
MÉCANIQUE

PARTIE 2

CHARLES TUCHENDLER



MPSI 4 – LYCÉE SAINT-LOUIS

ANNÉE 2019/2020

Table des matières

CHAPITRE XIII	LOI DU MOMENT CINÉTIQUE ET MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRALE CONSERVATIF	2
Introduction		4
I Champ de force centrale		5
I.1 Notion de force centrale		5
I.2 Forces centrales newtoniennes		6
II Conservation du moment cinétique		8
II.1 Loi du moment cinétique		8
II.1.a Moment d'une force		8
II.1.b Moment cinétique		11
II.1.c Enoncé de la loi du moment cinétique		12
II.2 Application au pendule simple		13
II.3 Application à un mouvement à force centrale		14
II.3.a Conservation du moment cinétique		14
II.3.b Planéité du mouvement		14
II.3.c Constante des aires et loi des aires		15
III Conservation de l'énergie mécanique		17
III.1 Energie mécanique dans un système à force centrale		17
III.2 Energie potentielle effective		18
III.3 Etude dans le cas des forces newtoniennes		18
III.3.a Force newtonienne attractive ($k > 0$)		19
III.3.b Force newtonienne répulsive ($k < 0$)		21
IV Mouvements dans un champ gravitationnel		22
IV.1 Lois de Kepler		22
IV.2 Etude des trajectoires circulaires		23
IV.2.a Relation rayon-vitesse		23
IV.2.b Période du mouvement		24
IV.2.c Relations entre énergies potentielle, cinétique et mécanique		24
IV.3 Applications		24
IV.3.a Altitude d'un satellite géostationnaire		24
IV.3.b Vitesses cosmiques		25
IV.3.c Les comètes		27
IV.4 Conclusion		27
V Annexe - Etude générale de mouvements dans un champ de force newtonien		28
V.1 Equation polaire de la trajectoire		28
V.2 Expression de l'énergie en fonction des paramètres de la conique		29
V.3 Nature du mouvement		29
V.3.a Allure des trajectoires		29
V.3.b Influence des conditions initiales		30
V.4 Démonstration de la troisième loi de Kepler		30

CHAPITRE XIII

LOI DU MOMENT CINÉTIQUE ET MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE FORCE CENTRALE CONSERVATIF

Sommaire

Introduction	4
I Champ de force centrale	5
I.1 Notion de force centrale	5
I.2 Forces centrales newtoniennes	6
II Conservation du moment cinétique	8
II.1 Loi du moment cinétique	8
II.1.a Moment d'une force	8
II.1.b Moment cinétique	11
II.1.c Énoncé de la loi du moment cinétique	12
II.2 Application au pendule simple	13
II.3 Application à un mouvement à force centrale	14
II.3.a Conservation du moment cinétique	14
II.3.b Planéité du mouvement	14
II.3.c Constante des aires et loi des aires	15
III Conservation de l'énergie mécanique	17
III.1 Énergie mécanique dans un système à force centrale	17
III.2 Énergie potentielle effective	18
III.3 Étude dans le cas des forces newtoniennes	18
III.3.a Force newtonienne attractive ($k > 0$)	19
III.3.b Force newtonienne répulsive ($k < 0$)	21
IV Mouvements dans un champ gravitationnel	22
IV.1 Lois de Kepler	22
IV.2 Étude des trajectoires circulaires	23
IV.2.a Relation rayon-vitesse	23
IV.2.b Période du mouvement	24
IV.2.c Relations entre énergies potentielle, cinétique et mécanique	24
IV.3 Applications	24
IV.3.a Altitude d'un satellite géostationnaire	24
IV.3.b Vitesses cosmiques	25
IV.3.c Les comètes	27
IV.4 Conclusion	27
V Annexe - Étude générale de mouvements dans un champ de force newtonien	28
V.1 Équation polaire de la trajectoire	28

V.2 Expression de l'énergie en fonction des paramètres de la conique	29
V.3 Nature du mouvement	29
V.3.a Allure des trajectoires	29
V.3.b Influence des conditions initiales	30
V.4 Démonstration de la troisième loi de Kepler	30

Introduction

Nous avons déjà introduit précédemment les lois de Newton ainsi que les théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique sans restriction quant à leur application.

Objectif XIII.1 – Notion de forces centrales et de moment cinétique

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser en particulier à l'action d'un type de force : les **forces centrales**.

Ces forces regroupent notamment les forces de gravitation et électrostatique, dites **forces newtoniennes**. L'étude détaillée de leur action permet donc non seulement de comprendre le mouvement des astres à l'échelle astronomique, mais aussi celui des particules chargées à l'échelle microscopique.

Cette étude sera aussi l'occasion d'introduire une nouvelle grandeur utile pour le physicien : le **moment cinétique**. La loi d'évolution temporelle de cette grandeur fournira un outil particulièrement utile lors de l'étude des mouvements à forces centrales et s'ajoutera aux différentes lois de conservation particulièrement importantes à retenir.

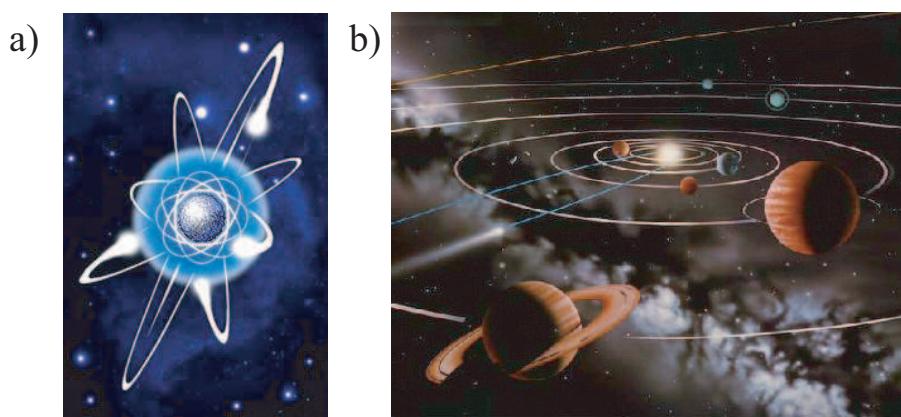


FIGURE XIII.1 – Les mouvements des particules chargées au niveau microscopique (a) n'est pas sans rappeler le mouvement des planètes à l'échelle astronomique (b).

Méthode XIII.1 – Utilisation de lois de conservation en physiques

Ce chapitre nous permettra de mettre en avant le rôle particulier des **lois de conservation** dans l'étude d'un mouvement.

De façon générale, c'est sur ces lois que devra le plus possible s'appuyer une étude en mécanique. Même s'il est parfois indispensable de mener complètement l'étude dynamique à partir de la loi de la quantité de mouvement, nous verrons que **les lois de conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique sont très souvent à privilégier** dans l'étude d'un mouvement et suffisent à la compréhension totale des phénomènes mis en jeu.

I Champ de force centrale

I.1 Notion de force centrale

Définition XIII.1 – Force centrale

Dans un référentiel \mathcal{R} donné, une force est dite **centrale** si elle pointe à tout instant dans la direction d'un point O **fixe** dans le référentiel \mathcal{R} .

En choisissant le point O fixe dans \mathcal{R} comme origine d'un repère utilisant les coordonnées sphériques, une force centrale s'appliquant en un point M de coordonnées (r, θ, φ) s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{centrale}}(M) = f(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

On dira qu'un mouvement est **un mouvement à force centrale** lorsque la résultante des forces exercées sur le point mobile est toujours une force centrale.

Remarque : par la suite, nous nous limiterons au cadre de systèmes physiques à **symétrie sphérique**^a, pour lesquels :

$$\vec{F}_{\text{centrale}}(M) = f(r) \vec{u}_r$$

On se ramènera donc à l'étude de problèmes à **un seul degré de liberté**.

^a. Un système physique est à symétrie sphérique si ses propriétés sont invariantes par rotation d'un angle θ ou φ quelconque ; c'est à dire que ses propriétés ne dépendent que de la distance r .

Exemple XIII.1 – Quelques exemples de forces centrales

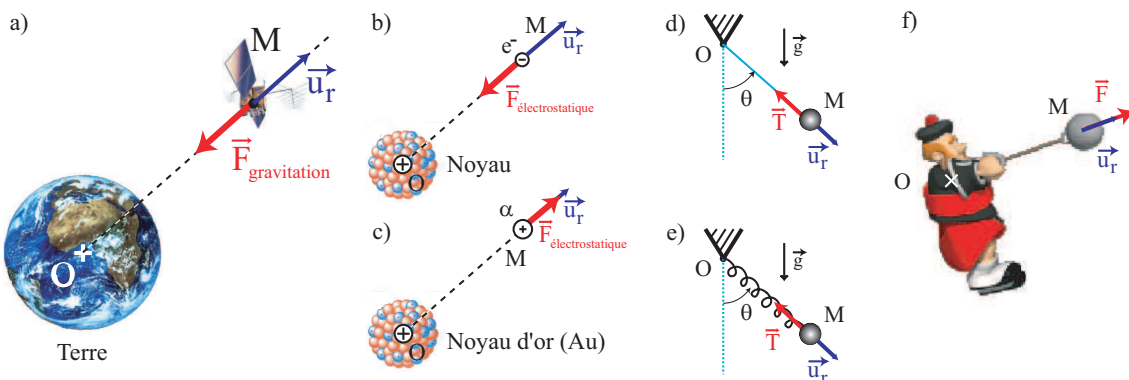


FIGURE XIII.2 – Quelques exemples de forces centrales. a) Force attractive de gravitation exercée par la Terre sur un satellite. b) Force électrostatique attractive exercée par un noyau chargé positivement sur un électron. c) Force électrostatique répulsive exercée par un noyau d'or (Au) chargé positivement sur un noyau d'Hélium (particule α). d) Force attractive de tension d'un fil. e) Force attractive de rappel d'un ressort. f) Force centrifuge d'un objet en rotation.

Transition : Concentrons nous en particulier sur l'étude des cas a), b) et c), pour lesquels l'expression de la force centrale est très similaire. Elles se classent en effet dans la catégorie des forces centrales newtoniennes.

