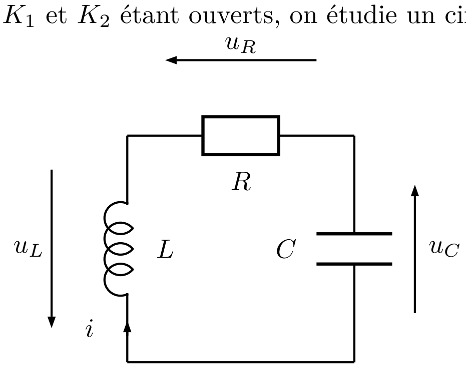
Correction DM n°3: Circuits du deuxième ordre

I Étude d'un régime transitoire

1. Aux temps $t > 0$, les interrupteurs K_1 et K_2 étant ouverts, on étudie un circuit RLC série en régime libre :

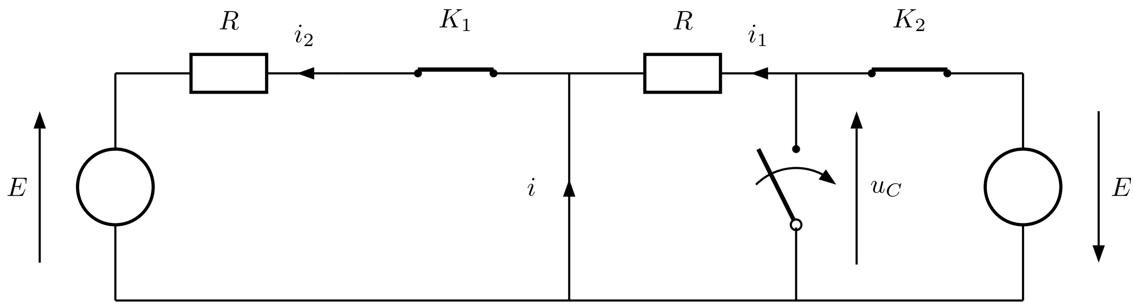


Loi des mailles : $u_L + u_R + u_C = 0$. Relations courant-tension : $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, $u_R = Ri$ et $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. En dérivant la loi des mailles, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{LC} = 0$$

Par identification à l'équation canonique, on en déduit $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $Q = \omega_0 \dfrac{L}{R}$ soit $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

2. (i) Au cours du régime permanent correspondant aux temps $t < 0$, on peut assimiler la bobine à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert, d'où le circuit équivalent :



Loi des noeuds : $i = i_2 - i_1$. Lois des mailles : $E + Ri_2 = 0$, $E + Ri_1 = 0$ et $u_C = -E$. En particulier, juste avant fermeture de l'interrupteur, on a ainsi $i(0^-) = 0$ et $u_C(0^-) = -E$.

(ii) Par continuité de l'intensité du courant traversant une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur, on en déduit : $\boxed{i(0^+) = 0}$ et $u_C(0^+) = -E$.

(iii) Aux temps $t > 0$, on déduit de la question précédente la relation $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = 0$. En particulier, juste après fermeture des interrupteurs : $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) + Ri(0^+) + u_C(0^+) = 0$ d'où $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{L}}$.

3. (a) La présence d'oscillations est caractéristique d'un $\boxed{\text{régime pseudo-périodique}}$ tel que $\boxed{Q > \dfrac{1}{2}}$.

(b) On cherche une solution sous la forme $i(t) = \exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$ avec A, B des constantes à déterminer à partir des conditions initiales et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$ la pseudo-pulsation. Ainsi $i(0^+) = A =$

0. En outre, $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) = B\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\left(\Omega\cos(\Omega t) - \dfrac{\omega_0}{2Q}\sin(\Omega t)\right)$ d'où $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{L} = B\Omega$, soit $B = \dfrac{E}{L\Omega}$.
Finalement : $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{L\Omega}\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\sin(\Omega t)}$.

(c) La trajectoire de phase doit être orientée dans le $\boxed{\text{sens des aiguilles d'une montre}}$ pour avoir i croissant quand $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ positif.

(d) Les fonctions $\cos(\Omega t)$ et $\sin(\Omega t)$ sont $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ périodiques. De A à B, on passe de l'instant $t_\mathrm{A} = 0$ à l'instant $t_\mathrm{B} = t_\mathrm{A} + T = T$. En utilisant $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{E}{L\Omega}\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\left(\Omega\cos(\Omega t) - \dfrac{\omega_0}{2Q}\sin(\Omega t)\right)$, on en déduit $\alpha/\beta = \exp\left(\dfrac{\omega_0 T}{2Q}\right)$. Comme $\dfrac{\omega_0 T}{2Q} = \dfrac{\omega_0}{2Q}\dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{\pi}{Q\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \dfrac{1}{4}}}$, on trouve $\boxed{Q = \dfrac{\sqrt{4\pi^2 + (\ln(\alpha/\beta))^2}}{2\ln(\alpha/\beta)}}$.
Par lecture graphique, $\alpha/\beta = 4/0,8$ d'où $\boxed{Q = 2}$: cette valeur correspond bien à l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations d'amplitude non négligeable sur le chronogramme.

(e) Le chronogramme présente une pseudo-période $T = 0,8$ ms. En utilisant l'expression de la pseudo-pulstation $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$, on obtient $\boxed{\omega_0 = 8\times 10^3\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$. De plus, $C = \dfrac{1}{L\omega_0^2}$ d'où $\boxed{C = 1,5\times 10^{-7}\ \mathrm{F}}$. En utilisant la valeur $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = 40\ \mathrm{A\cdot s^{-1}}$ de la trajectoire de phase, on peut calculer $E = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+)$, soit $\boxed{E = 4\ \mathrm{V}}$. Enfin, $R = \dfrac{1}{Q}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ d'où $\boxed{R = 4\times 10^2\ \Omega}$.