Resumen del glorioso Munkres + apunte de redes

fabri quién va a ser

ya no es invierno, un calor na bronk

Capítulo 1 - Teoría de Conjuntos y Lógica

9 - Conjuntos Infinitos y el Axioma de Elección (Opcional)

Nota 1. Un conjunto A es infinito si tiene un subconjunto infinito-numerable o si existe una biyección entre A y un subconjunto propio de sí mismo. Cualquiera de estas dos propiedades sirven para caracterizar conjuntos infinitos.

Teorema 1. Sea A un conjunto. Son equivalentes:

- (1) Existe una función inyectiva $f : \mathbb{Z}_+ \to A$.
- (2) Existe una biyección de A con un subconjunto propio de sí mismo.
- (3) A es infinito.

Nota 2. Lo anterior no tiene con las herramientas actuales demostración. No es posible con los siguientes elementos, demostrar este teorema:

- (1) Definir un conjunto listando sus elementos, o tomar un conjunto dado A y especificar un subconjunto B dando una propiedad que los elementos de B tienen que verificar.
- (2) Tomar uniones o intersecciones de los elementos de una colección dada de conjuntos, o tomar la diferencia de dos conjuntos.
- (3) Tomar el conjunto de todos los subconjuntos de uno dado.
- (4) Tomar productos cartesianos de conjuntos.

A esta lista, le agregamos el siguiente axioma.

Definición 1 (Axioma de Elección)**.** Dada una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto C formado exactamente por un elemento de cada elemento de $\mathcal{A}$, esto es, un conjunto C tal que C está contenido en la unión de los elementos de $\mathcal{A}$, y que para cada $A \in \mathcal{A}$, el conjunto $C \cap A$ contiene un único elemento.

Nota 3. El conjunto C puede verse como el que se ha obtenido eligiendo un solo elemento de cada uno de los conjuntos de $\mathcal{A}$.

Lema 1 (Existencia de una función de elección)**.** Dada una familia $\mathcal{B}$ de conjuntos no vacíos (no necesariamente disjuntos), existe una función

$$c : \mathcal{B} \to \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

tal que $c(B)$ es un elemento de B, para cada $B \in \mathcal{B}$.
La función c se denomina función de elección para la familia $\mathcal{B}$.

Nota 4. La diferencia entre este lema y el axioma de elección radica en que en este lema no se requiere que los conjuntos de la familia $\mathcal{B}$ sean disjuntos. Por ejemplo, se puede permitir que $\mathcal{B}$ sea la familia de todos los subconjutnos no vacíos de un conjunto dado.

10 - Conjuntos Bien Ordenados

Definición 2. Un conjunto A con una relación de orden $<$ se dice que está bien ordenado si todo subconjunto no vacío de A tiene un mínimo.

Teorema 2. Todo conjunto no vacío, finito y ordenado tiene el tipo de orden de una sección $\{1, \ldots, n\}$ de $\mathbb{Z}_+$, y por tanto está bien ordenado.

Teorema 3 (Teorema del Buen Orden)**.** Si A es un conjunto, existe una relación de orden sobre A que es un buen orden.

Corolario 1. Existe un conjunto bien ordenado no numerable.

Definición 3. Sea X un conjunto bien ordenado. Dado $\alpha \in X$, sea S_α el conjunto

$$S_\alpha = \{x : x \in X \text{ y } x < a\}.$$

Se denomina sección de X por α.

Lema 2. Existe un conjunto bien ordenado A teniendo un máximo Ω, tal que la sección S_Ω de A por Ω es no numerable, pero tal que cualquier otra sección de A es numerable.

Teorema 4. Si A es un subconjunto numerable de S_Ω, entonces A tiene una cota superior en S_Ω.

Definición 4. Dado un conjunto A, una relación $\prec$ sobre A se denomina orden parcial estricto sobre A si tiene las siguientes dos propiedades:

- (1) (No-reflexividad) la relación $a \prec a$ nunca se cumple.
- (2) (Transitividad) si $a \prec b$ y $b \prec c$, entonces $a \prec c$.

Teorema 5 (El principio del máximo)**.** Sean A un conjunto y $\prec$ un orden parcial estricto sobre A. Entonces existe un subconjunto simplemente ordenado maximal B de A.

Definición 5. Sea A un conjunto y $\prec$ un orden parcial estricto sobre A. Si B es un subconjunto de A, una cota superior sobre B es un elemento c de A tal que para todo b de B o bien $b = c$,o bien $b \prec c$. Un elemento maximal de A es un elemento m de A tal que ningún elemento $a \in A$ verifica la relación $m \prec a$.

Lema 3 (Lema de Zorn)**.** Sea A un conjunto estrictamente parcialmente ordenado. Si todo subconjunto ordenado de A tiene una cota superior en A, entonces A tiene un elemento maximal.

Definición 6. Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- (1) $\varnothing$ y X están en τ.
- (2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ.
- (3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama espacio topológico.

Nota 5. El par ordenado (X, τ) es un espacio topológico.

Definición 7. Si X es un espacio topológico con una topología τ, diremos que un subconjunto U de X es un conjunto abierto de X si U pertenece a la colección τ.

Definición 8. Supongamos que τ y τ' son dos topologías sobre un conjunto dado X. Si $\tau' \supset \tau$, diremos que τ' es más fina que τ. Ídem con estrictamente más fina, más gruesa, estrictamente más gruesa. Diremos que τ es comparable con τ' si $\tau' \supset \tau$ ó $\tau \supset \tau'$.

Capítulo 2 - Espacios Topológicos y Funciones Continuas

13 - Base de una Topología

Definición 9. Si X es un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados elementos básicos) tales que:

- (1 - Cubrimiento) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x.
- (2 - Solapamiento) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ satisface estas dos condiciones, se define la topología τ generada por $\mathcal{B}$ como sigue: un subconjunto U de X se dice que es abierto en X, si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Nota 6. Cada elemento básico es así mismo un elemento de τ.

Lema 4. Sean X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base para una topología τ sobre X. Entonces τ es igual a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathcal{B}$.

Lema 5. Sea X un espacio topológico. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una colección de conjuntos abiertos de X, tal que, para cada conjunto abierto U de X y cada $x \in U$, existe un elemento C de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C \subset U$. Entonces $\mathcal{C}$ es una base para la topología de X.

Lema 6. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías τ y τ', respectivamente sobre X. Entonces son equivalentes:

- (1) τ' es más fina que τ.
- (2) Para cada $x \in X$ y cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$ que contiene a x, existe un elemento básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$.

Definición 10. Si $\mathcal{B}$ es la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real,

$$(a,b) = \{x : a < x < b\},$$

la topología generada por $\mathcal{B}$ se denomina topología usual sobre la recta real. Siempre que estudiemos $\mathbb{R}$ supondremos que viene con esta topología, a menos que digamos lo contrario. Si $\mathcal{B}'$ es la colección de todos los intervalos semiabiertos del tipo

$$[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$$

donde $a < b$, la topología generada por $\mathcal{B}'$ se llama topología del límite inferior sobre $\mathbb{R}$ (denotamos $\mathbb{R}_\ell$. Finalmente, sea K el conjunto de todos los números de la forma $\frac{1}{n}$, para $n \in N$, y sea $\mathcal{B}''$ la colección de todos los intervalos (a, b), junto con todos los conjuntos de la forma $(a, b) - K$. La topología generada por $\mathcal{B}''$ se llamará $K-$ *topologa* sobre $\mathbb{R}$. Cuando $\mathbb{R}$ esté dotada de esta topología, lo denotaremos como $\mathbb{R}_K$.

