北师大实验中学 2023-2024 学年度第二学期综合练习

初三年级数学

班级________ 姓名_________ 学号______ 成绩_________

考生须知	1. 本试卷共 10 页，共 3 道大题，28 道小题；答题纸共 3 页。满分 100 分。考试时间 120 分钟。 2. 在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号。 3. 试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，选择题须用 2B 铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答。

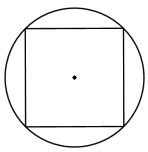
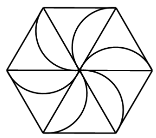
一、 单项选择题（本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

1．2023年2月28日，国家统计局发布的《中华人民共和国2022年国民经济和社会发展统计公报》中报道：2022年全年研究与试验发展（$R\&D$）经费支出30870亿元，比上年增长10.4%，将数字30870用科学记数法表示应为（　　）

A. 30.87×10^3　B. 3.087×10^5　C. 0.3087×10^5　D. 3.087×10^4

【答案】D（东城一模第 2 题）用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a\times10^n$，其中$1\le|a|<10$，n为整数．$30870=3.087\times10^4$.

2．下列图形中，既是轴对称图形也是中心对称图形的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

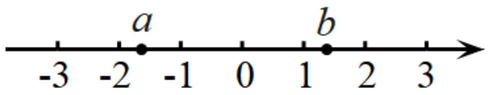
【答案】B（综合石景山一模第 4 题、丰台一模第 3 题）

3．方程组$\begin{cases}x+2y=3,\\2x-y=5\end{cases}$的解是（　　）

A. $\begin{cases}x=\frac{7}{3}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=\frac{13}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=\frac{8}{3}\\y=\frac{1}{3}\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

【答案】B（改编题，西城二模第 3 题）

4．a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，则正确的结论是（　　）



A. $a > -1$　　B. $|a| < |b|$　　C. $-1 < a + b < 0$　D. $ab > 0$

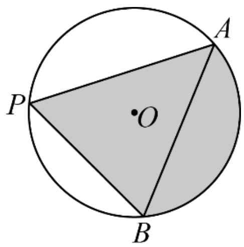
【答案】C（改编题，综合东城一模第 4 题，西城一模第 5 题）

5．不透明的袋子中装有 2 个红球和 3 个黄球，这五个球除颜色外完全相同．摇匀后，随机从中摸出一个小球不放回，再随机摸出一个小球，则两次摸出小球均为黄球的概率是（　　）

A.$\frac{3}{10}$　　B.$\frac{1}{10}$　　C.$\frac{4}{25}$　　D.$\frac{9}{25}$

【答案】A（改编题，综合海淀一模第 4 题，石景山一模 5 题，西城二模的第 6 题）

6．如图，点 P 是圆形舞台上的一点，舞台的圆心为 O，在 P 点安装的一台某种型号的灯光装置，其照亮的区域如图中阴影所示，该装置可以绕着 P 点转动，转动过程中，边界的两条光线分别与圆交于 A，B 两点，并且夹角保持不变，该装置转动的过程中，以下结论正确的是（　）



A．点 P 到弦AB所在直线的距离存在最大值

B．弦 AB 的大小改变

C．弦PA与 PB 的长度之和不变

D．图中阴影部分的面积不变

【答案】A（23-24 华女九上期中题）

7．教练将某射击运动员 50 次的射击成绩录入电脑，计算得到这 50 个数据的平均数是 7.5，方差是 1.64．后来教练核查时发现其中有 2 个数据录入有误，一个错录为 9 环，实际成绩应是 6 环；另一个错录为 7 环，实际成绩应是 10 环．教练将错录的 2 个数据进行了更正，更正后实际成绩的平均数是$\bar{x}$，方

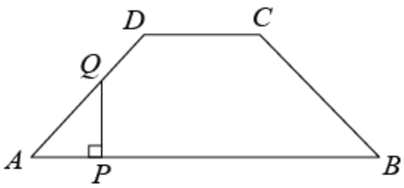
差是s^2，则（　）

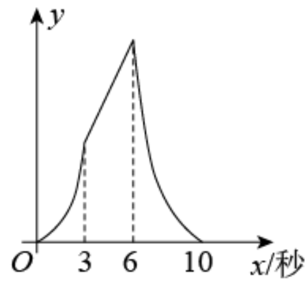
A．$\overline{x} > 7.5, S^2 = 1.64$　　B．$\overline{x} = 7.5, S^2 < 1.64$

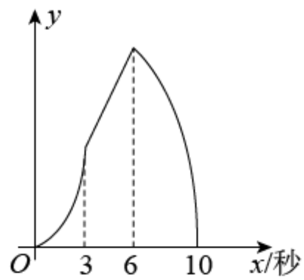
C．$\overline{x} = 7.5, S^2 > 1.64$　　D．$\overline{x} < 7.5, S^2 = 1.64$

