

DM n°5: Mécanique

A faire pour le jeudi 03 décembre 2020

I Trajectoire en coordonnées cartésiennes et polaires (*D'après ICNA 2018*)

Ce problème est du type questionnaire à choix multiples (QCM). Choisir, **en le(s) démontrant**, le(s) résultat(s) exact(s). Les résultats devant impérativement être démontrés, il n'y aura pas de points négatifs en cas de mauvaise réponse. Si aucune des propositions ne convient, indiquer « réponse (e) ».

Dans le plan (xOy) d'un repère $\mathcal{R}(\mathbf{O}, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le mouvement d'un point M est décrit, à partir de l'instant $t = 0$, par la variation de ses coordonnées cartésiennes en fonction du temps :

$$\begin{cases} x = b e^{-kt} \cos(kt) \\ y = b e^{-kt} \sin(kt) \end{cases} \quad \text{où } b \text{ et } k \text{ sont deux constantes positives}$$

1. Les coordonnées polaires r et θ vérifient :

- (A) $r = b e^{-kt} (\cos(kt) + \sin(kt))$
- (B) $r = b e^{-kt}$
- (C) $\theta = kt$
- (D) $\theta = \frac{y}{x}$

2. L'équation polaire de la trajectoire de M est :

- (A) $r = b e^{\theta}$
- (B) $r = b e^{-\theta}$
- (C) $r = 2b e^{\theta}$
- (D) $r = 2b e^{-\theta}$

3. La trajectoire parcourue par M dans le plan (xOy) est :

- (A) une parabole
- (B) une hyperbole
- (C) une ellipse
- (D) une spirale dont les coordonnées cartésiennes du centre sont $(b, 0, 0)$

4. Les composantes polaires v_r et v_{θ} du vecteur vitesse $\vec{v}(\mathbf{M}, \mathcal{R})$ de M dans \mathcal{R} s'écrivent :

- (A) $v_r = 0$
- (B) $v_r = -kr$
- (C) $v_{\theta} = 0$
- (D) $v_{\theta} = kr$

5. Les composantes polaires a_r et a_{θ} du vecteur accélération $\vec{a}(\mathbf{M}, \mathcal{R})$ de M dans \mathcal{R} s'écrivent :

- (A) $a_r = 0$
- (B) $a_r = 2k^2 r$
- (C) $a_{\theta} = 0$
- (D) $a_{\theta} = -2k^2 r$

6. L'angle α entre le vecteur position repérant M et le vecteur $\vec{v}(\mathbf{M}, \mathcal{R})$, orienté de \vec{OM} vers $\vec{v}(\mathbf{M}, \mathcal{R})$, vérifie :

- (A) $\alpha = \frac{\pi}{4}$

(B) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

(C) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

(D) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$

7. L'angle β entre le vecteur position repérant M et le vecteur $\vec{a}(M, \mathcal{R})$, orienté de \overrightarrow{OM} vers $\vec{a}(M, \mathcal{R})$, vérifie :

(A) $\beta = \frac{\pi}{4}$

(B) $\beta = \frac{3\pi}{4}$

(C) $\beta = \frac{5\pi}{4}$

(D) $\beta = \frac{7\pi}{4}$

8. L'angle γ entre le vecteur $\vec{v}(M, \mathcal{R})$ et le vecteur $\vec{a}(M, \mathcal{R})$, orienté de $\vec{v}(M, \mathcal{R})$ vers $\vec{a}(M, \mathcal{R})$, vérifie :

(A) $\gamma = \frac{\pi}{4}$

(B) $\gamma = \frac{3\pi}{4}$

(C) $\gamma = \frac{5\pi}{4}$

(D) $\gamma = \frac{7\pi}{4}$

II Trajectoire des plombs d'une cartouche (D'après CCP MP 2017)

Un fusil de chasse ou de ball-trap permet d'envoyer à distance des projectiles au moyen de gaz produits par la combustion rapide et confinée d'un composé chimique. La déflagration va éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse qui, en moyenne, vaut $380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

DOCUMENT 1 :

Les données suivantes sont fournies par un fabricant de cartouches de fusil de chasse (contenant de la grenaille de plomb ou de fer doux, dont les projectiles sont appelés « plombs » quelle que soit leur nature).

