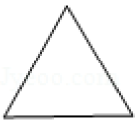
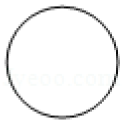
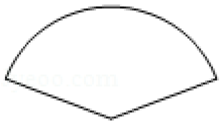
2021 北京燕山初三二模

数　　学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1．（2 分）下列图形中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是(　　)

A． 　　B． 

C． 　　D． 

2．（2 分）大兴国际机场，成为北京建设国际化大都市的重要标志．全球唯一一座“双进双出“的航站楼，世界施工技术难度最高的航站楼，走进航站楼内部，室内色调主要以白色为主，为了让阳光洒满整个机场，航站楼一共使用了 12800 块玻璃，白天室内几乎不需要照明灯光．将 12800 用科学记数法表示为(　　)

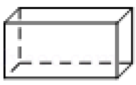
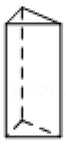
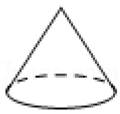
A．1.28×10^{2}　　B．1.28×10^{3}　　C．1.28×10^{4}　　D．1.28×10^{5}

3．（2 分）下列运算正确的是(　　)

A．$(a+b)(a-b)=a^{2}-b^{2}$　　B．$2a+3b=5ab$

C．$2(2a-b)=4a-b$　　D．$(a+b)^{2}=a^{2}+b^{2}$

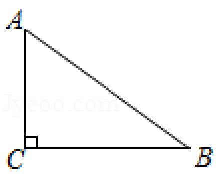
4．（2 分）下列几何体中，是圆柱的为(　　)

A． 　　B． 　　C． 　　D． 

5．（2 分）四边形的内角和为(　　)

A．180°　　B．360°　　C．540°　　D．720°

6．（2 分）如图，在 RtΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，则 $\sin A$ 的值为(　　)



A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{4}{3}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

7．（2 分）若 $a+b-1=0$，则代数式 $(\dfrac{a^{2}}{b^{2}}-1)\cdot\dfrac{3b^{2}}{a-b}$ 的值为(　　)

A．3　　B．-1　　C．1　　D．-3

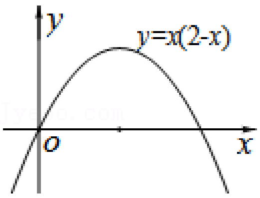
8．（2 分）如图，小聪要在抛物线 $y=x(2-x)$ 上找一点 $M(a,b)$，针对 b 的不同取值，所找点 M 的个数，三个同学的说法如下，

小明：若 $b=-3$，则点 M 的个数为 0；

小云：若 $b=1$，则点 M 的个数为 1；

小朵：若 $b=3$，则点 M 的个数为 2．

下列判断正确的是(　　)

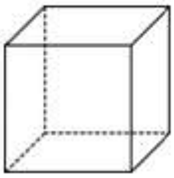


A．小云错，小朵对　　　　B．小明，小云都错

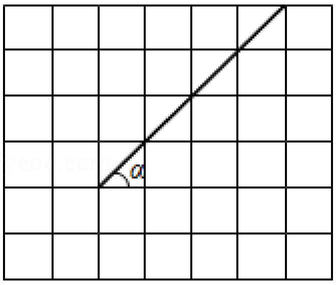
C．小云对，小朵错　　　　D．小明错，小朵对

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．（2 分）如图，该正方体的主视图是____形．



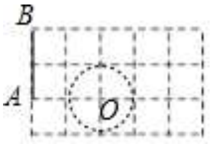
10．（2 分）如图所示的正方形网格中有 $\angle\alpha$，则 $\tan\alpha$ 的值为____．



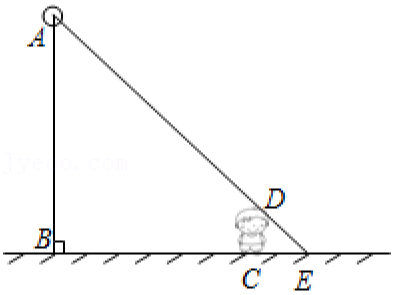
11．（2 分）请你写出一个函数，使得当自变量 $x>0$ 时，函数 y 随 x 的增大而增大，这个函数的解析式可以是____．

12．（2 分）用四个不等式① $a>b$，② $a+b>2b$，③ $a>0$，④ $a^2>ab$ 中的两个不等式作为题设，余下的两个不等式中选择一个作为结论，组成一个真命题：____．

13．（2 分）如图所示的网格是正方形网格，线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 $\alpha(0°<\alpha<180°)$ 后与 $\odot O$ 相切，则 α 的值为____．



14．（2 分）如图，小亮从一盏 9 米高的路灯下 B 处向前走了 8 米到达点 C 处时，发现自己在地面上的影子 CE 是 2 米，则小亮的身高 DC 为____米．



15．（2分）如图是房山区行政规划图．如果周口店的坐标是 $(-2,1)$，阎村的坐标是 $(0,2)$，那么燕山的坐标是____，窦店坐标是____．

16．（2 分）在就地过年倡议下，更多游客缩小出游半径，本地游、近郊游、周边游取代异地长线游，成为牛年出行新趋势．某地区对近郊游的住宿环境、餐饮、服务等方面对所住游客进行了综合满意度调查，在甲，乙两个景点都去过的游客中随机抽取了 100 人，每人分别对这两个景点进行了评分，统计如下：

满意度评分 人数 景点	非常满意 （20 分）	较满意 （15 分）	一般 （10 分）	不太满意 （5 分）	非常不满意 （0 分）	合计
甲	28	40	10	10	12	100
乙	25	20	45	6	4	100

若小聪要在甲，乙两个景点中选择一个景点，根据表格中数据，你建议她去景点____（填甲或乙），理由是____．

三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22 题，7 分，第 23 题，5 分，第 24 题，6 分，第 25 题，5 分，第 26 题，6 分第 27，28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17．（5 分）计算：$2\sin 60°+|-2\sqrt{3}|-(\sqrt{8})^0-(\dfrac{1}{2})^{-1}$．

18．（5 分）解不等式组：$\begin{cases}2x+1>3(x-1)\\4x<x+3\end{cases}$．

19．（5 分）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+1-k=0$ 有两个不相等的实数根．

（1）求 k 的取值范围；

（2）请你给出一个 k 的值，并求出此时方程的根．

20．（5 分）下面是小玲同学设计的“过直线外一点作已知直线的平行线”的尺规作图过程．

已知：如图 1，直线 l 和直线 l 外一点 P．求作：直线 PM，使直线 $PM//$ 直线 l．

作法：如图 2，

①在直线l上任取一点A，作射线AP；

②以P为圆心，PA为半径作弧，交直线l于点B，

连接PB；

③以P为圆心，PB长为半径作弧，交射线AP于点C；分别以B，C为圆心，大于$\frac{1}{2}BC$长为半径作弧，

在AC的右侧两弧交于点M；

④作直线PM；

所以直线PM就是所求作的直线.

