MEP$（________）（填推理依据）.

∴$\angle MPN = 2\angle AOB$.

【答案】（1）见解析　（2）*SSS*；同弧所对的圆心角等于它所对圆周角的 2 倍.

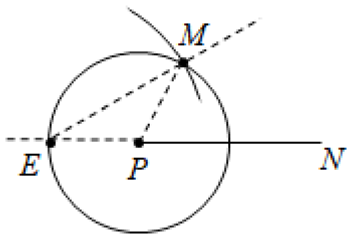
【解析】

【分析】（1）根据作图过程即可补全图形；

（2）根据作图过程可得 *PM*=*PE*=*CD*=*CO*，*EM*=*OD*，即可证明$\triangle MEP \cong \triangle DOC$，可得$\angle MEP = \angle DOC$，再根据圆周角定理进而可以完成证明.

【小问 1 详解】

如图所示，



【小问 2 详解】

证明：连接 *CD*，*EM*.

∵*PM*=*PE*=*CD*=*CO*，*EM*=*OD*，

∴$\triangle MEP \cong \triangle DOC$（_SSS__）.

∴$\angle MEP = \angle DOC$.

又∵$\angle MPN = 2\angle MEP$（同弧所对的圆心角等于它所对圆周角的 2 倍）.

∴$\angle MPN = 2\angle AOB$.

故答案为：*SSS*；同弧所对的圆心角等于它所对圆周角的 2 倍.

【点睛】本题主要考查了复杂作图以及圆周角定理，灵活掌握圆周角定理是本题的关键.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$ 有两个不相等的实数根.

（1）求 m 的取值范围；

（2）若方程有一个根是 0，求方程的另一个根.

【答案】（1）$m>-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq 0$

（2）另一个根为 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】（1）由一元二次方程定义和根的判别式与根之间的关系，列不等式组求解即可.

（2）将 x=0 代入原方程，求出 m，再解方程即可.

【小问 1 详解】

解：∵ $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$ 是一元二次方程，

$\therefore m\neq 0$ ，

∵一元二次方程 $mx^2-(2m-1)x+m-2=0$ 有两个不相等的实数，

$\therefore \Delta=b^2-4ac>0$ ，

即： $-(2m-1)^{\ 2}-4m(m-2)>0$ ，

整理得： $4m+1>0$ ，

$\therefore m>-\frac{1}{4}$ ，

综上所述： $m>-\frac{1}{4}$ 且 $m\neq 0$.

【小问 2 详解】

∵方程有一个根是 0，

将 x=0 代入方程得： $m-2=0$ ，

$\therefore m=2$ ，

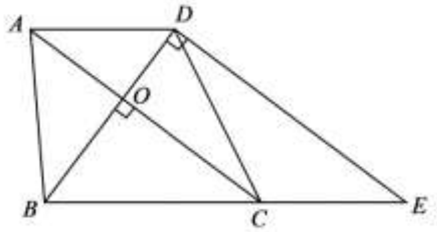
则原方程为： $2x^2-3x=0$ ，

解得： $x_1=0, x_2=\frac{3}{2}$ ，

∴方程的另一个根为 $\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的定义以及一元二次方程根的判别式与根的关系：$\Delta>0\Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根， Δ=0 $\Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根，$\Delta<0\Leftrightarrow$ 方程没有实数根，$\Delta\geq 0\Leftrightarrow$ 方程有实数根．熟练掌握根的判别式与根的关系是解题关键，一元二次方程的二次项系数不能为 0 是易错点.

21. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD\parallel BC$ ， $AC\perp BD$ ，垂足为 O，过点 D 作 BD 的垂线交 BC 的延长线于点 E.



（1）求证：四边形 $ACED$ 是平行四边形；

（2）若 AC=4，AD=2，$\cos\angle ACB=\dfrac{4}{5}$，求 BC 的长.

【答案】（1）证明见解析

（2）BC 的长为3

【解析】

【分析】（1）先判定 $AC /\!/ DE$，再根据题中所给 $AD /\!/ BC$ 的条件即可利用平行四边形判定定理证出；

（2）根据三角函数值设 $OC=4x$，$BC=5x$，利用平行四边形性质得到平行及线段相等，从而根据 $\Delta BOC\sim\Delta BDE$ 确定的相似比代值求解即可.

【小问 1 详解】

证明：$\because AC\perp BD$，$DE\perp BD$，

$\therefore\angle BOC=\angle BDE=90^{\circ}$，

$\therefore AC /\!/ DE$，

在四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

解：在 $Rt\Delta BOC$ 中，$\cos\angle ACB=\dfrac{4}{5}$，设 $OC=4x$，$BC=5x$，

在 $\square ACDE$ 中，$AC /\!/ DE$，$AC=DE=4$，$AD=CE=2$，

$\therefore\Delta BOC\sim\Delta BDE$，

$\therefore\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{OC}{DE}$，即 $\dfrac{5x}{5x+2}=\dfrac{4x}{4}$，解得 $x=0$（舍弃）或 $x=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore BC=5x=5\times\dfrac{3}{5}=3$.