I.2 Forces centrales newtoniennes

Définition XIII.2 – Force newtonienne

Comme nous l'avons vu dans le chapitre sur la dynamique, les forces gravitationnelles et électrostatiques exercées par un point O sur un point M situé à une distance $OM = r$ peuvent se mettre sous la forme ^a :

$$\vec{F}(M) = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$$

De telles forces sont dites **newtoniennes**.

a. Attention ! Il peut arriver que la convention de signe de k soit inverse dans certains livres.

Propriété XIII.1 – Expressions de k

★ Pour une interaction gravitationnelle :

$$k = \mathcal{G}m_O m_M$$

donc $k > 0$ et la force est toujours **attractive**.

★ Pour une interaction électrostatique :

$$k = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_O q_M$$

avec $\begin{cases} \text{Si } q_O q_M < 0 : k > 0, \text{ et la force est } \mathbf{attractive}. \\ \text{Si } q_O q_M > 0 : k < 0, \text{ et la force est } \mathbf{répulsive}. \end{cases}$

Propriété XIII.2 – Forces centrales conservatives

On peut rappeler que ces forces sont en outre **conservatives** car on peut leur associer une énergie potentielle :

$$\Delta E_p = E_p(M) - E_p(A) = -W_{A \rightarrow M}(\vec{F}) = \int_A^M \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{l} = \int_A^M \frac{k}{r^2} dr = \left[-\frac{k}{r} \right]_A^M$$

En choisissant l'origine des énergies potentielles en A à l'infini, on obtient ainsi, avec $OM = r$:

$$E_p(r) = -\frac{k}{r}$$

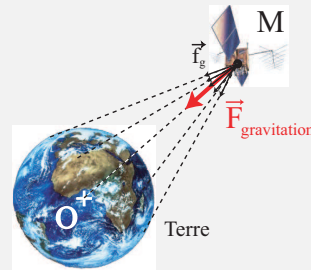
Les cas a), b) et c) de la figure précédente correspondent-ils bien à des forces centrales ?

Démonstration XIII.1 – Interaction entre deux corps ponctuels ?

Dans le cas de l'interaction gravitationnelle, le satellite peut effectivement être considéré comme un objet ponctuel par rapport à la distance Terre-Satellite. En revanche, la Terre ne peut pas l'être car le diamètre de la Terre (13 000 km) est du même ordre de grandeur que la distance Terre-Satellite.

Cependant, nous verrons dans le chapitre d'électrostatique en deuxième année que l'ensemble des forces de gravitation exercées par chacun des points de la Terre sur le satellite est équivalent à une seule force de gravitation exercée par le point O situé au centre de la Terre, qui concentrerait toute la masse terrestre. Ceci est dû à la symétrie sphérique de la Terre.

Le problème est en tout point similaire pour l'interaction électrostatique.



Démonstration XIII.2 – Le point O est-il vraiment fixe ?

Dans le cas de l'interaction gravitationnelle, si l'on se place dans le référentiel lié au centre de la Terre, c'est à dire le **référentiel géocentrique**, le point O est évidemment fixe. Mais qu'en est-il dans le référentiel héliocentrique, car d'après le principe des actions réciproques, le satellite exerce une force opposée sur la Terre qui devrait modifier la position de O ?

Nous avons déjà vu dans le cours de dynamique que le rapport de masse énorme entre les deux objets ($m_{\text{satellite}} \ll m_{\text{Terre}}$) justifiait l'approximation d'immobilité du corps le plus massif :

$$m_{\text{satellite}} \frac{d\vec{v}_{\text{satellite}}}{dt} = \vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow \text{satellite}} = -\vec{F}_{\text{satellite} \rightarrow \text{Terre}} = -m_{\text{Terre}} \frac{d\vec{v}_{\text{Terre}}}{dt}$$

Le problème est similaire pour l'interaction électrostatique car $m_{\text{électron}} \ll m_{\text{noyau}}$ et $m_{\alpha} \ll m_{\text{noyau Au}}$.

Propriété XIII.3 – Un mouvement à force centrale est plan

Le mouvement d'un point M soumis à une force centrale est nécessairement restreint au plan défini par les conditions initiales (vecteur position \vec{OM}_0 et vecteur vitesse \vec{v}_0). On optera donc dans le cas d'un mouvement à force centrale pour le **système de coordonnées cylindro-polaires**.

En effet, comme la force est à tout instant contenue dans ce plan, elle n'amène pas le point M à quitter ce même plan ^a.

a. Nous reverrons cette propriété en détail par la suite.

La loi de la quantité de mouvement de la dynamique appliqué au point M de masse m , dans le référentiel \mathcal{R} dans lequel le point O est fixe, conduit, dans le système de coordonnées polaires d'origine O dans le plan défini précédemment, à :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{k}{r^2} \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

On aboutit donc à un système d'équations non-linéaires couplées dont la résolution analytique est soit impossible soit difficile à obtenir avec les seules connaissances introduites jusqu'à présent.

Transition : Nous allons maintenant voir que deux grandeurs physiques fondamentales, le **moment cinétique**, et l'**énergie** sont **nécessairement conservées pour un système soumis à une seule force centrale newtonienne**, et que ces lois de conservation permettent de simplifier le système d'équation précédent.

II Conservation du moment cinétique

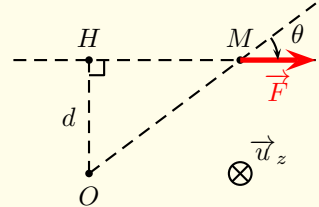
II.1 Loi du moment cinétique

II.1.a Moment d'une force

Définition XIII.3 – Moment d'une force par rapport à un point

Lorsqu'un point M est soumis à une force \vec{F} telle que celle-ci entraîne une rotation du point M autour d'un point O , il est commode d'introduire la notion de **moment d'une force** :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$



Remarque : il faudra penser à ajouter le moment de chaque force lors de l'inventaire de celles-ci. On parlera désormais du bilan des actions mécaniques : forces et moments des forces.

Propriété XIII.4 – Moment d'une force par rapport à un point

- ★ $[\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})] = L \times MLT^{-2} = ML^2T^{-2} = [Energie]$, donc son unité est le joule (J).
- ★ $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ est un **vecteur**. Etant à la fois orthogonal à \vec{OM} et \vec{F} , le **moment de la force \vec{F} est orthogonal au plan de la figure ci-dessus**.
On peut donc l'exprimer ainsi :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \|\vec{OM}\| \times \|\vec{F}\| \times \sin \theta \vec{u}_z$$

où \vec{u}_z est un vecteur directeur perpendiculaire au plan contenant \vec{OM} et \vec{F} , et orienté avec la règle de la main droite, de telle façon que $(\vec{OM}, \vec{F}, \vec{u}_z)$ forme un trièdre direct. L'angle orienté θ est alors l'angle entre \vec{OM} et \vec{F} .

- ★ **Le moment de la force est nul si celle-ci est colinéaire au vecteur position \vec{OM} .**
- ★ En faisant intervenir le projeté orthogonal H de O sur la droite (OM) , on peut exprimer le moment de la façon suivante :

Il existe de nombreuses situations expérimentales dans lesquelles un mouvement de rotation est mis en jeu. Dans ce genre de situations, il sera donc important de penser à recourir à la notion de moment. Parmi les différentes situations envisageables, on peut notamment citer l'exemple de l'ouverture d'une porte.

Exemple XIII.2 – Ouverture d'une porte

Pour ouvrir une porte, nous actionnons en général un bouton ("la poignée") pour déclencher l'ouverture. C'est aussi généralement sur ce bouton que nous appliquons la force qui va permettre le pivotement de la porte autour de l'axe Δ défini par ses gonds.

De manière à rendre l'ouverture de la porte facile, on place, en règle générale, le bouton de porte le plus loin possible de Δ . Si nous exerçons notre force de poussée plus près de Δ , il est nettement plus difficile d'ouvrir la porte, c'est-à-dire que nous devons appliquer une force de norme plus importante pour la faire pivoter. Ceci se fait particulièrement sentir lorsque la porte est lourde et que son inertie est donc importante.

Un cas particulier important permet de bien se rendre compte de l'importance de la distance à l'axe, c'est-à-dire du bras de levier. Que se passe-t-il si on exerce la force au niveau de l'axe Δ ? Tout simplement rien. L'action engagée n'entraîne pas la rotation de la porte.

Comme dans le cas de la porte, nous serons souvent amené à étudier le mouvement d'un objet par rapport à un axe fixe du référentiel d'étude. La notion de moment d'une force s'étend facilement à cette situation.

Définition XIII.4 – Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit Δ un axe orienté par le vecteur unitaire \vec{u}_Δ et O un point fixe de Δ . Le moment d'une force \vec{F} appliquée à un point matériel M autour de l'axe Δ s'écrit :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \overrightarrow{MO}(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Propriété XIII.5 – Moment d'une force par rapport à un axe orienté

- ★ Attention, \mathcal{M}_Δ est une grandeur **scalaire et algébrique** dont la valeur dépend de l'orientation \vec{u}_Δ choisie pour l'axe Δ .
- ★ \mathcal{M}_Δ **ne dépend pas** du point de Δ par rapport auquel il est calculé. Considérons en effet un point A quelconque de Δ et H le projeté orthogonal de M sur Δ .

Exemple XIII.3 – Rôle du bras de levier

On veut déplacer une lourde pierre (masse m) en exerçant une force \vec{F} sur l'extrémité A d'une tige dont l'autre extrémité B est placée sous la pierre.

Une cale C est disposée à une distance d du point B .

La figure ci-dessous montre d'autres exemples dans les lesquels un effet de levier est utilisé.

