Mécanique

Partie 1

Charles Tuchendler

MPSI 4 – Lycée Saint-Louis

Année 2018/2019

Table des matières

CHAPITRE XIX

ENERGIE DU POINT MATÉRIEL

Sommaire

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appréhender les lois de la mécanique d'une nouvelle manière. Si l'étude dynamique seule est suffisante pour résoudre le problème, il peut parfois se révéler plus simple d'utiliser une autre approche : **l'approche énergétique**.

Cette approche sera à privilégier pour calculer en particulier la **norme du vecteur-vitesse** à un instant donné dans le cadre d'un problème de mécanique à un seul degré de liberté.

I Théorème de l'énergie cinétique

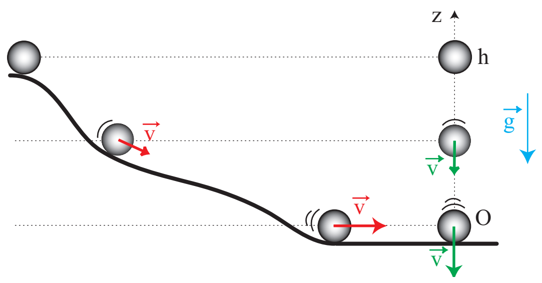
I.1 Effet d'une force sur le module de la vitesse

Exemple – Chute d'une bille d'une hauteur donnée selon deux trajectoires

On considère deux billes identiques :

- lâchées sans vitesse initiale d'une même hauteur h,
- l'une en chute libre,
- et l'autre sur un support de forme quelconque mais n'exerçant aucune force de frottement sur la bille.

On constate que les deux billes parviennent à des altitudes identiques avec des vecteurs vitesses de norme identique.



Remarque : la durée de chute, et les trajectoires sont bien évidemment différentes[a].

a. On remarquera que la bille glisse sur le support, mais ne roule pas car il n'y a pas de frottements.

Propriété XIX.1 – Norme du vecteur-vitesse et dénivelé

Lors de la chute d'un objet, ***en absence de tout frottement***, la norme du vecteur-vitesse $\|\vec{v}\|$ ne dépend que du dénivelé h réalisé par l'objet.

Ce résultat est difficile à démontrer pour une forme de support quelconque en utilisant les lois de la dynamique. Nous allons donc proposer une autre méthode pour résoudre ce problème simplement.

I.2 Energie cinétique

Définition XIX.1 – Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ est définie par :

$$\boxed{E_c(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\, m\, v^2(M)_{/\mathcal{R}}}$$

où $v^2(M)_{/\mathcal{R}} = \|\vec{v}\|^2$.

Remarques :

- l'énergie cinétique, comme toute énergie, s'exprime en joule (J) et a pour dimension $[E_c] = ML^2T^{-2}$,
- E_c est directement reliée à la norme de la vitesse, et est donc une quantité bien adaptée à l'étude de v.

I.3 Dérivée de l'énergie cinétique

Afin d'étudier **la variation instantanée de la norme du vecteur-vitesse**, intéressons nous tout d'abord à la dérivée temporelle de l'énergie cinétique.

Exercice XIX.1 – Dérivée temporelle de l'énergie cinétique

Etablir l'expression de la dérivée temporelle de l'énergie cinétique en fonction du vecteur vitesse $\vec{v}$ du système et de la résultante des forces qui s'exercent dessus.

I.3.a Puissance d'une force

Définition XIX.2 – Puissance d'une force

La puissance de la force $\vec{F}$ reçue par le point M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}(M)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}$$

Propriété XIX.2 – Puissance d'une force

- ⋆ La puissance s'exprime en watt, et a pour dimension $[\mathcal{P}] = \mathrm{ML^2T^{-3}}$.
- ⋆ La force est **motrice** si la puissance reçue est positive $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} > 0$ (cf. électrocinétique) : la force agit globalement dans le sens du déplacement et accélère celui-ci.
- ⋆ La force est **résistante** si la puissance reçue est négative $\mathcal{P}(\vec{F})_{/\mathcal{R}} < 0$ (cf. électrocinétique) : la force agit globalement dans le sens opposé au déplacement et ralentit celui-ci.
- ⋆ La puissance reçue est nulle si $\vec{F} \perp \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$. La force ne fait que **modifier la direction de la vitesse** sans en modifier sa norme [a].

[a] On voit ici l'intérêt de s'intéresser à la variation de l'énergie cinétique, car on s'affranchira de la réaction normale au support, dont l'expression est compliquée, lors du calcul de la norme de la vitesse.

