Table des matières

2 Nombres complexes **2**
2.1 Introduction aux complexes . . . 2
2.2 Les conjugués des complexes . . . 3
2.3 Le module . . . 4
2.4 Représentation géométrique des complexes . . . 4
2.4.1 Les vecteurs . . . 5
2.4.2 Opérations sur les vecteurs . . . 5
2.5 Forme trigonométrique des complexes . . . 8
2.6 Forme exponentielle des complexes . . . 9
2.7 Formule de Moivre . . . 10
2.8 Racines n-ièmes d'un nombre complexe . . . 10
2.9 Résolution d'une équation du second degré . . . 12
2.10 Géométrie du plan complexe . . . 13
2.10.1 Rappels . . . 13
2.10.2 Les associés d'un complexe . . . 13
2.10.3 Transformations . . . 14

Chapitre 2

Nombres complexes

2.1 Introduction aux complexes

Un peu d'histoire

Jérôme Cardan (1501-1576) a donné une formule permettant d'exprimer algébriquement la racine réelle de l'équation $x^3 + px + q = 0$.
L'astuce de Cardan consiste à poser $x = u+v$ en introduisant deux inconnues au lieu d'une. L'équation devient alors :

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0.$$

Comme on a deux inconnues u, v, on peut imposer une relation supplémentaire, et ici, on va imposer $3uv + p = 0$. On constate alors qu'on connaît :

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3v^3 &= \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Quand on a la somme S et le produit P de deux nombres, on sait qu'ils sont racines de l'équation du second degré : $X^2 - SX + P = 0$. Donc, u^3 et v^3 sont racines de $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27} = 0$:

$$\begin{aligned} u^3 &= \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} \\ v^3 &= \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} \end{aligned}$$

On extrait leurs racines cubiques u et v et on obtient x comme la somme $u + v$:

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}}$$

Bombelli a voulu appliquer cette formule à l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ qui a une solution évidente $x = 4$. Il trouve :

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{4 + \sqrt{16 - 500}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{16 - 500}}{2}}$$

Donc, il a imaginé un nombre que l'on note aujourd'hui $\sqrt{-1}$ dont le carré est égal à -1.

Il obtient $x = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$.
En utilisant $\sqrt{-1}$ avec les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$, il trouve : $(2+\sqrt{-1})^3 = 2+11\sqrt{-1}$ et donc $x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$, qui est racine de l'équation donnée.
En revanche, l'application systématique des règles usuelles de calcul à $\sqrt{-1}$ peut mener à des incompatibilités telles que :

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

C'est pourquoi Leonhard Euler (1707-1783) a introduit une notation pour représenter tel nombre dont le carré vaut -1.

NOTATION : On note i l'***unité imaginaire*** ; i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

Définition 2.1.1. La ***notation cartésienne*** d'un nombre complexe est : $z = a + \mathrm{i}b$, où $a = \mathrm{Re}(z)$ est la partie réelle et $b = \mathrm{Im}(z)$ est la partie imaginaire.

Propriétés :

- pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + \mathrm{i}b$;
- deux nombres complexes sont égaux si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire ;
- les complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés ***imaginaires purs***.
  Les réels sont les complexes z pour lesquels $\mathrm{Im}(z) = 0$;
- si $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ et si l'on pose $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$, $a' = \mathrm{Re}(z')$ et $b' = \mathrm{Im}(z')$, alors (en utilisant les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$) on a :

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + a') + \mathrm{i}(b + b') \\ zz' &= (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba') \end{aligned}$$

Conséquences :

- Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
- En général : $\mathrm{Re}(zz') \neq \mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz') \neq \mathrm{Im}(z)\cdot\mathrm{Im}(z')$
- Tout complexe $z \neq 0$ possède un inverse (pour la multiplication) :

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$$

  qui vérifie $zz^{-1} = z^{-1}z = zz^{-1} = 1$.

