

– Correction du DS (3) de physique-chimie –

Mécanique

I Ici, c'est Paris!!!

I. A La cours de Mbappé

1. Le terrain mesurant 100 m de long et Neymar étant à 35,0 m de sa ligne de but, on en déduit que $d_1 = 15,0 \text{ m}$. On en déduit de même que $d_2 = 5,00 \text{ m}$. Enfin, le point de pénalty étant situé à 11,0 m de la ligne de but marseillaise, on en déduit que $d_3 = 39,0 \text{ m}$.
2. Dans le repère d'étude cartésien proposé : $\vec{a}_K = A_K \exp(-\frac{t}{\tau_K}) \vec{u}_x$. En intégrant par rapport au temps, on obtient directement l'expression du vecteur vitesse :

$$\vec{v}_K = A_K \left[-\tau_K \exp(-\frac{t}{\tau_K}) \right]_{(0)}^{(t)} \vec{u}_x + \vec{v}_K(0)$$

Or, Mbappé est initialement immobile donc $\vec{v}_K(0) = \vec{0}$ et on a donc :

$$\vec{v}_K = A_K \tau_K \left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau_K}) \right] \vec{u}_x$$

La norme de la vitesse s'écrit donc $v_K = A_K \tau_K \left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau_K}) \right]$. C'est une fonction strictement croissante dont la limite est :

$$v_{K,\max} = A_K \tau_K = 10,3 \text{ m s}^{-1} = 37,0 \text{ km h}^{-1}$$

On procède de même pour établir la vitesse maximale d'Alvaro. Pour $t \geq \epsilon$, on aura :

$$v_A = A_A \tau_A \left[1 - \exp(-\frac{t - \epsilon}{\tau_A}) \right]$$

dont la valeur limite correspond à la valeur maximale, soit :

$$v_{A,\max} = A_A \tau_A = 9,44 \text{ m s}^{-1} = 34,0 \text{ km h}^{-1}$$

3. En intégrant cette fois les expressions des vitesses de Mbappé et Alvaro, on obtient :

□ Pour Mbappé :

$$x_K(t) = A_K \tau_K \left[t + \tau_K \exp\left(-\frac{t}{\tau_K}\right) \right]_0^t + x_K(0)$$

avec $x_K(0) = d_1 - d_2$ soit :

$$x_K(t) = A_K \tau_K t - A_K \tau_K^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_K}\right) \right] + d_1 - d_2$$

□ Pour Alvaro, on retrouve le même type d'expression en adaptant la relation obtenu pour Mbappé et en prenant soin de préciser que l'expression est valable pour $t \geq \epsilon$:

$$x_A(t) = A_A \tau_A (t - \epsilon) - A_A \tau_A^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \epsilon}{\tau_A}\right) \right] + d_1 - d_2$$

4. Notons $R(t) = \frac{v_K(t)}{v_{K,\max}}$. On veut connaître t_m tel que $R(t_m) = R_m = 0,95$. Or :

$$R(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_K}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{t = -\tau_K \ln(1 - R(t))}$$

On en déduit :

