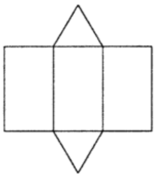
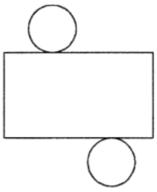
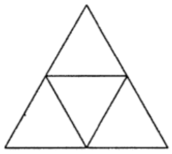
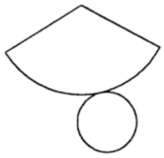
2022 北京昌平初三二模

数　学

一、单项选择题（每小题 2 分，共 16 分）

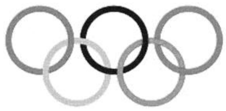
1. 斗笠，又名箬笠，即以竹皮编织的用来遮光遮雨的帽子，可以看做一个圆锥，下列平面展开图中能围成一个圆锥的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

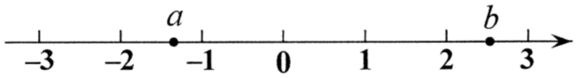
2. 2021 年 12 月 9 日 15 时 40 分，“天宫课堂”第一课开始，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富在中国空间站进行太空授课，全国超过 6000 万中小学生观看授课直播，其中 6000 万用科学记数法表示为（　　）

A. 6000×10^4　B. 6×10^7　C. 0.6×10^8　D. 6×10^8

3. 第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日在北京开幕．2022 年北京冬奥会会徽以汉字“冬”为灵感来源；北京冬奥会的吉祥物“冰墩墩”是以熊猫为原型进行设计创作；北京冬季残奥会的吉祥物“雪容融”是以灯笼为原型进行设计创作．下列冬奥元素图片中，是轴对称图形的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

4. 若实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则以下结论正确的是（　）



A. $|a|<|b|$　B. $ab>0$　C. $a<-b$　D. $a-b>0$

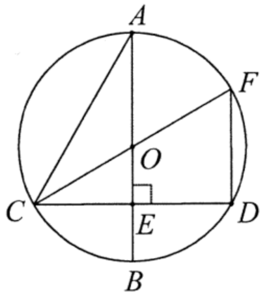
5. 若 $a+b=1$，则代数式 $\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot\frac{b}{a^2-b^2}$ 的值为（　）

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

6. 一个不透明的盒子中装有 15 个除颜色外无其他差别的小球，其中有 2 个黄球和 3 个绿球，其余都是红球，从中随机摸出一个小球，恰好是红球的概率为（　）

A. $\frac{2}{15}$　B. $\frac{1}{5}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

7. 如图，$\odot O$ 的直径 $AB\perp CD$，垂足为 E，$\angle A=30°$，连接 CO 并延长交 $\odot O$ 于点 F，连接 FD，则 $\angle CFD$ 的度数为（　）



A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

8. 某气球内充满了一定质量　气体，当温度不变时，气球内气体的气压 P（单位：千帕）随气球内气体的体积 V（单位：立方米）的变化而变化，P 随 V 的变化情况如下表所示，那么在这个温度下，气球内气体的气压 P 与气球内气体的体积 V 的函数关系最可能是

V（单位：立方米）	64	48	38.4	32	24	…
P（单位：千帕）	1.5	2	2.5	3	4	…

A. 正比例函数　　B. 一次函数　　C. 二次函数　　D. 反比例函数

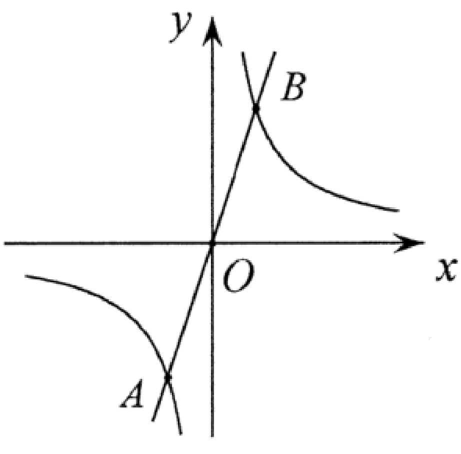
二、填空题（每小题 2 分，共 16 分）

9. 若分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_______.

10 因式分解：$3x^2-6x+3=$______.

11. 正多边形一个外角的度数是 60°，则该正多边形的边数是______.

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=3x$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}(m\neq 0)$ 交于 A，B 两点，若点 A，B 的横坐标分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=$________.



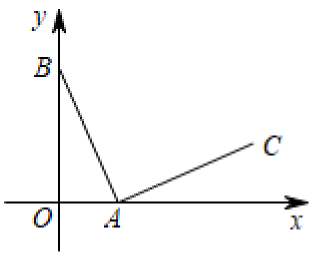
13. 方程术是《九章算术》最高的数学成就，其中“盈不足”一章中曾记载“今有大器五小器一容三斛(“斛”是古代的一种容量单位)，大器一小器五容二斛，问大小器各容几何？”

译文：有大小两种盛酒的桶，已知 5 个大桶加上 1 个小桶可以盛酒 3 斛，1 个大桶加上 5 个小桶可以盛酒 2 斛，问 1 个大桶和 1 个小桶分别可以盛酒多少斛？

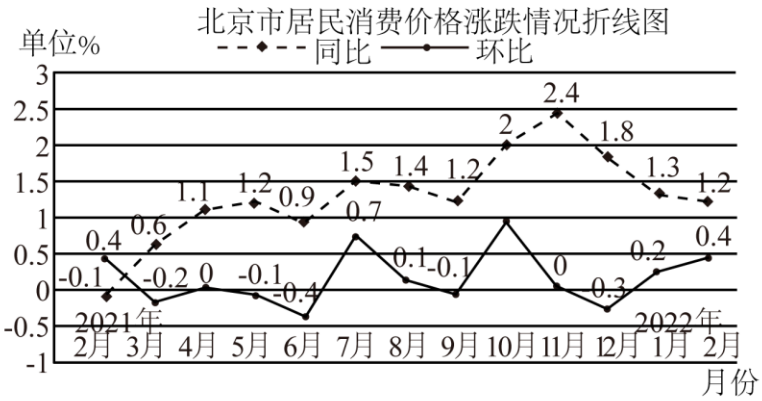
设 1 个大桶可以盛酒 x 斛，1 个小桶可以盛酒 y 斛，依题意，可列二元一次方程组为____________________.

14. 不等式组 $\begin{cases} 2(x+1)\le 3 \\ \dfrac{x-2}{3} > -1 \end{cases}$ 的解集为________.

15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,0)$， $B(0,2)$．将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得到线段 AC，则点 C 的坐标为________.



16. 下图是国家统计局发布的 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格涨跌幅情况折线图（注：2022 年 2 月与 2021 年 2 月相比较称为同比，2022 年 2 月与 2022 年 1 月相比较称为环比）.



根据图中信息，有下面四个推断：

①2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格同比均上涨；

②2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格环比有涨有跌；

③在北京居民消费价格同比数据中，2021 年 4 月至 8 月的同比数据的方差小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月同比数据的方差；

④在北京居民消费价格环比数据中，2021 年 4 月至 8 月的环比数据的平均数小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月环比数据的平均数.

所有合理推断的序号是________.

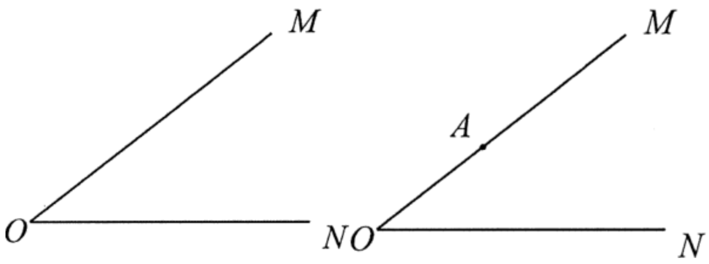
三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 计算：$(1-\sqrt{3})^0+|-\sqrt{2}|-2\cos 45°+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

18 解方程：$\frac{3x}{x-2}=1-\frac{2}{x-2}$.

19. 已知：如图，$\angle MON$.

求作：$\angle BAD$，使$\angle BAD=\angle MON$.



下面是小明设计的尺规作图过程.

作法：

①在OM上取一点A，以A为圆心，OA为半径画弧，交射线OA于点B；

②在射线ON上任取一点C，连接BC，分别以B，C为圆心，大于$\frac{1}{2}BC$为半径画弧，两弧交于点E，F，作直线EF，与BC交于点D；

③作射线AD，$\angle BAD$即为所求.

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下列证明.

证明：∵ EF 垂直平分BC，

∴________$=DC$.

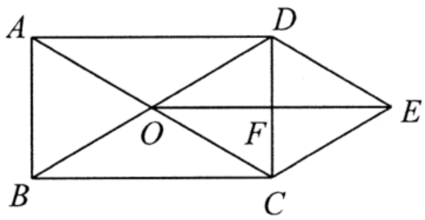
∵ $AO=AB$，

∴ $AD\,//\,OC$（　　　　）（填推理依据）.

∴ $\angle BAD=\angle MON$.

