Ondes

Partie 1

Charles Tuchendler

MPSI 4 – Lycée Saint-Louis

Année 2019/2020

Table des matières

chapitre XV

Ondes progressives sinusoïdales

Sommaire

I Rappels sur la notion d'onde progressive

Définition XV.1 – Signal

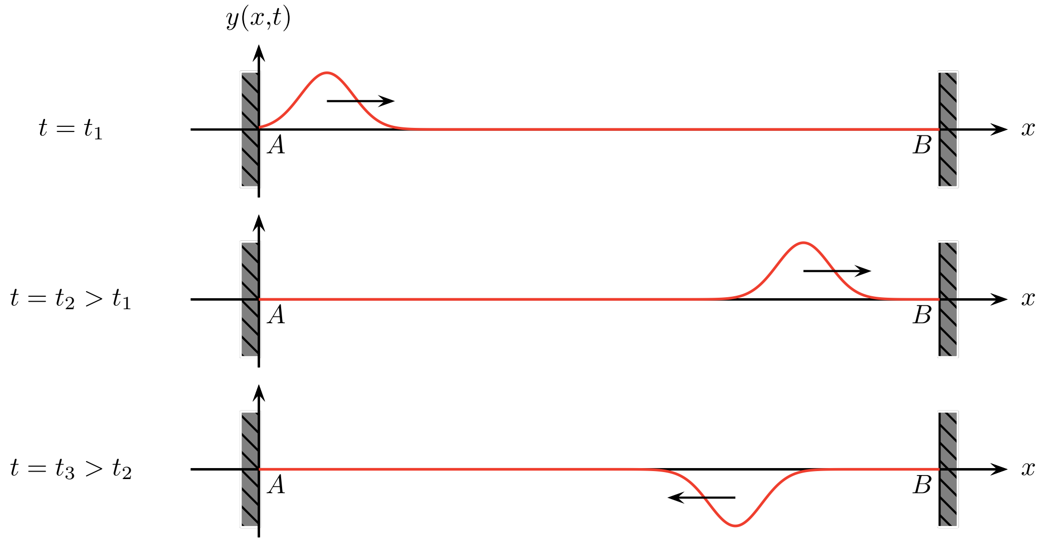
Un signal $s(t)$ est une ***fonction mathématique*** décrivant les variations ***temporelles*** d'une grandeur physique.

Il rend compte de l'état instantané de cette grandeur par l'information qu'il contient. Cette dernière peut s'exprimer au travers des différents paramètres intervenant dans $s(t)$ (amplitude, pulsation, phase...) et peut être de différentes natures (analogique, numérique,...).

Définition XV.2 – Onde

Une onde correspond à ***une grandeur modulée à la fois dans le temps et dans l'espace***. Elle est décrite par une fonction mathématique $s(M, t)$ où M correspond à un point quelconque de l'espace.

I.1 Approche expérimentale



Expérience XV.1 – Déformation d'une corde tendue

- ⋆ On déforme une corde tendue en l'étirant rapidement et légèrement verticalement et vers le haut depuis l'une de ses extrémités (schéma à t_1).
- ⋆ On observe qu'une déformation verticale sur une petite portion de corde se transmet de proche en proche, on dit qu'elle se ***propage***, vers l'autre extrémité (schéma à t_2) ⇒ Animation internet "Ostralo".
  Cette onde est dite ***progressive*** et se dirige vers les x croissants.
  La déformation peut donc être observée à distance du point d'émission sans qu'il y ait de déplacement de matière.
- ⋆ On observe que la déformation, après avoir atteint la seconde extrémité, revient vers son point d'émission mais est dirigée lors du trajet retour vers le bas (schéma à t_3).
- ⋆ Après quelques allers et retours, le signal est atténué et n'est plus observable.

