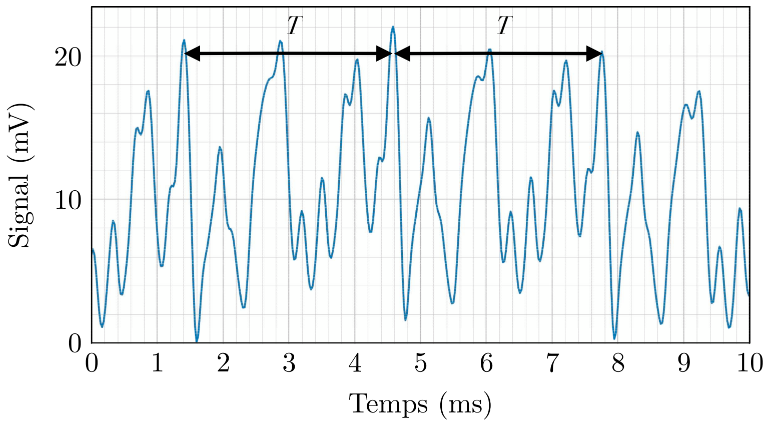
Corrigé - DM n°7: Filtrage électronique

I Accordeur de guitare *(D'après Centrale-Supélec TSI 2019)*

1. La valeur moyenne du signal est d'environ $\boxed{10 \text{ mV}}$.

2. En supposant le signal périodique en première approximation, on trouve un période $T = 3,2$ ms (figure ci-dessous). La fréquence correspondante $f = 1/T$ vaut ainsi environ $\boxed{f = 315 \text{ Hz}}$.



3. Il s'agit probablement d'une corde de $\boxed{\text{Mi aigu}}$ désaccordée.

4. Le signal n'étant $\boxed{\text{pas purement sinusoïdal}}$, le spectre fera apparaître des $\boxed{\text{harmoniques}}$.

I.1 Premier filtre

5. La formule du diviseur de tension appliquées en régime sinusoïdal forcé (RSF) aux deux dipôles en série s'écrit :

$$\frac{\underline{u_1}}{\underline{u_e}} = \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{jC\omega}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{H}_1(j\omega) = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}}$$

6. En notant $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1}}$, la fonction de transfert se réécrit $\underline{H}_1(j\omega) = \dfrac{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_1}}}$.

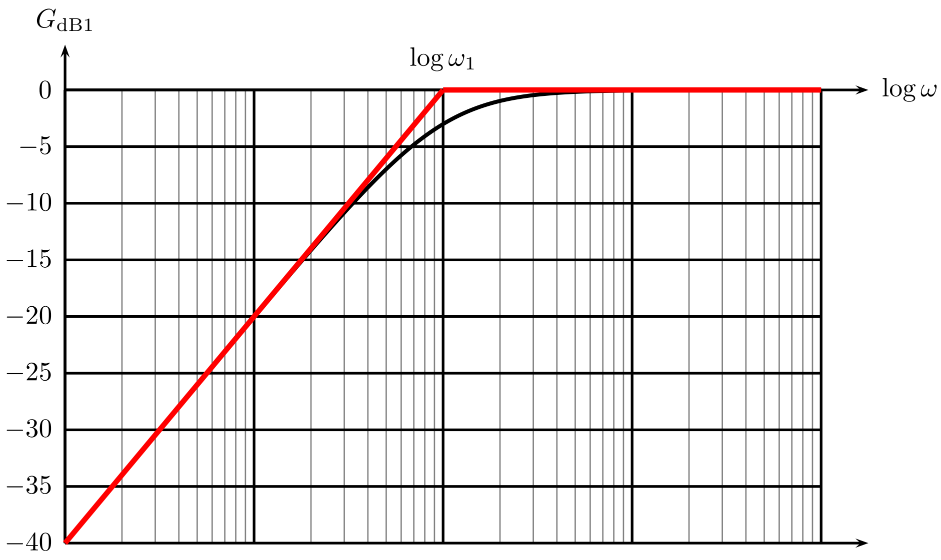
À basse fréquence ($\omega \ll \omega_1$), $\underline{H}_1(j\omega) \simeq j\dfrac{\omega}{\omega_1} \to 0$. À haute fréquence ($\omega \gg \omega_1$), $\underline{H}_1(j\omega) \simeq 1$. Il s'agit donc d'un filtre $\boxed{\text{passe-haut}}$ d'ordre 1.

La pulsation ω_1 correspond dans ce cas à la $\boxed{\text{pulsation de coupure du filtre}}$.