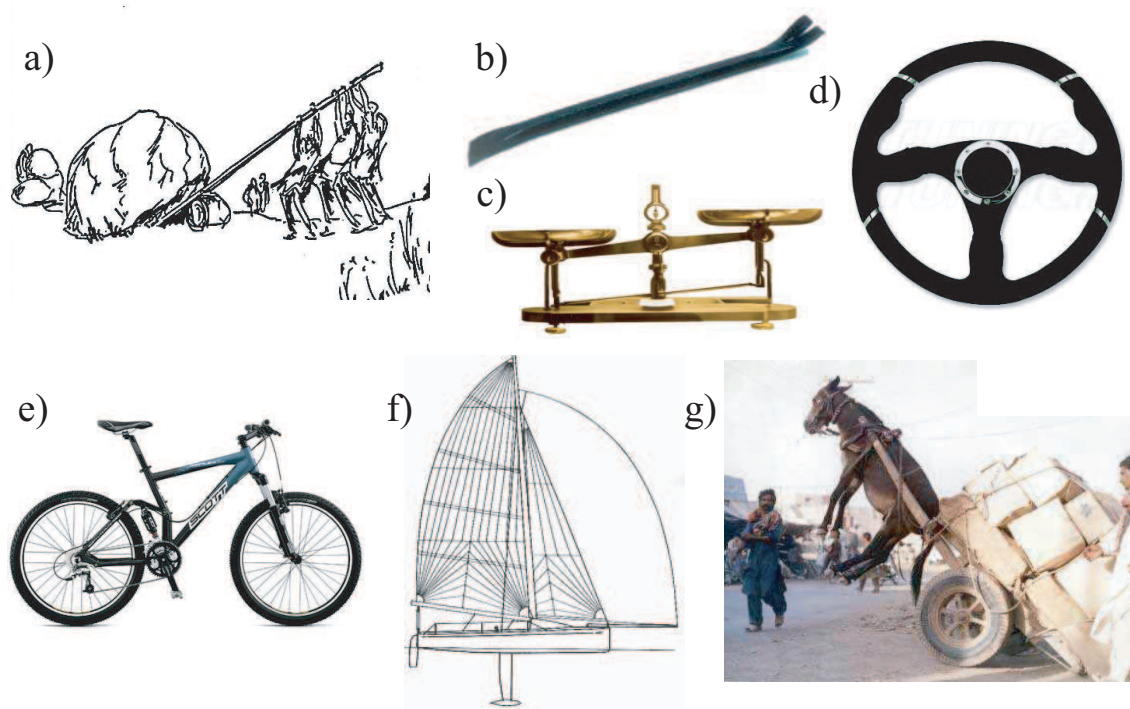


FIGURE XIII.3 – Quelques exemples dans lesquels un effet de levier est utilisé : a) levier pour soulever une pierre, b) pied de biche, c) balance de Roberval, d) volant, e) pédalier de vélo, f) quille, g) exemple de mauvaise utilisation...

Remarque : nous reviendrons sur la nature de la liaison solide de plusieurs des situations évoquées ci-dessus dans le cours de mécanique du solide.

II.1.b Moment cinétique

Définition XIII.5 – Moment cinétique par rapport à un point ou à un axe orienté

- ★ On note $\vec{\mathcal{L}}_O(M)$ le moment cinétique d'un point matériel M de masse m et de vitesse \vec{v} par rapport à un point O dans un référentiel \mathcal{R} . Il est défini comme suit :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$$

où $\vec{p} = m \vec{v}(M/\mathcal{R})$ est la quantité de mouvement du point M dans le référentiel \mathcal{R} .

- ★ On note de même $\mathcal{L}_\Delta(M)$ le moment cinétique d'un point matériel M de masse m et de vitesse \vec{v} par rapport à un axe Δ du référentiel \mathcal{R} passant par O . Il est défini comme suit :

$$\mathcal{L}_\Delta(M) = \vec{\mathcal{L}}_O(M) \cdot \vec{u}_\Delta$$

où \vec{u}_Δ est un vecteur unitaire orientant Δ dans le référentiel \mathcal{R} .

Remarque : on pensera à ajouter l'expression du moment cinétique aux grandeurs cinématiques utiles dont on fait l'inventaire dans un problème de mécanique.

Propriété XIII.6 – Moment cinétique

- ① $[\vec{\mathcal{L}}_O(M)] = L \times MLT^{-1} = ML^2T^{-2} \times T$. Un moment cinétique s'exprime donc en $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ et h , la constante de Planck est un exemple déjà rencontré de grandeur homogène à un moment cinétique.
- ② $\vec{\mathcal{L}}_O(M)$ **dépend du référentiel** considéré car la vitesse du point M dépend du référentiel dans lequel on la calcule.
On devrait donc noter pour éviter toute ambiguïté :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M/\mathcal{R}) \quad \text{et} \quad \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

- ③ $\vec{\mathcal{L}}_O(M)$ étant à la fois orthogonal à \vec{OM} et \vec{v} , **le moment cinétique est orthogonal au plan formé par les vecteurs positions et vitesse**. On peut donc l'exprimer ainsi :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = m \|\vec{OM}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta \vec{u}_z$$

où θ est l'angle entre le vecteur position et le vecteur vitesse, et où \vec{u}_z est un vecteur directeur perpendiculaire au plan contenant \vec{OM} et \vec{v} , orienté avec la règle de la main droite, de telle façon que $(\vec{OM}, \vec{v}, \vec{u}_z)$ forme un trièdre direct.

- ④ Le moment cinétique d'un point M est nul si celui-ci se déplace colinéairement au vecteur position \vec{OM} . **Le moment cinétique est donc nul pour un mouvement rectiligne, et non nul pour tout mouvement de rotation.**
- ⑤ Comme le moment d'une force, **le moment cinétique** par rapport à un axe orienté de l'espace est une grandeur scalaire qui **ne dépend que de la distance à cet axe**.
 \mathcal{L}_Δ est donc indépendant du point de Δ par rapport auquel il est calculé.

II.1.c Enoncé de la loi du moment cinétique

Théorème XIII.1 – Loi du moment cinétique

Dans un référentiel \mathcal{R}_g galiléen, **en un point fixe** O :

$$\left(\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(M/\mathcal{R}_g)}{dt} \right) = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{rés}})$$

où $\vec{F}_{\text{rés}}$ est la force résultante s'appliquant au point matériel M dont on étudie le mouvement.

Démonstration XIII.3 – Loi du moment cinétique

Tout comme nous l'avons fait lorsque nous avons introduit le principe fondamental de la dynamique, cherchons maintenant à relier les *grandeurs dynamiques* (moment d'une force), causes du mouvement, aux *grandeurs cinématiques* (moment cinétique), caractéristiques du mouvement.

Dérivons l'expression du moment cinétique par rapport à un **référentiel galiléen** \mathcal{R}_g , dans lequel **le point O est fixe** :

Remarques :

- ★ Attention ! Le théorème s'applique en un point **fixe** O dans un référentiel **galiléen**. Ces hypothèses sont nécessaires pour l'annulation du premier terme et pour pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique dans la démonstration précédente.
- ★ Ce théorème ne contient pas davantage d'information que le principe fondamental de la dynamique.
- ★ Tout comme le théorème de l'énergie cinétique, la formulation de ce théorème est plus adaptée que le PFD pour la résolution de certains problèmes, en particulier les problèmes à forces centrales, comme nous allons le voir.

II.2 Application au pendule simple

Cherchons à retrouver l'équation différentielle régissant l'évolution d'un pendule simple, en utilisant le théorème du moment cinétique. On rappelle que nous avons déjà obtenu cette équation par deux méthodes différentes (loi de la quantité de mouvement et théorème du moment cinétique).

Exercice XIII.1 – Pendule simple

II.3 Application à un mouvement à force centrale

II.3.a Conservation du moment cinétique

Propriété XIII.7 – Conservation du moment cinétique pour un mouvement à force centrale

Pour un mouvement à force centrale, la résultante \vec{F} des forces appliquées à M est colinéaire à \overrightarrow{OM} . Le moment en O des forces exercées sur M est donc nul :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

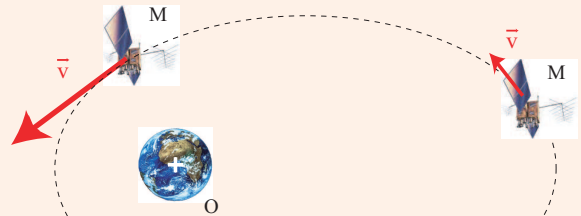
et, d'après le théorème du moment cinétique appliqué au point O fixe du référentiel d'étude galiléen :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M/\mathcal{R})}{dt} \right) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M/\mathcal{R}) = \text{cste} \quad \text{pour un mouvement à force centrale}$$

Remarque et exemples : Lorsqu'un point matériel soumis à une force centrale se rapproche du point fixe O , sa vitesse doit nécessairement augmenter pour que son moment cinétique puisse se conserver. C'est le cas dans le mouvement elliptique d'un satellite, mais aussi pour un objet soumis à une force centrale centrifuge lors d'une rotation autour d'un axe fixe.

Vidéos ^a : roue de vélo, patineuse, breakdance.

^a. Ces objets sont des solides, mais on peut comprendre qualitativement les phénomènes en considérant ceux-ci comme un ensemble de points matériels. Ceci sera étudié plus précisément au chapitre suivant avec l'introduction du **moment d'inertie d'un solide**.



II.3.b Planéité du mouvement

Propriété XIII.8 – Planéité d'un mouvement à force centrale

Un mouvement à force centrale est un mouvement plan.

Démonstration XIII.4 – Planéité du mouvement à force centrale - cf. Fig.XIII.4

Considérons le mouvement d'un point matériel dont la résultante est une force centrale dirigée selon \overrightarrow{OM} et supposons que le point matériel M se situe initialement en M_0 avec une vitesse \vec{v}_0 . Son moment cinétique par rapport au point O fixe de \mathcal{R} galiléen s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\vec{v}_0 = \vec{L}_O$$

donc $\overrightarrow{\mathcal{L}}_O(M/\mathcal{R})$ est à tout instant orthogonal au plan $(\overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0)$. À un instant ultérieur, on a donc $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{L}_O$. Ainsi, \overrightarrow{OM} est toujours perpendiculaire au vecteur constant \vec{L}_O : \overrightarrow{OM} appartient toujours au plan $(\overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0)$.

