Resumen Lineal Algebra Done Right + Apuntes de yapa

el fabri quién más si no

algún día de invierno, mientras robo flores del cementerio

1. Espacios Vectoriales

1.1. 1.B - Definición de Espacio Vectorial.

Definición 1.
- *Una suma sobre un conjunto V es una función que asigna un elemento $u + v \in V$ a cada par de elementos $u, v \in V$.*
- *Una multiplicación por escalar sobre un conjunto V es una función que asigna un elemento $\lambda v \in V$ a cada $\lambda \in \mathbb{F}$ y cada $v \in V$.*

Definición 2. *Un espacio vectorial es un conjunto V junto con la suma sobre V y multiplicación por escalar sobre V tal que se verifican las siguientes propiedades:*

- *Conmutatividad: $u + v = v + u \ \forall u, v \in V$.*
- *Asociatividad: $(u + v) + w = u + (v + w)$ y $(ab)v = a(bv)$ para cada $u, v, w \in V$ y todo $a, b \in \mathbb{F}$.*
- *Identidad de la suma: existe un elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v \ \forall v \in V$.*
- *Inverso aditivo: para cada $v \in V$, existe un elemento $w \in V$ tal que $v + w = 0$.*
- *Identidad del producto por escalar: $1v = v \ \forall v \in V$.*
- *Distributiva: $a(u + v) = au + av$ y $(a + b)v = av + bv$ para todo $a, b \in \mathbb{F}$ y todo $u, v \in V$.*

Definición 3. *Los elementos de un espacio vectorial se llaman vectores o puntos.*

Definición 4.
- *Un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ se llama espacio vectorial real.*
- *Un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ se llama espacio vectorial complejo.*

Nota 1.
- *Si S es un conjunto, entonces $\mathbb{F}^S$ denota el conjunto de funciones $g : S \to \mathbb{F}$*
- *La suma y producto por escalar se definen como en análisis.*

Proposición 1. *Un espacio vectorial tiene una única identidad de la suma.*

Proposición 2.
- *Todo elemento en un espacio vectorial tiene un único inverso aditivo de v.*
- *$w - v$ se define como $w + (-v)$.*

Nota 2. *V denota el espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.*

Proposición 3. *$0v = 0$ para todo $v \in V$.*

Proposición 4. *$a0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{F}$.*

Proposición 5. *$(-1)v = -v$ para todo $v \in V$.*

1.2. 1.C - Subespacios.

Definición 5. *Un subconjunto U de V se llama un subespacio de V si U es también un espacio vectorial (usando la misma suma y producto por escalar que en V).*

Proposición 6. *Un subconjunto U de V es un subespacio de V si y solo si U satisface las siguientes tres condiciones:*

- *Identidad de la suma:* $0 \in U$.
- *Cerrado bajo la suma:* $u, w \in U \implies u + w \in U$.
- *Cerrado bajo producto por escalar:* $a \in \mathbb{F},\ u \in U \implies au \in U$.

Definición 6. *Supongamos que $U_1, \dots, U_m$ son subconjuntos de V. La suma de $U_1, \dots, U_m$, denota $U_1 + \cdots + U_m$, es el conjunto de todas las sumas posibles de $U_1, \dots, U_m$. En símbolos:*

$$U_1 + \cdots + U_m = \{u_1 + \cdots + u_m : u_1 \in U_1, \dots, u_m \in U_m\}.$$

Proposición 7. *Supongamos que $U_1, \dots, U_m$ son subespacios de V. Entonces $U_1 + \cdots + U_m$ es el menor espacio vectorial de V que contiene a $U_1, \dots, U_m$.*

Definición 7. *Supongamos que $U_1, \dots, U_m$ son subespacios de V.*

- *La suma $U_1 + \ldots + U_m$ se llama suma directa si cada elemento de $U_1 + \cdots + U_m$ se puede escribir de una única manera como suma $u_1 + \cdots + u_m$, donde cada $u_j \in U_j$.*
- *Si $U_1 + \cdots + U_m$ es una suma directa, entonces $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ denota $U_1 + \cdots + U_m$, con $\oplus$ indicando que es una suma directa.*

Proposición 8. *Supongamos que $U_1, \dots, U_m$ son subespacios de V. Entonces $U_1 + \cdots + U_m$ es una suma directa si y solo si la única manera de escribir 0 como una suma $u_1 + \cdots + u_m$, donde cada $u_j \in U_j$, es tomando $u_j = 0$.*

Proposición 9. *Supongamos que U y W son subespacios de V. Entonces $U + W$ es una suma directa si y solo si $U \cap W = \{0\}$.*

2. Espacios Vectoriales de Dimensión Finita

2.1. 2.A - Generación e Independencia Lineal

Definición 8. *Una combinación lineal de una lista $v_1, \dots, v_m$ de vectores en V es un vector de la forma*

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m,$$

donde $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$.

Definición 9. *El conjunto de todas las combinaciones lineales de una lista de vectores $v_1, \dots, v_m$ en V se llama span de $v_1, \dots, v_m$, denotamos $span(v_1, \dots, v_m)$. En símbolos:*

$$span(v_1, \dots, v_m) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m : a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}\}$$

Proposición 10. *El span de una lista de vectores en V es el menor subespacio de V que contiene todos los vectores en la lista.*

Definición 10. *Si $span(v_1, \dots, v_m) = V$, decimos que $v_1, \dots, v_m$ genera a V.*

Definición 11. *Un espacio vectorial se llama de dimensión finita si alguna lista de vectores en él genera al espacio.*

Nota 3. *Por definición, toda lista tiene longitud finita.*

Definición 12.

- *Una función $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ se llama polinomio con coeficientes en $\mathbb{F}$ si existen $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ tal que*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$$

para todo $z \in \mathbb{F}$.

- *$\mathcal{P}(\mathbb{F})$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{F}$.*

Definición 13. ▪ *Un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ se dice que tiene grado m si existen escalares $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ con $a_m \neq 0$ tal que*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$

para todo $z \in \mathbb{F}$. Si p tiene grado m, notamos $grad(p) = m$.

- *El polinomio que es identicamente 0 por convención tiene grado $-\infty$.*

Definición 14. *Para m entero no negativo, $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ denota el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{F}$ y grado a lo sumo m.*

Definición 15. *Un espacio vectorial se dice de dimensión finita si no es de dimensión finita.*

Definición 16. ▪ *Una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V se dice linealmente independiente si la única selección de $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ que hace $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$ igual a 0 es $a_1 = \ldots = a_m = 0$.*

- *La lista vacía $()$ se dice que es linealmente independiente.*

Definición 17. ▪ *Una lista de vectores en V se dice linealmente dependiente si no es linealmente independiente.*

- *En otras palabras, una lista $v_1, \ldots, v_m$ de vectores en V es linealmente dependiente si existen $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$, no todos 0, tal que $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$.*

Proposición 11. *Supongamos que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista linealmente dependiente en V. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que verifica:*

- *a) $v_j \in span(v_1, \ldots, v_{j-1})$*
- *b) si el $j-$ésimo es removido de $v_1, \ldots, v_m$, el span de la lista restante es igual al $span(v_1, \ldots, v_m)$.*

Proposición 12. *En un espacio vectorial de dimensión finita, la longitud de cada lista linealmente independiente de vectores es menor o igual al largo de cada lista generadora de vectores.*

Proposición 13. *Todo subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita tiene dimensión finita.*

2.2. 2.B - Bases

Definición 18. *Una base de V es una lista de vectores en V que es linealmente independiente y genera a V.*

Proposición 14. *Una lista $v_1, \ldots, v_n$ de vectores en V es una base de V si y solo si cada vector $v \in V$ se puede escribir de una única manera*

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$.

