Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction à la logique mathématique

Les Mathématiques c'est un langage rigoureux.
L'activité mathématique se développe suivant trois axes principaux :

- Construction et définition d'objets mathématiques.
- Recherche de propriétés qui amène à énoncer des conjectures.
- Démonstration de certaines propriétés qui prennent le nom de théorème, proposition, lemme, corollaire etc.

1.1.1 Propositions, démonstrations ...

Définition 1.1.1. Une ***proposition*** ou ***assertion*** est un énoncé dont on peut pouvoir dire qu'il est vrai ou faux.
On notera V ou F (ou encore *1* ou *0*) les deux valeurs logiques possibles d'une proposition.
C'est ***le principe du tiers exclu***.

Définition 1.1.2. Certaines propositions sont déclarées vraies à priori : ce sont les ***axiomes***.
Au contraire la véracité (ou la fausseté) d'une proposition doit résulter d'une ***démonstration***, une preuve.

Définition 1.1.3.

- Un ***théorème*** est une proposition vraie particulièrement importante.
- Un ***lemme*** est une proposition vraie, utile à la démonstration d'une proposition plus importante.
- Un ***corollaire*** est une proposition vraie, conséquence immédiate d'une autre proposition vraie.
- Une ***conjecture*** est une proposition qu'on pense généralement vraie, sans en avoir de preuve.

Définition 1.1.4. Une ***définition*** est un énoncé qui définit un nouvel objet mathématique.
On utilise le symbole " $:=$".

Définition 1.1.5. On appelle ***prédicat*** un énoncé contenant des lettres, appelées ***variables***, tel que, dès que l'on attribue une valeur à chaque variable y figurant, on obtienne une assertion qui est donc soit vraie soit fausse.

Un ***résultat mathématique*** est donc un énoncé vrai que l'on peut déduire d'axiomes ou d'autres résultats en s'appuyant sur des règles strictes de logiques.

1.1.2 Opérations sur les propositions

Définition 1.1.6. À partir des propositions P et Q on définit aussi :

- la ***négation*** est *(non P)*, notée $\overline{P}$
- la ***disjonction*** est P *ou* Q, notée P $\vee$ Q
- la ***conjonction*** est P *et* Q , notée P $\wedge$ Q
- l'***implication*** est *(non P) ou Q*, notée P $\Rightarrow$ Q ("P implique Q")
- l'***équivalence*** est *(P $\Rightarrow$ Q) et (Q $\Rightarrow$ P)*, notée P $\Leftrightarrow$ Q ("P équivaut à Q" ou "P si et seulement si Q")
- la ***contraposée*** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $(non\ Q) \Rightarrow (non\ P)$
- l'***implication réciproque*** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est $Q \Rightarrow P$

On résume la valeur des propositions précédentes dans des ***tableaux de vérité*** :

P	Q	non P	P ou Q	P et Q	P$\Rightarrow$ Q	P$\Leftrightarrow$ Q
V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V
V	F		V	F	F	F
F	V		V	F	V	F

Proposition 1.1.1. L'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie si, et seulement si, sa contraposée est vraie.

1.1.3 Quantificateurs

Définition 1.1.7. Soit $P(x)$ un prédicat à une variable x défini sur un ensemble E.

- La proposition $\exists x \in E\ P(x)$ dit que au moins un élément x de E vérifie la propriété P.
  On dit que "$\exists$" est le ***quantificateur existentiel***.
- La proposition $\forall x \in E\ P(x)$ dit que tout élément x de E vérifie la propriété P.
  On dit que "$\forall$" est le ***quantificateur universel***.
- La proposition $\exists!\ x \in E\ P(x)$ exprime qu'un et un seul élément x de E vérifie la propriété P.

Proposition 1.1.2. Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat de la variable x définie sur E.

- La négation de "$\exists x \in E\ P(x)$" est "$\forall x \in E\ (non\ P(x))$".
- La négation de "$\forall x \in E\ P(x)$" est "$\exists x \in E\ (non\ P(x))$".

Remarques :

- l'ordre des quantificateurs est très important ;
- les quantificateurs ne sont pas des abréviations.

