

– DS (6) de physique-chimie –

Optique géométrique & Mécanique quantique

Le samedi 13 mars 2021 - Durée 3h

Prologomènes : vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction !

- Les fautes de français et les copies mal présentées seront pénalisées.
 - N'utilisez que des **copies doubles** que vous devrez **numéroter en indiquant le total** (par exemple 1/3, 2/3, 3/3).
 - Une **marge** doit être laissée pour la correction sur la partie **gauche** de votre copie.
 - Les réponses non justifiées et les applications numériques ne comportant pas d'unité **seront ignorées**.
 - Vous prendrez soin de bien **numéroter les questions** et **d'encadrer vos réponses**.
-

I Capture d'empreintes digitales par réflexion totale frustrée (D'après Centrale-Supélec MP 2019)

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite *capteur optique d'empreinte digitale* est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale frustrée qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté n . Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde λ_0 dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.



FIGURE 1 – Capteur d'empreinte digitale (Wikimedia, Rachmaninoff, 2009-10-21)

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre (\mathcal{D}) et d'une lentille convergente (\mathcal{L}) (figure 3). Si A est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note A_1 l'image de A à travers le dioptre (\mathcal{D}) et A'_1 celle de A_1 à travers la lentille (\mathcal{L}) :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{D})} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L})} A'_1$$

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1 A'_1}, \quad D = \overline{A A'_1}, \quad p = \overline{O A_1}, \quad p' = \overline{O A'_1}$$

Les parties I. A, I. B et I. C sont indépendantes.