Remarque : si $\vec{L}_O = \vec{0}$, \overrightarrow{OM} et \vec{v} sont toujours colinéaires et le mouvement est rectiligne.

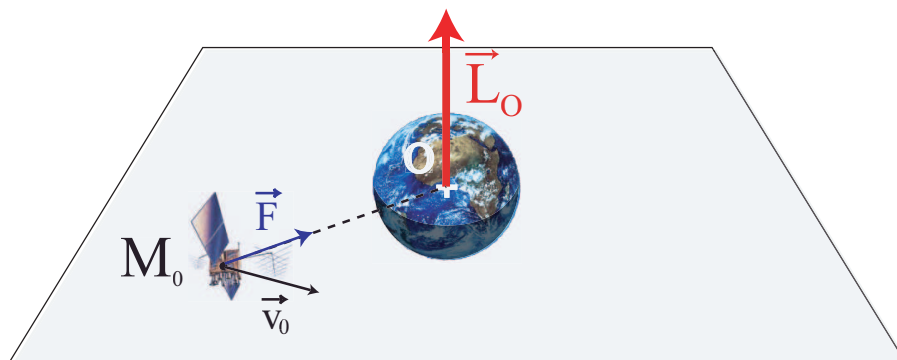


FIGURE XIII.4 – Planéité d'un mouvement à force centrale.

II.3.c Constante des aires et loi des aires

Définition XIII.6 – Vitesse aréolaire

On appelle **vitesse aréolaire** l'aire balayée par unité de temps par le vecteur \overrightarrow{OM} au cours du mouvement de M autour de O fixe dans \mathcal{R} galiléen.

Propriété XIII.9 – Constante des aires pour un mouvement à force centrale

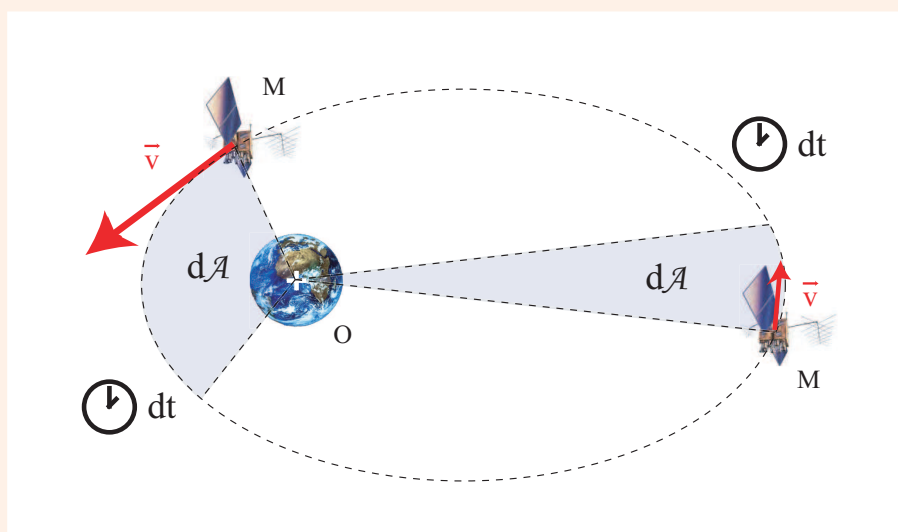
Dans un mouvement à force centrale, la vitesse aréolaire est constante et vaut :

$$\nu = \frac{d\mathcal{A}(M/\mathcal{R})}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{C}{2}$$

où

$$C = r^2\dot{\theta}$$

est une constante appelée **constante des aires**.

FIGURE XIII.5 – Pendant une durée dt , le rayon vecteur balaye une surface $d\mathcal{A}$ constante.

Démonstration XIII.5 – Constante des aires pour un mouvement à force centrale

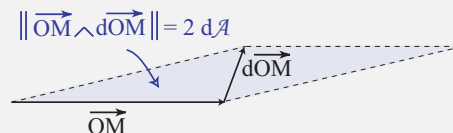
Interprétation géométrique :

Sachant que la norme d'un produit vectoriel correspond à l'aire du parallélogramme défini par ces deux vecteurs, l'aire $d\mathcal{A}$ balayée par le vecteur \overrightarrow{OM} pendant un intervalle de temps dt est telle que :

$$d\mathcal{A} = \frac{\|\overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM}\|}{2}$$

En multipliant l'équation précédente par le masse m du point M , puis en divisant par l'intervalle de temps dt , on obtient :

$$\underbrace{m \left\| \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|}_{=L_O} = 2m \frac{d\mathcal{A}}{dt} \quad \text{soit} \quad \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{L_O}{2m}$$



Transition : cet invariant du mouvement va nous permettre de simplifier le système d'équation obtenu à la fin de la section précédente.

Mais avant de montrer comment faire intervenir cette simplification dans la résolution du problème, examinons les conséquences de la conservation d'une autre grandeur au cours du mouvement : l'énergie mécanique.

III Conservation de l'énergie mécanique

III.1 Energie mécanique dans un système à force centrale

Si toute force centrale n'est pas nécessairement conservative, celles que nous rencontrerons dans le cadre des classes préparatoires ne modifient pas l'énergie mécanique :

- ★ soit ces forces sont conservatives car elles dérivent d'une énergie potentielle (force gravitationnelle - force électrostatique - force de tension d'un ressort - force centrifuge)
- ★ soit ces forces sont orthogonales au mouvement et ne travaillent donc pas (force de tension d'un fil).

Nous ferons donc l'hypothèse dans toute la suite que **l'énergie mécanique se conserve** au cours du mouvement.

On rappelle que l'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p telle que : $E_m = E_c + E_p = cste$.

Cherchons à obtenir l'expression de l'énergie mécanique.

Exercice XIII.2 – Expression de E_m en fonction de r , \dot{r} et C

L'énergie potentielle associée aux forces conservatives citées ci-dessus ne dépendent que de la seule variable r . Nous noterons donc l'énergie potentielle $E_p(r)$.

Examinons maintenant l'expression de l'énergie cinétique en coordonnées polaires ^a.

a. On rappelle que le mouvement est plan, ce qui justifie ce choix de coordonnées.

III.2 Energie potentielle effective

Définition XIII.7 – Energie potentielle effective

Pour étudier le problème undimensionnel, séparons les termes dépendant de \dot{r} de ceux dépendant uniquement de r de la façon suivante :

$$E_m = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}^{\text{énergie cinétique radiale}}}_{\text{énergie cinétique effective } E_{c\text{eff}}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}}^{\text{énergie cinétique de rotation}} + \overbrace{E_p(r)}^{\text{énergie potentielle}}}_{\text{énergie potentielle effective } E_{p\text{eff}}}$$

L'énergie mécanique peut donc être décomposée en deux termes :

- ★ $E_{c\text{eff}}(\dot{r}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$ est l'énergie cinétique effective qu'aurait le point matériel s'il était astreint à un mouvement radial uniquement.
- ★ $E_{p\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$ est **l'énergie potentielle effective**.

L'étude de $E_{p\text{eff}}$ nous permet de décrire le mouvement selon la direction radiale, tout comme nous l'avions fait dans un problème unidimensionnel.

En effet, $E_{c\text{eff}} \geq 0$ donc le mouvement est possible seulement si $E_m \geq E_{p\text{eff}}$. **Par conséquent, afin de décrire les domaines de l'espace accessibles au mouvement, il suffit de représenter $E_{p\text{eff}}(r)$ en fonction de r et de comparer sa valeur à E_m .**

III.3 Etude dans le cas des forces newtoniennes

D'après l'expression de l'énergie potentielle donnée en début de chapitre, l'énergie potentielle effective dans le cas d'un système soumis à une force newtonienne s'écrit :

$$E_{p\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}$$

Quel que soit le signe de k , les limites de l'énergie potentielle effective sont évidentes :

- ★ lorsque $r \rightarrow 0$, $E_{p\text{eff}} \rightarrow +\infty$;
- ★ lorsque $r \rightarrow +\infty$, $E_{p\text{eff}} \rightarrow 0$.

Suivant le signe de k en revanche, il peut ou non exister un minimum d'énergie potentielle.

Exercice XIII.3 – Recherche d'un minimum de la fonction $E_{p\text{eff}}$

III.3.a Force newtonienne attractive ($k > 0$)

C'est le cas par exemple d'un satellite orbitant autour de la Terre, ou de l'atome d'hydrogène autour de l'atome de chlore dans la molécule de HCl.

L'énergie potentielle effective peut se mettre sous la forme :

$$E_{p_{\text{eff}}} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{mC^2} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{k}{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right) \right]$$

Propriété XIII.10 – Cas général d'une force newtonienne attractive

L'étendue du mouvement d'un mouvement à force centrale newtonienne attractive dépend de la valeur de l'énergie mécanique du système.

On envisage successivement les deux cas possibles pour l'énergie mécanique du système.

Propriété XIII.11 – Cas où l'énergie mécanique est positive $E_m \geq 0$: état de diffusion

Dans ce cas, le mouvement s'étend entre une **distance minimale d'approche** r_m et l'infini. Le point matériel est **libre** et part vers l'infini avec une énergie cinétique non nulle.

Remarque : nous prouverons par la suite que le cas $E_m > 0$ correspond à une trajectoire **hyperbolique**, et que le cas $E_m = 0$ correspond à une trajectoire **parabolique**.