1.1.4 Conditions nécessaires et/ou suffisantes

Lorsque la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on dit

- "Q est une ***condition nécessaire*** pour P" ou encore "il faut que Q soit vraie pour que P soit vraie" ;
- "P est une ***condition suffisante*** pour Q" ou encore "il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie".

Lorsque l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, on dit

- "P est une ***condition nécessaire et suffisante*** pour Q" ou que "il faut et il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie" ou encore "P est vraie si, et seulement si, Q est vraie".

1.1.5 Raisonnements

Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion "$P \Rightarrow Q$" est vraie. On suppose P vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Disjonction

Si on veut vérifier une proposition $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre la proposition pour les x dans une partie A de E et puis pour tous les x n'appartenant pas à A.

Contraposée

Il permet de démontrer $P \Rightarrow Q$ en utilisant l'équivalence $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Absurde

Il s'agit de supposer qu'une proposition est vraie et à démontrer que cela conduit à une contradiction.

Contre-exemple

Si l'on veut démontrer qu'une assertion du type : "$\forall x \in E \ P(x)$" est vraie alors pour chaque x de E, il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple.

Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tous $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1. *initialisation* : on prouve $P(0)$;
2. *hérédité* : on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie ;
3. *conclusion* : on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Analyse-synthèse

Il se déroule en 2 étapes :

1. *analyse* : suppose qu'il existe au moins une solution et on essaye de trouver des conditions nécessaires que cet objet doit vérifier ;
2. *synthèse* : on utilise la ou les solutions trouvées et on vérifie si elles vérifient le problème.

1.2 Ensembles

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. Un ***ensemble*** est la réunion dans une même entité de certains objets bien déterminés. On appelle ces objets les ***éléments*** de l'ensemble.

<u>Notations</u> :

- On désigne habituellement les éléments par des lettres minuscules et les ensembles par des lettres majuscule.

- On écrit "$a \in E$" pour signifier que l'élément a appartient à l'ensemble E et "$a \notin E$" si a n'est pas un élément de E.
- Lorsque p est un entier naturel non nul et si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont p éléments distincts, on décrit l'ensemble qui contient ces éléments par $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$

Un ensemble peut se définir de deux manières :

- soit ***en extension*** : on dresse la liste de tous les éléments. L'ordre, ainsi qu'une éventuelle répétition des éléments sont sans influence.
- soit ***en compréhension*** : on énonce une propriété caractéristique des éléments de l'ensemble.

On peut représenter graphiquement un ensemble à l'aide d'un ***diagramme de Venn***.

Définition 1.2.2. Un ensemble E est dit ***fini*** lorsque le nombre d'éléments qui le compose est un entier naturel.
Le nombre d'éléments d'un ensemble E est appelé le ***cardinal***. On le note *Card(E)*.
Un ensemble qui n'est pas fini est dit ***infini***.
Un ensemble est dit ***vide*** lorsqu'il ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$. Par convention $Card(\emptyset)=0$.
On appelle ***singleton*** un ensemble qui ne contient qu'un seul élément.

Définition 1.2.3. Soient A et B deux ensembles. On dit que "A est ***inclus*** dans B" (ou que "A est ***contenu*** dans B") et on note $A \subset B$ si tout élément de A est un élément de B.
L'inclusion peut s'écrire aussi $B \supset A$, qui se lit "B ***inclut*** A" ou "B ***contient*** A".
L'ensemble A est alors qualifié de ***partie*** ou de ***sous-ensemble*** de B.

Remarques :

- Par convention l'ensemble $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.
- Si A et B sont deux ensembles finis et $A \subset B$ alors $Card(A) \leq Card(B)$.
- Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Définition 1.2.4. Deux ensembles E et F sont ***égaux*** (ou ***identiques***) et on note $E = F$, si tout élément de E est élément de F et si tout élément de F est élément de E. Autrement dit

$$E = F \ \Leftrightarrow \ (E \subset F \text{ et } F \subset E)$$

Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont ***distincts*** et on note $E \neq F$.

Définition 1.2.5. Soit E un ensemble. Les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé ***ensemble des parties*** de E et noté $\mathcal{P}(E)$. Autrement dit $A \in \mathcal{P}(E)$ signifie que $A \subset E$.

