OPTIQUE GEOMETRIQUE

II. Miroirs sphériques

ISEN – CIR1/CNB1

INTRODUCTION

Objectif du chapitre : application des lois de la réflexion aux miroirs sphériques

INTRODUCTION

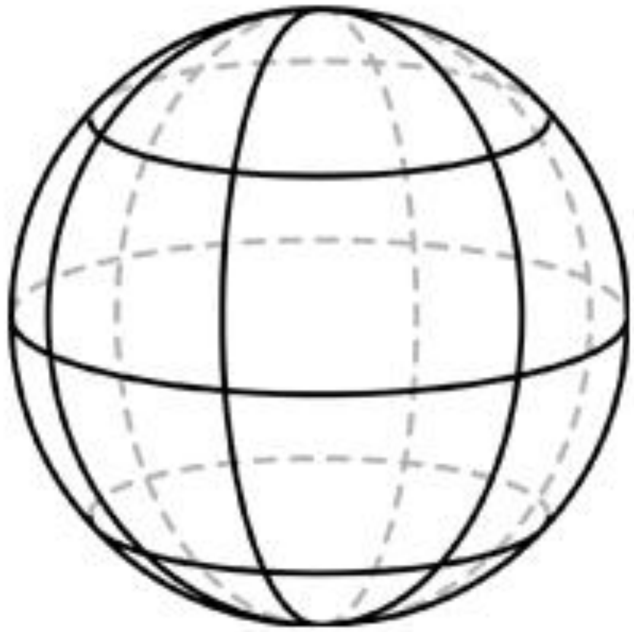
Objectif du chapitre : application des lois de la réflexion aux miroirs sphériques

Partie 1 : **démonstration** des propriétés de ces systèmes
(partie du cours la plus technique)

Partie 2 **: savoir faire** (calculs) que vous devez acquérir
(plus simple, essentiel à retenir, à faire en TD)

1. DEFINITON

Miroir sphérique = Miroir qui s’appuie sur la surface d’une sphère



Attention : le miroir que l’on découpe dans la sphère peut être rond, carré, …

Rayon de courbure du miroir = rayon de la sphère initiale = R

1. DEFINITON

MIROIR CONCAVE

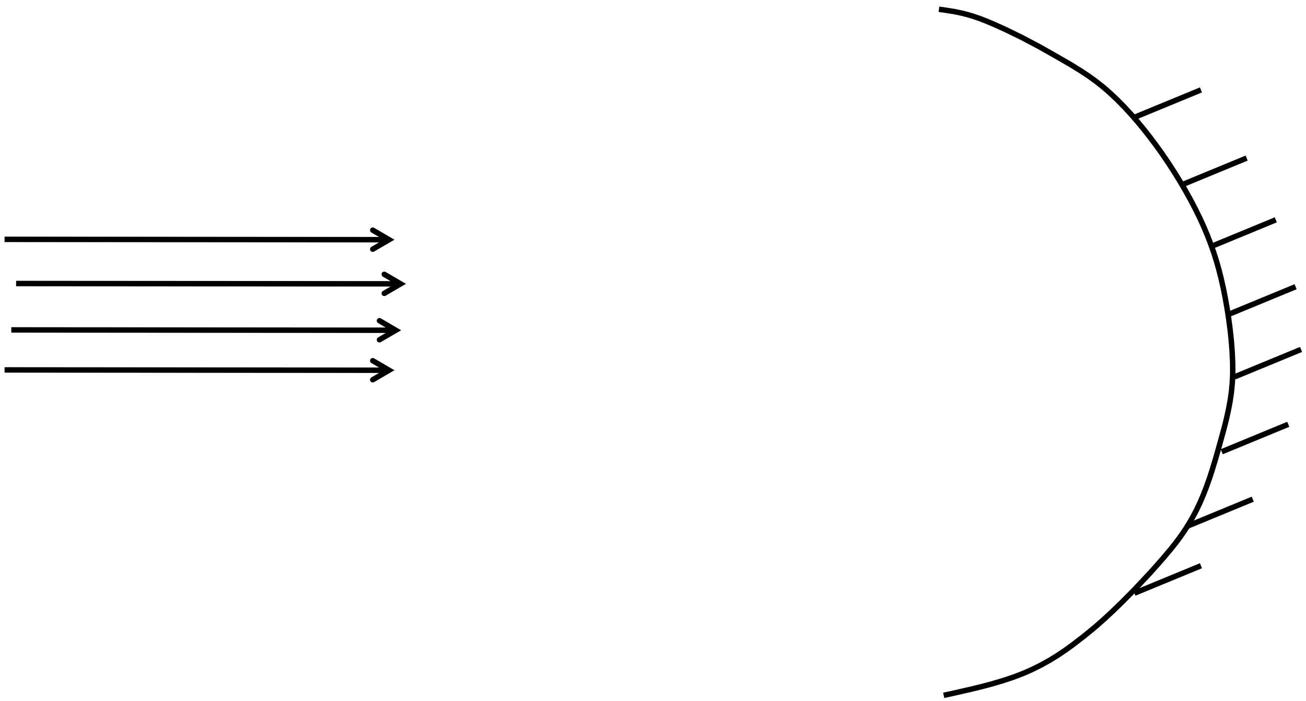
MIROIR CONV**EX**E

Quand regarde à l'intérieur de la sphère

Quand on regarde à l'**ext**érieur

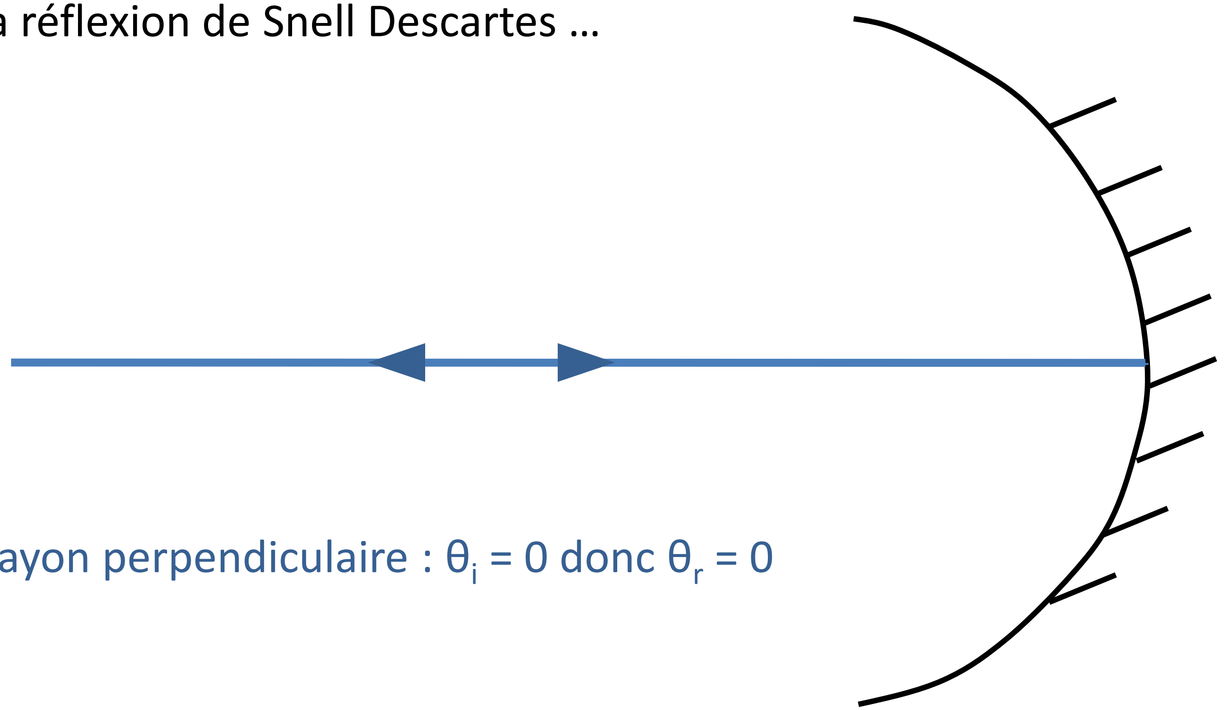
Question : quel est la partie miroir convexe de la cuillère ?

2. PROPRIETES DU MIROIR CONCAVE

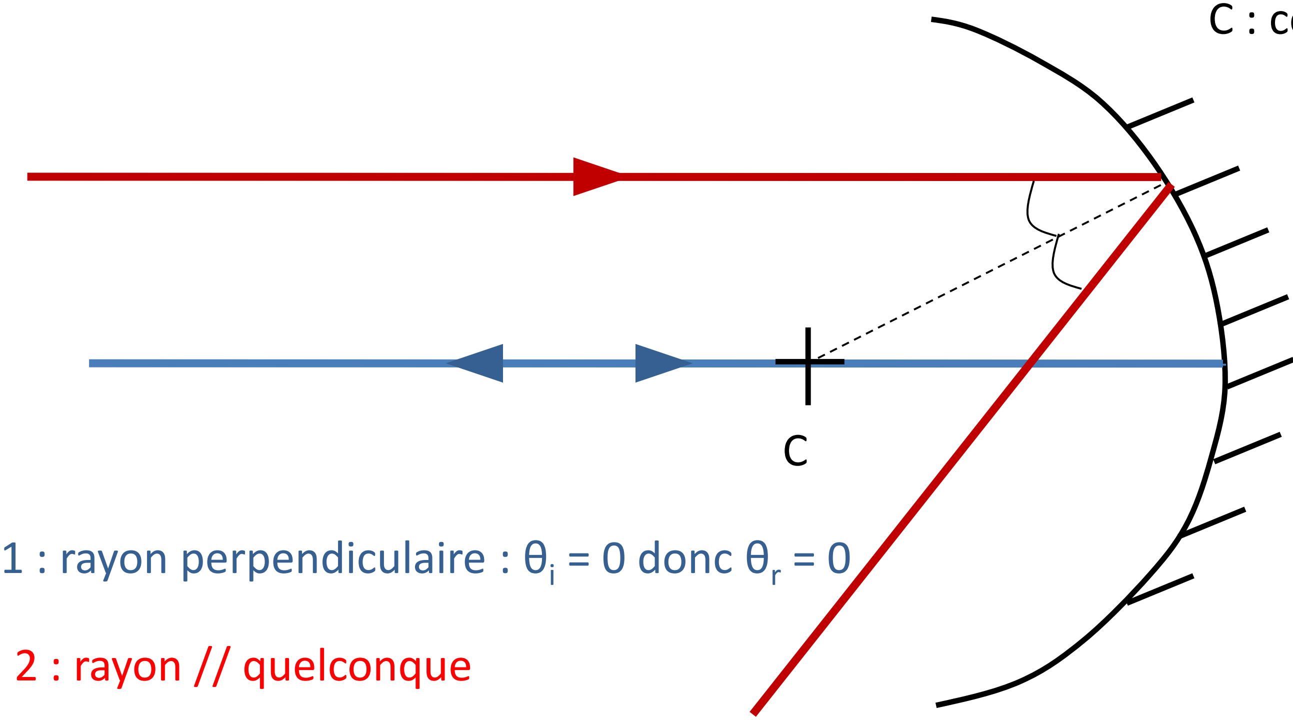


Que se passe t il ?

Lois de la réflexion de Snell Descartes …



Rayon 1 : rayon perpendiculaire : $\theta_i = 0$ donc $\theta_r = 0$



Rayon 1 : rayon perpendiculaire : $\theta_i = 0$ donc $\theta_r = 0$

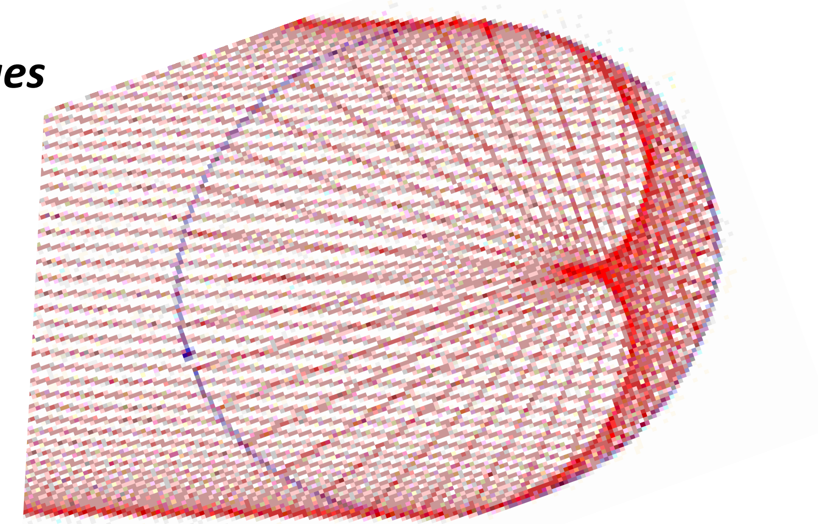
Rayon 2 : rayon // quelconque

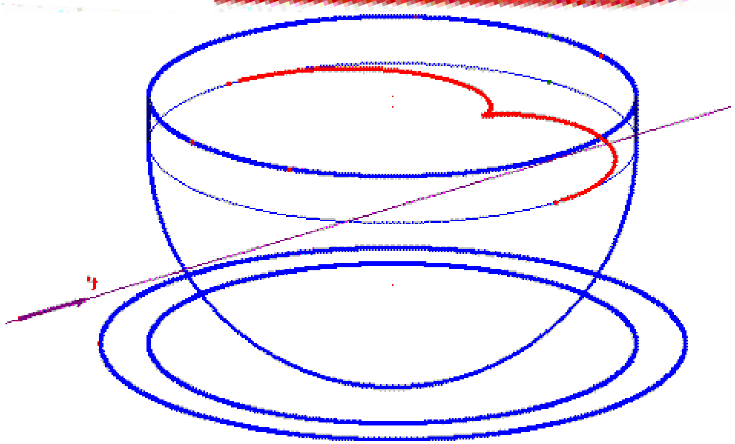
Propriété de la normale du miroir : droite perpendiculaire à la surface, donc passe par le centre C de la sphère (propriété des rayons d'un cercle ou d'une sphère)

2. PROPRIETES DU MIROIR CONCAVE

Si on continue pour plusieurs rayons,
On va voir une accumulation de rayons à certains endroits

Les caustiques



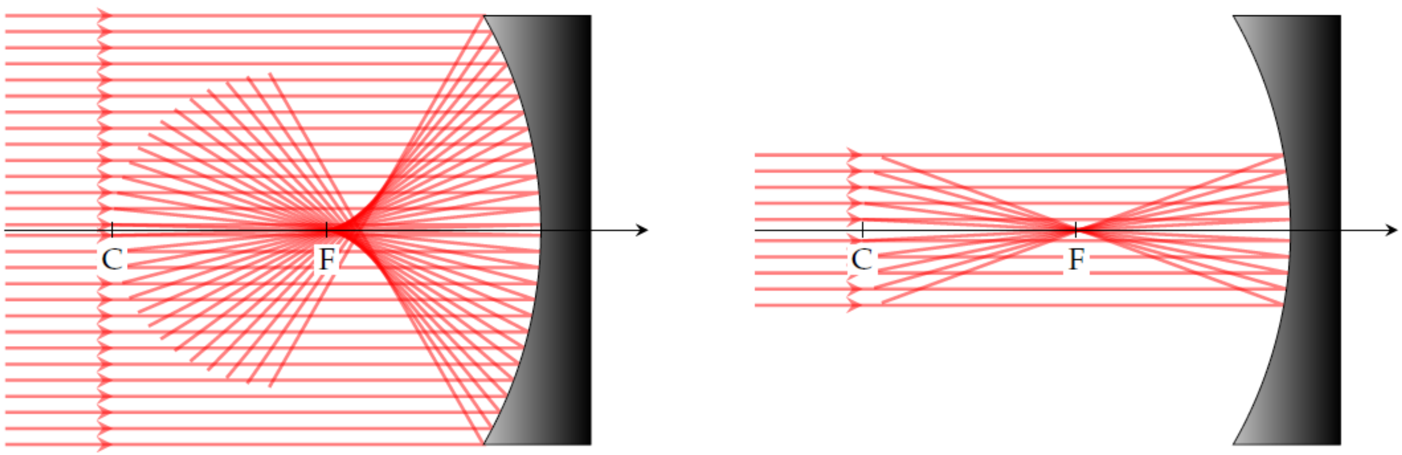


L'image du soleil est étendue (« floue »)

2. PROPRIETES DU MIROIR CONCAVE

A) Stigmatisme approché du miroir sphérique

Dans la suite, nous allons voir **un cas spécifique plus intéressant : celui des rayons proche de l'axe optique**, pour lequel on a un **stigmatisme approché** (convergence des rayons au même point)



