

Пусть $Fib(n)$ — функция вычисления n -того числа Фибоначчи.

Рассмотрим функцию Кантора $K[a, b] = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$ и соответствующие "обратные" к ней $f(K[a, b]) = a$ и $s(K[a, b]) = b$.

Пусть $T[n] = K[Fib(n), Fib(n+1)]$, тогда

$Fib(n) = f(K[Fib(n), Fib(n+1)]) = f(T[n])$ и $Fib(n+1) = s(T[n])$

соответственно.

Покажем, что функция T является примитивно рекурсивной.

$T[0] = K[0, 1]$.

$T[n] = K[Fib(n), Fib(n+1)] = K[Fib(n), Fib(n-1) + Fib(n)] =$

$= K[Fib((n-1) + 1), Fib(n-1) + Fib((n-1) + 1)] =$

$= K[s(T[n-1]), f(T[n-1]) + s(T[n-1])]$, то есть $T[n] = g(n-1, T[n-1])$,

где $g(x, y) = p_2^{(2)}(K[s(y), f(y) + s(y)])$.

Так как на прошлых лекциях было показано, что $+(x, y) = sum(x, y)$, $K[a, b]$, $f(K)$, $s(K)$ являются примитивно рекурсивными функциями, то и $T[n]$ является примитивно рекурсивной.

А поскольку $Fib(n) = f(T[n])$, то и $Fib(n)$ является примитивно рекурсивной.