Mobile Robotics - Übungsblatt 8

27. Juni 2012

Stefan Wrobel, Viktor Kurz
{wrobels,kurzv}@informatik.uni-freiburg.de

Aufgabe 1:

(a)

A_t: Matrix, die beschreibt, wie sich die Umgebung innerhalb eines Zeitintervalls verändert, wenn sich der Roboter nicht bewegt. Durch Multiplikation der Matrix des letzten Zustands x_{t-1} mit A_t erhält man den neuen Zustand x_t.
B_t : Matrix, die beschreibt, in welchem Zustand sich der Roboter befindet, wenn ein Kommando ausgeführt wurde. Durch Multiplikation mit der Matrix u_t (die das ausgeführte Kommando zum aktuellen Zeitpunkt beschreibt) mit B_t erhält man den relativen Zustand zu x_t.
C_t: Matrix, die beschreibt, wie anhand des aktuellen Zustands eine Beobachtung generiert werden kann. Multiplikation der Matrix C_t mit dem aktuellen Zustand x_t ergibt eine Beobachtung z_t.
ε_t: Normalverteilter Zufallswert, der das Rauschen des Bewegungsmodells repräsentiert.
δ_t: Normalverteilter Zufallswert, der das Rauschen des Messmodells repräsentiert.
μ_t : Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung des aktuellen Zustands.
Σ_t: Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung des aktuellen Zustands.
K_t: "Maß" für die Genauigkeit der Messung: Umso genauer die Messung, desto geringer ist die neue Varianz.
Beim Kalman-Filter wird eine Gauß-Verteilung mittels der Werte μ (Erwartungswert) und Σ (Varianz) angegeben, die die Wahrscheinlichkeit für den aktuellen Zustand angibt.
Der Kalman-Filter besteht aus zwei Schritten:
1) Ausführung eines Kommandos und Vorhersage/"prediction" des aktuellen Zustands
2) Messung/Beobachtung und Korrektur des Zustands anhand der gemessenen Daten ("correction")
Der KF funktioniert allerdings nur, wenn für die Berechnung von x_t und z_t lineare Funktionen verwendet werden: Wird eine Gauß-Verteilung mit einer linearen Funktion multipliziert, so ergibt sich abermals eine Gauß-Verteilung. Bei nichtlinearen Funktionen

ist dies nicht der Fall. Beim Extendend-Kalman-Filter wird das Problem gelöst, indem nicht-lineare Funktionen mittels Taylor-Reihen angenähert werden.

(b)

$p(z_t|x_t)$: Normalverteilung mit $N(x_t; z_t, \sigma^2_{obs})$
$p(z_t|x_t) \cdot \overline{bel}(x_t) = N(x_t; z_t, \sigma^2_{obs}) \cdot N(x_t; \overline{\mu_t}, \overline{\sigma^2_t})$
Durch Multplikation zweier Normalverteilungen ergibt sich abermals eine Normalverteilung mit
Mittelwert:

$$\mu_t = \frac{\overline{\sigma^2_t}}{\overline{\sigma^2_t} \cdot + \sigma} \cdot z_t + \frac{\sigma^2_{obs}}{\overline{\sigma^2_t} \cdot + \sigma} \cdot \overline{\mu_t}$$

$$= \frac{\overline{\sigma^2_t} \cdot z_t + \sigma^2_{obs} \cdot \overline{\mu_t}}{\overline{\sigma^2_t} + \sigma^2_{obs}}$$

$$= \frac{\overline{\sigma^2_t} \cdot z_t + \sigma^2_{obs} \cdot \overline{\mu_t} + \overline{\sigma^2_t} \cdot \overline{\mu_t} - \overline{\sigma^2_t} \cdot \overline{\mu_t}}{\overline{\sigma^2_t} + \sigma^2_{obs}}$$

$$= \frac{\overline{\sigma^2_t} \cdot (z_t - \overline{\mu_t}) + (\sigma^2_{obs} + \overline{\sigma^2_t}) \cdot \overline{\mu_t}}{\overline{\sigma^2_t} + \sigma^2_{obs}}$$