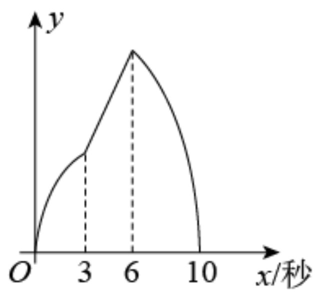
【答案】C（改编题，2022 年北京西城区九年级二模）

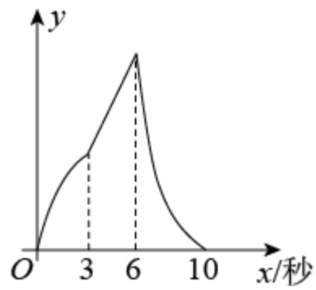
8．如图，四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB // CD$，AB 与 CD 之间的距离为 4，$AD=5$，$CD=3$，$\angle ABC=45°$，点 P，Q 同时由 A 点出发，分别沿边 AB，折线 $ADCB$ 向终点 B 方向移动，在移动过程中始终保持 $PQ\perp AB$，已知点 P 的移动速度为每秒 1 个单位长度，设点 P 的移动时间为 x 秒，$\triangle APQ$ 的面积为 y，则能反映 y 与 x 之间函数关系的图象是（　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B（22~23 门头沟九上期中）

二、填空题（共 8 小题，每题 2 分，共 16 分）

9．若代数式$\frac{\sqrt{5-x}}{x+3}$在实数范围内有意义，则实数x的取值范围是 ______.

【答案】$x \neq -3$ 且$x \leq 5$（改编题，石景山朝阳东城西城丰台海淀）

10．分解因式：$-8xy + 16y + x^2y =$_________.

【答案】$y(x-4)^2$（改编题，石景山朝阳东城丰台西城海淀）

11．分式方程$\frac{3}{x+2} = \frac{2}{1-x}$的解为_______.

【答案】$x = -\frac{1}{5}$（改编题，海淀西城丰台朝阳）

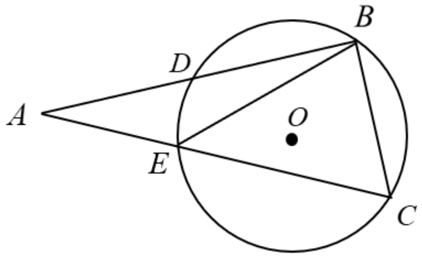
12．命题"若$a > 0$，则$a > \frac{1}{a}$"是假命题，请写出一个满足条件的a的值，$a =$_________.

【答案】$\frac{1}{2}$（答案不唯一,这个数在 0-1 之间即可）（改编题，海淀西城丰台朝阳）

13．若关于x的一元二次方程$(k+3)x^2 - 2x + 5 = 0$有两个实数根，则实数 k 的取值范围是______.

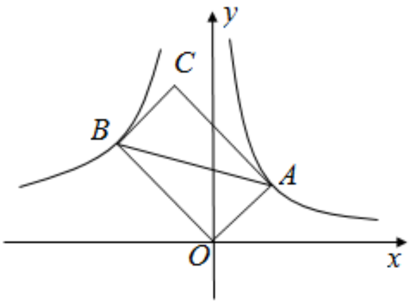
【答案】$k \neq -3$且$k \leq -2.8$（改编石景山一模 15 题）

14．如图，在 Rt△ABC 中，∠ABC=90°，∠A=32°，点 B、C 在⊙ O上，边 AB、AC 分别交⊙ O于 D、E 两点，点 B 是$\overset{\frown}{CD}$的中点，则∠ABE=________.



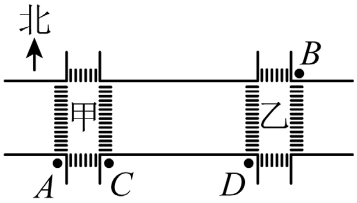
【答案】13°（22 年北师大附中模拟题）

15．如图，在矩形$AOBC$中，点O是坐标原点，点A在反比例函数$y = \frac{2}{x}$的图象上，点B在反比例函数$y = \frac{k}{x}$的图象上，$sin\angle CAB = \frac{\sqrt{5}}{5}$，则$k =$______.



【答案】-8（22 年北师大附中模拟题）

16. 如图，在甲，乙两个十字路口各方向均设有人行横道和交通信号灯，小宇在甲路口西南角的A处，需要步行到位于乙路口东北角B处附近的餐馆用餐，已知两路口人行横道交通信号灯的切换时间及小宇的步行时间如下表所示：

	人行横道交通信号灯的切换时间		小宇的步行时间	
	甲路口	每 1min	沿人行横道穿过任一条马路	0.5min
	乙路口	每2min	在甲、乙两路口之间（CD段）	5min

假定人行横道的交通信号灯只有红、绿两种，且在任意时刻，同一十字路口东西向和南北向的交通信号灯颜色不同，行人步行转弯的时间可以忽略不计，若小宇在A处时，甲、乙两路口人行横道东西向的交通信号灯均恰好转为红灯，小宇从A处到达B处所用的最短时间为____min.

【答案】7（22 年人大附中模拟题）

三、解答题（共 68 分，第 17-21 题，每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17.计算：$6\cos 45° - \sqrt[3]{8} + |\sqrt{2} - 5| - (\pi - 2)^0$.