根据上述作图过程，回答问题：

（1）用直尺和圆规，补全图 2 中的图形；

（2）完成下面的证明：

证明：由作图可知PM平分$\angle CPB$，

$\therefore \angle CPM=\angle$____$=\frac{1}{2}\angle CPB$.

又$\because PA=PB$，

$\therefore \angle PAB=\angle PBA$．（____）（填依据）.

$\because \angle CPB=\angle PAB+\angle PBA$，

$\therefore \angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}\angle CPB$.

$\therefore \angle CPM=\angle PAB$.

$\therefore$直线$PM//$直线l．（____）（填依据）.

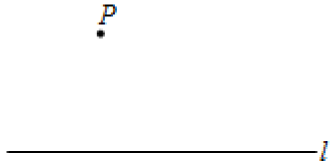


图 1

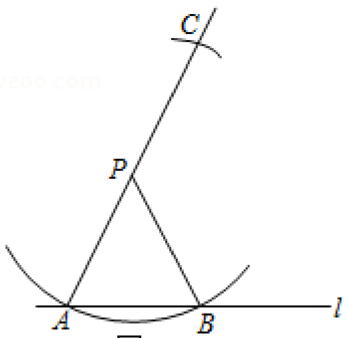


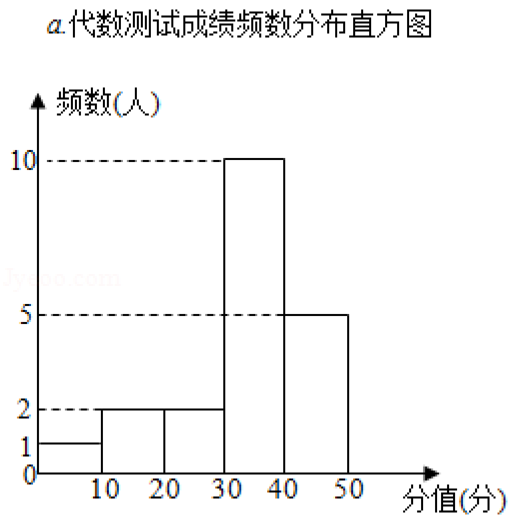
图 2

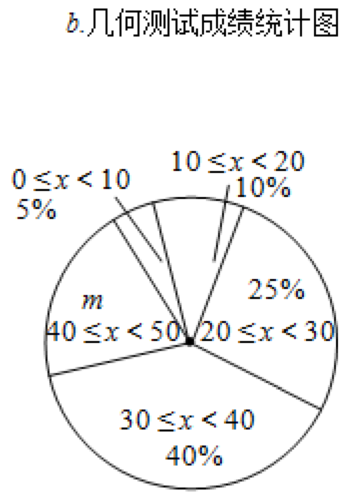
21.（5 分）列方程（组）解应用题：《九章算术》是中国传统数学最重要的著作．其中第七卷《盈不足》记载了一道有趣的数学问题："今有大器五、小器一容三斛；大器一、小器五容二斛．问大、小器各容几何？"

译文："今有大容器 5 个，小容器 1 个，总容量为 3 斛；大容器 1 个，小容器 5 个，总容量为 2 斛．问大容器、小容器的容量各是多少斛？"

（注：斛，音 hú，是古代的一种容量单位）

22．（7 分）某校初三年级有 400 名学生，为了解学生对代数和几何两部分知识的掌握情况，数学教师对九年级全体学生进行了一次摸底测试，代数和几何满分各 50 分．现随机抽取 20 名学生的成绩（成绩均为整数）进行收集、整理、描述和分析，下面给出了部分信息：





c．代数测试成绩在 $30 \leqslant x \leqslant 40$ 这一组的数据是：35，36，37，37，38，38，39，39，39，39．

d．几何测试成绩在 $40 \leqslant x \leqslant 50$ 的数据是 40，42，47，47

e．两次成绩的平均数、中位数、众数如下：

	平均数	中位数	众数
代数成绩	35.2	n	39
几何成绩	32.05	35.5	37

请根据以上信息，回答下列问题：

（1）$m=$____，$n=$____；

（2）测试成绩大于或等于 30 分为及格，测试成绩大于或等于 43 分为优秀.20 名学生的成绩中代数测试及格有人，几何测试优秀有____人，估计该校初三年级本次代数测试约有____人及格，几何成绩优秀约有____人．

（3）下列推断合理的是____．

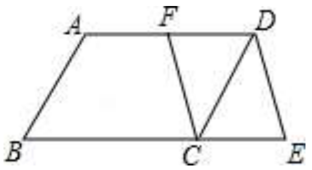
①代数测试成绩的平均分高于几何的平均分，所以大多数学生代数掌握的比几何好．

②被抽测的学生小莉的几何成绩是 29 分，她觉得年级里大概有 240 人的测试成绩比她高，所以她决定迎头赶上．

23．（5 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，F 是 AD 的中点，延长 BC 到点 E，使 $CE=\frac{1}{2}BC$，连接 DE，CF．

（1）求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

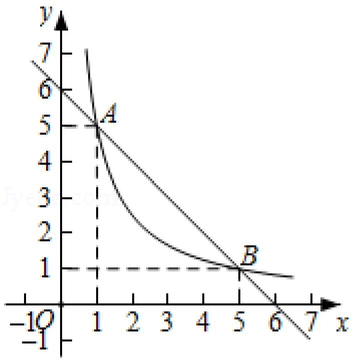
（2）若 $AB=4$，$AD=6$，$\angle A=120^{\circ}$，求 ΔDCE 的底边 CE 上的高及 DE 的长．