Conditions de stigmatisme approché

A) Stigmatisme approché du miroir sphérique

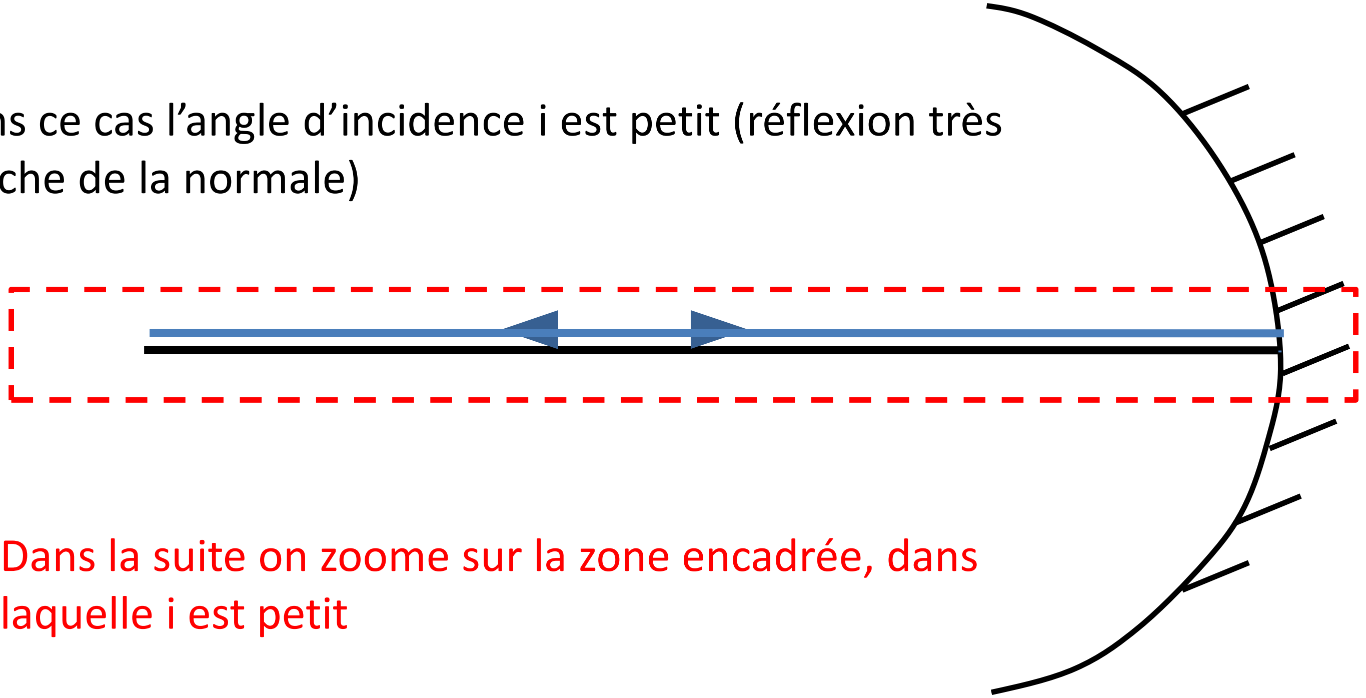
a. Rayons parallèles l’axe optique

b. Rayons faiblement inclinés

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR SPHERIQUE

a. rayons parallèles à l'axe optique

Dans ce cas l'angle d'incidence i est petit (réflexion très proche de la normale)

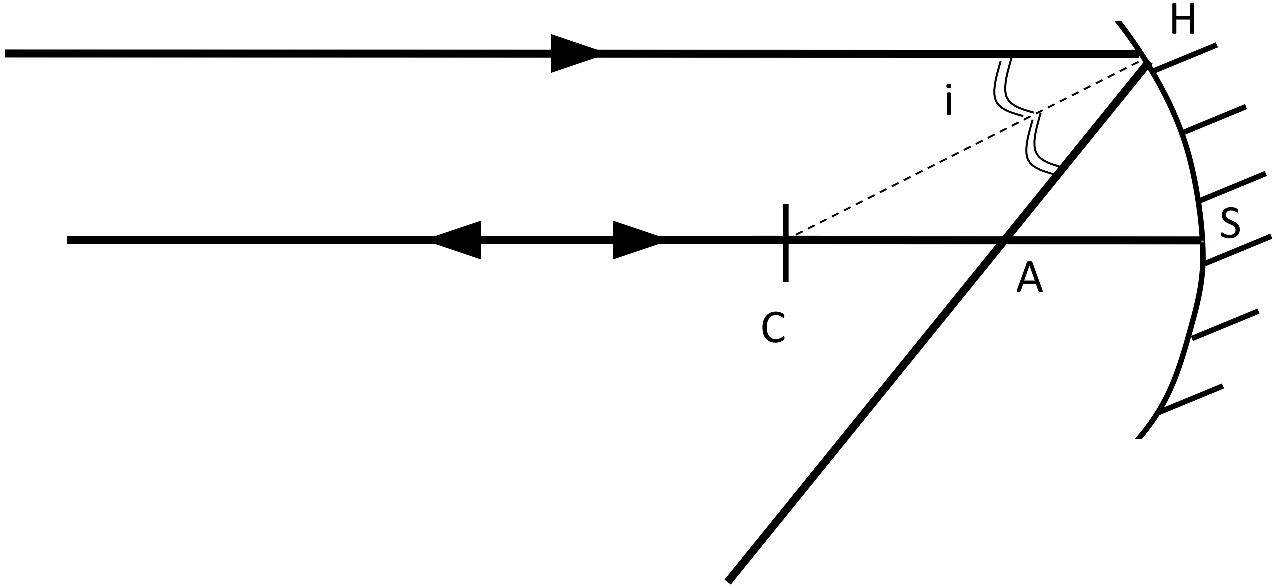


Dans la suite on zoome sur la zone encadrée, dans laquelle i est petit

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR SPHERIQUE

a. rayons parallèles à l'axe optique

Rayon R = CH= CS



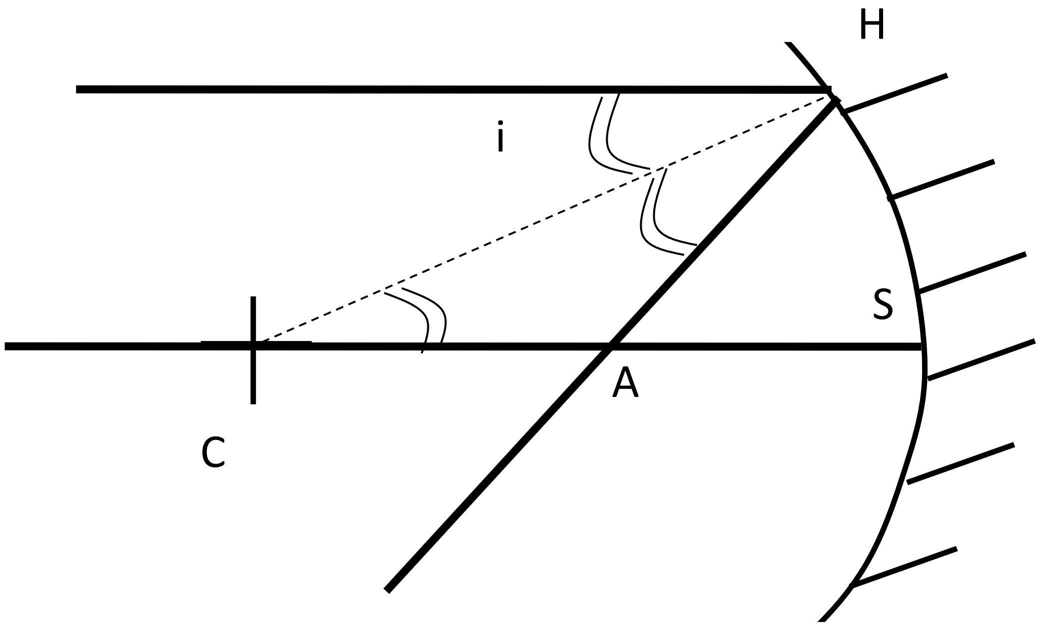
Calculons la distance CA en fonction de i et de R …

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR SPHERIQUE

a. rayons parallèles à l'axe optique

.

Calculons la distance CA en fonction de i et de R …



Rayon R = CH= CS

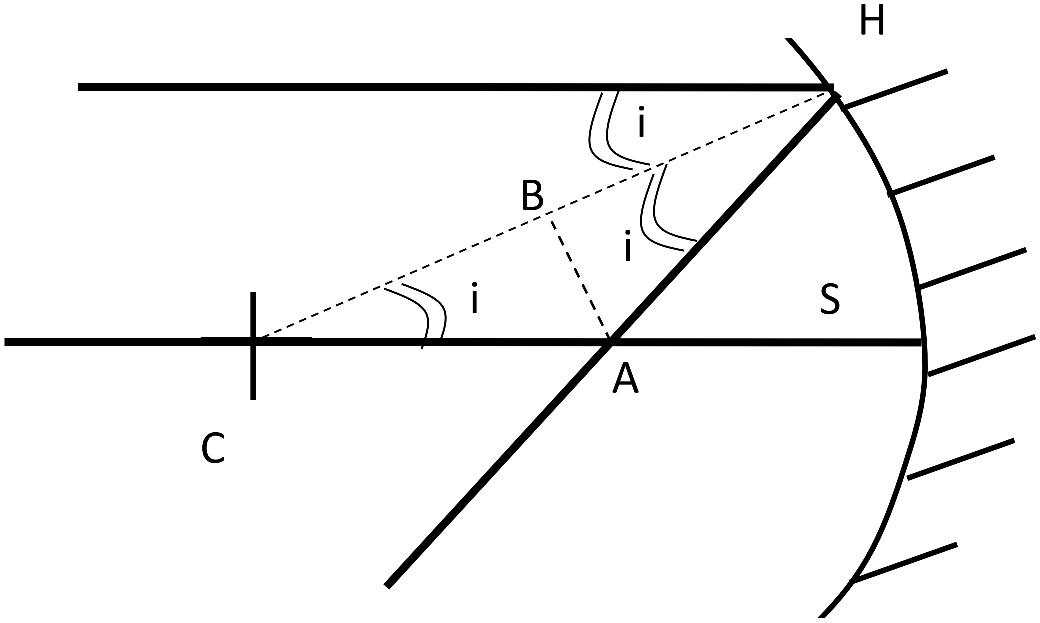
1. On remarque que le triangle CAH est isocèle en A

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR SPHERIQUE

a. rayons parallèles à l'axe optique

.

Calculons la distance CA en fonction de i et de R …



Rayon R = CH= CS

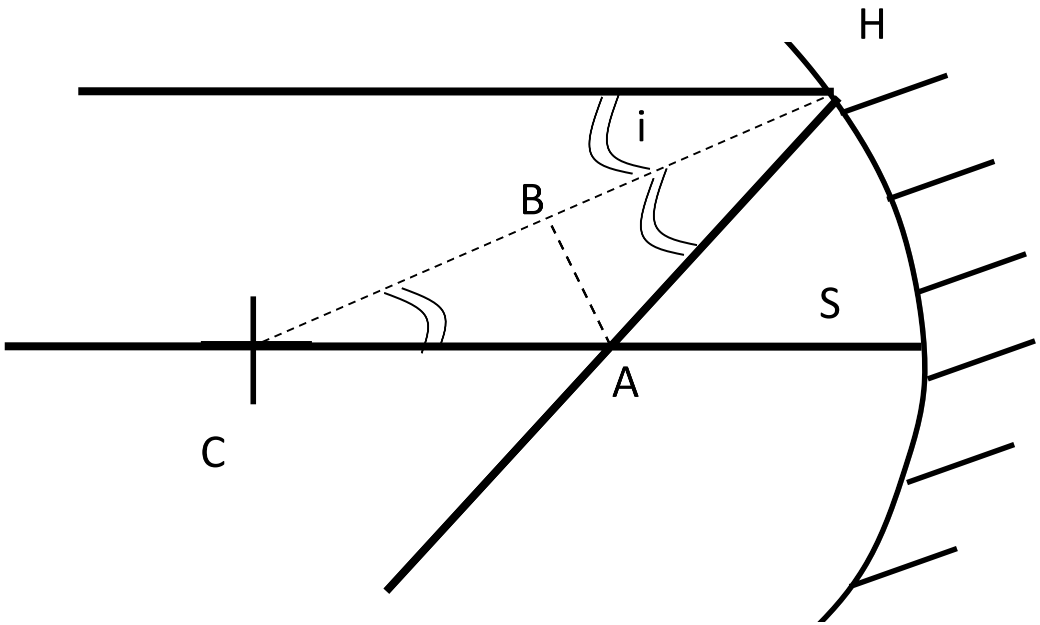
2. On ajoute le point B tel que AB perpendiculaire à CH.
Puisque CAH est isocèle et AB perpendiculaire à CH, BC=R/2

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR SPHERIQUE

a. rayons parallèles à l'axe optique

.

Calculons la distance CA en fonction de i et de R …



Rayon R = CH= CS

3. Cos i = CB / CA donc CA=CB / cos i →

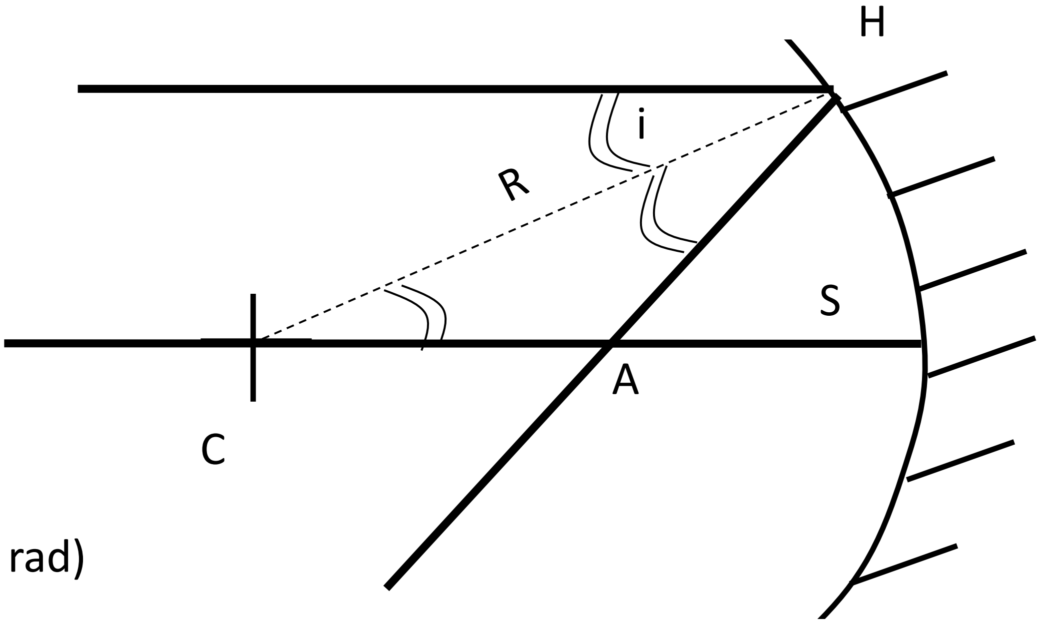
$$CA = \frac{R}{2\cos i}$$

.