2.2 Les conjugués des complexes

Définition 2.2.1. Pour tout complexe z, on appelle ***conjugué*** de z le complexe $\overline{z}$, défini par :

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{i}$$

Proposition 2.2.1. Pour tout complexe z, on a :

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} = a^2 + b^2$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

- $\forall z \in \mathbb{C},\ z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \overline{z+z'} &= \overline{z} + \overline{z'} \\ \overline{z-z'} &= \overline{z} - \overline{z'} \\ \overline{zz'} &= \overline{z}\,\overline{z'} \end{aligned}$$

- $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

2.3 Le module

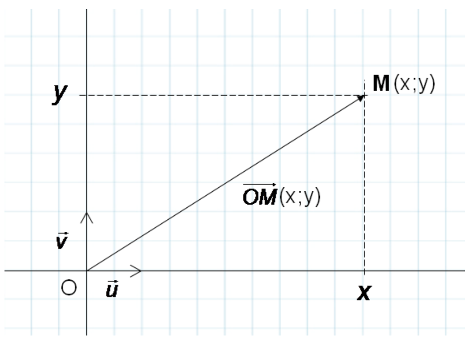
Définition 2.3.1. Pour tout complexe z, on appelle ***module*** de z le réel positif noté $|z|$, défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}.$$

Proposition 2.3.1. Pour tout complexe z, on a :
- $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $\forall z \in \mathbb{C},\ |\overline{z}| = |z|$
- $\forall z \in \mathbb{C},\ |a| \leq |z|$ et $|b| \leq |z|$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |zz'| = |z||z'|$
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*,\ \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z+z'| \leq |z| + |z'|$ (I inégalité triangulaire)
- $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ \big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$ (II inégalité triangulaire)

2.4 Représentation géométrique des complexes

Les complexes représentent les points d'un plan.
On considère un plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, appelé ***plan complexe***.
On associe au nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels, le point M du plan, d'abscisse x et d'ordonnée y.
Le complexe z est appelé l'***affixe*** du point M et $|z|$ est la longueur du vecteur OM.

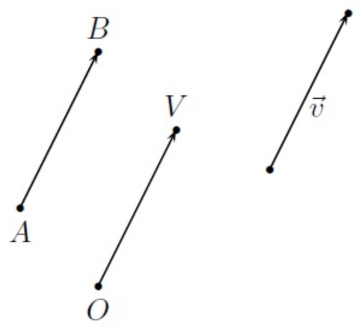


2.4.1 Les vecteurs

Dans les applications, on distingue les ***grandeurs scalaires*** par opposition aux ***grandeurs vectorielles***, c'est-à-dire aux vecteurs. Une grandeur scalaire est caractérisée par un seul nombre réel, alors qu'une grandeur vectorielle est caractérisée par deux ou trois nombres réels suivant que l'on se trouve dans le plan ou l'espace.

Définition 2.4.1. Un ***vecteur*** est une grandeur qui a une longueur, une direction et un sens.

Proposition 2.4.1. Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux s'ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.



Définition 2.4.2. Le vecteur qui a une longueur de 0 est appelé ***vecteur nul*** et est noté $\vec{0}$.

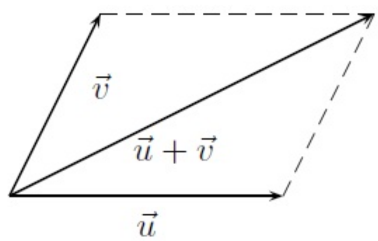
2.4.2 Opérations sur les vecteurs

Les opérations que l'on peut effectuer sur des grandeurs scalaires ne sont rien d'autre que celles que l'on peut effectuer sur les nombres réels. Par contre, on définit des opérations spécifiques aux vecteurs.