Proposición 15. *Toda lista generadora en un espacio vectorial se puede reducir a una base del espacio vectorial.*

Proposición 16. *Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.*

Proposición 17. *Toda lista linealmente independiente de vectores es un espacio vectorial finito se puede extender a una base del espacio vectorial.*

Proposición 18. *Supngamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita y U un subespacio de V. Entonces existe un subespacio W de V tal que $V = U \oplus W$.*

2.3. 2.C - Dimensión

Proposición 19. *Cualesquiera dos bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen la misma longitud.*

Definición 19. ▪ *La dimensión de un espacio vectorial de dimensión finia es el largo de cualquier base del espacio vectorial.*

- *La dimensión de V (si V es de dimensión finita) se denota por $\dim V$.*

Definición 20. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y U un subespacio de V, entonces $\dim U \leq \dim V$.*

Proposición 20. *Supongamos que V es de dimensión finita. Entonces toda lista linealmente independiente de vectores en V con longitud $\dim V$ es una base de V.*

Proposición 21. *Si U_1 y U_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

3. Transformaciones Lineales

3.1. 3.A - El Espacio Vectorial de las Transformaciones Lineales

Definición 21. *Una transformación lineal de V en W es una función $T : V \to W$ con las siguientes propiedades:*

- *Suma: $T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todo $u, v \in V$.*
- *Homogeneidad: $T(\lambda v) = \lambda(Tv)$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y todo $v \in V$.*

Nota 4. *El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W se nota $\mathcal{L}(V, W)$.*

Proposición 22. *Supongamos que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, \ldots, w_n \in W$. Entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que*

$$Tv_j = w_j$$

para cada $j = 1, \ldots, n$.

Definición 22. *Supongamos que $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces la suma $S + T$ y el producto λT son transformaciones lineales de V en W definidas por*

$$(S + T)(v) = Sv + Tv \quad \text{y} \quad (\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$$

para cada $v \in V$.

Proposición 23. *Con las operaciones de suma y producto por escalar definidas anteriormente, $\mathcal{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.*

Definición 23. *Si $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces el producto $ST \in \mathcal{L}(U, W)$ se define por*

$$(ST)(u) = S(Tu)$$

para todo $u \in U$.

Proposición 24.

- *asociatividad: $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$ cuando T_1, T_2 y T_3 son transformaciones lineales tal que el producto tenga sentido.*
- *neutro: $TI = IT = T$ cuando $T \in \mathcal{L}(V, W)$ (la primera I es la identidad en V y la segunda la identidad en W).*
- *distributivas: $(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$ y $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$ cuando $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V, W)$.*

Proposición 25. *Supongamos que T es una transformación lineal de V en W. Entonces $T(0) = 0$.*

3.2. 3.B - Espacio Nulo y Rango

Definición 24. *Para $T \in \mathcal{L}(V, W)$, el espacio nulo de T, denotado por $\operatorname{null} T$, es el subconjunto de V que consiste de los vectores que T lleva a 0:*

$$\operatorname{null} T = \{v \in V : Tv = 0\}.$$

Proposición 26. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\operatorname{null} T$ es un subespacio de V.*

Definición 25. *Una función $T : V \to W$ se dice inyectiva si $Tu = Tv$ implica $u = v$.*

Proposición 27. *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces T es inyectiva si y solo si $\operatorname{null} T = \{0\}$.*

Definición 26. *Sea T una función de V en W, el rango de T es el subconjunto de W que consiste de los vectores que son de la forma Tv para algún $v \in V$:*

$$\operatorname{rango} T = \{Tv : v \in V\}.$$

Proposición 28. *Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces $\operatorname{rango} T$ es un subespacio de W.*

Definición 27. *Una función $T : V \to W$ se dice sobreyectiva si $\operatorname{rango} T = W$.*

Teorema 1 (Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales)**.** *Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\operatorname{rango} T$ es de dimensión finita y*

$$\dim V = \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{rango} T.$$

Proposición 29. *Supongamos que V y W son espacios vectoriales de dimensión finita tal que $\dim V > \dim W$. Entonces no existe una transformación lineal de V en W inyectiva.*

Proposición 30. *Supongamos que V y W son espacios vectoriales de dimensión finita tal que $\dim V < \dim W$. Entonces no existe una transformación lineal de V en W sobreyectiva.*

Proposición 31. *Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con más variables que ecuaciones tiene soluciones distinta de cero.*

Proposición 32. *Un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales con más ecuaciones que variables no tiene solución para alguna selección de términos constantes.*

3.3. 3.C - Matrices

Definición 28. *Sean m y n enteros positivos. Una matriz de m por n A es un arreglo de elementos de $\mathbb{F}$ con m filas y n columnas. La notación $A_{j,k}$ denota la entrada en la fila j, columna k de A.*

Definición 29. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, \ldots, w_m$ es una base de W. La matriz de T con respecto a estas bases es la matriz de m por n $\mathcal{M}(T)$ cuyas entradas $A_{j,k}$ se definen por*

$$Tv_k = A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m.$$

Si las bases no están claras en el contexto, se usa la notación $\mathcal{M}(T, (v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_m))$ es utilizada.

Nota 5. *La $k-$ésima columna de $\mathcal{M}(T)$ consiste de los escalares necesarios para escribir Tv_k como combinación lineal de $(w_1, \ldots, w_m)$: $Tv_k = \sum_{j=1}^{m} A_{j,k}w_j$.*

Nota 6. *Si T va de un espacio vectorial de dimensión n a otro de dimensión m, entonces $\mathcal{M}(T)$ es de $m \times n$.*

Definición 30. *La suma de dos matrices es la usual.*

Proposición 33. *Supongamos que $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\mathcal{M}(S + T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$.*

Definición 31. *Producto por escalar de una matriz es la usual.*

Proposición 34. *Supongamos que $\lambda \in \mathbb{F}$ y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\mathcal{M}(\lambda T) = \lambda\mathcal{M}(T)$.*

Nota 7. *El conjunto de todas las matrices $m \times n$ en $\mathbb{F}$ se denota por $\mathbb{F}^{m,n}$.*

Proposición 35. *Supongamos que m y n son enteros positivos. Con la adición y producto por escalar definido anteriormente, $\mathbb{F}^{m,n}$ es un espacio vectorial de dimensión mn.*

Definición 32. *La multiplicación de matrices es la usual.*

Proposición 36. *Si $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y $S \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces $\mathcal{M}(ST) = \mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)$.*

Nota 8. *Supongamos que A es una matriz de $m \times n$.*

- *Si $1 \leq j \leq m$, entonces $A_{j,\cdot}$ denota la matriz de $1 \times n$ que consiste de la fila j de A.*
- *Si $1 \leq k \leq n$, entonces $A_{k,\cdot}$ denota la matriz de $m \times 1$ que consiste de la columna k de A.*

Proposición 37. *Supongamos que A es una matriz de $m \times n$ y C una matriz de $n \times p$. Entonces*

$$(AC)_{j,k} = A_{j,\cdot}C_{\cdot,k}$$

para $1 \leq j \leq m$ y $1 \leq k \leq p$.

Proposición 38. *Supongamos que A es una matriz de $m \times n$ y C es una matriz de $n \times p$. Entonces*

$$(AC)_{\cdot,k} = AC_{\cdot,k}$$

para $1 \leq k \leq p$.

Proposición 39. *Supongamos que A es una matriz de $m \times n$ y $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ es una matriz de $n \times 1$. Entonces*

$$Ac = c_1 A_{\cdot,1} + \cdots + c_n A_{\cdot,n}.$$

En otras palabras, Ac es una combinación lineal de las columnas de A, con los escalares que multiplican a las columnas provenientes de c.

3.4. 3.D - Invertibilidad y Espacios Vectoriales Isomorfos

Definición 33.
- *Una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V,W)$ se dice invertible si existe una transformación lineal $S \in \mathcal{L}(W,V)$ tal que $ST = I$ (identidad en V) y $TS = I$ (identidad en W).*
- *Una transformación lineal $S \in \mathcal{L}(W,V)$ que satisface $ST = I$ y $TS = I$ se llama inversa de T.*

Proposición 40. *La inversa de una transformación lineal es unica.*

Nota 9. *Si T es invertible, entones su inversa se nota por T^{-1}. En otras palabras, si $T \in \mathcal{L}(V,W)$ es invertible, entonces T^{-1} es el único elemento de $\mathcal{L}(W,V)$ tal que $T^{-1}T = I$ y $TT^{-1} = I$.*

Proposición 41. *Una transformación lineal es invertible si y solo si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 34.
- *Un isomorfismo es una transformación lineal invertible.*
- *Dos espacios vectoriales son isomorfos si existe un isomorfismo desde un espacio vectorial en el otro.*

Proposición 42. *Dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$ son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.*

Proposición 43. *Supongamos que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, \ldots, w_m$ es una base de W. Entonces $\mathcal{M}$ es un isomorfismo entre $\mathcal{L}(V,W)$ y $\mathbb{F}^{m,n}$.*