$$= (z_t - \overline{\mu_t}) \cdot \frac{\overline{\sigma^2_t}}{\overline{\sigma^2_t} + \sigma^2_{obs}} + \overline{\mu_t}$$

$$= \overline{\mu_t} + k_t \cdot (z_t - \overline{\mu_t})$$

Varianz:

$$\sigma^2_t = \frac{1}{(\overline{\sigma^2_t})^{-1} + (\sigma^2_{obs})^{-1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\overline{\sigma^2_t}} + \frac{1}{\sigma^2_{obs}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sigma^2_{obs} + \overline{\sigma^2_t}}{\overline{\sigma^2_t} \cdot \sigma^2_{obs}}}$$

$$= \frac{\overline{\sigma^2_t} \cdot \sigma^2_{obs}}{\sigma^2_{obs} + \overline{\sigma^2_t}}$$

$$= \overline{\sigma^2_t} \cdot \frac{\sigma^2_{obs}}{\sigma^2_{obs} + \overline{\sigma^2_t}}$$

$$= \overline{\sigma_t^2} \cdot \frac{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2} - \overline{\sigma_t^2}}{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2}}$$

$$= \overline{\sigma_t^2} \cdot \left(\frac{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2}}{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2}} - \frac{\overline{\sigma_t^2}}{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2}} \right)$$

$$= \overline{\sigma_t^2} \cdot (1 - k_t)$$

Aufgabe 2:

(a)

Motion-Modell, Odometry-basiert:

$x_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$, $u_t = \begin{pmatrix} \delta_{rot1} \\ \delta_{trans} \\ \delta_{rot2} \end{pmatrix}$, $\Delta_t = \begin{pmatrix} \delta_{trans} \cdot cos(\theta + \delta_{rot1}) \\ \delta \cdot sin(\theta + \delta_{rot1}) \\ \delta_{rot1} + \delta_{rot2} \end{pmatrix}$

$$g(x_t, u_t) = x_t + \Delta_t = \begin{pmatrix} x + \delta_{trans} \cdot cos(\theta + \delta_{rot1}) \\ y + \delta_{trans} \cdot sin(\theta + \delta_{rot1}) \\ \theta + \delta_{rot1} + \delta_{rot2} \end{pmatrix}$$

$$G_t = \begin{pmatrix} \frac{\delta(x+\delta_{trans} \cdot cos(\theta+\delta_{rot1}))}{\delta x} & \frac{\delta(x+\delta_{trans} \cdot cos(\theta+\delta_{rot1}))}{\delta y} & \frac{\delta(x+\delta_{trans} \cdot cos(\theta+\delta_{rot1}))}{\delta \theta} \\ \frac{\delta(y+\delta_{trans} \cdot sin(\theta+\delta_{rot1}))}{\delta x} & \frac{\delta(y+\delta_{trans} \cdot sin(\theta+\delta_{rot1}))}{\delta y} & \frac{\delta(y+\delta_{trans} \cdot sin(\theta+\delta_{rot1}))}{\delta \theta} \\ \frac{\delta(\theta+\delta_{rot1}+\delta_{rot2})}{\delta x} & \frac{\delta(\theta+\delta_{rot1}+\delta_{rot2})}{\delta y} & \frac{\delta(\theta+\delta_{rot1}+\delta_{rot2})}{\delta \theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -sin(\theta + \delta_{rot1}) \\ 0 & 1 & cos(\theta + \delta_{rot1}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

s. prediction_step.m

(c)

Beim Partikel-Filter werden vier Parameter als Rausch-Werte verwendet. (Kalman-Filter: nur drei)

Aufgabe 3:

(a)

landmark: $l = \begin{pmatrix} id \\ lx \\ ly \end{pmatrix}$, measurement $z_t = (dist)$, $x_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$

$$z_t = h(x_t, l) = \left(\sqrt{(lx - x)^2 + (ly - y)^2} \right)$$

$$H_t = \begin{pmatrix} \frac{\delta(\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2})}{\delta x} & \frac{\delta(\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2})}{\delta y} & \frac{\delta(\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2})}{\delta \theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x-lx}{\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2}} & \frac{y-ly}{\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

s. correction_step.m