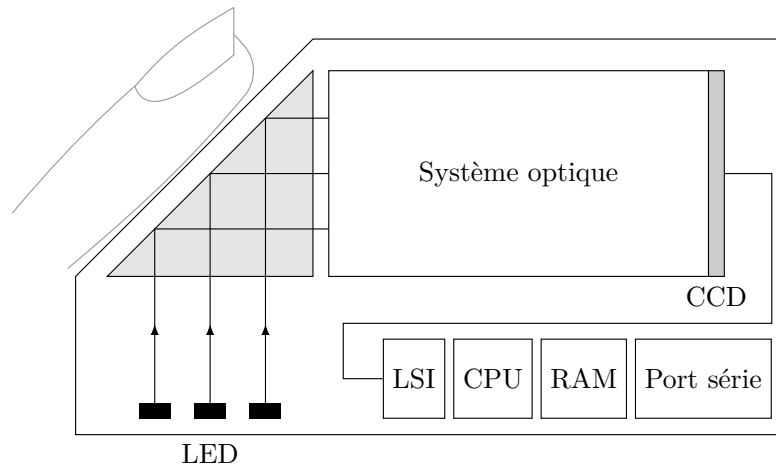


FIGURE 2 – Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

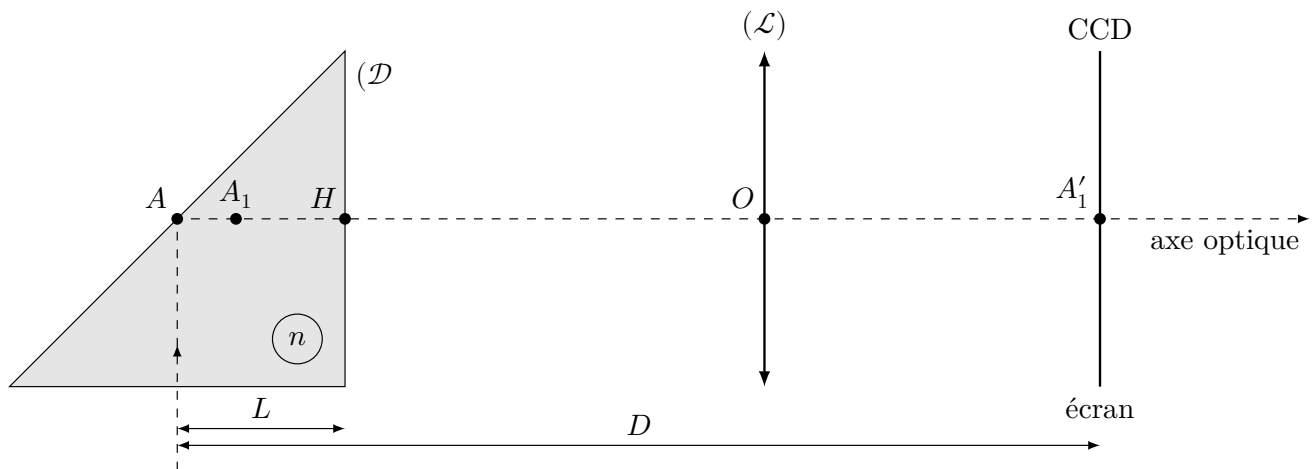


FIGURE 3 – Schéma optique

I. A Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale f' de la lentille et sa position, par exemple en déterminant p' . On donne $n = 1,5$, $L = 3$ cm, $D = 10$ cm et le grandissement transversal $\gamma = \frac{p'}{p}$ du système optique.

1. On note A_1 l'image de A par le dioptré plan (figure 4) formé par la face de sortie du prisme.
 - (a) Établir la relation de conjugaison reliant $\overline{HA_1}$, \overline{HA} , n et i .
 - (b) Définir les conditions de Gauss. Montrer que dans cette approximation, la relation de conjugaison précédente se simplifie en $\frac{\overline{HA_1}}{\overline{HA}} = \frac{1}{n}$. On conservera cette expression pour la suite du problème.
2. On s'intéresse maintenant à la lentille \mathcal{L} .
 - (a) Exprimer p et p' en fonction de D_1 et de γ .
 - (b) Écrire, sans la démontrer, la relation de conjugaison de Descartes reliant p , p' et f' .
 - (c) En déduire qu'on peut écrire $\frac{D_1}{f'} = f(\gamma)$ avec $f(\gamma)$ une fonction de γ uniquement qu'on explicitera.
3. On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale f' d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance D_1 d'un objet réel. En remarquant qu'il

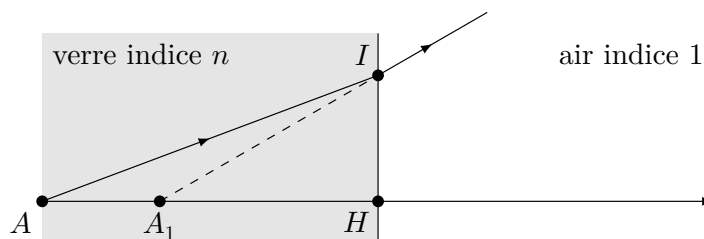


FIGURE 4

faut $\gamma < 0$ pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport $\frac{D_1}{f'}$ est inférieurement borné. En déduire une inégalité vérifiée par f' et D_1 .

4. *Applications numériques.* On suppose $\gamma = -2$. À quelle distance place-t-on la lentille devant l'écran et quelle est sa distance focale ?
5. On souhaite avoir une image la plus agrandie possible ($|\gamma|$ maximal), mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur D_1 . Dans quel sens faut-il faire varier f' ? En pratique, quelle limitation rencontre-t-on ?

I. B Résolution de l'image

Dans cette partie, on fait abstraction du prisme en considérant que l'empreinte est en A_1 au lieu de A .

Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne $e = 30 \mu\text{m}$ et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de $a = 100 \mu\text{m}$. On note ℓ_c la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe A_1 , à l'écran CCD (figure 5).