Proposición 44. *Supongamos que V y W son de dimensión finita. Entonces $\mathcal{L}(V,W)$ es de dimensión finita y*

$$\dim \mathcal{L}(V,W) = (\dim V)(\dim W).$$

Definición 35. *Supongamos que $v \in V$ y $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V. La matriz de v con respecto a esta base es la matriz $n \times 1$:*

$$\mathcal{M}(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son los escalares tal que

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Proposición 45. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V,W)$ y $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, \ldots, w_m$ es una base de W. Sea $1 \leq k \leq n$. Entonces la $k-$ésima columna de $\mathcal{M}(T)$, la cual se denota por $\mathcal{M}(T)_{\cdot,k}$ es igual a $\mathcal{M}(v_k)$.*

Proposición 46. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V,W)$ y $v \in V$. Supongamos también que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y $w_1, \ldots, w_m$ una base de W. Entonces*

$$\mathcal{M}(Tv) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v).$$

Definición 36.
- *Una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo se llama operador.*
- *La notación $\mathcal{L}(V)$ denota al conjunto de todos los operadores sobre V. En otras palabras, $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V,V)$.*

Proposición 47. *Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces son equivalentes:*

- *a) T es invertible.*
- *b) T es inyectiva.*
- *c) T es sobreyectiva.*

3.5. 3.E - Productos y Cocientes de Espacios Vectoriales

Definición 37. *Supongamos que $V_1, \ldots, V_m$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$.*

- *El producto $V_1 \times \ldots \times V_m$ se define por*

$$V_1 \times \ldots \times V_m = \{(v_1, \ldots, v_m) : v_1 \in V_1, \ldots, v_m \in V_m\}.$$

- *La suma sobre $V_1 \times \ldots \times V_m$ se define por*

$$(u_1, \ldots, u_m) + (v_1, \ldots, v_m) = (u_1 + v_1, \ldots, u_m + v_m).$$

- *El producto por escalar sobre* $V_1 \times \ldots \times V_m$ *se define por*

$$\lambda(v_1, \ldots, v_m) = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_m).$$

Proposición 48. *Supongamos que* $V_1, \ldots, V_m$ *son espacios vectoriales sobre* $\mathbb{F}$. *Entonces* $V_1 \times \ldots \times V_m$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{F}$.

Proposición 49. *Supongamos que* $V_1, \ldots, V_m$ *son espacios vectoriales finitos. Entonces* $V_1 \times \ldots \times V_m$ *es de dimensión finita y*

$$\dim(V_1, \times \ldots \times, V_m) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_m.$$

Proposición 50. *Supongamos que* $U_1, \ldots, U_m$ *son subespacios de* V.
Definimos la transformación lineal $\Gamma : U_1 \times \ldots \times U_m \to U_1 + \cdots + U_m$ *por*

$$\Gamma(u_1, \ldots, u_m) = u_1 + \cdots + u_m.$$

Entonces $U_1 + \cdots + U_m$ *es una suma directa si y solo si* Γ *es inyectiva.*

Proposición 51. *Supongamos que* V *es un espacio vectorial de dimensión finita y* $U_1, \ldots, U_m$ *son subespacios de* V. *Entonces* $U_1 + \cdots + U_m$ *es una suma directa si y solo si*

$$\dim(U_1 + \cdots + U_m) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_m$$

Definición 38. *Supongamos que* $v \in V$ *y* U *es un subespacio de* V. *Entonces* $v + U$ *es el subconjunto de* V *definido por*

$$v + U = \{v + u : u \in U\}.$$

Definición 39.

- *Un subconjunto afín de* V *es un subconjunto de* V *de la forma* $v + U$ *para algún* $v \in V$ *y algún subespacio* U *de* V.
- *Para* $v \in V$ *y* U *un subespacio de* V, *el subconjunto afín* $v + U$ *se dice que es paralelo a* U.

Definición 40. *Supongamos que* U *es un subespacio de* V. *Entonces el espacio cociente* V/U *es el conjunto de todos los subconjuntos afines de* V *paralelos a* U. *En otras palabras,* $V/U = \{v + U : v \in V\}$.

Proposición 52. *Supongamos que* U *es un subespacio de* V *y* $v, w \in V$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a)* $v - w \in U$
- *b)* $v + U = w + U$
- *c)* $(v + U) \cap (w + U) \neq \varnothing$

Definición 41. *Supongamos que* U *es un subespacio de* V. *Entonces la suma y producto por escalar se define sobre* V/U *por*

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U$$
$$\lambda(v + U) = (\lambda v) + U$$

para $v, w \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$.

Proposición 53. *Supongamos que* U *es un subespacio de* V. *Entonces* V/U, *con las operaciones de suma y producto por escalar definidas anteriormente, es un espacio vectorial.*

Definición 42. *Supongamos que* U *es un subespacio de* V. *La aplicación cociente* π *es la transformación lineal* $\pi : V \to V/U$ *definida por*

$$\pi(v) = v + U$$

para $v \in V$.

Proposición 54. *Supongamos que* V *es un espacio vectorial de dimensión finita y* U *es un subespacio de* V. *Entonces*

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Definición 43. *Supongamos que* $T \in \mathcal{L}(V, W)$. *Definimos* $\tilde{T} : V/(\operatorname{null} T) \to W$ *por*

$$\tilde{T}(v + \operatorname{null} T) = Tv.$$

Proposición 55. *Supongamos que* $T \in \mathcal{L}(V, W)$. *Entonces*

- $\tilde{T}$ *es una transformación lineal de* $V/(\operatorname{null} T)$ *en* W.
- $\tilde{T}$ *es inyectiva.*
- $\operatorname{rango} \tilde{T} = \operatorname{rango} T$.
- $V/(\operatorname{null} T)$ *es isomorfo a* $\operatorname{rango} T$.

3.6. 3.F - Dualidad

Definición 44. *un funcional lineal sobre V es una transformación lineal de V en $\mathbb{F}$. En otras palabras, un funcional lineal es un elemento de $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$.*

Definición 45. *El espacio dual de V, denotado V', es el espacio vectorial de todas los funcionales lineales sobre V. En otras palabras, $V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$.*

Proposición 56. *Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces V' es también de dimensión finita y $\dim V' = \dim V$.*

Si $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V, entonces la base dual de $v_1, \ldots, v_n$ es la lista $\phi_1, \ldots, \phi_n$ de elementos de V', donde cada ϕ_j es la función lineal sobre V tal que

$$\phi_j(v_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

Proposición 57. *Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces la base dual de una base de V es una base de V'.*

Definición 46. *Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces la transformación lineal dual de T es la transformación lineal $T' \in \mathcal{L}(W', V')$ definida por $T'(\phi) = \phi \circ T$ para $\phi \in W'$.*

Proposición 58.
- *$(S + T)' = S' + T'$ para todo $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$.*
- *$(\lambda T)' = \lambda T'$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y todo $T \in \mathcal{L}(V, W)$.*
- *$(ST)' = T'S'$ para todo $T \in \mathcal{L}(U, V)$ y toda $S \in \mathcal{L}(V, W)$.*

Definición 47. *Para $U \subset V$, el aniquilador de U, denotado U^0, está definido por*

$$U^0 = \{\phi \in V' : \phi(u) = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

Proposición 59. *Supongamos que $U \subset V$. Entonces U^0 es un subespacio de V'.*

Proposición 60. *Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita y U un subespacio de V. Entonces*

$$\dim U + \dim U^0 = \dim V.$$

Proposición 61. *Supongamos que V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces*
- $\operatorname{null} T' = (\operatorname{rango} T)^0$
- $\dim \operatorname{null} T' = \dim \operatorname{null} T + \dim W - \dim V$.

Proposición 62. *Supongamos que V y W son de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces T es sobreyectiva si y solo si T' es inyectiva.*

Proposición 63. *Supongamos que V y W son de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces*
- *a)* $\dim \operatorname{rango} T' = \dim \operatorname{rango} T$
- *b)* $\operatorname{rango} T' = (\operatorname{null} T)^0$.

