Spieltheorie - Übungsblatt 5

11. Juni 2012

Stefan Wrobel, Viktor Kurz
{wrobels,kurzv}@informatik.uni-freiburg.de

Aufgabe 1:

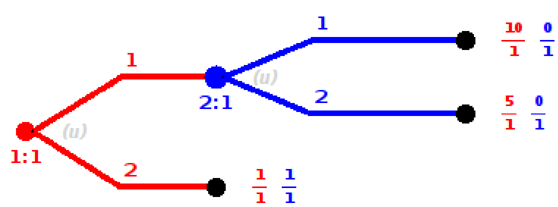
Sind in einem extensiven Zweipersonenspiel die Auszahlungen an allen Blattknoten unterschiedlich, so wird durch Rückwärtsinduktion immer ein eindeutiges teilspielperfektes Gleichgewicht ermittelt. Mehrere teilspielperfekte Gleichgewichte (TSP) kann es also nur dann geben, wenn die Auszahlung für einen Spieler an mindestens zwei Blattknoten identisch ist. Hat ein Spieler in einem Teilspiel mehrere Strategien zur Auswahl, die für diesen Spieler zur selben Auszahlung führen, so ist es egal, welche Strategie gewählt wird.
Sei u_1 die Auszahlung des Spielers 1 und u_2 die Auszahlung des Spielers 2.

(a)

Bei Nullsummenspielen gilt: $u_1 = -u_2$.
Da zwei TSP s^* und r^* in einem extensiven Zweipersonenspiel nur dann existieren können, wenn es für einen Spieler (mindestens) zwei Blattknoten mit identischer Auszahlung u_1^* gibt, muss die Auszahlung für den anderen Spieler in beiden TSP $u_2^* = -u_1^*$ sein.

(b)

Annahme: $u_i(O(s^*)) = u_i(O(r^*))$
Gegenbeispiel:



$s^* = (1, 1)$
$u_1(O(s^*)) = 10,\ u_2(O(s^*)) = 0$

$r^* = (2, 1)$
$u_1(O(r^*)) = 5$, $u_2(O(r^*)) = 0$
d.h. $u_i(O(s^*)) \neq u_i(O(r^*))$ für $i = 1$,
d.h. die Annahme ist falsch,
d.h. $u_i(O(s^*)) = u_i(O(r^*))$ gilt im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 2:

(a)

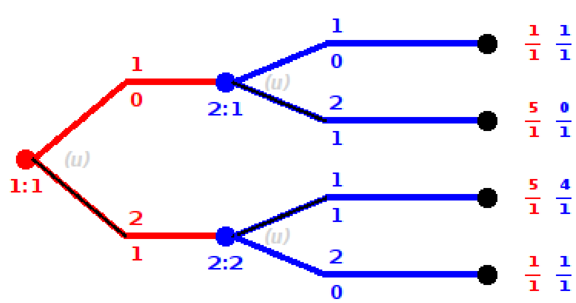
In Γ_1 wählt Spieler 2 immer diejenige Strategie, bei dem die gewählten Aktionen jeweils die besten Antworten auf die vorherige Aktion von Spieler 1 ist. Da es ein Nullsummenspiel ist, ist die gewählte Strategie diejenige Strategie, die den Nutzen von Spieler 1 also jeweils minimiert. Spieler 1 wählt demnach diejenige Aktion aus, die den minimalen Nutzen maximiert. Es gilt also: $u_1(O(s^*)) = \max_{a_1 \in A_1} \min_{a_2 \in A_2} u_1(a_1, a_2)$
Analog in Γ_2: $u_2(O(r^*)) = \max_{a_2 \in A_2} \min_{a_1 \in A_1} u_2(a_1, a_2)$
Da Nullsummenspiel: $u_1(O(r^*)) = -\max_{a_2 \in A_2} \min_{a_1 \in A_1} u_2(a_1, a_2) = \min_{a_2 \in A_2} (-\min_{a_1 \in A_1} u_2(a_1, a_2)) = \min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} (-u_2(a_1, a_2)) = \min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2)$
Da $\max_{a_1 \in A_1} \min_{a_2 \in A_2} u_1(a_1, a_2) \leq \min_{a_2 \in A_2} \max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, a_2)$ ist $u_1(O(s^*)) \leq u_1(O(r^*))$