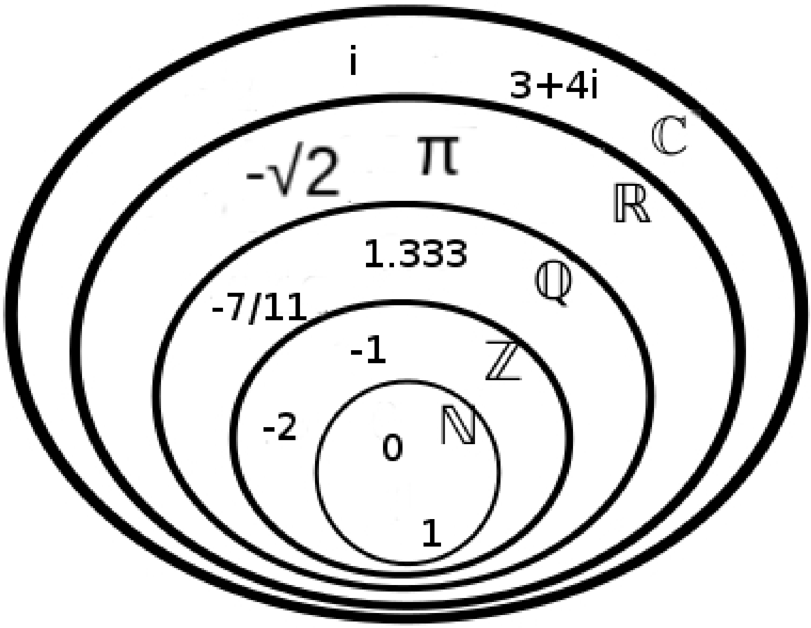
Remarque : Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des sous-ensembles de E et non pas de éléments de E. De plus, contrairement à l'ensemble E qui peut-être vide, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ n'est, lui, jamais vide puisqu'il contient au moins les ensembles $\emptyset$ et E.

Proposition 1.2.1. Si E est un ensemble fini de cardinal n, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

Ensembles de nombres

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



$\mathbb{N}$: entier naturel
$\mathbb{Z}$: entier relatif
$\mathbb{Q}$: nombre rationnel
$\mathbb{R}$: nombre réel
$\mathbb{C}$: nombre complexe

1.2.2 Opérations

Définition 1.2.6. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E.

- L'***union*** des deux ensembles A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble constitué par les éléments de E appartenant à A ou à B, c'est-à-dire :

$$A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- L'***intersection*** des deux ensembles A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble constitué par les éléments de E appartenant à A et B. Autrement dit

$$A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

  Si $A \cap B = \emptyset$ alors les deux ensembles A et B sont dits ***disjoints***.
- La ***différence*** des ensembles A et B, notée $A \backslash B$ est l'ensemble constitué par les éléments de A qui n'appartiennent pas à B, c'est-à-dire :

$$A \backslash B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Propriétés

L'union et l'intersection sont :
- commutatives : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
- associatives : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ et $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Définition 1.2.7. Soit A une partie de l'ensemble E. On appelle ***complémentaire*** de A dans E le sous-ensemble de E, noté A^C constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, c'est-à-dire :

$$A^C := \{x \in E \mid x \notin A\} = E \backslash A$$

Proposition 1.2.2. Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. On a

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

Corollaire 1.2.1. Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E.
Si $A \subset B$ et $Card$(A)=$Card$(B), alors $A = B$.

Remarque :
Si E est un ensemble fini, alors pour toute partie A de E, on a *Card(A^C)=Card(E)-Card(A).*

Proposition 1.2.3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a les relations suivantes appelées ***lois de De Morgan*** :
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Définition 1.2.8. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles non vides. On appelle ***produit cartésien*** des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, constitué des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En d'autres termes,

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Proposition 1.2.4. Soient E et F deux ensembles finis. On a $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

1.3 Relations, Fonctions, Applications

1.3.1 Relations

Définition 1.3.1. Soient E et F deux ensembles. On appelle ***relation*** $\mathcal{R}$ de E vers F tout triplet (E, Γ, F), où Γ est une partie du produit cartésien $E \times F$.
L'ensemble E s'appelle l'***ensemble de départ*** de $\mathcal{R}$, l'ensemble F s'appelle l'***ensemble d'arrivée*** de $\mathcal{R}$ et le sous-ensemble Γ de $E \times F$ s'appelle le ***graphe*** de $\mathcal{R}$.
Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y par la relation $\mathcal{R}$, ce que l'on note $x\mathcal{R}y$.
L'élément y est appelé ***image*** de x par $\mathcal{R}$ et l'élément x est appelé ***antécédent*** de y par $\mathcal{R}$.