24．（6 分）如图，A、B 两点在函数 $y=\frac{m}{x}(x>0)$ 的图象上．

（1）求 m 的值及直线 AB 的解析式；

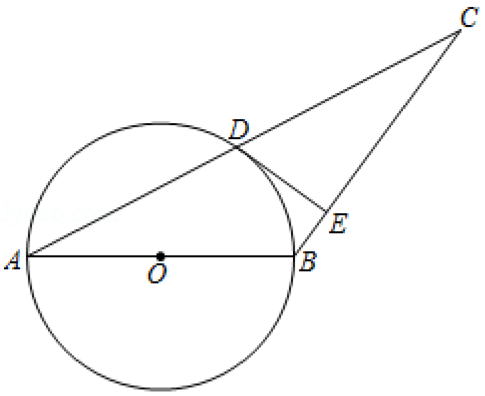
（2）如果一个点的横、纵坐标均为整数，那么我们称这个点是格点．请直接写出函数 $y=\frac{m}{x}(x>0)$ 的图象与直线 AB 围出的封闭图形中（不包括边界）所含格点的坐标．



25．（5 分）如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，DE 为 $\odot O$ 的切线，点 D 是 AC 中点．

（1）求证：$DE\perp BC$；

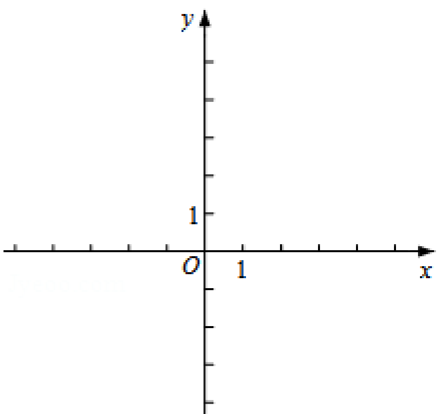
（2）如果 $DE=2$，$\tan C=\frac{1}{2}$，求 $\odot O$ 的半径．

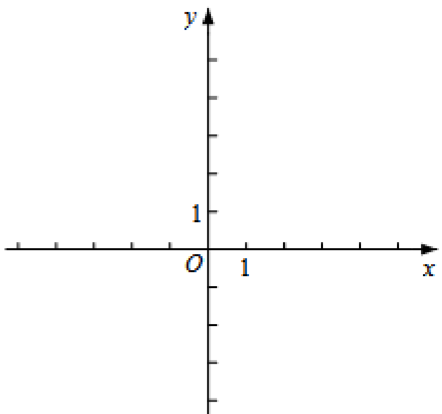


26．（6 分）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-2ax-3a(a\neq 0)$．

（1）求抛物线的对称轴及抛物线与 y 轴交点坐标．

（2）已知点 $B(3,4)$，将点 B 向左平移 3 个单位长度，得到点 C．若抛物线与线段 BC 恰有一个公共点，结合函数的图象，求 a 的取值范围．





备用图

27．（7 分）在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha(0°<\alpha<60°)$．点 P 是 ΔABC 内一动点，连接 AP，BP，

将ΔAPB绕点A逆时针旋转α，使AB边与AC重合，得到ΔADC，射线BP与CD或CD延长线交于点M（点M与点D不重合）.

（1）依题意补全图1和图2；由作图知，$\angle BAP$与$\angle CAD$的数量关系为____；

（2）探究$\angle ADM$与$\angle APM$的数量关系为____；

（3）如图1，若DP平分$\angle ADC$，用等式表示线段BM，AP，CD之间的数量关系，并证明.

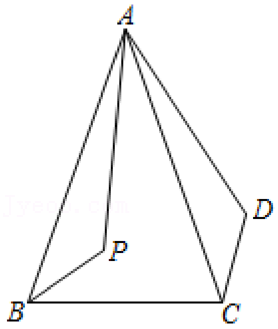


图1

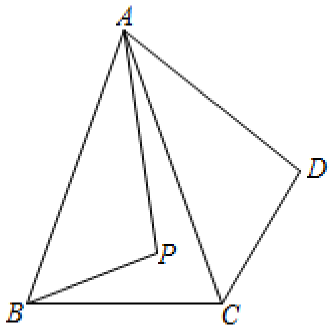


图2

28.（7分）对于平面内的图形G_1和图形G_2，记平面内一点P到图形G_1上各点的最短距离为d_1，点P到图形G_2上各点的最短距离为d_2，若$d_1=d_2$，就称点P是图形G_1和图形G_2的一个“等距点”.

在平面直角坐标系xOy中，已知点$A(6,0)$，$B(0, 2\sqrt{3})$.

（1）在$C(4,0)$，$D(2,0)$，$E(1,3)$三点中，点A和点B的等距点是____；

（2）已知直线$y=2$.

①若点A和直线$y=2$的等距点在x轴上，则该等距点的坐标为____；

②若直线$y=b$上存在点A和直线$y=2$的等距点，求实数b的取值范围；

（3）记直线AB为直线l_1，直线$l_2: y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，以原点$O$为圆心作半径为$r$的$\odot O$．若$\odot O$上有$m$个直线$l_1$和直线$l_2$的等距点，以及$n$个直线$l_1$和$y$轴的等距点$(m\neq 0, n\neq 0)$，当$m\neq n$时，求$r$的取值范围.