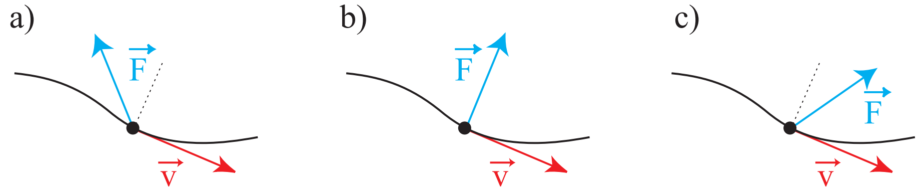


Figure XIX.1 – *a) Force résistante, b) Force ne modifiant que la direction de la vitesse, c) Force motrice.*

I.3.b Théorème de la puissance cinétique

Théorème XIX.1 – Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, la puissance de la résultante des forces s'exerçant sur un point matériel M est égale à la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c(M)_{/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{\text{rés}})_{/\mathcal{R}}}$$

Remarque : on retrouve bien qu'une puissance positive conduit à une augmentation de l'énergie cinétique au cours du temps, et inversement pour une puissance négative. Une puissance nulle ne conduit à aucune variation d'énergie cinétique.

I.4 Variation de l'énergie cinétique

Il est souvent plus intéressant de réaliser un bilan d'énergie cinétique $\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_c(M)$ entre deux points A et B de la trajectoire Γ plutôt que de connaître la puissance cinétique instantanée au cours du mouvement.

Il suffit pour cela d'intégrer le théorème de la puissance cinétique entre les deux instants notés t_A et t_B correspondants aux points de passage A et B de la trajectoire Γ :

$$\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_c(M/\mathcal{R}_g) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{\text{rés}})_{/\mathcal{R}}\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \overrightarrow{F}_{\text{rés}} \cdot \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}_g}\mathrm{d}t$$

I.4.a Travail d'une force

La formule précédente fait apparaître une quantité appelée **travail d'une force**, définie de façon élémentaire (infinitésimale) ci-dessous à partir du déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ le long de la trajectoire : $\overrightarrow{v}\mathrm{d}t = \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{\mathrm{d}OM}$, où le point O est pris comme origine du repère d'étude.

Définition XIX.3 – Travail reçu élémentaire ou total

Le **travail élémentaire** de la force $\overrightarrow{F}$ reçu par le point M au cours de son déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{\delta W(\overrightarrow{F}) = \mathcal{P}(\overrightarrow{F})_{/\mathcal{R}}\mathrm{d}t = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}}\mathrm{d}t = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

Le **travail total** reçu par le point M au cours de son déplacement entre les points A et B le long de la trajectoire Γ est :

$$\boxed{\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{F}) = \int_{M\epsilon\Gamma_{AB}} \delta W(\overrightarrow{F}) = \int_{M\epsilon\Gamma_{AB}} \mathcal{P}(\overrightarrow{F})_{/\mathcal{R}}\mathrm{d}t = \int_{M\epsilon\Gamma_{AB}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$$

Propriété XIX.3 – Travail d'une force

- ⋆ δW représente une quantité infinitésimale de travail.
- ⋆ On rappelle que $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques, ...
- ⋆ Un travail est homogène à une énergie $[W] = \mathrm{M.L^2.T^{-2}}$ et s'exprime en joule (J).
- ⋆ La puissance correspond à la dérivée temporelle du travail : $\mathcal{P}(\overrightarrow{F})_{/\mathcal{R}} = \frac{\delta W(\overrightarrow{F})}{\delta t}$.
- ⋆ $\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{F})$ **dépend a priori du chemin suivi, c'est-à-dire de la trajectoire** Γ **entre** A **et** B.

I.4.b Théorème de l'énergie cinétique

En remplaçant le travail de la résultante des forces dans l'expression de la variation de l'énergie cinétique, on obtient alors le **théorème de l'énergie cinétique**.

Théorème XIX.2 – Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_A et t_B, correspondant à deux points A et B de la trajectoire Γ, est égale au travail de la résultante des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés :

$$\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_c(M/\mathcal{R}_g) = E_c(t_B) - E_c(t_A) = \underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{F}_{\text{rés}})$$

Un travail positif conduit à une augmentation de l'énergie cinétique entre les deux instants, et inversement pour un travail négatif. Si la résultante des forces ne travaille pas, aucune variation d'énergie cinétique ne sera constatée.

I.4.c Exemple : mouvement d'un point sur un support de forme quelconque

Exercice XIX.2 – Application du théorème de l'énergie cinétique

Montrer en appliquant le théorème de l'énergie cinétique que pour un système chutant sans vitesse initiale et sans subir de frottement, la norme du vecteur-vitesse ne dépend que du dénivelé effectué.

Nous avons vu un cas d'application du théorème de l'énergie cinétique pour lequel le travail des forces était très simple. Afin de savoir si cela est toujours le cas, nous allons nous intéresser au calcul du travail d'autres forces.