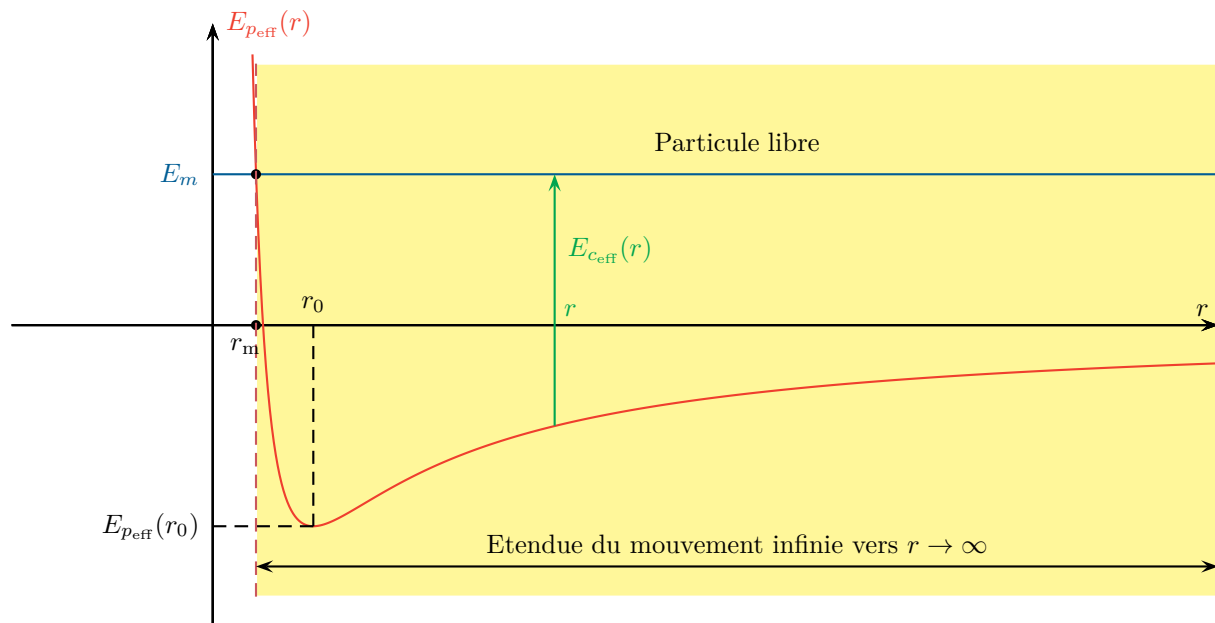


FIGURE XIII.6 – Allure de l'énergie potentielle effective dans le cas d'une force newtonienne attractive. Lorsque l'énergie mécanique du point matériel est positive ou nulle, celui-ci décrit une trajectoire hyperbolique ou parabolique entre une distance minimale d'approche et l'infini.

Propriété XIII.12 – Cas où l'énergie mécanique est négative $E_{p_{\text{eff}}}(r_0) \leq E_m < 0$: état lié

- ★ Dans ce cas, le mouvement s'étend entre deux valeurs finies de r et le point matériel est dit **lié**. L'étendue du mouvement reste donc bornée à un domaine de distance $[r_m; r_M]$.
- ★ En chacune de ces situations $\dot{r} = 0$, et le vecteur vitesse est orthogonal au vecteur position.
- ★ Le point de la trajectoire correspondant à r_m est appelé **périgée** et celui correspondant à r_M est appelée

Propriété XIII.12 – Cas où l'énergie mécanique est négative $E_{p_{\text{eff}}}(r_0) \leq E_m < 0$: état lié (suite)

apogée.

Remarque : nous prouverons par la suite que le cas $E_{p_{\text{eff}}}(r_0) < E_m < 0$ correspond à une trajectoire **elliptique**, et que le cas $E_m = E_{p_{\text{eff}}}(r_0)$ correspond à une trajectoire **circulaire** de rayon r_0 .

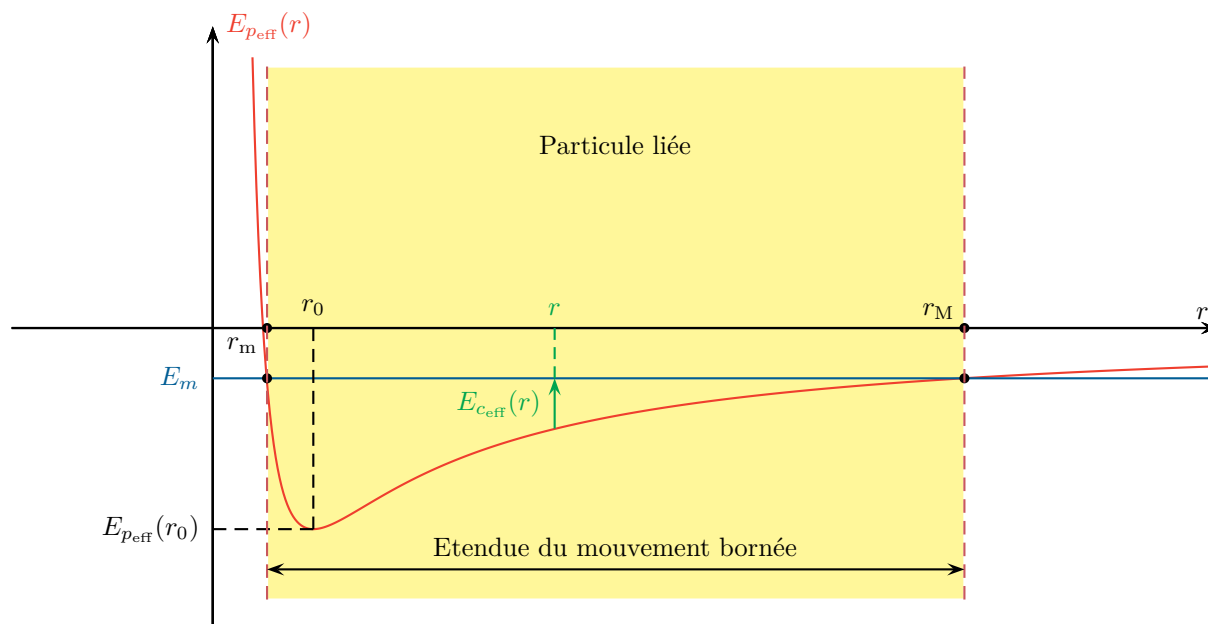


FIGURE XIII.7 – Allure de l'énergie potentielle effective dans le cas d'une force newtonnienne attractive. Lorsque l'énergie mécanique du point matériel est comprise entre $E_{p_{\text{eff}}}(r_0)$ et 0, celui-ci décrit une trajectoire elliptique ou circulaire entre deux distances finies par rapport au point O .

Exercice XIII.4 – Lancer d'un projectile

Intéressons nous à l'exercice 4 du TD n°16 sur les forces centrales.

III.3.b Force newtonienne répulsive ($k < 0$)

C'est par exemple le cas dans l'expérience de Rutherford qui consistait à envoyer un noyau d'hélium chargé positivement sur un noyau d'or, lui-aussi chargé positivement. Cette expérience célèbre a permis de sonder la structure interne de la matière en prouvant l'**existence du noyau**.

Propriété XIII.13 – Cas général d'une force newtonienne répulsive

Pour une interaction répulsive, $k < 0$ et l'énergie potentielle effective $E_{p_{\text{eff}}}$ décroît de façon monotone, sans présenter aucun extremum. Le point matériel est **libre**. On parle encore d'**état de diffusion** et il y a là encore une distance minimale d'approche r_m .

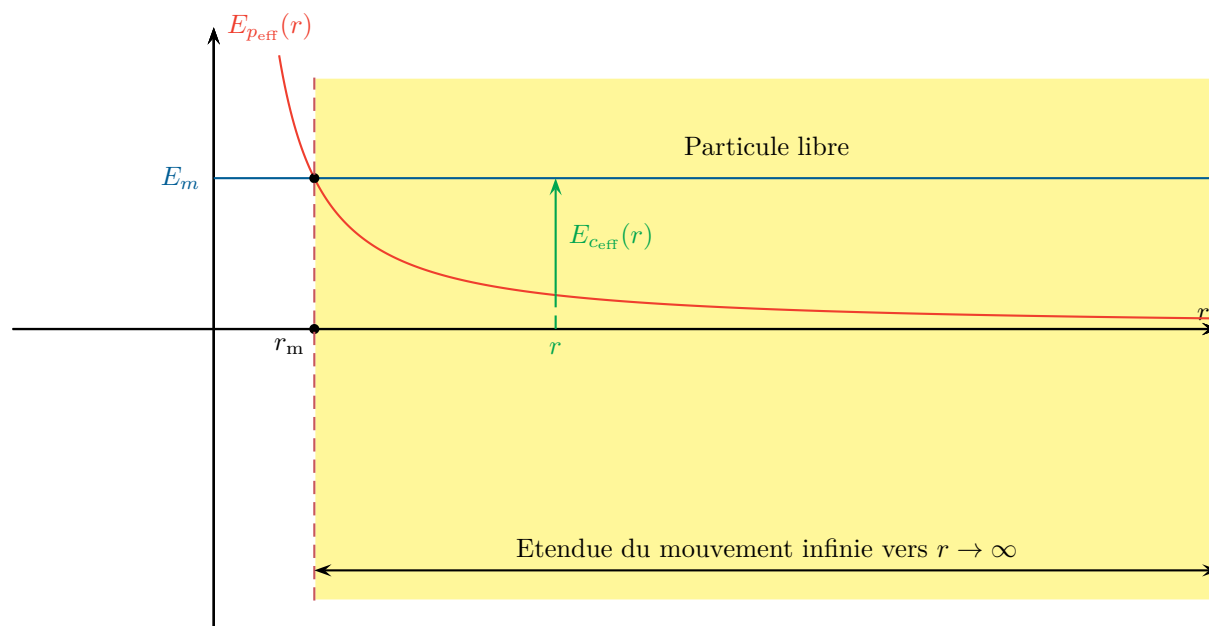


FIGURE XIII.8 – Allure de l'énergie potentielle effective dans le cas d'une force newtonienne répulsive. L'énergie mécanique du point matériel est positive et celui-ci décrit une trajectoire hyperbolique entre une distance minimale d'approche et l'infini.

Exercice XIII.5 – Expérience de Rutherford

Intéressons nous à l'exercice 6 du TD n°16 sur les forces centrales.

IV Mouvements dans un champ gravitationnel

Les principaux systèmes à force centrale que nous connaissons sont les corps stellaires en orbite autour d'un astre massif. Le modèle de systèmes à force centrale est donc bien adapté aux mouvements des planètes ou des comètes autour du soleil, ou à ceux des satellites naturels et artificiels autour des planètes pour lesquels la force centrale est en plus newtonienne. Tous les résultats établis dans les sections précédentes vont donc pouvoir nous servir au cours de l'étude des systèmes planétaires.