【答案】 $2\sqrt{2}+2$（改编东城二模，石景山一模）

18．解不等式组$\begin{cases}2x-1<\frac{x+1}{2}① \\ -3x+1\le 5②\end{cases}$，并写出它的所有整数解．

【答案】$-\frac{4}{3}\le x<1$，-1，0（改编西城二模）

19. 已知$2x^2-x-2=0$，求代数式$(2x-1)^2-2(1-x)$的值

【答案】（改编海淀一模）

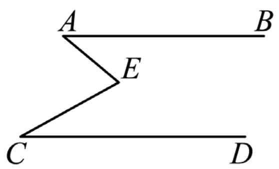
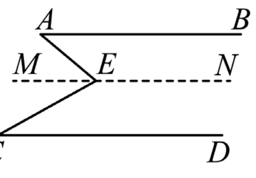
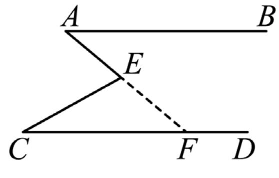
解：$\because 2x^2-x-2=0$

$\therefore 2x^2-x=2$

$\therefore (2x-1)^2-2(1-x)$=$4x^2-4x+1-2+2x$

=$4x^2-2x-1$=$2(2x^2-x)-1=4-1=3$

20. 下面是解答一道几何题时两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明．

<table>
<tr><td colspan="2">已知：如图，$AB\parallel CD$．求证：$\angle AEC=\angle A+\angle C$

</td></tr>
<tr><td>方法一
证明：如图，过点 E 作 $MN// AB$

</td><td>方法二
证明：如图，延长 AE，交 CD 于点 F.

</td></tr>
</table>

【答案】（西城一模原题）

方法一

证明：如图，过点 E 作 $MN// AB$ ，

$\therefore \angle A=\angle AEM$.

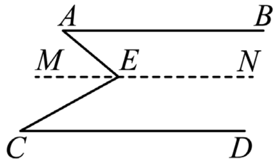
$\because AB \parallel CD$，

$\therefore MN /\!/ CD$，

$\therefore \angle C=\angle CEM$.

$\because \angle AEC=\angle AEM+\angle CEM$ ，

$\therefore \angle AEC=\angle A+\angle C$.



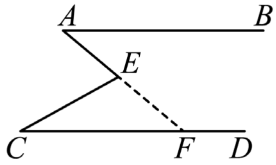
方法二证明：如图，延长 AE，交 CD 于点 F，

$\because AB \parallel CD$，

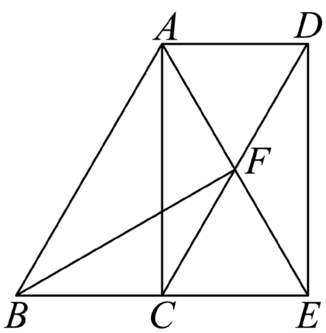
$\therefore \angle A=\angle AFC$.

$\because \angle AEC=\angle AFC+\angle C$ ，

$\therefore \angle AEC=\angle A+\angle C$.



21. 如图，在▱$ABCD$中，$\angle ACB=90°$，过点 D 作 $DE\perp BC$ 交 BC 的延长线于点 E，连接AE交 CD 于点 F.



（1）求证：四边形$ACED$是矩形；

（2）连接 BF ，若$\angle ABC=60°$，$CE=3$，求 BF 的长.

【答案】（丰台一模原题，第 2 问改了数）

【小问 1 详解】

证明：$\because \angle ACB = 90^\circ$，

$\therefore AC \perp BC$，

$\because DE \perp BC$，

$\therefore AC \parallel DE$，

$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 在 BC 的延长线上，

$\therefore AD \parallel CE$，

$\therefore$四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$\because \angle ACE = 90^\circ$，

$\therefore$四边形 $ACED$ 是矩形；

【小问 2 详解】

解：$\because$四边形 $ACED$ 是矩形，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

\ $AE = CD = AB$， $AF = EF$， $AD = CE = CB = 3$，

$\because \angle ABC = 60^\circ$，

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形，

$\therefore BF \perp AE$，$AB = AE = BE = 2CE = 2 \times 3 = 6$，

$\therefore \angle AFB = 90^\circ$，$AF = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} \times 6 = 3$，

$\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$，

$\therefore BF$ 的长是$3\sqrt{3}$.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 相交于点 $P(2, m)$ 和点 Q.

(1)求 m 的值及点 Q 的坐标；

(2)已知点 $N(0, n)$，过点 N 作平行于 x 轴的直线交直线 $y = x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 分别为点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$．当 $x_1 > x_2$ 时，直接写出 n 的取值范围.

【答案】（23-24 学年九上房山期末）

（1）解：将点$P(2,m)$代入直线$y=x$得：$m=2$，

故点$P(2,2)$，

将点$P(2,2)$代入双曲线$y=\frac{k}{x}$得：$k=4$，

故双曲线为$y=\frac{4}{x}$,

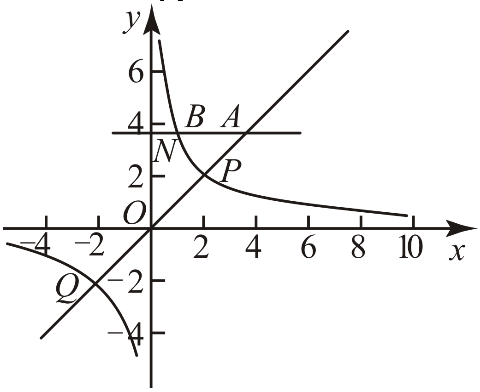
联立直线$y=x$与双曲线$y=\frac{4}{x}$得：$x=-2$或 2，