L'addition vectorielle

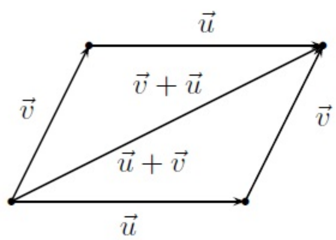
Définition 2.4.3. Dans le plan, si $\vec{u}$ est le vecteur (u_x, u_y) et $\vec{v}$ le vecteur (v_x, v_y) alors le ***vecteur somme*** est le vecteur

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

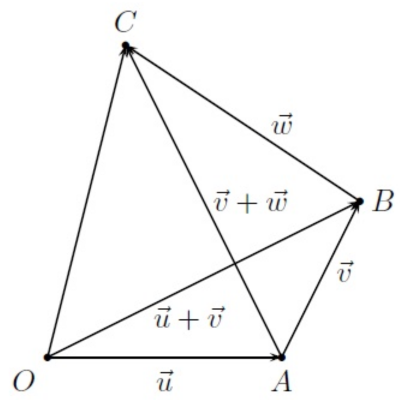


Propriété de l'addition vectorielle

1. ***Commutativité*** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



2. ***Associativité*** : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

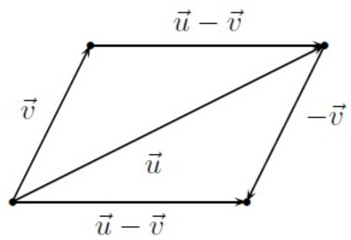


3. ***Élément neutre*** : $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
4. ***Élément opposé*** : $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

La soustraction vectorielle

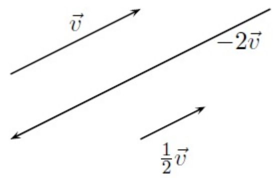
Définition 2.4.4. Dans le plan, si $\vec{u}$ est le vecteur (u_x, u_y) et $\vec{v}$ le vecteur (v_x, v_y) alors le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est donné par

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$$



La multiplication d'un vecteur par un scalaire

Définition 2.4.5. Dans le plan si $\vec{v} = (v_x, v_y)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha\vec{v} = (\alpha v_x, \alpha v_y)$.



Propriété de la multiplication d'un vecteur par un scalaire

1. ***Distributivité par rapport à l'addition dans*** $\mathbb{R}$: $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
2. ***Distributivité par rapport à l'addition vectorielle*** : $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
3. ***Associativité mixte*** : $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
4. ***Élément neutre*** : $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Définition 2.4.6. Deux vecteurs sont ***colinéaires*** ou ***parallèles*** s'ils ont la même direction, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

Le produit scalaire

Il s'agit d'une opération de multiplication entre deux vecteurs donnant comme résultat un scalaire. Il est noté en général avec un point $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Définition 2.4.7. Le ***produit scalaire*** de deux vecteurs est égal à la somme des produits de leurs composantes correspondantes.
Dans le plan, si $\vec{u} = (u_x, u_y)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y)$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

Dans l'espace, si $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Propriété du produit scalaire

1. Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même est égal au carré de sa longueur : $\vec{v} \cdot \vec{v} = ||\vec{v}||^2$
2. ***Commutativité*** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. ***Distributivité*** par rapport à l'addition des vecteurs : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. ***Associativité mixte*** : $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$
5. Le vecteur nul est ***absorbant*** pour le produit scalaire : $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

On peut définir le produit scalaire d'un point de vue géométrique.

Proposition 2.4.2. Si θ désigne l'angle entre les deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \; ||\vec{v}|| \cos\theta$$

Définition 2.4.8. Deux vecteurs non nuls sont ***orthogonaux*** s'ils forment un angle droit.

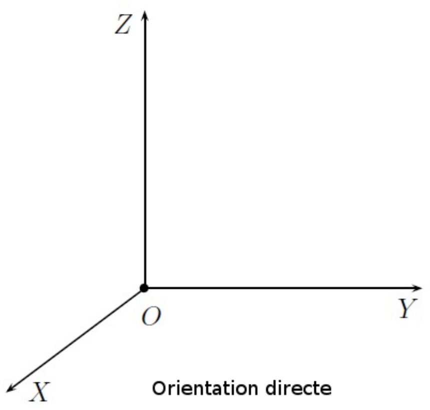
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

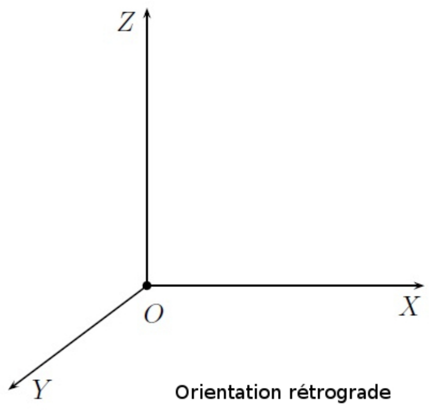
Le produit vectoriel

À la différence du produit scalaire, qui est un nombre réel, le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Définition 2.4.9. Le ***produit vectoriel*** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- $||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \; ||\vec{v}|| \; |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$ forment un repère d'orientation directe.