20. 已知关于x的一元二次方程$x^2+4x+k=0$有两个不相等的实数根，写出一个满足条件k的值，并求此时方程的根.

21. 如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，分别过点C，D作BD，AC的平行线交于点E，连接OE交AD于点F.



（1）求证：四边形$OCED$　菱形；

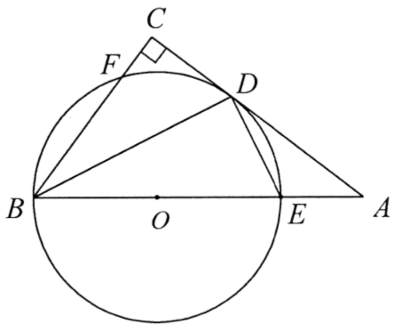
（2）若$AC=8$，$\angle DOC=60^\circ$，求菱形$OCED$的面积.

22. 在平面直角坐标系xOy中，直线$y=kx+b(k\neq 0)$与直线$y=x$平行，且过点$(2,1)$.

（1）求这个一次函数　解析式；

（2）直线$y=kx+b(k\neq 0)$分别交x，y轴于点A，点B，若点C为x轴上一点，且$S_{\triangle ABC}=2$，直接写出点C的坐标.

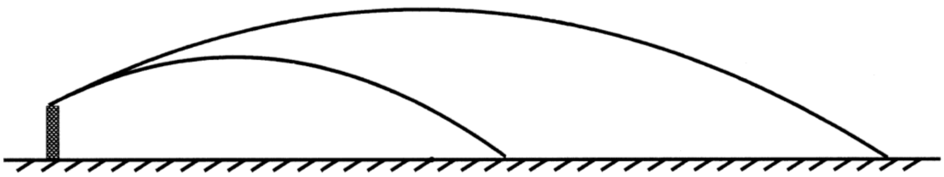
23. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，BC，AC与$\odot O$交于点F，D，BE为$\odot O$直径，点E在AB上，连接BD，DE，$\angle ADE=\angle DBE$.



（1）求证：AC是$\odot O$的切线；

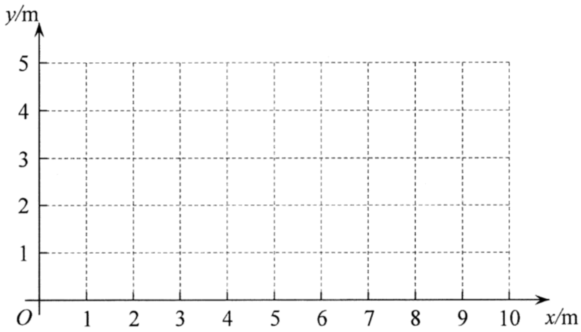
（2）若$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\odot O$的半径为3，求BC的长.

24. 如图，在一次学校组织的社会实践活动中，小龙看到农田上安装了很多灌溉喷枪，喷枪喷出的水流轨迹是抛物线，他发现这种喷枪射程是可调节的，且喷射的水流越高射程越远，于是他从该农田的技术部门得到了这种喷枪的一个数据表，水流的最高点与喷枪的水平距离记为x，水流的最高点到地面的距离记为y.



y与x的几组对应值如下表：

x（单位：m）	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	…
y（单位：m）	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{7}{4}$	2	…



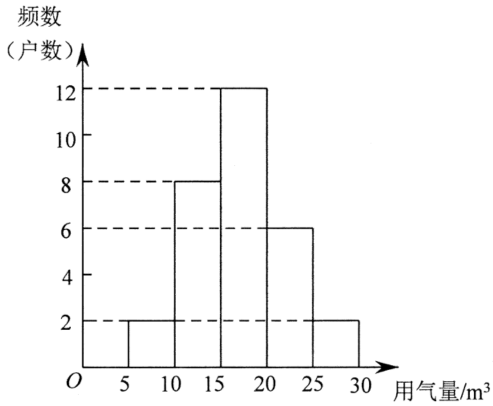
（1）该喷枪的出水口到地面的距离为________m；

（2）在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组数值所对应的点，并画出 y 与 x 的函数图像；

（3）结合（2）中的图像，估算当水流的最高点与喷枪的水平距离为 8m 时，水流的最高点到地面的距离为________m（精确到 1m）．根据估算结果，计算此时水流的射程约为________m（精确到 1m）

25. 甲，乙两个小区各有 300 户居民，为了解两个小区 3 月份用户使用燃气量情况，小明和小丽分别从中随机抽取 30 户进行调查，并对数据进行整理、描述和分析．下面给出了部分信息．

a．甲小区用气量频数分布直方图如下（数据分成 5 组：$5\le x<10$，$10\le x<15$，$15\le x<20$，$20\le x<25$，$25\le x<30$）



b．甲小区用气量的数据在 $15\le x<20$ 这一组的是：

15 15 16 16 16 16 18 18 18 18 18 19

c．甲，乙两小区用气量的平均数、中位数、众数如下：

小区	平均数	中位数	众数
甲	17.2	m	18
乙	17.7	19	15

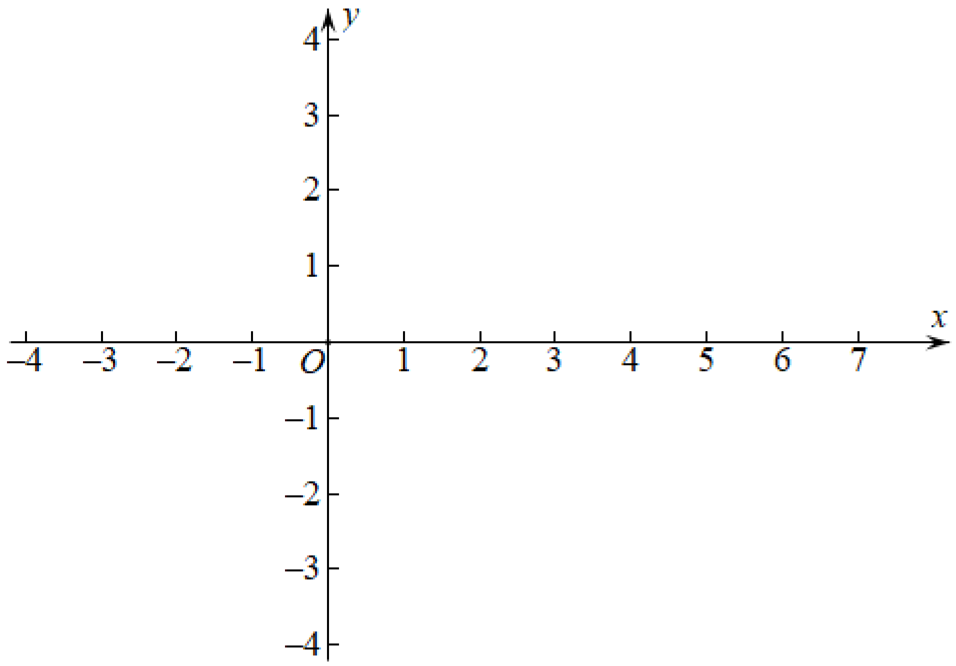
根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中 m 的值；

（2）在甲小区抽取的用户中，记 3 月份用气量高于它们的平均用气量的户数为 p_1．在乙小区抽取的用户中，记 3 月份用气量高于它们的平均用气量的户数为 p_2．比较 p_1，p_2 的大小，并说明理由；

（3）估计甲小区中用气量超过 15 立方米的户数．

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+bx-1(a>0)$．



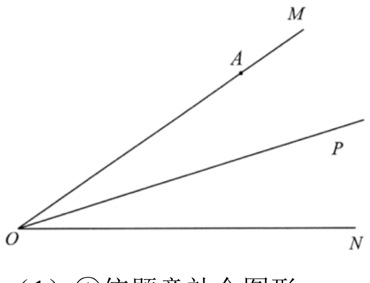
（1）若抛物线过点$(4,-1)$.

①求抛物线的对称轴；

②当$-1<x<0$时，图像在x轴的下方，当$5<x<6$时，图像在x轴的上方，在平面直角坐标系中画出符合条件的图像，求出这个抛物线的表达式；

（2）若$\left(-4,y_1\right)$，$\left(-2,y_2\right)$，$\left(1,y_3\right)$为抛物线上的三点且$y_3>y_1>y_2$，设抛物线的对称轴为直线$x=t$，直接写出t的取值范围.

27. 如图，已知$\angle MON=\alpha\left(0°<\alpha<90°\right)$，$OP$是$\angle MON$的平分线，点$A$是射线$OM$上一点，点$A$关于$OP$对称点$B$在射线$ON$上，连接$AB$交$OP$于点$C$，过点$A$作$ON$的垂线，分别交$OP$，$ON$于点$D$，$E$，作$\angle OAE$的平分线$AQ$，射线$AQ$与$OP$，$ON$分别交于点$F$，$G$.



（1）①依题意补全图形；

②求$\angle BAE$度数；（用含α的式子表示）

（2）写出一个α的值，使得对于射线OM上任意的点A总有$OD=\sqrt{2}AF$（点A不与点O重合），并证明.