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR SPHERIQUE

a. rayons parallèles à l'axe optique

$$CA = \frac{R}{2\cos i}$$



Approximation des petits angles

Développement limité de cosinus
(voir le cours de math 2e semestre)

$$\cos i = 1 - \frac{i^2}{2} + O\frac{i^4}{4} \quad \text{(i en rad)}$$

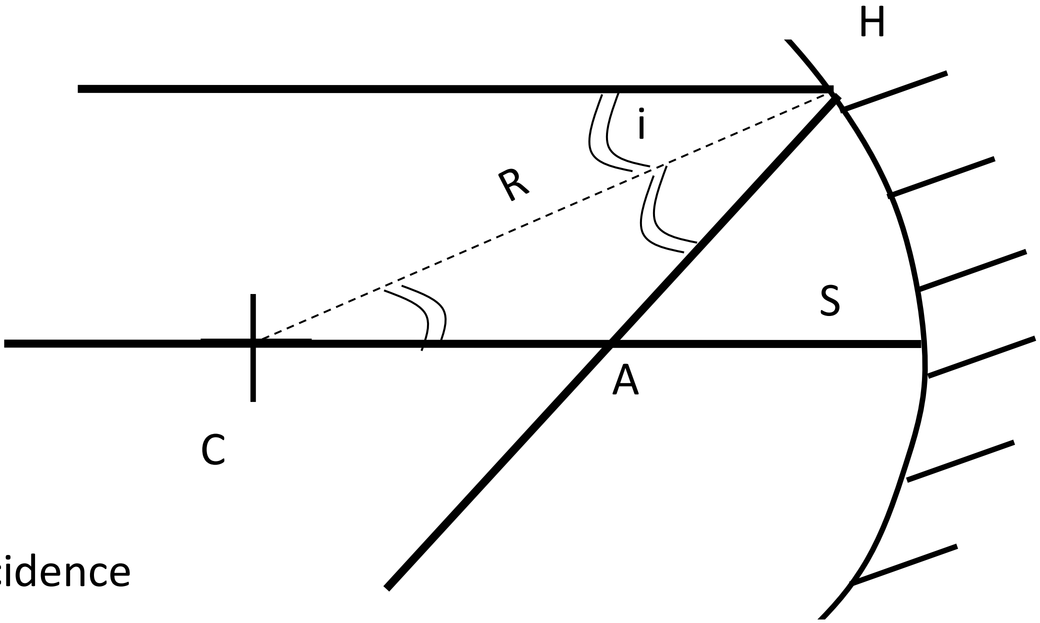
Si i est petit, le terme en i^2 est négligeable devant 1 et cos i ~ 1

Donc pour i petit, $$\boxed{CA \approx \frac{R}{2}}$$

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR SPHERIQUE

a. rayons parallèles à l'axe optique

$$\boxed{CA \approx \frac{R}{2}}$$



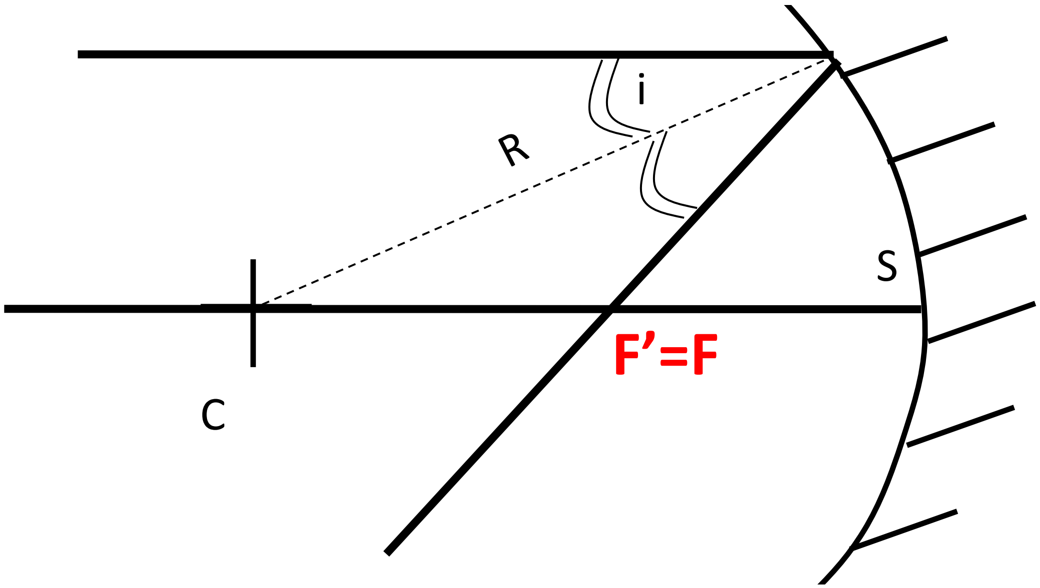
CA ne dépend pas de l'angle d'incidence

→ Stigmatisme approché

DEFINITION : FOYER IMAGE

Les rayons parallèles à l'axe optique convergent vers un point F', appelé le **foyer image**, vérifiant

$$CF' = CF = \frac{CS}{2} = \frac{R}{2}$$



F est le **foyer objet** : un rayon passant par F est réfléchi parallèle à l'axe optique (trajet inverse de la lumière).
Nous verrons mieux la différence avec les lentilles.

A) Stigmatisme approché des miroirs sphériques

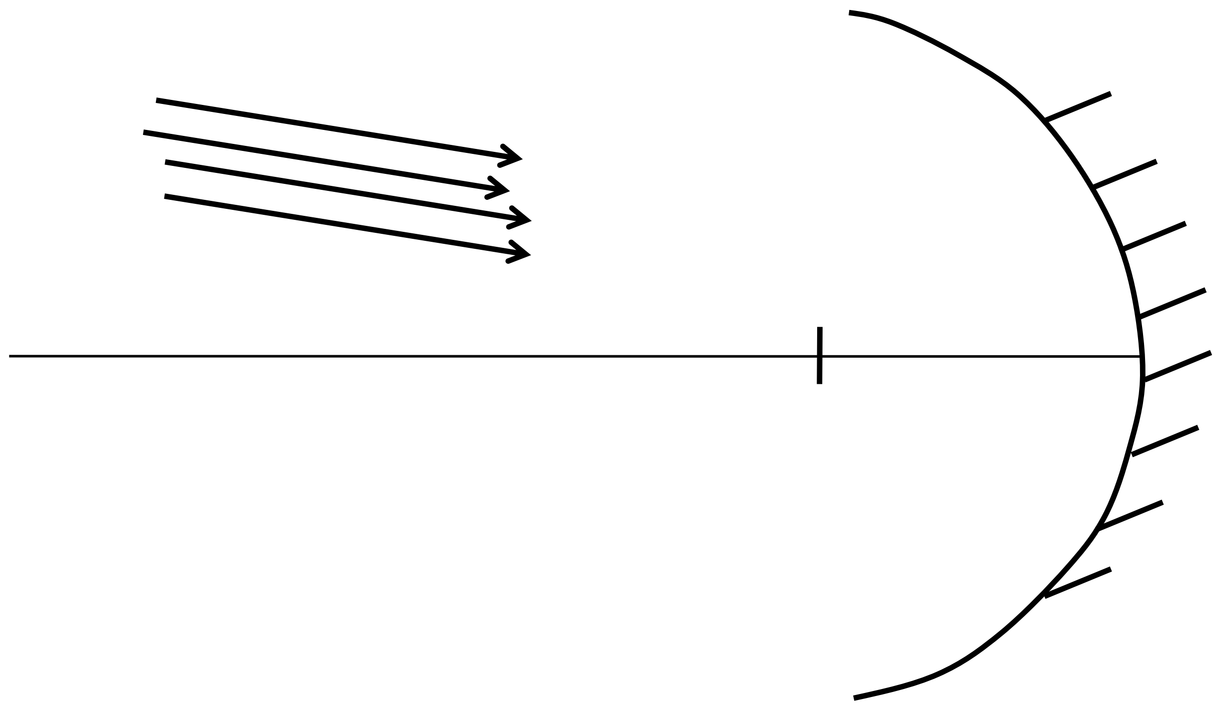
a. Rayons parallèles à l’axe optique

<u>b. Rayons faiblement inclinés</u>

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR CONCAVE

b. rayons faiblement inclinés

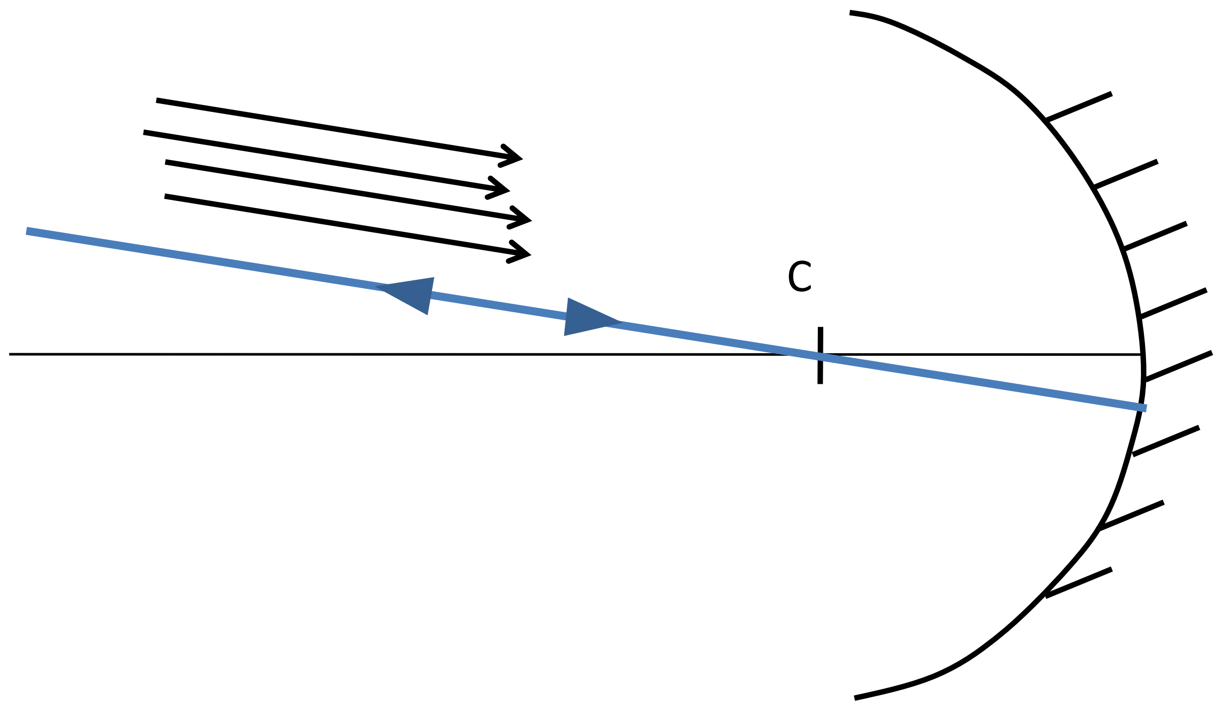
Cas un peu plus général :
rayon parallèles entre eux, mais qui ne sont pas parallèles à l'axe optique



1. Rayon passant par le centre du miroir : se réfléchit dans la direction incidente

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR CONCAVE

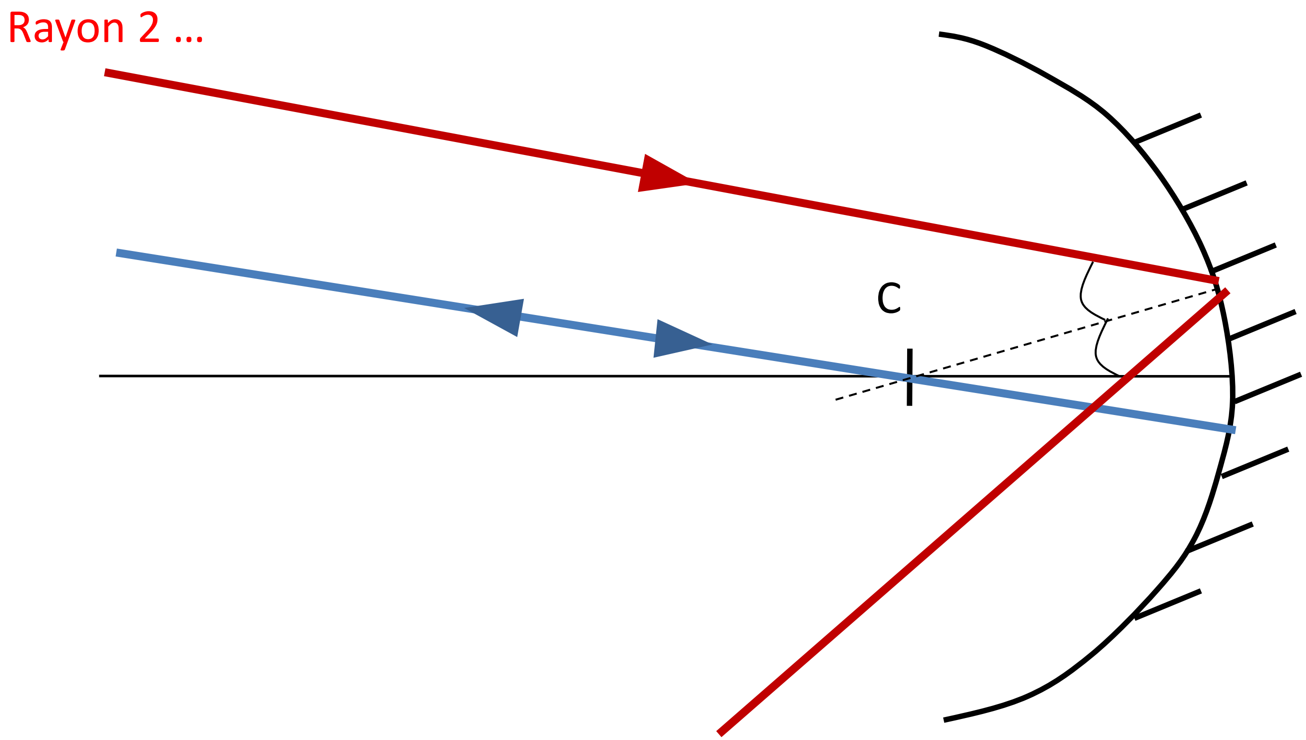
b. rayons faiblement inclinés



Rayon 1 passant par le centre du miroir : se réfléchit dans la direction incidente (les rayons de la sphère sont perpendiculaire à la surface donc i=0°)

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR CONCAVE

b. rayons faiblement inclinés



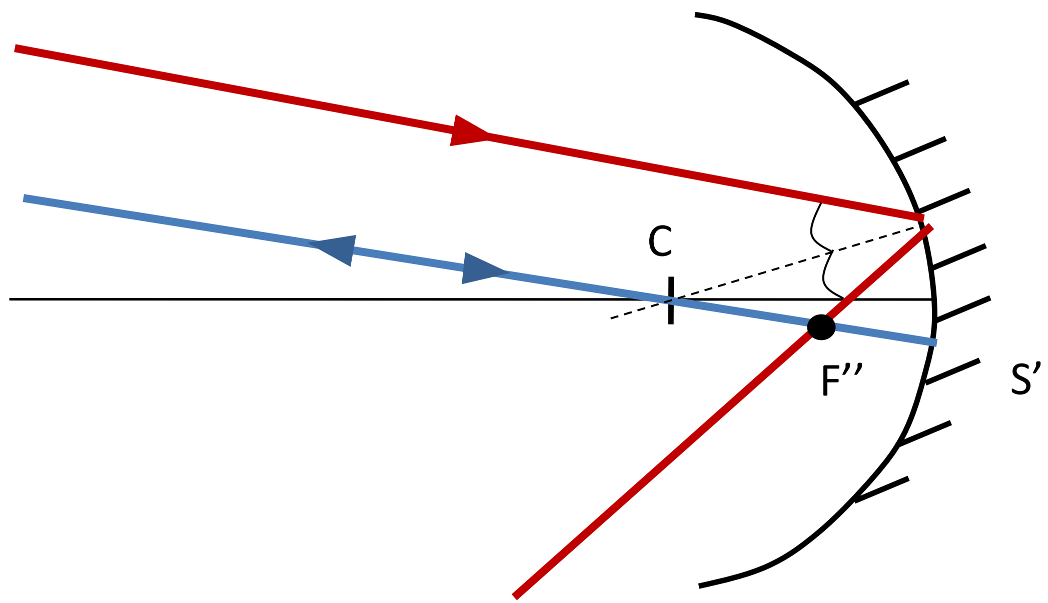
En penchant la tête, on peut s'apercevoir que ce problème est identique au cas des rayons parallèles à l'axe optique! Toutes les normales à la surface sont des rayons passant par C

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR CONCAVE

b. rayons faiblement inclinés

Mêmes propriétés que les rayons // à l’axe optique :

- Convergence vers un **point foyer F’’** sur le rayon passant par le centre C et tel que **CF’’=R/2**



A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR CONCAVE

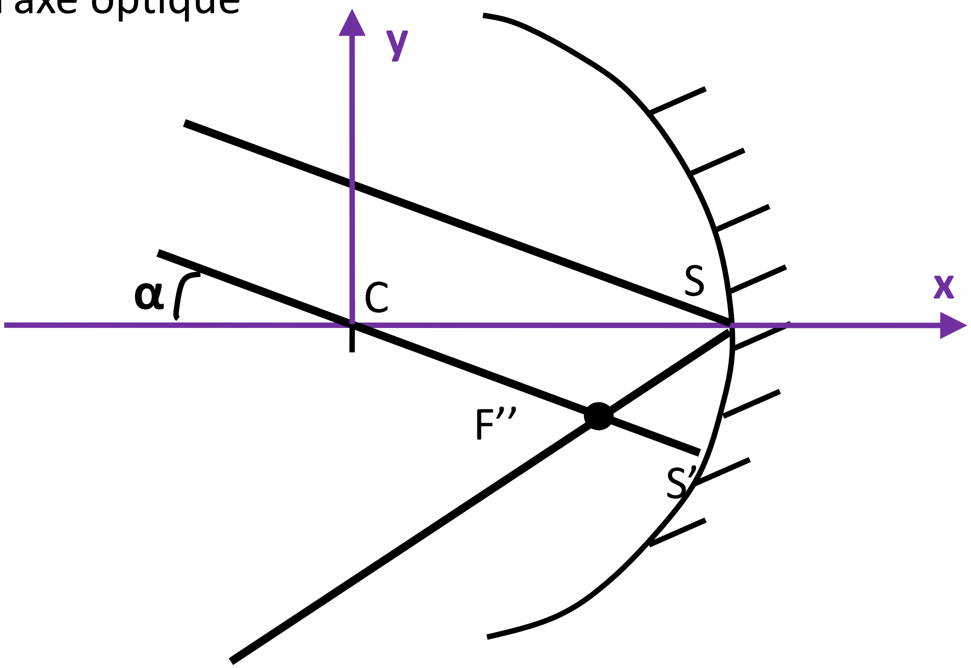
b. rayons faiblement inclinés

Objectif : calculer les coordonnées de F' dans le repères Cxy ?

