

DM n°9: Optique

À faire pour le jeudi 4 mars 2021

I Propagation géométrique de la lumière (D'après Mines-Ponts MP 2012)

Dans le modèle géométrique de la lumière, on représente la trajectoire de l'énergie lumineuse dans un milieu d'indice de réfraction $n(M)$ au point M , par une courbe géométrique \mathcal{C} nommée rayon lumineux. L'objectif de cette partie est l'obtention d'une équation différentielle dont la solution admet cette courbe pour graphe.

1. Rappeler les lois de Snell-Descartes et faire un dessin pour les illustrer. Au cours de quel siècle ces lois ont-elles été proposées ?
2. On considère un dioptre délimitant deux milieux d'indices constants n_1 et n_2 . Expliquer la notion de réflexion totale ; démontrer qu'il existe un angle d'incidence limite α_{lim} pour la réfraction. On exprimera α_{lim} en fonction de n_1 et n_2 .

On étudie maintenant la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu non homogène le long d'une direction. On considère pour cela dans un premier temps, le milieu stratifié représenté sur la figure 1 : chaque couche horizontale est repérée par un entier i , toutes les couches ont la même épaisseur et l'indice n_i de la couche i est constant. On suppose finalement que l'indice décroît avec i : pour deux entiers i et j si $i < j$ alors $n_i > n_j$. On note α_i l'angle entre le rayon qui se propage dans la couche d'indice n et le vecteur unitaire \vec{u}_x .

3. Relier par une formule les couples (n_i, α_i) et (n_j, α_j) pour $i \neq j$. Reproduire le schéma sur la copie et dessiner la trajectoire du rayon lumineux.

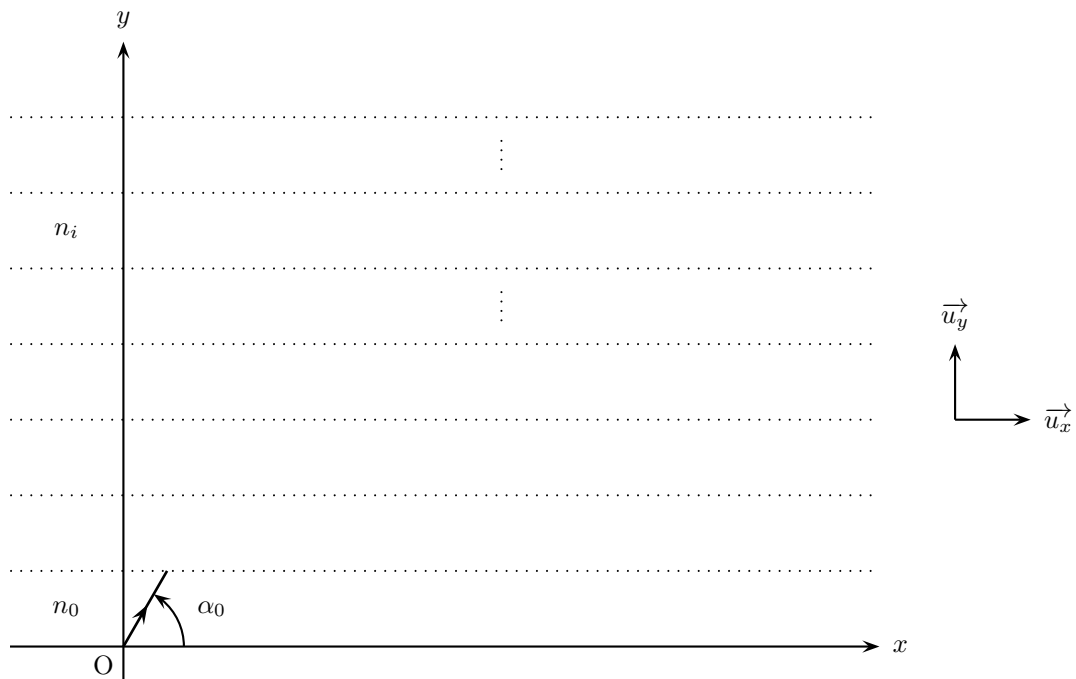


FIGURE 1 – Milieu inhomogène stratifié suivant (Oy)