Lema 7. Las topologías de $\mathbb{R}_\ell$ y $\mathbb{R}_K$ son estrictamente más finas que la topología usual sobre $\mathbb{R}$, pero no son comparables entre sí.

Definición 11. Una subbase $\mathcal{S}$ para una topología sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se define como la colección de τ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

14 - La Topología del Orden

Definición 12. Sea X un conjunto, con más de un elemento, con una relación de orden simple. Sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conjuntos de los siguientes tipos:

- (1) Todos los intervalos abiertos (a, b) en X.
- (2) Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, donde a_0 es el mínimo (si lo hay) de X.
- (3) Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$, donde b_0 es el máximo (si lo hay) de X.

La colección $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, que se llama topología del orden.

Definición 13. Si X es un conjunto ordenado y a es un elemento de X, existen cuatro subconjuntos de X que se llaman rayos determinados por a. Son los siguientes:

- $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$,
- $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$,
- $[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}$,
- $(-\infty, a] = \{x : x \leq a\}$.

Los conjuyntos de los dos primeros tipos se denominan rayos abiertos ylos conjuntos de los dos últimos tipos se denominan rayos cerrados.

15 - La Topología Producto sobre $X \times Y$

Definición 14. Sean X e Y espacios topológicos. La topología producto sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V un subconjunto abierto de Y.

Teorema 6. Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X y $\mathcal{C}$ es una base para la topología de Y, entonces la colección

$$\mathcal{D} = \{B \times C : B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}$$

es una base para la topología sobre $X \times Y$.

Definición 15. Sea $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por

$$\pi_1(x, y) = x$$

y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida por

$$\pi_2(x, y) = y.$$

Las aplicaciones π_1 y π_2 se denominan proyecciones de $X \times Y$ sobre su primer y segundo factor, respectivamente.

Teorema 7. La colección

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \text{ es abierto en } Y\}$$

es una subbase para la topología producto sobre $X \times Y$.

16 - La Topología de Subespacio

Definición 16. Sea X un espacio topológico con topología τ. Si Y es un subconjunto de X, la colección

$$\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

es una topología sobre Y, denominada topología de subespacio o topología relativa. Con esta topología, Y se denomina subespacio de X; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Lema 8. Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X, entonces la colección

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de subespacio sobre Y.

Lema 9. Sea Y un subespacio de X. Si U es abierto en Y e Y es abierto en X, entonces U es abierto en X.

Teorema 8. Si A es un subespacio de X y B es un subespacio de Y, entonces la topología producto sobre $A \times B$ coincide con la topología que $A \times B$ hereda como subespacio de $X \times Y$.

Definición 17. Dado un conjunto ordenado X, diremos que un subconjunto Y de X es convexo en X si para cada par de puntos $a < b$ de Y, el intervalo completo (a, b) de puntos de X pertenece a Y.

Teorema 9. Sean X un conjunto ordenado enla topología del orden e Y un subconjunto de X que es convexo en X. Entonces la topología del orden sobre Y es la misma que la topología que Y hereda como subespacio de X.

17 - Conjuntos Cerrados y Puntos Límite

Definición 18. Un subconjunto A de un espacio topológico se dice que es cerrado si el conjunto $X - A$ es abierto.

Teorema 10. Sea X un espacio topológico. Se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) $\varnothing$ y X son cerrados.
- (2) Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.
- (3) Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.

Teorema 11. Sea Y un subespacio de X. Entonces un conjunto A es cerrado en Y si y solo si, es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y.

Teorema 12. Sea Y un subespacio de X. Si A es cerrado en Y e Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X.

Definición 19. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, el interior de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A, y la clausura de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. $\mathring{A}$ es abierto y $\overline{A}$ es cerrado, más aún,

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

Si A es abierto, $A = \mathring{A}$, mientras que, si A es cerrado, $A = \overline{A}$.

Teorema 13. Sean Y un subespacio de X y A un subconjunto de Y. Denotemos por $\overline{A}$ la clausura de A en X. Entonces la clausura de A en Y es $\overline{A} \cap Y$.

Teorema 14. Sea A un subconjunto del espacio topológico X.

- (a) Entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si, cada conjunto abierto U que contiene a x interseca a A.

- (b) Suponiendo que la topología de X está dada por una base, entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si, cada elemento básico B que contiene a x interseca a A.

Definición 20. U es un entorno de x si U es un conjunto abierto que contiene a x.

Definición 21. Si A es un subconjunto del e.t. X y si x es un punto de X, diremos que x es punto límite (o punto de acumulación) de A si cada entorno de x interseca a A en algún punto distinto del propio x.

Teorema 15. Sean A un subconjunto del e.t. X y A' el conjunto de todos los puntos límite de A. Entonces $\overline{A} = A \cup A'$.

Corolario 2. Un subconjunto de un e.t. es cerrado si y solo sí contiene a todos sus puntos límite.

Definición 22. En un espacio topológico arbitrario, se dice que una sucesión $x_1, x_2, \ldots$ de puntos del espacio X converge al punto x de X siempre que, para cada entorno U de x, exista un entero positivo N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$.

Definición 23. Un espacio topológico X se denomina espacio de Hausdorff si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X, existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que son disjuntos.

Teorema 16. Cada conjunto con un número finito de puntos en un espacio de Hausdorff X es cerrado.

Definición 24. La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados se denomina axioma T_1.

Teorema 17. Sean X un espacio satisfaciendo el axioma T_1 y A un subconjunto de X. Entonces el punto x es un punto límite de A si y solo sí, cada entorno de x contiene infinitos puntos de A.

Teorema 18. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X.

Teorema 19. Cada conjunto simplemente ordenado es un espacio de Hausdorff en la topología del orden. El producto de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff. Un subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

18 - Funciones Continuas

Definición 25. Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

Nota 7. f es continua relativa a las topologías específicas sobre X e Y.

Teorema 20. Sean X e Y espacios topológicos; seas $f : X \to Y$. Entonces son equivalentes:

- (1) f es continua.
- (2) Para cada subconjunto A de X, se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
- (3) Para cada conjunto cerrado B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.
- (4) Para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.

Si se cumple la condición (4) para el punto x de X diremos que f es continua en el punto x.

Definición 26. Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \to Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa $f^{-1} : Y \to X$ son ambas continuas, entonces f se dice que es un homeomorfismo.

Nota 8. La condición de que f^{-1} sea continua significa que, para cada conjunto abierto U de X, la imagen inversa de U mediante la aplicación f^{-1} es la misma que la imagen de U mediante la aplicación f. Por eso, otro modo de definir un homeomorfismo es decir que una correspondencia biyectiva $f : X \to Y$ tal que $f(U)$ es abierto si y solo si U es abierto.

Nota 9. Cualquier propiedad de X que se exprese completamente en términos de la topología de X nos da, vía la correspondencia f, la propiedad correspondiente para el espacio Y. Tal propiedad de X se denomina propiedad topológica de X.

Definición 27. Supongamos que $f : X \to Y$ es una aplicación continua inyectiva, donde X e Y son espacios topológicos. Sea Z el conjunto imagen f(X), considerado como un subespacio de Y; entonces, la función $f' : X \to Z$ obtenida al restringir el rango de f, es biyectiva. Si ocurre que f' es un homeomorfismo de X con Z, decimos que la aplicación $f : X \to Y$ es un embebimiento topológico, o simplemente un embebimiento, de X en Y.