28. 在平面直角坐标系xOy中，$\odot O$的半径为1，对于$\triangle ABC$和直线l给出如下定义：若$\triangle ABC$的一条边关于直线l的对称线段PQ是$\odot O$的弦，则称$\triangle ABC$是$\odot O$的关于直线l的“关联三角形”，直线l是“关联轴”.

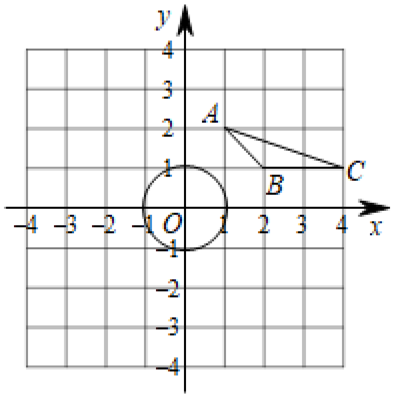
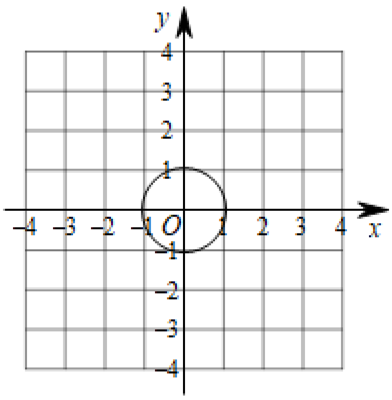


图1



备用图

（1）如图 1，若$\triangle ABC$是$\odot O$的关于直线l的“关联三角形”，请画出$\triangle ABC$与$\odot O$的“关联轴”（至少画两条）；

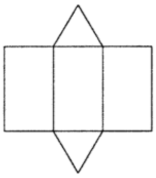
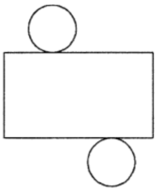
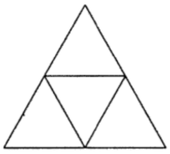
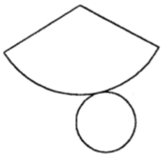
（2）若$\triangle ABC$中，点 A 坐标为$(2,3)$，点B坐标为$(4,1)$，点C在直线$y=-x+3$的图像上，存在“关联轴l”使$\triangle ABC$是$\odot O$的关联三角形，求点C横坐标的取值范围；

（3）已知$A(\sqrt{3},1)$，将点 A 向上平移 2 个单位得到点M，以M为圆心MA为半径画圆，B，C为$\odot M$上的两点，且$AB=2$（点B在点 A 右侧），若$\triangle ABC$与$\odot O$的关联轴至少有两条，直接写出OC的最小值和最大值，以及OC最大时AC的长.

参考答案

一、单项选择题（每小题 2 分，共 16 分）

1. 斗笠，又名箬笠，即以竹皮编织的用来遮光遮雨的帽子，可以看做一个圆锥，下列平面展开图中能围成一个圆锥的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据圆锥的展开图可直接得到答案．

【详解】解：圆锥的展开图是扇形和圆，且圆在扇形的弧线上．

故选：D．

【点睛】此题主要考查了简单几何体的展开图，题目比较简单．

2. 2021 年 12 月 9 日 15 时 40 分，“天宫课堂”第一课开始，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富在中国空间站进行太空授课，全国超过 6000 万中小学生观看授课直播，其中 6000 万用科学记数法表示为（　　）

A. 6000×10^{4}　B. 6×10^{7}　C. 0.6×10^{8}　D. 6×10^{8}

【答案】B

【解析】

【分析】对于一个绝对值较大的数，用科学记数法写成 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 是比原整数位数少 1 的数．

【详解】解：6000 万＝60000000＝6×10^{7}．

故选：B．

【点睛】此题考查了科学记数法　表示方法，科学记数法的表示形式为 $a\times10^{n}$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

3. 第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日在北京开幕．2022 年北京冬奥会会徽以汉字“冬”为灵感来源；北京冬奥会的吉祥物“冰墩墩”是以熊猫为原型进行设计创作；北京冬季残奥会的吉祥物“雪容融”是以灯笼为原型进行设计创作．下列冬奥元素图片中，是轴对称图形的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义判断即可．

【详解】解：A、不是轴对称图形，不符合题意；

B、不是轴对称图形，不符合题意；

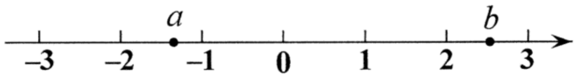
C、不是轴对称图形，不符合题意；

D、　轴对称图形，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

4. 若实数 a ， b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则以下结论正确的是（　）



A. $|a|<|b|$　　　　B. $ab>0$　　　　C. $a<-b$　　　　D. $a-b>0$

【答案】A

【解析】

【分析】根据数轴上点的位置，先确定 a、b 的范围，再逐个判断得出结论.

【详解】解：根据数轴可得，$-2<a<-1$，$2<b<3$，

∴$|a|<|b|$，$ab<0$， $a>-b$ ，$a-b<0$，即 A 正确，

故选：A.

【点睛】本题考查了数轴、绝对值、有理数乘法的符号法则、相反数以及有理数的减法．认真分析数轴得到有用信息是解决本题的关键.

5. 若 $a+b=1$，则代数式 $\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot\frac{b}{a^2-b^2}$ 的值为（　）

A. -2　　　　B. -1　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】先将代数式进行化简，再将 $a+b=1$ 代入化简之后的式子求解即可.

【详解】解：$\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot\frac{b}{a^2-b^2}=\left(\frac{a-b}{b}\right)\cdot\frac{b}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{(a+b)}$

将 $a+b=1$ 代入上式可得：原式 $=\frac{1}{1}=1$，

故选：C.

【点睛】本题考查分式的化简求值，解题的关键是根据分式运算法则先将式子正确化简，再将 $a+b=1$ 代入计算.

6. 一个不透明的盒子中装有 15 个除颜色外无其他差别的小球，其中有 2 个黄球和 3 个绿球，其余都是红球，从中随机摸出一个小球，恰好是红球的概率为（　）

A. $\frac{2}{15}$　　　　B. $\frac{1}{5}$　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】直接根据概率公式求解.

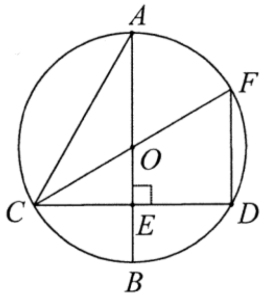
【详解】解：∵盒子中装有15－2－3＝10个红球，

∴从中随机摸出一个小球，恰好是红球的概率是$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$；

故选：D.

【点睛】本题考查了概率公式：随机事件A的概率P（A）＝事件A可能出现的结果数除以所有可能出现的结果数.

7. 如图，$\odot O$的直径$AB\perp CD$，垂足为E，$\angle A=30°$，连接CO并延长交$\odot O$于点F，连接FD，则$\angle CFD$的度数为（　）



A. 30°　　　　B. $45°$　　　　C. $60°$　　　　D. $75°$

【答案】C

【解析】

【分析】由$OA=OC$，得$\angle OCA=\angle A=30°$从而得$\angle BOC=\angle OCA+\angle A=60°$，再由$CF$是直径，则$\angle CDF=90°$，则$FD\perp CD$，又因为$AB\perp CD$，所以$AB// DF$，所以$\angle CFD=\angle BOC=60°$.

【详解】解：∵$OA=OC$，

∴$\angle OCA=\angle A=30°$，

∴$\angle BOC=\angle OCA+\angle A=60°$，

∵CF是$\odot O$的直径，

∴$\angle CDF=90°$，即$FD\perp CD$，

又∵$AB\perp CD$，

∴$AB// DF$，

∴$\angle CFD=\angle BOC=60°$.

故选：C.

【点睛】本题考查直径所对圆周角是直角，等腰三角形的性质，三角形外角性质，平行线的判定与性质，掌握直径所对圆周角是直角是解题的关键.

8. 某气球内充满了一定质量的气体，当温度不变时，气球内气体的气压P（单位：千帕）随气球内气体的体积V（单位：立方米）的变化而变化，P随V的变化情况如下表所示，那么在这个温度下，气球内气体的气压P与气球内气体的体积V的函数关系最可能是

V（单位：立方米）	64	48	38.4	32	24	…
P（单位：千帕）	1.5	2	2.5	3	4	…

A. 正比例函数　　　　B. 一次函数　　　　C. 二次函数　　　　D. 反比例函数

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $PV=96$ 结合反比例函数的定义判断即可.

【详解】解：由表格数据可得 $PV=96$，即 $P=\frac{96}{V}$，

∴气球内气体的气压 P 与气球内气体的体积 V 的函数关系最可能是反比例函数，

故选：D.

【点睛】本题考查了反比例函数，掌握反比例函数的定义是解题的关键.

二、填空题（每小题 2 分，共 16 分）

9. 若分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是_______.

【答案】$x\neq 5$

【解析】

【分析】由于分式的分母不能为 0，因此 $x-5\neq 0$，解得 x.