Afin de déterminer l'équation différentielle de la trajectoire du rayon lumineux, on rend la stratification infiniment fine : on tend ainsi vers un milieu continu. À l'ordonnée y , l'indice de réfraction est $n(y)$ et l'angle entre le rayon et le vecteur \vec{u}_x est noté $\alpha(y)$. Le point $M(x, y)$ décrit la trajectoire du rayon lumineux, on note s son abscisse curviligne, c'est-à-dire la longueur de la trajectoire OM , et \vec{u}_s le vecteur unitaire tangent à la trajectoire. Ainsi en tout point M de la trajectoire, on associe à l'abscisse curviligne élémentaire ds , le vecteur abscisse curviligne élémentaire $d\vec{s}$ défini par la relation :

$$d\vec{s} = ds\vec{u}_s = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y \quad \text{avec} \quad \vec{u}_s = \cos \alpha(y)\vec{u}_x + \sin \alpha(y)\vec{u}_y$$

- Montrer qu'il existe une quantité C_0 constante en tout point M de la trajectoire, qu'on peut exprimer en fonction en fonction de $n(y)$ et $\alpha(y)$. Quelle est l'expression de C_0 , ds et dx ?
- Exprimer ds en fonction de dx et dy . Dédurre de ce qui précède que la courbe \mathcal{C} correspond à la solution de l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dy} \left(-\frac{n^2}{\beta^2} \right)$$

où l'on exprimera β en fonction de C_0 .

- L'indice du milieu s'écrit sous la forme $n^2(y) = n_0^2 + ky^2$ où n_0 et k sont deux constantes réelles. Déterminer, selon le signe de k , l'expression de la trajectoire $y = y(x)$ passant par l'origine O de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$. On exprimera $y(x)$ en fonction de x , α_0 , k et n_0 et d'une éventuelle unique constante d'intégration qu'on ne cherchera pas à calculer. Quel est le signe de k dans le cas d'un mirage et dans le cas d'une fibre optique.

II Analyse d'une goutte de sang

Les globules rouges, appelés aussi hématies ou érythrocytes, sont les cellules du sang qui transportent l'oxygène depuis les poumons vers les différents organes du corps. Ils jouent donc un rôle très important puisqu'ils permettent aux autres cellules d'assurer leur bon fonctionnement. Le nombre de globules rouges dans le sang d'une personne est estimé lors d'un examen appelé hémogramme. La valeur du nombre de globules rouges dans le sang doit normalement être comprise entre 4,5 et 5,5 millions par mm^3 .

À la suite d'un hémogramme, si un patient présente une baisse significative du nombre de ses globules rouges, on dit qu'il souffre d'anémie. Il s'agit plus d'un symptôme que d'une maladie car cette anémie peut avoir plusieurs causes. Le médecin lancera alors d'autres examens médicaux pour déterminer les causes de cette anémie.

Le but de ce problème est de comprendre le principe de mesure du nombre de globules rouges d'un patient.

La plupart des mesures se font à l'aide d'un microscope dont on donne les caractéristiques ci-dessous.

□ Données techniques du microscope

Le microscope est constitué d'un oculaire et d'un objectif.

