

Livrable 2 : Projet FAST & FURIOUS

Niels TOULOUSE

Mathice LEONIE

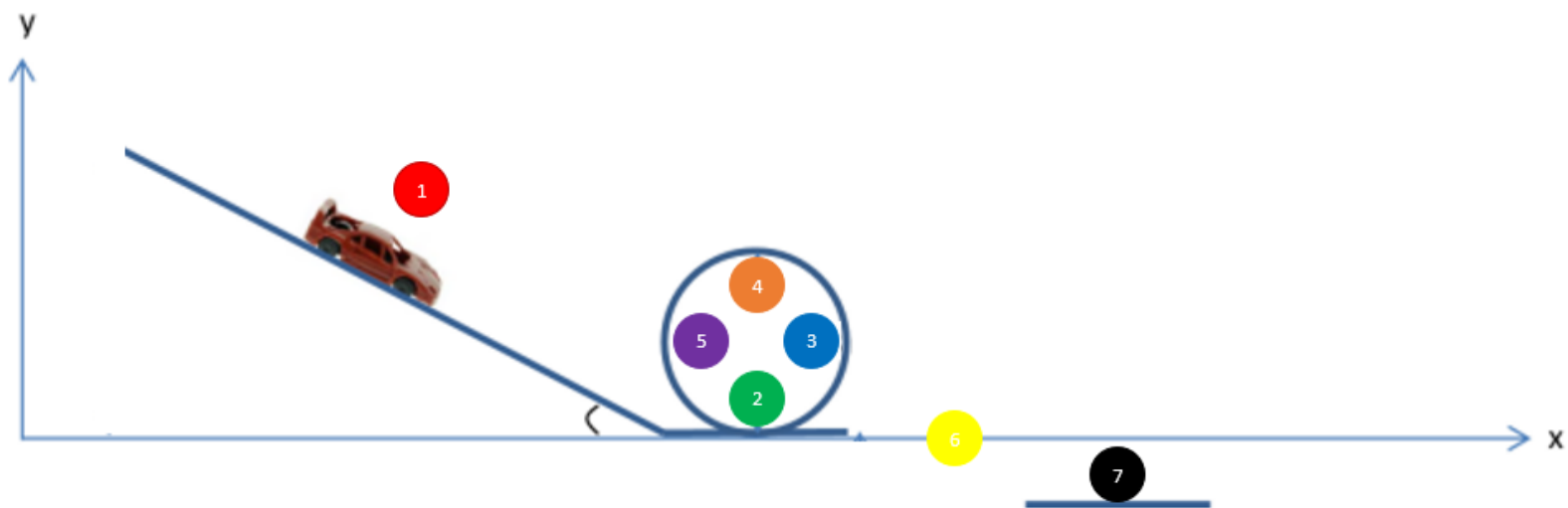
Matthis BHERAT

Mathis ANTOINE

CPI A1

Sommaire :

- Schéma global
- Etude des forces de la pente
- Etude des forces du looping
- Etude des forces du ravin



Nous étudierons les forces à
trois endroits différents dans
le référentiel Terrestre:

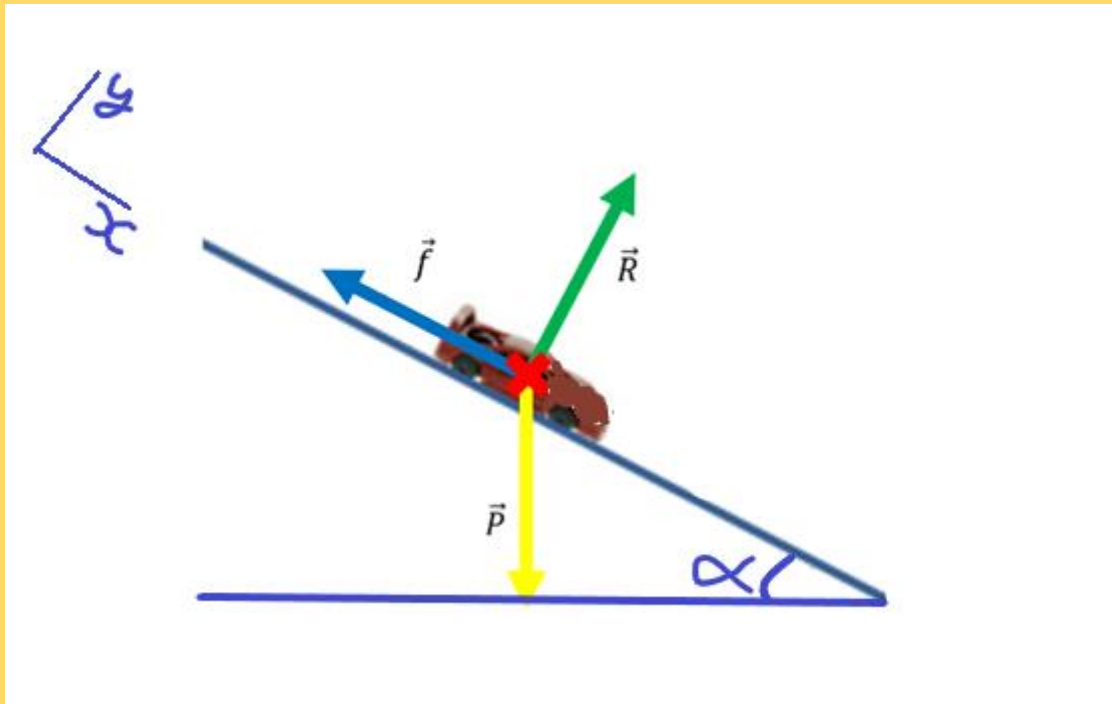
- 1: la pente
- 2-3-4-5 : le looping
- 6: le ravin