【详解】解：∵分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义，

∴$x-5\neq 0$，即 $x\neq 5$.

故答案为 $x\neq 5$.

【点睛】本题主要考查分式有意义的条件：分式有意义，分母不能为 0.

10. 因式分解：$3x^2-6x+3=$______.

【答案】$3(x-1)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式，再用完全平方公式分解即可.

【详解】解：$3x^2-6x+3$，

$=3(x^2-2x+1)$，

$=3(x-1)^2$

故答案为：$3(x-1)^2$.

【点睛】本题考查了因式分解，解题关键是熟练运用提取公因式和公式法进行因式分解.

11. 正多边形一个外角的度数是 60°，则该正多边形的边数是______.

【答案】6.

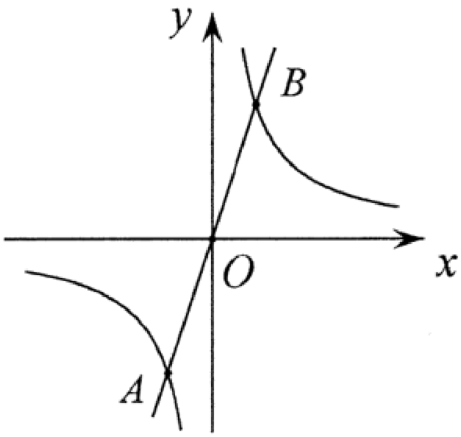
【解析】

【详解】解：这个正多边形的边数：$360°÷60°=6$

故答案为：6.

【点睛】本题考查多边形内角与外角.

12. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=3x$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}(m\neq 0)$ 交于A， B 两点，若点A， B 的横坐标分别为 x_1， x_2，则 $x_1+x_2=$________.



【答案】0

【解析】

【分析】根据反比例函数与正比例函数都是中心对称图形可得 $x_1=-x_2$，然后求解即可.

【详解】解：∵反比例函数与正比例函数都是中心对称图形，

∴$x_1=-x_2$，

∴$x_1+x_2=0$，

故答案为：0.

【点睛】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，熟练掌握反比例函数与正比例函数的中心对称性是解题的关键.

13. 方程术是《九章算术》最高的数学成就，其中“盈不足”一章中曾记载“今有大器五小器一容三斛(“斛”是古代的一种容量单位)，大器一小器五容二斛，问大小器各容几何？”

译文：有大小两种盛酒的桶，已知5个大桶加上1个小桶可以盛酒3斛，1个大桶加上5个小桶可以盛酒2斛，问1个大桶和1个小桶分别可以盛酒多少斛？

设1个大桶可以盛酒 x 斛，1个小桶可以盛酒 y 斛，依题意，可列二元一次方程组为____________________.

【答案】$\begin{cases}5x+y=3\\x+5y=2\end{cases}$

【解析】

【分析】根据“5个大桶加上1个小桶可以盛酒3斛，1个大桶加上5个小桶可以盛酒2斛”建立方程组即可.

【详解】由题意得：$\begin{cases}5x+y=3\\x+5y=2\end{cases}$

故答案为：$\begin{cases}5x+y=3\\x+5y=2\end{cases}$.

【点睛】本题考查了列二元一次方程组，读懂题意，正确建立方程是解题关键.

14. 不等式组$\begin{cases}2(x+1)\le 3\\ \dfrac{x-2}{3}>-1\end{cases}$的解集为________.

【答案】$-1<x\le\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】分别求出两个不等式的解集，即可得出不等式组的解集

【详解】解：解不等式$2\left(x+1\right)\le 3$得：$x\le\frac{1}{2}$，

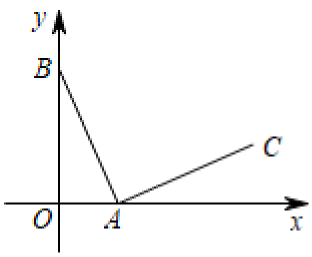
解不等式$\frac{x-2}{3}>-1$得：$x>-1$，

∴原不等式组的解集为$-1<x\le\frac{1}{2}$，

故答案为：$-1<x\le\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知"同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到"的原则是解答此题的关键.

15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,0)$，$B(0,2)$．将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得到线段 AC，则点 C 的坐标为________.

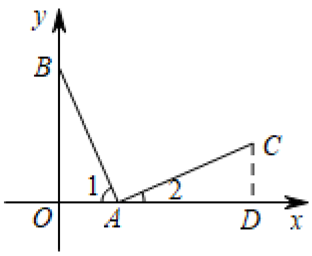


【答案】(3，1)

【解析】

【分析】过点 C 作 $CD\perp x$ 轴，垂足为 D，证明△OBA≌△DAC，从而得到 $AD=BO$，$AO=CD$，计算 OD 的长即可确定点 C 的坐标.

【详解】过点 C 作 $CD\perp x$ 轴，垂足为 D，



∵线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得到线段 AC，

∴ $\angle OBA=\angle 2$，$BA=AC$，

∴ $\triangle OBA\cong\triangle DAC$，

∴$AD=BO$，$AO=CD$，

∵点 $A(1,0)$， $B(0,2)$，

∴$OA=1$，$OB=2$，

∴$AD=BO=2$，$AO=CD=1$，

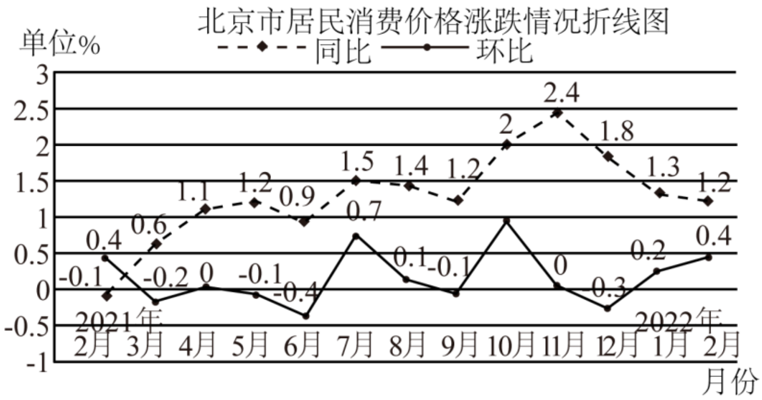
∴$OD=3$，

∴点 C 的坐标(3，1)，

故答案为：(3，1).

【点睛】本题考查了旋转 性质，三角形全等的判定和性质，线段与坐标的关系，熟练掌握旋转的性质和三角形全等的判定是解题的关键.

16. 下图是国家统计局发布的 2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格涨跌幅情况折线图（注：2022 年 2 月与 2021 年 2 月相比较称为同比，2022 年 2 月与 2022 年 1 月相比较称为环比）.



根据图中信息，有下面四个推断：

①2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格同比均上涨；

②2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格环比有涨有跌；

③在北京居民消费价格同比数据中，2021 年 4 月至 8 月的同比数据的方差小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月同比数据的方差；

④在北京居民消费价格环比数据中，2021 年 4 月至 8 月的环比数据的平均数小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月环比数据的平均数.

所有合理推断的序号是________.

【答案】②③④

【解析】

【分析】直接利用折线图，判断①②③④的结论，即可得出答案.

【详解】解：从同比来看，2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格同比数据有正数也有负数，即同比有上涨也有下跌，故①错误；

从环比来看，2021 年 2 月至 2022 年 2 月北京居民消费价格环比数据有正数也有负数，即环比有上涨也有下跌，故②正确；

从折线统计图看，2021 年 4 月至 8 月　同比数据波动小于 2021 年 4 月至 8 月的同比数据波动，所以 2021 年 4 月至 8 月的同比数据的方差小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月同比数据的方差，故③正确；

2021 年 4 月至 8 月的环比数据的平均数为：（0-0.1-0.4+0.7+0.1）÷5=0.06，

2021 年 9 月至 2022 年 1 月环比数据的平均数为：（-0.1+0.9+0-0.3+0.2）÷5=0.14，

∴2021 年 4 月至 8 月的环比数据的平均数小于 2021 年 9 月至 2022 年 1 月环比数据的平均数，故④正确；

故答案为：②③④.

【点睛】本题考查折线统计图，方差，平均数，从统计图获取的所要的信息是解题的关键.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 计算：$(1-\sqrt{3})^0+|-\sqrt{2}|-2\cos 45°+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

【答案】5

【解析】

【分析】直接利用零指数幂的性质以及绝对值的性质、特殊角的三角函数、负指数幂的性质分别化简得出答案.

【详解】解：$(1-\sqrt{3})^0+|-\sqrt{2}|-2\cos 45°+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

$=1+\sqrt{2}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+4$

$=1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+4$

=5.

【点睛】本题主要考查实数的混合运算，掌握零指数幂，负整数指数幂，绝对值以及特殊角的三角函数的运算法则，是解题的关键.

18. 解方程：$\frac{3x}{x-2}=1-\frac{2}{x-2}$.

【答案】$x=-2$

【解析】

【分析】先去分母，等号两边同时乘以$\left(x-2\right)$，化成整式方程在求解，最后验根即可.