α : angle entre les rayons incidents et l'axe optique

CF'' = R / 2

$$F''\begin{cases} \dfrac{R}{2}\cos\alpha \\ -\dfrac{R}{2}\sin\alpha \end{cases}$$



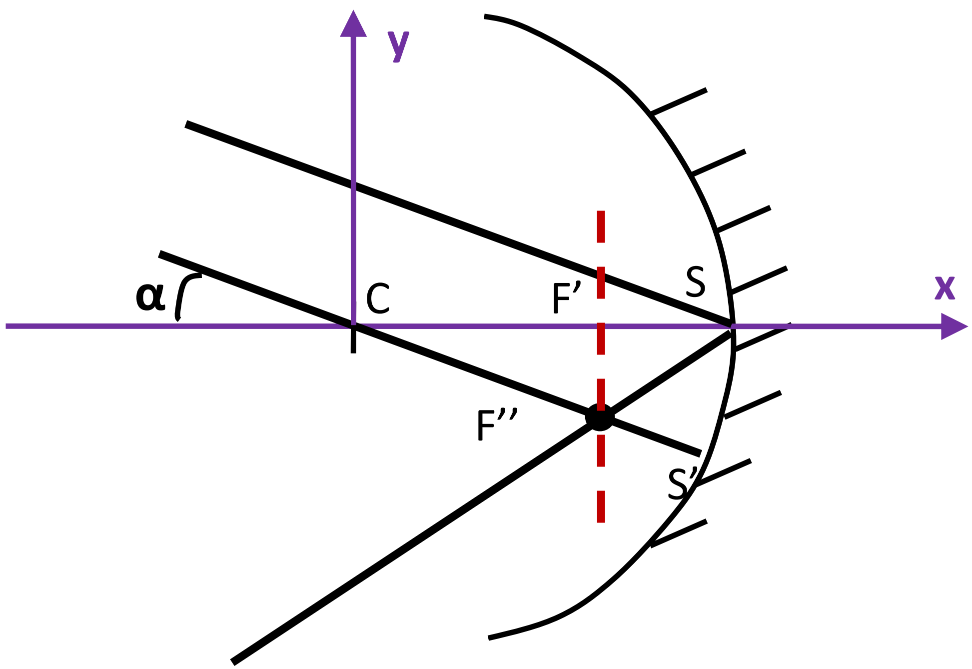
Et si α est petit ?

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR CONCAVE

b. rayons faiblement inclinés

Si α est petit (rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique)

$$F'' \begin{cases} \dfrac{R}{2} \\ -\dfrac{R}{2}\alpha \end{cases}$$



Donc :

1. Tous les points F'' ont la même abscisse et se retrouvent sur un même plan vertical

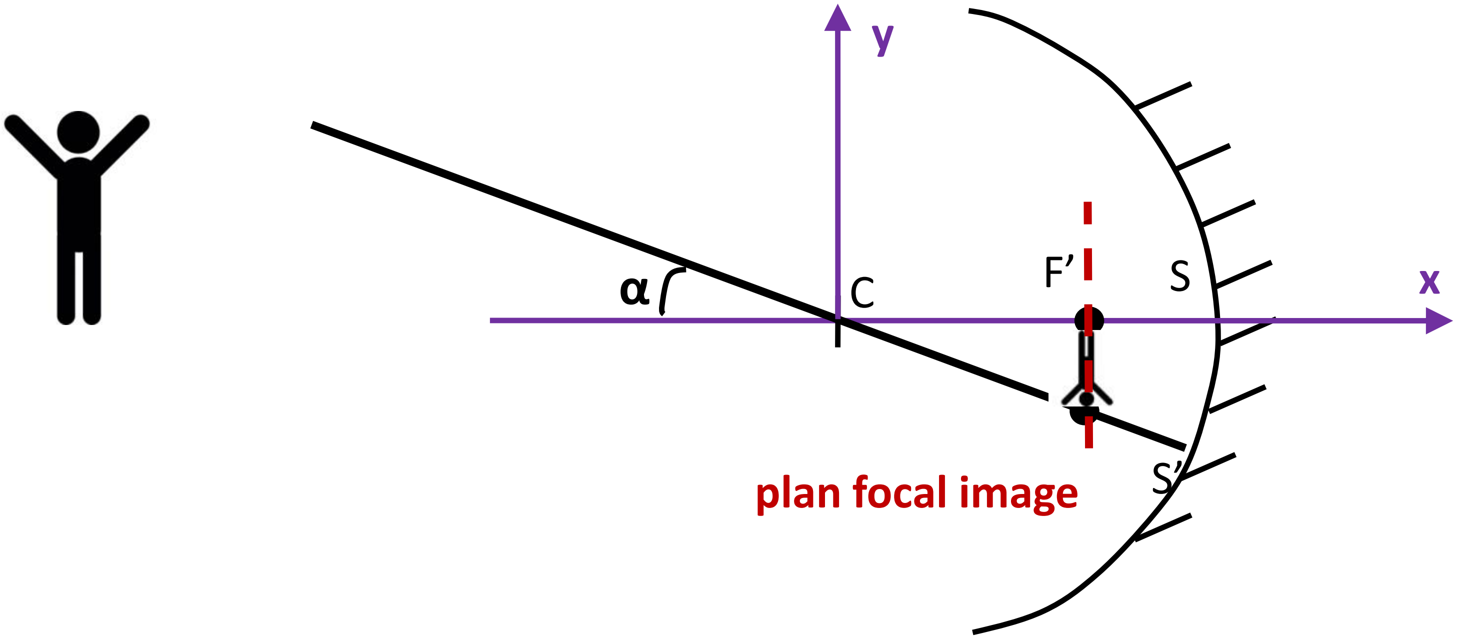
Ce plan est appelé le **plan focal image.**

2. La position F'' dépend en y de l'angle α

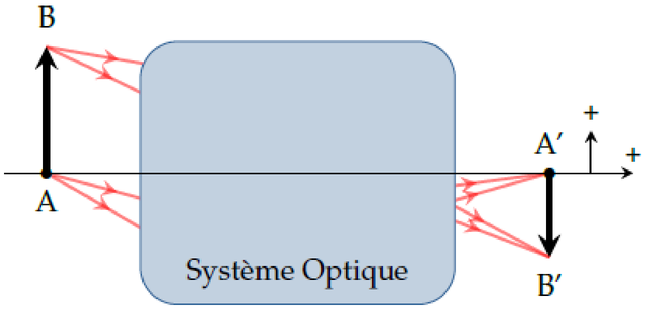
Cela correspond à une relation de proportionnalité entre la taille de l'objet et l'image.

A) STIGMATISME APPROCHE DU MIROIR CONCAVE

b. rayons faiblement inclinés



Aplanétisme :



CONDITIONS DE GAUSS

On obtient une image nette sur un plan si :

- Rayons proches de l'axe optique
- Rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique

} **Conditions de Gauss**

Importance de se placer dans les conditions de Gauss pour obtenir une image nette.
Par exemple, utilisation de diaphragme dans les systèmes optiques.

2. Propriétés des miroirs sphériques dans l’approximation de Gauss

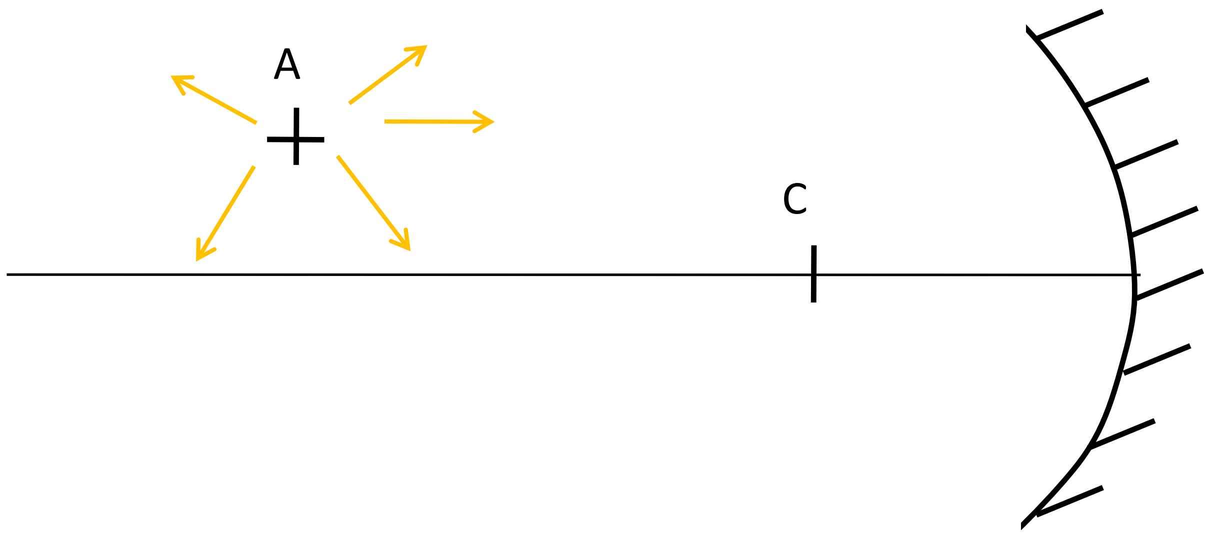
A) Stigmatisme approché, foyer, plan focal

B) Construction des rayons

C) Généralisation au miroir convexe

B) CONSTRUCTION DES RAYONS

Le miroir sphérique est approximativement stigmatique dans les conditions de Gauss
= Tous les rayons provenant d'un même point objet et dans les conditions de Gauss convergent vers un même point image, dont on va déterminer la position

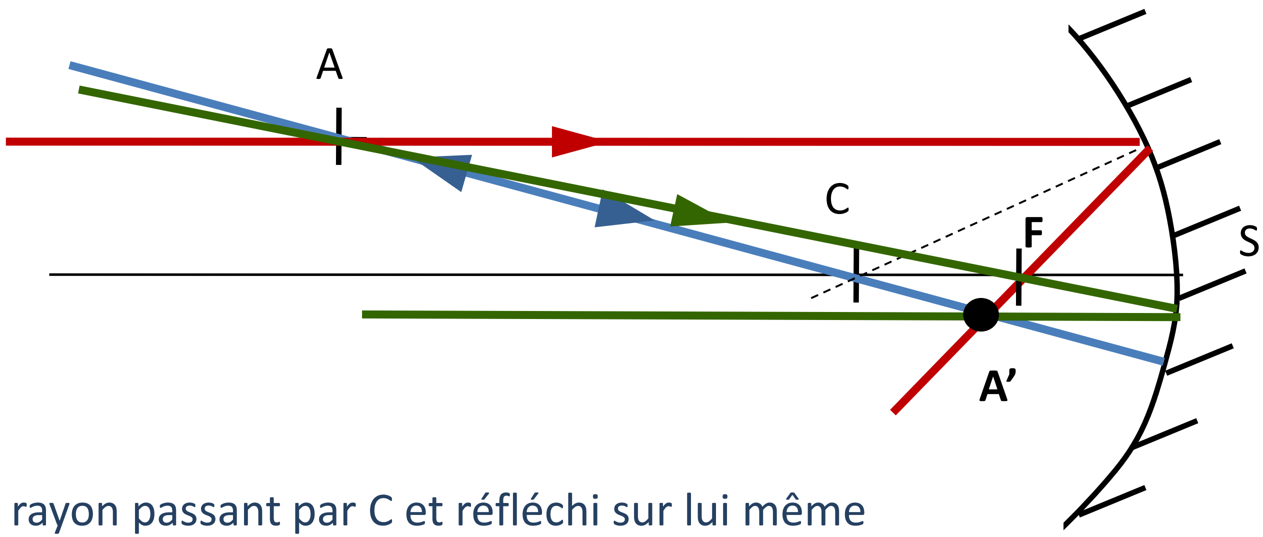


Si on admet cette propriété, l'image est facile à déterminer : il suffit de prendre 2 rayons particulier et l'image se situe à l'intersection de ces 2 rayons

B) CONSTRUCTION DES RAYONS

Le miroir sphérique est approximativement stigmatique dans les conditions de Gauss

OU EST L'IMAGE ?



Rayon 1 : rayon passant par C et réfléchi sur lui même

Rayon 2 : parallèle à l'axe optique – ce rayon a la propriété de passer par le point CS/2

L'image est donc en A'

Rayon 3 : rayon passant par le foyer F repart // à l'axe optique (propriété de retour inverse de la lumière)

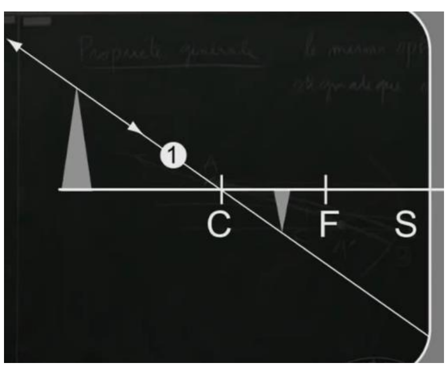
B) CONSTRUCTION DES RAYONS

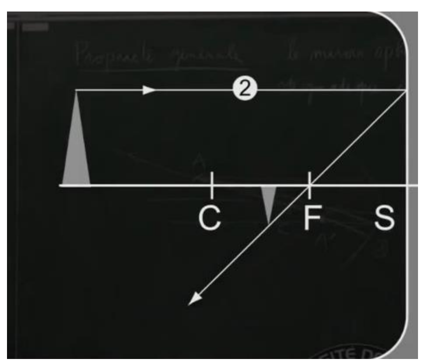
1. Le rayon qui passe par C n’est pas dévié

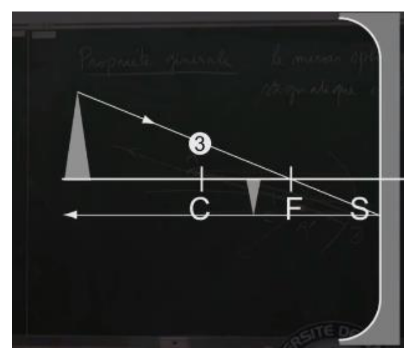
2. Le rayon parallèle à l’axe optique est réfléchi vers F

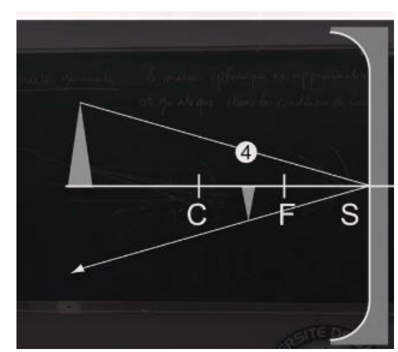
3. Le rayon qui passe par F est réfléchi parallèlement à l’axe optique

4. Le rayon qui atteint le miroir en S est réfléchi avec le même angle que son angle d’incidence







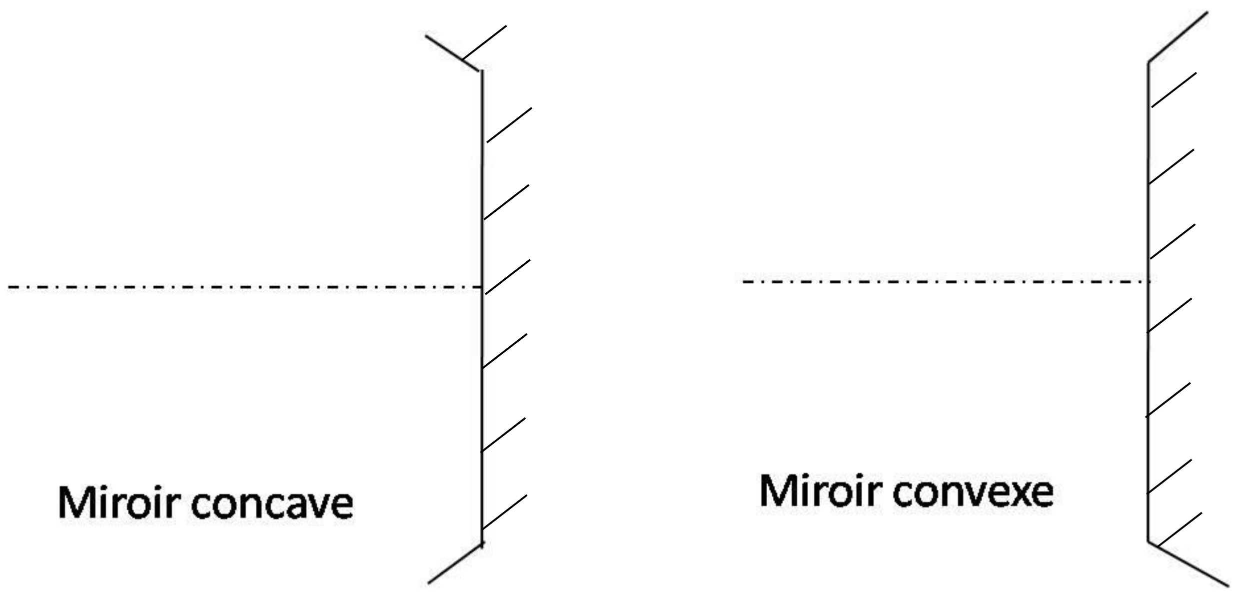


Pour construire une image, deux des quatre rayons suffisent

REPRESENTATION DES MIROIRS

Dans les conditions de Gauss on peut négliger la petite différence d’abscisse de la surface d’un miroir sphérique