Proposición 64. *Supongamos que V y W son de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces T es inyectiva si y solo si T' es sobreyectiva.*

Definición 48. *Matriz transpuesta. $(A^t)_{k,j} = A_{j,k}$.*

Proposición 65. *Si A es una matriz $m \times n$ y C es una matriz $n \times p$, entonces*

$$(AC)^t = C^t A^t.$$

Proposición 66. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\mathcal{M}(T') = (\mathcal{M}(T))^t$*

Definición 49. *Supongamos que A es una matriz $m \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$.*
- *El rango por filas de A es la dimensión del conjunto generador de las filas de A en $\mathbb{F}^{1,n}$.*
- *El rango por columnas de A es la dimensión del conjunto generador de las columnas de A en $\mathbb{F}^{m,1}$.*

Proposición 67. *Supongamos que V y W son de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces $\dim \operatorname{rango} T$ es igual al rango por columnas de $\mathcal{M}(T)$.*

Proposición 68. *Supongamos que $A \in \mathbb{F}^{m,n}$. Entonces el rango por filas de A es igual al rango por columnas de A.*

Definición 50. *El rango de una matriz $A \in \mathbb{F}^{m,n}$ es el rango por columnas de A.*

4. Polinomios

Definición 51. *Supongamos $z = a + bi$, donde a y b son números reales.*

- *La parte de real de z, denotada $\operatorname{Re} z$, se define como $\operatorname{Re} z = a$.*
- *La parte imaginaria de z, denotada $\operatorname{Im} z$, se define como $\operatorname{Im} z = b$.*

Definición 52. *Supongamos que $z \in \mathbb{C}$.*

- *El conjugado de $z \in \mathbb{C}$, denotado $\overline{z}$, se define por*

$$\overline{z} = \operatorname{Re} z - (\operatorname{Im} z)i$$

.

- *El valor absoluto de un número complejo, denotado $|z|$, se define por*

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Proposición 69. *Supongamos que $w, z \in \mathbb{C}$. Entonces:*

- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$
- $z - \overline{z} = 2(\operatorname{Im} z)i$
- $z\overline{z} = |z|^2$
- $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$ *y* $\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *y* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|wz| = |w||z|$
- $|w + z| \leq |w| + |z|$

Proposición 70. *Supongamos que $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$. Si*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m = 0$$

para cada $z \in \mathbb{F}$. Entonces $a_0 = \ldots = a_m = 0$.

Proposición 71. *Supongamos que $p, s \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, con $s \neq 0$. Entonces existen únicos polinomios $q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que*

$$p = sq + r$$

y $\deg r < \deg s$.

Definición 53. *Un número $\lambda \in \mathbb{F}$ se llama cero (o raíz) de un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ si $p(\lambda) = 0$.*

Definición 54. *Un polinomio $s \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ se llama factor de $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ si existe un polinomio $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $p = sq$.*

Proposición 72. *Supongamos que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces $p(\lambda) = 0$ si y solo si existe un polinomio $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que*

$$p(z) = (z - \lambda)q(z)$$

para cada $z \in \mathbb{F}$.

Proposición 73. *Supongamos que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ es un polinomio de grado $m \geq 0$. Entonces p tiene a lo sumo m raíces distintas en $\mathbb{F}$*

Proposición 74 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio no constante a coeficientes complejos tiene una raíz.*

Proposición 75. *Si $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ es un polinomio no constante, entonces p tiene una única factorización (excepto para el orden de los factores) de la forma*

$$p(z) = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$$

donde $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$.

Proposición 76. *Supongamos que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ es un polinomio a coeficientes reales. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es una raíz de p, entonces también lo es $\overline{\lambda}$.*

Proposición 77. *Supongamos que $b, c \in \mathbb{R}$. Entonces existe una factorización del polinomio de la forma*

$$x^2 + bx + c = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ si y solo si $b^2 \geq 4c$.

Proposición 78. *Supongamos que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es un polinomio no constante. Entonces p tiene una única factorización (excepto por el orden de los factores) de la forma*

$$p(x) = c(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_m)(x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (x^2 + b_M x + c_M),$$

donde $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, b_1, \ldots, b_M, c_1, \ldots, c_M \in \mathbb{R}$, con $b_j^2 < 4c_j$ para cada j.

5. Autovalores, Autovectores, y Subespacios Invariantes.

5.1. 5.A - Subespacios Invariantes.

Definición 55. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Un subespacio U de V se llama invariante bajo T si $u \in U$ implica $Tu \in U$.*

Nota 10. *En otras palabras, U es invariante bajo T si $T|_U$ es un operador sobre U.*

Definición 56. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Un número $\lambda \in \mathbb{F}$ se dice que es un autovalor de T si existe $v \in V$ tal que $v \neq 0$ y $Tv = \lambda v$.*

Proposición 79. *Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita, $T \in \mathcal{L}(V)$, y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *λ es un autovalor de T.*
- *$T - \lambda I$ no es inyectiva.*
- *$T - \lambda I$ no es sobreyectiva.*
- *$T - \lambda I$ no es invariante.*

Nota 11. *Recordemos que $I \in \mathcal{L}(V)$ es el operador identidad definida por $Iv = v$ para todo $v \in V$.*

Definición 57. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ es un autovalor de T. Un vector $v \in V$ es un autovector de T correspondiente a λ si $v \neq 0$ y $Tv = \lambda v$.*

Proposición 80. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son autovalores distintos de T y $v_1, \ldots, v_m$ los autovectores correspondientes. Entonces $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes.*

Proposición 81. *Supongamos que V es de dimensión finita. Entonces cada operador sobre V tiene a lo sumo $\dim V$ de autovalores distintos.*

Definición 58. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y U es un subespacio de V invariante bajo T.*

- *El operador restricción $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ se define por*

  $$T|_U(u) = Tu$$

  para $u \in U$.

- *El operador cociente $T/U \in \mathcal{L}(V/U)$ se define por*

  $$(T/U)(v + U) = Tv + U$$

  para $v \in V$.

5.2. 5.B - Autovectores y Matrices Triangulares Superiores

Definición 59. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y m un entero positivo.*

- *T^m se define por*
$$T^m = \underbrace{T \cdots T}_{m \text{ veces}}.$$
- *T^0 se define como el operador identidad I sobre V.*
- *Si T es invertible con inversa T^{-1}, entonces T^{-m} se define por*
$$T^{-m} = (T^{-1})^m.$$

Definición 60. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ es un polinomio dado por*
$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$$
para $z \in \mathbb{F}$. Entonces $p(T)$ es un operador definido por
$$p(T) = a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_m T^m.$$

Definición 61. *Si $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, entonces $pq \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ es el polinomio definido por*
$$(pq)(z) = p(z)q(z)$$
para $z \in \mathbb{F}$.

Proposición 82. *Supongamos que $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces*

- *a) $(pq)(T) = p(T)q(T)$*
- *b) $p(T)q(T) = q(T)p(T)$*

Proposición 83. *Todo operador sobre un espacio vectorial de dimensión finita, que no sea cero y complejo tiene un autovalor.*

Definición 62. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V. La matriz de T con respecto a esta base es la matriz $n \times n$*
$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Nota 12. *La $k-$ésima columna de la matriz $\mathcal{M}(T)$ está formada por los coeficientes usados para escribir Tv_k como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.*

Definición 63. *La diagonal de una matriz cuadrada consiste de las entradas a lo largo de la linea que va desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha.*

Definición 64. *Una matriz es triangular superior si todas las entradas debajo de la diagonal son iguales a* 0.

Proposición 84. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a) La matriz de T con respecto a $v_1, \ldots, v_n$ es triangular superior.*
- *b) $Tv_j \in span(v_1, \ldots, v_j)$ para cada $j = 1, \ldots, n$.*
- *c) $span(v_1, \ldots, v_j)$ es invariante bajo T para cada $j = 1, \ldots, n$.*

Nota 13. *El siguiente resultado no vale en espacios vectoriales reales, porque el primer vector en una base con respecto a un operador que tiene una matriz triangular superior es un autovector del operador. Entonces, si un operador sobre un espacio real no tiene autovalores, entonces no hay base respecto a la cual el operador tiene una matriz triangular superior. Ver ejemplo 5.8(a).*

Proposición 85. *Supongamos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces T tiene una matriz triangular superior con respecto a alguna base de V.*

Proposición 86. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene una matriz triangular superior con respecto a alguna base de V. Entonces, T es invertible si y solo si todas las entradas en la diagonal de esa matriz tirangular superior son no nulas.*

Proposición 87. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene una matriz triangular superior con respecto a alguna base de V. Entonces los autovalores de T son precisamente las entradas en la digonal de esa matriz triangular superior.*

5.3. 5.C - Autoespacios y Matrices Diagonales

Definición 65. *Una matriz diagonal es una matriz cuadrada tal que es* 0 *en todas sus entradas excepto posiblemente en la diagonal.*

Definición 66. *Supongamos que* $T \in \mathcal{L}(V)$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$. *El autoespacio de* T *correspondiente a* λ, *denotado* $E(\lambda, T)$, *se define por*

$$E(\lambda, T) = \text{null}(T - \lambda I).$$

En otras palabras, $E(\lambda, T)$ *es el conjunto de todos los autovectores de* T *correspondientes a* λ, *junto con el vector nulo.*

Proposición 88. *Supongamos que* V *es de dimensión finita y* $T \in \mathcal{L}(V)$. *Supongamos además que* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *son autovalores distintos de* T. *Entonces*

$$E(\lambda_1, T) + \cdots + E(\lambda_m, T)$$

es una suma directa. Además,

$$\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leq \dim V.$$

Definición 67. *Un operador* $T \in \mathcal{L}(V)$ *es diagonalizable si el operador tiene una matriz diagonal con respecto a alguna base de* V.