$$\boxed{t_m = -\tau_K \ln(1 - R_m) = 4,49 \text{ s} \simeq 3\tau_K}$$

5. La position x_C de Mbappé à l'instant t_m est alors :

$$\boxed{x_C = x_K(t_m) = -A_K \tau_K^2 [R_m + \ln(1 - R_m)] + d_1 - d_2}$$

La valeur numérique obtenue est $\boxed{x_C = 41,5 \text{ m}}$

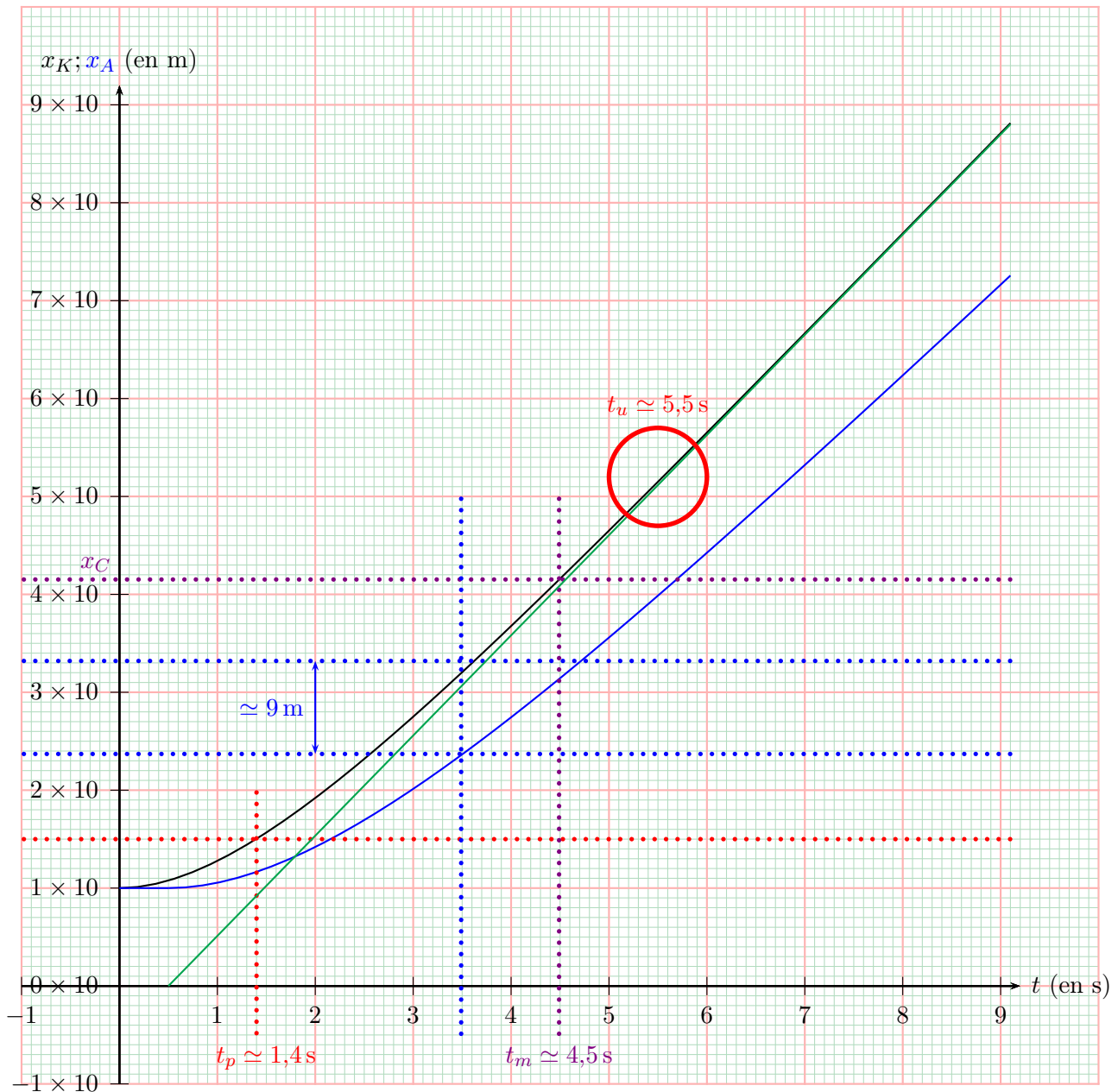


FIGURE 1 – Évolutions temporelles des positions de Mbappé (courbe noire) et d'Alvaro (courbe bleue).

6. Pour ne pas être signalé hors-jeu, il faut que Mbappé soit en $x_K = d_1$ à l'instant t_p . Cet instant vérifie donc la relation :

$$\boxed{d_2 = A_K \tau_K t_p - A_K \tau_K^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{t_p}{\tau_K}\right) \right]}$$

7. On a représenté en pointillés rouges la droite horizontale correspondant à la position de Mbappé au moment où il franchit la ligne de milieu de terrain. Cette ligne pointillée intercepte la courbe $x_K(t)$ à l'instant $t_p \simeq 1,4 \text{ s}$.
8. Lorsque le mouvement rectiligne de Mbappé devient uniforme, son accélération devient nulle et sa vitesse est constante. Sa position est alors une fonction affine du temps. On trace donc la tangente à la courbe x_K pour les temps les plus longs (courbe verte). On peut alors estimer qu'à partir de $t_u \simeq 5,5 \text{ s}$, l'écart entre la tangente et la courbe est négligeable et que Mbappé est en mouvement uniforme.
9. La pente de la tangente à la courbe x_K n'est autre que la vitesse de Mbappé. À partir de l'instant où le mouvement de Mbappé devient uniforme, on peut considérer que sa vitesse est constante et égale à $v_{K,\max}$. Ici, la pente s'obtient par le calcul suivant : $\frac{88-0}{9,1-0,5} = 9,69 \text{ m s}^{-1} = 36,8 \text{ km h}^{-1}$. On retrouve approximativement la valeur obtenue à la question ??.