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1．【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念，对各选项分析判断即可得解．

【解答】解：A．是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不合题意；

B．既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项符合题意；

C．是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不合题意；

D．不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项不合题意．

故选：B．

【点评】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念．轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合．

2．【分析】科学记数法的表示形式为$a\times 10^{n}$的形式，其中$1\leqslant |a|<10$，n为整数．确定n的值时，要看把原数变成a时，小数点移动了多少位，n的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值$\geqslant 10$时，n是正数；当原数的绝对值<1时，n是负数．

【解答】解：将 12800 用科学记数法表示为1.28×10^{4}．

故选：C．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法，表示时关键要正确确定a的值以及n的值．

3．【分析】各式计算得到结果，即可作出判断．

【解答】解：A、原式$=a^{2}-b^{2}$，符合题意；

B、原式不能合并，不符合题意；

C、原式$=4a-2b$，不符合题意；

D、原式$=a^{2}+2ab+b^{2}$，不符合题意．

故选：A．

【点评】此题考查了平方差公式，合并同类项，去括号与添括号，以及完全平方公式，熟练掌握公式及运算法则是解本题的关键．

4．【分析】根据圆柱体的特征进行判断即可．

【解答】解：圆柱体是由两个圆形的底面和一个侧面所围成的几何体，

因此选项D中的几何体符合题意．

故选：D．

【点评】本题考查认识立体图形，掌握各种几何体的形体特征是正确判断的前提．

5．【分析】根据多边形的内角和公式即可得出结果．

【解答】解：四边形的内角和$=(4-2)\bullet 180^{\circ}=360^{\circ}$．

故选：B．

【点评】本题主要考查了多边形的内角和定理：n边形的内角和为$(n-2)\bullet 180^{\circ}$．

6．【分析】根据勾股定理求出AB，根据正弦的定义计算，得到答案．

【解答】解：在$\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{ABC}$中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=3$，$BC=4$，

由勾股定理得，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$，

$\therefore \sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4}{5}$，

故选：D.

【点评】本题考查的是锐角三角函数的定义、勾股定理的应用，掌握锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦是解题的关键.

7．【分析】先化简分式，然后将 $a+b-1=0$ 代入求值.

【解答】解：$(\dfrac{a^2}{b^2}-1)\cdot\dfrac{3b^2}{a-b}=\dfrac{a^2-b^2}{b^2}\cdot\dfrac{3b^2}{a-b}$

$=\dfrac{(a+b)(a-b)}{b^2}\cdot\dfrac{3b^2}{a-b}$

$=3(a+b)$.

$\because a+b-1=0$，

$\therefore a+b=1$，

$\therefore$原式$=3\times1=3$.

故选：A.

【点评】本题考查了分式的化简求值，熟练分解因式是解题的关键.

8．【分析】把点 M 的坐标代入抛物线解析式，即可得到关于 a 的一元二次方程，根据根的判别式即可判断.

【解答】解：$\because$点 $M(a,b)$ 在抛物线 $y=x(2-x)$ 上，点 $M(a,b)$，

当 $b=-3$ 时，$-3=a(2-a)$，整理得 $a^2-2a-3=0$，

$\because \triangle=4-4\times(-3)>0$，

$\therefore$有两个不相等的值，

$\therefore$点 M 的个数为 2；

当 $b=1$ 时，$1=a(2-a)$，整理得 $a^2-2a+1=0$，

$\because \triangle=4-4\times1=0$，

$\therefore a$ 有两个相同的值，

$\therefore$点 M 的个数为 1；

当 $b=3$ 时，$3=a(2-a)$，整理得 $a^2-2a+3=0$，

$\because \triangle=4-4\times3<0$，

$\therefore$点 M 的个数为 0；

故小明错，小云对，小朵错，

故选：C.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，一元二次方程根的判别式，熟练掌握二次函数与一元二次方程的关系是解题的关键.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．【分析】根据主视图为正面所看到的图形进而得出答案.

【解答】解：正方形的主视图为正方形，

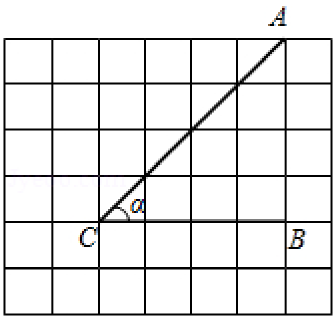
故答案为：正方.

【点评】本题考查了三视图的知识，主视图即为从正面所看到的图形.

10.【分析】利用网格特点，构建RtΔACB，然后利用正切的定义求解.

【解答】解：如图，在RtΔACB中，$\tan\alpha=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{4}=1$.

故答案为1.



【点评】本题考查了解直角三角形：在直角三角形中，由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形．灵活应用勾股定理和锐角三角函数.

11.【分析】直接利用反比例函数的性质得出答案

【解答】解：$\because$当自变量$x>0$时，函数y随x的增大而增大，

$\therefore$只要反比例函数比例系数$k<0$就符合题意，

$\therefore$ $y=-\dfrac{2}{x}$（答案不唯一）.

故答案为：$y=-\dfrac{2}{x}$.

【点评】此题考查了反比例函数的性质，正确掌握反比例函数的性质是解题的关键.

12.【分析】根据题意写出命题，根据不等式的性质1、性质2证明即可.

【解答】解：题设：①$a>b$，③$a>0$，结论：④$a^2>ab$，是真命题.

证明$\because a>b$，

$\therefore a+b>b+b$，即$a+b>2b$，

$\because a>b$，

$\therefore a^2>ab$，

故答案为：题设：①$a>b$，③$a>0$，结论：④$a^2>ab$.

【点评】本题考查的是命题和定理，掌握真命题的概念、不等式的性质是解题的关键.

13.【分析】线段AB绕点A顺时针旋转$\alpha(0°<\alpha<180°)$后与$\odot O$相切，切点为C'和C''，连接OC'、OC''，根据切线的性质得$OC'\perp AB'$，$OC''\perp AB''$，利用直角三角形30度的判定或三角函数求出$\angle OAC'=30°$，从而得到$\angle BAB'=60°$，同理可得$\angle OAC''=30°$，则$\angle BAB''=120°$.