【点睛】本题考查了平行线的判定、平行四边形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、锐角三角函数定义等知识，熟练掌握平行四边形的判定与性质是解题的关键.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象平行于直线 $y=\dfrac{1}{2}x$，且经过点 $A(2,2)$.

（1）求这个一次函数的表达式；

（2）当 $x<2$ 时，对于 x 的每一个值，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的值大于一次函数 $y=mx-1(m\neq 0)$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

【答案】（1）$y=\dfrac{1}{2}x+1$

（2）$1 \le m \le \dfrac{3}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据一次函数图象平移时 k 不变可知 $k = \dfrac{1}{2}$，再把点 A（2，2）代入求出 b 的值，进而可得出结论.

（2）由函数解析式 $y = mx - 1(m \neq 0)$ 可知其经过点（0，-1），由题意可得临界值为当 $x = 2$，两条直线都过点 A（2，2），将点 A（2，2）代入到一次函数 $y = mx - 1(m \neq 0)$，可求出 m 的值，结合函数图象的性质即可得出 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

解：∵一次函数 $y = kx + b\ (k \neq 0)$ 的图象与函数 $y = \dfrac{1}{2}x$ 的图象平行，

∴ $k = \dfrac{1}{2}$，

∵一次函数 $y = \dfrac{1}{2}x + b$ 的图象过点 A（2，2），

∴ $2 = \dfrac{1}{2} \times 2 + b$，

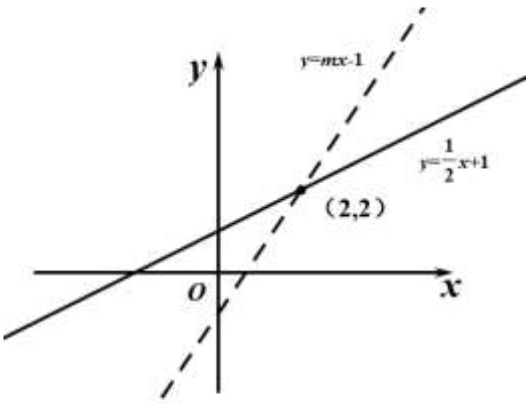
∴ $b = 1$，

∴这个一次函数的表达式为 $y = \dfrac{1}{2}x + 1$；

【小问 2 详解】

对于一次函数 $y = mx - 1(m \neq 0)$，当 $x = 0$ 时，有 $y = -1$，可知其经过点（0，-1）.

当 $x < 2$ 时，对于 x 的每一个值，一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的值大于一次函数 $y = mx - 1(m \neq 0)$ 的值，即一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 图象在函数 $y = mx - 1(m \neq 0)$ 的图像上方，由下图可知：



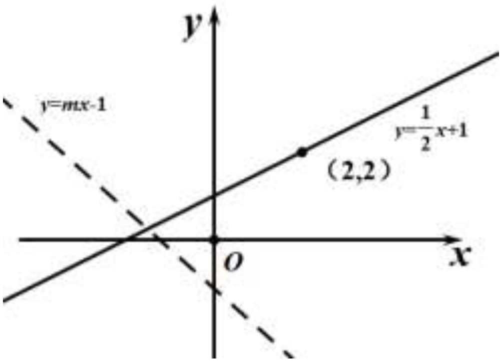
临界值为当 $x = 2$ 时，两条直线都过点 A（2，2），

将点 A（2，2）代入到函数 $y = mx - 1$ 中，

可得 $2 = 2m - 1$，解得 $m = \dfrac{3}{2}$，

结合函数图象及性质可知，当 $x<2$，$m\le\frac{3}{2}$ 时，一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的值大于一次函数 $y=mx-1(m\neq0)$ 的值，

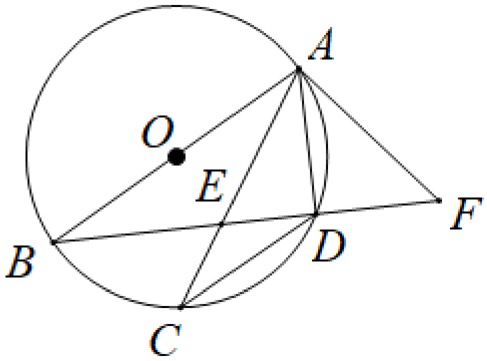
又∵如下图，当 $m<0$ 时，，根据一次函数的图象可知，不符合题意.



∴m 的取值范围为：$1\le m\le\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查的是一次函数的图象与几何变换、待定系数法求函数解析式等知识，熟练掌握一次函数的图象与性质，学会运用数形结合的思想思考问题是解题关键.

23. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，AB 为 $\odot O$ 的直径，点 D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，对角线 AC，BD 交于点 E，$\odot O$ 的切线 AF 交 BD 的延长线于点 F，切点为 A.



（1）求证：$AE=AF$；

（2）若 $AF=6$，$BF=10$，求 BE 的长.