(b)

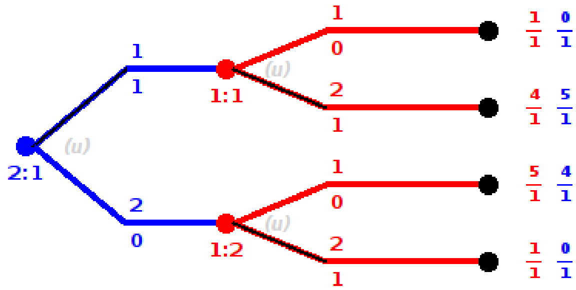
Annahme: $u_1(O(s^*)) \leq u_1(O(r^*))$
Gegenbeispiel:

	1		2	
1	1	1	4	5
2	5	4	1	1

Spieler 1 wählt zuerst:



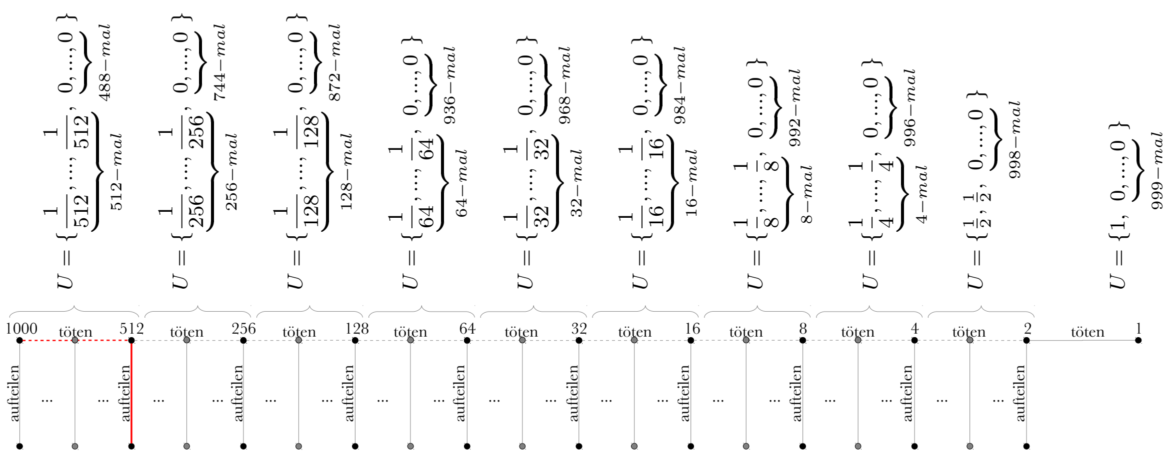
$s^* = (2, 21)$
$u_1(O(s^*)) = 5$
Spieler 2 wählt zuerst:



$r^* = (22, 1)$
$u_1(O(r^*)) = 4$
d.h. $u_1(O(s^*)) > u_1(O(r^*))$,
d.h. die Annahme ist falsch,
d.h. $u_1(O(s^*)) \leq u_1(O(r^*))$ gilt im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 3:

Der Pirat mit dem höchsten Rang wird bei der Abstimmung immer für das Töten stimmen, da er somit seinen Nutzen maximiert. Der Priat mit dem zweit höchsten Rang wird immer für das Töten stimmen, auSSer die Anzahl der noch lebenden Priaten liegt bei 2. Die Piraten mit dem Rang 3 und 4 würden immer für das Töten stimmen, auSSer die Anzahl der noch lebenden Priaten liegt bei ≤ 4. Falls die Anzahl der noch lebenden Priaten bei 4 liegt, würden sich die Priaten mit dem Rang 3 und 4 für das Aufteilen entscheiden, da der hoch propagierte Nutzenwert für die Aktion Töten für beide Piraten bei 0 liegt. Somit ergibt sich folgender Baum:



Die Aufteilung des Schatzes würde demnach wie folgt ablaufen: es würden 512 Piraten immer wieder für das Töten stimmen, bis die Anzahl der noch lebenden Piraten bei 512 liegt. Dann würden die Piraten mit dem Rang 257 bis 512 sich für das Aufteilen entscheiden, da der hoch propagierte Nutzenwert für die Aktion Töten jeweils 0 ist. Somit überleben 512 Piraten.