Table des matières

Chapitre 3

Équations différentielles

3.1 Introduction

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est $y(x)$ et ses dérivées. Elle est de la forme

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{n-1}(x), y^n(x)) = 0$$

où F est une application définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Idée intuitive

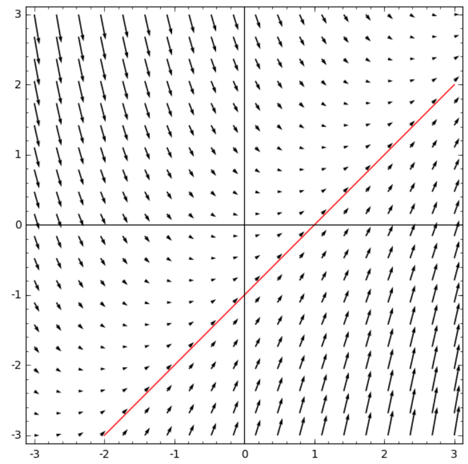
On considère cette exemple d'équation différentielle du premier ordre (l'ordre de dérivation le plus élevé de la fonction inconnue) :

$$y'(x) + y(x) = x \quad (\star)$$

On prend (x_0, y_0) un point dans le plan.
Si une solution passe par le point (x_0, y_0), c'est-à-dire on a $y(x_0) = y_0$, alors l'équation $(\star)$ nous permet de déterminer la dérivée de $y(x)$ en ce point :

$$y'(x_0) = x - y(x_0) = x_0 - y_0$$

On associe à ce point la *direction* de la droite tangente correspondante à $y(x)$ en x_0 et on varie (x_0, y_0) dans le plan, on a un ***champ de directions***.



Champ de direction de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = x$.
En rouge la droite $y = x - 1$, une solution.

Définition 3.1.1. On appelle ***équation différentielle*** une équation liant une fonction inconnue, notée $(y, y(t), y(x))$, ses dérivées successives jusqu'à un certain ordre (l'***ordre*** de l'équation différentielle) et sa variable ou ses variables.
Quand la fonction recherchée ne dépend que d'une variable, on parle d'***équation ordinaire (EDO)***.
Dans le cas contraire, on parle d'***équation différentielle aux dérivées partielles (EDP)***.

Définition 3.1.2. Une fonction f qui vérifie l'équation différentielle est dite ***solution ou intégrale*** et sa courbe représentative est appelée ***courbe intégrale***.

Remarques :

- Intégrer une équation différentielle, c'est la résoudre, trouver toutes ses solutions.
- Une solution est toujours définie sur un intervalle. Toute résolution d'équations différentielles doit commencer par préciser un intervalle d'étude.
  Toutefois, dans le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants, le solutions sont toujours définies sur $\mathbb{R}$ et le problème ne se posera pas.

Définition 3.1.3. Le ***problème de Cauchy*** consiste à déterminer si une équation différentielle donnée possède aucune, une unique ou plusieurs solutions vérifiant des conditions initiales.
Remarques :

- L'ordre de l'équation différentielle sera relié au nombre de paramètres à déterminer et donc au nombre de conditions initiales qu'il sera possible de fixer.
- Les équations différentielles sont l'outil absolument fondamental en modélisation. Toute description de phénomènes (physique ou autre) passe généralement par des équations différentielles ou des équations aux différences.

3.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Définition 3.2.1. Une équation différentielle est ***linéaire*** si il est possible d'isoler toutes les occurrences de $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ du même coté du signe "=", sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Les coefficients a_k peuvent être des fonctions, mais nous nous limiterons aux cas de constantes. On dit alors que l'équation est à ***coefficients constants.***
Dans ce cas, le membre de droite $f(x)$ s'interprète comme l'entrée du système étudié et s'appelle le ***second membre***.
S'il est nul, on parle d'***équation homogène***.

3.2.1 Équations différentielles linéaires homogènes du I ordre

Définition 3.2.2. On appelle ***équation différentielle linéaire homogène du premier ordre*** une équation différentielle de la forme

$$ay'(x) + by(x) = 0$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Équations différentielles linéaires à coefficients constants homogènes du I ordre

Théorème 3.2.1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ sont toutes les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}$$

où k est une constante quelconque.

Recherche de solutions

1. Solution sous forme générale

$$y(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}$$

   où k est une constante à déterminer en fonction des conditions initiales.

2. Méthode des variables séparables

$$ay' = -by \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = -\frac{b}{a} \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{b}{a}dx$$

$$\Rightarrow\; \ln(|y|) = -\frac{b}{a}x + c \;\Rightarrow\; y = ke^{-\frac{b}{a}x+c}$$

$$\Rightarrow\; y = ke^{-\frac{b}{a}x}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Théorème 3.2.2. L'équation différentielle $ay' + by = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$ admet une unique solution f sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition initiale $f(x_0) = y_0$ (***problème de Cauchy***).
Cette solution est définie par $f(x) = y_0 e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)}$.

3.2.3 Équations différentielles linéaires non homogènes à coefficients constants du I ordre

Définition 3.2.3. On appelle équation différentielle linéaire ***non homogène*** du premier ordre une équation différentielle de la forme :

$$ay'(x) + by(x) = c(x) \quad (E)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et c fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$.
L'équation :

$$ay'(x) + by(x) = 0 \quad (E_h)$$

est appelée l'***équation homogène associée à*** (E).

Théorème 3.2.3. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = ke^{-\frac{b}{a}x} + y_p(x)$$

où

- $y(x)$ est la solution générale de l'équation différentielle non homogène ;
- $y_h(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}$ est la solution de l'équation différentielle homogène ;
- $y_p(x)$ est une solution particulière de (E).

