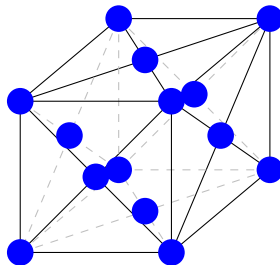


– Correction du DS (7) de physique-chimie –

Mécanique et cristallographie

I Exercice de cristallographie

1. Maille :



Les sites octaédriques se trouvent au centre de la maille et au milieu de chaque arête. Le site central compte pour un site et chaque site sur une arête compte pour $1/4$ de site. Le nombre total de sites octaédriques est donc $N_O = 1 + 12 \cdot \frac{1}{4} = 4$.

2. Chaque atome de titane à un coin du cube compte pour $1/8$, et il y en a 8. Chaque atome au centre d'une face compte pour $1/2$ et il y a 6 faces. Le nombre de motifs est donc $N = 8 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/2 = 4$. Par ailleurs, chaque atome de titane au centre d'une face possède 4 atomes voisins sur la même face, aux coins du cube, 8 atomes voisins au centre des faces adjacentes, soit une coordinence de 12. L'atome d'azote au centre possède lui aussi 12 plus proches voisins présents sur les arêtes du cube, soit une coordinence de 12.

3. La masse volumique est donnée par

$$\rho = \frac{4M_{Ti} + 4M_N}{N_A a^3} = \frac{4(48 + 14) \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23} \cdot (4,25 \cdot 10^{-10})^3} \simeq \frac{4 \cdot 62}{6 \cdot 4^3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^7 \simeq \frac{10}{16} 10^4$$

soit, en ordre de grandeur

$$\rho \simeq 6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

4. Le contact se fait le long d'une arête donc

$$2(r_{Ti} + r_N) = a$$

5. L'atome de titane le plus proche voisin d'un autre atome de titane l'est selon la diagonale d'une face du cube, donc

$$4r_{Ti} \leq a\sqrt{2}$$

6. La taille du site octaédrique est telle que

$$2(r_{Ti} + r_O) = a$$

D'après la question précédente, on a lorsque les atomes de titane sont tangents

$$a = r_{Ti} \frac{4}{\sqrt{2}}$$

donc

$$2(r_{Ti} + r_O) = r_{Ti} \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2r_O = r_{Ti} \left(\frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{2} \right) \Rightarrow r_O = r_{Ti}(\sqrt{2} - 1)$$

7. D'après les données numériques $r_O = 145 \cdot 0,414 \simeq 60 \text{ pm}$ ce qui est un peu trop faible pour faire rentrer l'atome d'azote dans un modèle de sphères dures. On peut en conclure que le modèle des sphères dures est un peu trop caricatural pour prendre en compte la structure cristalline du nitrure de titane.

II Détection d'exoplanètes par la méthode des vitesses radiales

II.A Réduction du problème de Kepler à deux corps

1. Dans le référentiel (\mathcal{R}) galiléen, les deux astres ne sont soumis qu'à leur interaction réciproque. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$M\vec{R}_E = \vec{F}_E \quad \text{et} \quad m\vec{R}_P = \vec{F}_P \quad \text{avec} \quad \vec{F}_E = -\vec{F}_P = G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

2. D'après la définition du centre de masse, barycentre des points matériels :

$$\vec{OC} = \frac{M\vec{R}_E + m\vec{R}_P}{m + M}$$

3. On applique le théorème de la résultante cinétique dans (\mathcal{R}) :

$$\frac{d^2\vec{OC}}{dt^2} = \frac{M\vec{R}_E + m\vec{R}_P}{m + M} = \frac{\vec{F}_E + \vec{F}_P}{M + m} = \vec{0}$$

Le vecteur vitesse associé à C est donc constant et sa trajectoire est donc rectiligne et uniforme.