- ★ L'oculaire est une lentille unique notée \mathcal{L}_2 , portant l'indication « WF 10x / 20 mm », de distance focale f'_2 . WF est le sigle de "Wide Field" qui signifie "grand champ" en anglais. Le facteur multiplicatif « 10x » correspond au grossissement commercial $G_{c,oc}$ de l'oculaire seul. L'indication « 20 mm » définit la valeur du diamètre D du diaphragme d'ouverture de l'oculaire placé au foyer objet F_2 de \mathcal{L}_2 .
- ★ L'objectif est une lentille unique notée \mathcal{L}_1 de distance focale f'_1 . Elle est achromatique et porte les indications « DIN 60x ». L'indication « DIN » signifie « Deutsche Industrie Norm » et précise donc que l'objectif respecte les normes techniques allemandes. Le facteur multiplicateur « 60x » correspond à la valeur absolue du grandissement γ_1 d'un objet par l'objectif pour une vision au punctum remotum après l'oculaire. Le fabricant précise en outre que les surfaces optiques de l'objectif ont subies un traitement anti-fongique et anti-reflet. Enfin, la mise au point de l'objectif peut se faire au moyen de deux vis : l'une macrométrique et l'autre micrométrique.
- ★ On définit l'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1 F_2} = 160 \text{ mm}$.

□ Informations générales

- ★ Le grossissement commercial G_c d'un instrument d'optique est défini comme le rapport $G_c = \alpha' / \alpha$ où α' est le diamètre angulaire sous lequel est vue l'image de l'objet par l'instrument pour une vision au punctum remotum et où α celui sous lequel il est vu à l'œil nu au punctum proximum.

- ★ La profondeur de champ maximale est la distance entre la position d'un objet vu sans accommoder au travers de l'instrument et celle d'un objet vu en accommodant au maximum au travers de l'instrument, l'oeil étant placé au foyer principal image F'_2 de l'oculaire.
- ★ On rappelle les formules de conjugaison d'une lentille mince sphérique de centre O, de foyer principal objet F, de foyer principal image F' et de distance focale f' :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2$$

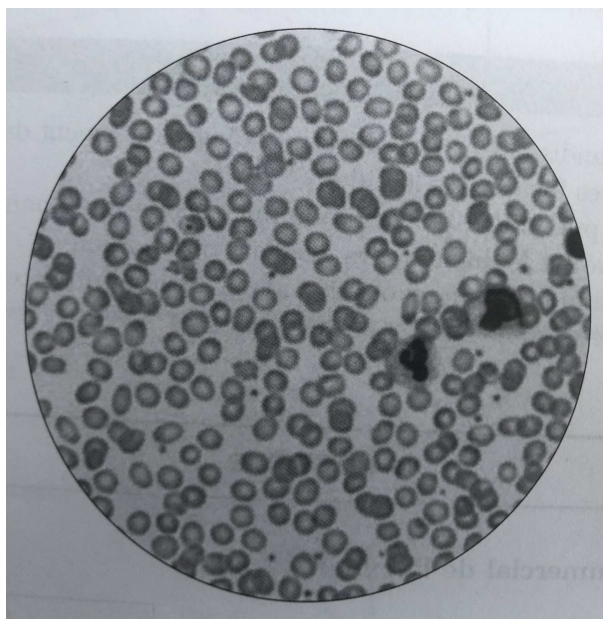
- ★ On rappelle aussi les formules de grandissement associées :

$$\gamma \triangleq \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

- ★ On considérera dans tout le problème que l'oeil de l'observateur est emmétré, qu'il est placé au niveau du plan focal image de l'oculaire et que le microscope travaille dans l'approximation de Gauss.
- ★ Le diamètre d'un globule rouge est d'environ $7,2\mu\text{m}$ et son épaisseur varie de $0,8\mu\text{m}$ à $2,6\mu\text{m}$ du centre à sa périphérie.

II.1 Étude directe au microscope

Dans cette partie, on se propose d'abord de vérifier la taille des globules rouges du patient. On dépose pour cela une goutte de sang du patient sur une lame de microscope. On dépose ensuite par dessus cette goutte une lamelle et on observe le tout au microscope.



La mise au point est faite sur les globules rouges et l'épaisseur de la couche de sang emprisonnée entre la lame et la lamelle du microscope est d'environ $3\mu\text{m}$. On montre ci-dessus une photographie prise au travers de ce dispositif.

Questions préliminaires

1. Rappeler les propriétés d'un œil emmétré. On notera d_m la distance séparant l'œil emmétré de son punctum proximum.
2. Démontrer, à l'aide d'un schéma, les relations de grandissement d'une lentille sphérique mince.
3. Rappeler les hypothèses de l'approximation de Gauss. Quelle propriété optique est vérifiée lorsqu'un instrument d'optique fonctionne dans cette approximation ?