I.2 Expressions et célérité de la grandeur progressive

Définition XV.3 – Onde unidimensionnelle

On appelle onde unidimensionnelle, une onde ne dépendant que d'***une seule variable d'espace***. Dans le cas de l'expérience XV.1, celle-ci s'effectue selon l'axe (Ox) et peut s'écrire :

$$\boxed{s(M,t) = s(x,t)}$$

Définition XV.4 – Onde progressive unidimensionnelle

Une onde progressive unidimensionnelle $s(x,t)$ correspond à la propagation, sans déformation ni atténuation, d'un signal selon la direction (Ox) à une vitesse de propagation appelée ***célérité*** et notée $\boldsymbol{c}$.

Propriété XV.1 – Formes générales de l'expression mathématique

Plusieurs formes mathématiques correspondent à une onde progressive unidimensionnelle :

⋆ si la propagation a lieu dans le ***sens des x croissants*** :

$$\boxed{s(x,t) = F(x - ct)} \quad \text{ou} \quad \boxed{s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

⋆ si la propagation a lieu dans le ***sens des x décroissants*** :

$$\boxed{s(x,t) = G(x + ct)} \quad \text{ou} \quad \boxed{s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)}$$

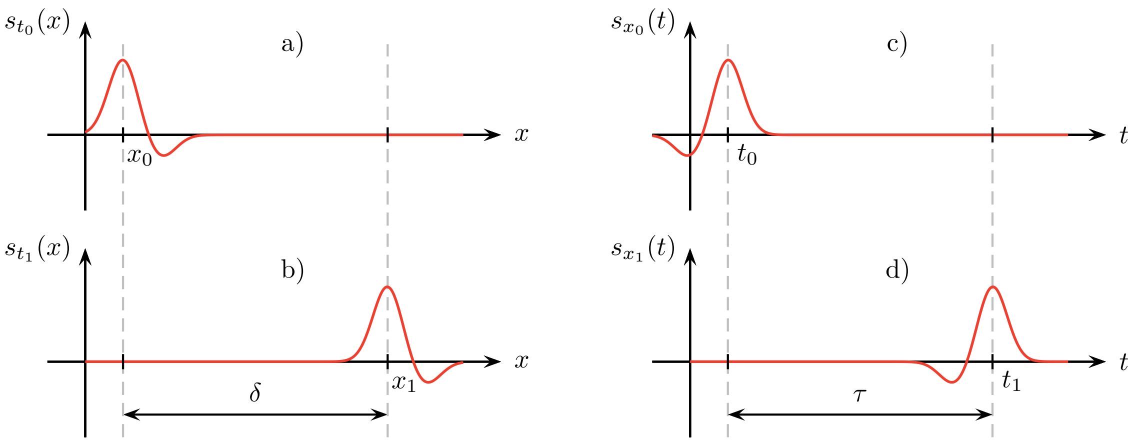


Figure XV.1 – *Points de vue spatial - (a) et (b) - ou temporel - (c) et (d) - de l'évolution de la corde au passage de l'onde*

I.3 Evolution à position fixée ou à instant donné

Méthode XV.1 – Prévoir l'évolution temporelle de la corde en une position donnée

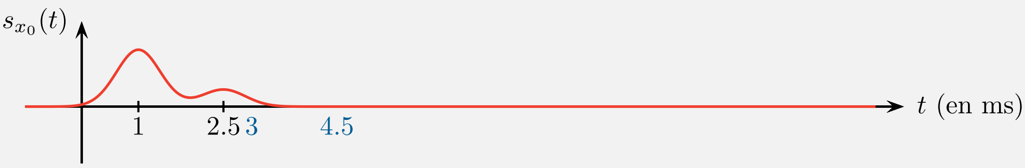
Pour une onde progressive unidimensionnelle de célérité c, ce qui se passe en x_0 à t_0 se reproduit en un point de position x :

- ⋆ avec un retard temporel $\tau = (x - x_0)/c$ si l'onde se propage selon les x croissants ;
- ⋆ avec un retard temporel $\tau = -(x - x_0)/c$ si l'onde se propage dans le sens des x décroissants.