Teorema 21 (Reglas para construir funciones continuas)**.** Sean X, Y y Z espacios topológicos.

- (a) (Función constante) si $f : X \to Y$ envía todo punto de X a un mismo punto y_0 de Y, entonces f es continua.
- (b) (Inclusión) si A es un subespacio de X, la función inclusión $j : A \to X$ es continua.
- (c) (Composición) si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son continuas, entonces la aplicación $g \circ f : X \to Z$ es continua.

- (d) (Restricción del dominio) si $f : X \to Y$ es continua y A es un subespacio de X, entonces la función restringida $f|_A : A \to Y$ es continua.

- (e) (Restricción o extensión del recorrido) sea $f : X \to Y$ continua. Si Z es un subespacio de Y que contiene al conjunto imagen $f(X)$, entonces la función $g : X \to Z$, obtenida al restringir el rango de f, es continua. Si Z es un espacio con Y como subespacio, entonces la función $h : X \to Z$, obtenida al extender el recorrido de f, es continua.

- (f) (Formulación local de continuidad) la aplicación $f : X \to Y$ es continua si X se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_α tales que $f|_{U_\alpha}$ es continua para cada α.

Teorema 22 (Lema del pegamiento)**.** Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h : X \to Y$ definida mediante $h(x) = f(x)$ si $x \in A$, y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.

Teorema 23 (Aplicaciones en productos)**.** Sea $f : A \to X \times Y$ dada por la ecuación

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Entonces f es continua si y solo si, las funciones

$$f_1 : A \to X \qquad \text{y} \qquad f_2 : A \to Y$$

son continuas.
Las aplicaciones f_1 y f_2 se llaman funciones coordenadas de f.

19 - La Topología Producto

Definición 28. Al tener los productos cartesianos

$$X_1 \times \cdots \times X_n \qquad \text{y} \qquad X_1 \times X_2 \times \cdots$$

donde cada X_i es un espacio topológico. Hay dos formas de proceder.

- Uno es tomar como base todos los conjuntos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_n$ en el primer caso, y de la forma $U_1 \times U_2 \cdots$ en el segundo caso, donde U_i es un conjunto abierto de X_i para cada i. Este procedimiento define la topología por cajas.

- Otra forma de proceder es generalizar la formulación de subbase de la definición dada anteriormente. En este caso, tomamos como subbase todos los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde i es cualquier índice y U_i es un conjunto abierto de X_i. Esta topología se denomina topología producto.

Definición 29. Sea J un conjunto de índices. Dado un conjunto cualquiera X, definimos una J-upla de elementos de X como una función $x : J \to X$. Si α es un elemento de J, a menudo denotamos el valor de x en α mediante x_α en lugar de $x(\alpha)$; lo llamaremos la α-ésima coordenada de x. Y a menudo denotaremos a la función x mediante el símbolo

$$(x_\alpha)_{\alpha\in J},$$

que es lo más cercano a una "notación upla"para un conjunto arbitrario de índices J. Denotamos al conjunto de todas las J-uplas de elementos de X por X^J.

Definición 30. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de conjuntos indexada y sea $X = \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$. El producto cartesiano de esta familia indexada, denotado por

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha,$$

se define como el conjunto de todas las J-uplas $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ de elementos de X tales que $x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Esto es, es el conjunto de todas las funciones

$$x : J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$$

tales que $x(\alpha) \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

Definición 31. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J} X_\alpha$ la colección de todos los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha\in J} U_\alpha,$$

donde U_α es abierto en X_α, para cada $\alpha \in J$. La topología generada por esta base de denomina topología por cajas.

Definición 32. Sea

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$$

la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada β-ésima,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in J}) = x_\beta;$$

se denomina aplicación proyección asociada con el índice β.

Definición 33. Denotemos por $\mathcal{S}_\beta$ a la colección

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}$$

y denotamos por $\mathcal{S}$ a la unión de esas colecciones,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in J} \mathcal{S}_\beta.$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina topología producto. En esta topología, $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ se denomina espacio producto.

Teorema 24 (Comparación de las topologías por cajas y producto)**.** La topología por cajas sobre $\prod X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α. La topología producto sobre $\prod X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α y U_α es igual a X_α excepto para un número finito de valores de α.

Nota 10. Para productos finitos, las dos topologías son precisamente la misma. La topología por cajas, en general, es más fina que la topología producto.

Nota 11. Siempre que consideremos el producto $\prod X_\alpha$ lo suponemos con la topología producto, a menos que específicamente establezcamos lo contrario.

Teorema 25. Supongamos que la topología sobre cada espacio X_α está dada por una base $\mathcal{B}_\alpha$. La colección de todos los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$$

donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para cada α, es una base para la topología por cajas sobre $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

Nota 12. La colección de todos los conjuntos de la misma forma, donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para un conjunto finito de índices α y $B_\alpha = X_\alpha$ para todos los índices restantes, servirá como base para la topología producto $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

Teorema 26. Sea A_α un subespacio de X_α, para cada $\alpha \in J$. Entonces $\prod A_\alpha$ es un subespacio de $\prod X_\alpha$ si en ambos productos está dada la topología por cajas, o si en ambos productos está dada la topología producto.

Teorema 27. Si cada espacio X_α es un espacio de Hausdorff, entonces $\prod X_\alpha$ es un espacio de Hausdorff en las topologías por cajas y producto.

Teorema 28. Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios y sea $A_\alpha \subset X_\alpha$, para cada α. Si $\prod X_\alpha$ está dotado de la topología por cajas o producto, entonces

$$\prod \overline{A}_\alpha = \overline{\prod A_\alpha}.$$

Teorema 29. Sea $f : A \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ dada por la ecuación

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha\in J}$$

donde $f_\alpha : A \to X_\alpha$ para cada α. Tomemos sobre $\prod X_\alpha$ la topología producto. Entonces la función f es continua si y solo sí cada función f_α es continua.

20 - Topología Métrica

Definición 34. Una distancia en un conjunto X es una función

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (1) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$; la igualdad se da si y solo si, $x = y$.
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.
- (3) (Desigualdad triangular) $d(x, y)+d(y, z) \geq d(x, z)$ para todos $x, y, z \in X$.

Definición 35. Si d es una distancia en el conjunto X, entonces la colección de todas las bolas $B_\delta(x, \varepsilon)$ de radio ε, para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, es una base para una topología sobre X, denominada topología métrica inducida por d.

Proposición 1. Un conjunto U es abierto en la topología métrica inducida por d si y solo sí para cada $y \in U$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_d(y, \delta) \subset U$.

Definición 36. Si X es un espacio topológico, se dice que X es metrizable si existe una distancia d en el conjunto X que induce la topología de X. Un espacio métrico es un espacio metrizable X junto a una distancia específica d que da la topología de X.

Definición 37. Sea X un espacio métrico con una distancia d. Un subconjunto A de X se dice que está acotado si existe algún número M tal que

$$d(a_1, a_2) \leq M$$

para todo par a_1, a_2 de puntos de A. Si A es un conjunto acotado y no vacío, el diámetro de A se define como el número

$$\text{diám } A = \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

Teorema 30. Sea X un espacio métrico con una distancia d. Se define $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}.$$

Entonces $\overline{d}$ es una distancia que induce la misma topología que d.
La distancia $\overline{d}$ se denomina distancia acotada correspondiente a d.

