Correction - Résonance en charge : calcul de la bande-passante

1 Bande passante d'un filtre passe bas d'ordre 2

Pour un tel filtre, le gain s'écrit :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

On cherche à établir la bande passante à -3 dB de ce filtre.

❑ Résonance ou non

Nous avons vu en cours que ce filtre présentait un phénomène de résonance à $x \neq 0$ pour $Q \geq Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous allons donc distinguer deux situations.

❑ $Q < Q_0$

Le maximum du gain est obtenu pour $x = 0$ et vaut 1. La bande passante en x correspond donc à la plage de fréquence pour laquelle $G(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il s'agit d'un intervalle de la forme $x \in [0, x_+]$ et nous devons donc déterminer l'expression de x_+. x_+ vérifie l'équation : $(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = 2$ soit :

$$P(X) = X^2 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) X - 1 = 0 \quad \text{avec} \quad X = x^2$$

Le discriminant s'écrit :

$$\Delta = \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 + 4 > 0$$

On a donc :

$$X_\pm = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 + 4}\right]$$

Seule la racine X_+ est positive et conduit à :

$$x_+ = \sqrt{X_+} = \sqrt{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 + 4}\right]}$$

❑ $Q > Q_0$

Dans cette situation, il y a résonance pour $x = x_{\text{rés}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$. On a cette fois :

$$G_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$$

On cherche donc les fréquences pour lesquelles :

$$G(x) \geq \frac{Q}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$$

Les fréquences à la limite de la bande-passante doivent donc vérifier l'équation :

$$P(X) = X^2 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) X + \left(1 - \frac{2}{Q^2} + \frac{1}{2Q^4}\right) = 0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = -\frac{1}{Q^4} + \frac{6}{Q^2}$$

Ce discriminant est positif si $Q \geq \dfrac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0,4$. Or dans la situation étudiée, $Q \geq \sqrt{2} \simeq 0,7$. La condition est donc vérifiée et le discriminant est donc bien positif. On a donc :

$$\begin{aligned} X_{\pm} &= \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) \pm \sqrt{-\frac{1}{Q^4} + \frac{6}{Q^2}}\right] \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)}_{A \geq 0}\left[1 \pm \underbrace{\sqrt{\frac{-\dfrac{1}{Q^4} + \dfrac{6}{Q^2}}{\left(\dfrac{1}{Q^2} - 2\right)^2}}}_{B \leq 1 \text{ ou } B \geq 1}\right] \end{aligned}$$

Combien y a-t-il de solutions positives ? Si $B \geq 1$, il n'y aura qu'une seule racine positive x_+ au final. Si $B \leq 1$, il y aura deux racines positives x_+ et x_-.

$$
\begin{aligned}
B \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{-\dfrac{1}{Q^4}+\dfrac{6}{Q^2}}{\left(\dfrac{1}{Q^2}-2\right)^2} \geq 1 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{Q^4}+\frac{6}{Q^2} \geq \frac{1}{Q^4}-\frac{2}{Q^2}+4 \\
&\Leftrightarrow -\frac{2}{Q^4}+\frac{8}{Q^2} \geq 4 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{Q^2}\underbrace{\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}_{>0} \geq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{Q^2}{1-\dfrac{1}{4Q^2}} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} \leq \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow G_{\max} \leq \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

On retrouve là une condition évidente. Pour qu'il y ait deux racines positives, il faut que le gain en limite de bande-passante soit supérieur au gain à fréquence nulle qui vaut 1 et donc que le gain maximal soit supérieur ou égal à $\sqrt{2}$. On veut connaître la valeur de Q correspondante :

$$
Q^2 = 2 - \frac{1}{2Q^2} \quad \text{ou encore} \quad q^2 - 2q + 1 = 0
$$

en posant $q = Q^2$. Ceci donne $\Delta = 4 - 2 = 2$ et donc :

$$
Q_1 = \sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}
$$

On distingue par conséquent deux sous-cas :

- ⋆ $Q \leq Q_1$ et il n'y a qu'une seule racine donc la bande-passante correspond à l'intervalle $[0; x_+]$.
- ⋆ $Q \geq Q_1$ et il y a deux racines donc la bande-passante correspond à l'intervalle $[x_-; x_+]$.

avec :

$$
x_+ = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)+\sqrt{-\frac{1}{Q^4}+\frac{6}{Q^2}}\right]} \quad \text{et} \quad x_- = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)-\sqrt{-\frac{1}{Q^4}+\frac{6}{Q^2}}\right]}
$$