Correction partielle - TD n°7 - Approche énergétique de la mécanique

2 Toboggan aquatique

1. La vitesse atteinte en fin de chute se détermine à l'aide du théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'homme de masse m entre l'instant initial et l'instant où il arrive dans l'eau :

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}}$$

Seul le poids travaille car la réaction $\vec{R}$ exercée par le toboggan sur le nageur est normale au toboggan en l'absence de frottement, et ne travaille donc pas puisque le point M se déplace en suivant la surface du toboggan, donc $W_{\vec{R}} = 0$. De plus $W_{\vec{R}} = -\Delta E_p = mgH$.
On retrouve donc la même vitesse que celle correspondant à une chute libre d'une hauteur H : $\boxed{v_f = \sqrt{2gH}}$.
Ce résultat n'est pas surprenant, car seul le poids intervient, et on rappelle que le travail du poids ne dépend pas du chemin suivi, c'est à dire qu'il est le même pour une chute libre ou une descente dans un toboggan compliqué mais de même hauteur.

2. Afin de calculer l'énergie mécanique, calculons tout d'abord l'expression de la vitesse dans la base mobile. Le vecteur position est donné par : $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r + k\theta\vec{u}_z$. Par dérivation, on obtient : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + k\dot{\theta}\vec{u}_z$.
On peut en déduire l'expression de l'énergie mécanique pour une position quelconque de θ : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(R^2+k^2) + mgk\theta$.

3. Toutes les forces s'exerçant sur le nageur sont conservatives ou orthogonales à la vitesse, et l'énergie mécanique se conserve donc. D'où $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$. La dérivation de l'équation précédente conduit directement à $\ddot{\theta} = -\frac{gk}{R^2+k^2} = cste$.

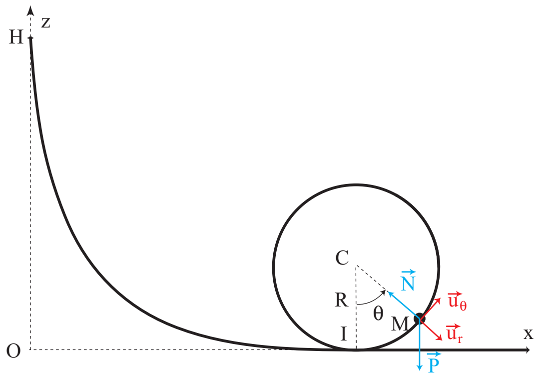
4 Looping

1. a) La liaison est qualifiée d'*unilatérale*. La réaction qu'exercent les rails sur le wagonnet est forcément positive ou nulle, sachant que le wagonnet quitte les rails si celle-ci s'annule.

b) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et une position du point M dans le cercle repérée par l'angle θ, on obtient :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{\vec{P}} + W_{\vec{R}_N} = mg(h-z) + 0$$

Seul le poids travaille, car la réaction des rails est orthogonale à la vitesse à tout instant si l'on néglige les frottements. De plus, tant que le wagonnet reste en contact avec le rail, $z = R(1 - cos\theta)$, donc



$$\boxed{v = \sqrt{2g\left[h - R(1-cos\theta)\right]}}$$

c) Le principe fondamental de la dynamique appliqué au wagonnet dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen s'écrit : $m\vec{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}$. En projection sur le repère mobile $(C, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, on obtient : $\begin{cases} ma_r = -N + mgcos\theta \\ ma_\theta = -mgsin\theta \end{cases}$, or $\begin{cases} \overrightarrow{CM} = R\vec{u}_r \\ \vec{v} = -R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \end{cases}$

et donc : $\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mgcos\theta \\ mR\ddot{\theta} = -mgsin\theta \end{cases}$, d'où $\boxed{N = mgcos\theta + mR\dot{\theta}^2}$

d) Nous avons montré que $v = R\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \frac{v}{R}$, et en remplaçant dans l'expression de N, on obtient $\boxed{N = mg\left[2\left(\frac{h}{R} - 1\right) + 3cos\theta\right]}$

e) Pour passer le looping, il faut que la réaction des rails ne s'annule pas, et reste donc toujours positive. Ceci se traduit par la condition $N > 0$ pour tout θ et correspond à $\boxed{h > \frac{5}{2}R} = 25m$. On voit en particulier que pour $h = 2R$, le wagonnet tombe avant d'atteindre le haut du looping.
Remarque : dans le cas de la figure ci-contre, on peut donc prédire qu'une bille lâchée en haut de l'oeuvre d'art en bois va tout juste passer le looping...

f) A la fin du looping, $\theta = 2\pi$, et la vitesse vaut donc : $v = \sqrt{2gh} = 22m.s^{-1}$, c'est à dire la même vitesse que si la bill avait été lâchée en chute libre de la hauteur h. Ceci illustre bien que le travail du poids (le seul intervenant dans le bilan énergétique) ne dépend pas du chemin suivi. Si les rails sont horizontaux après le looping, la vitesse restera constante, et le wagonnet aura un mouvement de translation rectiligne uniforme, car la somme des forces s'exerçant sur lui est nulle la force de réaction normale des rails compense exactement le poids).