« La vitesse de vol des billes de plomb dépend en premier lieu de leur taille. Avec une même vitesse de départ on obtient des différences considérables puisque, en raison de leur masse moins importante, les plombs de petit diamètre perdent plus de vitesse pour une même distance parcourue, face à la résistance de l'air à laquelle ils sont confrontés. La distance de sécurité de la grenaille de plomb, c'est-à-dire la distance au-delà de laquelle il n'y a plus danger pour les tiers, peut être déterminée à partir de la règle grossière suivante : diamètre des plombs $\times 100 =$ zone dangereuse en m. Exemple : pour des plombs de 3 mm : $3 \times 100 = 300 \text{ m}$.

Voilà la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable, à ne pas confondre avec la portée utile, qui est beaucoup plus faible. Dans le cas de la grenaille de fer doux, cette distance de sécurité est nettement plus faible en raison de la moindre densité des billes. Par contre, en cas d'agglutination, les billes agglutinées constituent des projectiles d'un poids supérieur qui peuvent être dangereux à des distances beaucoup plus grandes. Selon la taille des grains, la portée utile avec de la grenaille de plomb est de 35 à 40 m tout au plus. Au-delà, la dispersion est trop grande de sorte qu'il n'y a plus de couverture suffisante. La puissance de pénétration et la létalité des plombs diminuent avec l'augmentation de la distance de tir et ce, d'autant plus rapidement que les plombs sont plus petits. »

DONNÉES ET HYPOTHÈSES :

- masse volumique du plomb solide : $\rho = 11350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- masse volumique de l'air : $\rho_a = 1,23 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- l'accélération de la pesanteur est supposée uniforme et égale à $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- le référentiel terrestre est supposé galiléen
- on néglige la poussée d'Archimède de l'air sur les sphères de plomb

On propose dans ce problème de vérifier les affirmations du document 1.

II.1 Équation du mouvement

Le projectile est a priori soumis à deux forces : son poids et la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho_a S C v \vec{v}$$

où v est la norme du vecteur vitesse \vec{v} du projectile, ρ_a est la masse volumique de l'air, $S = \pi R^2$ est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et C est un coefficient sans dimension appelé « coefficient de traînée ». Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et $420 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles, on prendra $C = 0,44$.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par le vecteur vitesse \vec{v} du centre de masse du plomb de masse m .

On confondra, par la suite, le plomb avec une masse ponctuelle à laquelle on appliquera la force de traînée aérodynamique.

II.2 Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère dans cette partie le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.

2. Montrer que l'hypothèse précédente correspondrait à une vitesse initiale v_0 obéissant à l'inégalité :

$$v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C}}$$

Par la suite, on notera $v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C}}$.

3. Établir les équations du mouvement associées aux coordonnées cartésiennes x et z (figure 1).

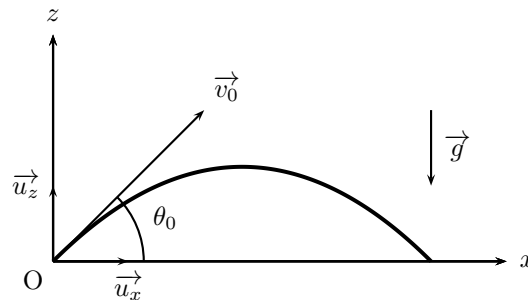


FIGURE 1 –

On note θ l'angle que fait le vecteur vitesse \vec{v} avec le plan horizontal et θ_0 sa valeur à l'instant initial. Dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial, le vecteur vitesse initial s'écrit $\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta_0 \vec{u}_x + v_0 \sin \theta_0 \vec{u}_z$.

4. Établir les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$.
 5. Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?
 6. Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projective dans le plan horizontal de départ ($z = 0$) vaut :

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut :

$$z_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

7. Quel est la valeur de l'angle θ_0 pour laquelle la portée du tir est maximale ?
 8. Application numérique : La taille des plombs est identifiée par un numéro allant de 1 à 12 qui correspond à une régression arithmétique des diamètres de 0,25 mm par numéro. Une cartouche de n°8 possède des plombs plus petits qu'une de n°4. Le tableau 1 donne les rayons de quelques types de plombs et certains résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, un angle initial $\theta_0 = 45^\circ$ et $C = 0,44$.