【答案】（1）见详解　（2）$\frac{14}{5}$

【解析】

【分析】（1）根据同弧或等弧所对应的圆周角相等得出 $\angle CAD=\angle ABD$，根据直径对应的圆周角是直角及切线的性质即可得出 $\angle ADB=\angle BAF=90°$，再根据等角或同角的余角相等即可得出 $\angle AED=\angle AFB$，最后根据等角对等边即可得证；

（2）根据同弧或等弧所对应的圆周角相等得出 $\angle CAD=\angle ABD$，根据直径对应的圆周角是直角及切线的性质即可得出 $\angle ADB=\angle BAF=90°$，再根据等角或同角的余角相等即可得出 $\angle FAD=\angle EAD$，利用 ASA 证明

$\triangle ADF \cong \triangle ADE$，根据全等三角形的性质及勾股定理得出 $AE = AF = 6$，根据三角形的面积公式及勾股定理得出 BE 的值.

【小问 1 详解】

证明：∵点 D 为弧 AC 的中点

∴ $\angle CAD = \angle ABD$，

∵ AB 为⊙O 的直径，AF 为⊙O 的切线

∴ $\angle ADB = \angle BAF = 90°$，

$\therefore \angle ABD + BAD = 90°$，$\angle BAD + DAF = 90°$

$\therefore ABD = \angle DAF$

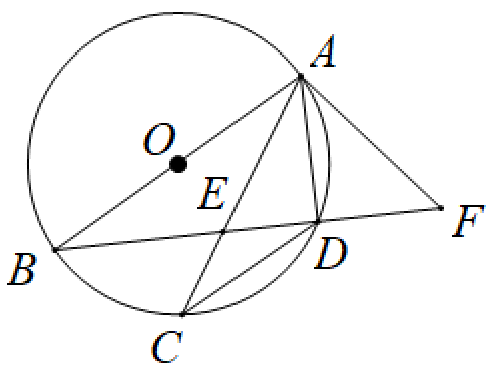
$\therefore \angle CAD = \angle DAF$

∴ $\angle AED = \angle AFB$，

∴ $AE = AF$；

【小问 2 详解】

∵ AB 是⊙O 的直径，



∴ $\angle ADB = 90°$，

由（1）$AF = AE = 6$，

$\therefore DF = DE$

在 $Rt\triangle ABF$ 中，$AF = 6$，$BF = 10$，

∴ $AB = \sqrt{BF^2 - AF^2} = 8$，

∵ $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot AF = \frac{1}{2} BF \cdot AD$，

∴ $AD = \frac{AB \cdot AF}{BF} = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{24}{5}$，

∴ $DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{18}{5}$

∴ $BE = BF - 2DE = \frac{14}{5}$

【点睛】本题考查了切线的性质，直径所对的圆周角是直角，同弧或等弧所对的圆周角相等，勾股定理，全等三角形的判定及性质定理，解题的关键是熟练掌握相关的判定和性质定理．

24. 某公园内的人工湖里有一组小型喷泉，水柱从位于湖面上方的水枪喷出，水柱落于湖面的路径形状是抛物线．现测量出如下数据，在距离水枪水平距离为 d 米的地点，水柱距离湖面高度为 h 米．