Definición 38. Dado $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se definen la norma de x mediante la ecuación

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

y la distancia euclída d sobre $\mathbb{R}^n$ por la ecuación

$$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Definimos la distancia del supremo ρ por la ecuación

$$\rho(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

Lema 10. Sean d y d' dos distancias sobre el conjunto X, y τ y τ' las topologías que inducen, respectivamente. Entonces τ' es más fina que τ si y solo si, para cada $x \in X$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon).$$

Teorema 31. Las topologías sobre $\mathbb{R}^n$ inducidas por la distancia euclídea d y la distancia del supremo ρ son la misma que la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$.

Definición 39. Dado un conjunto de índices J, y puntos dados $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e $y = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ de $\mathbb{R}^J$, definimos una distancia $\overline{\rho}$ sobre $\mathbb{R}^J$ por la ecuación

$$\overline{\rho}(x, y) = \sup\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\}$$

donde $\overline{d}$ es la distancia acotada sobre $\mathbb{R}$. $\overline{\rho}$ se denomina distancia uniforme sobre $\mathbb{R}^J$, y la topología que induce se denomina topología uniforme.

Teorema 32. La topología uniforme sobre $\mathbb{R}^J$ es más fina que la topología producto y más gruesa que la topología por cajas; estas tres topologías son todas distintas si J es infinito.

Teorema 33. Sea $\overline{d}(a, b) = \text{mín}\{|a - b|, 1\}$ la distancia acotada usual sobre $\mathbb{R}$. Si x e y son dos puntos de $\mathbb{R}^\omega$, definimos

$$D(x, y) = \sup\left\{\frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i}\right\}.$$

Entonces D es una distancia que induce la topología producto sobre $\mathbb{R}^\omega$.

21 - La Topología Métrica (continuación)

Teorema 34. Sea $f : X \to Y$ y sean X e Y metrizables con distancias d_X y d_Y, respectivamente. Entonces la continuidad de f es equivalente a exigir que dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Lema 11 (El lema de la sucesión)**.** Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Si existe una sucesión de puntos de A que converge a x, entonces $x \in \overline{A}$; el recíproco se cumple si X es metrizable.

Teorema 35. Sea $f : X \to Y$. Si la función f es continua, entonces para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco se cumple si X es metrizable.

Lema 12. Las operaciones de adición, sustracción y multiplicación son funciones continuas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y la operación cociente es una función continua de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ en $\mathbb{R}$.

Teorema 36. Si X es un espacio topológico, y si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces $f + g, f - g$ y fg son continuas. Si $g(x) \neq 0$ para todo x, entonces f/g es continua.

Definición 40. Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones del conjunto X al espacio métrico Y. Sea d la distancia para Y. Diremos que la sucesión (f_n) converge uniformemente a la función $f : X \to Y$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $n > N$ y todo $x \in X$.

Teorema 37 (El teorema del límite uniforme)**.** Sea $f_n : X \to Y$ una sucesión de funciones continuas del espacio topológico X al espacio métrico Y. Si (f_n) converge uniformemente a f, entonces f es continua.

22 - Topología Cociente

Definición 41. Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una aplicación cociente siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y, si y solo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

Definición 42. Un subconjunto C de X es saturado (respecto a la aplicación sobreyectiva $p : X \to Y$) si C contiene a cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$ al que interseca. Así C es saturado si es igual a la imagen inversa completa de un subconjunto Y.

Proposición 2. Decir que p es una aplicación cociente es equivalente a decir que p es continua y p asocia conjuntos abiertos saturados de X con conjuntos abiertos de Y (o conjuntos saturados cerrados de X con conjuntos cerrados de Y).

Definición 43. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice que es una aplicación abierta si para cada conjunto abieto U de X, el conjunto $f(U)$ es abierto en Y. Se dice que es una aplicación cerrada si para cada conjunto cerrado A de X, el conjunto $f(A)$ es cerrado en Y.

Proposición 3. Si $p : X \to Y$ es una aplicación continua sobreyectiva que es abierta o cerrada, entonces p es una aplicación cociente.

Nota 13. Existen aplicaciones cocientes que no son abiertas ni cerradas.

Definición 44. Si X es un espacio, A un conjunto y $p : X \to A$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe una topología τ sobre A relativa a la cual p es una aplicación cociente; se denomina topologíacociente inducida por p.

Definición 45. Sea X un espacio topológico y sea X^* una partición de X en subconjuntos disjuntos cuya unión es X. Sea $p : X \to X^*$ la aplicación sobreyectiva que lleva cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene. En la topología cociente inducida por p, el espacio X^* se denomina espacio cociente de X.

Nota 14. Dado X^*, hay una relación de equivalencia sobre X en la que los elementos de X^* son las clases de equivalencia. Se puede pensar en X^* como obtenido al ïdentificarçada par de puntos equivalentes. Por este motivo, el espacio cociente X^* se denomina a menudo espacio de identificación, o espacio de descomposición, del espacio X.

Nota 15. Podemos describir la topología de X^* de otro modo: un subconjunto U de x^* es una colección de clases de equivalencia, y el conjunto $p^{-1}(U)$ es justo la unión de las clases de equivalencia que pertenecen a U. Así, el conjunto abierto característico de X^* es una colección de clases de equivalencia cuya unión es un conjunto abierto de X.

Nota 16. Si $p : X \to Y$ es una aplicación cociente y A es un subespacio de X, entonces la aplicación obtenida al restringir $p, q : A \to p(A)$, no necesariamente es una aplicación cociente.

Teorema 38. Sean $p : X \to Y$ una aplicación cociente, A un subespacio de X que es saturado con respecto a p y $q : A \to p(A)$ la aplicación obtenida al restringir p.

- (1) Si A es abierto o cerrado en X, entonces q es una aplicación cociente.
- (2) Si p es una aplicación abierta o cerrada, entonces q es una aplicación cociente.

Proposición 4. La composición de dos aplicaciones cocientes es una aplicación cociente.

Nota 17. Los productos de aplicaciones cocientes no necesita ser una aplicación cociente.

Nota 18. Si X es de Hausdorff, no existe razón para que X^* sea de Hausdorff. Para T_1, basta que cada elemento de la partición X^* sea un subconjunto cerrado de X.

Teorema 39. Sea $p : X \to Y$ una aplicación cociente. Sea Z un espacio y sea $g : X \to Z$ una aplicación que es constante sobre cada conjunto $p^{-1}(\{y\})$, para $y \in Y$. Entonces g induce una aplicación $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$. La aplicación inducida f es continua si y solo si, g es continua; f es una aplicación cociente si y solo si, g es una aplicación cociente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, dotted, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Corolario 3. Sea $g : X \to Z$ una aplicación continua sobreyectiva. Sea X^* la siguiente colección de subconjuntos de X;

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) : z \in Z\}.$$

Dotemos a X^* de la topología cociente.

- La aplicación g induce una aplicación continua biyectiva $f : X^* \to Z$, que es un homeomorfismo si, y solosi, g es una aplicación cociente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^* \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

- Si Z es de Hausdorff, también lo es X^*.

Capítulo 3 - Conexión y Compacidad

23 - Espacios Conexos

Definición 46. Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X. El espacio X se dice que es conexo si no existe una separación de X.

Nota 19. La conexión es una propiedad topológica. Si X es un espacio conexo, también lo es cualquier espacio homeomorfo a X.

Definición 47 (Definición alternativa de conexión)**.** Un espacio X es conexo si y solo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.

Lema 13. Si Y es un subespacio de X, una separación de Y es un par A, B de conjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es Y de modo que ninguno de ellos contiene puntos límite del otro. El espacio Y es conexo si no existe una separación de Y.