Remarque : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pris dans cet ordre forment un repère orthonormé d'orientation directe.
La longueur $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il en résulte que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété du produit vectoriel

1. ***Anti-commutativité*** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
2. ***Linéarité à gauche*** : $\vec{u} \wedge (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) + \beta(\vec{u} \wedge \vec{w})$
3. ***Linéarité à droite*** : $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \beta(\vec{v} \wedge \vec{w})$

Proposition 2.4.3. Soit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Les composantes du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont données par

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$$

Remarque : Si les deux vecteurs sont parallèles nous avons

$$\vec{u} \;||\; \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

2.5 Forme trigonométrique des complexes

Le point M dans le plan peut être repéré soit par son abscisse et son ordonnée soit par les réels r et θ comme indiqué sur la Figure(2.1).

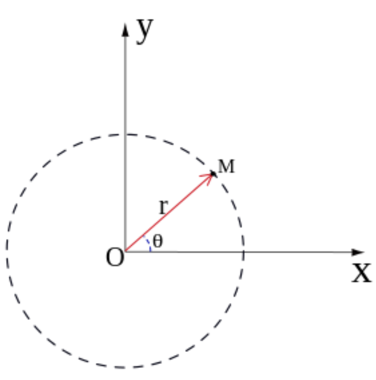


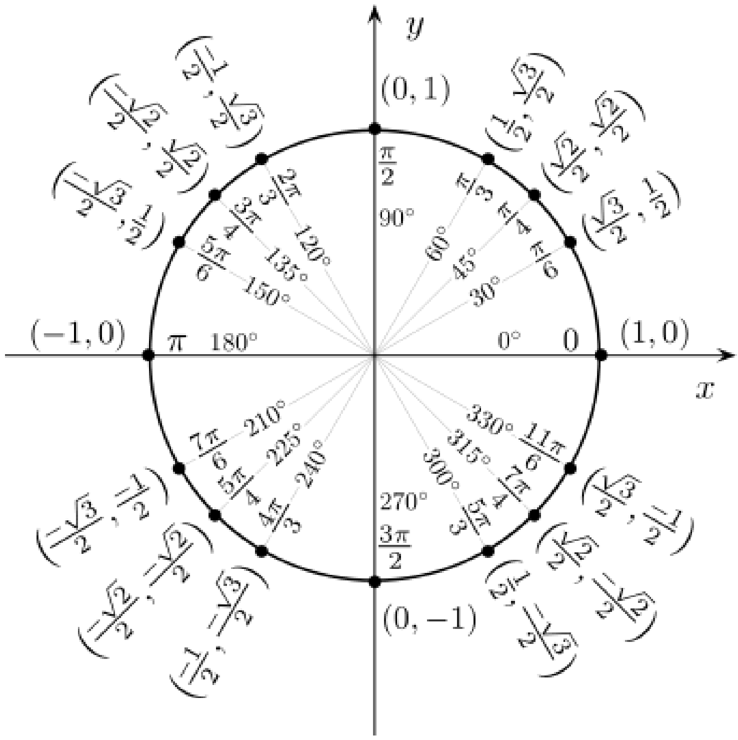
FIGURE 2.1 – Représentation polaire de M.