4. Par définition de \vec{r} :

$$\vec{R}_P = \vec{R}_C + \frac{M}{M + m}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{R}_E = \vec{R}_C - \frac{m}{M + m}\vec{r}$$

ce qui donne :

$$\vec{r}_P = \vec{R}_P - \vec{R}_C = \frac{M}{M + m}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_E = \vec{R}_E - \vec{R}_C = -\frac{m}{M + m}\vec{r}$$

5. On a :

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}}_P - \ddot{\vec{R}}_E = \frac{\vec{F}_P}{m} - \frac{\vec{F}_E}{M} = \vec{F}_P \frac{M + m}{mM}$$

soit :

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_P$$

6. Quand on aura trouvé \vec{r} , on obtiendra les positions de E et P en utilisant :

$$\vec{r}_P = \frac{M}{M_t}\vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_E = -\frac{m}{M_t}\vec{r}$$

Le problème de Kepler consiste à déterminer les mouvements couplés de deux points matériels : on cherche à déterminer leurs vecteurs positions et l'évolution de chacun d'eux dépend de l'autre au travers de la force d'interaction. L'équation vérifiée par \vec{r} est une équation différentielle ne dépendant que de \vec{r} , elle se lit donc comme celle d'un problème à un seul corps, dans lequel on manipule un unique vecteur inconnu. On a donc bien « réduit » le problème de Kepler initial.

II.B Résolution du mouvement relatif

7. L'expression du travail élémentaire ne dépend que de la distance r :

$$\delta W(\vec{F}) = -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

Cette force est donc conservative et dérivé d'une énergie potentielle telle que $\delta W = -E_p$. En remarquant que $Mm = M_t\mu$, on peut introduire l'énergie potentielle $E_p = -G\frac{M_t\mu}{r}$.

8. La force \vec{F} étant centrale, le moment associé est nul. Comme il s'agit de la seule force qui s'exerce sur la particule fictive, d'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique de X est constant.

9. On peut alors en déduire que la trajectoire est plane et que le mouvement vérifie la loi des aires.

10. Le moment cinétique peut s'écrire :

$$\vec{\mathcal{L}}_C = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = L \vec{e}_z$$

11. La seule force qui s'applique sur la particule fictive est une force conservative. D'après le théorème de l'énergie mécanique $\mathcal{E} = cste$. Par définition :

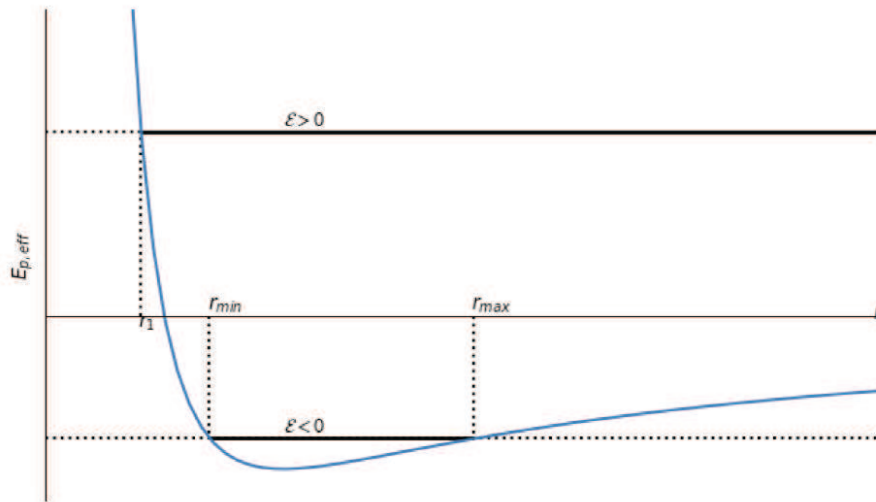
$$\mathcal{E} = E_C + E_p = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + E_p$$

D'après l'expression du moment cinétique $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$ et donc :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}$$

avec $E_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} + E_p(r)$

12. On représente ci-dessous l'énergie potentielle effective. Si $\mathcal{E} > 0$ la trajectoire est hyperbolique, si $\mathcal{E} = 0$



il s'agira d'une trajectoire parabolique. Enfin si $E_{p,\text{eff},\text{min}} \leq \mathcal{E} < 0$, il s'agira d'une trajectoire elliptique bornée par deux rayons r_{min} et r_{max} .

13. Il faut que $\mathcal{E} < 0$.

14. Lorsque $\dot{r} = 0$, $\mathcal{E} = E_{p,\text{eff}}$. On en déduit :

$$\frac{L^2}{2\mu} u^2 - \mathcal{G} M_t \mu u - \mathcal{E} = 0$$

dont les solutions sont :

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2L^2 \mathcal{E}}{\mathcal{G}^2 M_t^2 \mu^3}}}{\frac{L^2}{\mu^2 \mathcal{G} M_t}}$$

qui correspondent donc aux valeurs de u_{min} et u_{max} .