II Energie potentielle

II.1 Forces conservatives

Nous avons vu que le travail du poids ne dépendait pas du chemin suivi, **mais seulement de la différence d'altitude**, ou du dénivelé entre les points de départ A et d'arrivée B, selon la relation :

$$\underset{A\to B}{W}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$

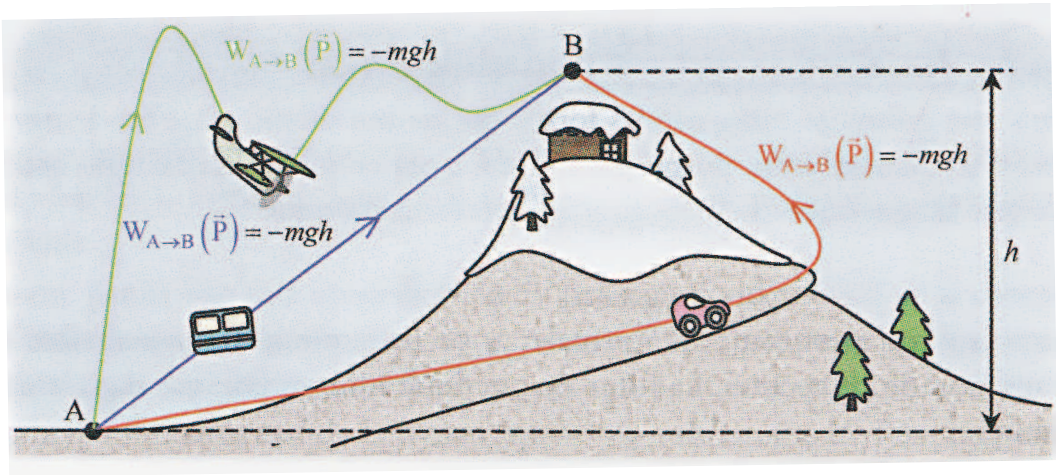


FIGURE XIX.2 – *Le travail résistant du poids pour gravir une montagne est identique quel que soit le chemin emprunté.*

Une force qui possède cette propriété remarquable est dite **conservative** et on peut lui associer ce que l'on appelle une **énergie potentielle**.

Définition XIX.4 – Force conservative

Une force est ***conservative*** si son travail entre deux points quelconques de l'espace ***ne dépend pas*** de la trajectoire suivie par un mobile entre ces deux points.

Le travail d'une force conservative ne dépend donc que des positions initiale et finale du mobile.

Propriété XIX.4 – Force conservative

- Par conséquent, le travail d'une force conservative ne dépend que des points de départ A et d'arrivée B.
- Dès lors, **le travail d'une force conservative le long d'un chemin fermé Γ est nul** :

$$\oint_{\Gamma} \delta W(\vec{F}_{\text{conservative}}) = 0$$

car on peut envisager un chemin de distance nulle pour passer de A à A.
- On en déduit également que **toute force constante est conservative**. Calculons le travail d'une telle force entre deux points A et B [a] :

$$\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\vec{F}) = \int_{M\in\Gamma_{AB}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{F}\cdot\int_{M\in\Gamma_{AB}} \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

a. C'est notamment le cas pour le poids.

II.2 Energie potentielle

D'après l'exemple précédent, nous pouvons définir une fonction dépendant uniquement de la position $E_p(z) = mgz$, homogène à une énergie, et réécrire le travail du poids de la façon suivante :

$$\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{P}) = -mg(z_B - z_A) = -[E_p(B) - E_p(A)] = -\Delta E_p$$

Propriété XIX.5 – Force conservative et énergie potentielle

De façon générale, si $\overrightarrow{F}$ est une **force conservative**, on peut alors définir une fonction E_p **ne dépendant que des variables d'espace** (et donc uniquement de la position du système), appelée **énergie potentielle**, telle que :

$$\boxed{\underset{A\to B}{W}(\overrightarrow{F}) = -\Delta E_p}$$

Remarques :

- ⋆ l'énergie potentielle est une **énergie accumulée** qui va **potentiellement** être utilisée pour mettre en mouvement un corps : **si l'énergie potentielle du point considéré diminue, $\Delta E_p < 0$ et le point peut récupérer du travail car $W > 0$.**
- ⋆ E_p est toujours **définie à une constante près** car seule ΔE_p est une grandeur physique mesurable, de même que la tension est une différence de potentiel où le potentiel est défini à une constante près.
- ⋆ **On aura donc le choix de définir l'origine des énergies comme on avait le choix de définir l'origine des potentiels.**

II.3 Force dérivant d'une énergie potentielle dans un problème unidimensionnel

Définition XIX.5 – Problème unidimensionnel

Un problème est dit **undimensionnel** ou à **un seul degré de liberté**, lorsque l'ensemble des grandeurs physiques ne dépendent que d'une seule variable de l'espace (x ou y ou z ou r ou θ ou φ).

