Table des matières

Chapitre 4

Intégrales

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

4.0.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 4.0.1. On appelle ***subdivision de l'intervalle*** $[a, b]$ toute famille finie $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de réels vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad x_i \in [a, b]$;
2. $x_0 = a$ et $x_n = b$;
3. $\forall i \in \{0, \dots, n\} \quad x_{i-1} < x_i$.

Remarques :

1. Une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ comprend $n+1$ points (appelés ***nœuds de la subdivision***) et détermine n intervalles non vides $[x_{i-1}, x_i]$.
   Le réel $h = \max\limits_{i\in\{0,\dots,n\}} (x_i - x_{i-1})$ est appelé le ***pas de la subdivision***.
2. La famille $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ où $x_i = a + i(b-a)/n$ définit une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ de pas $h = (b-a)/n$ appelée ***subdivision uniforme*** de l'intervalle $[a, b]$.

Définition 4.0.2. Soit f une application définie sur l'intervalle $[a, b]$.

- L'application f est dite ***en escalier*** sur l'intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, \dots, n\}$.
- Une subdivision $\sigma = (x'_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de l'intervalle $[a, b]$ est dite ***adaptée*** à la fonction en escalier f si f est constante sur chaque intervalle $\left]x'_{i-1}, x'_i\right[$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Remarque :
L'image d'une fonction en escalier sur $[a, b]$ est un ensemble fini.
Elle est bornée et ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité.

Définition 4.0.3. Soient f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ adaptée à f. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on désigne par λ_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. On appelle ***intégrale de f sur l'intervalle*** $[a, b]$ le réel :

$$I_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\lambda_i.$$

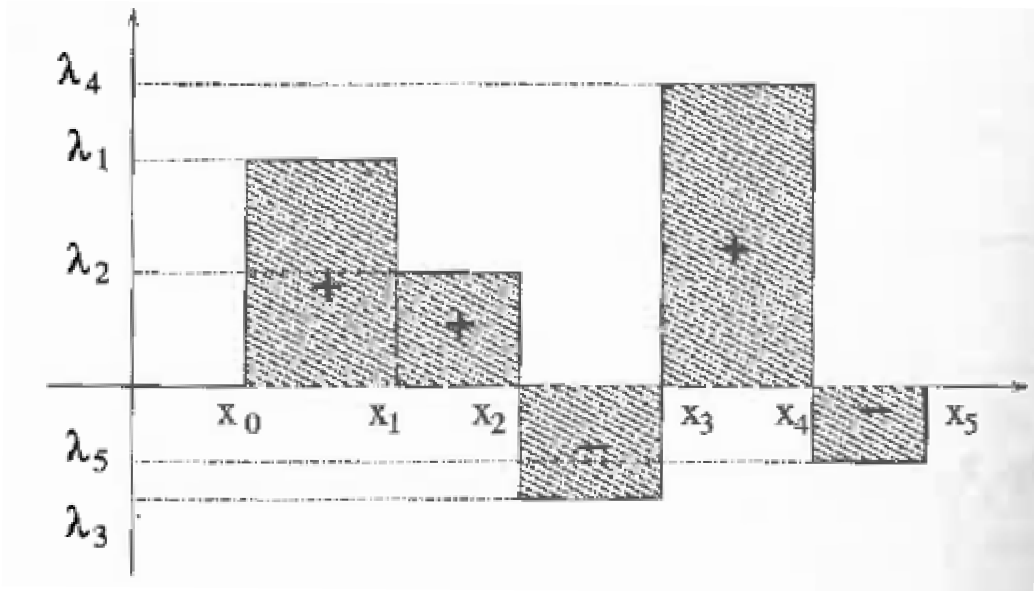
On le note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_a^b f$.

Remarques :

- La valeur de $I_\sigma(f)$ est indépendante du choix de la subdivision.
- Les valeurs de f aux nœuds x_i de la subdivision n'interviennent pas dans la définition de l'intégrale.

Interprétation graphique

Le réel $\displaystyle\int_a^b f$ représente l'aire algébrique entre la représentation graphique de la fonction sur $[a, b]$ et l'axe des abscisses. La quantité $(x_i - x_{i-1})\lambda_i$ est en effet l'aire d'un rectangle de longueur $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur λ_i.