Proposición 89. *Supongamos que* V *es de dimensión finita y* $T \in \mathcal{L}(V)$. *Sea* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *denota a los distintos autovalores de* T. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a)* T *es diagonalizable.*
- *b)* V *tiene una base que consiste de los autovectores de* T.
- *c) Existen subespacios 1-dimensionales* $U_1, \ldots, U_n$ *de* V, *cada una invariante bajo* T, *tal que*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n.$$

- *d)* $V = E(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T)$.
- *e)* $\dim V = \dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T)$.

Proposición 90. *Si* $T \in \mathcal{L}(V)$ *tiene* $\dim V$ *distintos autovalores, entonces* T *es diagonalizable.*

6. Espacios con Producto Interno

6.1. 6.A - Productos Internos y Normas

Definición 68. *Para* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *el producto punto (escalar) entre* x *e* y *se define por*

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *y* $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Definición 69. *Un producto interno sobre* V *es una función que toma cada par ordenado* (u, v) *de elementos de* V *al número* $\langle u, v \rangle \in \mathbb{F}$ *y tiene las siguientes propiedades:*

- $\langle v, v \rangle \geq 0$ *para todo* $v \in V$.
- $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$.
- $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$.
- $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{F}$ *y todo* $u, v \in V$.
- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ *para todo* $u, v \in V$.

Definición 70. *Un espacio con producto interno es un espacio vectorial* V *junto con un producto interno sobre* V.

Nota 14. V *denota un espacio con producto interno sobre* $\mathbb{F}$.

Proposición 91.
- *Para cada $u \in V$ fijo, la función que lleva v a $\langle v, u\rangle$ es una transformación lineal de V en $\mathbb{F}$.*
- $\langle 0, u\rangle = 0$ *para cada* $u \in V$.
- $\langle u, 0\rangle = 0$ *para todo* $u \in V$.
- $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$.
- $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle$ *para cada* $\lambda \in \mathbb{F}$ *y* $u, v \in V$.

Definición 71. *Para cada $v \in V$, la norma de v, denotada $||v||$, se define por*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Proposición 92. *Supongamos que $v \in V$.*

- *a)* $||v|| = 0$ *si y solo si* $v = 0$.
- *b)* $||\lambda v|| = |\lambda|||v||$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{F}$.

Definición 72. *Dos vectores $u, v \in V$ se dicen ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$.*

Proposición 93.
- *a) 0 es ortogonal a cada vector de V.*
- *b) 0 es el único vector en V que es ortogonal a sí mismo.*

Proposición 94 (Teorema de Pitágoras)**.** *Supongamos que u, v son vectores ortogonales en V. Entonces*

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Proposición 95 (Una descomposición ortogonal)**.** *Supongamos que $u, v \in V$, con $v \neq 0$. Sea $c = \dfrac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}$ y $w = u - \dfrac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}$. Entonces*

$$\langle w, v\rangle = 0 \text{ y } u = cv + w.$$

Proposición 96. *Supongamos que $u, v \in V$. Entonces*

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

Proposición 97. *Supongamos que $u, v \in V$. Entonces*

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Esta desigualdad es la igualdad si y solo si alguno de u, v es un múltiplo no negativo del otro.

Proposición 98 (Igualdad del Paralelogramo)**.** *Supongamos que $u, v \in V$. Entonces*

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2).$$

6.2. 6.B - Bases Ortonormales

Definición 73.
- *Una lista de vectores se dice ortonormal si cada vector de la lista tiene norma 1 y es ortogonal a los otros vectores en la lista.*
- *En otras palabras, una lista $e_1, \dots, e_m$ de vectores en V es ortonormal si*

$$\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & si\ j = k \\ 0 & si\ j \neq k \end{cases}$$

Una lista de vectores se dice ortonormal si cada vector de la lista tiene norma 1 y es ortogonal a los otros vectores en la lista.

Proposición 99. *Si $e_1, \dots, e_m$ es una lista ortonormal de vectores en V, entonces*

$$||a_1e_1 + \cdots + a_me_m||^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_m|^2$$

para todo $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$.

Proposición 100. *Toda lista ortonormal de vectores es linealmente independiente.*

Definición 74. *Una base ortonormal de V es una lista ortonormal de vectores en V que es una base de V.*

Proposición 101. *Toda lista ortonormal de vectores en V con longitud* $\dim V$ *es una base ortonormal de V.*

Proposición 102. *Supongamos que $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal de V y $v \in V$. Entonces*

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

y

$$||v||^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n \rangle|^2.$$

Proposición 103 (Proceso de Gram-Schimdt)**.** *Supongamos que $v_1, \ldots, v_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en V. Sea $e_1 = v_1/||v_1||$. Para $j = 2, \ldots, m$, definimos e_j inductivamente por*

$$e_j = \frac{v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}}{||v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}||}$$

Entonces $e_1, \ldots, e_m$ es una lista ortonormal de vectores en V tal que

$$span(v_1, \ldots, v_j) = span(e_1, \ldots, e_j)$$

para $j = 1, \ldots, m$.

Proposición 104. *Todo espacio con producto interno de dimensión finita tiene una base ortonormal.*

Proposición 105. *Supongamos que V es de dimensión finita. Entonces toda lista ortonormal de vectores en V se puede extender a una base ortonormal de V.*

Proposición 106. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Si T tiene una matriz triangular superior con respecto a alguna base de V, entonces T tiene una matriz triangular superior con respecto a alguna base ortonormal de V.*

Proposición 107. *Supongamos que V es de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces T tiene una matriz triangular superior con respecto a alguna base ortonormal de V.*

Definición 75. *un funcional lineal sobre V es una transformación lineal de V en $\mathbb{F}$. En otras palabras, un funcional lineal es un elemento de $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$.*

Proposición 108 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Supongamos que V es de dimensión finita y ϕ es un funcional lineal sobre V. Entonces existe un único vector $u \in V$ tal que*

$$\phi(v) = \langle v, u \rangle$$

para cada $v \in V$.

6.3. 6.C - Complementos Ortogonales y Problemas de Minimización

Definición 76. *Si U es un subconjunto de V, entonces el complemento ortogonal de U, denotado $U^\perp$, es el conjunto de todos los vectores en V que son ortogonales a cada vector en U:*

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ para cada } u \in U\}.$$

Proposición 109.

- *a) Si U es un subconjunto de V, entonces $U^\perp$ es un subespacio de V.*
- *b) $\{0\}^\perp = V$.*
- *c) $V^\perp = \{0\}$.*
- *d) Si U es un subconjunto de V, entonces $U \cap U^\perp \subset \{0\}$.*
- *e) Si U y W son subconjuntos de V y $U \subset W$, entonces $W^\perp \subset U^\perp$.*

Proposición 110. *Supongamos que U es un subespacio de V de dimensión finita. Entonces*

$$V = U \oplus U^\perp.$$

Proposición 111. *Supongamos que V es de dimensión finita y U es un subespacio de V. Entonces*

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U.$$

Proposición 112. *Supongamos que U es un subespacio de dimensión finita de V. Entonces*

$$U = (U^{\perp})^{\perp}.$$

Definición 77. *Supongamos que U es un subespacio de dimensión finita de V. La proyección ortogonal de V en U es el operador $P_U \in \mathcal{L}(V)$ definido de la siguiente manera:*
Para $v \in V$, escribimos $v = u + w$, donde $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$. Entonces $P_U v = u$.