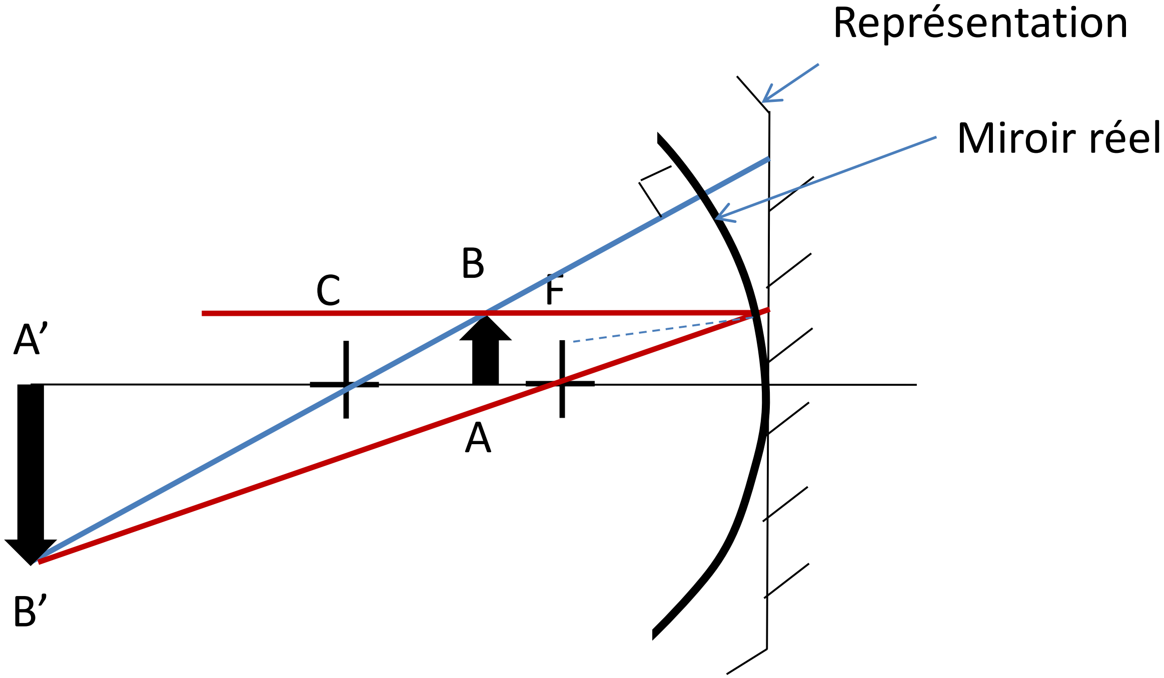
Représentation schématique des miroirs sphériques :



REMARQUES

1. Constructions typiques, savoir-faire à maîtriser !

2. Attention, la représentation du miroir est verticale mais c'est bien un miroir sphérique



2. Propriétés des miroirs sphériques dans l'approximation de Gauss

A) Stigmatisme approché, foyer, plan focal

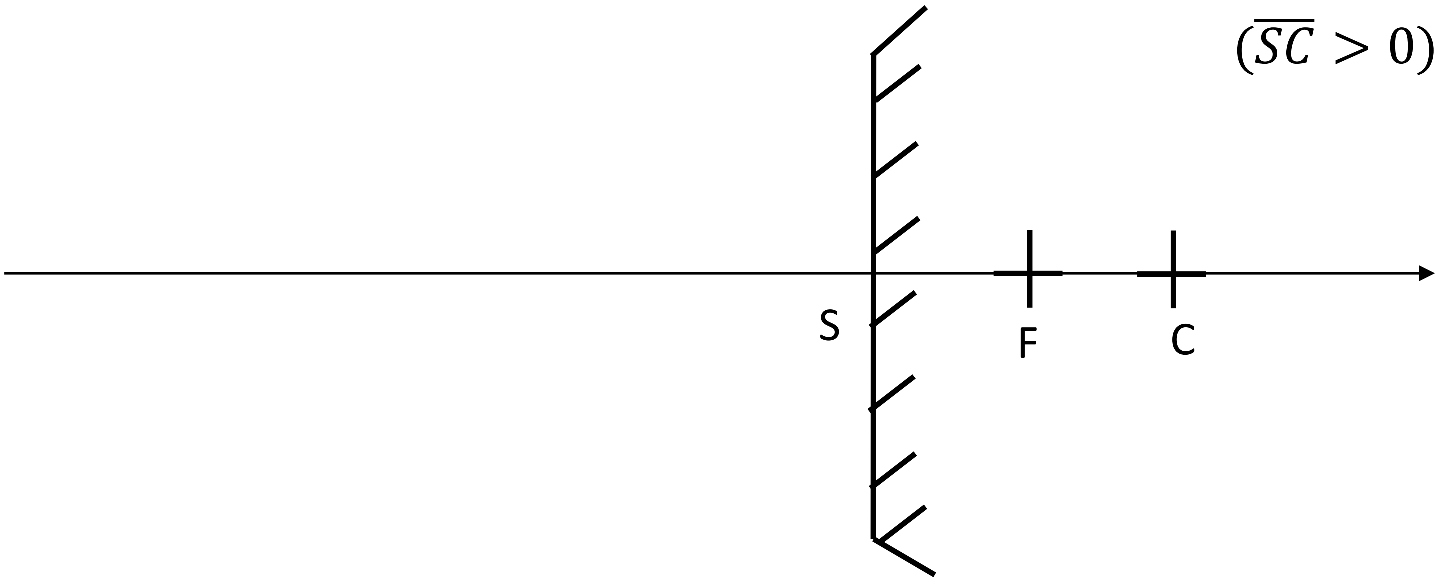
B) Construction des rayons

C) Généralisation au miroir convexe

C) GENERALISATION AU MIROIR CONVEXE

Centre à l’arrière du miroir !

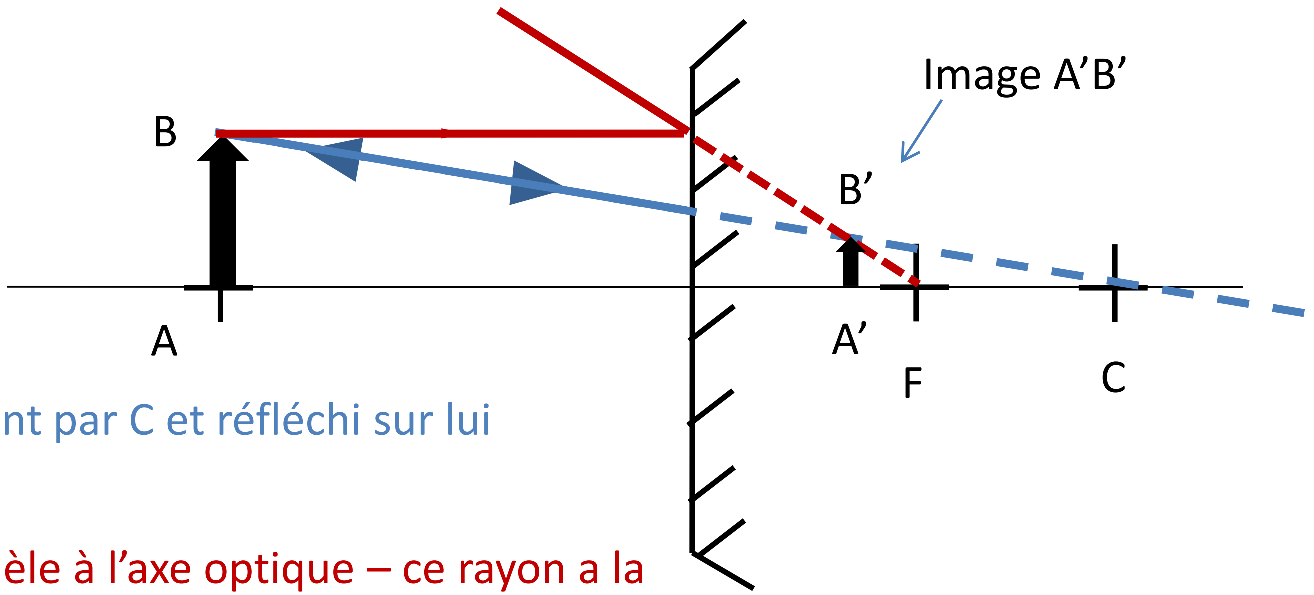
$(\overline{SC} > 0)$



On peut montrer que le foyer est aussi au milieu de CS

C) GENERALISATION AU MIROIR CONVEXE

Construction de l’image de l’objet AB en suivant les règles définies précédemment



Rayon passant par C et réfléchi sur lui même

Rayon parallèle à l’axe optique – ce rayon a la propriété de passer par le point CS/2

Image B’ à l’intersection des 2 rayons
Si on fait cela pour tous les points entre A et B, on construit l’image A’B’ indiquée

L’image est dans le même sens, et plus petite que l’objet.
L’image est **virtuelle**

MIROIRS CONCAVE ET CONVEXE

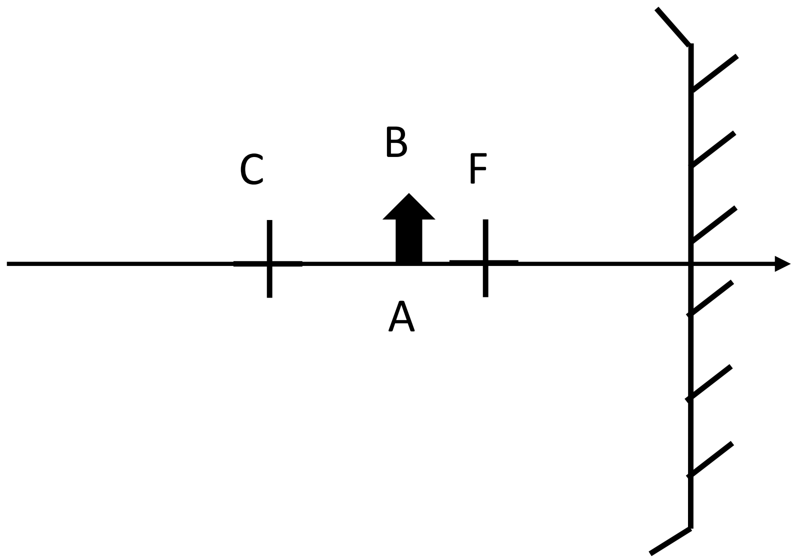
Vérification avec une cuillère :

Dans un sens on se voit petit et droit
Dans l’autre sens, petit et à l’envers

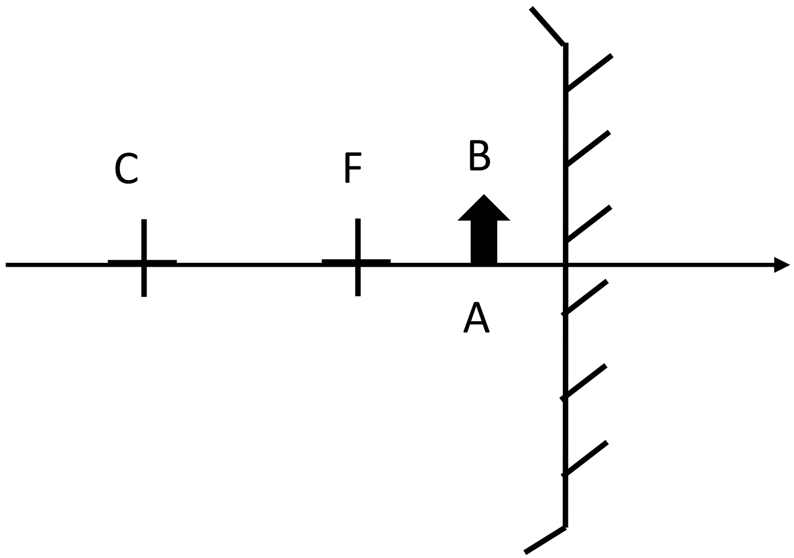
Miroir grossissant : l’image est à l’endroit ou à l’envers en fonction de la distance au miroir.

Application. Deux autres cas de figures du miroir concave. Où est l'image de AB ?

1)

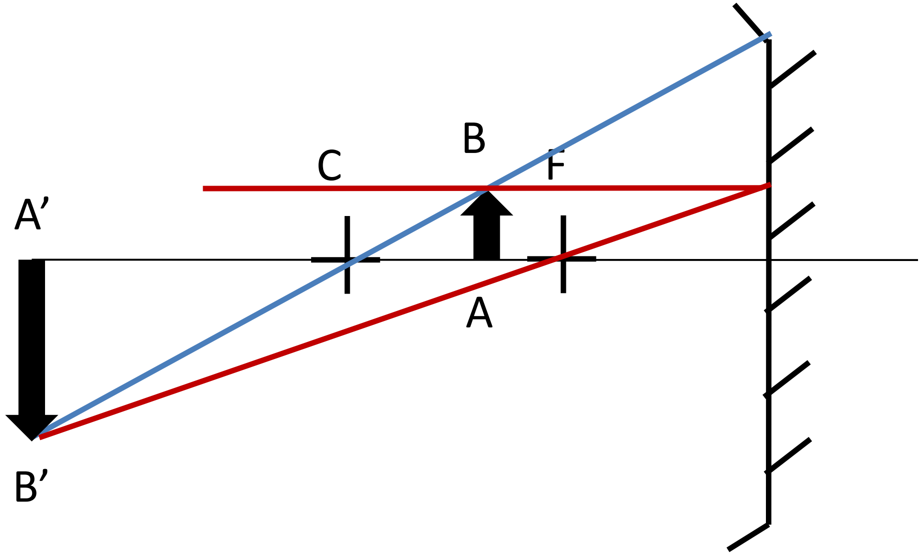


2)

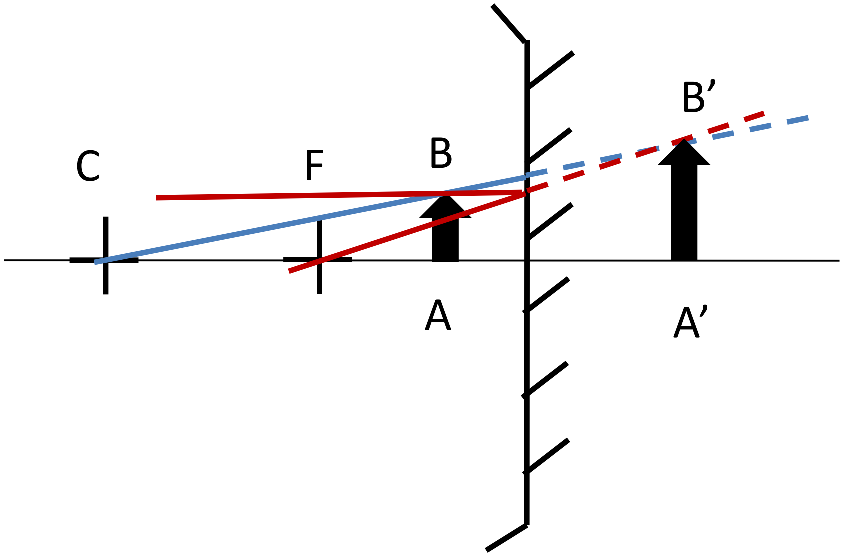


Application. Deux autres cas de figures du miroir concave. Où est l'image de AB ?