Définition XIX.6 – Force dérivant d'une énergie potentielle

Dans ce cas, on dit qu'**une force $\overrightarrow{F}$ orientée suivant $\vec{u}_\alpha$ dérive d'une énergie potentielle E_p** si, pour un mouvement ne dépendant que de la variable α, il existe une fonction $E_p(\alpha)$ de la variable α telle que :

$$\boxed{F_\alpha = -\frac{\mathrm{d}E_p(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}}$$

avec $\overrightarrow{F} = F_\alpha \vec{u}_\alpha$.

Remarque : l'énergie potentielle élémentaire $\mathrm{d}E_p$ est alors l'opposé du travail élémentaire. Calculons en effet le travail élémentaire d'une telle force :

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}OM} = F_\alpha \mathrm{d}\alpha = -\mathrm{d}E_p(\alpha) \quad \text{et donc} \quad \boxed{\delta W(\overrightarrow{F}) = -\mathrm{d}E_p}$$

Propriété XIX.6 – Force dérivant d'une énergie potentielle

Par intégration entre deux points A et B, on trouve : $\underset{A\to B}{W}(\overrightarrow{F}) = \int_A^B -\mathrm{d}E_p = -\Delta E_p$. Le travail d'une telle force ne dépend donc pas du chemin suivi donc :

Toute force $\overrightarrow{F}$ qui dérive d'une énergie potentielle est conservative

Question XIX.1 – Forces conservatives ?

Quelles sont les forces parmi celles que nous connaissons qui sont conservatives et qui dérivent donc d'une énergie potentielle ?

II.4 Energies potentielles usuelles

II.4.a Energie potentielle de pesanteur

Propriété XIX.7 – Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle $E_{p_{\text{pes}}}$ associée au poids $m\overrightarrow{g}$ d'un point M de masse m, d'altitude z_M dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{u_z})$ tel que $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$, vérifie :

$$E_{p_{\text{pes}}}(M) = E_{p_{\text{pes}}}(M_0) + mg(z_M - z_{M_0})$$

où M_0 est un point quelconque de la trajectoire du point M auquel on associe l'altitude z_{M_0}.

Sous ces conditions, on peut donc écrire :

$$\boxed{E_{p_{\text{pes}}}(M) = E_{p_{\text{pes}}}(z_M) = mgz_M + cste}$$

On peut arbitrairement choisir l'origine de cette énergie potentielle. Ainsi, en posant que $E_{p_{\text{pes}}}(M) = 0$ pour $z_M = 0$, on obtient l'expression suivante :

$$\boxed{E_{p_{\text{pes}}}(M) = E_{p_{\text{pes}}}(z_M) = mgz_M}$$

Démonstration XIX.1 – Energie potentielle de pesanteur

⋆ Schématisation de la situation et expression de δW dans le repère d'étude :

Démonstration XIX.1 – Energie potentielle de pesanteur (suite)

⋆ Expression de E_p :

⋆ Représentation de E_p :

II.4.b Energie potentielle gravitationnelle

La variation d'énergie potentielle gravitationnelle $E_{p_{\text{grav}}}$ d'un point M de masse m_M, depuis un point quelconque M_0 de sa trajectoire, associée à la force gravitationnelle $\vec{F}_{\text{grav}_{O/M}} = -\mathcal{G}\dfrac{m_O m_M}{r^2}\vec{u}_r$ exercée par un point O, centre d'un repère sphérique dans le référentiel de O, de masse m_O placé à une distance r de M est déterminée par :

$$E_{p_{\text{grav}}}(M) = E_{p_{\text{grav}}}(M_0) - \underset{M_0\to M}{W}(\vec{F}_{O\to M}) = E_{p_{\text{grav}}}(M_0) - \int_{M_0}^{M} \vec{F}_{O\to M}\cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$$

La force étant radiale et la symétrie étant sphérique de centre O, on a besoin de l'expression d'un déplacement élémentaire en coordonnées sphériques : $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$.
On en déduit donc :

$$E_{p_{\text{grav}}}(M) = E_{p_{\text{grav}}}(M_0) + \int_{M_0}^{M} \mathcal{G}\frac{m_O m_M}{r^2}\mathrm{d}r = E_{p_{\text{grav}}}(M_0) - \mathcal{G}\frac{m_O m_M}{r_M} + \mathcal{G}\frac{m_O m_M}{r_{M_0}}$$