Proposición 113. *Supongamos que U es un subespacio de dimensión finita de V y $v \in V$. Entonces*

- *a)* $P_U \in \mathcal{L}(V)$.
- *b)* $P_U u = u$ *para cada* $u \in U$.
- *c)* $P_U w = 0$ *para todo* $w \in U^{\perp}$.
- *d)* $\operatorname{rango} P_U = U$.
- *e)* $\operatorname{null} P_U = U^{\perp}$.
- *f)* $v - P_U v \in U^{\perp}$.
- *g)* $P_U^2 = P_U$.
- *h)* $||P_U v|| \leq ||v||$.
- *i) Para cada base ortonormal* $e_1, \dots, e_m$ *de* U,

$$P_U v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_m \rangle e_m.$$

Proposición 114 (Minimizando la distancia a un subespacio.)**.** *Supongamos que U es un subespacio de dimensión finita de $V, v \in V$ y $u \in U$. Entonces*

$$||v - P_U v|| \leq ||v - u||.$$

Además, la desigualdad arriba es una igualdad si y solo si $u = P_U v$.

7. Operadores sobre Espacios con Producto Interno (Opcional)

7.1. 7.A - Operadores Autoadjuntos y Normales

Definición 78. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. La adjunta de T es la función $T^* : W \to V$ tal que*

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$$

para cada $v \in V$ y cada $w \in W$.

Proposición 115. *Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$.*

Proposición 116.

- *a)* $(S + T)^* = S^* + T^*$ *para todo* $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$.
- *b)* $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ *para* $\lambda \in \mathbb{F}$ *y* $T \in \mathcal{L}(V, W)$.
- *c)* $(T^*)^* = T$ *para todo* $T \in \mathcal{L}(V, W)$.
- *d)* $I^* = I$, *donde I es el operador identidad sobre V.*
- *e)* $(ST)^* = T^* S^*$ *para todo* $T \in \mathcal{L}(V, W)$ *y* $S \in \mathcal{L}(W, U)$ *(acá U es un espacio con producto interno sobre $\mathbb{F}$).*

Proposición 117. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces*

- *a)* $\operatorname{null} T^* = (\operatorname{rango} T)^{\perp}$.
- *b)* $\operatorname{rango} T^* = (\operatorname{null} T)^{\perp}$.
- *c)* $\operatorname{null} T = (\operatorname{rango} T^*)^{\perp}$.
- *d)* $\operatorname{rango} T = (\operatorname{null} T^*)^{\perp}$.

Definición 79. *La transpuesta conjugada de la matriz $m \times n$ es la matriz $n \times m$ que se obtiene intercambiando las filas y columnas y luego tomando el conjugado complejo de cada entrada.*

Proposición 118. *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Supongamos que $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal de V y $f_1, \ldots, f_m$ es una base ortonormal de W. Entonces*

$$\mathcal{M}(T^*, (f_1, \ldots, f_m), (e_1, \ldots, e_n))$$

es la transpuesta conjugada de

$$\mathcal{M}(T, (e_1, \ldots, e_n), (f_1, \ldots, f_m)).$$

Definición 80. *Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ se llama autoadjunto si $T = T^*$. En otras palabras, $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto si y solo si*

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$$

para todo $v, w \in V$.

Nota 15. *Hermitiana para lxs mortales.*

Proposición 119. *Todo autovalor de un operador autoadjunto es real.*

Proposición 120. *Supongamos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que*

$$\langle Tv, v \rangle = 0$$

para todo $v \in V$. Entonces $T = 0$.

Proposición 121. *Supongamos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces T es autoadjunto si y solo si*

$$\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$$

para cada $v \in V$.

Definición 81.

- *Un operador sobre un espacio con producto interno es normal si conmuta con su adjunto.*
- *En otras palabras, $T \in \mathcal{L}(V)$ es normal si*

$$TT^* = T^*T.$$

Nota 16. *El siguiente resultado implica que $\operatorname{null} T = \operatorname{null} T^*$ para todo operador normal T.*

Proposición 122. *Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es normal si y solo si*

$$||Tv|| = ||T^*v||$$

para todo $v \in V$.

Proposición 123. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ es normal y $v \in V$ es un autovector de T con autovalor λ. Entonces v también es un autovector de T^* con autovalor $\overline{\lambda}$.*

Proposición 124. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ es normal. Entonces los autovectores de T correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.*

7.2. 7.B - El Teorema Espectral

Proposición 125 (Teorema Espectral Complejo)**.** *Supongamos que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a) T es normal.*
- *b) V tiene una base ortonormal que consiste de los autovectores de T.*
- *c) T tiene una matriz diagonal con respecto a alguna base ortonormal de V.*

Proposición 126. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto y $b, c \in \mathbb{R}$ son tal que $b^2 < 4c$. Entonces*

$$T^2 + bT + cI$$

es invertible.

Proposición 127. *Supongamos $V \neq \{0\}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador autoadjunto. Entonces T tiene un autovalor.*

Proposición 128. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto y U un subespacio de V que es invariante bajo T. Entonces*

- *a) $U^\perp$ es invariante bajo T.*
- *b) $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ es autoadjunto.*
- *c) $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$ es autoadjunto.*

Proposición 129 (Teorema Espectral Real)**.** *Supongamos que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a) T es autoadjunto.*
- *b) V es una base ortonormal que consiste de autovectores de T.*
- *c) T tiene una matriz diagonal con respecto a alguna base ortonormal de V.*

7.3. 7.C - Operadores Positivos e Isometrías.

Definición 82. *Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es positivo si T es autoadjunta y*

$$\langle Tv, v\rangle \geq 0$$

para todo $v \in V$.

Definición 83. *Un operador R se llama una raíz cuadrada de un operador T si $R^2 = T$.*

Proposición 130. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *a) T es positiva.*
- *b) T es autoadjunto y todos los autovalores de T son no negativos.*
- *c) T tiene una raíz cuadrada positiva.*
- *d) T tiene una raíz cuadrada autoadjunta.*
- *e) Existe un operador $R \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T = R^*R$.*

Todo operador positivo sobre V tiene una única raíz cuadrada positiva.

Proposición 131.

- *Un operador $S \in \mathcal{L}(V)$ se llama isometría si*

$$||Sv|| = ||v||$$

para todo $v \in v$.

- *En otras palabras, un operador es una isometría si preserva normas.*

Proposición 132. *Supongamos que $S \in \mathcal{L}(V)$. Entonces las siguientes son equivalentes:*

- *a) S es una isometría.*
- *b) $\langle Su, Sv\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in V$.*
- *c) $Se_1, \ldots, Se_n$ es ortonormal para cada lista ortonormal de vectores $e_1, \ldots, e_n$ en V.*
- *d) Existe una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de V tal que $Se_1, \ldots, Se_n$ es ortonormal.*
- *e) $S^*S = I$.*
- *f) $SS^* = I$.*
- *g) S^* es una isometría.*
- *h) S es invertible y $S^{-1} = S^*$.*

Proposición 133. *Supongamos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y $S \in \mathcal{L}(V)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *S es una isometría.*
- *Existe una base ortonormal de V que consiste de los autovectores de S cuyos correspondientes autovalores tiene todos valor absoluto 1.*

7.4. 7.D - Descomposición Polar y Descomposición del Valor Singular

Nota 17. *Si T es un operador positivo, entonces $\sqrt{T}$ denota la única raíz cuadrada positiva de T.*

Proposición 134 (Descomposición Polar)**.** *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces existe una isometría $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que*

$$T = S\sqrt{T^*T}.$$

Definición 84. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Los valores singulares de T son los autovalores de $\sqrt{T^*T}$, con cada autovalor λ repetido $\dim E(\lambda, \sqrt{T^*T})$ veces.*

Proposición 135 (Descomposición del Valor Singular)**.** *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene valores singulares $s_1, \ldots, s_n$. Entonces existen bases ortonormales $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_n$ de V tal que*

$$Tv = s_1\langle v, e_1\rangle f_1 + \cdots + s_n\langle v, e_n\rangle f_n$$

para cada $v \in V$.