I. B La passe de Neymar

10. On a représenté sur la schéma ci-après la trajectoire de la passe de Neymar à Mbappé. Le triangle CHN_0 étant rectangle en H , on en déduit :

$$\alpha = \arctan \left(\frac{x_C}{\frac{L'}{2} - \ell} \right)$$

soit :

$$\alpha = \arctan \left(\frac{-A_K \tau_K^2 [R_m + \ln(1 - R_m)] + d_1 - d_2}{\frac{L'}{2} - \ell} \right)$$

L'application numérique donne $\alpha = 59,0^\circ$.

Par application du théorème de Pythagore, on déduit l'expression et la valeur de la distance d parcouru par le ballon :

$$d = \sqrt{\left(\frac{L'}{2} - \ell\right)^2 + x_C^2} = 48,5 \text{ m}$$

11. On applique la deuxième loi de Newton au ballon assimilé à un point matériel B de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On se place dans le repère $(N_0, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ représenté sur le schéma tel que \vec{u}_x' soit orienté selon la trajectoire et dans le sens du mouvement du ballon. Les grandeurs cinématiques associées au ballon sont donc $\vec{N}_0 \vec{B} = x' \vec{u}_x'$, $\vec{v}' = \dot{x}' \vec{u}_x'$ et $\vec{a}' = \ddot{x}' \vec{u}_x'$. Le ballon est soumis à son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ ainsi qu'à la réaction du sol $\vec{R} = -R_T \vec{u}_x' + R_N \vec{u}_z$ avec R_T et R_N deux grandeurs positives. On a donc :

$$\square \text{ selon } \vec{u}_x' : m \ddot{x}' = -R_T$$

$$\square \text{ selon } \vec{u}_z : 0 = -mg + R_N$$

La deuxième relation permet d'obtenir $R_N = mg$ et la condition de glissement permet d'en déduire $R_T = f R_N = f mg$.

Finalement, par intégrations successives :

$$\ddot{x}' = -fg \quad \text{et} \quad \dot{x}' = -fgt + v_0 \quad \text{et} \quad x' = -fg \frac{t^2}{2} + v_0 t$$

La condition pour que le ballon arrive à Mbappé correctement est $x'(t_m) = d$. Soit :

$$v_0 = \frac{1}{t_m} \left(d + fg \frac{t_m^2}{2} \right) = 11,9 \text{ m s}^{-1} = 42,9 \text{ km h}^{-1}$$



- $$\frac{1}{2}m(v_C^2 - v_0^2) = \int_0^d (-fmg\vec{u}_x') \cdot (dx'\vec{u}_x') = -fmgd$$

$$v_C = \sqrt{v_0^2 - 2fgd} = 9,69 \text{ m s}^{-1} = 34,9 \text{ km h}^{-1}$$

13. On applique le théorème de Thalès dans les triangles N_0HC et N_0JB :

$$\frac{JB}{HK_m} = \frac{N_0J}{N_0H} = \frac{\frac{L'}{2} - 2\ell}{\frac{L'}{2} - \ell}$$

On a donc :

$$x_A(B) = JB = \frac{\frac{L'}{2} - 2\ell}{\frac{L'}{2} - \ell} x_{K,m} = 33,2 \text{ m}$$

Ce résultat nous permet de déterminer la position minimale que doit avoir atteint Alvaro s'il veut pouvoir intercepter le ballon. Il faut cependant connaître l'instant t_B pour lequel le ballon passe en B. On détermine pour cela :

$$N_0B = d' = \frac{\frac{L'}{2} - 2\ell}{\cos \alpha} = 38,8 \text{ m}$$

Grâce à la loi horaire $x' = -fg\frac{t^2}{2} + v_0t$, on peut déterminer t_B . Il s'agit de résoudre :

$$t^2 - \frac{2v_0}{fg}t + \frac{2d'}{fg} = 0$$

dont les solutions sont :

$$t_{\pm} = \frac{v_0}{fg} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{f^2g^2} - \frac{2d'}{fg}}$$

Une seule solution est physiquement acceptable¹ :

$$t_B = t_- = 3,49 \text{ s}$$

En reportant $x_A(B)$ et t_B sur la courbe de la figure ??, on constate qu'au moment où le ballon va couper la trajectoire d'Alvaro, ce dernier est près de 9 m derrière le ballon. Il n'a donc aucune chance de le récupérer en taclant.