LA PENTE

Etude des forces sur la pente

Pour la pente, il y a trois forces qui s'exercent sur la voiture : son poids (\vec{P}), la réaction du support (\vec{R}) et les forces de frottements du sol (\vec{f}). Nous négligerons les frottements de l'air car nous les considérons négligeable.



$$\vec{P} \begin{pmatrix} mg \sin(\alpha) \\ -mg \cos(\alpha) \end{pmatrix} \vec{R} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \vec{f} \begin{pmatrix} -\mu R \\ 0 \end{pmatrix} \vec{a} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sans frottement:

$$\text{PFD: } \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Sur l'axe x:

$$mg \sin(\alpha) = ma$$

$$\Leftrightarrow a = g \sin(\alpha)$$

Avec frottement:

$$\text{PFD: } \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{R} + \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Sur l'axe x:

$$mg \sin(\alpha) - \mu R = ma$$

$$\Leftrightarrow a = g \sin(\alpha) - \frac{\mu R}{m}$$

Sur l'axe y:

$$R - mg \cos(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow R = mg \cos(\alpha)$$

Donc:

$$a = g \sin(\alpha) - \mu g \cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow a = g(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha))$$

$$\begin{cases} a_x(t) = a \\ v_x(t) = at + v_0 = at \\ x(t) = \frac{a}{2}t^2 + x_0 = \frac{a}{2}t^2 \end{cases}$$

Équation du mouvement

Sans frottement:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{g \sin(\alpha)}{2} t^2 \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

Avec :

- ❖ g la constante gravitationnelle de la Terre
- ❖ α l'angle de la pente par rapport à la surface terrestre

Avec frottement:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{g(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha))}{2} t^2 \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

Avec:

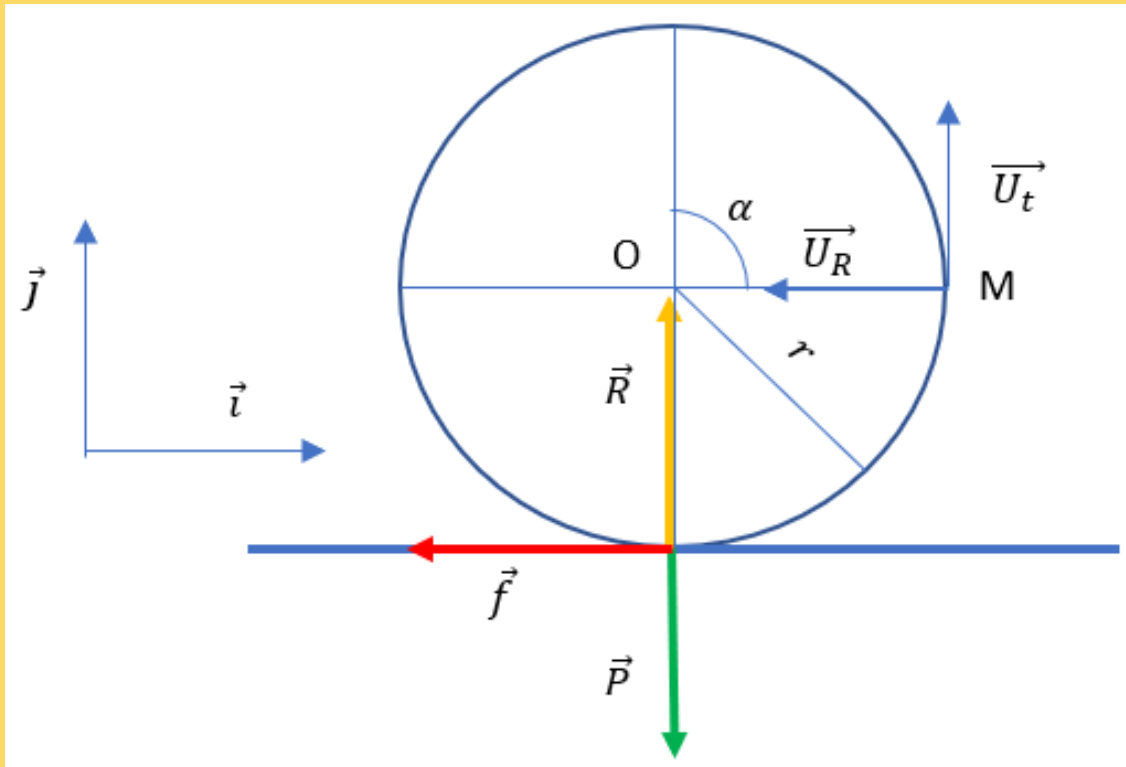
- ❖ g la constante gravitationnelle de la Terre
- ❖ α l'angle de la pente par rapport à la surface terrestre
- ❖ μ le coefficient de friction



LE LOOPING

Etude des forces sur le looping

Pour le looping, il y a 3 forces qui s'exercent sur la voiture : son poids (\vec{P}), la réaction du support (\vec{R}) et les forces de frottements de la surface (\vec{f}). Nous négligerons encore une fois les frottements de l'air.



Tout d'abord nous réalisons un changement de repère :

$$\begin{aligned}\vec{U}_r &= -\cos(\alpha) \vec{i} - \sin(\alpha) \vec{j} \\ \vec{U}_t &= \sin(\alpha) \vec{i} - \cos(\alpha) \vec{j}\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= r \vec{U}_r \\ \vec{v} &= r \frac{d\vec{U}_r}{dt} = r \dot{\alpha} \vec{U}_t \\ \vec{a} &= r \frac{d\vec{U}_t}{dt} = r(\ddot{\alpha} \vec{U}_t - \dot{\alpha}^2 \vec{U}_r)\end{aligned}$$

Sur $(O; \vec{U}_r, \vec{U}_t)$:

$$\vec{a} \begin{pmatrix} -r\dot{\alpha}^2 \\ r\ddot{\alpha} \end{pmatrix} \quad \vec{R} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{f} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu R \end{pmatrix} \quad \vec{P} \begin{pmatrix} -mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Équation du mouvement

Sans frottement:

$$\text{PFD: } \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\text{Sur } \vec{U}_r: R - mgsin\alpha = -mr\dot{\alpha}^2$$

$$\text{Sur } \vec{U}_t: -mgcos\alpha = mr\ddot{\alpha}$$

Avec frottement:

$$\text{PFD: } \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

$$\text{Sur } \vec{U}_r: R - mgsin\alpha = -mr\dot{\alpha}^2$$

$$\text{Sur } \vec{U}_t: -\mu R - mgcos\alpha = mr\ddot{\alpha}$$

Pour chaque cas nous trouvons donc deux équations différentielles. Une fois résolu nous avons juste à remplacer dans le système d'équation suivante:

$$\begin{cases} x(t) = -rcos(\alpha) \\ y(t) = -rsin(\alpha) \end{cases}$$

La solution est dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Avec:

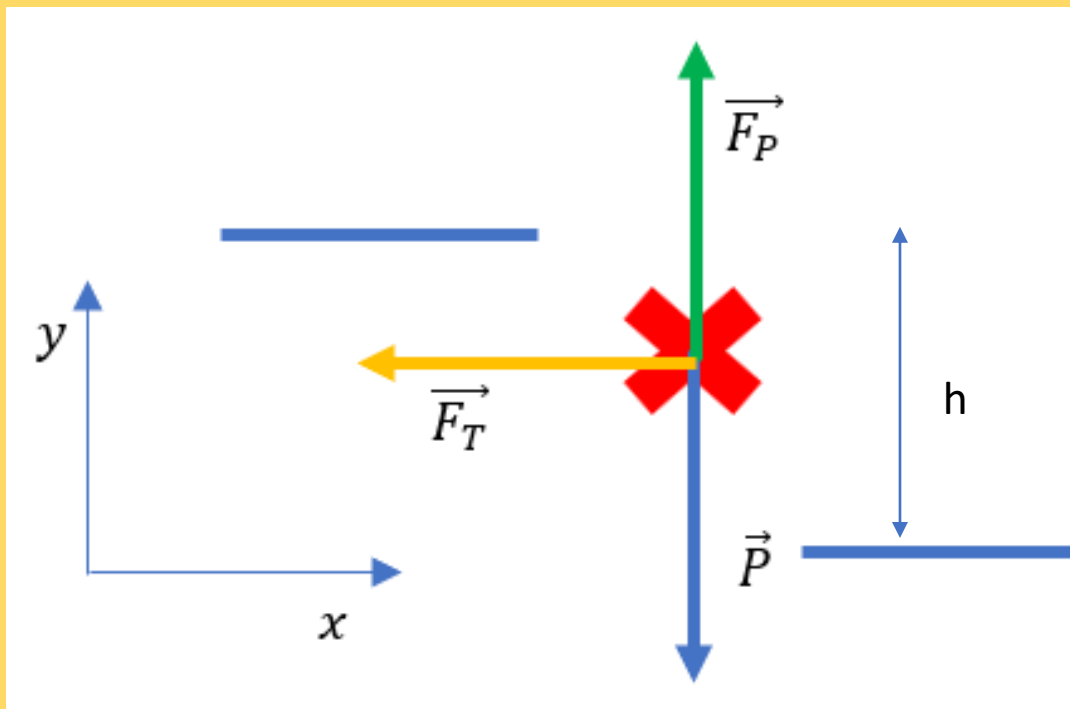
- ❖ r le rayon du looping
- ❖ α l'angle de la voiture par rapport à l'origine du repère, en fonction du temps
- ❖ m la masse de la voiture
- ❖ g la constante gravitationnelle Terrestre
- ❖ μ le coefficient de frottement
- ❖ R la résistance du support



LE RAVIN

Etude des forces sur le ravin

Pour le ravin, il y a trois forces qui s'exercent sur la voiture : son poids (\vec{P}), la portance (\vec{F}_P) et la trainée (\vec{F}_T). Nous prenons en compte les frottements de l'air (portance et trainée) car ce sont les principales qui agissent sur la voiture.



$$\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \vec{F}_T \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} \vec{F}_P \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} \vec{a} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Sans frottement:

PFD: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$
 $\Leftrightarrow \vec{P} = m\vec{a}$

Sur l'axe x:

$$0 = ma_x$$
$$\Leftrightarrow a_x = 0$$

Sur l'axe y:

$$ma_y = -mg$$
$$a_y = -g$$

Avec frottement:

PFD: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$
 $\Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F}_T + \vec{F}_P = m\vec{a}$

Sur l'axe x:

$$T = ma_x$$
$$\Leftrightarrow a_x = \frac{T}{m}$$

Sur l'axe y:

$$P - mg = ma_y$$
$$\Leftrightarrow a_y = \frac{P}{m} - g$$

Etude des forces sur le ravin

Sans frottement:

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{g}{2} t^2 + h \end{pmatrix}$$

Avec frottement:

$$\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{T}{m} t + v_0 \\ \frac{P}{m} t - gt \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \frac{T}{2m} t^2 + v_0 t \\ \frac{t^2}{2} \left(\frac{P}{m} - g \right) + h \end{pmatrix}$$

Équation du mouvement

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{qSC_x}{2m} t^2 + v_0 t \\ y(t) = \frac{t^2}{2} \left(\frac{qSC_z}{m} - g \right) + h \end{cases}$$

Avec:

- ❖ v_0 la vitesse initiale de la voiture
- ❖ g la constante gravitationnelle terrestre
- ❖ h la hauteur du ravin

Avec:

- ❖ v_0 la vitesse initiale de la voiture
- ❖ g la constante gravitationnelle terrestre
- ❖ h la hauteur du ravin
- ❖ m la masse de la voiture
- ❖ q la pression dynamique
- ❖ S la surface de référence
- ❖ C_z le coefficient de portance
- ❖ C_x le coefficient de traînée