d（米）	0	0.5	2.0	3.5	5
h（米）	1.67	2. 25	3.00	2. 25	0

请解决以下问题：

（1）在下面网格中建立适当的平面直角坐标系，根据已知数据描点，并用平滑的曲线连接；

（2）请结合所画图象，水柱最高点距离湖面的高度是______米；

（3）求抛物线的表达式，并写出自变量的取值范围；

（4）现有一游船宽度为 2 米，顶棚到湖面的高度为 2.5 米．要求游船从喷泉水柱中间通过时，顶棚不碰到水柱．请问游船是否能符合上述要求通过？并说明理由．

【答案】（1）见解析　（2）3

（3）$y=-\frac{1}{3}\left(x-2\right)^2+3$（$0\le x\le 5$）

（4）船能符合要求通过，理由见解析

【解析】

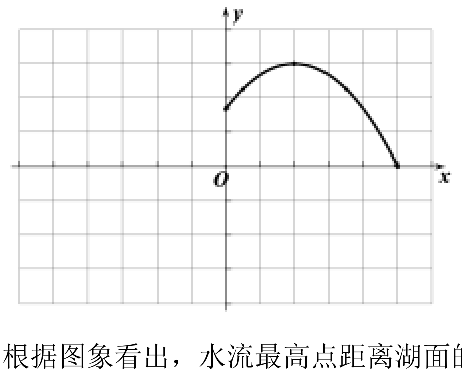
【分析】（1）在网格中建立适当的平面直角坐标系，描点顺次顺滑连线；

（2）根据抛物线的最高点（2,3）得出结论；

（3）根据抛物线的顶点为（2,3），设解析式为 $y=a\left(x-2\right)^2+3$，再把（5,0）代入求出 a 的值；

（4）使船的中轴线在抛物线的对称轴上，把点（1，m）代入解析式计算 m 的值，与 2.5 比较大小，得出结论

【小问 1 详解】



【小问 2 详解】

根据图象看出，水流最高点距离湖面的高度是 3 米；

故答案为 3；

【小问 3 详解】

设抛物线的解析式为 $y=a\left(x-2\right)^2+3$，

将（5,0）代入，得，

$9a+3=0$，

解得，$a=-\frac{1}{3}$，

$\therefore y=-\frac{1}{3}\left(x-2\right)^2+3$（$0\le x\le 5$），

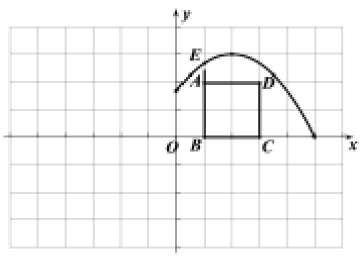
【小问 4 详解】

符合要求，理由：

设船的横断面为矩形 $ABCD$，行驶时使船的中轴线在抛物线形水流的对称轴上，设直线 AB 与抛物线交点为 $E(1,m)$，则

$m=-\frac{1}{3}\left(1-2\right)^2+3=\frac{8}{3}>2.5$，

符合要求



【点睛】本题主要考查了二次函数　表示法，由表格法转换为图象法与解析法，解题的关键是描点，顺次光滑连线，根据表格中数据特点熟练运用待定系数法求解析式，同时能够准确看出顶点，根据对称性处理行船问题

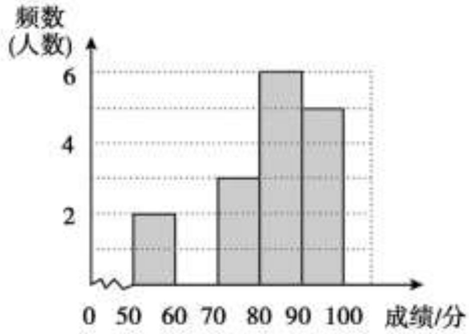
25. 为了进一步加强中小学国防教育，教育部研究制定了《国防教育进中小学课程教材指南》．某中学开展了形式多样的国防教育培训活动．为了解培训效果，该校组织七、八年级全体学生参加了国防知识竞赛（百分制），并规定 90 分及以上为优秀，80-89 分为良好，60~79 分为及格，59 分及以下为不及格．学校随机抽取了七、八年级各 20 名学生的成绩进行了整理与分析，下面给出了部分信息．

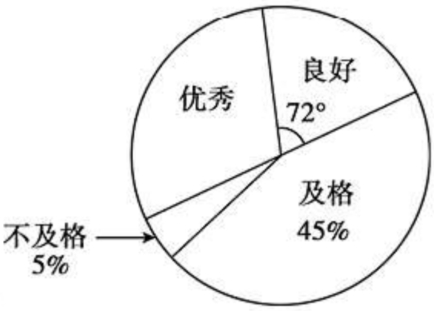
a．抽取七年级 20 名学生　成绩如下：

65 87 57 96 79 67 89 97 77 100

83 69 89 94 58 97 69 78 81 88

b．抽取七年级 20 名学生成绩的频数分布直方图如下（数据分成 5 组：$50\le x<60$，$60\le x<70$，$70\le x<80$，$80\le x<90$，$90\le x\le 100$）：





c．抽取八年级 20 名学生成绩的扇形统计图如下：

d．七年级、八年级各抽取　20 名学生成绩的平均数、中位数、方差如下表：

年级	平均数	中位数	方差
七年级	81	m	167.9
八年级	82	81	108.3

请根据以上信息，回答下列问题：

（1）补全七年级 20 名学生成绩的频数分布直方图，写出表中 m 的值；

（2）该校目前七年级有学生 300 人，八年级有学生 200 人，估计两个年级此次测试成绩达到优秀的学生各有多少人？

（3）你认为哪个年级的学生成绩较好，并说明理由.

【答案】（1）补全图形见解析，82

（2）七年级成绩达到优秀的学生有 75 人，八年级成绩达到优秀的学生有 60 人；

（3）八年级的学生成绩较好，理由见解析

【解析】

【分析】（1）根据题意可得七年级成绩位于 $60 \le x < 70$ 的有 4 人；七年级成绩位于第 10 位和第 11 位的是 81 和 83，即可求解；

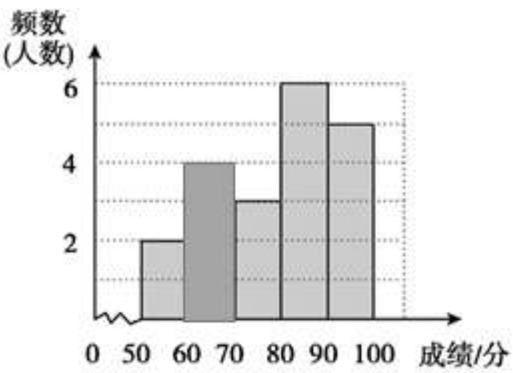
（2）先求出八年级成绩优秀的所占的百分比，再分别用 300，200 乘以各自的百分比，即可求解；

（3）从平均数、方差方面分析，即可求解.