Reporter le tableau 1 sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

9. Comparer la portée maximale, obtenue pour un angle $\theta_0 = 45^\circ$, à la portée donnée dans le document 1 (page 3) et conclure. Quel(s) autre(s) facteur(s) montre(nt) qu'il faut abandonner le modèle gravitaire ?

II.3 Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

L'étude précédente a montré que, pour les plombs de chasse, v_0 est très supérieure à v_∞ . Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases : une première phase à mouvement rectiligne, une deuxième phase à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVI^e siècle, portrait figure 2), qui a décrit les trajectoires (extrait figure 2) d'un boulet de canon.

n° du plomb	1	5	10
rayon R (mm)	2,0	1,5	0,875
masse m (g)	0,38		0,032
portée x_M (km)			
hauteur z_M (km)			
vitesse v_∞ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	33		22

Tableau 1 –

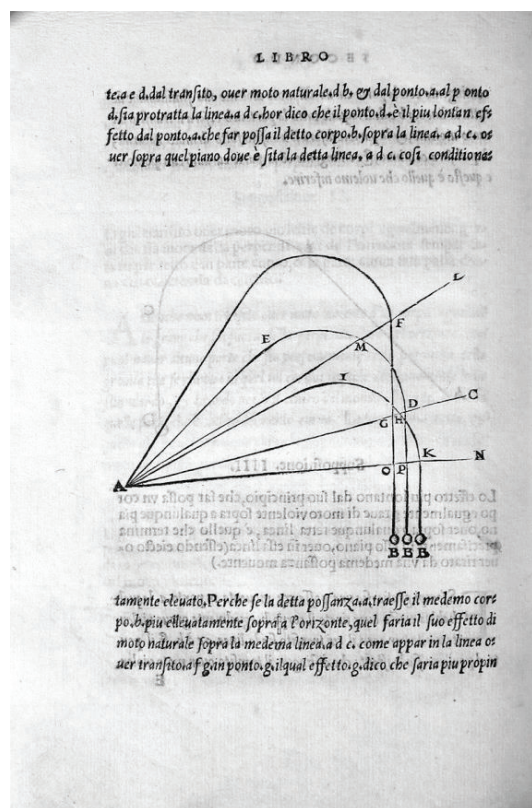


FIGURE 2 –

Phase initiale : mouvement rectiligne ascendant

Soit Ox' la direction de la droite trajectoire dans cette phase initiale. On note x' l'abscisse du point M sur cette droite qui fait un angle θ_0 avec Ox et \vec{v} sa vitesse (figure 3).

10. Montrer que le poids d'un plomb est alors négligeable devant la force de traînée.
11. Montrer que, dans l'hypothèse de la question précédente, l'équation du mouvement dans la première phase se met alors sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dx'} = -\frac{\vec{v}}{D}$$

où D est une constante qu'on exprimera en fonction de g et v_∞ .

12. Quelle est la dimension de D ?
13. Établir l'expression de \vec{v} en fonction de x' . Que représente le paramètre D ?
14. On note :
 - d la distance que doit parcourir le plomb pour que sa vitesse soit égale à $10 \times v_\infty$,
 - v_u la vitesse atteinte quand le plomb a parcouru 40 m et E_c l'énergie cinétique correspondante.

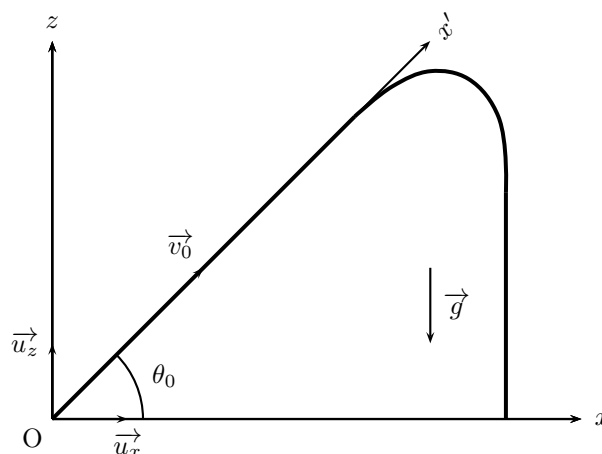


FIGURE 3 –

n° du plomb	1	5	10
D (m)	112		49
v_0/v_∞	11,5	13	17
d (m)	15,4		27
v_u ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	266		168
E_c (J)	13,4		0,45