IV.1 Lois de Kepler

Histoire – Lois de Kepler

À la fin du 16^{ème} siècle, le danois Tycho Brahé (1546-1601) réalise à l'oeil nu des mesures de position angulaire des planètes dont la précision dépassait déjà la minute d'angle.

Grâce à ces mesures, le scientifique allemand Johannes Kepler (1571,1630) énonça, dès 1609 dans *Astronomia Nova*, les deux premières lois qui portent aujourd'hui son nom. La troisième loi, plus délicate à établir, ne fut formulée qu'en 1618.

Ce sont les lois de Kepler qui ont permis à Newton de construire une théorie complète de la mécanique et de la gravitation.

Enoncé 1 – Lois de Kepler

Plaçons dans le système solaire et considérons une planète de centre P et de masse m_P gravitant autour du Soleil (centre S , masse m_S) dans le référentiel héliocentrique^a supposé galiléen.

Les astres possédant quasiment une symétrie sphérique, on peut considérer qu'ils se comportent vis-à-vis de l'interaction gravitationnelle comme deux points matériels S et P ^b.

1ère loi de Kepler

Dans le référentiel héliocentrique, le centre P d'une planète décrit une ellipse dont un des foyers est le centre S du Soleil.

2ème loi de Kepler

Les planètes ont un mouvement obéissant à la loi des aires : le rayon-vecteur \overrightarrow{SP} balaie des aires égales pendant des durées égales.

3ème loi de Kepler

Le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes gravitant autour du Soleil. T est la période de révolution de la planète autour du Soleil et a est le demi-grand axe de l'ellipse.

^a. Il s'agit d'un référentiel dans lequel le centre du Soleil est fixe et que l'on munit traditionnellement d'un repère dont le centre est S et dont la base se compose de trois vecteurs unitaires orthogonaux pointant dans la direction de trois étoiles lointaines supposées fixes dans ce référentiel.

^b. Cette hypothèse, que nous avons déjà formulée dans le cours sur la dynamique du point, sera vérifiée dans le cours de deuxième année à l'occasion de l'introduction du théorème de Gauss.

Remarques :

- ★ Nous établirons ces trois lois dans l'annexe situé à la fin de ce cours car leurs démonstrations sortent du cadre du programme de première année.
- ★ Les lois de Kepler concernent au sens strict le mouvement des planètes autour du Soleil. Cependant, les propriétés énoncées dans ces lois n'ont besoin, pour être vérifiées, que de s'appliquer à deux objets massifs, assimilables à des points matériels, soumis entre eux à la force d'interaction gravitationnelle, l'un pouvant être considéré comme fixe dans un référentiel galiléen car bien plus massif que l'autre.

Propriété XIII.14 – Transposition des lois de Kepler à un système satellite-Terre

Les lois de Kepler s'applique au mouvement d'un satellite (ponctuel à l'échelle astronomique) en interaction gravitationnelle avec la Terre, en supposant que le système satellite-Terre est isolé.

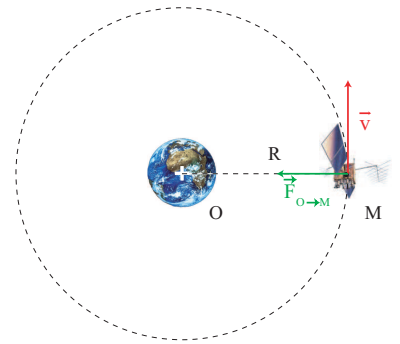
Ce satellite décrit alors une trajectoire elliptique dont la Terre est l'un des foyers, le vecteur \overrightarrow{TS} reliant le centre de la Terre au satellite balaie des aires égales pendant des durées égales, le rapport T^2/a^3 du carré de la période de rotation du satellite autour de la Terre sur le cube du demi-grand axe de l'ellipse est constant.

Transition : parmi les différentes trajectoires évoquées pour un champ newtonien attractif comme le champ de pesanteur (hyperbole, parabole, ellipse ou cercle), nous allons maintenant nous intéresser au **cas particulier du mouvement circulaire**. Sur cet exemple, nous allons établir quelques résultats fondamentaux que nous généraliserons au cas d'un trajectoire elliptique pour se rapprocher du mouvement des planètes. Nous en profiterons aussi pour obtenir quelques ordres de grandeur concernant la mise en orbite de satellite autour de la Terre et nous reviendrons enfin sur quelques phénomènes astronomiques dont nous observons régulièrement les manifestations.

IV.2 Etude des trajectoires circulaires

Intéressons nous donc à la trajectoire la plus simple : le cercle. Ce cas d'étude a un double avantage : les calculs sont plus simples et permettent de retrouver les résultats généraux des autres cas ; de plus, les trajectoires des satellites artificiels sont généralement circulaires.

Considérons ainsi un astre de masse m en mouvement circulaire de rayon R autour d'un astre fixe de masse M . On supposera les astres à symétrie sphérique assimilables à des points matériels.

**IV.2.a Relation rayon-vitesse**

En coordonnées polaires, la vitesse de l'astre en mouvement vaut $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et son accélération est $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$.

L'application de la loi de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R} s'écrit : $m\vec{a} = -\frac{GmM}{R^2} \vec{u}_r$ et conduit aux relations :
$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 &= -\frac{GmM}{R^2} \\ mR\ddot{\theta} &= 0 \end{cases}$$

Propriété XIII.15 – Relation vitesse-rayon

On en déduit $\ddot{\theta} = 0$, soit $\dot{\theta} = cte$.

Le **mouvement est donc uniforme** et la norme de la vitesse vaut :

$$v = R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = cte$$

Remarques :

- ★ La vitesse v ne dépend pas de la masse du corps en mouvement.
- ★ On vérifie également que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante puisque $C = R^2\sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{GMR}$.

IV.2.b Période du mouvement

En une période de révolution, l'astre a parcouru une distance $2\pi R$. On en déduit donc

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2}$$

Propriété XIII.16 – Troisième loi de Kepler

On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler dans un cas particulier :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Ce rapport ne dépend pas de la masse du satellite en mouvement de rotation circulaire uniforme autour de la Terre.

IV.2.c Relations entre énergies potentielle, cinétique et mécanique

Les relations précédentes fournissent $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GmM}{R}$ tandis que $E_p = -\frac{GmM}{R}$.

Propriété XIII.17 – Relations entre énergies cinétique, potentielle et mécanique

On en déduit les relations suivantes ^a :

$$E_m = -E_c = \frac{E_p}{2} = -\frac{GmM}{2R} < 0$$

^a. Cette relation est connue sous le nom de théorème du Viriel. Elle a notamment permis de prouver l'existence de la fameuse *matière noire* au sein des galaxies (matière massive mais non détectable car non lumineuse).

IV.3 Applications

IV.3.a Altitude d'un satellite géostationnaire

Définition XIII.8 – Satellite géostationnaire

Un satellite est dit **géostationnaire** s'il a la même période de rotation T que celle de la Terre sur elle-même soit 23h56min4s.

Propriété XIII.18 – Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire reste à tout instant à la verticale d'un même point de la Terre. **Il possède une orbite quasi-circulaire au zénith de l'équateur.**

Démonstration XIII.6 – Orbite circulaire dans le plan de l'équateur

★ Mouvement dans le plan de l'équateur : nous allons raisonner par l'absurde. Imaginons que le satellite se trouve à la verticale d'un point fixe de la Terre. Si celui-ci n'est pas dans le plan de l'équateur, alors la force d'interaction gravitationnelle n'est pas incluse dans le plan du mouvement du satellite et entraîne donc un déplacement du satellite en dehors de ce plan. Le satellite ne peut donc plus se trouver à la verticale d'un

Démonstration XIII.6 – Orbite circulaire dans le plan de l'équateur (suite)

point fixe de la Terre et ne peut donc pas être en orbite géostationnaire. **Un satellite géostationnaire est donc bien en orbite circulaire au zénith de l'équateur.**

- ★ Orbite circulaire : maintenant que l'on sait que le satellite se situe dans le plan de l'équateur, le mouvement de ce satellite est un mouvement à force centrale newtonienne dans le référentiel géocentrique^a supposé galiléen. Le moment cinétique du satellite est donc conservé et la deuxième loi de Kepler est donc vérifiée. Le satellite balaie des aires égales en des durées égales. On a :

$$\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2} = cte \quad \text{et en coordonnées polaires :} \quad \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Ici, $\frac{d\theta}{dt}$ n'est autre que la vitesse angulaire du satellite, qui doit être à tout instant égale à celle de la Terre pour que le satellite reste à la verticale d'un point fixe de la Terre. Or la Terre est en bonne approximation en rotation uniforme autour de son axe. Donc $\frac{d\theta}{dt}$ est une constante et par conséquent r aussi. **Un satellite géostationnaire est en orbite circulaire autour de la Terre.**

^a. Il s'agit d'un référentiel dans lequel le centre de la Terre est fixe. On lui associe le repère centré sur le centre de masse de la Terre et possédant trois vecteurs unitaires orthogonaux dirigés vers trois étoiles lointaines fixes dans le référentiel.

Propriété XIII.19 – Altitude d'un satellite géostationnaire

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM_T}} \Rightarrow R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 4,2 \times 10^7 \text{ m}$$

L'altitude d'un satellite géostationnaire est donc d'environ $36 \times 10^3 \text{ km}$.

A titre de comparaison, on a représenté les différentes couches de l'atmosphère dans la figure ci-dessous.