【小问 1 详解】

解：根据题意得：七年级成绩位于 $60 \le x < 70$ 的有 4 人，

补全图形如下：



七年级成绩位于第 10 位和第 11 位的是 81 和 83，

∴七年级成绩的中位数 $m=\frac{81+83}{2}=82$；

【小问 2 详解】

解：根据题意得：八年级成绩良好的所占的百分比为 $\frac{72°}{360°}\times100\%=20\%$

∴八年级成绩优秀的所占的百分比为 $1-20\%-45\%-5\%=30\%$，

∴八年级成绩达到优秀　学生有 $200\times30\%=60$ 人，

七年级成绩达到优秀的学生有 $300\times\frac{5}{20}=75$ 人；

【小问 3 详解】

八年级的学生成绩较好，理由如下：

从平均数方面看，八年级的平均成绩比七年级更高；从方差方面看，八年级的方差较小，成绩相对更稳定.

【点睛】本题主要考查了条形统计图和扇形统计图，求中位数，利用平均数和方程做决策，明确题意，准确从统计图中获取信息是解题的关键.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(2,-2)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx-2(a<0)$ 上.

（1）求该抛物线的对称轴；

（2）已知点 $(n-2,y_1)$，$(n-1,y_2)$，$(n+1,y_3)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx-2(a<0)$ 上．若 $0<n<1$，比较 y_1，y_2，y_3 的大小，并说明理由.

【答案】（1）x=1；

（2）$y_1<y_2<y_3$.

【解析】

【分析】（1）利用抛物线的对称轴公式求得即可；

（2）结合函数的图象，根据二次函数的增减性可得结论；

【小问 1 详解】

∵点 $(2,-2)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx-2(a<0)$ 上，

∴ $4a+2b-2=-2$，

∴b=-2a，

∴抛物线函数关系式为：$y=ax^2-2ax-2(a<0)$，

抛物线的对称轴为：直线；$x=-\frac{-2a}{2a}=1$；

【小问 2 详解】

∵a＜0，开口向下，且对称轴为：x=1，

∴结合函数图象可知，当抛物线开口向下时，距离对称轴越近，值越大，

∵ $0<n<1$，

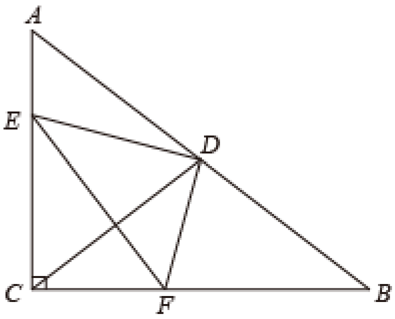
∴ $-2<n-2<-1$，$-1<n-1<0$，$1<n+1<2$，

$\therefore (n-2,y_1)$，$(n-1,y_2)$，$(n+1,y_3)$ 这三个点，$(n+1,y_3)$ 离对称轴最近，$(n-2,y_1)$ 离对称轴最远，

$\therefore y_1 < y_2 < y_3$.

【点睛】本题主要考查二次函数的性质，二次函数与一次函数交点问题等，题目难度适中，数形结合思想及求二次函数与一次函数交点需要联立方程是解题基础.

27. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，*CD* 是斜边 *AB* 上的中线，*EF* 垂直平分 *CD*，分别交 *AC*，*BC* 于点 *E*，*F*，连接 *DE*，*DF*.



（1）求∠*EDF* 的度数；

（2）用等式表示线段 *AE*，*BF*，*EF* 之间的数量关系，并证明.

【答案】（1）$\angle EDF=90°$

（2）$EF^2=AE^2+BF^2$

【解析】

【分析】（1）根据线段垂直平分线的性质，即可求解；

（2）延长 *DE*，使得 *DE*=*DG*，连接 *FG*、*BG*，构造并证明 $\Delta AED\cong\Delta BGD(SAS)$，得到对应的线段和角相等，从而得到 $\angle CBG=90°$，根据勾股定理，即可的 *AE*，*BF*，*EF* 之间的数量关系；