Lema 14. Si los conjuntos C y D forman una separación de X, y además Y es un subespacio conexo de X, entonces Y está contenido bien en C, bien en D.

Teorema 40. La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

Teorema 41. Sea A un subespacio conexo de X. Si $A \subset C \subset \overline{A}$, entonces B es también conexo.

Teorema 42. La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.

Teorema 43. El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.

24 - Subespacios Conexos de la Recta Real

Definición 48. Un conjunto simplemente ordenado L con más de un elemento se dice que es un continuo lineal si se verifican las siguientes condiciones:

- (1) L tiene la propiedad del supremo.
- (2) Si $x < y$, entonces existe z tal que $x < z < y$.

Teorema 44. Si L es un continuo lineal con la topología del orden, entonces L es conexo, y también lo son los intervalos y los rayos de L.

Corolario 4. La recta real $\mathbb{R}$ es conexa y también lo son los intervalos y los rayos en $\mathbb{R}$.

Teorema 45 (Teorema del valor intermedio)**.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua, donde X es un espacio conexo e Y es un conjunto ordenado con la topología del orden. Si a y b son dos puntos de X y r es un punto de Y que se encuentra entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto c en X tal que $f(c) = r$.

Definición 49. Dados dos puntos x e y del espacio X, un camino en X que une x con y es una aplicación continua $f : [a, b] \to X$ de algún intervalo cerrado de la recta real en X, de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio X se dice que es conexo por caminos si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X.

Proposición 5. Todo espacio X que es conexo por caminos también es un espacio conexo.

Nota 20. El recíproco de la proposición anterior no vale.

25 - Componentes y Conexión Local

Definición 50. Dado X, se define la siguiente relación de equivalencia en X : $x \sim y$ si existe un subespacio conexo de X que contiene a ambos puntos. Las clases de equivalencia se denominan componentes (o çomponentes conexas") de X.

Teorema 46. Las componentes de X son subespacios disjuntos y conexos de X cuya unión es X de forma que cada subespacio conexo de X no trivial interseca solo a una de ellas.

Definición 51. Definimos otra relación de equivalencia en el espacio X dada por: $x \sim y$ si existe un camino en X uniendo x con y. Las clases de equivalencia se denominan componentes conexas por caminos de X.

Teorema 47. Las componentes conexas por caminos de X son subespacios disjuntos conexos por caminos de X cuya unión es X, tales que cada subespacio conexo por caminos de X no trivial interseca solo a una de ellas.

Definición 52. Un espacio X se dice que es localmente conexo en x si para cada entorno de U de x, existe un entorno conexo de V de x contenido en U. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente conexo. De manera análoga, se dice que un espacio X es localmente conexo por caminos en x si para cada entorno U de x, existe un entorno conexo por caminos V de x contenido en U. Si X es localmente conexo por caminos en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente conexo por caminos.

Teorema 48. Un espacio X es localmente conexo si y solo si para cada conjunto abierto U de X, cada componente de U es abierta en X.

Teorema 49. Si X es un espacio topológico, cada componente conexa por caminos de X está contenida en una componente de X. Si X es localmente conexo por caminos, entonces las componentes y las componentes conexas por caminos de X coinciden.

26 - Espacios Compactos

Definición 53. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que cubre X, o que es un cubrimiento de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Definición 54. Un espacio X se dice que es compacto si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X.

Lema 15. Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si y solo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre Y.

Teorema 50. Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Teorema 51. Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.

Lema 16. Si Y es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff y x_0 no está en Y, entonces existen abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y respectivamente.

Teorema 52. La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.

Teorema 53. Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.

Teorema 54. El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.

Lema 17 (El lema del tubo)**.** Consideremos el espacio producto $X \times Y$, donde Y es compacto. Si N es un conjunto abierto de $X \times Y$ conteniendo la rebanada $x_0 \times Y$ de $X \times Y$, entonces N contiene algún tubo $W \times Y$ sobre $x_0 \times Y$, donde W es un entorno de x_0 en X.

Definición 55. Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la propiedad de la intersección finita si cada subcolección finita

$$\{C_1, \ldots, C_n\}$$

de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía, es decir, $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ es no vacía.

Teorema 55. Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y solo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X, con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$$

es no vacía.

27 - Subespacios Compactos de la Recta Real

Teorema 56. Sea X un conjunto simplemente ordenado que tiene la propiedad del supremo. Entonces cada subconjunto cerrado de X con la topología del orden es compacto.

Corolario 5. Cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto.

Teorema 57. Un subespacio A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si, es cerrado y acotado en la distancia euclídea d o en la distancia del supremo ρ.

Teorema 58 (Teorema de los valores extremos)**.** Sea $f : X \to Y$ continua, donde Y es un conjunto ordenado con la topología del orden. Si X es compacto, entonces existen puntos c y d en X tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para cada $x \in X$.

Definición 56. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto no vacío de X. Para cada $x \in X$, definimos la distancia de x a A por la ecuación

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Nota 21. Para A fijo, la función $d(x, A)$ es una función continua definida en X.

Lema 18 (El lema del número de Lebesgue)**.** Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto del espacio métrico (X, d). Si X es compacto, existe un $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto X con diámetro menor que δ, existe un elemento de $\mathcal{A}$ conteniéndolo.

Definición 57. Una función f del espacio métrico (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y) se dice que es uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada par de puntos x_0, x_1 de X,

$$d_X(x_0, x_1) < \delta \implies d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon.$$

Teorema 59 (Teorema de la continuidad uniforme)**.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua del espacio métrico compacto (X, d_X) al espacio métrico (Y, d_Y). Entonces f es uniformemente continua.

Definición 58. Si X es un espacio, un punto x de X se dice que es un punto aislado de X si el conjunto unipuntual $\{x\}$ es abierto en X.

Teorema 60. Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Si X no tiene puntos aislados, entonces X no es numerable.

Corolario 6. Cada intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es no numerable.

28 - Compacidad por Punto Límite

Definición 59. Un espacio se dice que es compacto por punto límite si cada subconjunto infinito de X tiene un punto límite.

Teorema 61. Compacidad implica compacidad por punto límite, pero el recíproco no es cierto.

Definición 60. Sea X un espacio topológico. Si (x_n) es una sucesión de puntos de X y si

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$$

es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la sucesión (y_i) definida por $y_i = x_{n_i}$ se denomina subsucesión de la sucesión (x_n). El espacio X se dice que es sucesionalmente compacto si cada sucesión de puntos de X contiene una subsucesión convergente.

Teorema 62. Sea X un espacio metrizable. Entonces son equivalentes:

- (1) X es compacto.
- (2) X es compacto por punto límite.
- (3) X es sucesionalmente compacto.

29 - Compacidad Local

Definición 61. Un espacio X se dice que es localmente compacto en x si existe un subespacio compacto C de X que contiene un entorno de x. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos que X es localmente compacto.

Teorema 63. Sea X un espacio. Entonces X es localmente compacto y de Hausdorff si y solo si, existe un subespacio que satisfaga las siguientes condiciones:

- (1) X es un subespacio de Y.
- (2) El conjunto $Y - X$ consta de un solo elemento.
- (3) Y es un espacio compacto y de Hausdorff.

Si Y e Y' son dos espacios que satisfacen estas condiciones, entonces existe un homeomorfismo de Y en Y' que, restringido al subespacio X, es simplemente la identidad en X.