【解答】解：线段AB绕点A顺时针旋转$\alpha(0°<\alpha<180°)$后与$\odot O$相切，切点为C'和C''，连接OC'、OC''，

则$OC'\perp AB'$，$OC''\perp AB''$，

在RtΔOAC$'$中，$\because OC'=1$，$OA=2$，

$\therefore\angle OAC'=30°$，

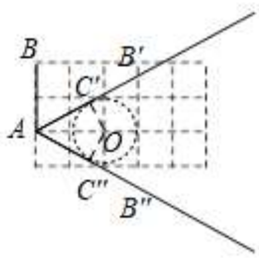
$\therefore \angle BAB' = 60^\circ$，

同理可得 $\angle OAC'' = 30^\circ$，

$\therefore \angle BAB'' = 120^\circ$，

综上所述，α 的值为 60° 或 120°．

故答案为 60° 或 120°．



【点评】本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径．也考查了旋转的性质和直角三角形的性质．

14．【分析】根据 $CD//AB$，得出 $\Delta ECD \backsim \Delta EBA$，进而得出比例式求出即可．

【解答】解：如图，$CE = 2$ 米，$BC = 8$ 米，$AB = 9$ 米，$CD//AB$，

$\therefore BE = BC + CE = 10$ 米，

$\because CD//AB$，

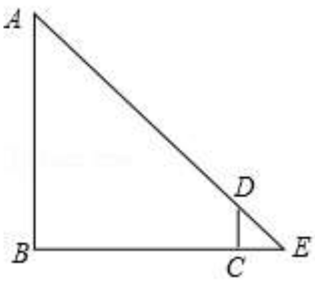
$\therefore \Delta ECD \backsim \Delta EBA$，

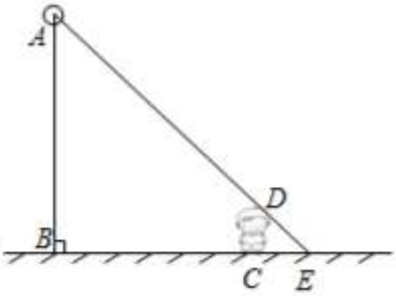
$\therefore \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{CE}{BE}$，即 $\dfrac{CD}{9} = \dfrac{2}{10}$，

解得 $CD = 1.8$（米），

即小亮的身高 DC 为 1.8 米；

故答案为：1.8．





【点评】此题主要考查了相似三角形的应用，得出 $\Delta ECD \backsim \Delta EBA$ 是解决问题的关键．

15．【分析】直接利用已知点坐标建立平面直角坐标系，进而得出答案．

【解答】解：如图所示：燕山的坐标是 $(-2,3)$，窦店坐标是 $(0,0)$．

故答案为：$(-2,3)$，$(0,0)$．

【点评】此题主要考查了坐标确定位置，正确得出原点位置是解题关键．

16．【分析】观察表格比较甲、乙两个景点满意的人数即可得到答案．

【解答】解：在甲，乙两个景点都去过的游客中随机抽取的 100 人中，对甲景点满意的有 68 人，对乙满意的有 45 人，

因为$68>45$，

所以建议她去景点甲．

理由是满意甲景点的人数多于乙景点．

【点评】本题考查了统计表，根据表格提取出有用信息是解题关键．

三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22 题，7 分，第 23 题，5 分，第 24 题，6 分，第 25 题，5 分，第 26 题，6 分第 27，28 题，每小题 5 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17．【分析】先化简，即可计算．

【解答】解：

$2\sin 60°+|-2\sqrt{3}|-(\sqrt{8})^{0}-(\frac{1}{2})^{-1}$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{3}-1-2$

$=3\sqrt{3}-3$．

【点评】本题考查了实数运算、指数幂计算、特殊角三角函数值，关键在于知识点的应用，熟记特殊角的三角函数值．属于基础题．

18．【分析】分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可．

【解答】解：原不等式组为$\begin{cases}2x+1>3(x-1)① \\ 4x<x+3②\end{cases}$，

解不等式①，得$x<4$；

解不等式②，得$x<1$．

$\therefore$原不等式组的解集为$x<1$．

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键．

19．【分析】（1）根据判别式的意义得到$\triangle=(-2)^{2}-4\times1\times(1-k)>0$，然后解不等式即可．

（2）根据（1）中k的取值范围，任取一k的值，然后解方程即可．

【解答】解：（1）$\because$关于x的一元二次方程$x^2-2x+1-k=0$有两个不相等的实数根．

$\therefore \triangle=(-2)^2-4\times1\times(1-k)>0$，

解得$k>0$．

（2）由（1）知，实数k的取值范围为$k>0$，

故取$k=1$，

则$x^2-2x=0$，即$x(x-2)=0$，

解得，$x_1=0$，$x_2=2$．

【点评】本题考查了一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$根的判别式$\triangle=b^2-4ac$：当$\triangle>0$，方程有两个不相等的实数根；当$\triangle=0$，方程有两个相等的实数根；当$\triangle<0$，方程没有实数根．

20．【分析】（1）根据角平分线的作法补全图2中的图形；

（2）根据角平分线的作法、等腰三角形的性质、平行线的判定定理解答即可．

【解答】解：（1）用直尺和圆规，补全图2中的图形如图2所示；

（2）证明：由作图可知PM平分$\angle CPB$，

$\therefore \angle CPM=\angle BPM=\dfrac{1}{2}\angle CPB$，

又$\because PA=PB$，

$\therefore \angle PAB=\angle PBA$（等腰三角形两底角相等），

$\because \angle CPB=\angle PAB+\angle PBA$，

$\therefore \angle PAB=\angle PBA=\dfrac{1}{2}\angle CPB$．

$\therefore \angle CPM=\angle PAB$．

$\therefore$直线PM / / 直线l（同位角相等，两直线平行），

故答案为：BPM；等腰三角形两底角相等；同位角相等，两直线平行．

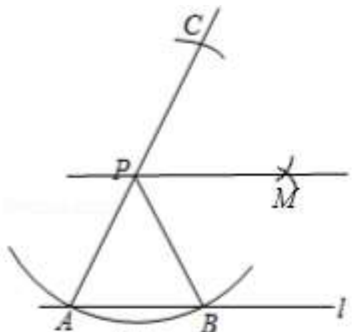


图2

【点评】本题考查的是尺规作图、平行线的判定、等腰三角形的性质，掌握基本尺规作图、平行线的判定定理是解题的关键．

21．【分析】设大容器的容量为x斛，小容器的容量为y斛，根据“今有大容器5个，小容器1个，总容量为3斛；大容器1个，小容器5个，总容量为2斛”，即可得出关于x，y的二元一次方程组，解之即可得出结论．

【解答】解：设大容器的容量为x斛，小容器的容量为y斛，

依题意得：$\begin{cases}5x+y=3\\x+5y=2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x=\dfrac{13}{24}\\y=\dfrac{7}{24}\end{cases}$.