故点Q的坐标为$(-2,-2)$，

故答案为：$m=2$，$Q(-2,-2)$；

（2）解：如图，当直线AB在点 P 上方时，$x_1>x_2$，

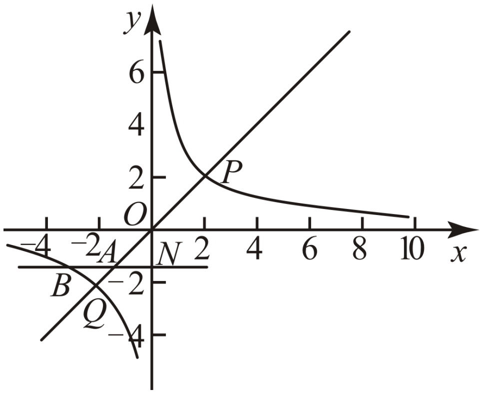
此时，$n>y_P=2$，即$n>2$；



如图，当直线AB在点 Q 上方 x 轴下方时，$x_1>x_2$，

此时，$0>n>y_Q=-2$，即$-2<n<0$；

综上，$n>2$或$-2<n<0$；



23. 第二十四届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在北京举行，北京成为历史上第一座既举办夏奥会又举办冬奥会的城市．北京冬奥会的成功兴办掀起了全民“冬奥热”，某校九年级举行了两次“冬奥知识”竞赛．该校九年级共有学生480人参加了竞赛，从中随机抽取30名学生的两次竞赛成绩，

满分 50 分，最低分 45 分。小明对两次数据（成绩）进行整理、描述和分析．下面给出了部分信息：

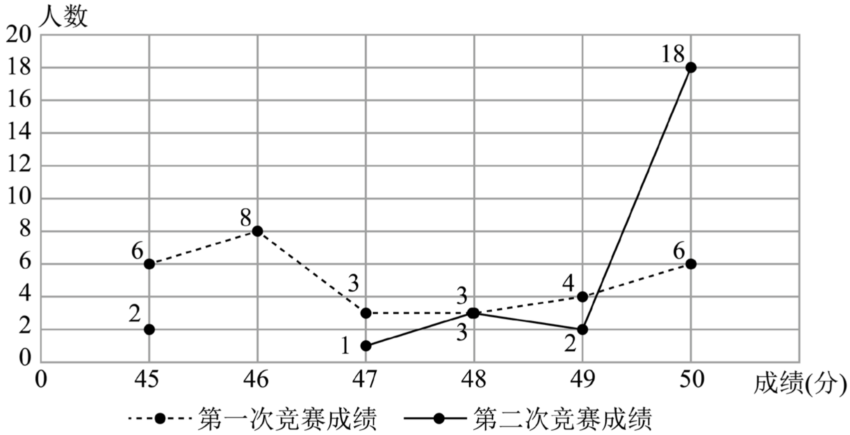
a．小明在统计第二次竞赛成绩各分数段人数时，不小心污染了统计表：

成绩（分）	45	45.5	46	46.5	47	47.5	48	48.5	49	49.5	50
人数（人）	2			1	0	2	1	1	1	4	14

注：成绩只能为0.5的整数倍．

b．将竞赛成绩按四舍五入取整后，得出的频数分布折线图如下（数据分组：$x=45$，$45<x\leq 46$，$46<x\leq 47$，$47<x\leq 48$，$48<x\leq 49$，$49<x\leq 50$）

某校抽取 30 名学生的两次“冬奥知识”竞赛成绩折线统计图



c．两次竞赛成绩的平均数、中位数如下：

	平均数	中位数
第一次	46.75	46.75
第二次	48.50	m

根据以上信息，回答下列问题：

(1)请补全折线统计图，并标明数据；

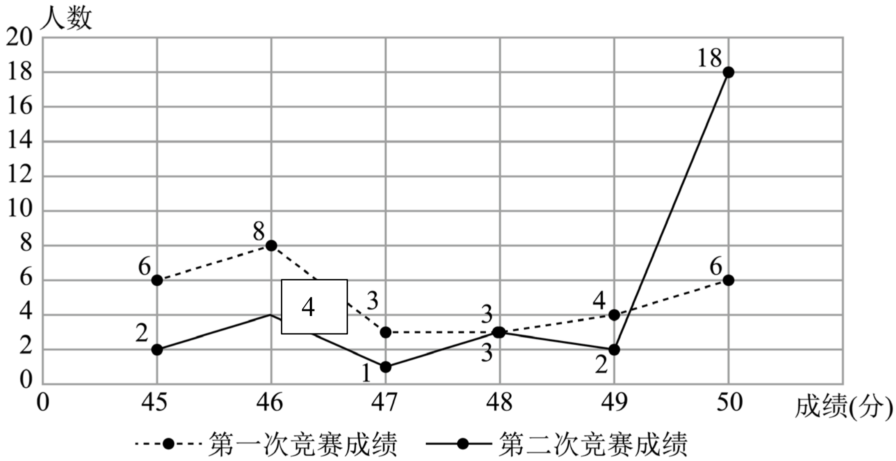
(2)请完善 c 中的统计表，m的值是__________.

