

# Mobile Robotics - Übungsblatt 8

27. Juni 2012

Stefan Wrobel, Viktor Kurz  
{wrobels,kurzv}@informatik.uni-freiburg.de

## Aufgabe 1:

### (a)

$A_t$ : Matrix, die beschreibt, wie sich die Umgebung innerhalb eines Zeitintervalls verändert, wenn sich der Roboter nicht bewegt. Durch Multiplikation der Matrix des letzten Zustands  $x_{t-1}$  mit  $A_t$  erhält man den neuen Zustand  $x_t$ .

$B_t$ : Matrix, die beschreibt, in welchem Zustand sich der Roboter befindet, wenn ein Kommando ausgeführt wurde. Durch Multiplikation mit der Matrix  $u_t$  (die das ausgeführte Kommando zum aktuellen Zeitpunkt beschreibt) mit  $B_t$  erhält man den relativen Zustand zu  $x_t$ .

$C_t$ : Matrix, die beschreibt, wie anhand des aktuellen Zustands eine Beobachtung generiert werden kann. Multiplikation der Matrix  $C_t$  mit dem aktuellen Zustand  $x_t$  ergibt eine Beobachtung  $z_t$ .

$\varepsilon_t$ : Normalverteilter Zufallswert, der das Rauschen des Bewegungsmodells repräsentiert.

$\delta_t$ : Normalverteilter Zufallswert, der das Rauschen des Messmodells repräsentiert.

$\mu_t$ : Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung des aktuellen Zustands.

$\Sigma_t$ : Varianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung des aktuellen Zustands.

$K_t$ : "Maß" für die Genauigkeit der Messung: Umso genauer die Messung, desto geringer ist die neue Varianz.

Beim Kalman-Filter wird eine Gauß-Verteilung mittels der Werte  $\mu$  (Erwartungswert) und  $\Sigma$  (Varianz) angegeben, die die Wahrscheinlichkeit für den aktuellen Zustand angibt. Der Kalman-Filter besteht aus zwei Schritten:

- 1) Ausführung eines Kommandos und Vorhersage/"prediction" des aktuellen Zustands
- 2) Messung/Beobachtung und Korrektur des Zustands anhand der gemessenen Daten ("correction")

Der KF funktioniert allerdings nur, wenn für die Berechnung von  $x_t$  und  $z_t$  lineare Funktionen verwendet werden: Wird eine Gauß-Verteilung mit einer linearen Funktion multipliziert, so ergibt sich abermals eine Gauß-Verteilung. Bei nichtlinearen Funktionen

ist dies nicht der Fall. Beim Extendend-Kalman-Filter wird das Problem gelöst, indem nicht-lineare Funktionen mittels Taylor-Reihen angenähert werden.

**(b)**

$p(z_t|x_t)$ : Normalverteilung mit  $N(x_t; z_t, \sigma_{obs}^2)$

$p(z_t|x_t) \cdot \overline{bel}(x_t) = N(x_t; z_t, \sigma_{obs}^2) \cdot N(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{\sigma}_t^2)$

Durch Multiplikation zweier Normalverteilungen ergibt sich abermals eine Normalverteilung mit

Mittelwert:

$$\begin{aligned}
 \mu_t &= \frac{\overline{\sigma}_t^2}{\overline{\sigma}_t^2 + \sigma_{obs}^2} \cdot z_t + \frac{\sigma_{obs}^2}{\overline{\sigma}_t^2 + \sigma_{obs}^2} \cdot \overline{\mu}_t \\
 &= \frac{\overline{\sigma}_t^2 \cdot z_t + \sigma_{obs}^2 \cdot \overline{\mu}_t}{\overline{\sigma}_t^2 + \sigma_{obs}^2} \\
 &= \frac{\overline{\sigma}_t^2 \cdot z_t + \sigma_{obs}^2 \cdot \overline{\mu}_t + \overline{\sigma}_t^2 \cdot \overline{\mu}_t - \overline{\sigma}_t^2 \cdot \overline{\mu}_t}{\overline{\sigma}_t^2 + \sigma_{obs}^2} \\
 &= \frac{\overline{\sigma}_t^2 \cdot (z_t - \overline{\mu}_t) + (\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma}_t^2) \cdot \overline{\mu}_t}{\overline{\sigma}_t^2 + \sigma_{obs}^2} \\
 &= (z_t - \overline{\mu}_t) \cdot \frac{\overline{\sigma}_t^2}{\overline{\sigma}_t^2 + \sigma_{obs}^2} + \overline{\mu}_t \\
 &= \overline{\mu}_t + k_t \cdot (z_t - \overline{\mu}_t)
 \end{aligned}$$