15. On pose alors :

$$p = \frac{L^2}{\mathcal{G} M_t \mu^2} \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 \mathcal{E}}{\mathcal{G}^2 M_t^2 \mu^3}}$$

On a obtient alors :

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r_{\text{max}} = \frac{p}{1-e}$$

16. Pour un mouvement borné, on a donc $0 < e < 1$ car $\mathcal{E} < 0$.

17. Les calculs donnent :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

En reprenant l'expression de l'énergie mécanique, on a :

$$\mathcal{E} = \frac{\mu}{2} \frac{L^2}{\mu^2} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu} u^2 - \mathcal{G}\mu M_t u$$

On pose alors $A_1 = A_0 = \frac{L^2}{2\mu}$ et $A_2 = -\mathcal{G}\mu M_t$.

18. L'énergie mécanique étant constante :

$$2A_0 u'(\theta) u''(\theta) + 2A_1 u(\theta) u'(\theta) + A_2 u'(\theta) = 0$$

ce qui donne :

$$u''(\theta) + u(\theta) = -\frac{A_2}{2A_0} \quad \text{soit} \quad u''(\theta) + u(\theta) = \frac{\mathcal{G}M_t \mu^2}{L^2} = \frac{1}{p}$$

19. La solution générale de cette équation d'oscillateur harmonique est :

$$u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{1}{p}$$

Or, $u(0) = \frac{1+e}{p}$ et $u'(0) = 0$ donc $A = e/p$ et $B = 0$. Finalement :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

20. Ici $r_{\min} = r_{\max} = r_0$ donc $e = 0$.

21. On a alors $r_0 = p = \frac{L^2}{\mathcal{G}M_t \mu^2}$.

22. Montrons que la norme du vecteur vitesse est constante. On a montré que $L = \mu r_0 v_0$ et comme L est constant v_0 est constant. Dès lors :

$$v_0 = \frac{L}{\mu r_0} = \frac{\mu \mathcal{G}M_t}{L}$$

En éliminant L de ces deux expressions, on obtient :

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_t}{r_0}}$$

23. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, $\dot{\theta} = \omega_0 = \frac{v_0}{r_0}$ et donc $\theta = \omega_0 t + \theta_0$. En repassant en coordonnées cartésiennes et pour le choix $\theta_0 = 0$:

$$x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad y(t) = r_0 \sin(\omega_0 t)$$

24. On exprime $\omega_0^2 r_0^3$:

$$\omega_0^2 r_0^3 = \frac{v_0^2}{r_0^2} r_0^3 = v_0^2 r_0 = \left(\frac{\mu \mathcal{G}M_t}{L} \right)^2 \times \frac{L^2}{\mathcal{G}M_t \mu^2} = \mathcal{G}M_t$$

II. C Cinématique de l'étoile en présence d'une planète

25. Par définition de β :

$$\frac{M}{M+m} = \frac{1}{1+\beta} \quad \text{et} \quad \frac{m}{M+m} = \frac{\beta}{1+\beta}$$

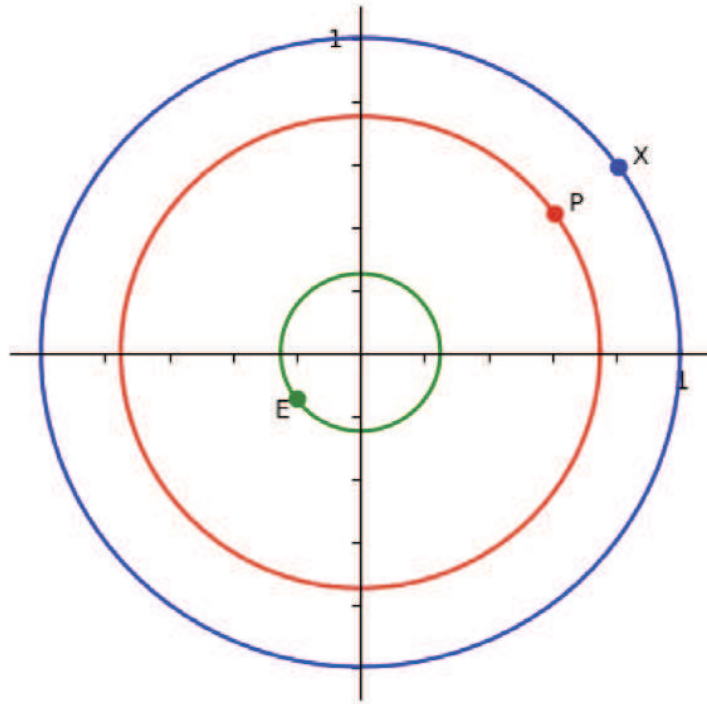
Ce qui donne :