Remarque : le retard temporel est une ***grandeur algébrique*** correspondant à un réel retard si elle est positive et en réalité à une avance si elle est négative.

Exercice XV.1 – Signal de la déformation d'une corde à position donnée

On reprend l'exemple d'une corde subissant une onde de déformation selon l'axe Ox à une célérité de $c = 500$ m.s^{-1} se dirigeant dans le sens des x croissants.
On représente la variation temporelle de l'élongation transverse de la corde au point $x_0 = 0$ m (courbe rouge).
On souhaite représenter la variation temporelle de l'élongation en un point d'abscisse $x_1 = 1$ m (courbe bleue) puis en un point d'abscisse $x_2 = 5$ m (courbe verte).



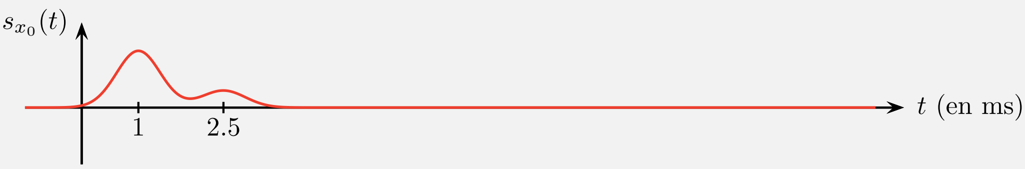
Méthode XV.2 – Prévoir la forme de la corde à un instant donné

Pour une onde progressive unidimensionnelle de célérité c, ce qui se passe en x_0 à t_0 se reproduit à l'instant t :

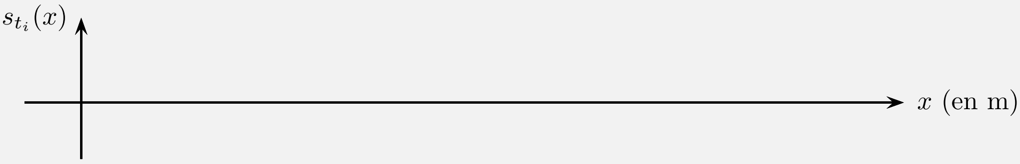
- ⋆ après une marche algébrique $\delta = x - x_0 = +c(t - t_0)$ si l'onde se propage selon les x croissants ;
- ⋆ après une marche algébrique $\delta = x - x_0 = -c(t - t_0)$ si l'onde se propage selon les x décroissants.

Exercice XV.2 – Signal de la déformation d'une corde à un instant donné

On reprend l'exemple d'une corde subissant une onde de déformation selon l'axe Ox à une célérité de $c = 500$ m.s^{-1} se dirigeant dans le sens des x croissants.
On représente la variation temporelle de l'élongation transverse de la corde au point $x_0 = 0$ m (courbe rouge).



Toujours dans les mêmes conditions, on souhaite déterminer la forme de la corde au bout de $t_1 = 2$ ms (courbe bleue), $t_2 = 4$ ms (courbe verte) et $t_3 = 6$ ms (courbe orange).



Après avoir défini la notion d'onde, après avoir précisé les propriétés générales d'une onde progressive, nous allons à présent nous intéresser à un type d'ondes progressives particulier : ***l'onde sinusoïdale***.

II Onde progressive sinusoïdale

II.1 Définitions

Définition XV.5 – Onde sinusoïdale (ou harmonique) unidimensionnelle

On parle d'onde sinusoïdale lorsque le signal mesuré en tout point est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω en tout point de l'espace. Une telle onde prend la forme mathématique suivante :

$$\boxed{s(x,t) = A(x)\cos\left(\omega t + \varphi(x)\right)}$$

où $A(x)$ représente l'amplitude de l'onde au point d'abscisse x et $\varphi(x)$ la phase à $t = 0$ au point d'abscisse x.