(3)若成绩为46.5分及以上为优秀， 根据以上信息估计，第二次竞赛九年级约有______名学生成绩达到优秀；

(4)通过观察、分析，小明得出这样的结论“在抽取 30 名学生的第一次竞赛成绩中，众数一定出现在$45 < x \leq 46$这一组”．请你判断小明的说法__________．（填“正确”或“错误”），你的理由是_______________.

【答案】(23 年北京二中模拟题)

（1）成绩为 46 分的学生人数为：$30-18-2-1-3-2=4$；补全折线统



（2）$m=49.5$；

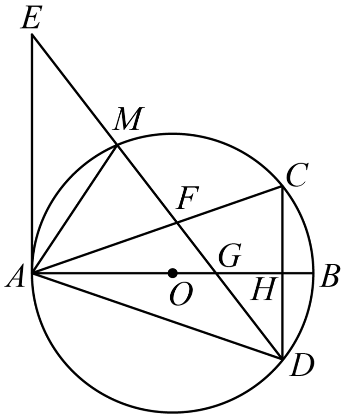
故答案为：49.5．

（3）$480\times\frac{1+3+2+18}{30}=384$（名）；

故答案为：384．

（4）错误，理由：成绩 $45 < x \leq 46$的分数可以是45.5或 46 这两个分数，虽然这一组人数最多，但也可能出现在$x=45$或$49 < x \leq 50$这两组中．

24．如图，AB为$\odot O$的直径，弦$CD\perp AB$于 H，连接AC、AD，过点A作$\odot O$的切线，$\angle ADC$的平分线相交于点E，DE交AC于点F，交AB于点G，交$\odot O$于点M，连接AM.



(1)求证：$AC = AD$；

(2)若$tan\angle AMD = 2\sqrt{2}$，$CD = 4$，求 AF 长.

【答案】(23-24 平谷九上期末题)
【分析】证明方法不唯一，仅供参考
（1）根据垂径定理得到$CH = DH$，$\angle AHC = \angle AHD = 90°$，证明$\triangle ACH \cong \triangle ADH(\text{SAS})$即可；
（2）根据圆周角定理得到$\angle AMD = ACD$，由垂径定理得到 CH=DH=$\frac{1}{2}CD = 2$，$tan\angle AMD = tan\angle ACD = 2\sqrt{2}$，求出$AH = 4\sqrt{2}$，利用勾股定理得到$AC = 6$，根据$AE \perp AB$，$CD \perp AB$，得到$AE \parallel CD$，结合$DE$是$\angle ADC$的平分线，推出$\angle AED = \angle ADE$，易得$AE = AD = AC = 6$，由$AE \parallel CD$证明$\triangle AEF \backsim \triangle CDF$，得到$\frac{AE}{CD} = \frac{AF}{FC}$，即可求解.
【详解】（1）证明：$\because AB$为$\odot O$的直径，$CD \perp AB$，
$\therefore CH = DH$，$\angle AHC = \angle AHD = 90°$，
在$\triangle ACH$与$\triangle ADH$中，

$$\begin{cases} CH = DH \\ \angle AHC = \angle AHD = 90°, \\ AH = AH \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACH \cong \triangle ADH(\text{SAS})$，
$\therefore AC = AD$；
（2）解：$\because \angle AMD = ACD$，
$\therefore tan\angle AMD = tan\angle ACD = 2\sqrt{2}$，
$\because CH = DH = \frac{1}{2}CD = 2$，
$\therefore AH = CH \cdot tan\angle ACD = 4\sqrt{2}$，
$\therefore AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 6$，
$\because AE \perp AB$，$CD \perp AB$，

$\therefore AE \parallel CD$，

$\therefore \angle AED = \angle CDE, \angle EAC = \angle ACD = \angle ADC$，

$\because DE$是$\angle ADC$的平分线，

$\therefore \angle CDE = \angle ADE$，

$\therefore \angle ADE = \angle AED$，

$\therefore AE = AD = AC = 6$，

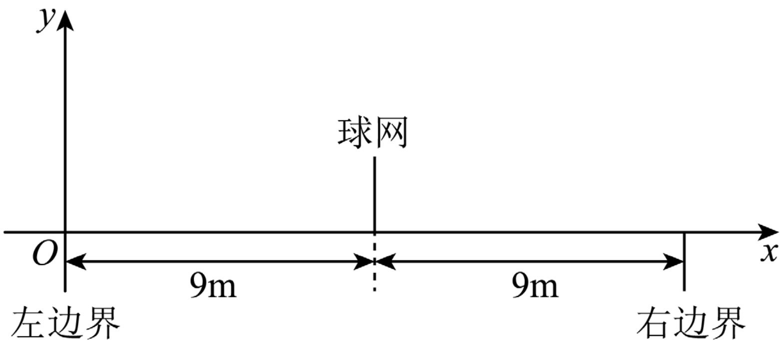
$\because AE \parallel CD$，

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle CDF$，

$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{AF}{FC}$，即$\frac{6}{4} = \frac{AF}{6-AF}$，

$\therefore AF = \frac{18}{5}$.

25．排球场的长度为$18m$，球网在场地中央且高度为2.24m，排球出手后的运动路线可以看作是抛物线的一部分，建立如图所示的平面直角坐标系，排球运动过程中的竖直高度y(单位：m)与水平距离x(单位：m)近似满足函数关系$y = a(x-h)^2 + k(a < 0)$.