2. a) La liaison est maintenant *bilatérale*, la réaction N peut s'annuler et changer de signe sans que le wagonnet ne se détache des rails.
   b) La norme v' du point M lorsqu'il est à l'intérieur du demi-cercle est identique à celle du cas précédent : $v' = v$.
   c) De même, la norme de la réaction $\overrightarrow{N}'$ est identique à l'expression précédente : $N' = N$.
   d) Le cas limite pour lequel le wagonnet va tout juste passer le looping correspond au cas où celui-ci parvient en haut du looping avec une vitesse nulle, c'est à dire pour $\theta = \pi$, angle pour lequel la vitesse vaut : $v = \sqrt{2g(h-2R)}$, qui s'annule pour $h = 2R$. La hauteur minimale est donc égale à la hauteur du looping : $\boxed{h_{min} = 2R}$.
3. La heuteur minimale est bien entendu plus faible pour le cas d'une liason bilatérale, et c'est pourquoi les parc d'attractions utilisent tous le deuxième type de liaison pour leurs "grands huit".

6 Descente en luge au printemps

1. a) L'absence de force de frottement dans la première partie permet d'utiliser la conservation de l'énergie mécanique entre les points O et O' : $\frac{1}{2}mv_O'^2 = mgLsin\alpha$, d'où $\boxed{v_O' = \sqrt{2gLsin\alpha}}$. La vitesse se conserve au niveau de la rupture de pente si celle-ci n'est pas trop brutale, c'est à dire s'il n'y a pas de choc au passagepar O', qui pourrait dissiper de l'énergie, et ainsi diminuer l'énergie cinétique de la luge en la transférant au sol au moment du choc.
   b) La projection du principe fondamental de la dynamique appliqué au point M dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen sur l'axe vertical, dans la seconde partie du mouvement permet de montrer que la réaction normale du sol vers la luge vaut $R_N = mg$, et donc lors du glissement de la luge sur l'herbe, l'expression de la norme de la force de frottement solide s'exerçant sur la luge vaut : $R_T = \mu R_N = \mu mg$. Cette force est résistante au mouvement, et son travail est négatif. Entre les points O' et l'arrêt A : $W_{O'A}(\overrightarrow{R}_T) = -\mu mgD$.
   L'application du théorème de l'énergie cinétique entre les points O' et A s'écrit donc, en remarquant que ni le poids, ni la réaction normale ne travaillent car ces forces sont orthogonales à la vitesse à tout instant :
   $$-\frac{1}{2}mv_O'^2 = W_{O'A}(\overrightarrow{R}_T)$$
   soit $-mgLsin\alpha = -\mu mgD$ et donc $\boxed{D = \dfrac{Lsin\alpha}{\mu}}$.
2. a) La force de frottement solide s'exerçant sur la luge vaut dans ce cas : $R_T = \mu R_N = \mu mgcos\beta$. Donc entre les points O' et l'arrêt A' : $W_{O'A'}(\overrightarrow{R}_T) = -\mu mgD'cos\beta$. Cette fois, le travail du poids n'est pas nul, et vaut : $W_{O'A'}(\overrightarrow{P}) = -mgD'sin\beta$.
   L'application du théorème de l'énergie cinétique entre les points O' et A s'écrit cette fois :
   $$-\frac{1}{2}mv_O'^2 = W_{O'A'}(\overrightarrow{R}_T) + W_{O'A'}(\overrightarrow{P})$$
   soit $-mgLsin\alpha = -\mu mgD'cos\beta - mgD'sin\beta$ et donc $\boxed{D' = \dfrac{Lsin\alpha}{\mu cos\beta + sin\beta}}$.

$D' = D\frac{1}{cos\beta+\frac{sin\beta}{\mu}}$ Une simple étude de fonction utilisant le fait que $0 < \mu < 1$ permet de montrer que $D' < D$, ce qui est d'ailleurs évident : la luge ne remonte pas à son altitude initiale à cause des forces de frottement qui dissipent de l'énergie sous forme d'énergie thermique (énergie interne de la luge et du sol).

b) La luge redescend la pente dans l'autre sens si les frottements solide ne suffit pas à compenser la composante du poids. A l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $R_T = mgsin\beta$ et $R_N = mgcos\beta$, or $R_T \leq R_N$, donc il y aura équilibre en A' si $mgsin\beta \leq fmgcos\beta$, soit si $\boxed{tan\beta \leq f}$.

7 Fusion nucléaire

1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant l'initial où le proton est au repos, et l'instant où il sort de l'accélérateur, on obtient :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - 0 = W_1 = -\Delta E_{p_1} = -0 + eU$$

. On en tire la vitesse : $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m_p}}}$.

2. a) La force qu'exerce le noyau de l'atome sur le proton est répulsive et sa norme vaut : $\boxed{F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}}$.

b) Cette force est conservative puisqu'elle dérive de l'énergie potentielle : $\boxed{E_{p_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r}}$.

c) La distance minimale r_m à laquelle le proton peut approcher du noyau de charge $+Z\,e$ s'obtient à partir du théorème de l'énergie cinétique, appliqué entre la sortie de l'accélérateur (considérée comme à l'infini), et l'arrêt du proton :

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_2 = -\Delta E_{p_2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r_{min}} + 0$$

En utilisant l'expression de v_0, on en tire $\boxed{r_{min} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze}{U}}$.

d) La tension accélératrice U pour qu'un proton projectile puisse fusionner avec un proton cible immobile ($Z = 1$) est donnée par : $\boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e}{d} = 7.2 \times 10^5 V}$. Cet ordre de grandeur est tout à fait réalisable expérimentalement aujourd'hui puisque plusieurs MV sont utilisés dans certains accélérateurs linéaires. Cependant, la fusion nucléaire est un problème bien plus complexe que ne le laisse entendre cette modélisation, et n'est toujours pas maîtrisée à l'heure actuelle.