

圏同値は同値関係であることの証明

- 圏同値は同値関係であることの証明
 ① 圏同値は同値関係であることを証明する

(i) 反射律, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$ を示す

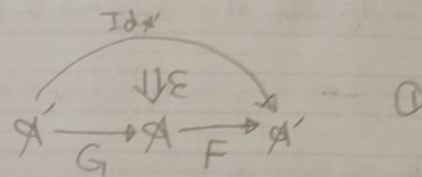
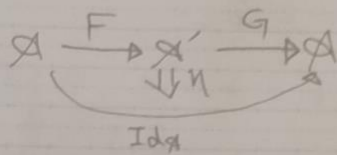
$F = G = \text{Id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ とすれば, 自明な自然同型 $\eta = GF = \varepsilon = FG : \text{Id}_{\mathcal{A}} \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}}$ が存在する

(ii) 対称律, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}$ を示す

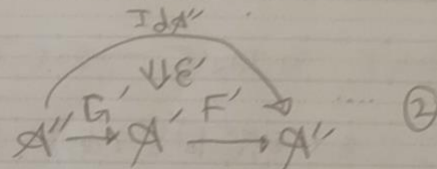
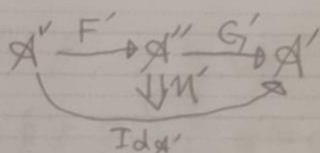
$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, $G : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$, 自然同型 $\eta : \text{Id}_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$, $\varepsilon : FG \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}'}$ があ, たいする

$F' = G$, $G' = F$, $\eta' = \varepsilon$, $\varepsilon' = \eta$ とおくと, 関手 $F' : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$, $G' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, 自然同型 $\eta' : \text{Id}_{\mathcal{A}'} \rightarrow G'F'$, $\varepsilon' : F'G' \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{A}}$ により $\mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}$ が言える

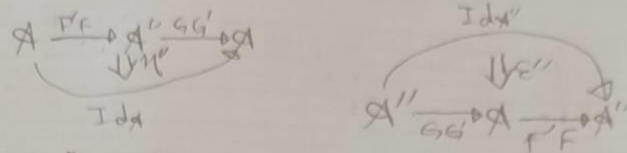
(iii) 推移律, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$ か $\mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}'' \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{A}''$ を示す
 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$ だから \mathcal{A} 下の様な自然同型が存在する



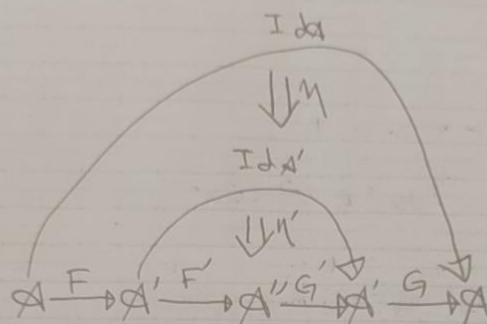
$\mathcal{A}' \simeq \mathcal{A}''$ だから \mathcal{A}' 下の様な自然同型が存在する



図式①、②より、以下のような自然同型 η', ε'' が得られることを示す



η'' を構成するために、図式①の η と②の η' を垂直に並べてみる



ここで、自然同型 $\eta: Id_A \rightarrow GF$ は

$$\eta: Id_A \rightarrow GF$$

と書いても同じであることに注意して、自然同型 $\eta': Id_{A'} \rightarrow G'F'$ を左右に水平合成して自然変換

$$G\eta'F: GId_{A'}F \rightarrow GG'F'F$$

を得るが、これも自然同型である。この2つの自然同型を垂直合成して

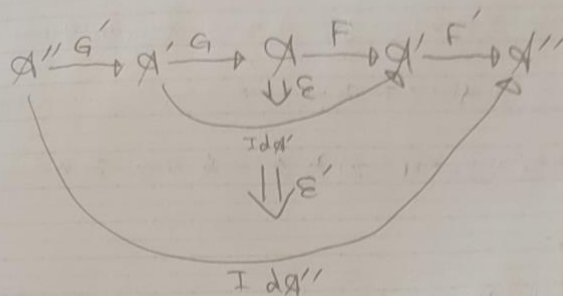
$$G\eta'F \circ \eta: Id_A \rightarrow GG'F'F$$

を得るが、これも自然同型なので、

$$\eta'' = G\eta'F \circ \eta$$

と定義すればよい。

ε'' を構成するために、図式①の ε と②の ε' を垂直に並べてみる



ここで自然同型 $\varepsilon': F'G' \rightarrow Id_{A''}$ は

$$\varepsilon': F'Id_{A'}G' \rightarrow Id_{A''}$$

と書いても同じであることに注意してほしい。自然同型 $\varepsilon: FG \rightarrow Id_A$ を左側に水平合成して自然変換

$$F'\varepsilon G': F'FGG' \rightarrow F'Id_{A'}G'$$

を得るが、これも自然同型である。この2つの自然同型を垂直合成して

$$\varepsilon' \circ F'\varepsilon G': F'FGG' \rightarrow Id_{A''}$$

を得るが、これも自然同型なので、

$$\varepsilon'' = \varepsilon' \circ F'\varepsilon G'$$

と定義すればよい。

(i), (ii), (iii) より反射律, 対称律, 推移律がすべて示されたので
圏同値は同値関係である。//