【详解】解：方程两边同时乘以$\left(x-2\right)$，

得到：$3x=x-2-2$，

解得：$x=-2$

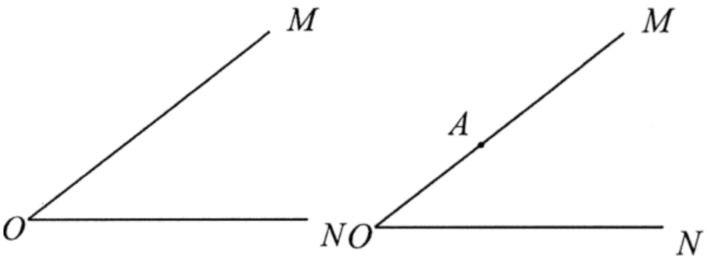
经检验，$x=-2$ 是原方程的解，

∴原方程的解是 $x=-2$，

【点睛】本题考查了分式方程的解法，属于基础题，熟练掌握分式方程的解法是解决本题的关键，最后一定要记得检验.

19. 已知：如图，$\angle MON$.

求作：$\angle BAD$，使 $\angle BAD=\angle MON$.



下面是小明设计的尺规作图过程.

作法：

①在 OM 上取一点A，以A为圆心，OA 为半径画弧，交射线 OA 于点 B；

②在射线 ON 上任取一点 C，连接 BC，分别以 B，C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 为半径画弧，两弧交于点 E，F，作直线 EF，与 BC 交于点 D；

③作射线 AD，$\angle BAD$ 即为所求.

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下列证明.

证明：∵ EF 垂直平分 BC，

∴________ $=DC$.

∵ $AO=AB$，

∴ $AD\parallel OC$（　　　　）（填推理依据）.

∴ $\angle BAD=\angle MON$.

【答案】（1）见详解　（2）BD,三角形中位线定理

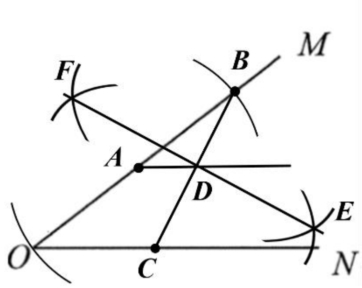
【解析】

【分析】（1）根据题目的描述，进行尺规作图即可；

（2）利用三角形中位线定理即可求解.

【小问 1 详解】

作图如下：



【小问 2 详解】

证明：∵EF 垂直平分 BC，

∴$BD=DC$，

∵$AO=AB$，

∴根据三角形的中位线定理有：$AD // OC$，

∴$\angle BAD=\angle MON$.

故答案为：BD,三角形中位线定理.

【点睛】本题考查了尺规作图、三角形中位线定理、平行线的性质等知识，根据三角形的中位线得出 $AD // OC$ 是解答本题的关键.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x+k=0$ 有两个不相等的实数根，写出一个满足条件 k 的值，并求此时方程的根.

【答案】当 $k=0$ 时，$x_1=0$，$x_2=-4$（答案不唯一）

【解析】

【分析】先求出 b^2-4ac，再根据 $b^2-4ac>0$ 求出 k 的取值范围，然后写出一个，并求出方程的根即可.

【详解】∵关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x+k=0$ 有两个不相等的实数根，

∴$b^2-4ac=4^2-4\times k>0$，

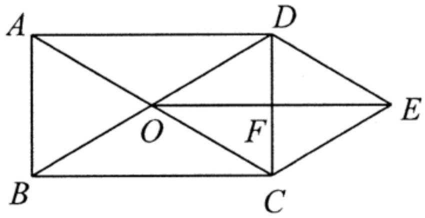
即 $k<4$.

当 $k=0$ 时，$x^2+4x=0$，

解得 $x_1=0$，$x_2=-4$.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的根的判别式，当 $b^2-4ac>0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根.

21. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于点 O，分别过点 C，D 作 BD，AC 的平行线交于点 E，连接 OE 交 AD 于点 F.



（1）求证：四边形 $OCED$ 是菱形；

（2）若 $AC=8$，$\angle DOC=60°$，求菱形 $OCED$ 的面积.

【答案】（1）见解析　（2）$8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）先证四边形 $DECO$ 是平行四边形，再由矩形的性质得 $OD=OC$，即可得出结论；

（2）先由矩形性质，得 $OD=OC=4$，再判定△OCD 是等边三角形，得 $CD=4$，再由菱形的性质得 $CD\perp OE$, $CF=\frac{1}{2}CD=2$，然后由勾股定理 OF 长，即可求得 OE 长，最后由菱形面积公式求解即可．

【小问 1 详解】

证明：∵$CE\parallel BD$，$DE\parallel AC$，

∴四边形 $DECO$ 是平行四边形，

∵矩形 $ABCD$，

∴$OC=OD$，

∴四边形 $OCED$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：∵矩形 $ABCD$，

∴$OD=OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 8=4$，

∵ $\angle DOC=60^\circ$，

∴△OCD 是等边三角形，

∴$CD=OC=4$，

由（1）知：四边形 $OCED$ 是菱形，

∴$CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times 4=2$，$OE=2OF$， $CD\perp OE$，

∴在 $Rt\triangle OFC$ 中，由勾股定理，得

$OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

∴$OE=2OF=4\sqrt{3}$，

∴$S_{菱形}OCED=\frac{1}{2}CD\cdot OE=\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$，

答：菱形 $OCED$ 的面积为 $8\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查矩形的性质，菱形的判定与性质，平行四边形的判定，勾股定理，熟练掌握矩形的性质、菱形的判定与性质、平行四边形的判定是解题的关键．

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与直线 $y=x$ 平行，且过点 $(2,1)$．

（1）求这个一次函数的解析式；

（2）直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 分别交 x，y 轴于点 A，点 B，若点 C 为 x 轴上一点，且 $S_{\triangle ABC}=2$，直接写出点 C 的坐标．

【答案】（1）$y=x-1$

（2）$(5,0)$或$(-3,0)$

【解析】

【分析】(1)首先根据直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与直线 $y=x$ 平行，可求得 k=1，再把点 $(2,1)$ 代入解析式，即可求得 b，据此即可求得解析式；

(2)首先可求得 A、B 的坐标，设点 C 的坐标为(x,0)，可得 AC=|1-x|，再根据三角形的面积公式列出方程，解方程即可求得.

【小问 1 详解】

解：$\because$ 直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与直线 $y=x$ 平行

$\therefore k=1$

$\therefore$ 直线为 $y=x+b$

把点 $(2,1)$ 代入解析式，得 $2+b=1$

解得 b=-1

故这个一次函数的解析式为 y=x-1；

【小问 2 详解】

解：在 y=x-1 中，

令 y=0，则 x=1，故 A(1,0)

令 x=0，则 y=-1，故 B(0,-1)，OB=1

设点 C 的坐标为(x,0)，则 AC=|1-x|，

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot OB=2$

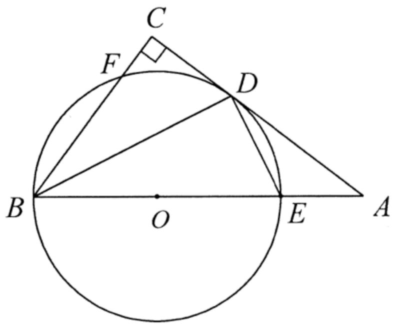
$\therefore |1-x|=4$

解得 x=5 或 x=-3

故点 C 的坐标为(5,0)或(-3,0).

【点睛】本题考查了利用待定系数法求一次函数的解析式，求直线与坐标轴的交点坐标，三角形面积公式，解绝对值方程，根据三角形面积公式得到绝对值方程是解决本题的关键.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，BC，AC 与 $\odot O$ 交于点 F，D，BE 为 $\odot O$ 直径，点 E 在 AB 上，连接 BD，DE，$\angle ADE=\angle DBE$.



（1）求证：AC 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\odot O$ 的半径为 3，求 BC 的长.