Propriété XIX.8 – Energie potentielle gravitationnelle

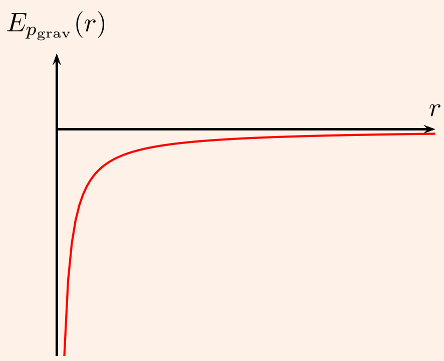
L'énergie potentielle $E_{p_{\text{grav}}}$ associée à la force d'interaction gravitationnelle :

$$\vec{F}_{\text{grav}_{O/M}} = -\mathcal{G}\frac{m_O m_M}{r^2}\vec{u}_r$$

exercée sur le point matériel M de masse m_M par un point matériel O de masse m_O dans le repère sphérique $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$ tel que $r = OM$, vérifie :

$$\boxed{E_{p_{\text{grav}}}(M) = -\mathcal{G}\frac{m_O m_M}{r}}$$

Cette expression correspond à une origine de l'énergie potentielle prise en $r \to +\infty$.



II.4.c Energie potentielle électrostatique

La variation d'énergie potentielle électrostatique $E_{p_{\text{élec}}}$ d'un point M de charge q_M, depuis un point quelconque M_0 de sa trajectoire, associée à la force d'interaction électrostatique $\overrightarrow{F}_{\text{élec}_{O/M}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_O q_M}{r^2}\vec{u}_r$ exercée par un point O, centre d'un repère sphérique dans le référentiel de O, de charge q_O placé à une distance r de M est déterminée par :

$$E_{p_{\text{élec}}}(M) = E_{p_{\text{élec}}}(M_0) - \underset{M_0\to M}{W}(\overrightarrow{F}_{O\to M}) = E_{p_{\text{élec}}}(M_0) - \int_{M_0}^{M} \overrightarrow{F}_{O\to M}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

La force étant radiale et la symétrie étant sphérique de centre O, on a besoin de l'expression d'un déplacement élémentaire en coordonnées sphériques : $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$.
On en déduit donc :

$$E_{p_{\text{élec}}}(M) = E_{p_{\text{élec}}}(M_0) - \int_{M_0}^{M} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_O q_M}{r^2}\mathrm{d}r = E_{p_{\text{élec}}}(M_0) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_O q_M}{r_M} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_O q_M}{r_{M_0}}$$

Propriété XIX.9 – Energie potentielle électrostatique

L'énergie potentielle $E_{p_{\text{élec}}}$ associée à la force d'interaction électrostatique :

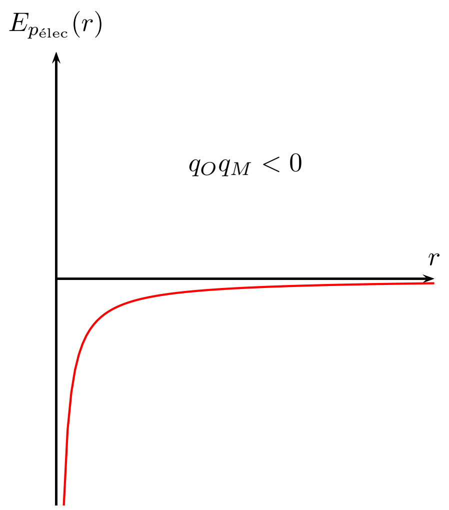
$$\overrightarrow{F}_{\text{élec}_{O/M}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_O q_M}{r^2}\vec{u}_r$$

exercée sur le point matériel M de charge q_M par un point matériel O de charge q_O dans le repère sphérique $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ tel que $r = OM$, vérifie :

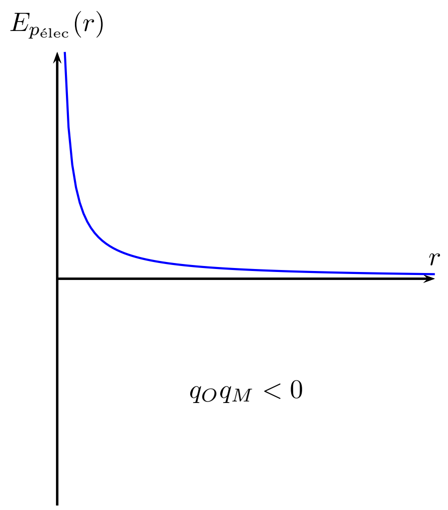
$$\boxed{E_{p_{\text{élec}}}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_O q_M}{r}}$$

Cette expression correspond à une origine de l'énergie potentielle prise en $r \to +\infty$.

Remarque : on verra plus tard dans l'année le potentiel associé à un champ constant $\overrightarrow{E}$ qui exerce une force constante $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$, et on montrera que $E_p = qV$ où V est le potentiel au point M.