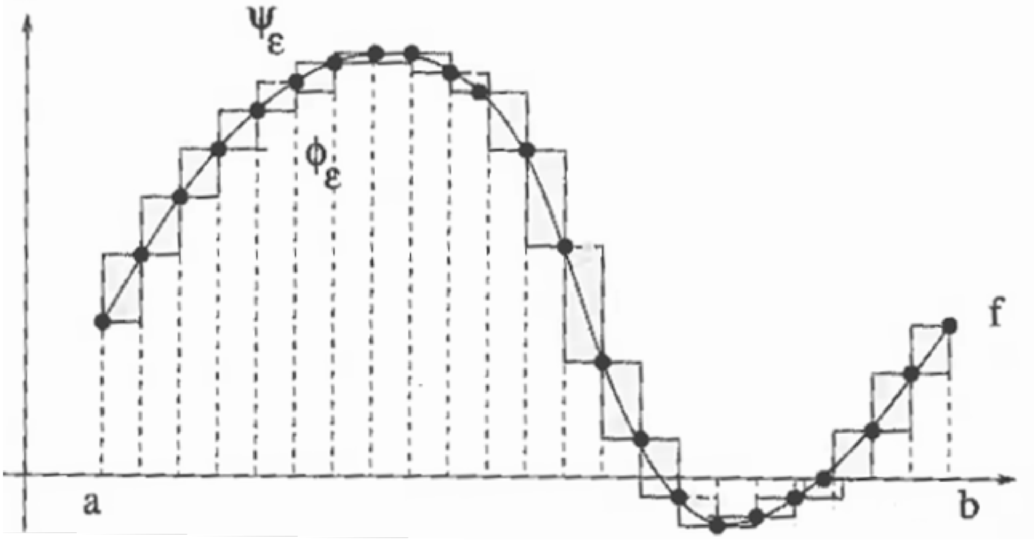
Proposition 4.0.1. Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$. On a les propriétés suivantes :

1. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$
2. Si f est positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
3. Si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
4. Pour tout $c \in]a, b[$ la fonction f est une fonction en escalier sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$; de plus
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad (\textbf{\textit{relation de Chasles}})$$
5. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

4.0.2 Intégrale de Riemann

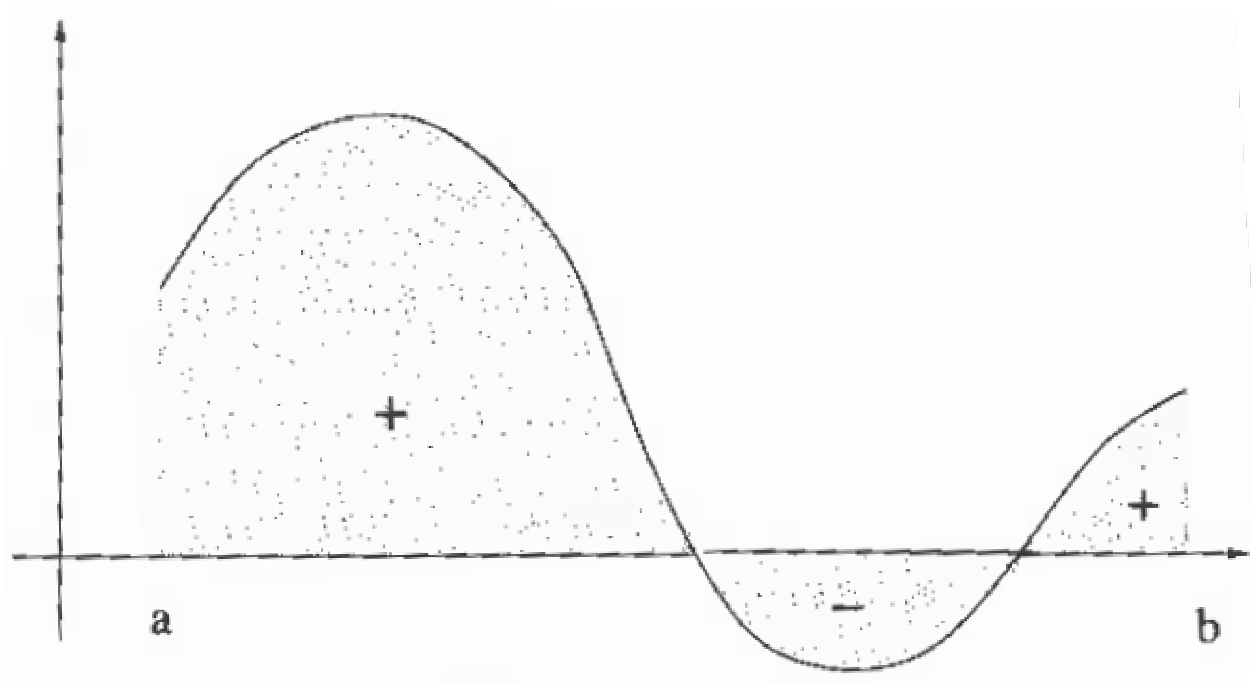
Définition 4.0.4. Une application f définie sur $[a, b]$ est dite ***intégrable au sens de Riemann ou Riemann intégrable ou intégrable*** si pour tout réel ε strictement positif, il existe deux fonctions Φ_ε et Ψ_ε en escalier sur $[a, b]$ telles que :

1. $\Phi_\varepsilon \leq f \leq \Psi_\varepsilon$
2. $\displaystyle\int_a^b (\Psi_\varepsilon - \Phi_\varepsilon) < \varepsilon$



Interprétation graphique

Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'aire algébrique de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la représentation graphique de f.