【答案】（1）过程见详解

（2）$\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】（1）连接 OD，$OD=OB=OE$，即有$\angle OBD=\angle ODB$，$\angle ODE=\angle OED$，再根据 BE 是直径，得到$\angle BDE=90°=\angle DBE+\angle DEB=\angle ODB+\angle ODE$，即有$\angle DBE+\angle ODE=90°$，再根据$\angle ADE=\angle DBE$，有$\angle ADE+\angle ODE=90°$，即有 $OD\perp AC$，则结论得证；

（2）先证$OD\parallel BC$，则有$\frac{BC}{OD}=\frac{AB}{OA}$，利用$\sin A=\frac{OD}{OA}=\frac{3}{5}$可求出 OA，即可求出 BC 的值．

【小问 1 详解】

连接 OD，如图，

∵$OD=OB=OE$，

∴$\angle OBD=\angle ODB$，$\angle ODE=\angle OED$，

∵BE 是直径，

∴$\angle BDE=90°=\angle DBE+\angle DEB=\angle ODB+\angle ODE$，

∴$\angle DBE+\angle ODE=90°$，

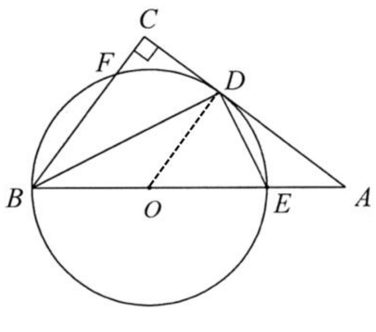
∵$\angle ADE=\angle DBE$，

∴$\angle ADE+\angle ODE=90°$，

∴$OD\perp AC$，

∵OD 为半径，

∴AC 是⊙O 的切线；



【小问 2 详解】

根据（1）的结论，有 $OD\perp AC$，

∵$\angle C=90°$，

∴$BC\perp AC$，

∴$OD\parallel BC$，

∴$\frac{BC}{OD}=\frac{AB}{OA}$，

∵在 $Rt\triangle ADO$ 中，$\sin A=\frac{OD}{OA}=\frac{3}{5}$，

又∵$OD=OB=3$，

∴$OA=5$，

∴$AB=OA+OB=8$，

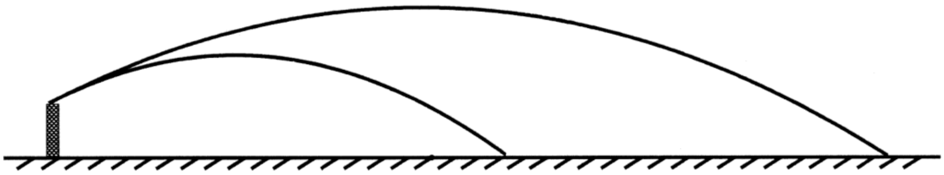
$\because \dfrac{BC}{OD}=\dfrac{AB}{OA}$，

$\therefore BC=\dfrac{AB}{OA}\times OD=\dfrac{8}{5}\times 3=\dfrac{24}{5}$.

即 BC 为 $\dfrac{24}{5}$.

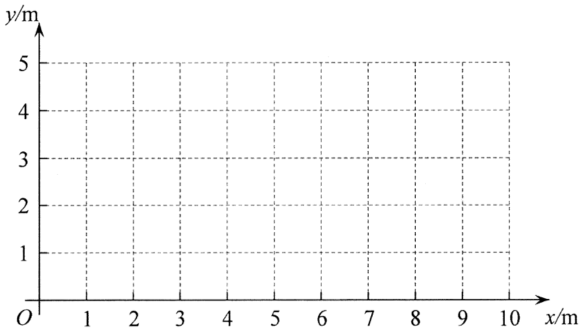
【点睛】本题考查了切线的判定与性质、直径作对圆周角为90°、平行的性质、勾股定理、三角函数等知识，证明切线是解答本题的关键.

24. 如图，在一次学校组织的社会实践活动中，小龙看到农田上安装了很多灌溉喷枪，喷枪喷出的水流轨迹是抛物线，他发现这种喷枪射程是可调节的，且喷射的水流越高射程越远，于是他从该农田的技术部门得到了这种喷枪的一个数据表，水流的最高点与喷枪的水平距离记为 x，水流的最高点到地面的距离记为 y .



y 与 x 的几组对应值如下表：

x（单位：m）	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	…
y（单位：m）	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{7}{4}$	2	…



（1）该喷枪的出水口到地面的距离为________m；

（2）在平面直角坐标系 xOy 中，描出表中各组数值所对应的点，并画出 y 与 x 的函数图像；

（3）结合（2）中的图像，估算当水流的最高点与喷枪的水平距离为 8m 时，水流的最高点到地面的距离为________m（精确到 1m）．根据估算结果，计算此时水流的射程约为________m（精确到 1m）

【答案】（1）1　（2）见解析

（3）3，18

【解析】

【分析】(1)令 x=0 时，求得 y 值即可.

(2)按照描点，连线的基本步骤画函数图像即可.

(3)先确定直线 $y=kx+b$，当 $x=8$ 时，求得 $y=3$，设抛物线解析式为 $y=a(x-8)^2+3$，把(0，1)代入解析式，确定 $a=-\frac{1}{32}$，得到抛物线解析式，令 $y=0$，求得 x 的值即可.

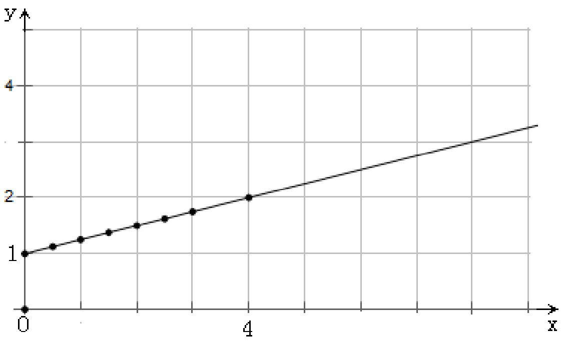
【小问 1 详解】

令 $x=0$ 时，得 $y=1$，

故答案为：1.

【小问 2 详解】

根据题意，画图如下：



.

【小问 3 详解】

设直线为 $y=kx+b$，根据题意，得

$\begin{cases} b=1 \\ 4k+b=2 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k=\frac{1}{4} \\ b=1 \end{cases}$，

故直线的解析式为 $y=\frac{1}{4}x+1$，

当 $x=8$ 时，

得 $y=\frac{1}{4}\times 8+1=3\,(m)$，

故抛物线的顶点坐标为(8，3)，

设抛物线解析式为 $y=a(x-8)^2+3$，

把(0，1)代入解析式，

解得 $a=-\frac{1}{32}$，

$\therefore y=-\frac{1}{32}(x-8)^2+3$，

令 $y=0$，得 $-\frac{1}{32}(x-8)^2+3=0$，

解得 $x=8+4\sqrt{6}$，或 $x=8-4\sqrt{6}$（舍去），

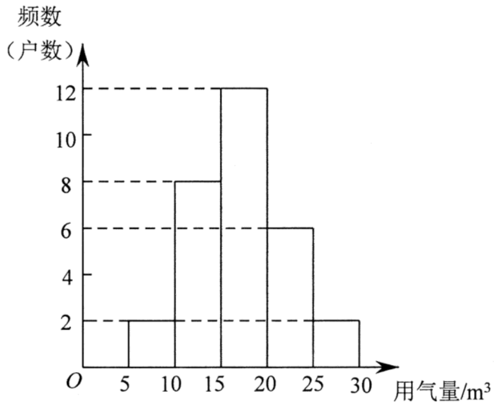
且 $x=8+4\sqrt{6}\approx17.79\approx18(m)$，

故答案为：3，18．

【点睛】本题考查了一次函数图像的画法，待定系数法确定一次函数的解析式，顶点式确定抛物线的解析式，一元二次方程的解法，熟练掌握待定系数法，选择顶点式确定二次函数的解析式是解题的关键．

25. 甲，乙两个小区各有300户居民，为了解两个小区3月份用户使用燃气量情况，小明和小丽分别从中随机抽取30户进行调查，并对数据进行整理、描述和分析．下面给出了部分信息．

a．甲小区用气量频数分布直方图如下（数据分成5组：$5\le x<10$，$10\le x<15$，$15\le x<20$，$20\le x<25$，$25\le x<30$）



b．甲小区用气量的数据在$15\le x<20$这一组的是：

15 15 16 16 16 16 18 18 18 18 18 19

c．甲，乙两小区用气量的平均数、中位数、众数如下：

小区	平均数	中位数	众数
甲	17.2	m	18
乙	17.7	19	15

根据以上信息，回答下列问题：

（1）写出表中m的值；

（2）在甲小区抽取的用户中，记3月份用气量高于它们的平均用气量的户数为p_1．在乙小区抽取的用户中，记3月份用气量高于它们的平均用气量的户数为p_2．比较p_1，p_2的大小，并说明理由；