Cas attractif



Cas répulsif

II.4.d Energie potentielle élastique

La variation d'énergie potentielle élastique $E_{p_{\text{élas}}}$ d'un point M, depuis un point quelconque M_0 de sa trajectoire, associée à la déformation d'un matériau se traduisant par la force de rappel d'un ressort :

$$\overrightarrow{F}_{\text{élas}} = -k(\ell - \ell_0)\ \vec{u}_{\text{ext}}$$

où k est la raideur du ressort, ℓ est la longueur instantanée du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide, est déterminée par :

$$E_{p_{\text{élas}}}(M) = E_{p_{\text{élas}}}(M_0) - \underset{M_0 \to M}{W}(\overrightarrow{F}) = E_{p_{\text{élas}}}(M_0) - \int_{M_0}^{M} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

La force de rappel étant dirigée selon la direction du ressort, le seul déplacement élémentaire utile peut s'écrire :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\ell\ \vec{u}_{\text{ext}}$$

La variation d'énergie potentielle élastique s'écrit donc :

$$E_{p_{\text{élas}}}(M) = E_{p_{\text{élas}}}(M_0) + \int_{M_0}^{M} k(\ell - \ell_0)\mathrm{d}\ell = E_{p_{\text{élas}}}(M_0)\ +\ k\frac{(\ell_M - \ell_0)^2}{2}\ -\ k\frac{(\ell_{M_0} - \ell_0)^2}{2}$$

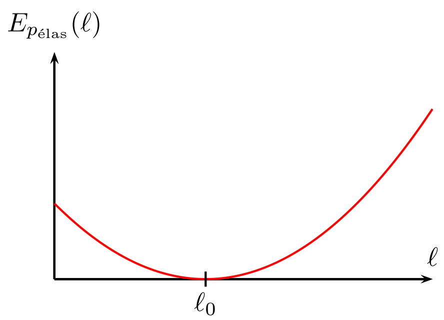
Propriété XIX.10 – Energie potentielle électrostatique

En choisissant $E_{p_{\text{élas}}}(M) = 0$ lorsque $\ell = \ell_0$, l'énergie potentielle élastique $E_{p_{\text{élas}}}$ associée à la force de rappel élastique :

$$\overrightarrow{F}_{\text{élas}} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{ext}}$$

exercée sur le point matériel M, vérifie :

$$\boxed{E_{p_{\text{élas}}}(M) = k\frac{(\ell - \ell_0)^2}{2}}$$



Question XIX.2 – Et les autres forces ?

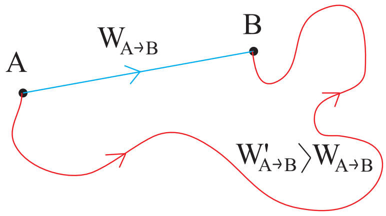
Que peut-on dire, du point de vue de l'énergie, des autres forces que nous avons déjà rencontrées ?

Remarque : le cas de la poussée d'Archimède se traite de façon similaire à celui du poids.

III Energie interne

III.1 Forces dissipatives

Nous n'avons vu pour l'instant que des forces dont le travail ne dépendait pas du chemin suivi, c'est à dire des forces conservatives. Or chacun sait qu'il est plus fatigant de faire un détour énorme pour aller d'un point à un autre que de rejoindre ces points en ligne droite. Il existe donc des forces dont le travail dépend du chemin suivi.



C'est le cas des **forces de frottement** auxquelles on ne peut pas associer d'énergie potentielle. Leur direction est toujours opposée au vecteur vitesse, et elles présentent donc une puissance et un travail négatifs. Le frottement est **toujours résistant**. On les appelle des **forces dissipatives**.

Les forces de frottement sont des forces non conservatives

III.1.a Puissance et travail des forces de frottement fluide

Dans le cas linéaire, la force de frottement fluide s'écrit : $\overrightarrow{f} = -\alpha\vec{v}$.
On en déduit :

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \overrightarrow{f} \cdot \vec{v} = -\alpha v^2 < 0 \\ \underset{A\to B}{W}(\overrightarrow{f}) = -\alpha \int_A^B v^2 dt \end{cases}$$

Le théorème de l'énergie cinétique ne présente aucun intérêt en présence d'une telle force, car une étude dynamique préalable est nécessaire pour calculer $v(t)$.

III.1.b Puissance et travail des forces de frottement solide

La force de frottement solide est de sens opposé à la vitesse et s'écrit $\overrightarrow{R}_T = -\mu\overrightarrow{u}R_N$.
On en déduit :

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \overrightarrow{R}_T \cdot \vec{v} = -\mu R_N v < 0 \\ \underset{A\to B}{W}(\overrightarrow{R}_T) = -\mu \int_A^B R_N d\ell \end{cases}$$

Comme pour le cas de la force de frottement fluide, **le théorème de l'énergie cinétique ne présente aucun intérêt**, car une étude dynamique préalable est nécessaire pour calculer la dépendance temporelle de la réaction normale.