Nota 22. Cuando el espacio X en cuestión ya es compacto, el espacio Y del teorema precedente no es interesante, ya que se obtiene al añadir a X un único punto aislado. Sin embargo, si X no es compacto, entonces el punto de $Y - X$ es un punto límite de X, de modo que $\overline{X} = Y$.

Definición 62. Si Y es un espacio compacto y de Hausdorff y X es un subespacio propio de Y cuya adherencia coincide con Y, entonces se dice que Y es compactificación de X. Si $Y - X$ consiste en un único punto, entonces Y se denomina compactificación por un punto de X.

Nota 23. Hemos demostrado que X admite una compactificación por un punto Y si y solo si, X es un espacio de Hausdorff y localmente compacto que no es compacto. Además, dicha compactificación es única salvo homeomorfismos.

Teorema 64. Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si y solos i, dados x en X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subset U$.

Corolario 7. Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff y sea A un subespacio de X. Si A es cerradoen X o abierto en X, entonces A es localmente compacto.

Corolario 8. Un espacio X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto y de Hausdorff si y solo si, X es localmente compacto y de Hausdorff.

Capítulo 4 - Axiomas de Separación y Numerabilidad

Los Axiomas de Numerabilidad

Definición 63. Un espacio X se dice que tiene una base numerable en x si existe una colección numerable $\mathcal{B}$ de entornos de x tales que cada entorno de x contiene al menos a uno de los elementos de $\mathcal{B}$. Un espacio que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el primer axioma de numerabilidad, que es $1AN$, o que es uno-numerable.

Nota 24. Ya hemos visto que todo espacio metrizable satisface este axioma, en §21.

Teorema 65. Sea X un espacio topológico.

- (a) Sea A un subconjunto de X. Si existe una sucesión de puntos de A convergente a x, entonces $x \in \overline{A}$ y el recíproco se cumple si X es $1AN$.
- (b) Sea $f : X \to Y$. Si f es continua, entonces para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco se cumple si X es $1AN$.

Definición 64. Si un espacio X tiene una base numerable para su topología, entonces se dice que X satisface el segundo axioma de numerabilidad, que es $2AN$, o que es dos-numerable.

Teorema 66. Un subespacio de un espacio $1AN$ es $1AN$, y un producto numerable de espacios de $1AN$ es $1AN$. Un subespacio de un espacio $2AN$ es $2AN$, y un producto numerable de espacios $2AN$ es $2AN$.

Definición 65. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es denso en X si $\overline{A} = X$.

Teorema 67. Supongamos que X tiene una base numerable. Entonces

- (a) Todo cubrimiento abierto de X contiene una subcolección numerable que recubre a X.
- (b) Existe un subconjunto numerable de X que es denso en X.

Nota 25. Las dos propiedades del teorema anterior algunas veces se toman como axiomas de numerabilidad alternativos. Un espacio para el que cada cubrimiento abierto contiene un subcubrimiento numerable, se denomina espacio de Lindelöf. Un espacio que tiene un subconjunto denso, a menudo se dice que es separable.

31 - Los Axiomas de Separación

Definición 66. Supongamos que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X. Entonces se dice que X es regular si para cada par formado por un punto de x y un conjunto cerrado B que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y a B, respectivamente. El espacio X se dice que es normal si para cada par A, B de conjuntos cerrados disjuntos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B, respectivamente.

Lema 19. Sea X un espacio topológico donde los conjuntos unipuntuales son cerrados.

- (a) X es regular si y solo si, dado un punto x de X y unentorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\overline{V} \subset U$.

- (b) X es normal si y solo si, dado un conjunto cerrado A y un conjunto abierto U que contiene a A, existe un conjunto abierto V que contiene a A tal que $\overline{A} \subset U$.

Teorema 68.
- (a) Un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff y un producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff.

- (b) Un subespacio de un espacio regular es regular y un producto de espacios regulares es regular.

32 - Espacios Normales

Teorema 69. Todo espacio regular con una base numerable es normal.

Teorema 70. Todo espacio metrizable es normal.

Teorema 71. Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.

Teorema 72. Todo conjunto bien ordenado X es normal en la topología del orden.

33 - El Lema de Urysohn

Teorema 73 (Lema de Urysohn)**.** Sea X un espacio normal y sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en la recta real. Entonces existe una aplicación continua

$$f : X \to [a, b]$$

tal que $f(x) = a$ para todo x de A y $f(x) = b$ para todo $x \in B$.

Definición 67. Si A y B son dos subconjuntos del espacio topológico X, y existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$, decimos que A y B pueden separarse por una función continua.

Definición 68. Un espacio completamente regular si los conjuntos unipuntuales son cerrados en X y si para cada punto x_0 y cada conjunto cerrado A que no contenga a x_0, existe una función $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.

Teorema 74. Un subespacio de un espacio completamente regular es completamente regular. Un producto de espacios completamente regulares es completamente regular.

34 - El Teorema de Metrización de Urysohn

Teorema 75 (Teorema de metrización de Urysohn)**.** Todo espacio regular X con una base numerable es metrizable.

Teorema 76 (Teorema del Embebimiento)**.** Sea X un espacio en el que los conjuntos unipuntuales son cerrados. Supongamos que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia indexada de funciones continuas $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo la condición de que para cada punto x_0 de X y cada entorno U de x_0, existe un índice α tal que f_α es positiva en x_0 y nula fuera de U. Entonces la función $F : X \to \mathbb{R}^J$ definida por

$$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

es un embebimiento de X en $\mathbb{R}^J$. Si f_α aplica X en $[0,1]$ para cada α, entonces F embebe X en $[0,1]^J$.

Teorema 77. Un espacio X es completamente regular si y solo si, es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^J$ para algún J.

35 - El Teorema de Extensión de Tietze

Nota 26. Una consecuencia inmediata del lema de Urysohn es el útil teorema llamado de extensión de Tietze. Seocupa de extender una función continua con valores reales, que está definida sobre un subespacio de un espacio de X, a una función continua definida sobre todo X.

Teorema 78 (Teorema de Extensión de Tietze)**.** Sea X un espacio normal y A un subespacio cerrado de X.

- (a) Cualquier aplicación continua de A en el intervalo cerrado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación de todo X en $[a,b]$.
- (b) Cualquier aplicación continua de A en $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de todo X en $\mathbb{R}$.

36 - Embebimiento de Variedades (Opcional)

Definición 69. Una m-variedad es un espacio de Hausdorff X con una base numerable tal que cada punto x de X tiene un entorno que es homeomorfo con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.

Definición 70. Una 1-variedad se denomina curva y una 2-variedad se denomina superficie.

Definición 71. Si $\phi : X \to \mathbb{R}$ entonces el soporte de ϕ se define como la clausura del conjunto $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Así, si x está fuera del soporte de ϕ, exsiste algún entorno de x sobre el que ϕ es nula.

Definición 72. Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un recubrimiento abierto finito e indexado del espacio X. Una familia indexada de funciones continuas

$$\phi_i : X \to [0,1] \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

se dice que es una partición de la undiad dominada por $\{U_i\}$ si:

- (1) (soporte ϕ_i)$\subset U_i$ para cada i.
- (2) $\sum_{i=1}^{n} \phi_n(x) = 1$ para cada x.

Teorema 79 (Existencia de particiones finitas de la undiad)**.** Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un recubrimiento abierto finito del espacio normal X. Entonces existe una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$.

Teorema 80. Si X es una m-variedad compacta, entonces X se puede embeber en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.