答：大容器的容量为$\dfrac{13}{24}$斛，小容器的容量为$\dfrac{7}{24}$斛.

【点评】本题考查了二元一次方程组的应用以及数学常识，找准等量关系，正确列出二元一次方程组是解题的关键.

22.【分析】(1）根据扇形图中的百分数求出m，根据代数测试成绩在$30\leqslant x\leqslant 40$这一组的数据求出$n$的值；

（2）根据频数分布直方图和扇形统计图中的数据，用样本估计总体即可；

（3）根据e中给出的数据判断①，求出几何测试成绩在$30\leqslant x<50$的人数判断②.

【解答】解：(1）$m=1-5\%-10\%-25\%-40\%=20\%$，$n=38$，

故答案为：20%，38；

（2）20名学生的成绩中代数测试及格有：$10+5=15$（人)，几何测试优秀有2人，

估计该校初三年级本次代数测试及格人数为：$400\times\dfrac{15}{20}=300$（人)，几何成绩优秀人数为：$400\times\dfrac{2}{20}=40$（人)，

故答案为：15；2；300，40；

（3）代数测试成绩的平均分为35.2分，几何的平均分为32.05分，

$\therefore$代数测试成绩的平均分高于几何的平均分，

但平均数受极端值的影响，不能反应大多数学生掌握较好，

$\therefore$不一定大多数学生代数掌握的比几何好，①推断不合理；

几何测试成绩在$30\leqslant x<50$的人数是：$400\times 60\%=240$（人)，

$\therefore$被抽测的学生小莉的几何成绩是29分，她觉得年级里大概有240人的测试成绩比她高，所以她决定迎头赶上，②推断合理，

故答案为：②.

【点评】本题考查频数分布表、扇形统计图、统计表，解答本题的关键是明确题意，

23.【分析】(1）由平行四边形的性质可得$AD//BC$，$AD=BC$，由线段关系可证$FD=CE$，可得结论；

（2）由平行四边形的性质可得$AB//CD$，$CD=AB=4$，$\angle A=120^\circ$，$BC=AD=6$，由锐角三角函数和勾股定理可求解.

【解答】证明：(1）$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD//BC$，$AD=BC$，

$\because F$是AD的中点，

$\therefore FD=\dfrac{1}{2}AD$，

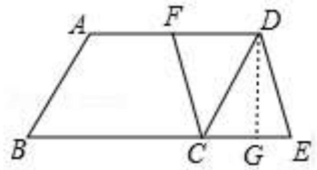
$\because CE=\dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore FD=CE$，

$\because FD//CE$，

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 是平行四边形；

（2）过点 D 作 $DG \perp CE$ 于点 G，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB//CD$， $CD=AB=4$， $\angle A=120°$， $BC=AD=6$，

$\therefore \angle DCE=\angle B=60°$，

在 RtΔDGC 中， $\angle DGC=90°$，

$\therefore CG=CD\cdot\cos\angle DCE=2$，

$DG=CD\cdot\sin\angle DCE=2\sqrt{3}$，

$\because CE=\frac{1}{2}BC=3$，

$\therefore GE=1$，

在 RtΔDGE 中， $\angle DGE=90°$，

$\therefore DE=\sqrt{DG^2+GE^2}=\sqrt{13}$．

【点评】本题考查了平行四边形的性质，勾股定理，锐角三角函数等知识，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键．

24．【分析】（1）利用待定系数法即可求得答案；

（2）分别将 $x=2$ 或 3 或 4，代入 $y=-x+6$ 和 $y=\frac{5}{x}$ 两个函数解析式中，求出对应的纵坐标，再根据围出的封闭图形中（不包括边界）所含格点的坐标．

【解答】解：（1）由图可知， $A(1,5)$， $B(5,1)$

将 $A(1,5)$ 和 $B(5,1)$ 分别代入 $y=\frac{m}{x}$ 中，得 $m=5$，

$\therefore y=\frac{5}{x}$，

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$，得： $\begin{cases}5=k+b\\1=5k+b\end{cases}$，

解得， $k=-1$， $b=6$，

$\therefore y=-x+6$；

（2）由题意，得： $1<x<5$，

$\therefore x=2$ 或 3 或 4，

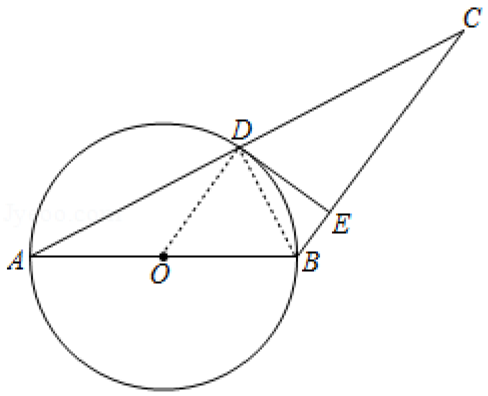
分别代入 $y=-x+6$ 和 $y=\frac{5}{x}$ 两个函数解析式中，满足条件的格点坐标是 $(2,3)$， $(3,2)$．

【点评】本题考查了待定系数法求一次函数和反比例函数的解析式，横纵坐标都为整数的格点的坐标确定方法，要注意不包括边界的条件．

25．【分析】（1）由切线的性质可得$DE \perp OD$，由三角形中位线定理可得$OD // BC$，可得结论；

（2）由锐角三角函数可求$EC=4$，在RtΔDEC中，由勾股定理可求DC的长，由锐角三角函数可求BD的长，即可求解．

【解答】证明：（1）连接OD，



$\because DE$为$\odot O$的切线，

$\therefore DE \perp OD$，

$\because AO=OB$，D是AC的中点，

$\therefore OD // BC$．

$\therefore DE \perp BC$；

（2）连接DB，

$\because AB$为$\odot O$的直径，

$\therefore \angle ADB=90°$，

$\therefore DB \perp AC$，

$\therefore \angle CDB=90°$，

$\because D$为AC中点，

$\therefore AB=BC$，

在RtΔDEC中，$\angle DEC=90°$，$DE=2$，$\tan C=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore EC=\dfrac{DE}{\tan C}=4$，