On peut représenter cette relation :
- soit à l'aide d'un ***diagramme sagittal*** dans lequel une flèche va de $x \in E$ vers $y \in F$ si $x\mathcal{R}y$;
- soit à l'aide d'un ***diagramme cartésien***.

1.3.2 Fonctions

Définition 1.3.2. Soient E et F deux ensembles. Une relation f d'ensemble de départ E, d'ensemble d'arrivée F et de graphe Γ est appelée une ***fonction*** de E vers F si tout élément de E est en relation avec *au plus* un élément de F (c'est-à-dire avec un élément ou avec aucun élément). On note alors

$$f : E \to F \quad \text{ou} \quad E \xrightarrow{f} F$$

Soit $(x, y) \in \Gamma$. Pour signifier que y est en relation avec x par la fonction f, on écrit $y = f(x)$ ou $x \mapsto y = f(x)$.

Définition 1.3.3. Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E vers F. On appelle ***ensemble de définition*** (ou ***domaine de définition***) de la fonction f, et on note D_f, l'ensemble des éléments de E ayant une image par f. En d'autres termes :

$$D_f := \{x \in E \mid \exists y \in F \; y = f(x)\}.$$

Remarque : L'ensemble de définition est un sous-ensemble du domaine de départ.

1.3.3 Applications

Définition 1.3.4. Soient E et F deux ensembles. Une fonction f de E vers F est appelée une ***application*** si son domaine de définition est E, c'est-à-dire $D_f = E$.
L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E ou $A(E, F)$.

Définition 1.3.5. Deux applications f et g sont ***égales*** si elles ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F et pour tous x de E, on a $f(x) = g(x)$.

Définition 1.3.6. Soit E un ensemble. On définit l'application ***identité*** de E dans E, notée Id_E par $\forall x \in E \; Id_E(x) = x$.

Définition 1.3.7. Une application f de E dans F est dite ***constante*** s'il existe un élément α de F, tel que, pour tout x de E, $f(x)$ soit égal à α.

Définition 1.3.8. Soit A un sous-ensemble de E. On appelle ***indicatrice*** ou ***fonction caractéristique*** de A, et on note χ_A ou $\mathbb{1}_A$ la fonction définie sur E par

$$\chi_A : E \to \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 = \mathbb{1}_A(x) & \text{si } x \in A \\ 0 = \mathbb{1}_A(x) & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Définition 1.3.9. Soit $f : E \to F$ une application.
On appelle ***restriction*** de f à E', l'application notée $g = f|_{E'}$ de E' dans F définie par

$$g = f|_{E'} : E' \to F$$

$$x \mapsto f(x)$$

On a $\forall x \in E' \; g(x) = f(x)$.
On appelle ***prolongement*** de f à E'', l'application h définie sur un ensemble E'' contenant E, dont la restriction de h à E est égale à f :

$$\forall x \in E \; h(x) = f(x)$$

1.3.4 Formulaire : domaine de définition pour les fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	D_f
$\|x\|$	$\mathbb{R}$
x^α	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$
a^x(avec $a > 0$)	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}$

1.3.5 Composition des applications

Définition 1.3.10. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle ***application composée*** de f par g, l'application de E vers G, notée $g \circ f : E \to G$ définie par :

$$\forall x \in E \ (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Remarques :

- La composition de fonctions n'est valable que si les domaines de définition des fonctions sont compatibles.
  Soient $f : E \to F$ et $g : I \to G$ deux fonctions, alors $g \circ f$ est toujours définie si et seulement si $F \subseteq I$ (l'ensemble d'arrivée de la fonction f est compris dans l'ensemble de départ de la fonction g) ;
- la composition n'est pas commutative ;
- la composition est associative ;
- $f \circ f = f^2$, $f^k := f \circ f \circ \ldots \circ f$, $f^0 = Id_E$ et $Id_F \circ f = f = f \circ Id_E$