Capítulo 5 - El Teorema de Tychonoff

37 - El Teorema de Tychonoff

Lema 20. Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X verificando la propiedad de la intersección finita. Entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita tal que $\mathcal{D}$ contiene a $\mathcal{A}$. Además, ninguna colección de subconjuntos de X verificando dicha propiedad contiene a $\mathcal{D}$ propiamente.

Nota 27. Con frecuencia, diremos que una colección $\mathcal{D}$ que satisface la conclusión de este teorema es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita.

Lema 21. Sea X un conjunto y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita. Entonces:

- (a) Cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$ es un elemento de $\mathcal{D}$.
- (b) Si A es un subconjunto de X que interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{D}$.

Teorema 81 (Teorema de Tychonoff)**.** El producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.

38 - La Compactificación de Stone-Čech

Definición 73. Una compactificación de un espacio X es un espacio de Hausdorff compacto Y que contiene a X como subespacio y además $\overline{X} = Y$. Dos compactificaciones Y_1 e Y_2 de X se dice que son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$ tal que $h(x) = x$ para cada $x \in X$.

Lema 22. Sea X un espacio y supongamos que $h : X \to Z$ es un embebimiento de X en el espacio de Hausdorff compacto Z. Entonces existe una compactificación Y de X; ésta tiene la propiedad de que existe un embebimiento $H : Y \to Z$ que coincide con h en X. La compactificación Y está unívocamente determinada salvo equivalencias.

Definición 74. Llamaremos a Y la compactificación inducida por el embebimiento h.

Teorema 82. Sea X un espacio completamente regular. Existe una compactificación Y de X con la propiedad de que cada función acotada y continua $f : X \to \mathbb{R}$ se extiende de forma única a una función continua de Y en $\mathbb{R}$.

Lema 23. Sea $A \subset X$ y $f : A \to Z$ una aplicación continua de A en el espacio de Hausdorff Z. Entonces existe a lo más una extensión de f a una función continua $g : \overline{A} \to Z$.

Teorema 83. Sea X un espacio completamente regular y sea Y una compactificación de X que satisface la propiedad de extensión del Teorema 82. Dada cualquier aplicación continua $f : X \to C$ de X en un espacio de Hausdorff compacto C, la aplicación f se extiende de forma única a una aplicación continua $g : Y \to C$.

Teorema 84. Sea X un espacio completamente regular. Si Y_1 e Y_2 son dos compactificaciones de X que satisfacen la propiedad de extensión del Teorema 82, entonces Y_1 e Y_2 son equivalentes.

Definición 75. Para cada espacio completamente regular X elegimos, de aquí en adelante, una compactificación de X verificando la condición de extensión del Teorema 82. Representaremos esta compactificación de X por $\beta(X)$ y la llamaremos compactificación de Stone-Čech de X. Se caracteriza por el hecho de que cualquier aplicación continua $f : X \to C$ de X en un espacio de Hausdorff compacto C se extiende forma única a una aplicación continua $g : \beta(X) \to C$.

Capítulo 6 - Paracompacidad y Teoremas de Metrización

Definición 76. Decimos que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio X es localmente finita si todo punto de X tiene un entorno que interseca solo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

Nota 28. Una forma de expresar la condición de que la base $\mathcal{B}$ es numerable es decir que $\mathcal{B}$ se puede escribir como

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$$

donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es finita. Ésta es una manera poco ortodoxa de decir que $\mathcal{B}$ es numerable, pero sugiere cómo formular una versión más débil de la misma. La condición de Nagata-Smirnov no es más que requerir que la base $\mathcal{B}$ pueda expresarse de la forma

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$$

donde cada colección $\mathcal{B}_n$ es localmente finita. Decimos que la colección $\mathcal{B}$ es numerablemente localmente finita.

39 - Finitud Local

Definición 77. Sea X un espacio topológico. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se dice que es localmente finita en X si todo punto de X tiene un entorno que interseca solo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

Lema 24. sea $\mathcal{A}$ una colección localmente finita de subconjuntos de X. Entonces

- (a) Cualquier subolección de $\mathcal{A}$ es localmente finita.
- (b) La colección $\mathcal{B} = \{\overline{A}\}_{A \in \mathcal{A}}$ formada por las clausuras de los elementos de $\mathcal{A}$ es localmente finita.
- (c) $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$

Definición 78. Existe un concepto análogo al de finitud local para una familia indexada de subconjuntos de X. La familia indexada $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ se dice que es una familia indexada localmente finita en X si todo punto $x \in X$ tiene un entorno que interseca a los A_α solo para una cantidad finita de valores de α.

Definición 79. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se dice que es numerablemente localmente finita si $\mathcal{B}$ puede escribirse como una unión numerable de colecciones localmente finitas $\mathcal{B}_n$.

Definición 80. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos del espacio X. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X se dice que es unrefinamiento de $\mathcal{A}$ (o que refina $\mathcal{A}$) si para cada elemento B de $\mathcal{B}$ existe un elemento A de $\mathcal{A}$ que contiene a B. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos abiertos, llamamos a $\mathcal{B}$ un refinamiento abierto de $\mathcal{A}$; si son conjuntos cerrados, llamamos a $\mathcal{B}$ un refinamiento cerrado.

Lema 25. Sea X un espacio metrizable. Si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X, entonces existe un cubrimiento abierto $\mathcal{E}$ de X que refina $\mathcal{A}$ y es numerablemente localmente finito.

40 - El Teorema de Metrización de Nagata-Smirnov

Definición 81. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es un conjunto G_δ en X si es igual a la intersección de una colección numerable de subconjuntos abiertos de X.

Lema 26. Sea X un espacio regular con una base $\mathcal{B}$ que es numerablemente localmente finita. Entonces X es normal y todo subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ en X.

Lema 27. Sea X un espacio normal y sea A un conjunto cerrado G_δ en X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) > 0$ para todo $x \notin A$.

Teorema 85 (Teorema de metrización de Nagata-Smirnov)**.** Un espacio X es metrizable si y solo si, X es regular y tiene una base numerablemente localmente finita.

0.1. 41 - Paracompacidad

Nota 29 (Definición alternativa de compacidad)**.** Un espacio X es compacto si todo cubrimiento de $\mathcal{A}$ de X tiene un refinamiento abierto finito $\mathcal{B}$ que recubre X.

Definición 82. Un espacio X es paracompacto si todo cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{B}$ que recubre X.

Teorema 86. Todo espacio de Hausdorff paracompacto X es normal.

Teorema 87. Todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.

Lema 28. Sea X un espacio regular. Entonces las siguientes condiciones sobre X son equivalentes.
Todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento que es:

- (1) Un cubrimiento abierto de X numerablemente localmente finito.

- (2) Un cubrimiento de X localmente finito.
- (3) Un cubrimiento cerrado de X localmente finito.
- (4) Un cubrimiento abierto de X localmente finito.

Teorema 88. Todo espacio metrizable es paracompacto.

Teorema 89. Todo espacio regular y de Lindelöf es paracompacto.

Definición 83. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento abierto indexado de X. Una familia indexada de funciones continuas

$$\phi_\alpha : X \to [0, 1]$$

se dice que es una partición de la unidad sobre X, subordinada a $\{U_\alpha\}$, si:

- (1) (soporte α_α) $\subset U_\alpha$, para cada α.
- (2) La familia indexada {soporte ϕ_α} es localmente finita.
- (3) $\sum \phi_\alpha(x) = 1$, para cada $x \in X$.

Lema 29. Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de conjuntos abiertos que recubre X. Entonces existe una familia indexada localmente finita $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de conjuntos abiertos que recubre X y tal que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α.