Définition 2.5.1. Soit $z = a + \mathrm{i}b$, complexe non nul sous sa forme algébrique, de point d'image M. Le point M a pour coordonnées (a, b). Si M est repéré par r et θ, alors :

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

est la ***forme trigonométrique*** du complexe z, où $r = |z|$ est le module de z et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelé ***argument*** de z, $\arg(z) = \theta + 2\pi k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$



2.6 Forme exponentielle des complexes

La fonction $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ à valeurs complexes, verifie l'équation fonctionnelle $f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$, dont les solutions sont du type : $f(\theta) = e^{k\theta}$. On pose alors

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Donc on a la ***notation exponentielle*** d'un complexe non nul :

$$z = re^{\mathrm{i}\theta} = |z|e^{\mathrm{i}\arg(z)}, \text{ avec } |z| \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \arg(z) \in \mathbb{R}$$

Remarques :

- $|re^{\mathrm{i}\theta}| = r$
- $\arg(re^{\mathrm{i}\theta}) = \theta + 2\pi k$
- $\mathrm{Re}(re^{\mathrm{i}\theta}) = r\cos\theta$ et $\mathrm{Im}(re^{\mathrm{i}\theta}) = r\sin\theta$

Proposition 2.6.1. On a :

- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a les ***formules d'Euler*** :

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

- $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |e^{\mathrm{i}\theta}| &= 1 \\ \arg(e^{\mathrm{i}\theta}) &= \theta + 2\pi k \\ \overline{e^{\mathrm{i}\theta}} &= e^{-\mathrm{i}\theta} = \frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} \end{aligned}$$

- $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\theta} e^{\mathrm{i}\theta'} &= e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} \\ \frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} &= e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')} \end{aligned}$$

  Si on prend $\theta = \theta'$, on a $e^{\mathrm{i}\theta} e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = e^{\mathrm{i}2\theta}$

2.7 Formule de Moivre

Corollaire 2.7.1. Pour tout entier relatif n et pour tout réel θ on a :

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

Remarques :

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + e^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad e^{\mathrm{i}\theta} - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\mathrm{i}\frac{(\theta+\pi)}{2}}$$

- On peut développer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ si on identifie les parties réelles et imaginaires dans la formule :

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^k\theta \; (\mathrm{i}\sin\theta)^{n-k}$$

- Linéarisation de $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$:

$$\cos^n\theta = \left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\mathrm{i}\theta(n-2k)}$$

2.8 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 2.8.1. Soient a et b deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle ***racine n-ième*** du nombre complexe $a + \mathrm{i}b$ tout nombre complexe z vérifiant :

$$z^n = a + \mathrm{i}b.$$

En particulier, on appelle ***racine n-ième de l'unité*** tout nombre complexe z vérifiant :

$$z^n = 1.$$

Proposition 2.8.1. Tout nombre complexe $a + ib$ non nul possède exactement n racines n-ièmes. Elles sont distinctes deux à deux et s'écrivent : s'écrivent :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Remarques :

- $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ désignent respectivement le module et l'argument de $a + \mathrm{i}b$.
- Si $n \geq 2$ alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$.
- Soient a, b, x, y réels. On peut rechercher les racines carrés d'un nombre complexe $z^2 = Z$ sous la forme $(x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

- Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées distinctes et opposées l'une de l'autre.

Corollaire 2.8.1. Pour tout entier n non nul, il y a exactement n racines n-ièmes de l'unité. Elles sont distinctes deux à deux et s'écrivent :

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
De plus, les racines n-ièmes de l'unité non réelles sont à deux à deux conjuguées.

Remarque : D'après la formule de Moivre, on peut écrire $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi k}{n}}.$$

Définition 2.8.2. Le nombre complexe non nul ω_n défini par

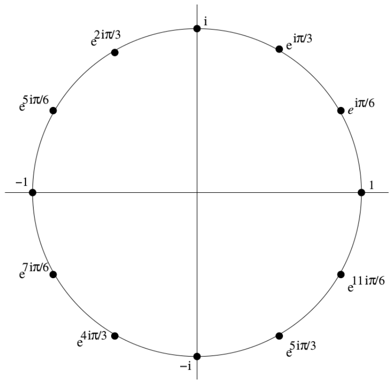
$$\omega_n = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$$

est appelé ***racine n-ième de l'unité***.

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ chacune des racines n-ièmes de l'unité s'écrit comme une puissance de la racine primitive de ω_n.