7. En définissant le gain en décibels $G_{\text{dB}1} = 20 \log |\underline{H}_1|$, on a :

$$\boxed{G_{\text{dB}1} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega_1}{\omega}\right)^2}}}$$

Ainsi, $G_{\text{dB}1} \simeq 20 \log \omega - 20 \log \omega_1$ à basse fréquence et $G_{\text{dB}1} \simeq 0$ à haute fréquence. L'asymptote oblique de pente +20 dB/décade correspondante coupe l'asymptote horizontale à 0 dB pour $\log \omega = \log \omega_1$. On en déduit le diagramme de Bode asymptotique (en rouge) et le diagramme de Bode (en noir) suivants :



8. La fréquence de coupure à -3 dB de ce filtre est donnée par $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi}$, soit $\boxed{f_1 = \dfrac{1}{2\pi R_1 C_1}}$. Numériquement, on obtient $\boxed{f_1 = 15,9 \text{ Hz}}$. Le rôle de ce premier filtre est donc de supprimer la composante continue afin d'obtenir un signal de valeur moyenne nulle.

I.2 Deuxième filtre

Préambule

9. Quand on impose une impédance d'entrée infinie, alors le premier filtre fonctionne en sortie ouverte, c'est-à-dire avec une courant de sortie nul. Dans ce cas, sa fonction de transfert $\underline{H_1}$ n'est pas modifiée par l'ajout de second filtre et l'ensemble des deux filtres mis en cascade a pour fonction de transfert $\boxed{\underline{H} = \underline{H_1} \times \underline{H_2}}$ avec $\underline{H_2}$ la fonction de transfert du second filtre.

10. Pour $\underline{Z} = R$ et $\underline{Z'} = R'$, on a $\boxed{\underline{H} = 1 + \dfrac{R'}{R}}$. Comme $|\underline{H}| = 1 + \dfrac{R'}{R} > 1$ et $\arg \underline{H} = 0$, le filtre amplifie de manière identique ($|\underline{H}|$ indépendant de ω) toutes les composantes spectrales du signal d'entrée sans les déphaser.

Amplification (légèrement) sélective

11. La loi d'association de deux dipôles en parallèle s'écrit ici : $\dfrac{1}{\underline{Z'}} = \dfrac{1}{R_2} + jC_2\omega \Rightarrow \boxed{\underline{Z'} = \dfrac{R_2}{1 + jC_2R_2\omega}}$.

12. On déduit de la question précédente l'expression :

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + jC_2R_2\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}}$$

avec $\boxed{G_0 = \dfrac{R_2}{R_3}}$ et $\boxed{\omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_2}}$.

13. À basse fréquence ($\omega \ll \omega_2$), $\boxed{\underline{H}_2 \to 1 + G_0}$. À haute fréquence ($\omega \gg \omega_2$), $\boxed{\underline{H}_2 \to 1}$.

14. On a $\boxed{f_2 = \dfrac{1}{2\pi R_2C_2}}$ soit numériquement $\boxed{f_2 = 498 \text{ Hz}}$, et $\boxed{G_0 = 113}$. Ce second filtre va donc avoir le rôle suivant : $\boxed{\text{amplifier fortement les fréquences inférieures à 500 Hz}}$ (c'est à dire correspondant au fondamental qui nous intéresse) sans modifier les harmoniques de rang élevé.

I.3 Filtrage (très) sélectif commandé

Diagramme de Bode

15. Le gain en décibels diminue rapidement en dehors d'une bande de fréquences centrée autour de la fréquence caractéristique[1] $\boxed{f_0 = 329 \text{ Hz}}$: il s'agit d'un filtre $\boxed{\text{passe-bande}}$. Un filtre passe-bande nécessite un ordre 2 ou plus ; les asymptotes à ± 20 dB/décade à basse et haute fréquence permettent d'affirmer que ce passe-bande est d'$\boxed{\text{ordre 2}}$.

16. La bande-passante à -3 dB est définie comme l'intervalle de fréquences tel que $\boxed{G_{\text{dB}}(f) \geq G_{\text{dB,max}} - 3}$. Par lecture graphique, on obtient comme $\boxed{\text{bande passante } [321 \text{ Hz}; 337 \text{ Hz}]}$.

Pour estimer le facteur de qualité Q, on peut utiliser la formule $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f}$ avec $\Delta f = 16$ Hz la largeur de la bande passante. On peut aussi utiliser le fait que les asymptotes basse et haute fréquence se coupent en $G_{\text{dB}} = -26 \text{ dB} = 20 \log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right)$. Dans les deux cas, on trouve $\boxed{Q = 20}$ environ.

17. Par construction, le facteur d'atténuation en amplitude est égal à $\|\underline{H}\| = 10^{\frac{G_{\text{dB}}}{20}}$. Pour $f_{co} = 315$ Hz, on lit $G_{\text{dB}} = -6$ d'où $\boxed{\|\underline{H}\| = 0,5}$.

18. Les dipôles R et $C \parallel L$ sont en série. En notant $\underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = jC\omega + \dfrac{1}{jL\omega}$ l'admittance équivalente de l'association $C \parallel L$, la formule du diviseur de tension fournit :

$$\frac{\underline{u_3}}{\underline{u_2}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\underline{u_3}}{\underline{u_2}} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H_3} = \frac{1}{1 + jRC\omega - j\dfrac{R}{L\omega}}$$

Par identification avec la formule de l'énoncé :

$$\underline{H_3} = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

on établit le système :

$$\begin{cases} \dfrac{Q}{\omega_0} = RC \\ Q\omega_0 = \dfrac{R}{L} \end{cases}$$

dont la résolution aboutit à : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$.