Caractérisation des conjugaisons de l'oculaire et de l'objectif

4. Montrer que les lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont convergentes.
5. On note AB un objet observé au travers du microscope par l'oeil au repos. Où se situe l'image intermédiaire A_1B_1 de AB par l'objectif du microscope ? On justifiera clairement la réponse.
6. Établir l'expression de $|\gamma_1|$ en fonction de Δ et de f'_1 .
7. Quelle est la nature, convergente ou divergente, de \mathcal{L}_2 ? Établir l'expression du grossissement commercial $G_{c,oc}$ de l'oculaire en fonction de d_m et de f'_2 .
8. En déduire les valeurs numériques des distances focales f'_1 et f'_2 .

Profondeur de champ

9. Schématiser le microscope en plaçant les deux lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 ainsi que leurs points caractéristiques (centre et foyers principaux). On ne respectera pas les échelles afin de rendre plus lisible le schéma.
10. Déterminer sur le schéma, par une construction graphique, la position A_{PR} (sur l'axe optique du microscope) d'un objet observé au punctum remotum de l'oeil au travers du microscope.
11. Déterminer, de la même manière, sur le schéma précédent, la position A_{PP} d'un objet observé au punctum proximum de l'oeil au travers du microscope.
12. Montrer que la profondeur de champ δ a pour expression :

$$\delta = \frac{\Delta}{\gamma_1^2} \times \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{d_m}{G_{c,oc}^2 \Delta}} \right)$$

13. On pose $\epsilon = \frac{d_m}{G_{c,oc}^2 \Delta}$. Déterminer la valeur numérique de ϵ .
14. En déduire une expression approchée de δ en fonction de d_m , $G_{c,oc}$ et γ_1 . Faire l'application numérique. Commenter.

Taille et densité des globules rouges dans le sang

15. Déterminer la valeur numérique du rayon r du champ d'observation des globules rouges.
16. À l'aide de la photographie ci-dessus, estimer la taille moyenne d'un globule rouge. Commenter.
17. On note S la surface du champ d'observation. Exprimer S en fonction des données de l'énoncé. Faire l'application numérique.
18. La photographie ci-dessus a été prise par un capteur dont les caractéristiques sont comparables à celle de l'oeil en terme de profondeur de champ. Estimer la valeur numérique de la densité n^* de globules rouges par mm^3 dans le sang du patient en prenant comme volume d'observation $V = S\delta$.
19. L'expression de V proposée ci-dessus est-elle judicieusement choisie ? Conclure.

II.2 Utilisation d'une cellule hématimètre

En pratique, la numération manuelle de la densité de globules rouges dans le sang est réalisée au moyen d'une « cellule hématimètre », telles que les cellules de Malassez. Une cellule de Malassez est une lame de microscope portant une plateforme dans laquelle une juxtaposition de petites cuves (EM) de côté égal à 0,05 mm, ayant une profondeur de 0,2 mm et formant un quadrillage de l'espace, est remplie exactement à ras bord par capillarité. Le schéma de principe d'une cellule de Malassez est représenté sur la figure ci-après. On peut y noter que l'association de 20 cuves (EM) forme un rectangle noté (RM).

Après le prélèvement d'une goutte de sang, une dilution d'un facteur 400 est réalisée avant de remplir la plateforme. Au bout de quelques minutes, par sédimentation, les globules rouges observés se déposent au fond des cuves par sédimentation. Grâce à la dilution, le dépôt peut être considéré comme monocellulaire. La plateforme est recouverte d'une lamelle puis observée au microscope.

La photographie d'un rectangle (RM) d'une cellule de Malassez est fournie ci-après.

20. Interpréter la photographie fournie de manière à estimer la densité n^* de globules rouges de ce spécimen.

Quadrillage d'une cellule de Malassez