（3）估计甲小区中用气量超过15立方米的户数．

【答案】（1）16；　（2）$p_1<p_2$；

（3）200户．

【解析】

【分析】（1）利用求中位数的方法求解即可；

（2）利用中位数和平均数的意义求解即可；

（3）根据抽取的30户中用气量超过15立方米的户数所占的比例估算出整体户数．

【小问1详解】

解：由题意可知：

$m=\dfrac{16+16}{2}=16$；

【小问 2 详解】

解：由表可知：

甲，乙两小区用气量的中位数分别是 16、19，平均数分别为：17.2、17.7，

$\therefore p_1<15$， $p_2>15$，

$\therefore p_1<p_2$；

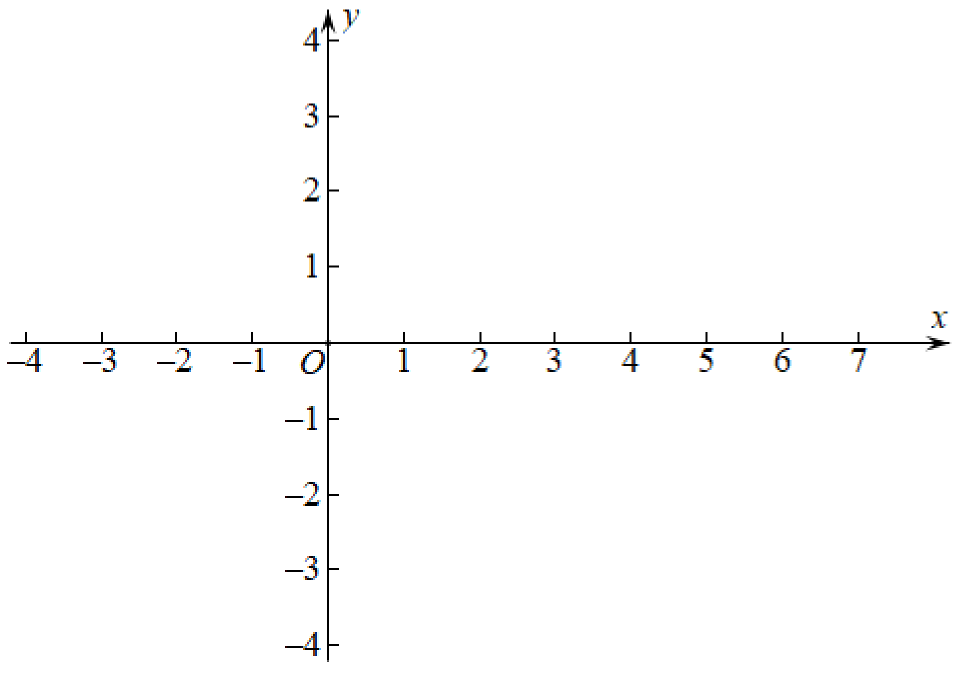
【小问 3 详解】

解：抽取的甲小区 30 户中用气量超过 15 立方米的户数所占的比例为：$\dfrac{12+6+2}{30}=\dfrac{2}{3}$

甲小区中用气量超过 15 立方米的户数为：$300\times\dfrac{2}{3}=200$ 户.

【点睛】本题考查求中位数及其意义，由样本估计总体，解题的关键是理解题意，从表格获取信息，掌握求中位数及其意义，由样本估计总体.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+bx-1(a>0)$.



（1）若抛物线过点 $(4,-1)$.

①求抛物线的对称轴；

②当 $-1<x<0$ 时，图像在 x 轴的下方，当 $5<x<6$ 时，图像在 x 轴的上方，在平面直角坐标系中画出符合条件的图像，求出这个抛物线的表达式；

（2）若 $(-4,y_1)$，$(-2,y_2)$，$(1,y_3)$ 为抛物线上的三点且 $y_3>y_1>y_2$，设抛物线的对称轴为直线 $x=t$，直接写出 t 的取值范围.

【答案】（1）①$x=2$；② $y=\dfrac{1}{5}x^2-\dfrac{4}{5}x-1$

（2）$-3<t<-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】①把(4，-1)代入解析式，确定 b=-4a，代入直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 计算即可.

②根据对称轴为直线 x=2，且 2-（-1）=5-2，判定抛物线经过（-1,0）和（5,0），代入解析式确定 a，b 的值即可.

（2）根据 $x=-\frac{b}{2a}=t$，得到 b=-2at，从而解析式变形为 $y=ax^2-2atx-1(a>0)$，把 $\left(-4,y_1\right)$，$\left(-2,y_2\right)$，$\left(1,y_3\right)$ 分别代入解析式，根据 $y_3>y_1>y_2$，列出不等式组，解不等式组即可.

【小问 1 详解】

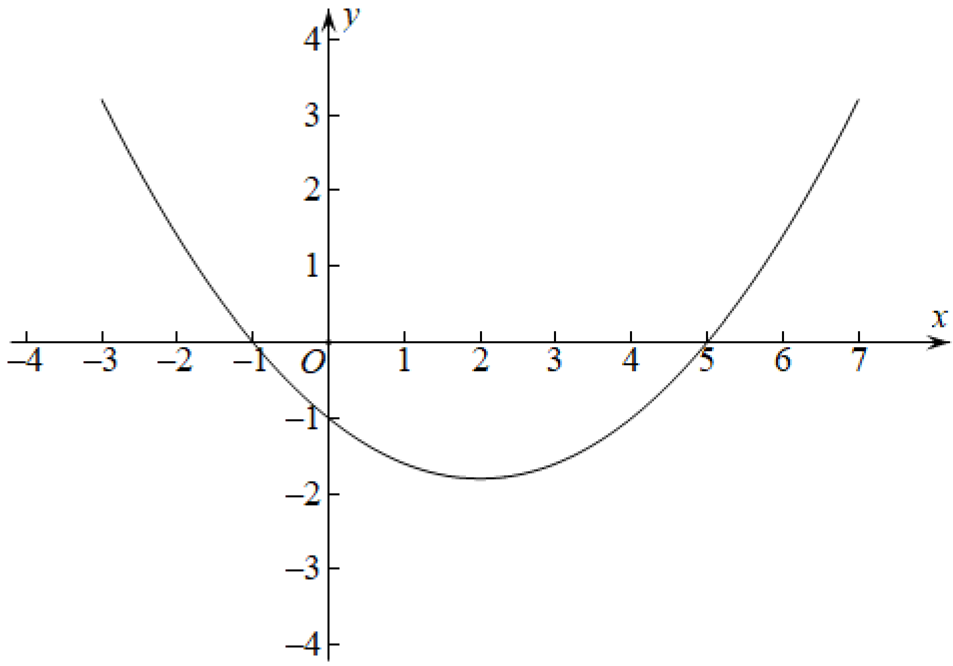
解：①把(4，-1)代入解析式 $y=ax^2+bx-1(a>0)$，得

$-1=16a+4b-1$，

解得 b=-4a，

∴对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4a}{2a}$=2.

②根据题意，画图像如下：



∵当 $-1<x<0$ 时，图像在 x 轴　下方，

当 $5<x<6$ 时，图像在 x 轴的上方，

对称轴为直线 x=2，且 2-（-1）=5-2，

∴抛物线经过（-1,0）和（5,0），

∴$\begin{cases}a-b-1=0\\25a+5b-1=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{5}\\ b=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$，

$\therefore y=\dfrac{1}{5}x^2-\dfrac{4}{5}x-1$.

【小问 2 详解】

$\because x=-\dfrac{b}{2a}=t$，

$\therefore b=-2at$，

$\therefore$解析式变形为$y=ax^2-2atx-1(a>0)$，

把$(-4,y_1)$，$(-2,y_2)$，$(1,y_3)$分别代入解析式，得$y_3=a-2at-1, y_1=16a+8at-1, y_2=4a+4at-1$，

$\because y_3>y_1>y_2$，

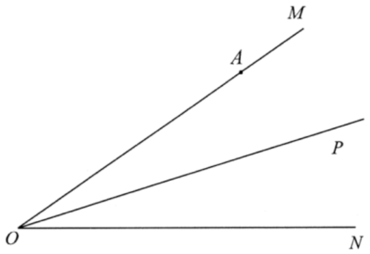
$\therefore \begin{cases}a-2at-1>16a+8at-1\\ a-2at-1>4a+4at-1\\ 16a+8at-1>4a+4at-1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}t<-\dfrac{3}{2}\\ t<-\dfrac{1}{2}\\ t>-3\end{cases}$，

故 t 的取值范围是$-3<t<-\dfrac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了待定系数法，抛物线的对称性，二次函数与不等式的综合，熟练掌握待定系数法，对称性，与不等式的关系是解题的关键.

27. 如图，已知$\angle MON=\alpha\left(0°<\alpha<90°\right)$，$OP$ 是$\angle MON$ 的平分线，点 A 是射线OM 上一点，点 A 关于OP 对称点 B 在射线ON 上，连接AB 交OP 于点C，过点 A 作ON 的垂线，分别交OP，ON 于点D，E，作$\angle OAE$ 的平分线AQ，射线AQ 与OP，ON 分别交于点F，G.



（1）①依题意补全图形；

②求$\angle BAE$ 度数；（用含α 的式子表示）

（2）写出一个α 的值，使得对于射线OM 上任意的点 A 总有$OD=\sqrt{2}AF$（点 A 不与点 O 重合），并证明.

【答案】（1）见解析，$\angle BAE=\dfrac{\alpha}{2}$；

（2）α=45°，证明见解析.

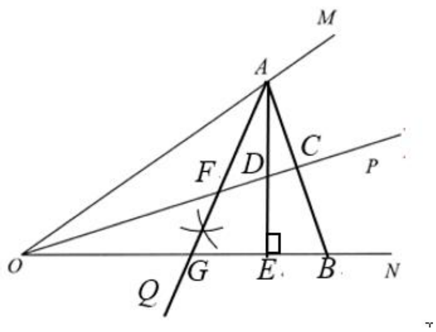
【解析】

【分析】（1）①在 ON 上取 $OB=OA$，根据垂线，角平分线的画法作图即可；②求出 $\angle COB=\dfrac{\alpha}{2}$，再证明 $\angle BAE=\angle COB=\dfrac{\alpha}{2}$ 即可；

（2）证明 $\triangle AOE$ 为等腰直角三角形，再证明 $\triangle ODE\cong\triangle ABE\left(ASA\right)$，得到 $OD=AB$，进一步得到 $OD=AB=2AC$，证明 $\triangle FAC$ 为等腰直角三角形，得到 $AF=\sqrt{2}AC$，即可得到 $OD=\sqrt{2}AF$.