1.3.6 Injections, surjections, bijections

Définition 1.3.11. Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit que f est une application ***injective*** ou une ***injection*** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :
  - si tout élément y de F possède au plus un antécédent x par f (c'est-à-dire un ou aucun) ;
  - $\forall (x_1, x_2) \in E \times E = E^2$, si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
  - $\forall (x_1, x_2) \in E \times E = E^2$, si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
  - deux éléments différents ont toujours des images différentes.
- On dit que f est une application ***surjective*** ou une ***surjection*** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :
  - si tout élément y de F possède au moins un antécédent x par f (c'est-à-dire un ou plusieurs) ;

  - $\forall y \in F, \exists x \in E \; f(x) = y$;
- On dit que f est une application ***bijective*** ou une ***bijection*** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :
  - si f est à la fois injective et surjective ;
  - si tout élément y de F possède un et un seul antécédent x par f ;
  - $\forall y \in F, \exists! \; x \in E \; f(x) = y$;

1.3.7 Image et image réciproque

Définition 1.3.12. Soit $f : E \to F$ une application.

- Soit $A \subset E$. On appelle ***image*** de A par f le sous-ensemble $f(A) = \{f(a), a \in A\}$ de F. $f(A)$ est donc l'ensemble des images par f des éléments de A. On peut écrire : $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, \; f(x) = y$.
- Soit B une partie de F. L'***image réciproque*** de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B. Autrement dit $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

1.3.8 Application réciproque

Définition 1.3.13. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application bijective. L'application notée $f^{-1} : F \to E$ qui à $y \in F$ lui associe l'unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelée ***application réciproque*** ou ***bijection réciproque*** de f. Autrement dit, l'application f^{-1} est définie pour tout $y \in F$ par :

$$f^{-1}(y) = x \text{ si } y = f(x).$$

Proposition 1.3.1. Soit $f : E \to F$ une application.

- Si f est bijective alors son application réciproque est elle même bijective et elle vérifie

$$(f^{-1})^{-1} = f, \qquad f^{-1} \circ f = Id_E, \qquad f \circ f^{-1} = Id_F;$$

- Si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$, alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Proposition 1.3.2. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On a les propriétés suivantes :

1. si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective ;
3. si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective ;
4. si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective ;
5. si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarques :

- Si f est injective alors $Card(E) \leq Card(F)$;
- Si f est surjective alors $Card(E) \geq Card(F)$;
- Si f est bijective alors $Card(E) = Card(F)$;

Proposition 1.3.3. Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Si $Card(E) = Card(F)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective ;

(ii) f est surjective ;

(iii) f est bijective.

1.4 Notations et rappels

1.4.1 Lettres grecques

Alphabet grec et notations mathématiques

Lettres minuscules

La lettre	Se lit	Désigne souvent :
α	alpha	Un angle
β	bêta	Un angle
γ	gamma	Un angle
δ	delta	Un angle, une droite
ε	epsilon	Une « très petite » quantité
ζ	zêta [dzeta]	
η	êta	
θ	thêta	Un angle, un argument d'un nombre complexe
ι	iota	
κ	kappa	
λ	lambda	*Une longueur d'onde*
μ	mu	Une moyenne
ν	nu	*Une fréquence*
ξ	xi	
o	omicron	
π	pi	3,14159….
ρ	rhô	Le module d'un nombre complexe, le rayon d'un cercle *une masse volumique*
σ	sigma	Un écart type
τ	tau	
υ	upsilon	
φ ou ϕ	phi	Un angle
χ	chi [ki]	Un test en statistiques (test du χ^2)
ψ	psi	Un angle
ω	oméga	*Une vitesse angulaire*