III.2 Notion d'énergie interne

Les forces de frottement sont qualifiées de dissipatives, mais que devient l'énergie dissipée par ces forces, puisqu'on ne la retrouve ni sous forme d'énergie potentielle, ni sous forme d'énergie cinétique ?

Si l'on regarde au niveau microscopique les corps soumis à des forces dissipatives, on constate que leur température a légèrement augmenté, correspondant à une augmentation de l'**agitation thermique** de leurs molécules.

La quantification de tels échange fait appel à la thermodynamique et sera introduit plus tard dans l'année. On introduira notamment une nouvelle grandeur U appelée **énergie interne**. On se contentera à ce stade de l'année de retenir que l'énergie dissipée ne disparaît pas mais est transférée au système ou au milieu extérieur, sous forme d'agitation thermique.

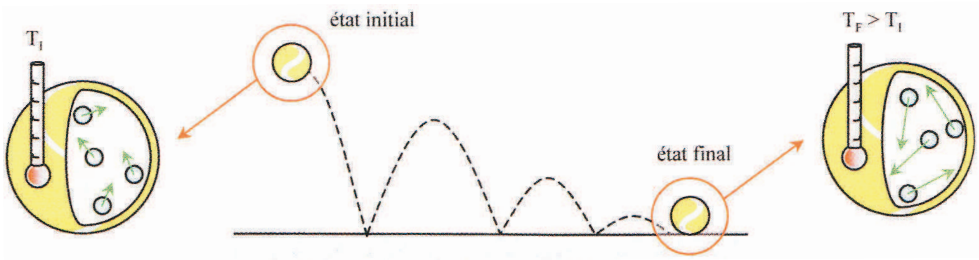


FIGURE XIX.3 – *En présence de dissipation, de frottements par exemple, les énergies cinétiques et potentielles sont converties en énergie interne. Cela se traduit notamment par une légère élévation de température des corps dissipant l'énergie.*

IV Théorème de l'énergie mécanique

IV.1 Energie mécanique

Définition XIX.7 – Energie mécanique

L'énergie mécanique est définie comme la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_m(M)_{/\mathcal{R}} = E_c(M)_{/\mathcal{R}} + E_p(M)_{/\mathcal{R}}}$$

L'énergie mécanique correspond à l'**énergie qui pourrait être récupérée par un système mécanique**.

IV.2 Variation de l'énergie mécanique

On s'intéresse directement à la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel M dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ soumis à des forces conservatives de résultante $\overrightarrow{F}_{\text{cons}}$, et des forces non conservatives de résultante $\overrightarrow{F}_{\text{n.cons}}$, entre deux instants t_A et t_B le long d'une trajectoire Γ :

$$\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_m = \underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_c + \underset{A\to B}{\Delta} E_p$$

or d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_c = \underset{A\to B}{W}(\overrightarrow{F_{\text{cons}}}) + \underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{F_{\text{n.cons}}}) = -\underset{A\to B}{\Delta} E_p + \underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{F_{\text{n.cons}}})$$

Théorème XIX.3 – Théorème de l'énergie mécanique

La variation d'énergie mécanique au cours du mouvement est égale au travail des forces non-conservatives :

$$\boxed{\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_m = \underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{F_{\text{n.cons}}})}$$

<u>Remarques</u> :

⋆ Ce théorème peut aussi être écrit sous sa forme élémentaire : $\mathrm{d}E_m = \delta W(\overrightarrow{F}_{\text{n.cons}})$.

⋆ Ce théorème n'est qu'une réécriture du théorème de l'énergie cinétique.

Propriété XIX.11 – Système conservatif

Un point matériel qui n'est soumis qu'à des forces conservatives et à des forces qui ne travaillent pas (c'est-à-dire $\delta W(\overrightarrow{F}_{\text{n.cons}}) = 0$) a une énergie mécanique constante. On dit que c'est un **système conservatif**.

Remarque : On comprend alors l'appellation "forces conservatives" : ce sont les forces pour lesquelles E_m se conserve au cours du mouvement.

V Etude graphique d'un mouvement à un degré de liberté

V.1 Système conservatif

Dans le cas d'un système conservatif, l'énergie mécanique est constante et peut être représentée sur le même graphique que celui de l'énergie potentielle. En utilisant la relation $E_m = E_c + E_p$, on peut ainsi lire graphiquement la valeur de chacune des énergies en fonction de la coordonnée d'espace.