$$x_P = \frac{1}{1+\beta} r_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad y_P = \frac{1}{1+\beta} r_0 \sin(\omega_0 t)$$

et

$$x_E = -\frac{\beta}{1+\beta} r_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad y_E = -\frac{\beta}{1+\beta} r_0 \sin(\omega_0 t)$$

26. Pour la valeur de β fournie, on obtient le graphique ci-dessous :



27. La projection sur \vec{n} s'écrit :

$$v_{\parallel} = -\frac{\beta}{1+\beta} r_0 \omega_0 \sin i \cos \omega_0 t$$

28. L'amplitude du signal de vitesse radiale s'écrit :

$$K = \frac{m}{M_t} r_0 \omega_0 \sin i$$

Ainsi :

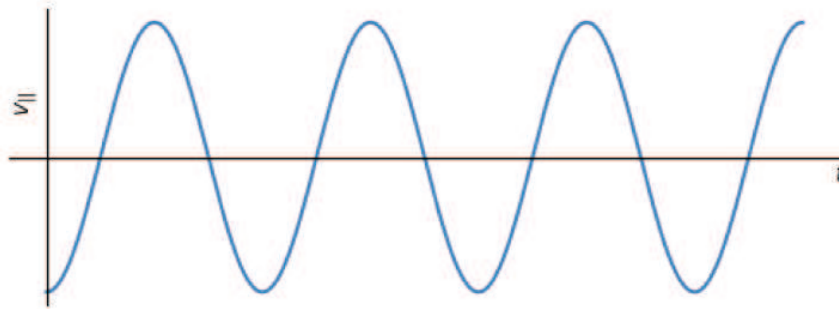
$$TK^3 = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(\frac{m}{M_t} r_0 \omega_0 \sin i \right)^3 = \omega_0^2 r_0^3 \left(\frac{2\pi m^3 \sin^3 i}{M_t^3} \right) = 2\pi \mathcal{G} f$$

ce qui donne :

$$f = \frac{TK^3}{2\pi \mathcal{G}}$$

29. Avec la définition de f , pour $m \ll M$ et avec $\sin i < 1$, on obtient :

$$m > m_{\min} = \left(\frac{TM^2}{2\pi \mathcal{G}} \right)^{1/3} K$$



Plus $\sin i$ est grand et plus K est élevé : il est donc plus facile de détecter la planète lorsque i est proche de $\pi/2$. Dans ce cas en effet, le plan de la trajectoire contient la droite de visée et l'effet Doppler est plus marqué. Plus M_t est petit, plus K est grand. Il vaut donc mieux que l'étoile soit légère. À nouveau cela est bien naturel : une étoile légère se déplace davantage sous l'effet de la planète P, ce qui provoque un effet Doppler plus visible.

30. Avec la figure fournie, on lit $T = 11$ jours et $K = 1,4 \text{ m s}^{-1}$. Cela conduit à $m_{\min} = 1,2 m_{\text{Terre}}$.

III Etude d'une balance romaine

III. A Description d'une balance romaine

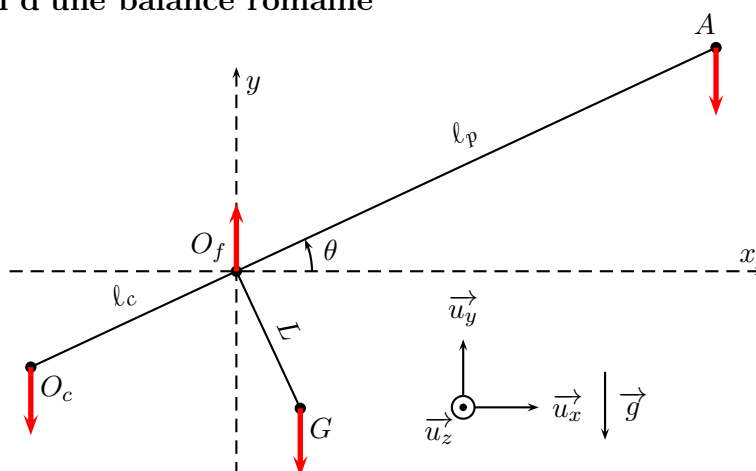


FIGURE 1 – Modélisation simplifiée de la balance romaine.