<u>Remarques</u> :

- Par convention si $a < b$ et si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$ on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

- On convient également que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si $a = b$.

Proposition 4.0.2. Toute application continue sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Remarque : L'idée est que les fonctions continues peuvent être approchées d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier, tout en gardant un contrôle d'erreur uniforme sur l'intervalle.

Définition 4.0.5. On dit qu'une application f définie sur $[a,b]$ est ***continue par morceaux sur*** $[a,b]$, s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ l'application f est continue sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et admet une limite (finie) à droite en x_{i-1} et une limite (finie) à gauche en x_i.

Corollaire 4.0.1. Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Proposition 4.0.3. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone alors f est intégrable.

Définition 4.0.6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f ***est de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I si :

1. f est dérivable ;
2. f' est continue sur I.

On note $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ une fonction dérivable et à dérivée continue.

Proposition 4.0.4. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est intégrable.

4.0.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Proposition 4.0.5. Soient f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$. On a les propriétés suivantes :

1. $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$
2. Si f est positive, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
3. Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
4. Pour tout $c \in]a,b[$ la fonction f est Riemann intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$; de plus
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad (\textbf{\textit{relation de Chasles}})$$
5. Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Proposition 4.0.6. Soit f une fonction positive et continue sur $[a,b]$. On a
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$$

Proposition 4.0.7. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Le produit $f \cdot g$ est intégrable sur $[a,b]$ et
$$\left(\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t$$

4.1 Intégrales indéfinies et primitives

4.1.1 Intégrales indéfinies

Définition 4.1.1. Soient f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et x un élément de $[a,b]$. La fonction f est Riemann intégrable sur $[a,x]$ et l'application

$$F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est appelée ***intégrale indéfinie*** de f.
D'après la relation de Chasles pour $x_1, x_2 \in [a,b]$ on a :

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 4.1.1. L'application F est continue sur $[a,b]$.

Proposition 4.1.2. (***Dérivabilité de l'intégrale indéfinie***)
Soient f une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$ et F son intégrale indéfinie. Si f est continue en $x_0 \in [a,b]$ alors l'application F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

4.1.2 Primitives

Proposition 4.1.3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une ***primitive*** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Proposition 4.1.4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G = F + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Théorème 4.1.1. ***(Théorème fondamental du calcul intégral)***
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f, c'est-à-dire
- F est dérivable ;
- $F'(x) = f(x)$.

Par conséquent pour une primitive F quelconque de f on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

<u>Remarque</u> : Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive.

<u>Primitives des fonctions usuelles</u> (avec c constante arbitraire)

$f(x)$	F **primitive de** f	**Validité**
k constante	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	$]-1, 1[$
$\tan(x)$	$-\ln \lvert \cos(x) \rvert + c$	$]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n[\quad n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + c$	$]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n[\quad n \in \mathbb{Z}$

Primitives des fonctions composées (avec c constante arbitraire)

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

$f(x)$	F **primitive de** f	**Condition**
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	aucune
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{-n+1}u^{-n+1}+c$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+c$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	u strictement positive sur I
$u'e^u$	e^u+c	aucune

4.1.3 Techniques d'intégration

Intégration par parties

Proposition 4.1.5. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

et pour les primitives on a la même formule :

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Dérivée d'une composée

Proposition 4.1.6. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\Phi : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\Phi(J) \subset I$. Soit F une primitive de f sur I. Alors $F \circ \Phi$ est une primitive de $(f \circ \Phi) \cdot \Phi'$ sur J et on a :

$$\int f(\Phi(x))\Phi'(x)\,\mathrm{d}x = (F \circ \Phi)(x) + c$$

Trois situations classiques :

- $\displaystyle\int \Phi'(x)e^{\Phi(x)}\,\mathrm{d}x = e^{\Phi(x)} + c$
- $\displaystyle\int \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert\Phi(x)\rvert + c$
- $\displaystyle\int \Phi'(x)\Phi^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Phi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$

Changement de variable

Théorème 4.1.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\Phi : J \to \mathbb{R}$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\Phi(J) \subset I$. Pour tout $a, b \in J$ on a :

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \Phi$ est une primitive de $(f \circ \Phi) \cdot \Phi'$.