Lettres majuscule

La lettre	Se lit	Désigne souvent :
A	alpha	
B	bêta	
Γ	gamma	Un cercle, une courbe
Δ	delta	Une droite, un discriminant, une variation ou une différence
E	epsilon	
Z	zêta	
H	êta	
Θ	thêta	
I	iota	
K	kappa	
Λ	lambda	
M	mu	
N	nu	
Ξ	xi	
O	omicron	
Π	pi	Un plan, un produit : $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times \ldots \times x_n$
P	rhô	
Σ	sigma	Une somme : $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n$
T	tau	
Υ	upsilon	
Φ	phi	
X	chi	
Ψ	psi	
Ω	oméga	Le centre d'un cercle, le centre d'une rotation, l'univers associé à une expérience aléatoire

1.4.2 Intervalles

Notations :
- Entiers naturels : $\mathbb{N}$
- Entiers relatifs : $\mathbb{Z}$
- Nombres rationnels : $\mathbb{Q}$
- Nombres réels : $\mathbb{R}$
- Nombres complexes : $\mathbb{C}$

Remarques :
- avec le sommet $*$ on note tous les éléments de cette ensemble sauf le zéro ;
- avec l'indice $+$ ou $-$ on note l'ensemble de nombres positifs ou négatifs.

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$. On note alors :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$, appelé ***intervalle fermé*** ;
- $[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\}$, appelé ***intervalle semi-ouvert ou semi-fermé*** ;
- $]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\}$, appelé ***intervalle semi-ouvert ou semi-fermé*** ;
- $]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$, appelé ***intervalle ouvert*** ;
- $[a, +\infty[= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x\}$, appelé ***demi-droite fermé*** ;
- $]-\infty, b] = (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} |\ x \leq b\}$, appelé ***demi-droite fermé*** ;
- $]a, +\infty[= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\}$, appelé ***demi-droite ouverte*** ;
- $]-\infty, b[= (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} |\ x < b\}$, appelé ***demi-droite ouverte*** ;
- $\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$ ou $(-\infty, +\infty)$.

1.4.3 Valeur absolue

Définition 1.4.1. On définit la ***valeur absolue*** d'un réel x par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition 1.4.1. On a les propriétés suivantes :
- $\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \max(-x, x)$ et $|-x| = |x|$;
- $\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad |x \times y| = |x| \times |y|$;
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad |x^n| = |x|^n$.

1.4.4 Sommes et produits

Étant donné $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nombres. On veut considérer leur somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ et leur produit $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$ ou encore $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.
On introduit les notations suivantes :
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ ou $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq n} a_k$ ou $\displaystyle\sum_{k \in [\![1, n]\!]} a_k$ pour désigner la somme de n nombres ;

- $\prod_{k=1}^{n} a_k$ ou $\prod_{1\leq k\leq n} a_k$ ou $\prod_{k\in[\![1,n]\!]} a_k$ pour désigner le produit de n nombres.

Plus généralement, si p et q sont deux entiers vérifiant $p \leq q$, et si l'on dispose de $q-p+1$ nombres complexes numérotés de p à q : $a_p, \ldots, a_q$, on note $\sum_{k=p}^{q} a_k$ leur somme et $\prod_{k=p}^{q} a_k$ leur produit.

Remarque : L'ordre dans lequel on somme ou on multiple les termes n'a pas d'importance, car l'addition et la multiplication sont commutatives.

Règles de calculs

Dans toute la suite $(a_k)_{k\in I}$ désigne une famille finie de nombres complexes avec I non vide. On suppose que I contient n éléments.

- Si tous les éléments de la famille $(a_{i\in I})$ sont égaux, on a :
  - $\sum_{i\in I} a_i = \alpha + \alpha + \ldots + \alpha = n\alpha$
  - $\prod_{i\in I} a_i = \alpha \times \alpha \times \ldots \times \alpha = \alpha^n$
- Séparation :
  - $\sum_{k\in I}(a_k + b_k) = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k$
  - $\prod_{k\in I}(a_k\ b_k) = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)\left(\prod_{k\in I} b_k\right)$
- Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :
  - $\sum_{k\in I}(\lambda\ a_k) = \lambda \sum_{k\in I} a_k$ et $\prod_{k\in I}(\lambda\ a_k) = \lambda^n \prod_{k\in I} a_k$
  - $\sum_{k\in I}(a_k + \lambda) = \left(\sum_{k\in I} a_k\right) + n\lambda$ et $\prod_{k\in I}(a_k)^p = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)^p$
- Relation de Chasles (avec $p < r < q$)
  - $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r-1} a_k + \sum_{k=r}^{q} a_k$
  - $\prod_{k=p}^{q} a_k = \left(\prod_{k=p}^{r} a_k\right)\left(\prod_{k=r+1}^{q} a_k\right) = \left(\prod_{k=p}^{r-1} a_k\right)\left(\prod_{k=r}^{q} a_k\right)$
- Additivité par rapport à l'ensemble d'indexation.
  Si I_1 et I_2 sont deux ensembles disjoints, alors :
  - $\sum_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k$