1. La réaction de l'anneau de suspension s'applique en O_f . Le bras de levier est donc nul et le moment de la force l'est aussi.
2. On a repris la figure de l'énoncé et on l'a complété pour aboutir à la figure 1. La barre est soumise à quatre forces : son propre poids, la réaction de l'anneau de suspension, la réaction du crochet supportant l'objet à peser et la réaction du peson. Le point de contact est supposé à chaque fois unique et la réaction uniquement normale (en négligeant tout frottement solide).

III. B Etude de l'équilibre mécanique de la balance pour $m = 0$

3. La deuxième loi de Newton ne permet pas de déterminer les conditions qui permettent d'obtenir un angle d'inclinaison nul. Pour ce faire, il faut appliquer la loi du moment cinétique à l'équilibre par rapport au point O_f :

$$\overrightarrow{M_{O_f}}(\overrightarrow{P_{peson}}) + \overrightarrow{M_{O_f}}(\overrightarrow{P_{crochet}}) = \vec{0}$$

ce qui conduit à

$$-\ell_0 m_p g \vec{u}_z + \ell_c m_c g \vec{u}_z = \vec{0}$$

On a donc :

$$\ell_0 = \frac{m_c}{m_p} \ell_c$$

III. C Étude de l'équilibre mécanique de la balance pour $m \neq 0$

4. On devra déplacer le peson de manière à augmenter le bras de levier côté fléau. Ceci va permettre de compenser l'ajout de la masse supplémentaire, on pourra compenser l'augmentation de l'intensité du poids côté tête.
5. Loi du moment cinétique
6. On applique directement cette loi du moment cinétique à la barre et, selon l'axe (Δ), on a :

$$\ell_c(m_c + m) \cos \theta_{\text{éq}} - L m_b \sin \theta_{\text{éq}} - \ell_p m_p \cos \theta_{\text{éq}} = 0$$

ce qui devient avec $\ell_p = \ell_0 + \ell$:

$$[\ell_c(m_c + m) - (\ell_0 + \ell) m_p] \cos \theta_{\text{éq}} = L m_b \sin \theta_{\text{éq}}$$

et donc pour $\theta_{\text{éq}} \neq \pi/2$:

$$\tan \theta_{\text{éq}} = \frac{[\ell_c(m_c + m) - (\ell_0 + \ell) m_p]}{L m_b}$$

soit :

$$\tan \theta_{\text{éq}} = \frac{\ell_c m - \ell m_p}{L m_b}$$

7. Pour $\theta_{\text{éq}} = 0$, on obtient simplement :

$$m = \frac{\ell}{\ell_c} m_p$$

8. La dernière relation indique qu'il existe une proportionnalité directe entre le déplacement à imposer au peson pour retrouver l'équilibre horizontal et la masse à peser. Pour graduer une telle balance, il suffit de noter (graver) sur la balance la position du peson à vide (ℓ_0), puis de déterminer la masse à fixer pour équilibrer la balance lorsque le peson est en A_{max} . Cette masse sera la masse maximale qui pourra être mesurée selon cet axe. Le lien de proportionnalité permettra de déterminer la masse d'un objet de masse inconnue par une simple règle de trois.
9. A la différence des balances à plateaux, il n'est pas nécessaire de disposer d'un jeu de masses marquées, lourdes et difficiles à transporter. Il n'est pas non plus nécessaire de transporter les plateaux encombrant, fragiles et difficile à équilibrer. Pour ces trois raisons, l'utilisation de la balance romaine à longterm a été préféré à celle des balances à plateaux.
10. La sensibilité est, d'après sa définition, la dérivée de ℓ par rapport à m . On a donc par conséquent :

$$S = \frac{\ell_c}{m_p}$$

11. M s'obtient en reprenant la relation liant m aux paramètres de la balance :

$$M = \frac{\ell_{\text{max}}}{\ell_c} m_p = \frac{\ell_M - \ell_0}{\ell_c} m_p = \frac{\ell_M - \frac{m_c}{m_p} \ell_c}{\ell_c} m_p$$

soit :

$$M = \frac{\ell_M}{\ell_c} m_p - m_c$$

12. On en déduit :

$$M = \frac{\ell_M}{S} - m_c \quad \text{soit} \quad S = \frac{\ell_M}{M + m_c}$$