Proposición 136. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces los valores singulares de T son las raíces no negativos de los autovalores de T^*T, con cada autovalor λ repetido $\dim E(\lambda, T^*T)$ veces.*

8. Operadores sobre Espacios Vectoriales Complejos (opcional)

8.1. 8.A - Autovectores Generalizados y Operadores Nilpotentes

Proposición 137. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces*

$$\{0\} = \operatorname{null} T^0 \subset \operatorname{null} T^1 \subset \cdots \subset \operatorname{null} T^k \subset \operatorname{null} T^{k+1} \subset \cdots.$$

Proposición 138. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que m es un entero no negativo tal que $\operatorname{null} T^m = \operatorname{null} T^{m+1}$. Entonces*

$$\operatorname{null} T^m = \operatorname{null} T^{m+1} = \operatorname{null} T^{m+2} = \operatorname{null} T^{m+3} = \cdots.$$

Proposición 139. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea $n = \dim V$. Entonces*

$$\operatorname{null} T^n = \operatorname{null} T^{n+1} = \operatorname{null} T^{n+2} = \cdots.$$

Proposición 140. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea $n = \dim V$. Entonces*

$$V = \operatorname{null} T^n \oplus \operatorname{rango} T^n.$$

Definición 85. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y λ es un autovalor de T. Un vector $v \in V$ se dice autovector generalizado de T correspondiente a λ si $v \neq 0$ y*

$$(T - \lambda I)^j v = 0$$

para algún entero positivo j.

Definición 86. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. El autoespacio generalizado de T correspondiente a λ, denotado $G(\lambda, T)$, se define como el conjunto de todos los autovectores generalizados de T correspondientes a λ, junto con el vector nulo.*

Proposición 141. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces $G(\lambda, T) = \operatorname{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$.*

Proposición 142. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son distintos autovalores de T y $v_1, \ldots, v_m$ son los correspondientes autovectores generalizados. Entonces $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes.*

Definición 87. *Un operador se llama nilpotente si alguna de sus potencias es igual a 0.*

Proposición 143. *Supongamos que $N \in \mathcal{L}(V)$ es nilpotente. Entonces $N^{\dim V} = 0$.*

Proposición 144. *Supongamos que N es un operador nilpotente sobre V. Entonces existe una base de V con respecto a la cual la matriz de N tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

acá todas las entradas sobre y debajo de la diagonal son ceros.

8.2. 8.B - Descomposición de un Operador.

Proposición 145. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Entonces $p(T)$ y $\operatorname{rango} p(T)$ son invariantes por T.*

Proposición 146. *Supongamos que V es un espacio vectorial complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ los distintos autovalores de T. Entonces*

- *(a) $V = G(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_m, T)$;*
- *(b) Cada $G(\lambda_j, T)$ es invariante por T;*
- *(c) cada $(T - \lambda_j I)|_{G(\lambda_j, T)}$ es nilpotente.*

Proposición 147. *Supongamos que V es un campo vectorial complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces existe una base de V correspondiente a los autovectores generalizados de T.*

Definición 88.

- *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. La multiplicidad de un autovalor λ de T se define como la dimensión del autoespacio generalizado correspondiente $G(\lambda, T)$.*
- *En otras palabras, la multiplicidad de un autovalor de T es igual a $\dim \operatorname{null}(T - \lambda I)^{\dim V}$.*

Nota 18.

- *multiplicidad algebraica de $\lambda = \dim \operatorname{null}(T - \lambda I)^{\dim V} = \dim G(\lambda, T)$.*
- *multiplicidad geométrica de $\lambda = \dim \operatorname{null}(T - \lambda I) = dim E(\lambda, T)$.*

Proposición 148. *Supongamos que V es un campo vectorial complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces la suma de las multiplicidades de todos los autovalores de T es igual a $\dim V$.*

Definición 89. *Una matriz diagonal por bloques es una matriz cuadrada de la forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

donde $A_1, \ldots, A_m$ son matrices cuadradas a lo largo de la diagonal y todas las otras entradas de la matriz igual a 0.

Proposición 149. *Supongamos que V es un espacio vectorial complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ los distintos autovalores de T, con multiplicidades $d_1, \ldots, d_m$. Entonces hay una base de V con respecto a la cual T tiene una matriz diagonal por bloques de la forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$$

donde cada A_j es una matriz triangular superior de $d_j \times d_j$ de la forma

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Proposición 150. *Supongamos que $N \in \mathcal{L}(V)$ es nilpotente. Entonces $I + N$ tiene una raíz cuadrada.*

Proposición 151. *Supongamos que V es un espacio vectorial complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$ es invertible. Entonces T tiene una raíz cuadrada.*

8.3. 8.C - Polinomio Característico y Polinomio Minimal.

Supongamos que V es un espacio vectorial complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ denota a los distintos autovalores de T, con multiplicidades $d_1, \ldots, d_m$. El polinomio

$$(z - \lambda_1)^{d_1} \cdots (z - \lambda_m)^{d_m}$$

se llama polinomio característico de T.

Proposición 152. *Supongamos que V es un campo vectorial complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces*

- *(a) El polinomio característico de T tienen grado $\dim V$.*

- *(b) Los ceros del polinomio característico de T son los autovalores de T.*

Proposición 153 (Teorema de Cayley-Hamilton)**.** *Supongamos que V es un espacio vectorial complejo y $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea q el polinomio característico de T. Entonces $q(T) = 0$.*

Definición 90. *Un polinomio mónico es un polinomio cuyo coeficiente de mayor grado es 1.*

Definición 91. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces el polinomio minimal de T es el único polinomio mónico p de grado más pequeño tal que $p(T) = 0$.*

Proposición 154. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ y $q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Entonces $q(T) = 0$ si y solo si q es un polinomio múltiplo del polinomio minimal de T.*

Proposición 155. *Supongamos que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces el polinomio característico de T es un polinomio múltiplo del polinomio minimal de T.*

Proposición 156. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces los ceros del polinomiominimal de T son precisamente los autovalores de T.*

8.4. 8.D - Forma de Jordan.

Proposición 157. *Supongamos que $N \in \mathcal{L}(V)$ es nilpotente. Entonces existen vectores $v_1, \dots, v_n \in V$ y enteros no negativos $m_1, \dots, m_n$ tal que*

- *(a) $N^{m_1}v_1, \dots, Nv_1, \dots, N^{m_n}v_n, \dots, Nv_n, v_n$ es una base de V.*
- *(b) $N^{m_1+1}v_1 = \cdots = N^{m_n+1}v_n = 0$.*

Definición 92. *Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V)$. Una base de V se llama base de Jordan para T si con respecto a esta base, T tiene una matriz diagonal por bloques*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$$

donde cada A_j es una matriz triangular superior de la forma

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

9. Apunte de Espacios con Producto Interno

9.1. Producto Interno

Definición 93. *Un espacio con producto interno sobre V es un mapa*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

con las siguientes propiedades:

- *1) Linealidad en el primer lugar: $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ y $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$ para $u, v, w \in V$ y $a \in \mathbb{F}$.*
- *2) Positividad: $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in V$.*
- *3) Definición positiva: $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$.*
- *4) Simetría con su conjugado: $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.*

Definición 94. *Un espacio con producto interno es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ junto con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Lema 1. *El producto interno es anti-lineal en el segundo lugar, es decir, $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ y $\langle u, av \rangle = \overline{a}\langle u, v \rangle$ para todo $u, v, w \in V$ y $a \in \mathbb{F}$.*

9.2. Normas

Definición 95. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación*

$$||\cdot||: V \to \mathbb{R}$$

$$v \mapsto ||v||$$

es una norma si se verifican las siguientes tres condiciones:

- *1)* $||v|| = 0 \iff v = 0$.
- *2)* $||av|| = |a|||v||$ *para todo* $a \in \mathbb{F}$ *y* $v \in V$.
- *3)* $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ *para todo* $v, w \in V$.

9.3. Ortogonalidad

Definición 96. *Dos vectores $u, v \in V$ son ortogonales (denotado $u \perp v$) si $\langle u, v\rangle = 0$.*

Teorema 2 (Teorema de Pitágoras)**.** *Si $u, v \in V$, V espacio con producto interno, con $u \perp v$, entonces $||\cdot||$ definido por $||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ obedece*

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

Nota 19. *El Teorema de Pitágoras vale para espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ ya que, en ese caso, $\langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle u, v\rangle$.*

Definición 97. *Dados dos vectores $u, v \in V$ con $v \neq 0$, podemos descomponer de manera única u en dos partes. una parte paralela a v y otra parte ortogonal a v. Esto se llama descomposición ortogonal. Más precisamente:*

$$u = u_1 + u_2$$

donde $u_1 = av$ y $u_2 \perp v$ para algún escalar $a \in \mathbb{F}$. Para obtener tal descomposición, escribimos $u_2 = u - u_1 = u - av$. Entonces, para que u_2 sea ortogonal a v, necesitamos

$$0 = \langle u - av, v\rangle = \langle u, v\rangle - a||v||^2.$$

Resolviendo para a vale $a = \dfrac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}$ tal que

$$u = \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v + \left(u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v\right).$$

Teorema 3 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Dados $u, v \in V$ cualesquiera, tenemos*

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||.$$

Además, la igualdad vale si y solo si u y v son linealmente dependientes, i.e., uno es múltiplo del otro.