I. C Le but d'Icardi

14. Par analyse dimensionnelle on montre que $[\lambda] = MLT^{-2} / (LT^{-1}) = MT^{-1}$ soit λ en kg s^{-1} .

15. On se place à présent dans le repère $(S, -\vec{u}_x, \vec{u}_y', \vec{u}_z)$ dans lequel $\vec{u}_y' = -\vec{u}_y$. On notera y' la composante du vecteur-position du ballon selon \vec{u}_y' et z selon \vec{u}_z . On représente la situation sur la figure ??.

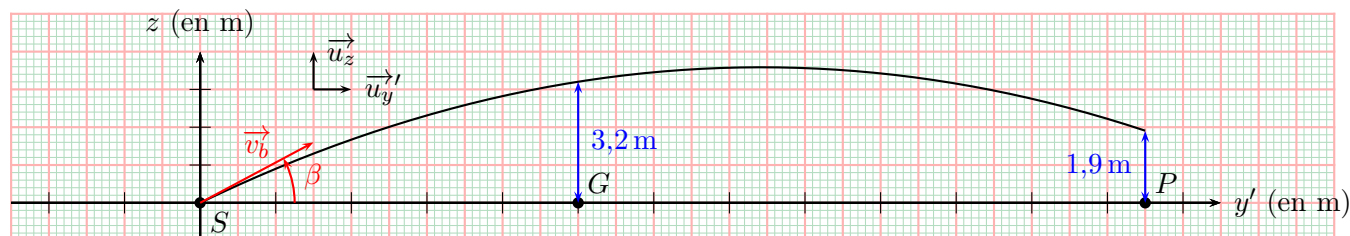


FIGURE 3 – Trajectoire du ballon durant le lob au-dessus de Steve Mandanda.

L'origine des temps est maintenant prise au moment où Mbappé déclenche sa passe. L'application de la deuxième loi de Newton au ballon donne, en posant $\tau = \frac{m}{\lambda}$, et en utilisant les conditions initiales :

1. La deuxième solution correspond à un ballon qui revient en arrière après s'être arrêté, ce qui n'est pas possible.

□ selon $\vec{u}_{y'}'$:

$$m\ddot{y}' + \lambda\dot{y}' = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{y}' = \mu_{y'} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \mu_{y'} = v_b \cos \beta$$

□ selon \vec{u}_z' :

$$m\ddot{z} + \lambda\dot{z} = -mg \quad \text{soit} \quad \dot{z} = \mu_z \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau g \quad \text{avec} \quad \mu_z = v_b \sin \beta + \tau g$$

On obtient donc d'une part :

$$\boxed{y' = \tau v_b \cos \beta \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

et d'autre part :

$$\boxed{z = (v_b \sin \beta + \tau g) \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - \tau g t}$$

Grâce à l'expression de y' on obtient :

$$1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{y'}{\tau v_b \cos \beta} \quad \text{et} \quad t = -\tau \ln\left(1 - \frac{y'}{\tau v_b \cos \beta}\right)$$

ce qui permet d'obtenir l'équation de la trajectoire.

$$\boxed{z = \frac{(v_b \sin \beta + \tau g)}{v_b \cos \beta} y' + \tau^2 g \ln\left(1 - \frac{y'}{\tau v_b \cos \beta}\right)}$$

- 16.** Si λ est très faible, on peut donc considérer que quelle que soit les valeurs de y' , v_b et β , $\frac{y'}{\tau v_b \cos \beta} \ll 1$.

On utilise alors le développement limité à l'ordre 2 fourni :

$$z \simeq \tan \beta y' + \frac{\tau g}{v_b \cos \beta} y' - \frac{\tau^2 g}{\tau v_b \cos \beta} y' - \frac{\tau^2 g}{2\tau^2 v_b^2 \cos^2 \beta} y'^2$$

Ce qui se simplifie, comme demandé par l'énoncé, sous la forme :

$$\boxed{z \simeq -\frac{g}{2v_b^2 \cos^2 \beta} y'^2 + y' \tan \beta}$$

- 17.** On a alors : $H_2 = z(y'_2)$ avec $y'_2 = 25$ m et $H_1 = z(y'_1)$ avec $y'_2 = 10$ m. Soit, en multipliant l'équation du mouvement prise en y'_1 par y'_2/y'_1 et réciproquement celle en y'_2 par y'_1/y'_2 :

$$\frac{y'_2}{y'_1} H_1 = -\frac{g}{2v_b^2 \cos^2 \beta} y'_2 y'_1 + y'_2 \tan \beta$$

et

$$\frac{y'_1}{y'_2} H_2 = -\frac{g}{2v_b^2 \cos^2 \beta} y'_1 y'_2 + y'_1 \tan \beta$$