【小问 1 详解】

解：①作图如下：



②∵ $\angle MON=\alpha$， OP 是 $\angle MON$ 的平分线，

∴ $\angle COB=\dfrac{\alpha}{2}$，

∵点 A、 B 关于 OP 对称，

∴ $OB=OA$，

∴ $OC\perp AB$，即 $\angle OCB=90°$，

∵ $AE\perp OB$，

∴ $\angle AEB=90°$，

∵ $\angle OBC=\angle ABE$，

∴ $\angle BAE=\angle COB=\dfrac{\alpha}{2}$，

【小问 2 详解】

解：当 α=45°时，对任意的点 A 总有 $OD=\sqrt{2}AF$，

理由如下：

∵A、B 关于 OP 对称，且 OP 平分 $\angle MON$，

∴OP 垂直平分 AB，即 $OP\perp AB$， $AB=2AC$，

∵ $\angle MON=45°$， $AE\perp OB$，

∴ $\triangle AOE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AE = OE$，

由（1）可知：$\angle BAE = \angle COB = \frac{\alpha}{2} = 22.5°$，即 $\angle BAE = \angle DOE$，

$\because OP \perp AB$， $AE \perp OB$，

$\therefore \angle AEB = \angle OED$，

在 $\triangle ODE$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle DOE \\ AE = OE \\ \angle AEB = \angle OED \end{cases}$$

$\therefore \triangle ODE \cong \triangle ABE\left(ASA\right)$，

$\therefore OD = AB$，

$\because AB = 2AC$，

$\therefore OD=AB = 2AC$，

$\because AQ$ 平分 $\angle OAE$， $\triangle AOE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle FAD = 22.5°$，

$\therefore \angle FAC = 45°$，

$\because OP \perp AB$，

$\therefore \triangle FAC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AF = \sqrt{2}AC$，

$\because OD=AB = 2AC$，

$\therefore AF = \frac{\sqrt{2}}{2}OD$，

即 $OD = \sqrt{2}AF$．

【点睛】本题考查作图，角平分线，等腰直角三角形，三角形全等的判定及性质，解题的关键是掌握角平分线的作法及性质，垂线的作法，等腰直角三角形的判定，三角形全等的判定及性质．

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1，对于 $\triangle ABC$ 和直线 l 给出如下定义：若 $\triangle ABC$ 的一条边关于直线 l 的对称线段 PQ 是 $\odot O$ 的弦，则称 $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的关于直线 l 的“关联三角形”，直线 l 是“关联轴”．

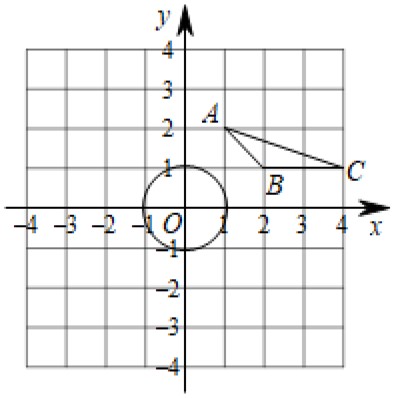
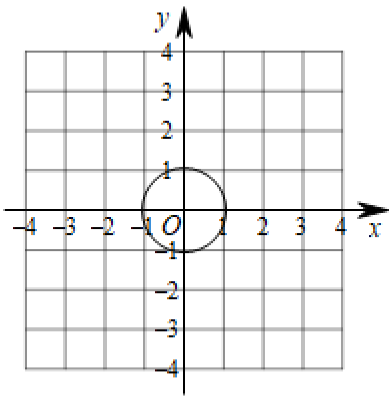


图1



备用图

（1）如图 1，若△ABC 是⊙O 的关于直线 l 的“关联三角形”，请画出△ABC 与⊙O 的“关联轴”（至少画两条）；

（2）若△ABC 中，点 A 坐标为 $(2,3)$，点 B 坐标为 $(4,1)$，点 C 在直线 $y=-x+3$ 的图像上，存在“关联轴 l”使△ABC 是⊙O 的关联三角形，求点 C 横坐标的取值范围；

（3）已知 $A(\sqrt{3},1)$，将点 A 向上平移 2 个单位得到点 M，以 M 为圆心 MA 为半径画圆，B，C 为⊙M 上的两点，且 $AB=2$（点 B 在点 A 右侧），若△ABC 与⊙O 的关联轴至少有两条，直接写出 OC 的最小值和最大值，以及 OC 最大时 AC 的长．

【答案】（1）见解析 （2）$0\leqslant x_C\leqslant 4$

（3）$2\sqrt{3}-2$，$2\sqrt{7}$，$2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1)根据 A（1，2），B（2，1），C（4，1），计算 $AB=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$，确定圆 O 长为 $\sqrt{2}$ 的弦，再确定其对称轴即可．

(2)根据 A（2，3），B（4，1），计算 $AB=\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}>2$，故 AB 不能落在圆的内部；过点 A 作 $AN\perp y$ 轴，垂足为 N，则 AN=2，等于圆的直径，存在“关联轴 l”使△ABC 是⊙O 的关联三角形，此时 $x_C=0$；作点 B 关于 x 轴的对称点 P，此时 BP=2，等于圆的直径，存在“关联轴 l”使△ABC 是⊙O 的关联三角形，此时 $x_C=4$，综上所述，点 C 横坐标的范围是 $0\leqslant x_C\leqslant 4$．

(3) 如图，连接 OM，交圆 M 于点 C，此时 OC 最小，根据勾股定理，得 $OM=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，圆 M 的半径为 2，计算 OC 的最小值；$OC=\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$，此时 AC=4．

【小问 1 详解】

如图 1，作 $BM\perp x$ 轴，垂足为 M，根据题意 $AB=AE=EF=BF=\sqrt{2}$，且∠EFO=∠BFM=45°，

∴∠EFB=90°，

∴四边形 $ABFE$ 是正方形，

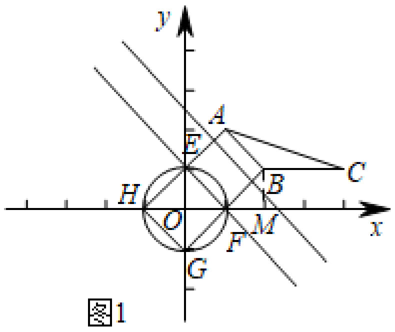
∴边 AE，BF 的中点所在直线就是△ABC 与⊙O 的一条“关联轴”；

∵⊙O 的半径为 1，

∴$EH=GH=FG=EF==\sqrt{2}$，且∠EFG=90°，

∴四边形 $EFGH$ 是正方形，

∵ $\angle EFG+\angle EFB=180°$，



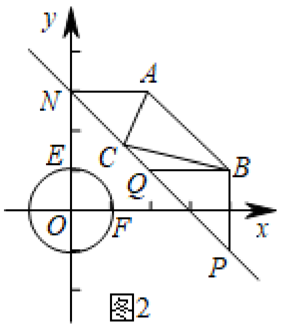
∴B、F、G 三点共线，

∴直线 EF 是△ABC 与⊙O 的一条“关联轴”.

【小问 2 详解】

如图 2，根据 A（2，3），B（4，1），C（4，1），计算 $AB=\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}>2$，故 AB 不能落在圆的内部；

过点 A 作 $AN\perp y$ 轴，垂足为 N，则 $AN=2$，等于圆的直径，存在“关联轴 l”使△ABC 是⊙O 的关联三角形，



此时 $x_C=0$；

作点 B 关于 x 轴的对称点 P，此时 $BP=2$，等于圆的直径，存在“关联轴 l”使△ABC 是⊙O 的关联三角形，此时 $x_C=4$，综上所述，点 C 横坐标的范围是 $0\leqslant x_C\leqslant 4$.

【小问 3 详解】

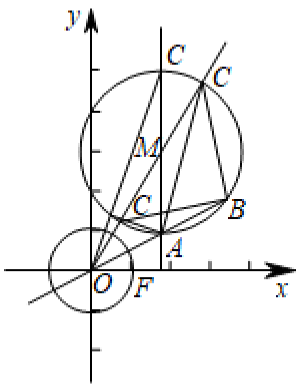
如图，连接 OM，交圆 M 于点 C，此时 OC 最小，

根据勾股定理，得 $OM=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，圆 M 的半径为 2，

故 OC 的最小值为 $2\sqrt{3}-2$；

当点 C 是直径 AC 的一个端点时,OC 最大,根据勾股定理，得

$OC=\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$，此时 $AC=4$.



【点睛】本题考查了新定义问题，轴对称的性质，圆的基本性质，勾股定理，熟练掌握圆的性质，正确理解新定义是解题的关键.