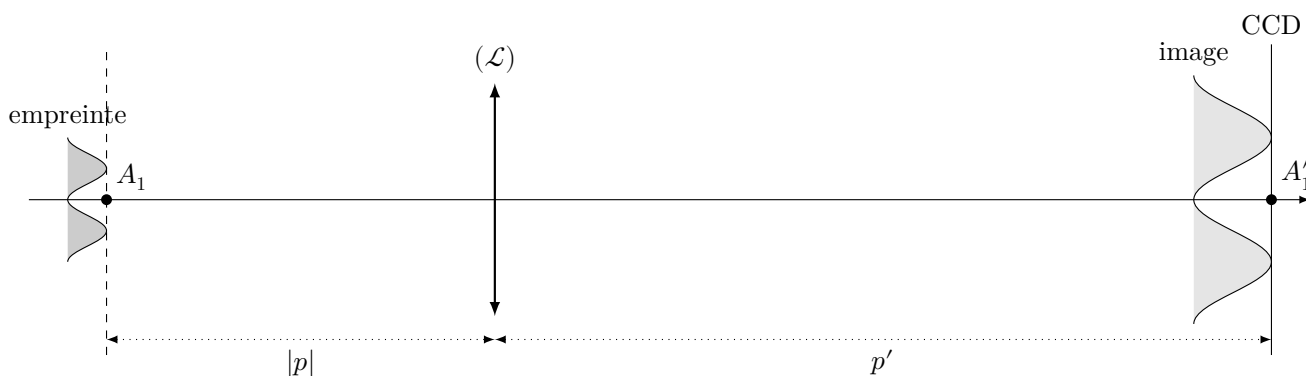


FIGURE 5

Sur la figure 6, les points M_1 , M_2 et M_3 détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives M'_1 , M'_2 et M'_3 détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que le point M'_2 ne se forme pas tout à fait sur la surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre ϕ .

On note p' la distance entre la lentille et la surface du CCD et $|p|$ avec $p < 0$, la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets M_1 et M_3 . On note alors $\gamma = \frac{p'}{p}$ le grandissement entre les couples de points conjugués (M_1, M'_1) et (M_3, M'_3) . On a $\gamma = -2$.

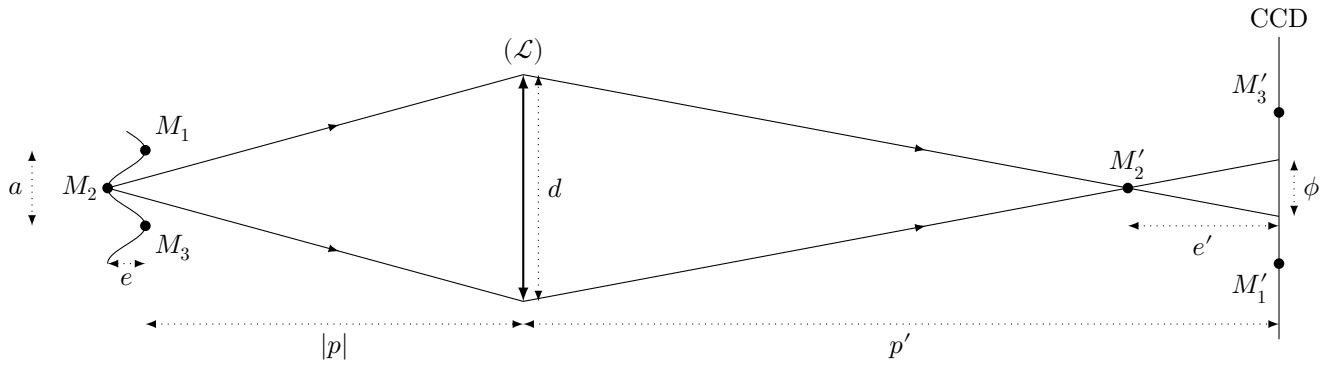


FIGURE 6 – Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

6. À quelle condition sur ℓ_c , a et γ peut-on distinguer deux crêtes successives sur le capteur CCD ? Donner la valeur numérique de la plus grande valeur de ℓ_c , notée $\ell_{c,\max}$, permettant de remplir cette condition.
7. Soit d le diamètre de la monture de la lentille (\mathcal{L}) et e' la distance de M'_2 à la surface du capteur CCD.
 - (a) Exprimer ϕ en fonction de d , p' et e' .
 - (b) On se place dans l'approximation $e \ll |p|$ pour laquelle on admet qu'on a également $e' \ll p'$ et $e' \simeq \gamma^2 e$. En déduire une expression approchée de ϕ en fonction de γ , d et du rapport $\frac{e}{p}$.
8. On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre ϕ de la tache excède la distance $M'_1 M'_3$. Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre d de la monture ? Montrer, en argumentant sur les ordres de grandeur, que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

I.C Réflexion totale

Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

9. Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.
10. Définir la réflexion totale et en donner les conditions.
11. Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que $n = 1,5$.