【小问 1 详解】

∵*EF* 垂直平分 *CD*

$\therefore EC=ED$，$CF=FD$

$\therefore \angle ECD=\angle EDC$，$\angle DCF=\angle FDC$

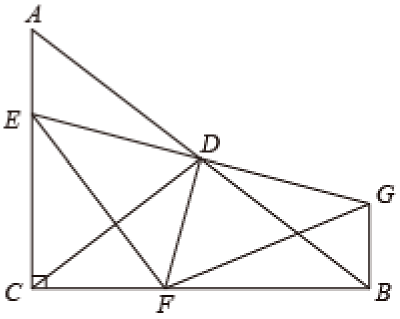
又∵ $\angle ACB=90°$

$\therefore \angle EDC+\angle FDC=90°$

$\therefore \angle EDF=90°$

【小问 2 详解】

如图，延长 *DE*，使得 *DE*=*DG*，连接 *FG*、*BG*



$\because \angle EDF = 90^\circ$，$DE = DG$

$\therefore FG = EF$

$\because D$ 是 AB 的中点，

$\therefore AD = BD$

$\therefore \Delta AED \cong \Delta BGD(SAS)$

$\therefore AE = BG$，$\angle A = \angle BGD$

$\because \angle A + \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore \angle BGD + \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore FG^2 = BF^2 + BG^2$

$\therefore EF^2 = AE^2 + BF^2$

【点睛】本题主要考查了线段垂直平分线的性质、直角三角形斜边中线的性质、三角形的全等证明、勾股定理，掌握相关知识并正确做出辅助线是解题的关键.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 2．对于直线 $l: y = x + 1$ 和线段 BC，给出如下定义：若将线段 BC 沿直线 l 翻折可以得到 $\odot O$ 的弦 $B'C'$（B'，C' 分别是 B，C 的对应点），则称线段 BC 是以直线 l 为轴的 $\odot O$ 的"关联线段"．例如：在图 1 中，线段 BC 的是以直线 l 为轴的 $\odot O$ 的"关联线段"．

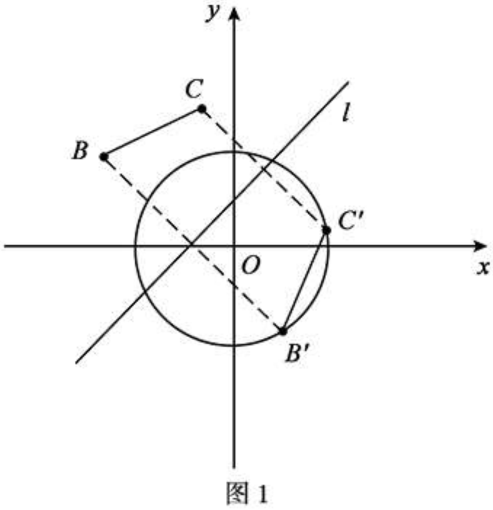


图 1

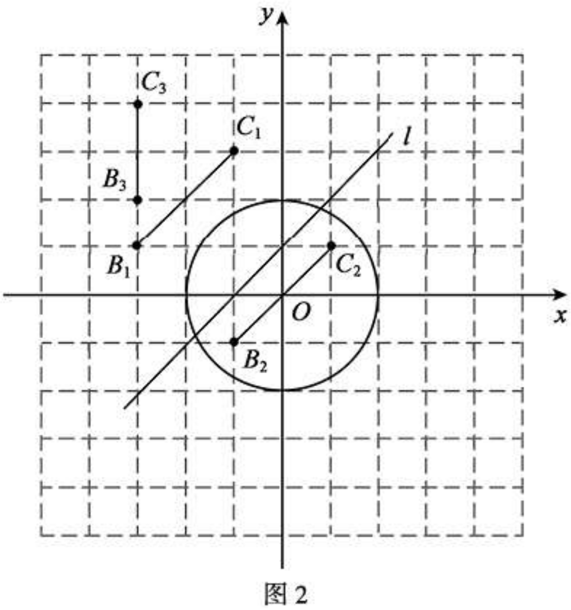


图 2

（1）如图 2，点 B_1，C_1，B_2，C_2，B_3，C_3 的横、纵坐标都是整数．在线段 B_1C_1，B_2C_2，B_3C_3 中，以直线 l 为轴的 $\odot O$ 的"关联线段"是______；