Remarque : Si on connaît une solution particulières de (E), alors on connaît toutes les solutions.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

Intervalle de définition : $\mathbb{R}$

I^{er} ORDRE (E) : $ay'(x) + by(x) = c(x)$,   **avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \neq 0$ et c fonction continue**

1) Méthode de la variation de la constante

$$y = k(x)e^{-\frac{b}{a}x} \quad \Longrightarrow y' = k'(x)e^{-\frac{b}{a}x} - \frac{b}{a}k(x)e^{-\frac{b}{a}x}$$

On remplace y et y' dans (E) et on intègre pour obtenir $k(x)$.

2) Recherche d'une solution particulière

$$y = y_h + y_p$$

- **Solution (y_h) de l'équation homogène (E_h) : $ay'(x) + by(x) = 0$**

$$y_h = ke^{-\frac{b}{a}x}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

- **Solution (y_p) particulière :**

$c(x)$	y_p
C, constante $\in \mathbb{C}$	$\frac{C}{b}$ si $b \neq 0$ $\frac{C}{a}x$ si $b = 0$
$P(x)$, polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$	$Q(x)$, polynôme de degré : n si $b \neq 0$ $n+1$ si $b = 0$
$P(x)e^{sx}$, polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{C}$	$Q(x)e^{sx}$, polynôme de degré : n si $s \neq -\frac{b}{a}$ $n+1$ si $s = -\frac{b}{a}$
$\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$, avec $\omega \in \mathbb{R}$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, avec A, B réels

3.2.4 Équations différentielles linéaires à coefficients constants du II ordre

Définition 3.2.4. Une ***équation différentielle du second ordre*** à coefficients constants est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(x) \quad (\varepsilon)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$ et $d(x)$ est une fonction continue.
L'équation homogène associée est $ay'' + by' + cy = 0 \quad (\varepsilon_h)$.

Remarque : Pour fixer une solution d'une équation différentielle d'ordre 2, il faut en général deux conditions initiales. On s'attend donc à avoir deux constantes d'intégration dans les solutions.

Équation caractéristique

Définition 3.2.5. On appelle ***équation caractéristique à*** (ε) l'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$.

Théorème 3.2.4. Soit $(r, k) \in \mathbb{C}^2$. Soit y la fonction à valeur dans $\mathbb{C}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = ke^{rx}$. La fonction y est une solution de (ε_h) si et seulement si r est une solution de l'équation caractéristique de (ε_h).

IInd ORDRE (ε) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$ et d fonction continue

Recherche d'une solution particulière

$$y = y_h + y_p$$

- **Solution (y_h) de l'équation homogène (ε_h) : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$**

  Équation caractéristique associée à (ε) : $ar^2 + br + c = 0$

	Solutions eq.caract	y_h
$\Delta > 0$	r_1 et r_2 distinctes réelles	$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	r racine double	$y(x) = (k_1 x + k_2) e^{rx}$
$\Delta < 0$	$r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \overline{r_1}$ complexes conjuguées	$y(x) = e^{\alpha x}(k_1 \cos(\beta x) + k_2 \sin(\beta x))$ avec k_1, k_2 réels

- **Solution (y_p) particulière :**

$d(x)$	y_p
$P(x)$, polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$	$Q(x)$, polynôme de degré : n si $c \neq 0$ $n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$ $n+2$ si $c = 0$ et $b = 0$
$P(x)e^{sx}$, polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{C}$	$Q(x)e^{sx}$, polynôme de degré : n si s n'est pas racine de l'eq.caract $n+1$ si s est racine simple de l'eq.caract $n+2$ si s est racine double de l'eq.caract
$e^{sx}(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x))$ avec $s \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$	$e^{sx}x^m(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$ $m = 0$ si $s + \mathrm{i}\omega$ n'est pas racine de l'eq. caract $m = 1$ si $s + \mathrm{i}\omega$ est racine simple de l'eq. caract $m = 2$ si $s + \mathrm{i}\omega$ est racine double de l'eq. caract

Problème de Cauchy

Il existe une unique solution si on a des conditions initiales :

- pour les équadiff d'ordre 1 : $y(x_0) = y_0$
- pour les équadiff d'ordre 2 : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$

Principe de superposition

Soient f_1 et f_2 deux fonctions. Soit y_1 une solution de

$$ay' + by = f_1 \qquad \text{(resp. } ay'' + by' + c = f_1)$$

et y_2 une solution de

$$ay' + by = f_2 \qquad \text{(resp. } ay'' + by' + c = f_2)$$

alors $y_1 + y_2$ est une solution de

$$ay' + by = f_1 + f_2 \qquad \text{(resp. } ay'' + by' + c = f_1 + f_2)$$

Relation trigonométrie-complexes

$$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = Im((b + \mathrm{i}a)e^{\mathrm{i}\omega x})$$

$$\cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} = Re(e^{\mathrm{i}x}) \qquad \sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = Im(e^{\mathrm{i}x})$$

Notion de résonance

Définition 3.2.6. On appelle ***modes propres*** d'une équation différentielle d'ordre quelconque, les racines de l'équation caractéristique.

Définition 3.2.7. Soit $ay' + by = P(x)e^{mx}$ (ou resp. $ay'' + by' + cy = P(x)e^{mx}$) une équation différentielle, on appelle m le ***mode d'entrée*** de l'équation différentielle.

Définition 3.2.8. Dans une équation différentielle d'ordre quelconque on dit qu'il y a ***résonance*** si le mode d'entrée est égal à au moins un des modes propres du système.
On parle de ***résonance simple*** (resp. ***double***) si le mode d'entrée est racine simple (resp. double) de l'équation caractéristique.