Remarque : on notera $A_0 = A(0)$ l'amplitude de l'onde à $t = 0$ au niveau de l'origine O de l'axe Ox. De même on notera $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Définition XV.6 – Onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle

Une onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle se propageant à une célérité c s'écrit :

- ⋆ si elle se propage dans le ***sens des x croissants*** :

$$\boxed{s(x,t) = A_0\cos\left(\omega t - kx + \varphi_0\right)}$$

- ⋆ si elle se propage dans le ***sens des x décroissants*** :

$$\boxed{s(x,t) = A_0\cos\left(\omega t + kx + \varphi_0\right)}$$

avec :

- ⋆ ω **la pulsation temporelle** (en rad.s^{-1}),
- ⋆ k **la pulsation spatiale ou vecteur d'onde** (en rad.m^{-1}),
- ⋆ A_0 **l'amplitude** de l'onde et
- ⋆ φ_0 la **phase initiale à l'origine** en $x = 0$ à $t = 0$.

Remarque : lorsque les modulations spatiales et temporelles de l'onde se font à une seule fréquence, on parle aussi d'***onde monochromatique***.

Définition XV.7 – Vecteur d'onde

Le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ est un vecteur de l'espace qui indique la direction et le sens de propagation de l'onde considérée.

Le vecteur d'onde s'écrit :

- ⋆ si l'onde se propage dans le ***sens des x croissants*** : $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u_x}$
- ⋆ si l'onde se propage dans le ***sens des x décroissants*** : $\overrightarrow{k} = -k\overrightarrow{u_x}$

avec :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c} > 0}$$

II.2 Double périodicité spatio-temporelle

Propriété XV.2 – Double périodicité de l'onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive sinusoïdale possède une double périodicité spatio-temporelle :

* une période temporelle, appelée ***période*** et notée T (en s), définie à partir de la pulsation temporelle ω comme :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

c'est-à-dire comme l'intervalle de temps séparant deux valeurs identiques successives de l'onde en un point donné de sa propagation ;

* une période spatiale, appelée ***longueur d'onde*** et notée λ (en m), définie à partir du vecteur d'onde k comme :

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

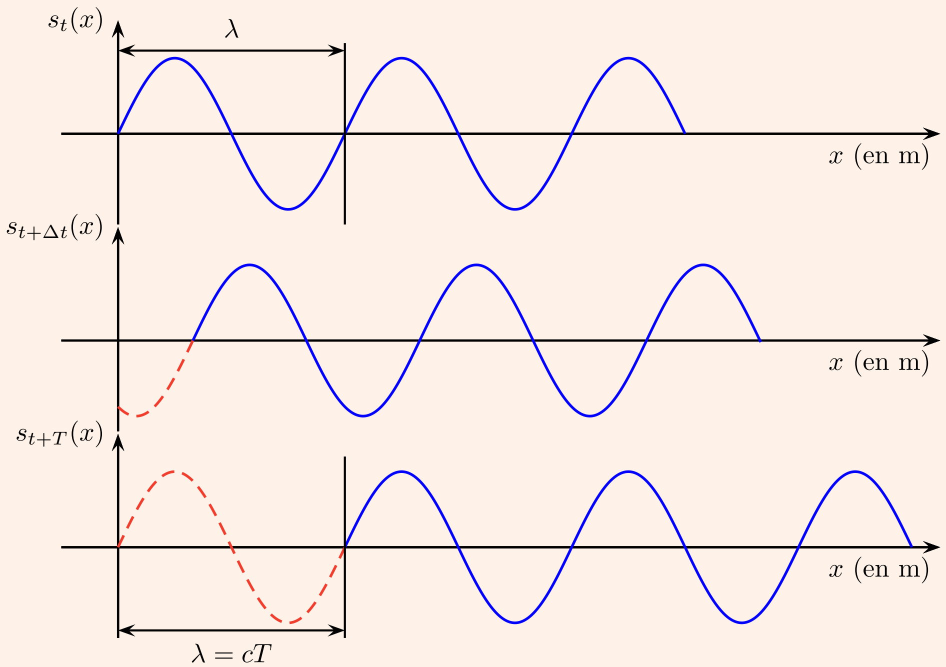
c'est-à-dire comme la distance minimale à un instant donné séparant deux points successifs où la valeur prise par l'onde est la même.