Par définition, $\omega_0 = 2\pi f_0$ d'où $\boxed{R = 2\pi Q f_0 L}$ et $\boxed{C = \dfrac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}}$. Application numérique : $\boxed{R = 41 \text{ k}\Omega}$ et $\boxed{C = 0,23\ \mu\text{F}}$. Ces ordres de grandeur correspondent à ceux disponibles en salle de travaux pratiques.

Analyse spectrale

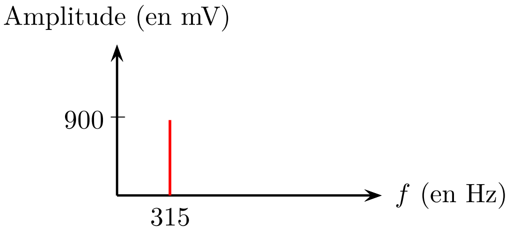
19. Le pic à fréquence nulle, correspondant à la composante continue, a pour amplitude environ 10 mV : on retrouve la valeur moyenne du signal de la première figure. En se déplaçant vers la droite, on trouve ensuite un pic à 300 Hz environ, associé à la fréquence fondamentale : on retrouve une nouvelle fois une valeur toute proche des 315 Hz estimés en tout début de problème. Il parait ainsi cohérent qu'il s'agisse du spectre du Mi aigu dont le chronogramme est fourni dans l'énoncé.

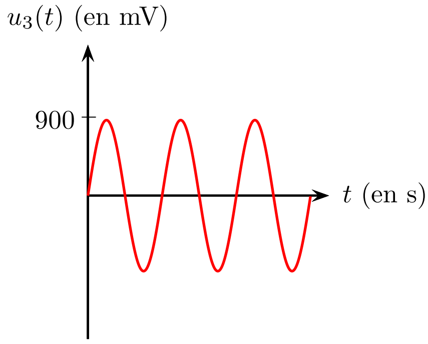
20. En sortie du premier filtre, seule la composante continue est supprimée, le reste du spectre n'étant pas modifié. Il s'agit donc du $\boxed{\text{spectre (a)}}$.

21. Le filtre (F_b) n'a d'effet sensible que sur le fondamental qu'il amplifie d'un facteur 100 environ. Il s'agit donc du $\boxed{\text{spectre (d)}}$.

1. En réalité, il s'agit très probablement de la fréquence $f_0 = 329,6$ Hz du Mi aigu.

22. Le spectre du signal en sortie de (F_b) comprend un fondamental d'amplitude divisée par 2 environ (gain à -6 dB) soit environ 900 mV, une harmonique de rang 2 d'amplitude très faible (un calcul montre qu'on obtient environ 63 mV) et des autres harmoniques quasi-absents. Le signal temporel sera donc quasi-sinusoïdal, d'amplitude 900 mV, et de fréquence 315 Hz. On en déduit l'allure du spectre du signal (à gauche) et l'allure de son chronogramme (à droite).

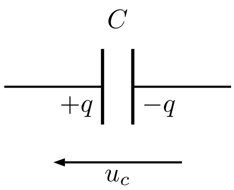




I.4 Retour sur le filtre sélectif commandé

Capacité commutée

23. La charge q (positive) est proportionnelle à la tension u_c appliquée entre les armatures. Avec la représentation ci-dessous, on a $\boxed{q = Cu_c}$



24. Pendant la première demi-période $[0, T_k/2]$, le condensateur est soumis à une différence de potentiel non nulle. En utilisant les convention précisées à la question précédente, on en déduit $\boxed{q_1 = C_k(V_B - V_A)}$. Pendant la demi-période suivante $[T_k/2, T_k]$, le condensateur est court-circuité donc $\boxed{q_2 = 0}$.

25. Pendant T_k, on transfère une charge $\delta q = q_2 - q_1 = C_k(V_A - V_B)$ de l'entrée vers la sortie. Proportionnellement, durant un temps $t \gg T_k$, la charge totale transférée s'écrit $Q(t) = \delta q \dfrac{t}{T_k}$, soit $\boxed{Q(t) = \dfrac{C_k(V_A - V_B)}{T_k} t}$.

26. L'intensité moyenne I_m associée à ce transfert correspond à $I_m = \dfrac{Q(t)}{t}$. En posant $f_k = \dfrac{1}{T_k}$, on obtient finalement $\boxed{I_m = C_k f_k (V_A - V_B)}$.

27. La relation de $\boxed{\text{proportionnalité entre tension et intensité}}$ obtenue à la question précédente correspond à celle d'un conducteur ohmique de résistance $\boxed{R_k = \dfrac{1}{C_k f_k}}$ en convention récepteur.

Filtre à capacité commutée

28. On pourrait introduire cette capacité commutée dans un filtre passe-bande dont la fréquence centrale dépendrait de R_k (d'où une technologie plus élaborée que le RLC étudié question **??**). Ainsi, un réglage de la fréquence f_k permettra de régler la valeur de la fréquence centrale.