Teorema 4 (Desigualdad Triangular)**.** *Para todos $u, v \in V$ tenemos*

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Teorema 5 (Ley del Paralelogramo)**.** *Dados $u, v \in V$ cualesquiera, tenemos*

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2).$$

9.4. Bases Ortonormales

Definición 98. *Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Una lista de vectores no nulos $(e_1, \ldots, e_m)$ en V se dice ortogonal si*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0, \quad \text{para todo } 1 \leq i \neq j \leq m.$$

La lista $(e_1, \ldots, e_m)$ se dice ortonormal si

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \text{para todos } i, j = 1, \ldots, m,$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1 \iff i = j$).

Proposición 158. *Toda lista ortogonal de vectores no nulos en V es linealmente independiente.*

Definición 99. *Una base ortonormal de un espacio V de dimensión finita con producto interno es una lista ortonormal de vectores que es una base para V.*

Teorema 6. *Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base ortonormal para V. Entonces, para todo $v \in V$, tenemos*

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$$

y

$$||v||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k \rangle|^2.$$

9.5. El Procedimiento de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Teorema 7. *Si $(v_1, \ldots, v_m)$ es una lista de vectores linealmente independientes en un espacio con producto interno V, entonces existe una lista ortonormal $(e_1, \ldots, e_m)$ tal que*

$$span(v_1, \ldots, v_k) = span(e_1, \ldots, e_k), \quad \text{para todo } k = 1, \ldots, m.$$

Corolario 1. *Todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interno tiene una base ortonormal.*

Corolario 2. *Toda lista ortonormal de vectores en V se puede extender a una base ortonormal de V.*

Corolario 3. *Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{F}$ y $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Si T es triangular superior con respecto a alguna base, entonces T es triangular superior con respecto a alguna base ortonormal.*

9.6. Proyecciones Ortogonales y Problemas de Minimización

Definición 100. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $U \subset V$ un subconjunto (no necesariamente un subespacio) de V. Entonces el complemento ortogonal de U se define como el conjunto*

$$U^\perp = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

Nota 20. *$U^\perp$ siempre es un subespacio de V y*

$$\{0\}^\perp = V \text{ y } V^\perp = \{0\}.$$

Teorema 8. *Si $U \subset V$ es un subespacio de V, entonces $V = U \oplus U^\perp$.*

Teorema 9. *Si $U \subset V$ es un subespacio de V, entonces $U = (U^\perp)^\perp$.*

Definición 101. *Sea $U \subset V$ un subespacio de un espacio de dimensión finita con producto interno. Entonces cada $v \in V$ puede ser escrito de manera única como $v = u + w$ donde $u \in U$ y $w \in U^\perp$.*
Definimos

$$\begin{aligned} P_U : V &\to V \\ v &\mapsto u. \end{aligned}$$

Proposición 159. *Sea $U \subset V$ un subespacio de V y $v \in V$. Entonces*

$$||v - P_U v|| \leq ||v - u|| \quad \text{para todo } u \in U$$

Además, la igualdad vale si y solo si $u = P_U v$.

10. Apunte de Formas de Jordan - Formas Canónicas de Jordan

10.1. Invariancia

Definición 102. *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Un subespacio W de V se dice invariante por T si T aplica a W en si mismo, i.e., si $v \in W$ entonces $T(v) \in W$. En este caso T restringido a W define un operador lineal,*

$$\begin{aligned} \tilde{T} : W &\to W \\ w &\mapsto \tilde{T}(w) = T(w). \end{aligned}$$

Teorema 10. *Sean $T : V \to V$ y $p(t)$ un polinomio cualquiera. Entonces $\operatorname{null}(p(T))$ es invariante por T.*

Teorema 11. *Sean W un subespacio invariante de $T : V \to V$, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Entonces T tiene una representación matricial por bloques*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde A es una representación matricial de la restricción de T a W.

10.2. Descomposición en Suma Directa de Invariantes

Definición 103. *Se dice que un espacio vectorial V es la suma directa de sus subespacios $W_1, \dots, W_r$, si todo vector $v \in V$ puede escribirse de manera única como*

$$v = w_1 + \cdots + w_r,\ w_i \in W_i,\ i = 1, \dots, r.$$

tal que $W_i \cap W_j = \{0\}$. Se nota $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Teorema 12. *Sean $W_1, \dots, W_r$ subespacios de V, y supongamos que $B_1 = \{w_1^1, \dots, w_{n_1}^1\}, \dots, B_r = \{w_1^r, \dots, w_{n_r}^r\}$ son bases de $W_1, \dots, W_r$ respectivamente.*
Entonces V es la suma directa de los W_i si y solo si $B = \{w_1^1, \dots, w_{n_1}^1, \dots, w_1^r, \dots, w_{n_r}^r\}$ es una base de V.

Definición 104. *Sean $T : V \to V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, con W_i subespacios invariantes bajo $T(T(W_i) \subset W_i,\ i = 1, \dots, r)$. Sea T_i la restricción de T a W_i. Se dice que T descompone en los operadores T_i o que T es suma directa de los T_i, y se escribe $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$. También se dice que los subespacios $W_1, \dots, w_r$ reducen a T, o que forman una descomposición de V en una suma directa invariante por T.*

Teorema 13. *Supongamos que $T : V \to T$ es lineal y V es la suma directa de subespacios invariantes por $T, W_1, \dots, W_r$. Si A_i es la representación matricial de la restricción de T a W_i relativa a bases ordenadas dadas de W_i, entonces T tiene asociada la matriz diagonal por bloques*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

10.3. Descomposición Primaria

Teorema 14. *Sea $T : V \to V$ lineal, y $f(t) = g(t)h(t)$ polinomios tales que $f(T) = 0$ y $g(t)$ y $h(t)$ son primos relativos. Entonces V es la suma directa de los subespacios de U y W invariantes por T, donde $U = \mathrm{null}(g(T))$ y $W = \mathrm{null}(h(T))$.*

Teorema 15. *En el Teorema 6.5, si $f(t)$ es el polinomio minimal de T y ($g(t)$ y $h(t)$ son mónicos), entonces $g(t)$ y $h(t)$ son los polinomios minimales de las restricciones de T a U y W respectivamente.*

Teorema 16 (Teorema de Descomposición Primaria)**.** *Sea $T : V \to V$ un operador lineal con polinomio minimal*

$$m(t) = f_1(t)^{m_1} \cdots f_r(t)^{m_r},$$

donde $f_i(t)$ son polinomios mónicos irreducibles diferentes. Entonces V es la suma directa de los subespacios invariantes por $T, W_1, \dots, W_r$, donde W_i es el espacio nulo de $f_i(T)^{m_i}$. Además, $f_i(t)^{m_i}$ es el polinomio minimal de la restricción de T a W_i.

Teorema 17. *Un operador lineal $T : V \to V$ tiene una representación matricial diagonal si y solo si su polinomio minimal $m(t)$ es un producto de polinomios lineales diferentes.*

10.4. Forma Canónica de Jordan

Teorema 18. *Sea $T : V \to V$ un operador lineal cuyos polinomios minimal y característico son respectivamente*

$$p(t) = \det(T - tI) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r}$$

$$m(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r},$$

donde los λ_i son escalares distintos. Entonces T tiene una representación matricial diagonal por bloques J cuyos elementos diagonales son de la forma

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Para cada λ_i los bloques corespondientes J_{ij} tienen las siguientes propiedades:

- *i) Existe al menos un* J_{ij} *de orden* m_i*, los demás* J_{ij} *son de orden* $\leq m_i$*.*
- *ii) La suma de los órdenes de los* J_{ij} *es* n_i*.*
- *iii) La cantidad de* J_{ij} *es igual a la multiplicidad geométrica de* λ_i *(es decir la dimensión de su autoespacio).*
- *iv) La cantidad de* J_{ij} *de cada orden posible está determinado únicamente por* T*.*

A la matriz J *se la llama forma canónica de Jordan.*