Varianz:

$$\begin{aligned}
 \sigma_t^2 &= \frac{1}{(\overline{\sigma}_t^2)^{-1} + (\sigma_{obs}^2)^{-1}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\overline{\sigma}_t^2} + \frac{1}{\sigma_{obs}^2}} \\
 &= \frac{1}{\frac{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma}_t^2}{\overline{\sigma}_t^2 \cdot \sigma_{obs}^2}} \\
 &= \frac{\overline{\sigma}_t^2 \cdot \sigma_{obs}^2}{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma}_t^2} \\
 &= \overline{\sigma}_t^2 \cdot \frac{\sigma_{obs}^2}{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma}_t^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\sigma_t^2} \cdot \frac{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2} - \overline{\sigma_t^2}}{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2}} \\
&= \overline{\sigma_t^2} \cdot \left( \frac{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2}}{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2}} - \frac{\overline{\sigma_t^2}}{\sigma_{obs}^2 + \overline{\sigma_t^2}} \right) \\
&= \overline{\sigma_t^2} \cdot (1 - k_t)
\end{aligned}$$

## Aufgabe 2:

(a)

Motion-Modell, Odometry-basiert:

$$\begin{aligned}
x_t &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}, u_t = \begin{pmatrix} \delta_{rot1} \\ \delta_{trans} \\ \delta_{rot2} \end{pmatrix}, \Delta_t = \begin{pmatrix} \delta_{trans} \cdot \cos(\theta + \delta_{rot1}) \\ \delta \cdot \sin(\theta + \delta_{rot1}) \\ \delta_{rot1} + \delta_{rot2} \end{pmatrix} \\
g(x_t, u_t) &= x_t + \Delta_t = \begin{pmatrix} x + \delta_{trans} \cdot \cos(\theta + \delta_{rot1}) \\ y + \delta_{trans} \cdot \sin(\theta + \delta_{rot1}) \\ \theta + \delta_{rot1} + \delta_{rot2} \end{pmatrix} \\
G_t &= \begin{pmatrix} \frac{\delta(x + \delta_{trans} \cdot \cos(\theta + \delta_{rot1}))}{\delta x} & \frac{\delta(x + \delta_{trans} \cdot \cos(\theta + \delta_{rot1}))}{\delta y} & \frac{\delta(x + \delta_{trans} \cdot \cos(\theta + \delta_{rot1}))}{\delta \theta} \\ \frac{\delta(y + \delta_{trans} \cdot \sin(\theta + \delta_{rot1}))}{\delta x} & \frac{\delta(y + \delta_{trans} \cdot \sin(\theta + \delta_{rot1}))}{\delta y} & \frac{\delta(y + \delta_{trans} \cdot \sin(\theta + \delta_{rot1}))}{\delta \theta} \\ \frac{\delta(\theta + \delta_{rot1} + \delta_{rot2})}{\delta x} & \frac{\delta(\theta + \delta_{rot1} + \delta_{rot2})}{\delta y} & \frac{\delta(\theta + \delta_{rot1} + \delta_{rot2})}{\delta \theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta + \delta_{rot1}) * \text{delta\_trans} \\ 0 & 1 & \cos(\theta + \delta_{rot1}) * \text{delta\_trans} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b)

s. prediction\_step.m

(c)

Beim Partikel-Filter werden vier Parameter als Rausch-Werte verwendet. (Kalman-Filter: nur drei) **Ausserdem haben die Parameter unterschiedliche Bedeutung:**

-PF: echtes Odometriemodell, welches das Rauschen in Abh. von den Odometriewerten modelliert

**Aufgabe 3:** -KF: Zusätzliches Rauschen, was NACH Berechnung der Bewegung addiert wird

(a)

$$\text{landmark: } l = \begin{pmatrix} id \\ lx \\ ly \end{pmatrix}, \text{ measurement } z_t = (dist), x_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
z_t &= h(x_t, l) = \left( \sqrt{(lx - x)^2 + (ly - y)^2} \right) \\
H_t &= \left( \begin{array}{ccc} \frac{\delta(\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2})}{\delta x} & \frac{\delta(\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2})}{\delta y} & \frac{\delta(\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2})}{\delta \theta} \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{ccc} \frac{x-lx}{\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2}} & \frac{y-ly}{\sqrt{(lx-x)^2+(ly-y)^2}} & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

**(b)**

s. correction\_step.m