（2）$\triangle ABC$ 是边长为 a 的等边三角形，点 $A(0,1)$，若 BC 是以直线 l 为轴的⊙O 的“关联线段”，求 a 的值；

（3）如果经过点 $P(-1,5)$ 的直线上存在以直线 l 为轴的⊙O 的“关联线段”，直接写出这条直线与 y 轴交点的纵坐标 m 的取值范围．

【答案】（1）B_1C_1，B_2C_2，

（2）$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$

（3）$m<5-\sqrt{3}$ 或 $m>5+\sqrt{3}$

【解析】

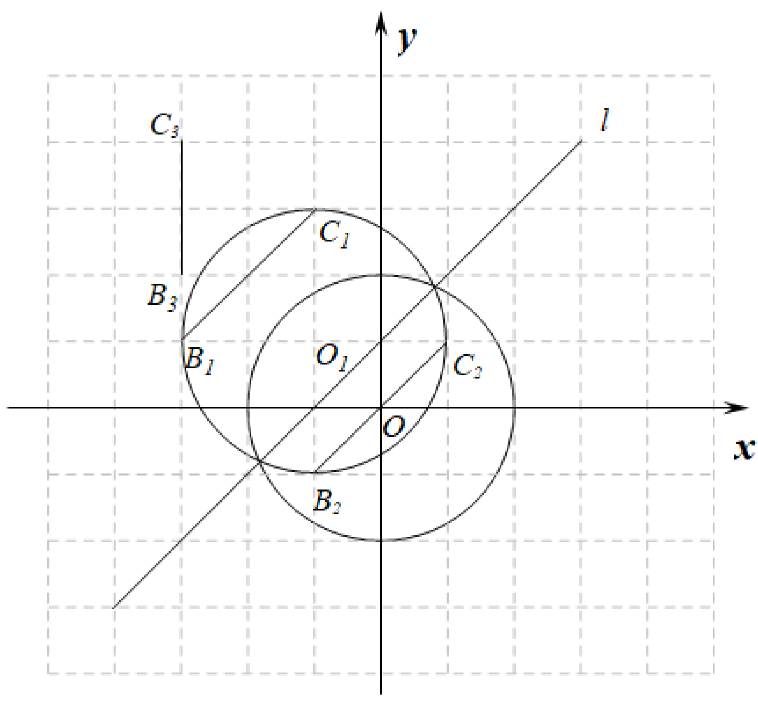
【分析】（1）根据定义作 O 关于 l 的对称点，若线段是⊙O 的弦，则再次对称（依题意定义）即为⊙O 的弦，据此求解即可；

（2）根据（1）的方法，根据等边三角形的对称性，可知 $BC//y$ 轴，设⊙O 交 y 轴于点 D，AB 交 O_1D 于点 E，解 $Rt\triangle AO_1E, Rt\triangle BO_1E$，进而求得 AB 的长，即 a 的值；

（3）根据题意，作⊙O_1 的切线，PS, PR，求得直线 PS, PR 解析式，即可求得 m 的取值范围．

【小问 1 详解】

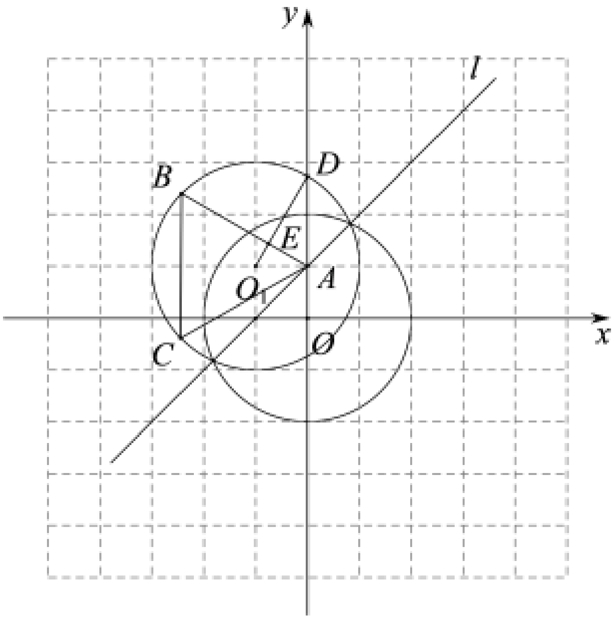
根据定义作 O 关于 l 的对称点，若线段是⊙O 的弦，则再次对称（依题意定义）即为⊙O 的弦，如图，B_1C_1, B_2C_2 是⊙O_1 的弦，⊙O_1 与⊙O 关于 l 轴对称，则 B_1C_1, B_2C_2 是以直线 l 为轴的⊙O 的“关联线段”



故答案为：B_1C_1, B_2C_2

【小问 2 详解】

如图，设⊙O_1 交 y 轴于点 D，AB 交 O_1D 于点 E，



$\because \odot O, \odot O_1$ 的半径为 2

$\therefore O_1D = 2$

$\because A(0,1), O_1(-1,1)$，则 $AO_1 = 1$

在 $Rt\triangle O_1AD$ 中，$\cos\angle DO_1A = \dfrac{O_1A}{O_1D} = \dfrac{1}{2}$

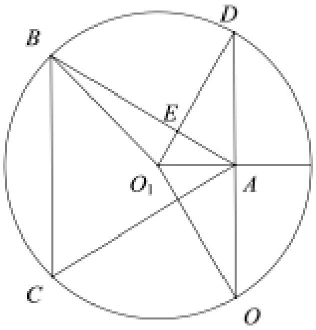
$\therefore \angle DO_1A = 60°$

∴ AO_1 所在直线是等边三角形 $\triangle ABC$ 的对称轴，则 $\angle O_1AE = 30°$

$\therefore \angle AEO_1 = 90°$

$\therefore AB \perp O_1D$

$\therefore AE = AO_1 \cdot \sin\angle EO_1A = AO_1 \cdot \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$O_1E = O_1A \cdot \cos\angle EO_1A = \dfrac{1}{2}$