II Spectre d'émission de l'atome de mercure

Ce problème s'intéresse à la structure énergétique de l'élément mercure Hg. Après quelques questions préliminaires, le problème détaille le fonctionnement d'un spectrogoniomètre, dispositif optique permettant de séparer spatialement les raies d'émission du spectre d'un atome. Le problème revient ensuite sur la nature quantique de la matière et fait le lien entre les observations au spectrogoniomètre et la structure énergétique de l'atome de mercure.

II. A Questions préliminaires

Le numéro atomique de l'atome de mercure est $Z = 80$. L'isotope naturel le plus répandu est l'isotope $^{202}_{80}\text{Hg}$.

1. Que représente Z ? Combien l'isotope considéré possède-t-il de neutrons et d'électrons ?
2. Rappeler les règles de Pauli, Klechkowski et Hund permettant d'établir la configuration électronique d'un élément.
3. Donner la structure électronique du mercure à l'état fondamental. Combien possède-t-il d'électrons de coeur ? d'électrons de valence ?
4. Représenter le diagramme d'énergie des premiers niveaux de l'atome de mercure et les remplir conformément à la configuration électronique à l'état fondamental.
5. Les ions les plus stables du mercure que l'on rencontre sont les ions Hg^+ et Hg^{2+} . Justifier. On donnera au préalable leur configuration électronique.

II. B Dispositif optique principal

On se propose dans cette partie de détailler le fonctionnement d'un spectrogoniomètre. Cet instrument d'optique permet une observation à l'oeil, sans fatigue, d'une fente éclairée par une source lumineuse.

L'instrument comporte plusieurs éléments :

- ★ un collimateur constitué d'une lentille convergente \mathcal{L}_0 de distance focale $f'_0 = 10,0\text{ cm}$ et d'une fente verticale réglable en largeur dont la position devant \mathcal{L}_0 est ajustable ;
- ★ une lunette de visée réglable comprenant une première lentille convergente \mathcal{L}_1 appelé « objectif » de distance focale $f'_1 = 15,00\text{ cm}$, un réticule \mathcal{R} placé dans le plan focal image de l'objectif et une deuxième lentille convergente \mathcal{L}_2 appelé « oculaire » de distance focale $f'_2 = 5,00\text{ cm}$ dont la position derrière le réticule est ajustable ;
- ★ une platine horizontale circulaire, placée entre le collimateur et la lunette, pouvant accueillir un élément dispersif.

L'observation se fait derrière l'oculaire par un oeil au repos que l'on suppose emmétrope. On supposera que l'oeil est placé dans le plan focal image de l'oculaire. On modélisera l'oeil par une lentille convergente \mathcal{L}_c , de distance focale f'_c ajustable, située à une distance $e = 2,00\text{ cm}$ fixe de la rétine qui sera elle assimilée à un écran transversal à l'axe optique de la lentille \mathcal{L}_c .

On supposera dans toute la suite que toutes les lentilles sont minces et sphériques et que les conditions de Gauss sont satisfaites. On supposera que les rayons des lentilles \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont égaux et valent $R = 2,50\text{ cm}$. Le rayon du cristallin sera pris égal à $r = 0,50\text{ cm}$.

On supposera de plus dans cette partie II. B que l'ensemble de l'instrument est centré, c'est-à-dire que tous les éléments ont le même axe optique horizontal que l'on note Δ .

II. B.1 Réglage de la lunette à l'infini

On s'intéresse d'abord uniquement à l'oeil de l'observateur.

5. Que représentent le « punctum proximum » (PP) et le « punctum remotum » (PR) d'un oeil ?
6. Où se situent ces points par rapport au cristallin d'un oeil emmétrope ?
7. Compte tenu des hypothèses de l'énoncé, où se situent les points vus nettement par l'oeil ?

On souhaite que la lunette utilisée soit réglée de façon à permettre l'observation d'objets situés à l'infini.