– $\displaystyle\prod_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \prod_{k\in I_1} a_k * \prod_{k\in I_2} a_k$

- Conventions : $\displaystyle\sum_{k\in\emptyset} a_k = 0$ et $\displaystyle\prod_{k\in\emptyset} a_k = 1$

Changement d'indice

Si r est un entier, alors, dans la somme $S = \displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k$, on peut effectuer un décalage d'indice en utilisant $j = k + r$ et en écrivant $\displaystyle\sum_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}$.

Symétrisation

On peut inverser l'ordre dans lequel les termes sont considérés en utilisant $j = n - k$:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$

Remarques :
- Les lettres k et j intervenant dans les notations précédentes désignent des variables muettes servant à décrire l'ensemble d'indexation. On peut choisir d'utiliser n'importe quelle autre lettre.
- Les considérations qui précèdent peuvent être faites aussi à propos du symbole $\prod$.

Regroupements de termes

On peut regrouper les termes par paquets pour faire apparaître des simplifications. Par exemple on sépare les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs :

$$\sum_{\substack{k\in I\\ k \text{ impair}}} a_k + \sum_{\substack{k\in I\\ k \text{ pair}}} a_k$$

Sommes et produits télescopiques

On suppose $p \leq q$, on a :

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(a_k - a_{k+1}) = a_p - a_{q+1}$, appelé ***somme télescopique*** ;

- $\displaystyle\prod_{k=p}^{q}\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_p}{a_{q+1}}$, avec a_k tous non nuls, appelé ***produit télescopique***.

Calculs remarquables

Proposition 1.4.2. (*Somme des n premiers entiers*)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Proposition 1.4.3. (*Somme des carrés des n premiers entiers*)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Proposition 1.4.4. (*Somme des cubes des n premiers entiers*)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Proposition 1.4.5. (*Somme des termes d'une suite géométrique*)
Pour $a \in \mathbb{C}$ et $a \neq 1$ et pour $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a^k = \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}$

Proposition 1.4.6. (*Factorisation de $x^n - y^n$*)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, on a

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Sommes doubles

Définition 1.4.2. On appelle ***somme double*** une somme finie de la forme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ où $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ est une famille de complexes doublement indexée et $A = I \times J$ est un produit cartésien.

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

L'ordre dans lequel apparaissent les deux symboles $\sum$ n'a ici pas d'importance, car l'addition des nombres complexes est commutative.

1.4.5 Factorielle

Définition 1.4.3. Étant donné un entier naturel n, on appelle ***factorielle n***, et l'on note $n!$, le nombre entier :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{et} \qquad 0! = 1$$

1.4.6 Coefficient binomial

Définition 1.4.4. Étant donné deux entiers naturels n et p avec $p \leq n$, on appelle ***coefficient binomial** p **parmi** n*, et l'on note $\binom{n}{p}$ (ou aussi C_n^p), le nombre suivant :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} = \frac{1}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$$

Remarques :

- Si $p > n$, $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$

- Si $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Proposition 1.4.7. Étant donné deux entiers naturels n et p, on a :

- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ si $p \leq n$
- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ si $n \geq 1$ et $p \geq 1$ (***Relation de Pascal***)

Proposition 1.4.8. *(Formule du binôme de Newton)*
Étant donné $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p \, y^{n-p}$$

1.5 Dénombrement

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments d'un ensemble, c'est-à-dire déterminer son cardinal à l'aide de techniques combinatoires qui permettent d'étudier les configurations de collections finies d'objets.