$\therefore DC=\sqrt{DE^2+EC^2}=2\sqrt{5}$，

在RtΔDCB中，$\angle BDC=90°$，

$\therefore BD=DC\cdot\tan C=\sqrt{5}$，

$\therefore BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=\sqrt{20+5}=5$，

$\therefore AB=BC=5$，

$\therefore \odot O$的半径为2.5．

【点评】本题考查了切线的性质，圆的有关知识，勾股定理等知识，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键．

26．【分析】（1）运用公式$x=-\dfrac{b}{2a}$求出对称轴，令$x=0$，得$y=-3a$，即可求得抛物线与y轴的交点坐标；

（2）分三种情况：①当$a>0$时，②当$a<0$时，抛物线的顶点在线段BC上，③当$a<0$时，若抛物线的顶点不在

线段 BC 上，分别进行讨论即可．

【解答】解：（1）$\because$ 抛物线 $y=ax^2-2ax-3a$，

$\therefore x=-\dfrac{-2a}{2a}=1$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线 $x=1$，

令 $x=0$， $y=-3a$，

$\therefore$ 抛物线与 y 轴交点坐标为 $E(0,-3a)$；

（2） $y=ax^2-2ax-3a=a(x^2-2x-3)=a(x+1)(x-3)$，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴交于点 $A(-1,0)$， $D(3,0)$，与 y 轴交于点 $E(0,-3a)$，顶点坐标是 $(1,-4a)$．

由题意得点 $C(0,4)$，又 $B(3,4)$，

①当 $a>0$ 时，如图 1，显然抛物线与线段 BC 无公共点．

②当 $a<0$ 时，若抛物线的顶点在线段 BC 上，如图 2，

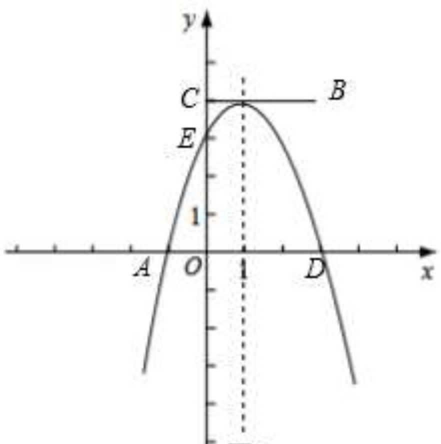


图2

则顶点坐标为 $(1,4)$，

$\therefore -4a=4$，

$\therefore a=-1$．

③当 $a<0$ 时，若抛物线的顶点不在线段 BC 上，如图 3，由抛物线与线段 BC 恰有一个公共点，

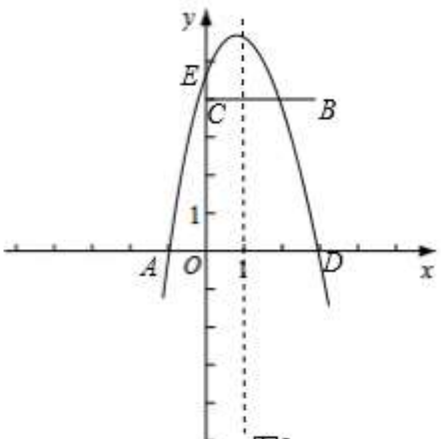


图3

得 $-3a>4$，

$\therefore a<-\dfrac{4}{3}$，

综上，a 的取值范围是 $a<-\dfrac{4}{3}$，或 $a=-1$．

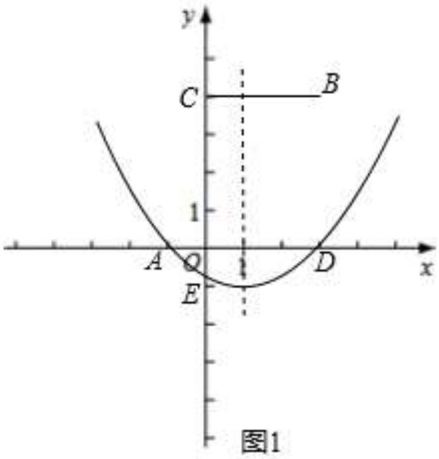


图1

【点评】本题考查了二次函数的性质，二次函数图象与系数的关系，二次函数图象上的点的坐标特征，坐标与图形变换－平移，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质和数形结合思想解答．

27．【分析】（1）按要求作图即可；

（2）ΔAPB 绕点 A 顺时针旋转得到 ΔADC 可得 $\angle ADC=\angle APB$，即可得到答案；

（3）由旋转的性质可知 $\Delta ABP\cong\Delta ACD$．由全等三角形的性质得出 $\angle APB=\angle ADC$，$AP=AD$，$BP=CD$，由角平分线的定义及等腰三角形的性质得出 $\angle PAD=\angle ADM=\alpha$，$\angle APM=\angle M$．设 AD 与 BM 相交于点 O，证得 $OP=OA$，$OM=OD$，则可得出结论．