1)



2)



L'image est à l'envers

Image réelle

L'image est à l'endroit

Image virtuelle

On peut d'ailleurs déterminer le foyer en déterminant la distance à laquelle l'image s'inverse quand on s'éloigne du miroir

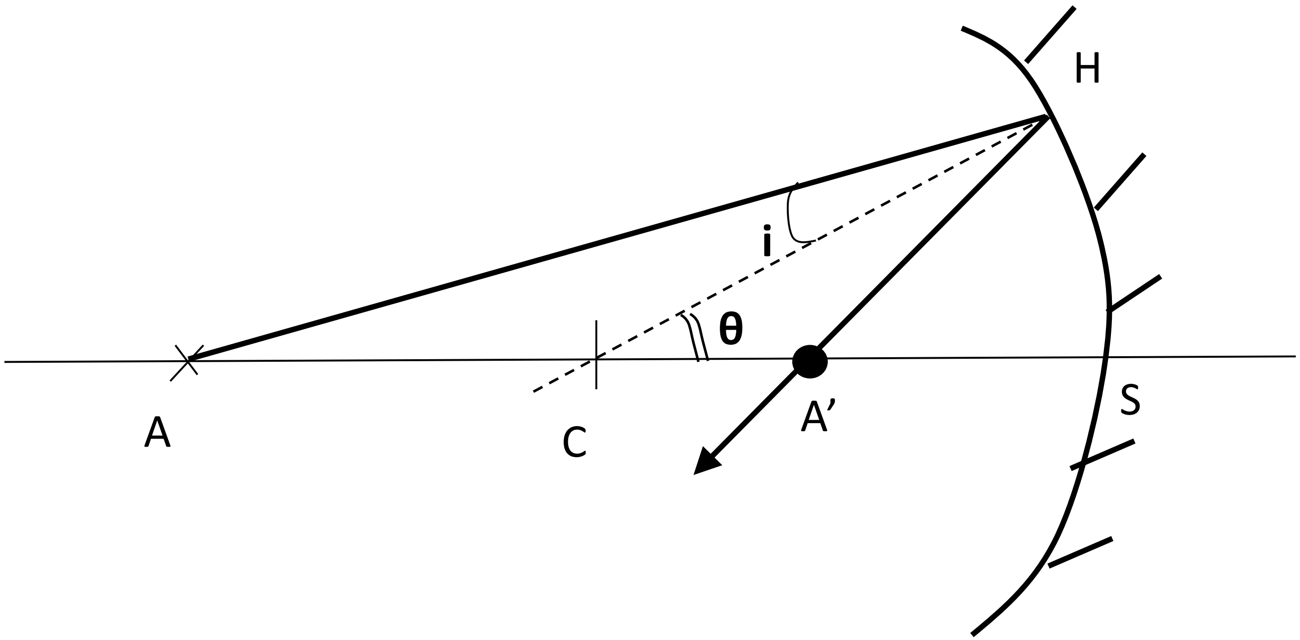
Animation : tracé des rayons dans le cas du miroir sphérique en conditions de Gauss

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/optiqueGeo/miroirs/miroir_spherique.php

2. Relations de conjugaison

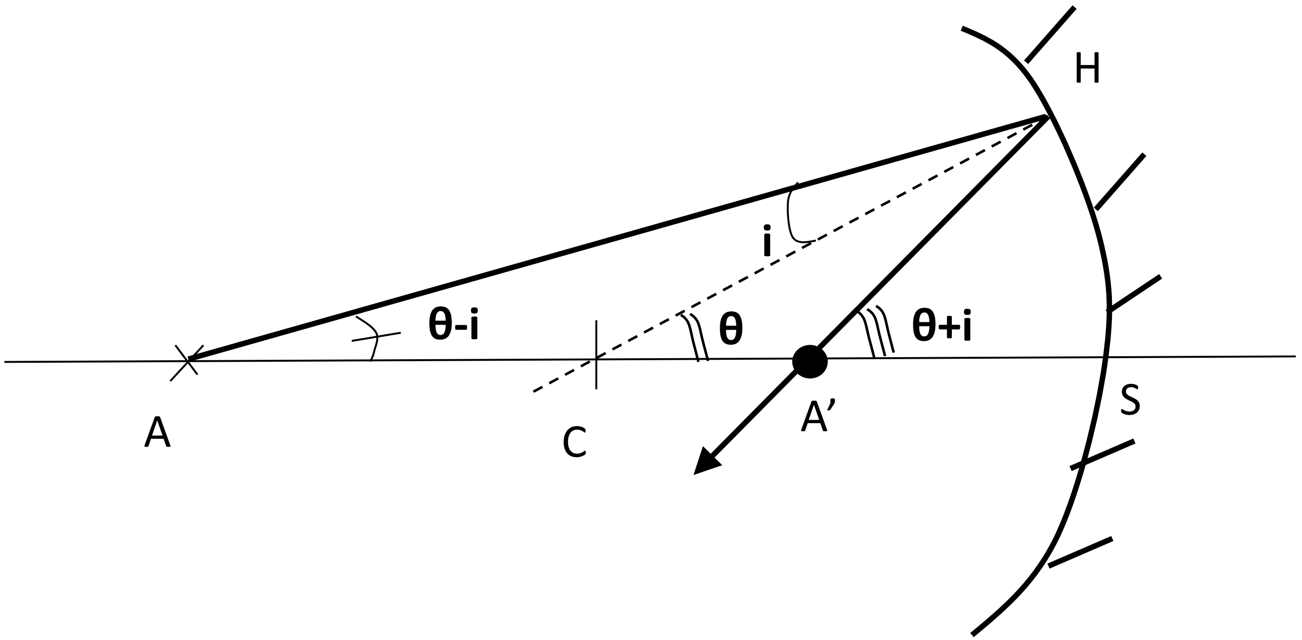
2. RELATION DE CONJUGAISON

Calcul de la position de l'image A' dans le cas du miroir concave



2. RELATION DE CONJUGAISON

Calcul de la position de l'image A' dans le cas du miroir concave

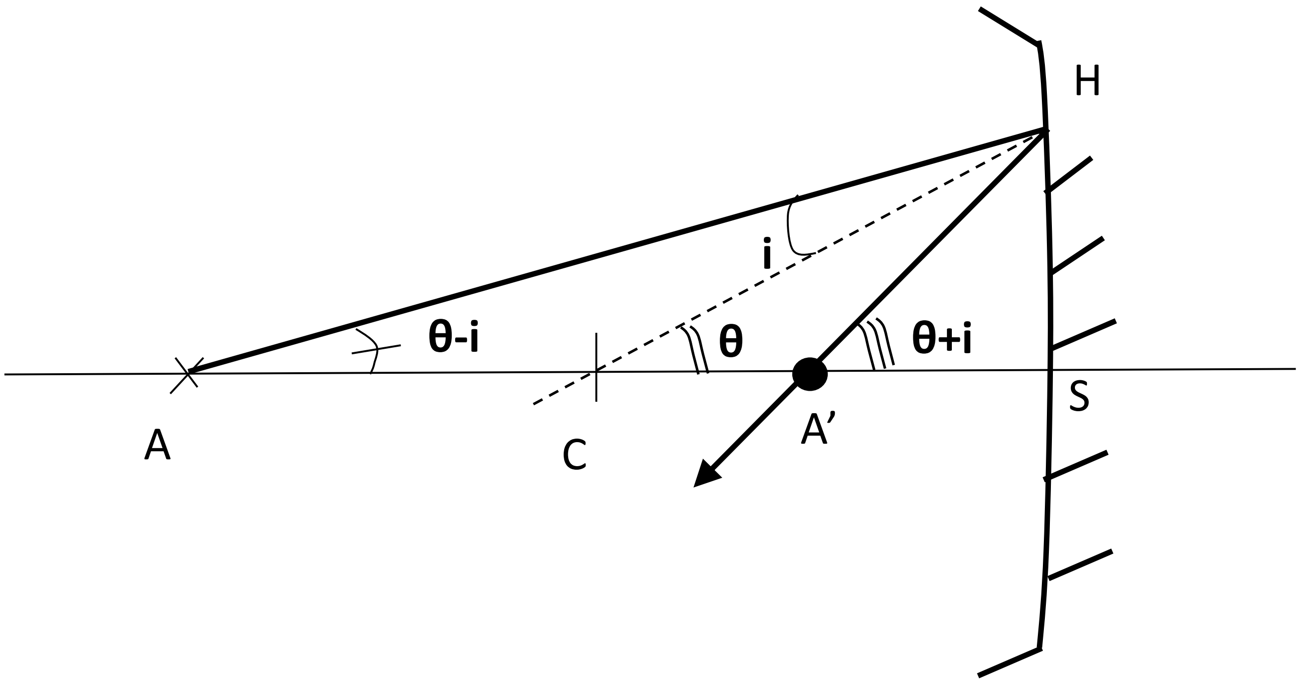


1. On remarque que l'angle CAH vaut (θ-i) et SA'H vaut (θ+i)

(par exemple en utilisant la propriété de somme des angles d'un triangle qui vaut π sur ACH et A'CH,…)

2. RELATION DE CONJUGAISON

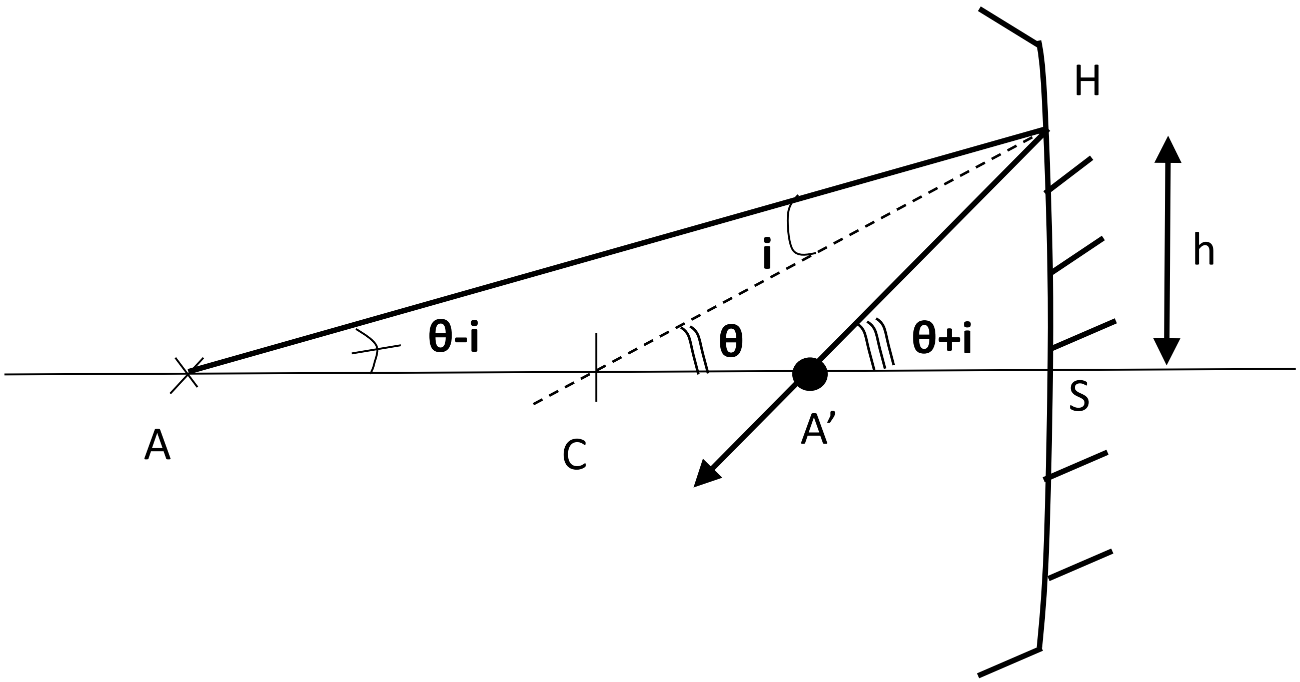
Calcul de la position de l'image A' dans le cas du miroir concave



2. Conditions de Gauss : S et H ont environ la même abscisse

2. RELATION DE CONJUGAISON

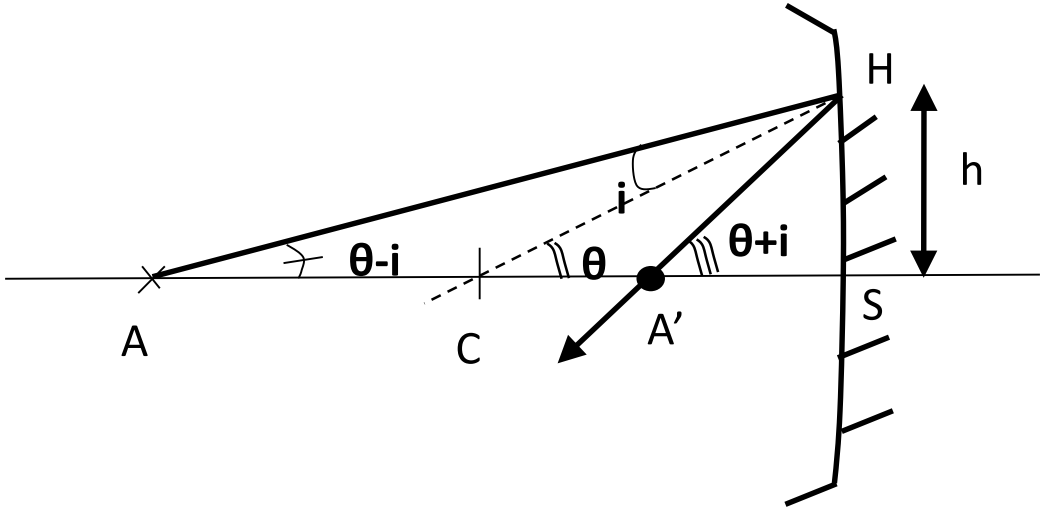
Calcul de la position de l’image A’ dans le cas du miroir concave



3. On exprime les tangente en utilisant les triangles rectangles ASH, CSH et A’SH

2. RELATION DE CONJUGAISON DES MIROIR SPHERIQUES

$$\left\{\begin{array}{l} \tan(\theta - i) = \dfrac{h}{SA} \approx \theta - i \\ \\ \tan(\theta) = \dfrac{h}{CS} \approx \theta \\ \\ \tan(\theta + i) = \dfrac{h}{SA'} \approx \theta + i \end{array}\right.$$



En sommant la 1e et la 3e équation,
puis en utilisant l'équation 2 on obtient :

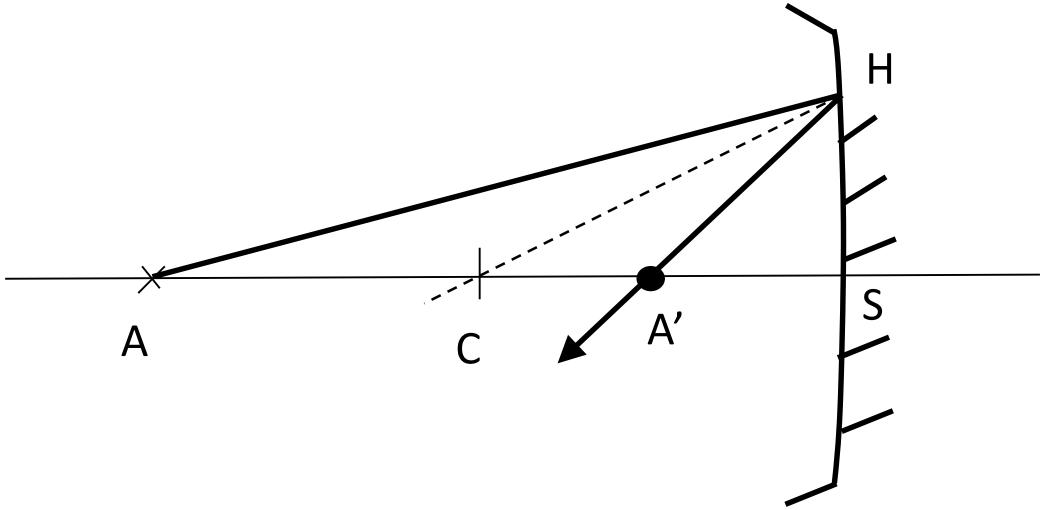
$$\frac{h}{SA} + \frac{h}{SA'} = 2\theta = \frac{2h}{CS}$$

En divisant par h à gauche et à droite,

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{CS}$$

Ne dépend pas de h, stigmatisme approché
dans les conditions de Gauss

2. RELATION DE CONJUGAISON DES MIROIRS SPHERIQUES



En notation algébrique :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{\overline{SA}}}+\frac{1}{\overline{\overline{SA'}}}=\frac{2}{\overline{\overline{SC}}}}$$