* Tout comme on a l'habitude de définir la fréquence temporelle notée ν, on définit une fréquence spatiale, appelée ***nombre d'onde*** et notée σ :

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}}$$

Remarque : on peut ainsi réécrire la forme mathématique d'une onde progressive sinusoïdale se propageant dans le sens des x croissants de la façon suivante :

$$\boxed{s(x,t) = A_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)}$$



Périodicité spatiale
période λ

Evolution temporelle
l'onde a avancé de $c\Delta t$

Périodicité temporelle
l'onde a avancé de cT

II.3 Relation de dispersion

Au cours de notre étude, nous avons été amené à poser une relation entre les grandeurs spatiales et temporelles.

Définition XV.8 – Relation de dispersion

On appelle ***relations de dispersion***, les équations mathématiques reliant les différentes grandeurs spatiales d'une onde progressive à leurs homologues temporelles.

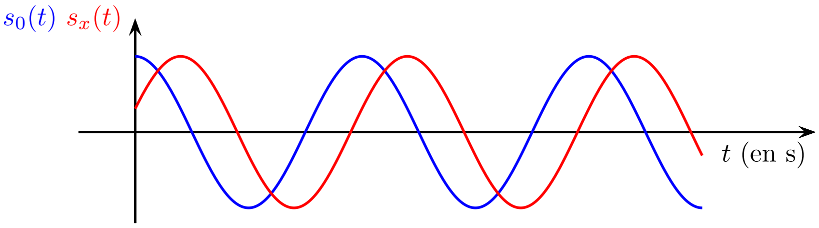
Dans le cas précis d'une onde progressive sinusoïdale de célérité c, cette relation peut s'écrire de plusieurs façons différentes toutes équivalentes :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{\nu}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = cT}$$

Remarque : la dernière écriture indique que la longueur d'onde n'est ni plus ni moins que la distance parcourue par l'onde en une période.

II.4 Déphasage

Comment caractériser mathématiquement le déplacement d'une onde qui s'est propagée sur une distance AB ?



On considère une unique onde sinusoïdale progressive dans le sens des x croissants[1]. Prenons l'origine des temps de sorte que la phase à l'origine soit nulle (c'est-à-dire que la phase initiale à l'origine est nulle).

$s(0,t)$ et $s(x,t)$ ont la ***même allure mais elles sont décalées*** dans le temps.

La première s'annule une première fois pour $\omega t = \dfrac{\pi}{2}$ et la seconde pour $\omega t = \dfrac{\pi}{2} + kx$.

Cette différence est la conséquence de ***l'accumulation d'un déphasage*** $-kx$ de l'onde entre $x = 0$ et x quelconque.

Considérons, dans le cas général, une onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle se propageant entre les points A et B d'abscisses x_A et x_B pour lesquels la déformation s'écrit respectivement, suivant le sens des x croissants $(-)$ ou décroissants $(+)$ de l'onde :

$$s(x_A,t) = s_A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x_A)) \qquad \text{avec} \quad \varphi(x_A) = \mp k x_A + \varphi_0$$

$$s(x_B,t) = s_B(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x_B)) \qquad \text{avec} \quad \varphi(x_B) = \mp k x_B + \varphi_0$$

1. Les résultats qui suivent s'appliqueront aussi à deux signaux d'amplitude différentes et de sens de propagation différents issues de deux ondes distinctes à condition que celles-ci soient synchrones.