Tableau 2 –

Le tableau 2 donne pour trois numéros de plomb des résultats numériques obtenus en utilisant les formules ci-dessus pour une vitesse initiale $v_0 = 380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Reporter le tableau 2 sur votre copie en le complétant par des valeurs à deux chiffres significatifs.

15. Comment définiriez-vous la portée utile d'un tir ?

On lit dans les journaux de chasse que le caractère mortel du tir vient en première approximation du fait que les plombs qui pénètrent dans le gibier communiquent à l'animal leur énergie cinétique créant ainsi une onde de choc fatale.

16. En supposant qu'il suffit de 2 plombs numéro 1 pour avoir un canard à son tableau de chasse, de combien de plombs 5 et 10 suffirait-il ? En déduire l'ordre de grandeur de la portée utile à l'aide de l'évaluation du paramètre D précédemment défini. Comparer cet ordre de grandeur à celui fourni dans le document 1 (page 3).

17. Pourquoi faut-il prendre des billes plus grosses en fer doux, sachant qu'il s'agit d'un acier de masse volumique $\rho' = 7600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$? Quel est le danger lié à l'agglutination de la grenaille ?

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

On note que cette phase est quasiment verticale.

18. À quoi correspond-elle ?

19. Montrer que la vitesse limite atteinte pendant cette dernière phase vaut :

$$\vec{v}_\infty = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho_a \pi R^2 C}} \vec{u}_z$$

Expliquer le terme de « mur aérodynamique » utilisé pour qualifier cette dernière phase.

Deuxième phase : la phase intermédiaire

Dans cette phase, la vitesse a diminué.

20. Pourquoi qualifie-t-on cette phase de « phase gravitaire » ?

On peut établir par un calcul formel, à partir de l'équation du mouvement, l'expression approchée de la portée maximale du projectile pour ce type de trajectoire :

$$x_M \simeq \frac{D \cos(\theta_0)}{2} \ln \left(1 + 4 \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \sin(\theta_0) \right)$$

- 21.** Évaluer numériquement les portées maximales des numéros 1, 5 et 10 de plombs, pour $\theta_0 = 16^\circ$. Comparer aux valeurs données dans le document 1 (page 3).

Le même calcul donne également l'expression approchée de l'angle initial permettant d'optimiser la portée maximale x_M :

$$\theta_{\max} \simeq \arctan \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{2} \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2}{\left(1 + 2\sqrt{2} \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \right) \ln \left(1 + 2\sqrt{2} \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2 \right)}} \right)$$

- 22.** La figure 4 donne la courbe θ_{\max} (en degrés) fonction de $\log \left(\frac{v_0}{v_\infty} \right)^2$. Identifier la valeur de θ_{\max} pour les trois numéros de plomb considérés.