En soustrayant ces deux dernières relations, on obtient :

$$\left(\frac{y'_2}{y'_1} H_1 - \frac{y'_1}{y'_2} H_2\right) = (y'_2 - y'_1) \tan \beta$$

dont on peut déduire l'expression de β :

$$\boxed{\beta = \arctan\left(\frac{\frac{y'_2}{y'_1} H_1 - \frac{y'_1}{y'_2} H_2}{y'_2 - y'_1}\right) = 25,8^\circ}$$

Il ne reste alors plus qu'à donner l'expression de v_b . Or :

$$y'_2 H_1 = -\frac{g}{2v_b^2 \cos^2 \beta} y'_2 y_1'^2 + y'_2 y_1' \tan \beta \quad \text{et} \quad y'_1 H_2 = -\frac{g}{2v_b^2 \cos^2 \beta} y'_1 y_2'^2 + y'_1 y_2' \tan \beta$$

Donc, par soustraction :

$$y'_2 H_1 - y'_1 H_2 = -\frac{g}{2v_b^2 \cos^2 \beta} (y'_2 y_1'^2 - y'_1 y_2'^2)$$

et donc :

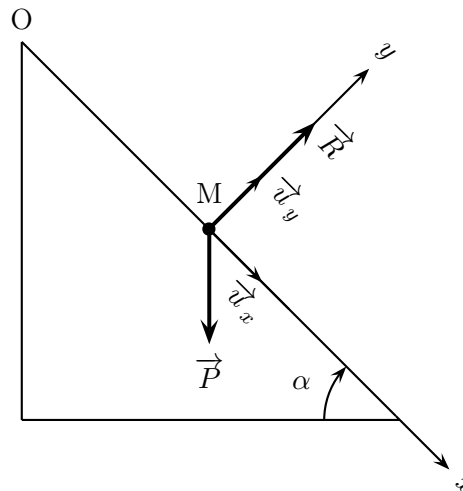
$$v_b = \sqrt{\frac{-g (y'_2 y_1'^2 - y'_1 y_2'^2)}{2 \cos^2 \beta (y'_2 H_1 - y'_1 H_2)}} = 19,3 \text{ m s}^{-1} = 69,3 \text{ km h}^{-1}$$

II Autour de la luge (*D'après Concours ATS 2013*)

II. A Trajectoires

Descente rectiligne

1.
 - SYSTÈME : ensemble {luge+lugeur} assimilé à un point M de masse m ;
 - RÉFÉRENTIEL : de la piste, supposé galiléen ;
 - REPÉRAGE : cartésiennes ;
 - ÉLÉMENTS CINÉMATIQUES : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$; $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x = v\vec{u}_x$; $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x = a\vec{u}_x$;
 - FORCES : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$; réaction $\vec{R} = R\vec{u}_y$ ($R \geq 0$) normale au support en l'absence de frottements solides.



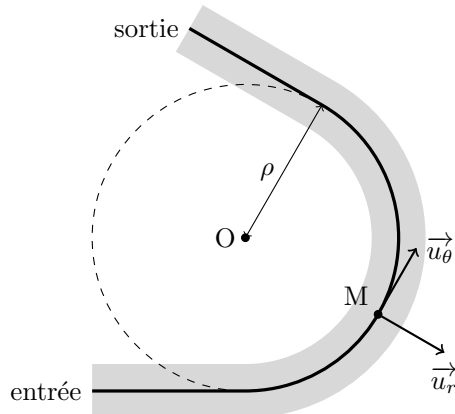
2. Appliquons le principe fondamental de la dynamique (PFD) à M dans le référentiel de la piste supposé galiléen : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$. En projection sur \vec{u}_x et \vec{u}_y , on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha \\ 0 = -mg \cos \alpha + R \end{cases}$$

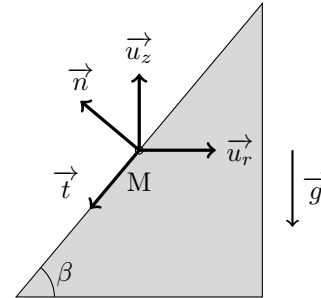
La première équation permet de déterminer l'accélération $a = \ddot{x}$: $a = g \sin \alpha$. Pour l'application numérique, on utilise $\sin \alpha = 10/\sqrt{10^2 + 100^2}$ d'où $a = 0,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La deuxième équation $R = mg \cos \alpha$ donne accès à la réaction.