(1)某运动员第一次发球时，测得水平距离x与竖直高度y的几组数据如下：

水平距离x/m	0	2	4	6	11	12
竖直高度y/m	2.38	2.62	2.7	2.62	1.72	1.42

①根据上述数据，求抛物线解析式；

②判断该运动员第一次发球能否过网______（填“能”或“不能”),并说明理由．

(2)该运动员第二次发球时，排球运动过程中的竖直高度y(单位：m)与水平距离x(单位：m)近似满足函数关系$y = -0.02(x-5)^2 + 2.88$，请问该运动员此

次发球是否出界，并说明理由.

【答案】（清华附中22-23学年八下期末题）
（1）解：（1）①由表中数据可得顶点$(4,2.7)$，
设$y=a(x-4)^2+2.7(a<0)$，
把$(0,2.38)$代入得$16a+2.7=2.38$，
解得：$a=-0.02$，
∴所求函数关系为$y=-0.02(x-4)^2+2.7$；
②不能.
当$x=9$时，$y=-0.02(9-4)^2+2.7=2.2<2.24$，
∴该运动员第一次发球能过网，
故答案为：不能；
（2）判断：没有出界.
第二次发球：$y=-0.02(x-5)^2+2.88$，
令$y=0$，则$-0.02(x-4)^2+2.88=0$，
，解得$x_1=-7$(舍)，x_2=17，
∵ $x_2=17<18$，
∴该运动员此次发球没有出界.

26. 已知二次函数$y=ax^2+bx+2$的图像经过点$A(2,2)$.

(1)用含a的代数式表示$b=$______；

(2)若直线$y=x$与抛物线$y=ax^2+bx+2$相交所得的线段长为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，求a的值；

(3)若抛物线$y=ax^2+bx+2$与x轴交于$M(x_1,0)$和$N(x_2,0)$两点（$x_1<x_2$），且$2x_1+x_2>0$，直接写出a的取值范围.

【答案】(22人大附分校模拟题)

（1）解：∵二次函数$y=ax^2+bx+2$的图像经过点$A(2,2)$，
∴$4a+2b+2=2$，
∴$b=-2a$，
故答案为：$-2a$；
（2）解：由（1）得二次函数解析式为$y=ax^2-2ax+2$，
由题意得：$\begin{cases}y=ax^2-2ax+2\\ y=x\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=\frac{1}{a}\\ y=\frac{1}{a}\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$，
即直线与抛物线的两个交点坐标为$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$，$(2,2)$；
由题意得：$2\left(\frac{1}{a}-2\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$，

解得：$a=\frac{2}{7}$或$a=2$；

（3）解：∵抛物线与 x 轴有两个不同的交点，

∴$\Delta=(-2a)^2-4a\times 2>0$，

解得：$a<0$或$a>2$；

当$a>2$时，

对于$y=ax^2-2ax+2$，令$x=0$，有$y=2$，

即抛物线与 y 轴交点为$(0,2)$，

∴抛物线必过$(2,2)$与$(0,2)$，

∴$0<x_1<x_2$，

∴必有$2x_1+x_2>0$；

当$a<0$时，对于$ax^2-2ax+2=0$，

则由根与系数的关系有：$x_1+x_2=2$，

∴$2x_1+x_2=x_1+(x_1+x_2)=x_1+2>0$，

即$x_1>-2$；

∵$a<0$，抛物线对称轴为直线$x=1$，且$x_1<x_2$，

∴当$x=-2$时，$y=a\times(-2)^2-2a\times(-2)+2<0$，

解得：$a<-\frac{1}{4}$;

综上，$a<-\frac{1}{4}$或$a>2$.

27．如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，BD 是对角线，将线段 AB 绕点 A 逆时针旋转α（$0°<\alpha<90°$）得到线段 AE，点 E 关于直线 BD 的对称点是点 F，射线 BF 交线段 AD 于点 G，连接 BE，GE.

（1）当α=30°时，

①依题意补全图 1；

②求$\angle FBA$的度数；

（2）直接写出$\angle BEG$的大小，并证明。

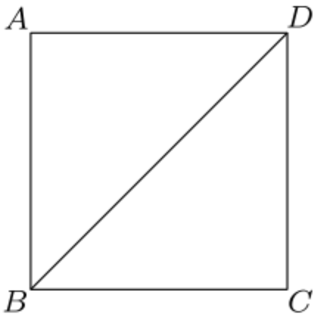
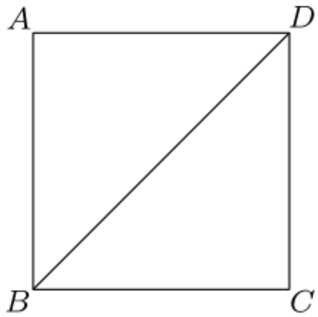