8. Où doit être placé l'oculaire de la lunette afin de permettre ce type d'observations ?
9. Écrire de façon synthétique la conjugaison réalisée par la lunette. Comment qualifie-t-on ce type de système optique ?
10. Faire un schéma, à l'échelle 1/2, de la lunette correctement réglée (prendre la longueur d'une copie) et de l'oeil. Tracer le parcours d'un rayon lumineux incident sur la lunette, incliné d'un angle algébrique α par rapport à Δ , à travers l'ensemble de la lunette. On expliquera en quelques lignes le principe de cette construction géométrique et on fera apparaître l'angle algébrique α' que fait le rayon émergent de la lunette par rapport à Δ .
11. Établir l'expression du grossissement angulaire $G = \alpha'/\alpha$ de la lunette en fonction de f'_1 et f'_2 . Faire l'application numérique
12. Dans cette question uniquement, on ne suppose plus que l'oeil est emmétrope. L'oeil de l'observateur est myope et son punctum remotum est situé à 1,00 m de son cristallin. De quelle distance ℓ et dans quel sens faut-il déplacer l'oculaire pour que cet oeil myope puisse observer, sans se fatiguer, des objets à l'infini par rapport à la lunette ? On attend l'expression littérale de ℓ ainsi que sa valeur numérique.

II. B.2 Réglage du collimateur

Une lampe à vapeur de mercure éclaire directement la fente du collimateur dont on a fixé la largeur. On considérera dans toute la suite que cette largeur vaut $a = 1,0 \text{ mm}$ et que la longueur vaut $b = 2,00 \text{ cm}$.

13. Où doit-on placer la lentille du collimateur par rapport à la fente de celui-ci pour observer nettement et sans fatigue la fente à travers l'ensemble {collimateur + lunette} ?
14. Afin d'effectuer ce réglage, on procède par autocollimation. On accole à la face arrière de \mathcal{L}_0 , un miroir plan \mathcal{M} . Montrer que tout objet situé dans la plan focal objet du collimateur aura une image dans ce même plan après avoir traversé le système $\{\mathcal{L}_0, \mathcal{M}, \mathcal{L}_0\}$. On s'aidera d'un schéma sur lequel on tracera les rayons permettant d'obtenir l'image B' d'un point B hors de l'axe optique situé dans le plan focal objet de \mathcal{L}_0 .
15. Montrer que, dans ces conditions, l'image obtenue est renversée et de même taille que l'objet.
16. On suppose que le réglage du collimateur a été effectué correctement. Sous quel angle sera vue la fente du collimateur à travers l'ensemble {collimateur + lunette} ?
17. Quelle sera la taille de l'image de la fente sur la rétine de l'oeil emmétrope au repos ?

II. C Dispositif secondaire de séparation spectrale

Dans cette partie, les axes optiques de la lunette et de l'oeil restent confondus. Tout en restant dans le même plan horizontal que l'axe optique du collimateur, l'axe commun à la lunette et à l'oeil peut pivoter autour de l'axe central de la platine circulaire du spectrogoniomètre. Comme indiqué sur la figure 7, on repère par l'angle θ que font entre eux, pour une position donnée, l'axe optique de l'ensemble {lunette + oeil} et l'axe optique du collimateur.

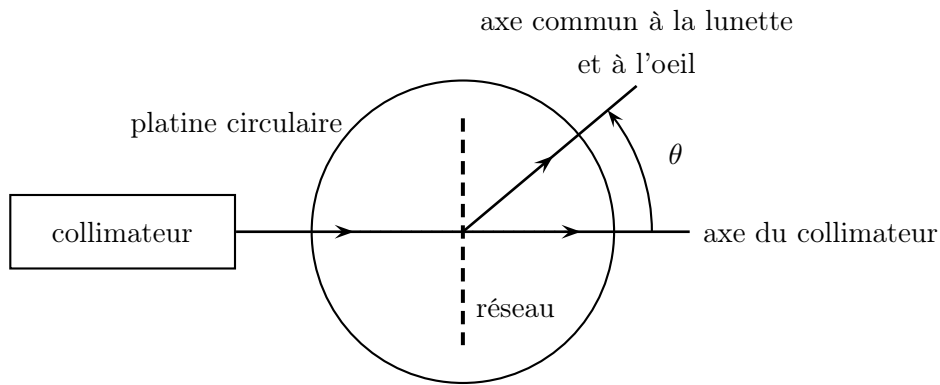


FIGURE 7 – Positionnement du réseau sur la platine circulaire. Rotation de la lunette autour de la platine

Afin d'observer le spectre de la lumière émise par la source, on place un dispositif de séparation spectrale au centre de la platine du spectrogoniomètre. Plusieurs options sont possibles : on peut utiliser un dispositif de séparation par dispersion au moyen d'un prisme de verre ou un dispositif de séparation par diffraction au moyen d'un réseau.