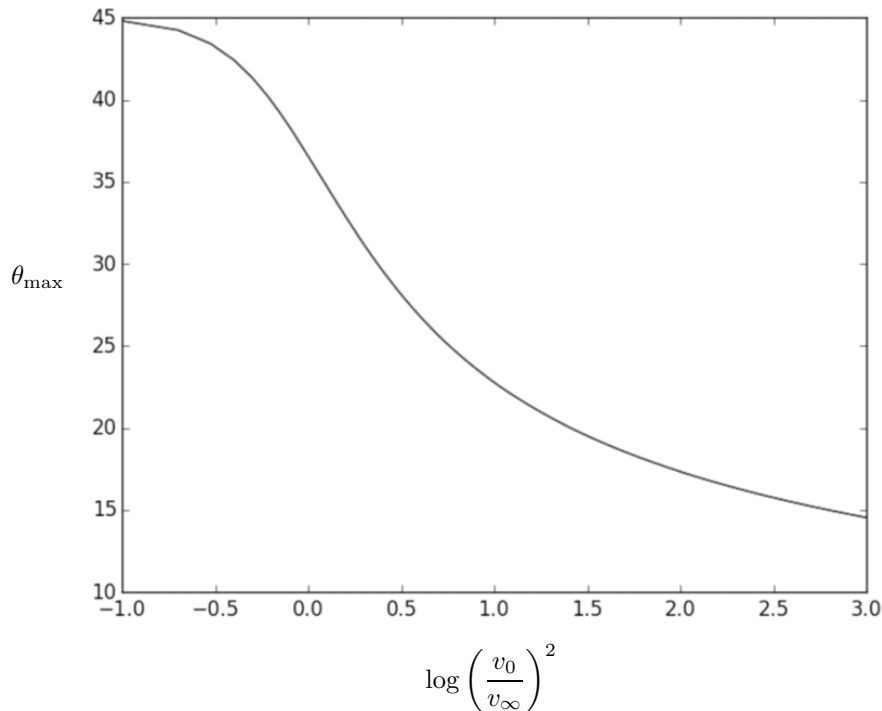


FIGURE 4 –

Pour calculer plus précisément la portée utile du tir de grenaille de plomb, on intègre numériquement l'équation du mouvement. La figure 5 donne les trajectoires des plombs n° 1, 5 et 10 de vitesse initiale $380 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, pour l'angle θ_0 optimisant la portée maximale. Les valeurs des coordonnées et des rayons sont en mètres.

- 23.** Évaluer les portées maximales pour chaque calibre et comparer aux données du document 1 (page 3).

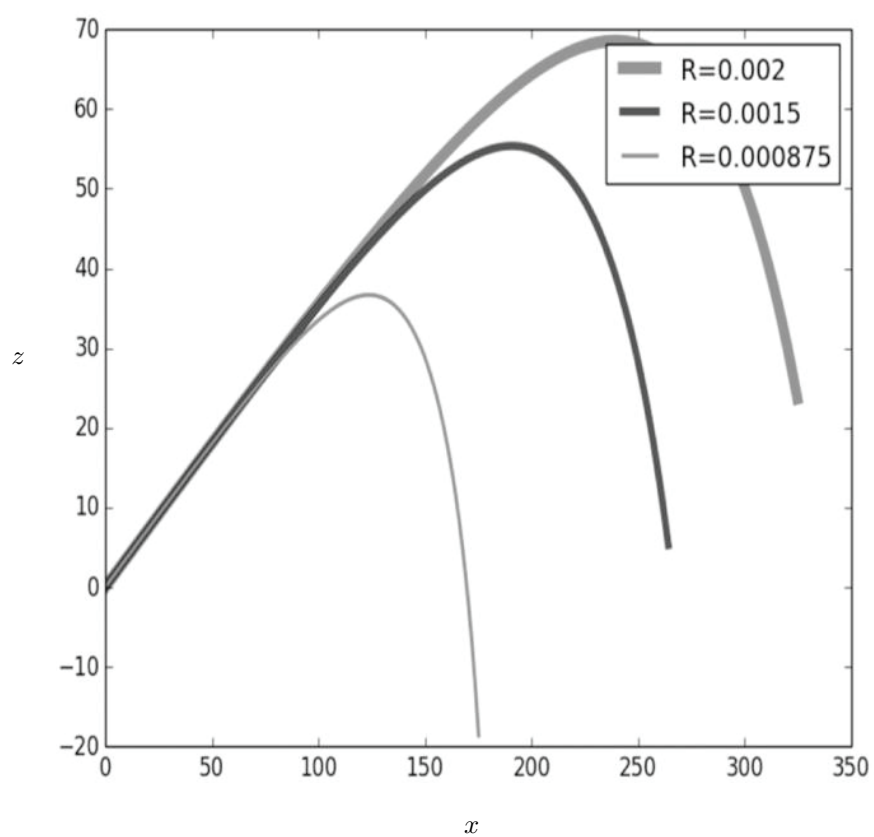


FIGURE 5 –