【解答】解：（1）依题意补全图1和图2；由作图知，$\angle BAP$ 与 $\angle CAD$ 的数量关系为相等；

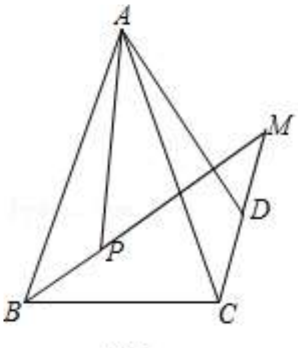


图1

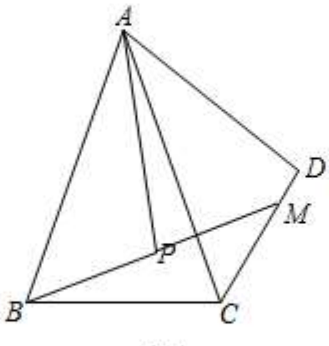


图2

故答案为：相等；

（2）$\angle ADM=\angle APM$ 或 $\angle ADM+\angle APM=180^\circ$．

当 M 在线段 CD 延长线上时，如上图1，

$\because$ 将 ΔAPB 绕点 A 顺时针旋转得到 ΔADC，

$\therefore \angle ADC=\angle APB$，

$\therefore \angle ADM=\angle APM$，

当 M 在线段 CD 上时，如上图2，

$\because$ 将 ΔAPB 绕点 A 顺时针旋转得到 ΔADC，

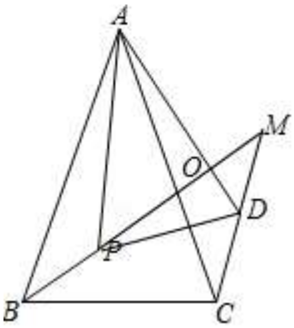
$\therefore \angle ADC=\angle APB$，

$\because \angle APB+\angle APM=180^{\circ}$，

$\therefore \angle ADM+\angle APM=180^{\circ}$，

故答案为：$\angle ADM=\angle APM$ 或 $\angle ADM+\angle APM=180^{\circ}$；

（3）如图，线段 BM，CD，AP 之间的数量关系是：$BM=CD+AP$.



证明：$\because$ 将 ΔAPB 绕点 A 逆时针旋转 α，使 AB 边与 AC 重合，得到 ΔADC，

$\therefore \Delta ABP\cong\Delta ACD$.

$\therefore \angle APB=\angle ADC$，$AP=AD$，$BP=CD$，

$\therefore \angle ADM=\angle APM$.

$\because DP$ 平分 $\angle ADC$，

$\therefore \angle ADP=\angle PDC$.

$\because AP=AD$，

$\therefore \angle APD=\angle ADP$.

$\therefore \angle APD=\angle PDC$.

$\therefore AP//CM$.

$\therefore \angle PAD=\angle ADM=\alpha$，$\angle APM=\angle M$.

又由（2）知，$\angle ADM=\angle APM=\alpha$，

设 AD 与 BM 相交于点 O，

$\therefore OP=OA$，$OM=OD$，

$\therefore OP+OM=OA+OD$，

$\therefore PM=AD=AP$，

$\therefore BM=BP+PM$.

$\therefore BM=CD+AP$.

【点评】本题属于几何变换综合题，主要考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，角平分线的定义，全等三角形的性质，解决问题的关键是熟练掌握旋转的性质.

28.【分析】（1）由两点距离公式分别求出 AC、BC、DA、BD、AE、BE 的长，即可求解；

（2）①设等距点的坐标为 $(x,0)$，由题意可得 $2=|x-6|$，即可求解；②根据题意，列出方程，由根的判别式可求解；

（3）由题意知直线 l_1 和直线 l_2 的等距点在直线 $l_3: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 上，而直线 l_1 和 y 轴的等距点在直线 $l_4: y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 或 $l_5: y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$ 上．画出图形，结合图形可得答案.

【解答】解：（1）$\because A(6,0)$，$B(0，2\sqrt{3})$、$C(4,0)$，$D(2,0)$，$E(1,3)$，

$\therefore AC=2$，$BC=2\sqrt{7}$；$DA=4$，$BD=4$；$AE=\sqrt{34}$，$BE=\sqrt{22-12\sqrt{3}}$，

$\because AD=BD$，

故点 D 是点 A 和点 B 的等距点，

故答案为：D；

（2）①设等距点的坐标为 $(x,0)$，

$\therefore 2=|x-6|$，

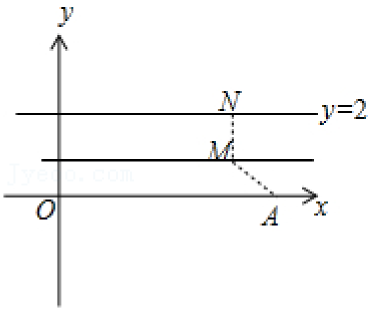
$\therefore x=4$ 或 8，

$\therefore$ 等距点的坐标为 $(4,0)$ 或 $(8,0)$，

故答案为：$(4,0)$ 或 $(8,0)$；

②如图，设直线 $y=b$ 上的点 M 为点 A 和直线 $y=2$ 的等距点，

连接 MA，过点 M 作直线 $y=2$ 的垂线，垂足为点 N．



$\because$ 点 M 为点 A 和直线 $y=2$ 的等距点，

$\therefore MN^2=MA^2$．

$\because$ 点 M 在直线 $y=b$ 上，故可设点 M 的坐标为 (x,b)，

则 $(2-b)^2=b^2+(6-x)^2$，

$\therefore x^2-12x+4b+32=0$，

$\because$ 方程有实根，

$\therefore \triangle=(-12)^2-4(4b+32)\geqslant 0$，

$\therefore b\leqslant 1$；

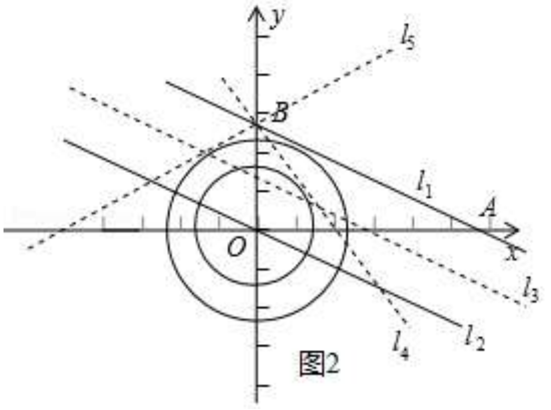
（3）如图 2，由点 A、B 的坐标得，直线 AB 的表达式为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$，

由题意知，直线 l_1 和直线 l_2 的等距点在直线 l_3，

则 l_3 和 y 轴的交点坐标为 $(0,\sqrt{3})$ 且与直线 AB 平行，

故直线 l_3 的表达式为：$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 上，

同理可得，直线l_1和y轴的等距点在直线$l_4: y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$或$l_5: y=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$上.



$\therefore r=\sqrt{3}$或$r\geqslant 3$.

【点评】本题考查了两点距离公式，圆的有关知识，理解新定义，利用数形结合思想解决问题是本题的关键。