Idée : On veut placer des objets (au nombre de n) dans des cases (au nombre de p) de sorte que toutes les cases contiennent un objet et un seul.

Problème : De combien de manières différentes peut-on y parvenir ?

Deux paramètres importants :

- Ordre : les cases peuvent être numérotées (il y a ordre) ou pas, c'est-à-dire l'ordre des objets dans les emplacements peut avoir une incidence ou pas selon les situations.
- Remise ou répétition : les objets peuvent être remis dans l'ensemble de départ après avoir été choisis et placés, auquel cas le même objet peut apparaître dans deux cases ou plus au final (il y a remise ou répétition). Ou bien chaque objet ne peut apparaître qu'une fois au plus.

1.5.1 Permutations avec répétition

Principe des choix successifs : Quand on fait k choix successifs, si il y a n_1 possibilités pour le premier choix, puis n_2 pour le deuxième, ..., n_k pour le k-ième choix, alors il y a en tout $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ manières différentes de faire ces choix.

Remarque : Lien avec les produits cartésiens d'ensembles :

choisir n éléments successivement dans des ensembles notés $E_1, E_2, \ldots, E_n$, c'est choisir un $n - uple$ de l'ensemble $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. Le principe des choix successifs dit donc que :

$$Card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n) = Card(E_1) \cdot Card(E_2) \cdot Card(E_3) \cdot \ldots \cdot Card(E_n)$$

Définition 1.5.1. Une ***permutation avec répétition*** de p objets parmi n est une suite *ordonnée* de p éléments choisis parmi n, et pouvant se répéter.

Proposition 1.5.1. Soit E et F des ensembles finis de cardinaux respectifs $p \geq 1$ et n. Alors l'ensemble des applications de E dans F est un ensemble fini et son cardinal vaut :

$$(Card\ F)^{Card\ E} = n^p$$

Application : Placer n objets dans p cases *avec remise et avec ordre* de sorte que toutes les cases contiennent un objet et un seul, revient à construire une application de l'ensemble E des cases ($Card(E) = p$) dans l'ensemble F des objets ($Card(F) = n$), qui à chaque case associe l'objet qu'on y place. Il y a donc n^p manières différentes de le faire.

1.5.2 Permutations sans répétition ou arrangements

Principe : On a p objets rangés dans des cases numérotées de 1 à p. Pour la première case il y a n choix possibles, pour la deuxième il n'y en a plus que $n-1$, et pour la p-ème il n'en reste plus que $n-p+1$.

Définition 1.5.2. Une ***permutation sans répétition*** ou un ***arrangement*** de p objets parmi n est une suite *ordonnée* de p éléments choisis parmi n, et qui ne peuvent pas se répéter.

Remarque : Dans un arrangement l'*ordre* intervient mais il n'y a *pas de remise.*

Proposition 1.5.2. Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est le nombre d'arrangements de p éléments parmi n :

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Proposition 1.5.3. Le nombre de bijections d'un ensemble E de cardinal n dans un ensemble F de cardinal n est le nombre d'arrangements de n éléments parmi n :

$$A_n^n = n!$$

1.5.3 Permutations sans répétition de n objets dont $k \leq n$ seulement sont distincts

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts.
Lorsque seul $k \leq n$ éléments sont distincts, chacun d'eux apparaissant $n_1, n_2, \dots, n_k$ fois avec $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ et $n_i \geq 1$. Par conséquent le nombre de permutations est :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

1.5.4 Combinaisons

Définition 1.5.3. Une ***combinaison*** est un sous-ensemble *non ordonné* de p objets choisis dans un ensemble qui en contient n.

Proposition 1.5.4. Soit n et p des entiers naturels. Le nombre de sous-ensembles de cardinal p d'un ensemble E de cardinal n est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque : L'*ordre n'intervient pas* et il n'y a *pas de remise.*

Un petit tableau pour résumer les cas d'utilisation de ces trois outils de dénombrement :

	L'ordre est important	**L'ordre n'est pas important**
Répétitions ou remises possibles	Permutations	
Répétitions ou remises interdites	Arrangements	Combinaisons