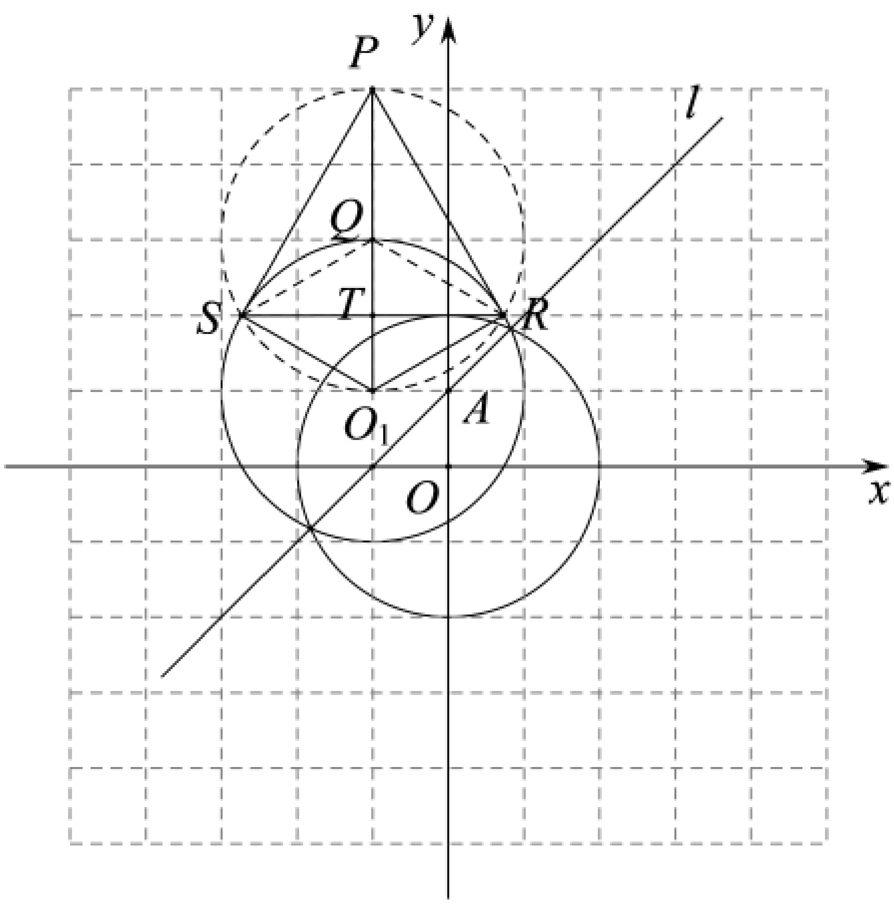


在 $Rt\triangle BO_1E$ 中，$BE = \sqrt{BO_1^2 - O_1E^2} = \sqrt{2^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$\therefore AB = AE + EB = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$

【小问 3 详解】

如图，过点P作$\odot O_1$的切线PS, PR，SR与O_1P交于点T，取O_1P的中点$Q\left(-1,3\right)$,连接QS, QR, SO_1, RO_1，



$\because O_1\left(-1,1\right), P\left(-1,5\right)$

$\therefore PO_1 = 4$

$\because \odot O_1$的半径为2，

$\because PS \perp O_1S, PR \perp O_1R$

$\therefore S, R$是$\odot Q$与$\odot O_1$的交点

$\therefore QS = 2, QO_1 = O_1S = 2$

$\therefore \triangle O_1SQ$是等边三角形

同理$\triangle QRO_1$也是等边三角形

$\therefore \angle SQR = 120°$

$\therefore \angle SPR = 60°$

$\therefore \triangle PSR$是等边三角形

$\therefore PR = 2\sqrt{3}$

$\therefore QT = \dfrac{1}{2}SQ = 1, PT = 3$

$\therefore T\left(-1,2\right)$

$\therefore TS=TR=\sqrt{3}$

$\therefore S\left(-\sqrt{3}-1,2\right),R\left(\sqrt{3}-1,2\right)$

设直线 PS 的解析式为 $y=kx+b$， PR 的解析式为 $y=cx+d$

$\therefore \begin{cases}5=-k+b\\2=-\left(\sqrt{3}+1\right)k+b\end{cases},\begin{cases}5=-c+d\\2=\left(\sqrt{3}-1\right)c+d\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\sqrt{3}\\b=5+\sqrt{3}\end{cases},\begin{cases}c=-\sqrt{3}\\d=5-\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore$ 直线 PS 的解析式为 $y=\sqrt{3}x+5+\sqrt{3}$， PR 的解析式为 $y=-\sqrt{3}x+5-\sqrt{3}$

根据定义可知，经过点 $P(-1,5)$ 的直线上存在以直线 l 为轴的 $\odot O$ 的“关联线段”，则直线与 $\odot O_1$ 相交，

$\therefore m<5-\sqrt{3}$ 或 $m>5+\sqrt{3}$

【点睛】本题考查了新定义问题，轴对称的性质，解直角三角形，圆的性质，待定系数法求解析式，等边三角形的性质，勾股定理，切线的性质，理解定义，将圆心对称是解题的关键．