Remarque : Comme Φ est une bijection de J sur $\Phi(J)$, sa réciproque Φ^{-1} existe et est dérivable sauf quand Φ s'annule. Si Φ ne s'annule pas, on peut écrire $t = \Phi^{-1}(x)$ et faire un changement de variable en sens inverse.

Proposition 4.1.7. Soit f est une application continue sur $[-a, a]$, alors :

- si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Si f est une application continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Intégration des fonctions trigonométriques

- Règles de Bioche : $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$
  - Si $\omega(x) = \omega(-x)$, alors $t = \cos x$
  - Si $\omega(x) = \omega(\pi - x)$, alors $t = \sin x$
  - Si $\omega(x) = \omega(\pi + x)$, alors $t = \tan x$
- Tangente de l'arc moitié : $t = \tan(\frac{x}{2})$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

- Primitives de $\sin^p x \cos^q x$
  - Si p est impair : $t = \cos x$
  - Si q est impair : $t = \sin x$
  - Si p et q sont pairs : on linéarise

Intégration des fractions rationnelles

- Si $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(x - x_1)(x - x_2)} = \dfrac{A}{x - x_1} + \dfrac{B}{x - x_2}$, alors

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = A \ln|x - x_1| + B \ln|x - x_2| + c$$

  sur $(-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup (x_2, +\infty)$

- Si $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(x-x_0)^2} = \dfrac{A}{(x-x_0)^2} + \dfrac{B}{x-x_0}$, alors
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{x-x_0} + B\ln|x-x_0| + c$$
sur $(-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$

Intégration avec radicaux

En présence de $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, on essaie le changement de variable :
$$t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

<u>Remarque</u> : La présence de $\sqrt{1-x^2}$ incite au changement de variable $x = \sin t$.

Formule de la moyenne

Définition 4.1.2. Soit f une application Riemann intégrable sur $[a,b]$. On appelle ***valeur moyenne*** de f sur $[a,b]$ le réel
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 4.1.8. Soit f continue sur $[a,b]$, il existe $c \in (a,b)$:
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$$

Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Définition 4.1.3. Une ***fonction complexe*** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par la donnée de deux fonctions réelles u et v :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$$
On peut aussi écrire
$$u(x) = Re(f(x)) \quad v(x) = Im(f(x))$$

- On dit que f est continue sur I si et seulement si les fonctions u et v sont continues sur I.
- On dit que f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions u et v sont dérivables sur I. On note $f' = u' + \mathrm{i}v'$ et on dit que f' est la fonction dérivée première de f.
- Pour tous $a, b \in I$, on pose
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$$

Par définition de l'intégrale de f on a les égalités suivantes :

- $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x$
- $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x$
- $\overline{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \displaystyle\int_a^b \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x$

Cas de l'exponentielle complexe

Proposition 4.1.9. Soit $\Phi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Soit $f = e^{\Phi}$ définie sur I par $f(x) = e^{\Phi(x)}$. Alors f est dérivable sur I et, pour tout x de I :

$$f'(x) = \Phi'(x)e^{\Phi(x)}.$$

Remarques : Soit $\omega = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$:

- $f(x) = e^{\omega x} \Rightarrow f'(x) = \omega e^{\omega x}$
- $\int e^{\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\omega}e^{\omega x} + c$
- $\int e^{\omega x}\,\mathrm{d}x = \int e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + \mathrm{i}\sin(\beta x))\,\mathrm{d}x$

4.2 Sommes de Riemann

Nous pouvons calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

La somme S_n s'appelle la ***somme de Riemann*** associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de $[a, b]$ en n petits intervalles.

4.3 Intégration numérique

Méthodes de quadrature numérique simples

- Rectangle : $\tilde{I} = (b-a)f(a)$ ou Point au milieu : $\tilde{I} = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- Trapèze : $\tilde{I} = (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$
- Simpson : $\tilde{I} = \dfrac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Méthodes de quadrature numérique composites

- Rectangle :

$$\tilde{I} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

- Trapèze :

$$\tilde{I} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

- Simpson :

$$\tilde{I} = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(m_i) + f(b)\right)$$

avec $m_i = a + (i + \frac{1}{2})h$ les milieux des segments $[x_i, x_{i+1}]$.

Erreur dans les méthodes de quadrature

- Précision du résultat (erreur de calcul) : $\varepsilon = I - \tilde{I}$
  La valeur de l'intégrale ne peut pas être calculée exactement, donc on introduit une majoration (estimation).

- Rapidité d'exécution (coût) : le temps de calcul augmente avec la precision. Il n'augmente pas de la même manière pour toutes les méthodes.
  Pour les méthodes de quadrature, le temps de calcul est proportionnel au nombre de points où la fonction est évaluée.