图 1

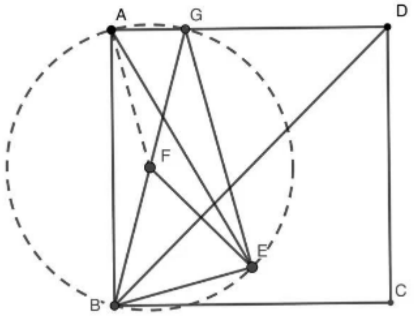


备用图

解答：

（1）

①如图



② ∵ 旋转

∴ $AE=AB$

∴ $\angle ABE=\angle AEB$

∴ $\angle ABE=\dfrac{180°-\angle BAE}{2}=\dfrac{180°-30°}{2}=75°$

∵ BD 为正方形 $ABCD$ 的对角线，

∴ $\angle ABC=90°$，

$\angle ABD=\angle CBD=\dfrac{\angle ABC}{2}=45°$

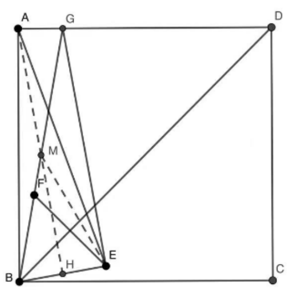
∵ E、F 关于 BD 对称

∴ $\angle FBD=\angle EBD$

∴ $\angle ABD-\angle FBA=\angle CBD-\angle EBD$

∴ $\angle FBA=\angle EBC=\angle ABC-\angle ABE=90°-75°=15°$

(2) $\angle BEG=90°$



证明：作$\angle BAE$ 的角平分线分别交 BG、BE 于点 M、H,

则 $\angle BAM=\angle EAM=\dfrac{\angle BAE}{2}=\dfrac{\alpha}{2}$.

∵ $AB=AE$,

∴ $AH\perp BE,BH=BE$,

$\angle ABE=\angle AEB=\dfrac{180°-\angle BAE}{2}=90°-\dfrac{\alpha}{2}$,

∴ $MB=ME$.

∵ E、F 关于 BD 对称,

∴ $\angle FBD=\angle EBD$.

∴ $\angle ABD-\angle FBA=\angle CBD-\angle EBD$.

∴ $\angle FBA=\angle EBC=\angle ABC-\angle ABE=90°-\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha}{2}$.

∴ $\angle MAB=\angle MBA$.

∴ $MA=MB$.

∵ $\angle MAG=90°-\angle BAM, \angle AGM=90°-\angle MBA$,

∴ $MA=MG$.

∴ $MA=MB=ME=MG$.

∴ A、B、E、G 在以 M 为圆心，AM 为半径的圆上.

∴ $\angle BEG=180°-\angle BAD=90°$.

28. A,B是圆上的两个点，点P在⊙C 的内部．若$\angle APB$为直角，则称$\angle APB$为AB关于⊙C 的内直角，特别地，当圆心C在$\angle APB$边（含顶点）上时，称$\angle APB$为AB关于⊙C 的最佳内直角．如图1，$\angle AMB$是AB关于⊙C 的内直角，$\angle ANB$是AB关于⊙C 的最佳内直角．在平面直角坐标系xOy中.

（1）如图2，⊙O 的半径为5，$A(0,-5), B(4,3)$是⊙O 上两点.

①已知$P_1(1,0)$，$P_2(-2，1)$，$P_3(0，3)$，在$\angle AP_1B, \angle AP_2B, \angle AP_3B$中，是$AB$关于⊙$O$ 的内直角的是______；

②若在直线$y=2x+b$上存在一点P，使得$\angle APB$是AB关于⊙O 的内直角，求b的取值范围.

（2）点E是以$T(t,0)$圆心，4为半径的圆上一个动点，⊙T 与x轴交于点D（点D在点T的右边）．现有点$M(1,0), N(0,n)$，对于线段MN上每一点H，都存在点T，使$\angle DHE$是DE关于⊙T 的最佳内直角，请直接写出n的最大值，以及n取得最大值时t的取值范围.

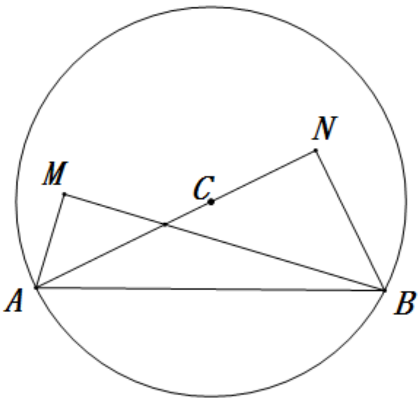


图1

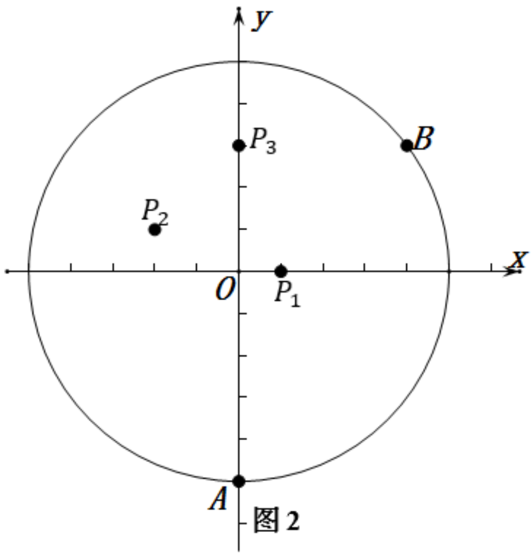
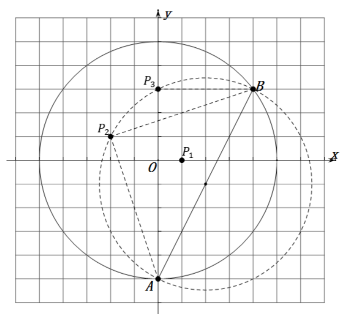


图2

【答案】(22年广渠门中学模拟题)

（1）①$\angle AP_2B, \angle AP_3B$，②$-5<b\leq 5$；（2）2，$-\sqrt{5}-1\leq t<5$.