18. Rappeler la loi de Cauchy simplifiée d'un milieu dispersif. Citer une application industrielle ou une observation naturelle s'appuyant sur la propagation de la lumière dans un milieu dispersif.
19. Rappeler la loi de la diffraction d'un faisceau lumineux parallèle de longueur d'onde λ sur un obstacle de largeur caractéristique a . En déduire que la diffraction de la lumière visible issue de la source à vapeur de mercure par la fente du collimateur peut-être négligée.

On choisit dans la suite, pour des raisons pratiques, de travailler avec un réseau. Il s'agit d'un ensemble de fils verticaux très fins, séparés les uns des autres d'une distance d appelée « pas du réseau ». Ce réseau est placé dans le plan transversal à l'axe optique du collimateur et contenant l'axe central de la platine circulaire (figure refplatine). Dans ces conditions, tout faisceau parallèle monochromatique incident sur le réseau est dévié d'un angle θ satisfaisant à la loi de la diffraction pour laquelle on prendra $a = d$. En faisant tourner autour de la platine l'ensemble {lunette + oeil}, on observe donc, selon l'angle θ choisi, des fentes colorées correspondant aux différentes longueurs d'onde de la source.

Dans le cas du mercure, on observe notamment :

Couleur	violette	bleue	verte	jaune	orange	rouge
Angle (en degré)	6,93	7,50	9,43	9,99	10,63	11,98

La figure 8 présente les principales raies d'émission dans le visible de l'atome de mercure.

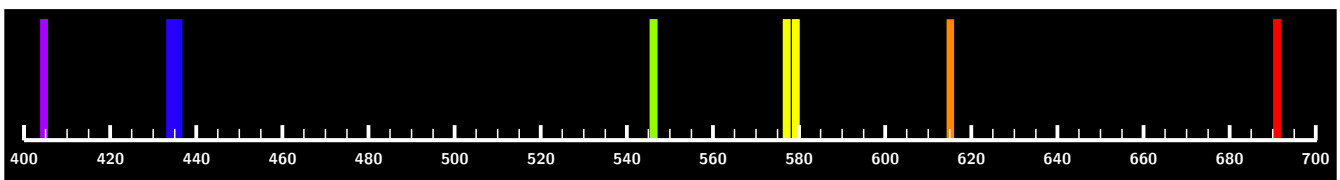


FIGURE 8 – Spectre d'émission d'une lampe à vapeur de mercure (λ en nm)

20. Déterminer la valeur numérique du pas du réseau d à l'aide d'une régression linéaire.

Ces résultats seront utilisés dans la partie suivante du problème.

II. D Structure énergétique de l'atome de mercure

On donne ci-dessous l'énergie associée à quelques uns des niveaux du diagramme énergétique de l'atome de mercure.

- 21.** Déterminer les transitions auxquelles correspondent respectivement les raies verte et orange du spectre d'émission.
- 22.** Quelle devrait-être la longueur d'onde d'un rayonnement lumineux permettant d'ioniser l'atome de mercure ? À quel domaine spectral cette longueur d'onde correspond-elle ?

État	Fondamental	Excité n°1	Excité n°2	Excité n°3	Excité n°4	Excité n°5	Excité n°6	Excité n°7	Excité n°8	Excité n°9
Énergie (en eV)	-10,5	-5,78	-5,56	- 4,97	-3,74	-2,71	-2,51	-1,90	-1,81	-1,60

TABLE 1 – *Principaux niveaux d'énergie de l'atome de mercure*

FIN DE L'ÉNONCÉ

* * *