13. L'expression de ℓ_c est :

$$\ell_c = \frac{m_p}{M + m_c} \ell_M$$

La valeur de ℓ_0 se déduit immédiatement de celle de ℓ_c . Les applications numériques donnent :

$$\ell_c = 4,90 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \ell_0 = 9,80 \text{ mm}$$

Ces valeurs semblent réalistes.

14. La valeur de la sensibilité obtenue est :

$$S = 9,80 \text{ cm.kg}^{-1}$$

ce qui correspond à 1 cm pour 100 grammes ce qui semble tout à fait raisonnable pour une balance de maraîchers (ordre de grandeur typique de l'incertitude acceptable par le client et le maraîcher).

15. Le schéma dans la configuration de suspension côté fort est celui de la figure 2.

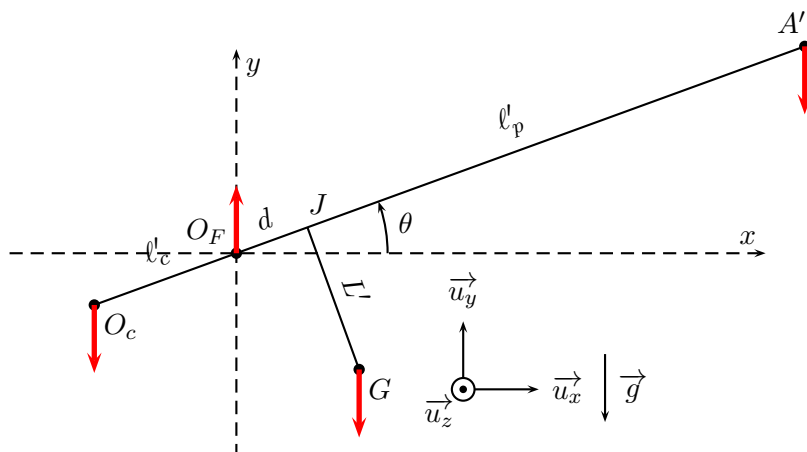


FIGURE 2 – Modélisation simplifiée de la balance romaine côté fort.

Ici, $\ell'_c = \ell_c - d$ et $\ell'_p = \ell_p + d$. Écrivons à nouveau la loi du moment cinétique à l'équilibre pour une masse M' équilibrée par un peson placé en A'_{\max} . Elle donne :

$$-m_p (\ell_p + d) - m_b d + (m_c + M') (\ell_c - d) = 0$$

soit :

$$d = \frac{\ell_c (m_c + M') - m_p \ell_M}{M' + m_c + m_p + m_b}$$

16. L'application numérique donne :

$$d = 3,53 \text{ cm}$$

17. La masse minimale est obtenue pour un peson placé en butée contre la tête de la balance, c'est-à-dire pour une distance $OF A' = \ell_0 + d$. Dans cette configuration l'équilibre horizontal donne :

$$-m_p(\ell_0 + d) - m_b d + (m_c + M_{\min})(\ell_c - d) = 0$$

qui donne :

$$M_{\min} = \frac{m_p(\ell_0 + d) + m_b d}{\ell_c - d} - m_c$$

L'application numérique donne :

$$M_{\min} = 1,61 \text{ kg}$$

18. La sensibilité de la balance est meilleure côté faible. En effet, côté fort, la sensibilité s'écrit :

$$S' = \frac{\ell_{\text{fléau}}}{M' - M_{\min}} = \frac{\ell_M - \ell_0}{M' - M_{\min}} \quad \text{A.N. : } S' = 2,75 \text{ cm kg}^{-1}$$

C'était un résultat prévisible puisque la portée est beaucoup plus grande côté fort que côté faible.