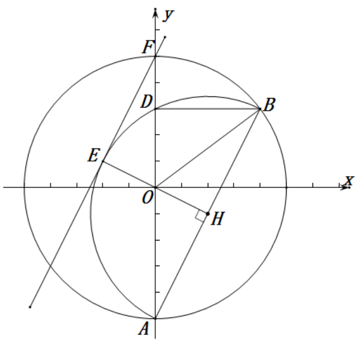
解：（1）①如图1，点P_2, P_3在以AB为直径的圆上，所以$\angle AP_2B, \angle AP_3B$是$AB$关于$\odot O$的内直角。



②$\because \angle APB$是AB关于$\odot O$的内直角，

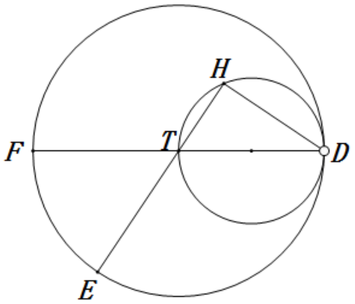
$\therefore \angle APB=90°$，且点$P$在$\odot O$的内部，

$\therefore$满足条件的点P形成的图形为如图中的半圆H（点A, B均不能取到），

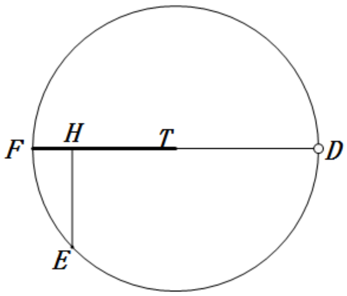


过点B作$BD\perp y$轴于点D，

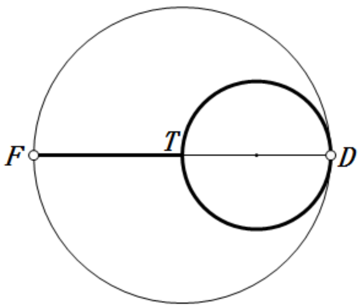
∵$A(0,-5),B(4,3)$，
∴$BD=4,AD=8$，
并可求出直线AB的解析式为$y=2x-5$，
∴当直线$y=2x+b$与直径AB重合时，$b=-5$，
$EF//AB$,直线AB的解析式为$y=2x-5$，
∴直线EF的解析式为$y=2x+5$，此时$b=5$，
∴b的取值范围是$-5<b\leq 5$.
（2）第一步：分析最佳内直角满足的条件，确定H的轨迹
显然，最佳内直角为直角，而且直角的一条边经过圆心T，因此，不难得出以TD为直角的圆上的点(不包括点D）均满足条件。



另外，如果点H在圆T的水平方向的半径上，也满足条件



综上，我们得出满足条件的点H的轨迹，需要注意，最佳内直角的顶点在圆T的内部，因此，圆T上的两个点D、F均是空心点。



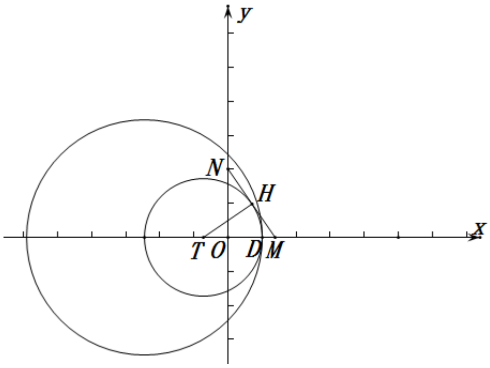
第二步，分析线段MN的端点N的位置
既然MN上的每一点都可以成为最佳内直角的直角顶点，那么MN一定与第一步得出的点的轨迹有交点，显然，当点N经过以TD为直径的圆的最高点时，n

取最大值，因此TD，所以，$n=2$，即n的最大值为2.

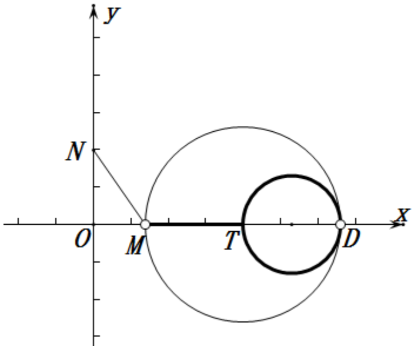
第三步，求圆心T的取值范围

这里需要再次理解题意：当$n=2$，且当点H"遍历"线段MN上的每一点时，对应的圆心的取值范围是什么？此时，问题回归到传统的动态问题分析上来，借助动态问题的分析原则分析如下：

当圆从左到右运动过程中，第一个临界值出现在点H的轨迹与线段MN相切时。如图所示，不难求出$t=-\sqrt{5}-1$



当圆继续向右运动，如图所示，当点H点轨迹经过点M时，此时为第二个临界位置，此时，很容易得出$t=5$



综上可得，t的取值范围是$-\sqrt{5}-1\le t<5$.