Remarques :

- Les racines de l'unité sont disposées sur le cercle d'unité de rayon 1 et centre O du plan complexe.
- Chaque racine se trouve en effectuant une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ à partir de la première avec $k = 0$.
- Les points d'affixe $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont les n sommets d'un polygone régulier de n cotés inscrit dans le cercle unité et dont l'un de sommets est le point d'affixe 1.



Racines douzièmes de l'unité

2.9 Résolution d'une équation du second degré

Proposition 2.9.1. Étant donnés trois complexes a, b, c avec $a \neq 0$, on considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0$$

et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$, en appelant δ une racine carrée de Δ, on a deux racines distinctes pour l'équation : $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

Corollaire 2.9.1. Étant donnés trois réels a, b, c avec $a \neq 0$, on considère l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0$$

et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux racines réelles distinctes : $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une racine double : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes distinctes : $z_1 = \dfrac{-b + \delta_1}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta_2}{2a} = \dfrac{-b - \delta_1}{2a}$, avec $\delta_2 = -\delta_1$ les racines carrées du discriminant Δ.

Proposition 2.9.2. Soient trois complexes a, b, c avec $a \neq 0$. Deux nombres complexes z_1 et z_2, éventuellement égaux vérifient les relations :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

si, et seulement si, ce sont les deux racines de l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Remarque : S'il a été établi que les deux racines deuxièmes d'un nombre complexe non nul étaient opposées, il n'y a en revanche aucune raison pour qu'en général les racines d'un trinôme $az^2 + bz + c$ le soient.

2.10 Géométrie du plan complexe

2.10.1 Rappels

Théorème 2.10.1. Soient A, B et C trois points distincts deux à deux, d'affixe respectives z_A, z_B et z_C.

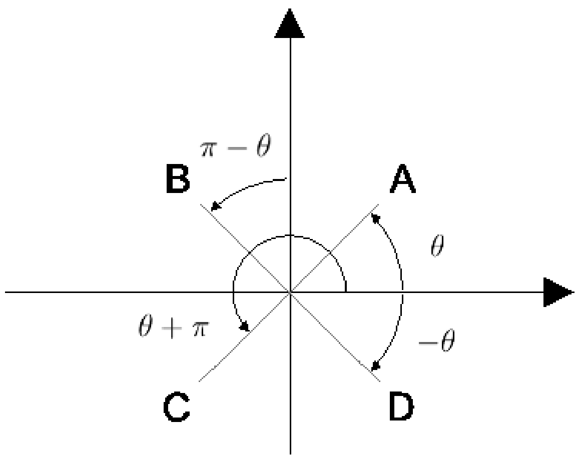
1. La distance entre A et B est le module de $z_B - z_A$.
2. L'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égal à l'argument du rapport $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.

Remarques :

- Si C est un point du plan d'affixe z_c, et ρ est un réel positif, l'ensemble des points dont l'affixe z est telle que $|z - z_C| = \rho$ est le cercle de centre C et de rayon ρ. On peut aussi écrire ce cercle comme l'ensemble des points d'affixe $z_C + \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, où θ décrit $[0, 2\pi)$.
- Comme conséquence immédiate du point 2, les points A, B, C sont alignés si et seulement si l'argument de $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ est égal à 0 ou π.
- ABC est un triangle isocèle rectangle en $M \Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \pm\mathrm{i}$, c'est-à-dire si l'argument $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.
- ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{\pm\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$.

2.10.2 Les associés d'un complexe

On considère les quatre points du plan complexe A, B, C, D sur la figure suivante :



On a :

$$\begin{aligned}
z_A &= \quad a + bi = re^{\mathrm{i}\theta} \\
z_B &= -a + bi = re^{\mathrm{i}(\pi-\theta)} = -\overline{z_A} \\
z_C &= -a - bi = re^{\mathrm{i}(\theta+\pi)} = -re^{\mathrm{i}\theta} = -z_A \\
z_D &= \quad a - bi = re^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{re^{\mathrm{i}\theta}} = \overline{z_A}
\end{aligned}$$

Remarques :

- Les points A et C sont symétriques par rapport au point O si et seulement si $z_C = -z_A$ ou de manière équivalente $|z_C| = |z_A|$ et $arg(z_C) = arg(z_A) + \pi$.
- Les points A et D sont symétriques par rapport à l'axe réel si et seulement si $z_D = \overline{z_A}$ ou de manière équivalente $|z_D| = |z_A|$ et $arg(z_D) = -arg(z_A)$.
- Les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire si et seulement si $z_B = -\overline{z_A}$ ou de manière équivalente $|z_B| = |z_A|$ et $arg(z_B) = \pi - arg(z_A)$.