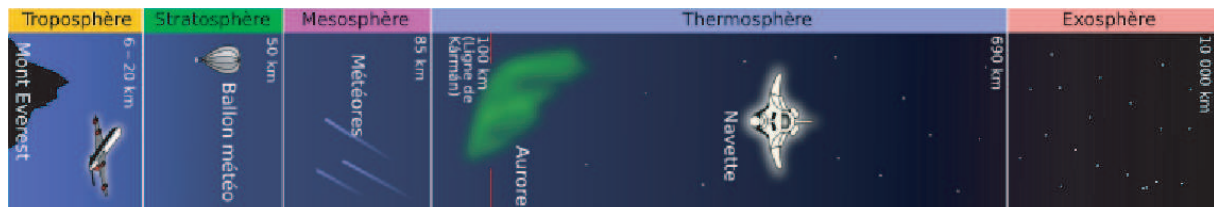


FIGURE XIII.9 – Les différentes couches atmosphériques. Un satellite géostationnaire peut être dit "dans l'espace" car il est situé à une altitude d'environ 36 000 km, au-delà des dernières couches de l'atmosphère.

IV.3.b Vitesses cosmiques

Définition XIII.9 – Vitesse de satellisation

La **vitesse de satellisation** est la vitesse qu'il faut communiquer à un objet (un satellite par exemple) pour qu'il se trouve en orbite circulaire à une altitude nulle (à la surface de la Terre par exemple). On fait souvent référence à cette vitesse sous le nom de *première vitesse cosmique*.

Exemple XIII.4 – Ordre de grandeur de la vitesse de satellisation

Pour la Terre :

$$v_{\text{sat}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

A.N. :

$$v_{\text{sat}} = 7,9 \text{ km.s}^{-1}$$

Définition XIII.10 – Vitesse de libération

La **vitesse de libération** est la vitesse minimale à communiquer à un objet (un satellite par exemple) pour qu'il puisse échapper à l'attraction d'un astre massif (la Terre par exemple), c'est à dire pour qu'il puisse s'éloigner indéfiniment de cet astre sous l'effet d'une impulsion initiale. Cette vitesse est souvent appelée *deuxième vitesse cosmique*

Propriété XIII.20 – Vitesse de libération

Cette vitesse minimale correspond au cas où l'énergie mécanique est nulle (la trajectoire étant parabolique, on appelle aussi cette vitesse la vitesse parabolique), puisque cela correspond au cas critique pour lequel l'objet se retrouve à l'infini avec une vitesse nulle :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2 - \frac{GmM}{R} = 0 \quad \text{donc}$$

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Au-dessus de cette vitesse, l'objet va quitter l'orbite de la planète et s'éloigner. En dessous, l'objet reste lié à la planète ; il se mettra donc en orbite elliptique, et reviendra ou non s'écraser sur la planète en fonction des caractéristiques de cette orbite.

On notera que cette valeur est indépendante de l'objet considéré, et que la direction du vecteur vitesse n'intervient pas : peu importe la direction vers laquelle le corps se dirige, sous réserve tout de même que ce ne soit pas directement vers l'astre !

Exemple XIII.5 – Ordre de grandeur de la vitesse de libération

Pour la Terre, cette vitesse vaut :

$$v_{\text{lib}} = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

Cette valeur semble énorme, mais elle est aujourd'hui tout à fait accessible grâce à une accélération progressive, puisque dès 1959, la sonde Luna 1 fut le premier objet construit par l'homme à atteindre la vitesse de libération terrestre lors de son trajet en direction de la Lune.

Notons que le lancement d'un satellite est généralement effectuée non loin de l'équateur pour bénéficier de la rotation de la Terre (la base de lancement française est à Kourou en Guyane, et la base de lancement américaine est à Cap Canaveral).

Remarquons maintenant que lorsque la masse de l'astre augmente, la vitesse à communiquer à l'objet est de plus en plus importante.

On voit même qu'un astre extrêmement massif conduirait à une vitesse de libération dépassant la vitesse de la lumière. Un tel astre ne laisse même pas échapper les photons, et apparaîtra noir : c'est ce qu'on appelle un **trou noir**.

IV.3.c Les comètes

Une comète est un petit astre dont l'orbite a généralement la forme d'une ellipse très allongée autour du soleil. Elle est souvent accompagnée d'une longue traînée lumineuse¹ due à l'interaction à vitesse élevée entre la comète au voisinage du Soleil et diverses forces émanant du Soleil : vent solaire, pression de radiation et gravitation.

Les comètes ont généralement une période inférieure à 200 ans et seraient originaires de la ceinture de Kuiper (ceinture d'astéroïdes située au delà de Neptune, comprenant la planète Pluton). On peut citer quelques comètes célèbres : comète de Halley (1986) de période 76 ans, de Hale-Bopp (1997) et de McNaught (2007).

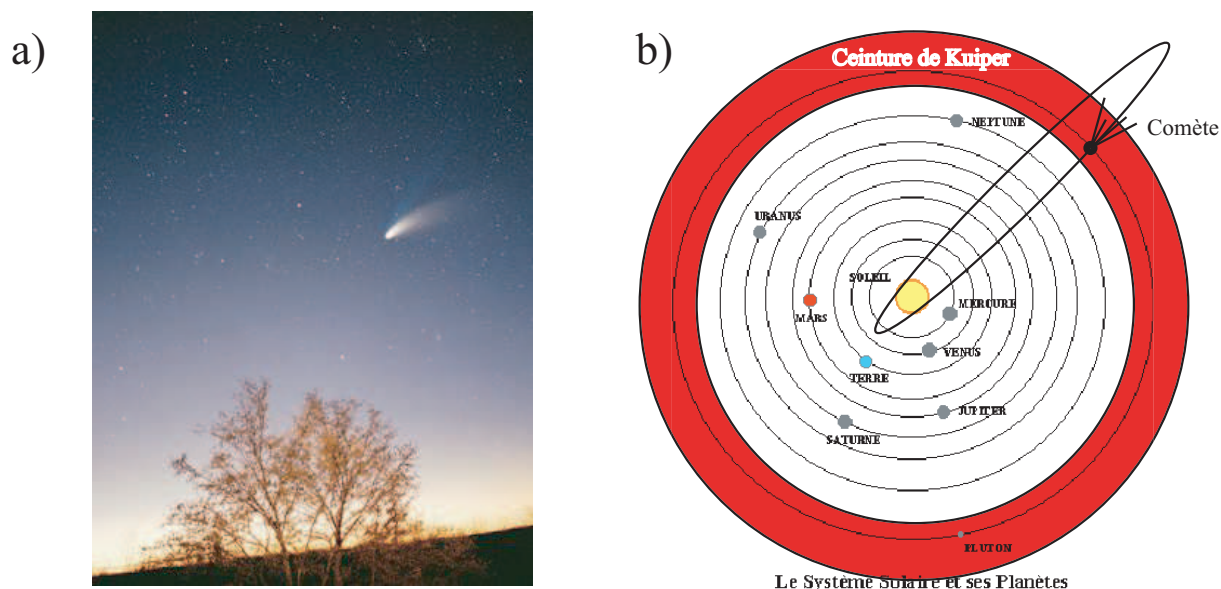


FIGURE XIII.10 – a) Photo de la comète Hale-Bopp en 1997. b) Origine probable de la plupart des comètes : un choc entre deux astéroïdes au sein de la ceinture d'astéroïdes comprenant la planète Pluton (ceinture de Kuiper) les a fait changer d'orbite, de sortes que ces astres ont maintenant des trajectoires elliptiques très allongées autour du Soleil.

IV.4 Conclusion

Nous avons vu que l'étude des forces centrales, et en particulier des forces gravitationnelles permettait d'interpréter un grand nombre de phénomènes physiques.

Nous nous sommes limités dans chaque cas à l'interaction entre deux corps, mais il faudrait bien entendu tenir compte de l'influence des autres corps environnants pour affiner les prédictions. Notons que c'est en cherchant à expliquer les écarts aux lois de Kepler qu'ont été découvertes les planètes Neptune (1850) et Pluton (1930).

Il faut également mentionner que des prédictions très précises à grande échelle nécessitent la théorie de la relativité (exemple : lentille gravitationnelle), et nécessitent la mécanique quantique à très petite échelle (à cette échelle, on montre en particulier que seules certaines valeurs de l'énergie sont permises : l'énergie est quantifiée).

1. C'est à ce titre qu'on leur a donné le nom de comètes qui signifie "chevelu" en grec.

V Annexe - Etude générale de mouvements dans un champ de force newtonien

V.1 Equation polaire de la trajectoire

On peut montrer par différentes méthodes² que la trajectoire est une **conique** de foyer O et d'équation polaire :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où $p = \frac{mC^2}{k} = \frac{mk}{L_O^2}$ est le paramètre de la conique, et e est son excentricité.

Reprenons l'expression de l'énergie mécanique obtenue précédemment, dans le cas d'un mouvement à force centrale :

$$E_m(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}$$

Effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{r}$, et cherchons à ne faire intervenir que les variables u et θ , de façon à obtenir l'équation polaire de la trajectoire.

Nous obtenons les relations suivantes :
$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} \\ C = r^2 \dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{u^2} \end{cases} \quad \text{d'où :}$$

$$\dot{r} = -\frac{C\dot{u}}{\dot{\theta}} = -C \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dt}{d\theta} \right) = -C \left(\frac{du}{d\theta} \right)$$

et en remplaçant dans l'expression de l'énergie :

$$E_m = \frac{mC^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - ku$$

Or l'énergie mécanique est constante au cours du temps, et donc également constante par rapport à θ , donc

$$\frac{dE_m}{d\theta} = mC^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right) \left[\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} \right) + u \right] - k \left(\frac{du}{d\theta} \right) = 0$$

En simplifiant par $\left(\frac{du}{d\theta} \right)$, on obtient une équation différentielle du second ordre en u appelée formule Binet :

$$\left[\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} \right) + u = \frac{k}{mC^2} \right]$$

La résolution de cette équation conduit à : $u = u_{\text{particulière}} + u_{\text{homogène}} = \frac{k}{mC^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$

En choisissant θ_0 comme l'origine des angles, on obtient l'équation polaire suivante :

$$r = \frac{1}{\frac{k}{mC^2} + A \cos \theta}$$

et en posant $p = \frac{mC^2}{k}$ et $e = Ap$, on obtient finalement :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

On voit que cette résolution n'est possible qu'en faisant intervenir les deux lois de conservation introduites dans les sections précédentes : la conservation de l'énergie mécanique et du moment cinétique.