Définition XV.9 – Déphasage

Lors de la propagation d'une onde entre des deux points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B, on définit le ***déphasage*** de l'onde en B par rapport à celle en A par :

$$\boxed{\varphi_{B/A} = \varphi(x_B) - \varphi(x_A)}$$

et celui-ci s'écrit :

$$\boxed{\varphi_{B/A} = \mp k\,(x_B - x_A) = \mp\frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_A)}$$

Remarque : $\varphi_{B/A}$ est ***toujours défini*** dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Si $x_A < x_B$ et que la propagation a lieu dans le sens des x positifs, la déformation arrive en B après être passée par A : elle passe donc en B avec un ***retard temporel positif***. Ceci se traduit mathématiquement par un ***déphasage négatif***[2] : $\varphi(x_B) - \varphi(x_A) < 0$.

Si $x_A < x_B$ et que la propagation a lieu dans le sens des x négatifs, la déformation arrive en A après être passée par B : elle passe donc en A avec un ***retard temporel positif***. Ceci se traduit aussi mathématiquement par un ***déphasage négatif***[3] : $\varphi(x_A) - \varphi(x_B) < 0$.

Propriété XV.3 – Lien entre déphasage et retard temporel

Le passage réellement en retard d'une onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle en un point B d'abscisse x_B par rapport à un point A d'abscisse x_A se traduit par un déphasage $\varphi_{B/A}$ négatif.
En pratique, le lien mathématique entre déphasage et retard se traduit par :

$$\boxed{\varphi_{B/A} = -\frac{2\pi}{T}\,\tau_{B/A}}$$

expression dans laquelle on vérifie bien qu'un retard temporel réel correspond à une avance réelle de phase. On rappelle que ces deux grandeurs sont algébriques.

Remarque : usuellement, les signaux que nous aurons à analyser seront des ***chronogrammes*** puisque nous enregistrerons, à l'aide d'un oscilloscope ou d'un ordinateur muni d'une carte d'acquisition, une tension image du signal temporel étudié (cf TP n°2). Il est donc souvent préférable d'exprimer le déphasage $\varphi_{B/A}$ à partir d'un décalage temporel et non spatial.

Démonstration XV.1 – Lien entre déphasage et retard temporel

Le passage d'un expression à l'autre s'obtient facilement grâce à la définition du retard temporel $\tau_{B/A}$ donnée précédemment.

Compte tenu de tout ce qui précède, on peut démontrer l'équivalence suivante.

2. On obtiendrait bien évidemment un déphasage positif dans le cas d'une arrivée en avance du signal en B ($x_A > x_B$).
3. On obtiendrait bien évidemment un déphasage positif dans le cas d'une arrivée en avance du signal en A ($x_A > x_B$).

Propriété XV.4 – Correspondance entre déphasage, période temporelle et période spatiale

Un déphasage de 2π en valeur absolue équivaut à un écartement de λ entre les positions des deux récepteurs et à un décalage temporel de T sur leurs chronogrammes [a].

[a] En pratique, en considérant l'expérience du paragraphe II.4, quand le chronogramme du récepteur 2 s'est décalé de T, c'est qu'on a déplacé le récepteur 2 d'une distance λ sur le banc d'optique. On peut utiliser cette propriété pour évaluer λ.

En effet,

Objectif XV.1 – Perspectives - ondes multiples

Ce chapitre nous a permis de caractériser mathématiquement une unique onde notamment quand celle-ci se propage. Dans le cas d'une onde sinusoïdale, nous sommes maintenant capable de caractériser cette onde grâce à sa pulsation, son amplitude et son déphasage par rapport à son état en un point donné de l'espace. ***Il est cependant rare que nous n'ayons affaire qu'à un seul signal et donc qu'à une seule onde*** à la fois dans les problèmes que nous rencontrerons. Il nous arrivera en effet très régulièrement, notamment en optique, d'étudier des systèmes mettant en jeu plusieurs ondes simultanément (interféromètre de Michelson, de Mach-Zender ou de Perot-Fabry…).

Il est donc important de s'intéresser à l'état d'un système siège de plusieurs phénomènes ondulatoires simultanés.