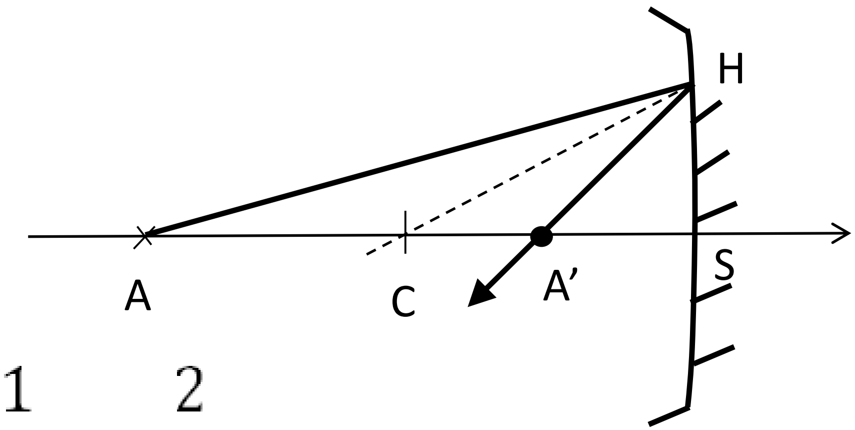
Cette formule est valable pour tous les miroirs sphériques

La preuve dans le cas des miroirs convexes ne sera pas faite durant ce cours

Le miroir plan est un cas particulier de miroir sphérique pour lequel CS = **∞**

ETUDE DES CAS PARTICULIERS

1. Cas ou l'objet est au centre (A=C)



$$\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SC}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{1}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA'}=\overline{SC} \Rightarrow A'=C$$

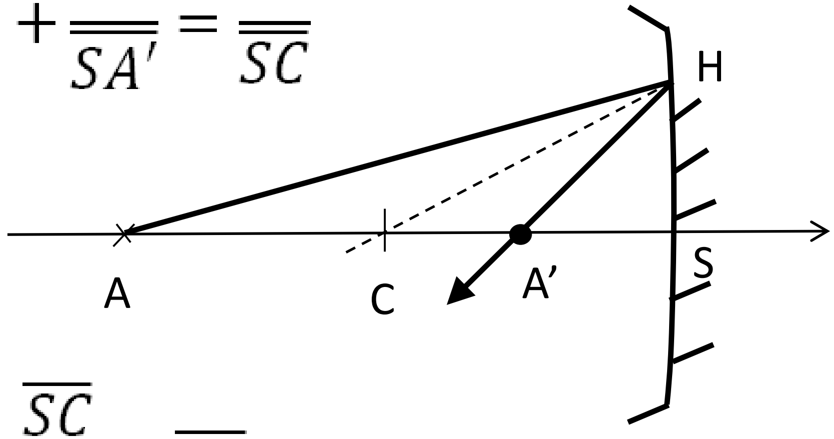
L'image A' est aussi au centre
Permet de déterminer le rayon de courbure d'un miroir quelconque

2. Cas ou l'image est au centre (A' = C)

A et A' sont interchangeables dans la relation de conjugaison, donc le résultat est le même que dans le cas 1 : L'objet est au centre

ETUDE DES CAS PARTICULIERS

$$\frac{1}{\overline{SA}}+\frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}}$$



3. Cas ou l'objet est à l'infini $\overline{SA} \to -\infty$

$$\frac{1}{\overline{SA}} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}}=\frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA'}=\frac{\overline{SC}}{2}=\overline{SF}$$

Image à F' où F' est le « Foyer image»

4. Cas où l'image est à l'infini $\overline{SA'} \to +\infty$

Même calcul, $$\overline{SA}=\frac{\overline{SC}}{2}=\overline{SF}$$

L'objet est à F qui est aussi le « foyer objet»

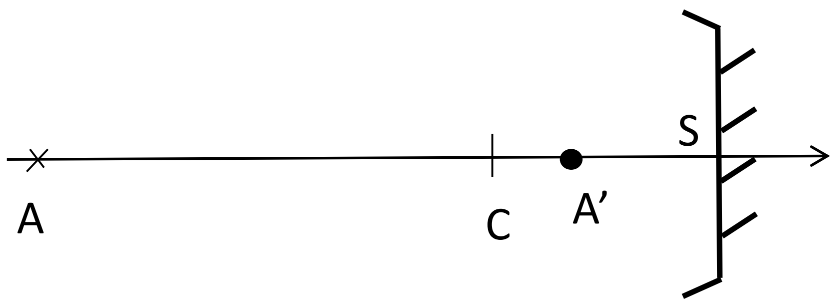
Foyer objet : *position où placer l'objet pour que l'image soit à l'infini*
Foyer image : *position de l'image d'un objet à l'infini*

APPLICATION

Soit un objet qui se trouve à 30 cm en avant d'un miroir concave de rayon de courbure R=10 cm. Où se trouve l'image ?

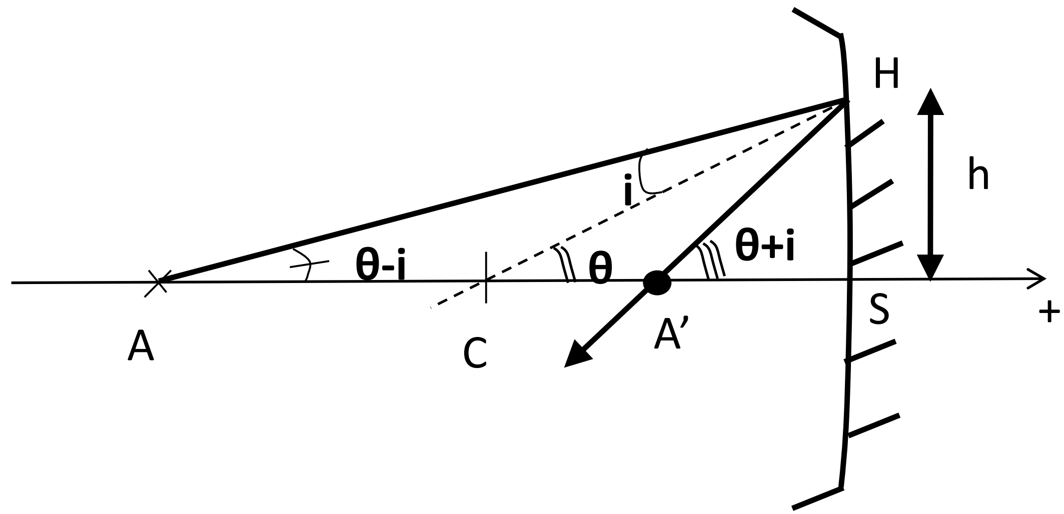
$$\frac{1}{\overline{\overline{SA}}} + \frac{1}{\overline{\overline{SA'}}} = \frac{2}{\overline{\overline{SC}}} \qquad \frac{1}{\overline{\overline{SA'}}} = -\frac{2}{10} + \frac{1}{30} = -\frac{1}{6}\ (cm^{-1})$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{SA} = -30 \text{ cm} \\ \overline{SC} = -10 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{SA'} = -\ 6 \text{ cm}$$



On obtiendrait le même résultat (moins précisément) avec la construction des rayons

DEUXIEME EXPRESSION DE LA RELATION DE CONJUGAISON



$$\boxed{\frac{1}{\overline{CA}}+\frac{1}{\overline{CA'}}=\frac{2}{\overline{CS}}}$$

Relation de conjugaison avec origine au centre

APPLICATION

Même question – calcul avec la deuxième relation de conjugaison :
Objet à 30 cm en avant d'un miroir concave de rayon de courbure R=10cm.
Où se trouve l'image ?
CA= CS= → CA'= ?

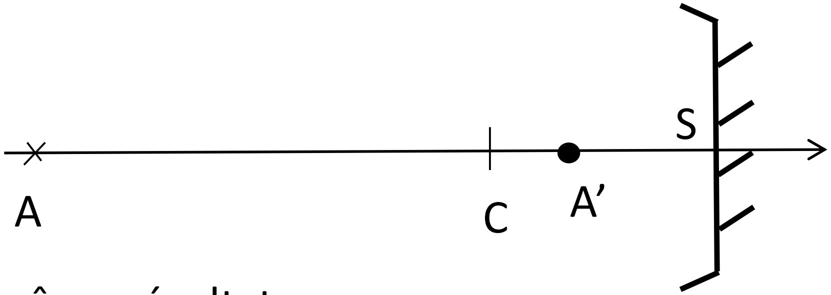
$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

$$\overline{CA} = -\ 20 \text{ cm}$$

$$\overline{CS} = +\ 10 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{-20} + \frac{1}{\overline{CA'}} = +\frac{1}{5}$$

$$\overline{CA'} = +\ \ 4 \text{ cm}$$



Les deux relations donnent le même résultat

Grandissement

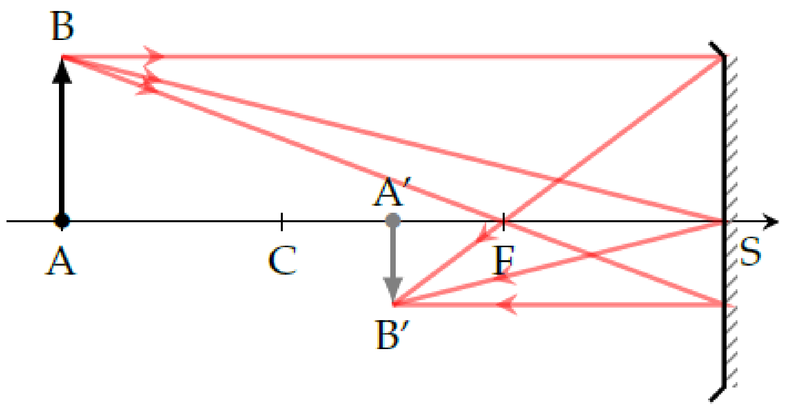
Définition : on appelle grandissement le rapport de la taille de l'image sur la taille de l'objet.

$$\boxed{\gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}}$$

Si $|\gamma| > 1$, l'image est plus grande
$|\gamma| < 1$, l'image est plus petite

Si $\gamma > 0$, l'image est droite
$\gamma < 0$, l'image est renversée

TROISIEME EXPRESSION DE LA RELATION DE CONJUGAISON



$$\gamma_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$$

$$\boxed{\overline{FA}.\overline{FA'} = f^2}$$

Relation de conjugaison avec origine au foyer

Avec $f = \dfrac{R}{2}$

APPLICATION

Même question – calcul avec la 3e relation de conjugaison :
Objet à 30 cm en avant d'un miroir concave de rayon de courbure R=10cm.
Où se trouve l'image ?

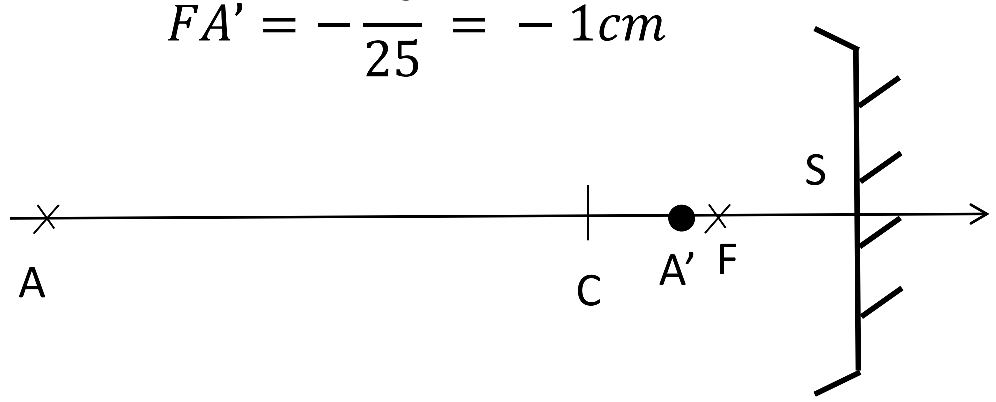
$$\overline{FA} = -25\ cm$$

$$\overline{FA}.\overline{FA'} = f^2$$

$$f = \frac{\overline{SC}}{2} = -5\ cm$$

Avec $f = \dfrac{\overline{SC}}{2}$

$$\overline{FA'} = -\frac{25}{25} = -1cm$$

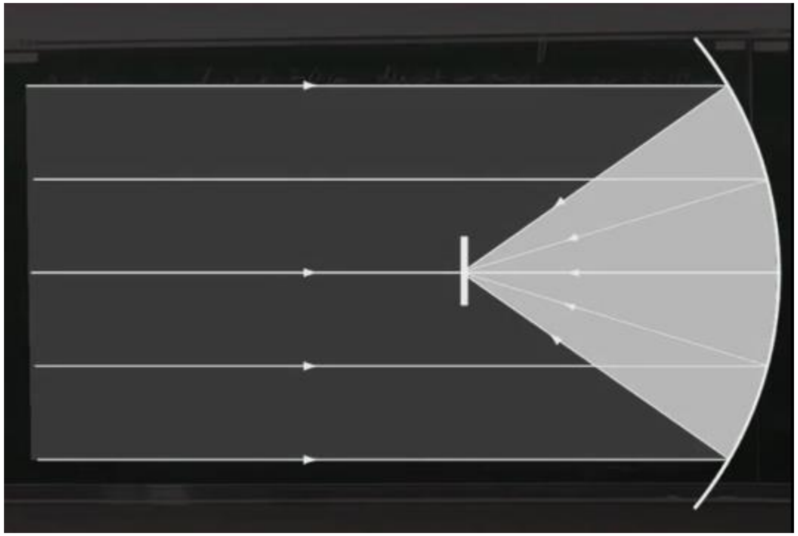


On vérifie bien que c'est le même résultat que précédemment, A' est toujours au même endroit

Illustration de l’utilisation de miroirs sphériques : les télescopes

ILLUSTRATION DE L'UTILISATION DES MIROIRS SPHERIQUES : TELESCOPE

On utilise un miroir concave (parabolique) pour concentrer la lumière d'une étoile au loin sur la zone de détection.



JWST Telescope (2021)

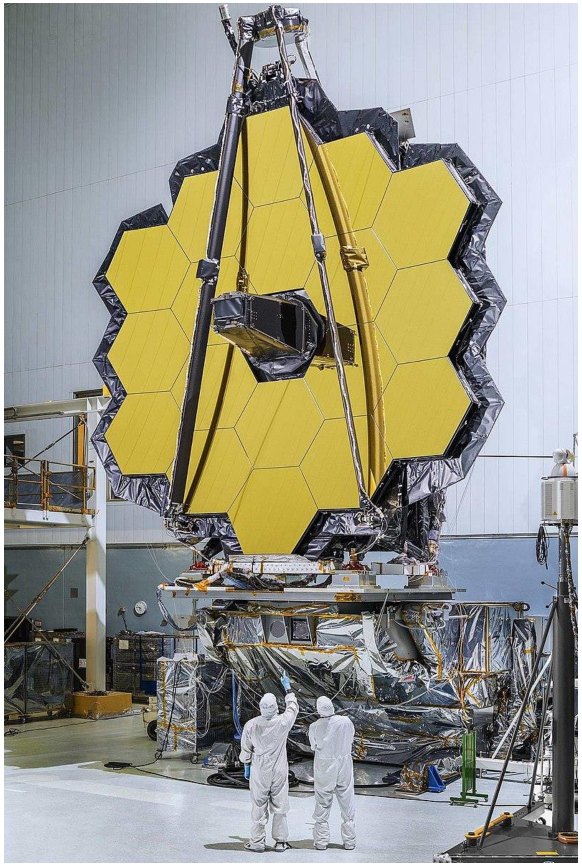
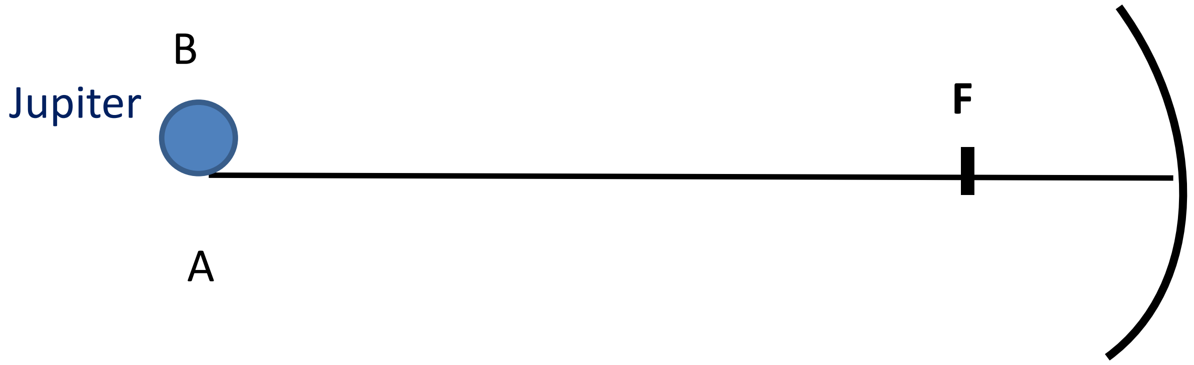


ILLUSTRATION DE L'UTILISATION DES MIROIRS SPHERIQUES : TELESCOPE

Télescope Hubble (1990)

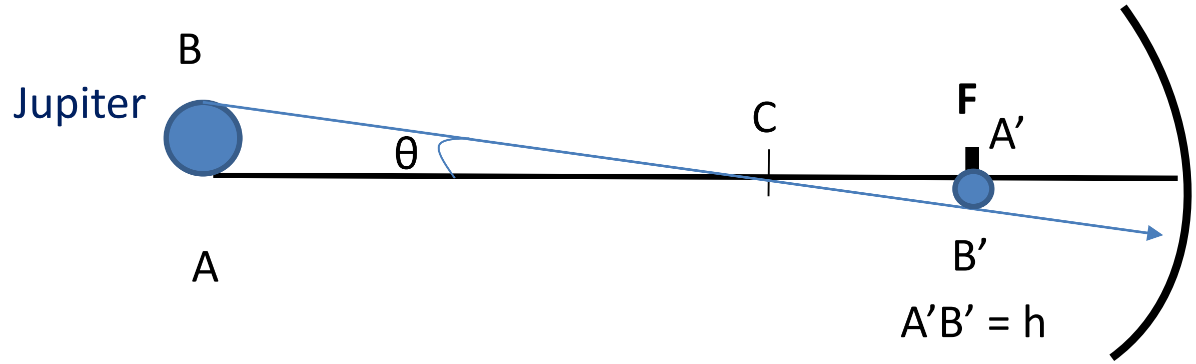


Taille de l'image de Jupiter sur le détecteur ?