2. Trois méthodes principales sont utilisées : la méthode énergétique reposant sur les formules de Binet, la méthode du vecteur excentricité, et enfin celle du vecteur de Runge-Lenz. Ces différentes méthodes ne sont pas exigibles dans le cadre du programme de classe préparatoire.

V.2 Expression de l'énergie en fonction des paramètres de la conique

Déterminons l'expression de l'énergie en fonction du paramètre p et de l'excentricité e de la conique. Reprenons l'expression de l'énergie obtenue précédemment :

$$E_m = \frac{mC^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - ku$$

Remplaçons maintenant l'expression de u obtenue également à la section précédente :

$u = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$, et sachant que $\frac{du}{d\theta} = -\frac{e \sin \theta}{p}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{mC^2}{2} \left[\left(\frac{e \sin \theta}{p} \right)^2 + \left(\frac{1 + e \cos \theta}{p} \right)^2 \right] - k \left(\frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) \\ &= \frac{mC^2}{2p^2} (1 + 2e \cos \theta + e^2) - \frac{k}{p} (1 + e \cos \theta) \end{aligned}$$

Or $p = \frac{mC^2}{k}$, et donc finalement :

$$E_m = \frac{k}{2p} (e^2 - 1)$$

V.3 Nature du mouvement

V.3.a Allure des trajectoires

Rappelons la nature des trajectoires en fonction de la valeur de l'excentricité de la conique, et faisons le lien avec les valeurs de l'énergie en utilisant la formule obtenue ci-dessus :

★ $e = 0$:

Le rayon r est indépendant de θ et la trajectoire est **circulaire** : $r = p = R$. De plus, l'énergie est une constante négative :

$$e = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{trajectoire circulaire de rayon } R \quad \Longleftrightarrow \quad E_m = -\frac{k}{2R}$$

★ $0 < e < 1$:

Le dénominateur ne s'annule jamais, et le point M décrit ainsi des tours complets autour du foyer O . Comme la fonction est périodique de période 2π ($r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$), la trajectoire est fermée. C'est une **ellipse**.

On définit le **périgée** comme la distance minimale r_{\min} entre le point M et le foyer O . Elle est atteinte lorsque $\theta = 0$

et $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$. On définit l'**apogée** comme la distance maximale r_{\max} entre le point M et le foyer O . Elle est atteinte

lorsque $\theta = \pi$ et $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$.

On appelle conventionnellement a et b le demi grand axe et le demi petit axe, respectivement. Le grand axe de taille

$2a$ correspond ainsi à $2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2p}{1-e^2}$.

On rappelle qu'on définit également c comme $c = ea$.

On obtient alors les relations suivantes : $a^2 = b^2 + c^2$, $b^2 = a^2(1 - e^2)$, et $p = \frac{b^2}{a}$.

De plus, l'énergie est une constante négative.

$$0 < e < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{trajectoire elliptique de demi grand axe } a \quad \Longleftrightarrow \quad E_m = -\frac{k}{2a}$$

★ $e = 1$:

Le rayon r tend vers l'infini pour $\theta = \pi$. La trajectoire est une **parabole**.

De plus, la valeur de l'énergie est nulle :

$$e = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{trajectoire parabolique} \quad \Longleftrightarrow \quad E_m = 0$$

★ $e > 1$:

L'angle θ n'est défini que dans un intervalle limité par deux angles θ^+ et θ^- pour lesquels le dénominateur de l'expression précédente s'annule : $\theta^\pm = \pm \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$. La trajectoire est une **branche d'hyperbole**.

De plus, l'énergie est une constante positive :

$$e > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{trajectoire hyperbolique} \quad \Longleftrightarrow \quad E_m > 0$$

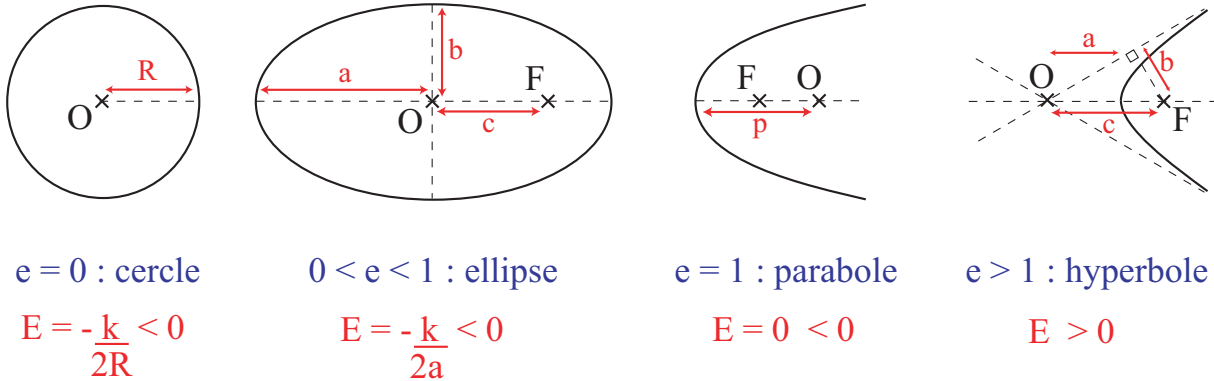


FIGURE XIII.11 – Les différentes coniques en fonction de leur excentricité et de leur énergie.

Les valeurs des énergies obtenues dans chacun des cas sont bien cohérentes avec les résultats obtenus lors de l'étude de l'énergie potentielle efficace $E_{p\text{eff}}$.

V.3.b Influence des conditions initiales

Si on fixe la position initiale \overrightarrow{OM}_0 et qu'on fait varier la norme de vitesse initiale à direction constante (c'est à dire que l'énergie mécanique est nécessairement également modifiée), on obtient les trajectoires de la figure a) ci-dessous.

Si on fixe la position initiale \overrightarrow{OM}_0 et qu'on fait maintenant varier la direction de la vitesse initiale à norme constante (c'est à dire que l'énergie mécanique reste cette fois constante), on obtient les trajectoires de la figure b) ci-dessous³. Fixer l'énergie ne suffit donc pas à déterminer complètement la trajectoire. Il faut par exemple définir également le moment cinétique ou l'excentricité.

V.4 Démonstration de la troisième loi de Kepler

La surface balayée par le rayon-vecteur SP pendant une période de révolution T vaut $S = \pi ab$ où a et b sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse. D'après la loi des aires : $\frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{C}{2}$, C étant la constante des aires. En élevant cette relation au carré et en utilisant la définition du paramètre de l'ellipse :

$p = \frac{b^2}{a} = \frac{mC^2}{k} = \frac{C^2}{GM}$, où m est la masse de la planète et M est la masse du Soleil on obtient :

$$\frac{\pi^2 a^3 p}{T^2} = \frac{C^2}{4} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{cste}}$$

où la constante $\frac{4\pi^2}{GM}$ est indépendante de la masse de la planète considérée.

3. Nous avons choisi ici une énergie négative, de façon à obtenir des trajectoires elliptiques.

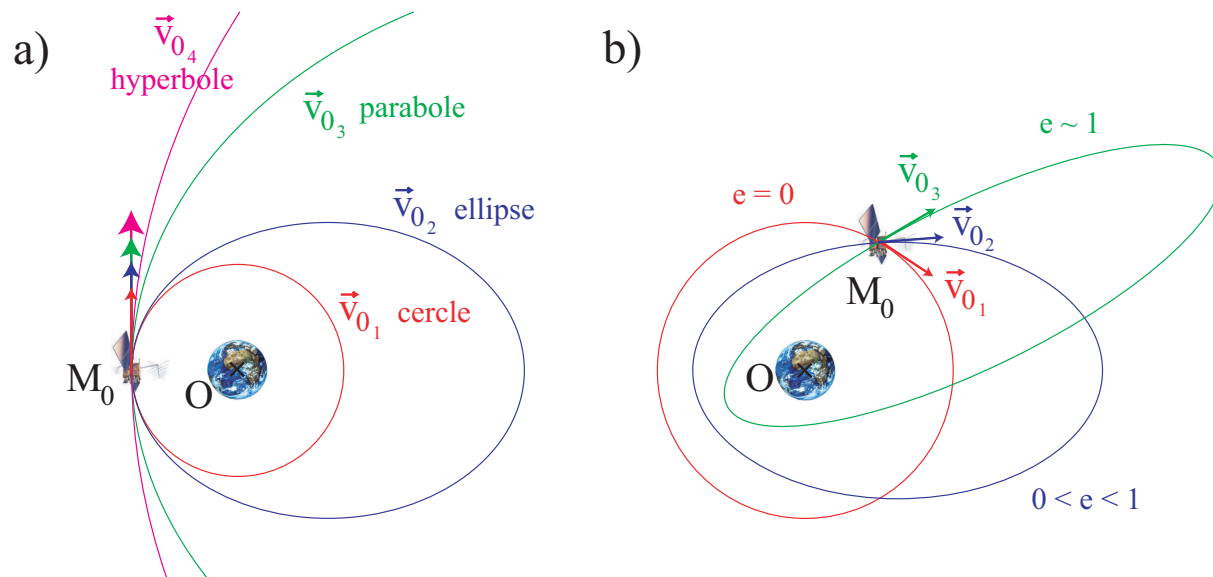


FIGURE XIII.12 – Sensibilité aux conditions initiales à position initiale fixée. a) Influence de la norme vitesse initiale à direction fixée (énergie non fixée). b) Influence de la direction du vecteur vitesse initiale à norme fixée (énergie fixée).

	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
T (10^8 s)	0,07600	0,1941	0,3155	0,5935	3,743	9,296	26,51	52,00	78,16
a (10^{11} m)	0,5788	1,082	1,496	2,278	7,781	14,28	28,74	45,04	59,00
T^2/a^3 $\times 10^{19}$	2,979	2,974	2,973	2,980	2,974	2,968	2,960	2,959	2,974
e	0,206	0,00681	0,0167	0,0933	0,0483	0,0559	0,0463	0,0898	0,246