2.10.3 Transformations

Définition 2.10.1. Une ***transformation*** du plan P est une bijection du plan dans lui-même. Si on note T une transformation du plan, alors T vérifie :

- à tout point M du plan est associé un unique point, noté $T(M)$;
- pour tout point N du plan, il existe un unique point M tel que $T(M) = N$.

Remarque : La transformation réciproque de T est notée T^{-1}.

Définition 2.10.2. Un point Ω est ***invariant*** pour une transformation T si, et seulement si, $T(\Omega) = \Omega$.

Définition 2.10.3. Une ***similitude*** est une transformation qui conserve le rapport des distances.

Proposition 2.10.1. Une transformation du plan est une similitude si et seulement si il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a : $M'N' = \lambda MN$.

Définition 2.10.4. On appelle ***similitude directe*** du plan toute application du plan dans lui-même représentée dans le plan complexe par l'écriture complexe $z \mapsto az + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Définition 2.10.5. Toute similitude directe de rapport 1 est appelée ***déplacement*** ou ***isométrie***.

Remarque : Les similitudes directes conservent les angles orientés.

Proposition 2.10.2. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et F la similitude du plan représentée par $z \mapsto az + b$.

- Si $a = 1$, alors l'application F est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, alors l'application F admet un unique point invariant Ω, appelé *centre de la similitude*. En désignant par θ un argument de a, l'application F s'écrit alors $F = H \circ R = R \circ H$ avec :
  - R la rotation de centre Ω et d'angle θ ;
  - H l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

  Le réel $|a|$ est appelé *rapport de la similitude* et θ une mesure de l'angle de la similitude.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

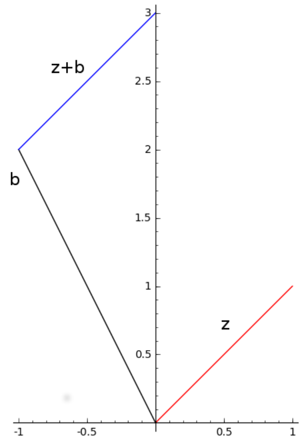
Définition 2.10.6. La ***translation*** de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Proposition 2.10.3. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et b son affixe. La translation de vecteur $\vec{u}$ est représenté dans le plan complexe par l'application $z \mapsto z + b$.

Translation de vecteur d'affixe b

$$z \mapsto az + b$$

avec $a = 1 \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$



Soit ω un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

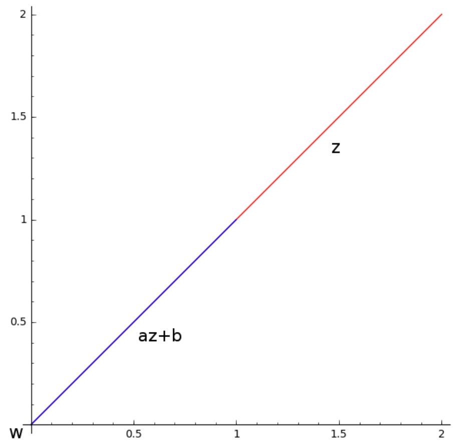
Définition 2.10.7. L'***homothétie*** de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 2.10.4. L'***homothétie*** de centre Ω, d'affixe ω, et de rapport λ est représenté dans le plan complexe par l'application $z \mapsto \omega + \lambda(z - \omega)$.