<u>Données :</u>
Diamètre du miroir de Hubble : 2,4 m
Rayon de courbure : 60 m
taille angulaire de Jupiter = 1min d'arc=1°/60 ou $2{,}9 \times 10^{-4}$ rad

ILLUSTRATION DE L’UTILISATION DES MIROIRS SPHERIQUES : TELESCOPE

Télescope Hubble :

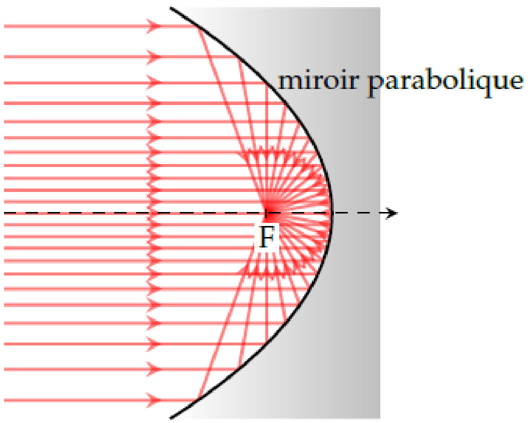


Taille de l’image de Jupiter sur le détecteur ?

Données :
Diamètre du miroir de Hubble : 2,4 m
Rayon de courbure : 60 m
taille angulaire de Jupiter = 1min d’arc=1°/60 ou $2,9\text{x}10^{-4}$ rad

$\boxed{h = 9 \text{ mm}}$

Solution pour l'astigmatisme des miroirs sphériques : les miroirs paraboliques



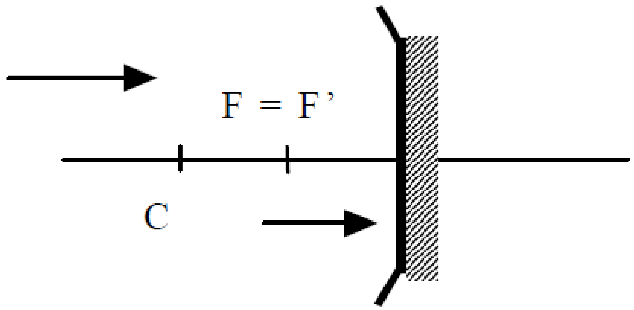
Animation : tracé des rayons dans le cas du miroir sphérique en conditions de Gauss

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/optiqueGeo/miroirs/miroir_spherique.php

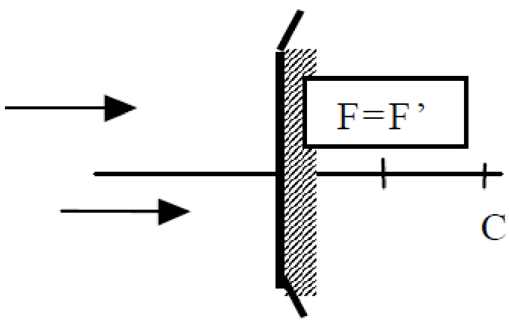
FORMULAIRE – Miroirs sphériques

Miroirs sphériques

miroir **concave** : $R = \overline{SC} < 0$



miroir **convexe** : $R = \overline{SC} > 0$



Les foyers F et F' d'un miroir sphérique sont **confondus** avec le **milieu** de [S ; C] cf schéma ci-dessus :

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Conjugaison :

Descartes : $$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

Newton : $$\overline{F'A'}.\overline{FA} = ff'$$

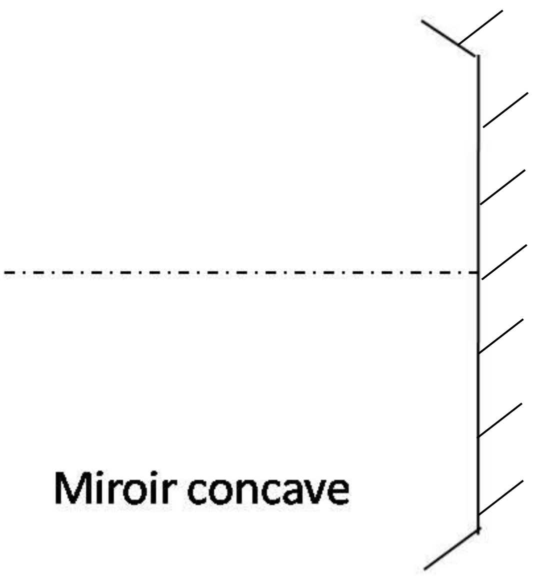
grandissement :

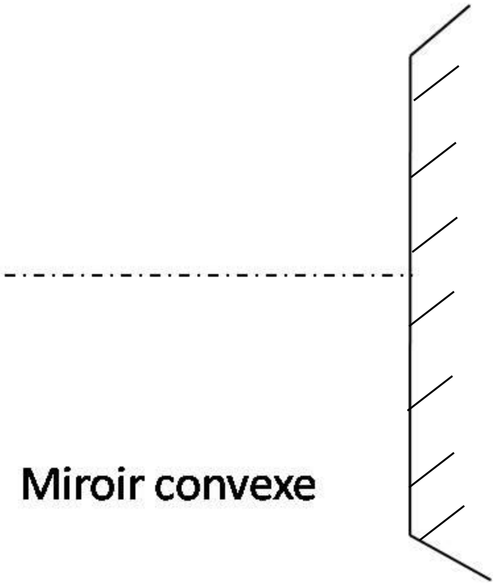
Descartes : $$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Newton : $$\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

Avec C : $$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

1. Qu’est-ce qu’un miroir concave, convexe et comment les représente t on en optique ?



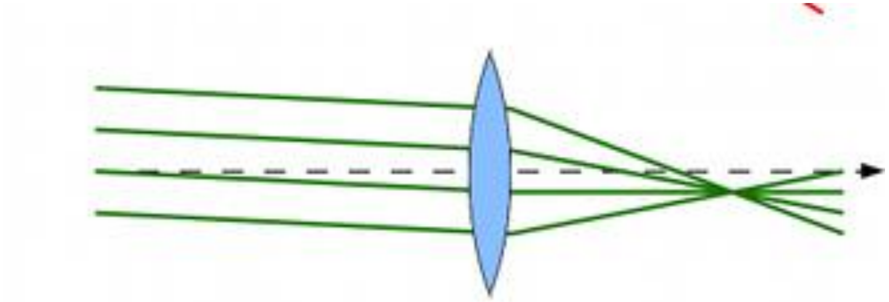


2. Que sont les relations de Gauss ?

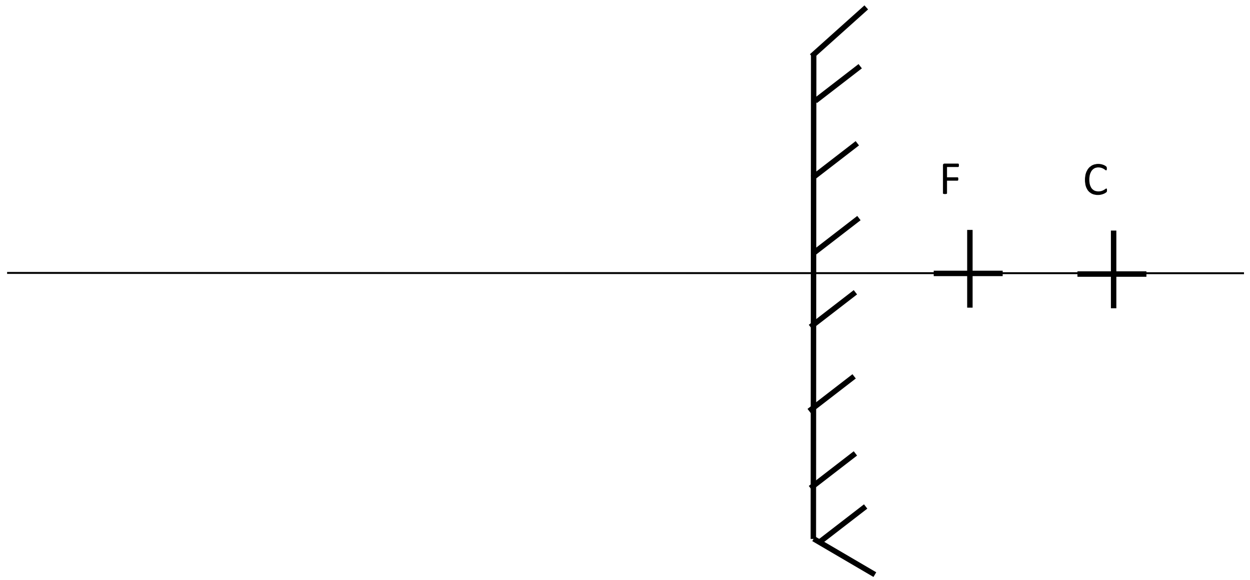
On obtient une image sur l'écran si :

- Rayons proches de l'axe optique
- Rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique

Conditions de Gauss



3. Où se trouve le foyer d’un miroir sphérique convexe ?



Le foyer est au milieu de CS

4. Qu'est ce qu'une image réelle ? Virtuelle ?

1)

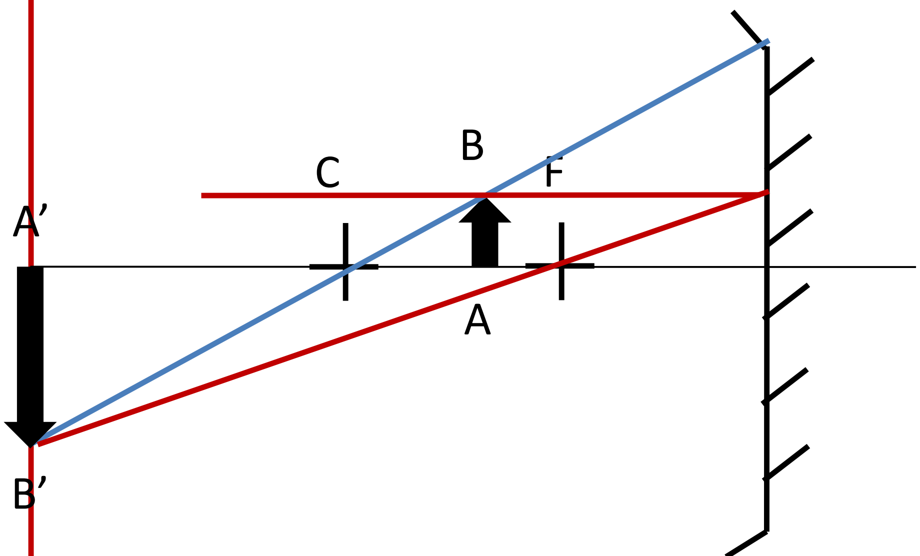


Image réelle

2)

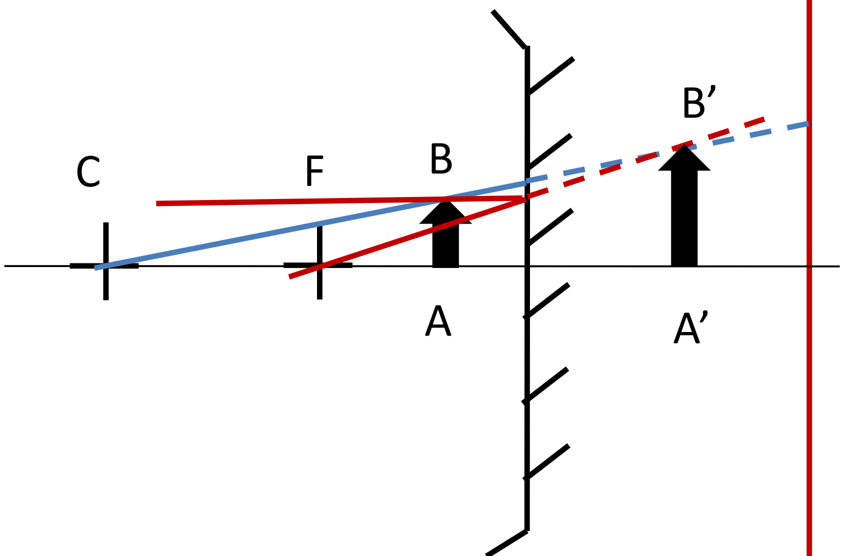
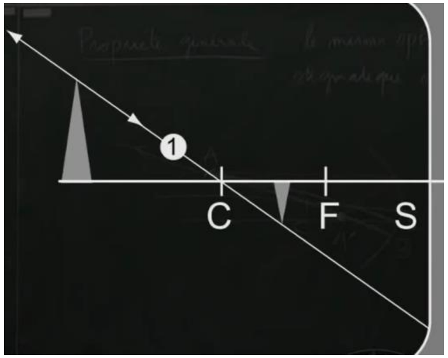


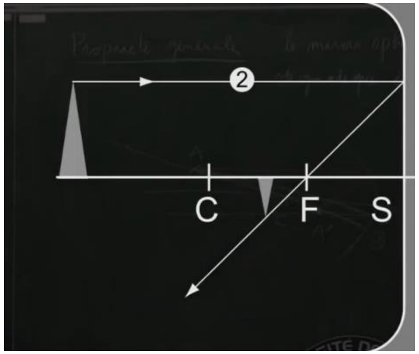
Image virtuelle

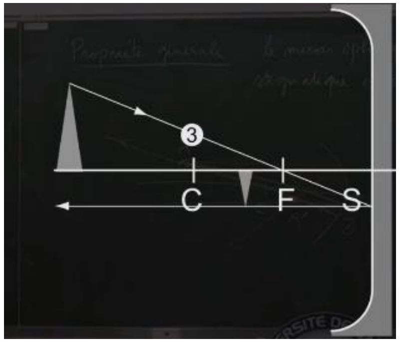
Si on met un détecteur à l'endroit où est l'image, on recoit de la lumiere dans le premier cas, pas dans le deuxième

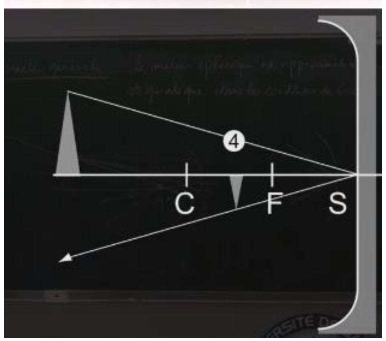
5. Dans le cas des miroirs sphériques, quels sont les rayons remarquables que l'on peut utiliser pour déterminer graphiquement où est l'image ?

1. Le rayon qui passe par C n'est pas dévié
2. Le rayon parallèle à l'axe optique est réfléchi vers F
3. Le rayon qui passe par F est réfléchi parallèlement à l'axe optique
4. Le rayon qui atteint le miroir en S est réfléchi avec le même angle que son angle d'incidence









Pour construire une image, deux des 4 rayons suffisent

6. Un objet est à 2 cm en avant d'un miroir concave de rayon 5 cm. Comment déterminer où se trouve l'image ?

Faire un schéma et utiliser les relations de conjugaison

Pareil pour le grandissement

Conjugaison :

Descartes : $\dfrac{1}{\overline{SA'}} + \dfrac{1}{\overline{SA}} = \dfrac{2}{\overline{SC}}$

Newton : $\overline{F'A'}.\overline{FA} = ff'$

grandissement :

Descartes : $\gamma = -\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

Newton : $\gamma = -\dfrac{f}{\overline{FA}} = -\dfrac{\overline{F'A'}}{f'}$

Avec C : $\gamma = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$