3. Par intégration de $\ddot{x} = g \sin \alpha$ par rapport au temps, on obtient $\dot{x} = g \sin(\alpha) t + k$ avec k une constante d'intégration. Compte tenu de la condition initiale $\dot{x}(0) = v_0$, on obtient $k = v_0$. En posant $v = \dot{x}$, on a finalement : $v(t) = g \sin(\alpha) t + v_0$. Ainsi, $v(t_a) = v_a$ fournit $t_a = \frac{v_a - v_0}{g \sin \alpha}$; AN : $t_a = 26 \text{ s}$.
4. Intégrons la vitesse par rapport au temps en prenant comme condition initiale $x(0) = 0$: $x(t) = \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2 + v_0 t$. En posant $x(t_a) = d$, on obtient : $d = \frac{v_a^2 - v_0^2}{2g \sin(\alpha)}$; AN : $d = 0,45 \text{ km}$.

Virage circulaire



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

5. On utilise les coordonnées polaires pour paramétrer le mouvement de M en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V , sur un cercle de rayon ρ : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_r$, $\vec{v} = \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta = V \vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -V \dot{\theta} \vec{u}_r$. En utilisant la relation $\dot{\theta} = \frac{V}{\rho}$ donnée par la vitesse, on en déduit l'accélération : $\vec{a} = -\frac{V^2}{\rho} \vec{u}_r$.

L'objet reste en mouvement circulaire uniforme grâce à une force centripète. En son absence, il serait éjecté de la piste.

6. Commençons par décomposer les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_z sur (\vec{t}, \vec{n}) : $\vec{u}_r = -\cos(\beta) \vec{t} - \sin(\beta) \vec{n}$ et $\vec{u}_z = -\sin(\beta) \vec{t} + \cos(\beta) \vec{n}$. La lugne n'étant soumise qu'à son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ et à la réaction $\vec{R} = R_N \vec{n} + R_T \vec{t}$, le PFD s'écrit :

$$m \frac{V^2}{\rho} (\cos(\beta) \vec{t} + \sin(\beta) \vec{n}) = mg(\sin(\beta) \vec{t} - \cos(\beta) \vec{n}) + R_N \vec{n} + R_T \vec{t}$$

7. Les projections du PFD sur \vec{n} et \vec{t} permettent d'accéder respectivement à R_N et R_T :

$$\begin{cases} R_N = m \frac{V^2}{\rho} \sin(\beta) + mg \cos(\beta) \\ R_T = m \frac{V^2}{\rho} \cos(\beta) - mg \sin(\beta) \end{cases}$$

8. D'après la question précédente, $R_T = 0 \Leftrightarrow V_c = \sqrt{\rho g \tan(\beta)}$. On a alors $R_T = m \frac{V^2 - V_c^2}{\rho} \cos(\beta)$

9. $V \geq V_c$ donc $|R_T| = R_T = m \frac{V^2}{\rho} \cos(\beta) - mg \sin(\beta) < f \left(m \frac{V^2}{\rho} \sin(\beta) + mg \cos(\beta) \right)$, soit

$$V^2(\cos(\beta) - f \sin(\beta)) < g\rho(\sin(\beta) + f \cos(\beta))$$

10. Pour $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $g\rho(\sin(\beta) + f \cos(\beta)) > 0$ donc si $\cos(\beta) - f \sin(\beta) \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\tan(\beta) \geq \frac{1}{f}}$. On en

déduit $\boxed{\beta_{\min} = \arctan\left(\frac{1}{f}\right)}$; AN : $\boxed{\beta_{\min} = 68^\circ}$.

11. Si $\tan(\beta) < \frac{1}{f}$, alors la condition de non dérapage est $V < \sqrt{\rho g \frac{f \cos(\beta) + \sin(\beta)}{\cos(\beta) - f \sin(\beta)}}$. Si la vitesse est trop grande, la luge sort du virage.

12. En l'absence de frottement, le non dérapage se traduit par $R_T = 0$ soit $V = V_c$.

II. B Freinage mécanique

13. La réaction du support ne travaille pas et les frottements sont négligés : le problème est donc conservatif.

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit : $\frac{1}{2}mv_a^2 + 0 = 0 + mgL \sin(\alpha)$ soit $\boxed{L = \frac{v_a^2}{2g \sin(\alpha)}}$; AN :

$\boxed{L = 0,45 \text{ km}}$.