Nota 30. La condición $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para cada α, algunas veces se expresa diciendo que la familia $\{\overline{V}_\alpha\}$ es un refinamiento preciso de la familia $\{U_\alpha\}$.

Teorema 90. Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento abierto indexado de X. Entonces existe una partición de la unidad sobre X subordinada a $\{U_\alpha\}$.

Teorema 91. Sea X un espacio de Hausdorff paracompacto. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X y, para cada $C \in \mathcal{C}$, sea ε_C un número positivo. Si $\mathcal{C}$ es localmente finita, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo x y $f(x) \leq \varepsilon_C$ para $x \in C$.

42 - El Teorema de Metrización de Smirnov

Definición 84. Un espacio X es localmente metrizable si todo punto x de X tiene un entorno U que es metrizable con la topología del subespacio.

Teorema 92 (Teorema de metrización de Smirnov)**.** Un espacio X es metrizable si y solo si, X es un espacio de Hausdorff paracompacto y localmente metrizable.

Apunte de Redes

Redes

Definición 85. Una sucesión en un espacio topológico X es una función

$$a : \mathbb{N} \to X, \quad a(n) := a_n$$

que denotamos directamente como $\{a_n\}$. Decimos que la sucesión converge a un punto $x \in X$, o que x es un punto límite de $\{a_n\}$, si para cada $U \in \mathcal{N}(x)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n \in U, \quad \forall\ n \geq N.$$

En los espacios métricos, esta noción de convergencia se traduce en la definición usual: $\{a_n\} \subset (X, d)$ converge a $x \in X$ si para ada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n \in B_\varepsilon(x), \quad \forall\ n \geq N$$

Proposición 6. Cualquier sucesión en un espacio de Hausdorff tiene a lo sumo un punto límite.

Nota 31. La recíproca es falsa.

Nota 32. También vimos que en espacios $AN1$ las sucesiones nos permite caracterizar funciones continuas y subconjuntos cerrados:

- Si X es $AN1$ e Y es un espacio topológico cualquiera, una función $f : X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y solo si para cada sucesión $\{a_n\} \subset X$ que converge a x se verifica que $\{f(a_n)\}$ converge a $f(x)$.
- Si X es un espacio $AN1$ y $A \subset X$, entonces A es cerrado si y solo si para cada sucesión convergente $\{a_n\}$ contenida en X, su punto límite está en A.

Proposición 7.

- Sea X un espacio $AN1$ y $A \subset X$ un subconjunto compacto. Entonces toda sucesión en A admite una subsucesión convergente.
- Sea (X, d) un espacio métrico o un espacio $N2$ y $A \subset X$ un subconjunto compacto. Entonces A es compacto si y solo si toda sucesión de elementos de A admite una subsucesión convergente.

Definición 86. Sea D un conjunto no vacío y $\succeq$ una relación en D. Decimos que $\succeq$ es filtrante si para cada $m, n \in D$, existe $p \in D$ tal que

$$p \succeq m \quad \text{y} \quad p \succeq n.$$

Decimos que $\succeq$ dirige a D si es reflexiva, transitiva y filtrante.
El par $(D, \succeq)$ se denomina en ese caso un conjunto dirigido.

Definición 87. Sea X un espacio topológico. Se denomina una red en X a toda función $\varphi : (D, \succeq) \to X$ donde $(D, \succeq)$ es un conjunto dirigido.
Para cada $\lambda \in D$, denotamos como $\varphi := \varphi(\lambda)$.
Decimos que una red $\varphi : (D, \succeq) \to X$ converge a $x \in X$, si para cada $U \in \mathcal{V}(x)$ existe $\lambda_0 \in D$ tal que para todo $\lambda \succeq \lambda_0,\ \varphi_\lambda \in U$.

Teorema 93. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces X es Hausdorff si y solo si toda red en X converge a a lo sumo un punto de X.

Teorema 94. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subset X$. Entonces:

- (1) $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una red $\varphi : (D, \succeq) \to X$ que converge a x y tal que $\phi_lambda \in A$ para cada $\lambda \in D$.
- (2) A es cerrado si y solo si para cada red convergente $\varphi : (D, \succeq) \to X$ tal que $\varphi_\lambda \in A$ para cada $\lambda \in D$, el o los puntos a los cuales φ converge pertenecen a A.

Teorema 95. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en $x \in X$ si y solo si para cada red $\varphi : (D, \succeq) \to X$ que converge a x, la red $f \circ \varphi : (D, \succeq) \to Y$ converge a $f(x)$.

Teorema 96. Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ el espacio producto de una familia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ de espacios topológicos, y sea $\pi_i : X \to X_i$ la proyección al i-ésimo factor. Sea $\varphi : (D, \succeq) \to X$. Entonces φ converge a $x \in X$ si y solo si $\pi_i \circ \varphi : (D, \succeq) \to X_i$ converge a $\pi_i(x)$, para cada $i \in I$.

Redes y compacidad

Definición 88. Una red $\Psi : (E, \gg) \to X$ es un espacio topológico X se denomina una subbred dela red $\varphi : (D, \succeq) \to X$, si existe una función $f : E \to D$ tal que:

- (i) $\Psi = \varphi \circ f$,
- (ii) Para cada $\lambda \in D$, existe $\alpha \in E$ tal que si $\beta \gg \alpha$, entonces $f(\beta) \succeq \lambda$.

Definición 89. Sea $\varphi : (D, \succeq) \to X$ y sea $A \subset X$. Deimos que φ está eventualmente en A si existe $\lambda_0 \in D$ tal que $\varphi_\lambda \in A$ para cada $\lambda \succeq \lambda_0$.
Decimos que φ está eventualmente en A si para cada $\lambda \in D$, existe $\mu \in D$ tal que $\mu \succeq \lambda$ y $\varphi_\mu \in A$.

Nota 33. Una red $\varphi : (D, \succeq) \to X$ una red converge a $x \in X$ si y solo si φ está eventualmente en cadaentorno de x.

Lema 30. Sea $\varphi : (D, \succeq) \to X$ una ed en X y sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de X tal que

- (1) φ está frecuentemente en cada miembro $\mathcal{A}$.

- (2) La intersección de dos miembros de $\mathcal{A}$ contiene un miembro de $\mathcal{A}$.

Entonces existe una subred de φ que está eventualmente en cada miembro de $\mathcal{A}$.

Corolario 9. Sea φ una red en un espacio topológico X. Si φ está frecuentemente en cada entorno de $x \in X$, entonces existe una subred de φ que converge a x.

Definición 90. Sea $\varphi : (D, \succeq) \to X$ una red. Decimos que $x \in X$ es un punto de aglomeración de φ si para cada $U \in \mathcal{V}(x)$ y para cada $\lambda \in D$, existe $\mu \in D$ tal que $\varphi_\mu \in U$. Es decir, x es un punto de aglomeración de φ si φ está frecuentemente en cada entorno de x.

Teorema 97. Un punto $x \in X$ es un punto de aglomeración de una red φ en X si y solo si existe una subred Ψ de φ que converge a x.

Definición 91. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{A}$ una familia de X. Decimos que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita (o que es una familia PIF) sila intersección de los miembros de toda subfamilia finita de $\mathcal{A}$ es no vacía.

Teorema 98. Un espacio topológico X es compacto si y solo si la intersección de todos los miembros de una familia de cerrados PIF es no vacía.

Teorema 99. Un espacio topológico X es compacto si y solo si toda red en X admite una subred convergente.