Homothétie de centre Ω et de rapport a

$$z \mapsto az + b$$

avec $a \neq 1 \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$

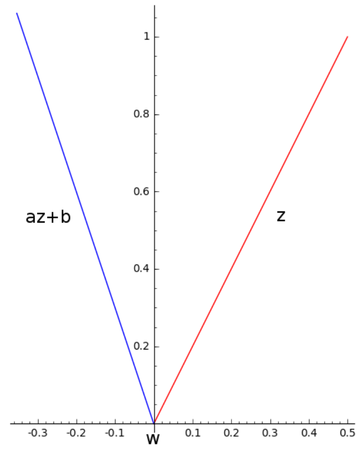


Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition 2.10.8. La ***rotation*** de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui transforme Ω en Ω et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$.

Proposition 2.10.5. La rotation r de centre Ω, d'affixe ω, et d'angle θ est représentée dans le plan complexe par l'application $z \mapsto \omega + e^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.

Rotation de centre Ω et d'angle θ ($arg(a)$)



$$z \mapsto az + b$$

avec $|a| = 1,\ a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$

Définition 2.10.9. On appelle ***similitude indirecte*** du plan toute application F du plan dans lui-même représentée dans le plan complexe par l'écriture complexe $z \mapsto a\overline{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Définition 2.10.10. Une ***réflexion*** ou ***symétrie orthogonale d'axe*** Δ est la transformation du plan qui à tout point M associe M si $M \in \Delta$ et associe l'unique point M' tel que Δ est la médiatrice de MM' sinon.

Proposition 2.10.6. Toute similitude plane indirecte est la composée d'une similitude directe et d'une réflexion.

Définition 2.10.11. Toute similitude indirecte de rapport 1 est appelée ***antidéplacement*** ou ***isométrie indirecte***.

Remarque : Les similitudes indirectes transforment un angle orienté en son opposé.

Remarques :

- La composée de deux similitudes directes ou indirectes est une similitude directe.
- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- La réciproque d'une similitude directe, respectivement indirecte, est une similitude directe, respectivement indirecte.
- La composée de deux similitude de rapport a et a' est une similitude de rapport aa'.
- La composée de deux similitudes d'angles θ et θ' est une similitude d'angle $\theta + \theta'$.
- Toute similitude de rapport a multiplie les distances par a et les aires par a^2.
- Le rapport de la réciproque d'une transformation de rapport a est $\frac{1}{a}$.

Définition 2.10.12. Une transformation T qui vérifié $T \circ T = Id$ est appelée ***involution***.

Proposition 2.10.7. L'image d'un triangle par une similitude est un triangle semblable.

SIMILITUDES ($a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$)

DIRECTES : $z' = az + b$	INDIRECTES : $z' = a\overline{z} + b$
Conservent les angles orientés Rapport $\lvert a\rvert$ Si $\lvert a\rvert = 1$: déplacement ou isométrie • Translation ($a = 1$) ∘ Si $b = 0$: identité • Homothétie ($a \neq 1 \in \mathbb{R}$) ∘ Centre $\omega = \frac{b}{1-a}$ $\Rightarrow z' - \omega = a(z - \omega)$ • Rotation ($\lvert a\rvert = 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) ∘ Centre $\omega = \frac{b}{1-a}$ ∘ Angle $\theta = arg(a)$ $\Rightarrow z' - \omega = e^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$ • Homothétie ∘ Rotation ($\lvert a\rvert \neq 1 \in \mathbb{C}$) (commutative)	Transforme un angle orienté en son opposé Rapport $\lvert a\rvert$ Si $\lvert a\rvert = 1$: anti-déplacement ou isométrie indirecte • Symétrie axiale d'axe Δ ($\lvert a\rvert = 1$ et $a\overline{b} + b = 0$) ∘ points invariants sur l'axe Δ • Symétrie glissante d'axe Δ ($\lvert a\rvert = 1$ et $a\overline{b} + b \neq 0$) ∘ aucun point invariant • Homothétie ∘ Réflexion ($\lvert a\rvert \neq 1$) (commutative) ∘ Centre $\omega = \frac{a\overline{b}+b}{1-\lvert a\rvert^2}$ $\Rightarrow z' - \omega = a\overline{(z - \omega)}$