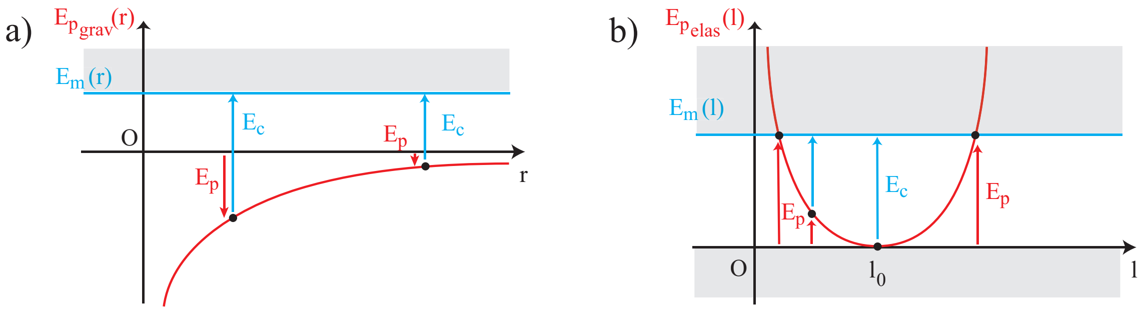


Figure XIX.4 – *Représentation graphique de la conservation de l'énergie mécanique dans le cas a) d'une énergie potentielle de pesanteur, et b) d'une énergie potentielle élastique.*

Propriété XIX.12 – Etat libre ou état lié

Un point matériel évolue dans la zone du profil énergétique située **au-dessous** de la droite représentant l'énergie mécanique. On distingue alors deux types de systèmes conservatifs :

- lorsque cette zone est bornée de part et d'autre, comme dans le cas b), le mouvement est périodique et la particule est dite **liée**.
- lorsque cette zone s'étend à l'infini, la particule est dite dans un **état libre**.

Exemple – Analyse graphique

V.2 Positions d'équilibre et stabilité d'un système conservatif

V.2.a Equilibre et stabilité

De manière générale, on voit qu'un point lâché sans vitesse initiale aura tendance à **évoluer de manière à diminuer son énergie potentielle** (c'est le cas lors de la chute d'un objet par exemple).

Définition XIX.8 – Position d'équilibre

Lorsqu'un point matériel est lâché sans vitesse initiale au niveau d'un **extremum** de l'énergie potentielle, ce système demeure immobile. On dit qu'il est **à l'équilibre**.

Plusieurs cas d'équilibres sont possibles.

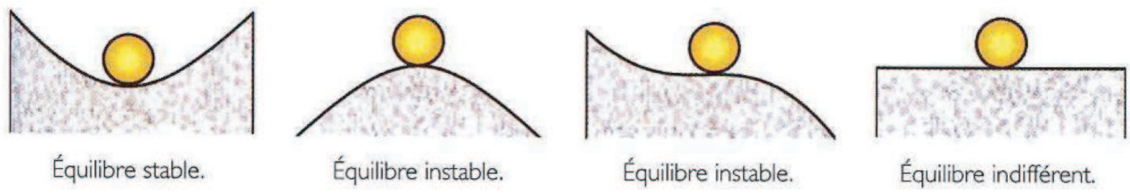


FIGURE XIX.5 – *Stabilité et instabilité de quelques positions d'équilibre dans le cas d'un système n'ayant pour seule énergie potentielle que celle liée à son poids.*

Propriété XIX.13 – Equilibre et stabilité

⋆ En s'appuyant sur l'exemple de l'énergie potentielle de pesanteur, et **en notant α la variable d'espace du problème**, on voit que **les positions d'équilibre sont telles que** :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{\text{éq}}} = 0}$$

⋆ Un point est à l'équilibre lorsqu'il est immobile et qu'il le reste. La **stabilité** de cet équilibre est directement reliée à la **courbure** de l'énergie potentielle au point considéré, c'est à dire au signe de la dérivée seconde du profil de l'énergie potentielle.

On obtient ainsi :

- l'équilibre est **stable** si le point retourne vers sa position d'équilibre après avoir été légèrement déplacé. Cela correspond à :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_{\text{éq}}} > 0}$$

- l'équilibre est **instable** si le point s'éloigne de sa position d'équilibre après un petit déplacement. Cela correspond à :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_{\text{éq}}} < 0}$$

- l'équilibre est **indifférent** si le point est encore à l'équilibre après un petit déplacement.

V.2.b Démonstration

Ceci ne se limite pas à la recherche de positions d'équilibre et à l'étude de leur stabilité dans le seul cas de l'énergie potentielle de pesanteur. Ceci s'applique à n'importe quelle expression de l'énergie potentielle où la dérivation se fait par rapport à la coordonnée d'espace dont dépendent les énergies.

Prenons un système conservatif à un degré de liberté : par exemple par rapport à la variable cartésienne x. L'énergie mécanique du système s'écrit donc :

$$E_m = E_c(\dot{x}) + E_p(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x)$$

L'énergie mécanique du système étant conservée, sa dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{1}{2}\, m \times 2\ddot{x} \times \dot{x} + \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} = m \times \ddot{x} \times \dot{x} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

En simplifiant l'équation par $\dot{x}$, on tombe alors sur l'équation du mouvement (d'où le terme d'intégrale première du mouvement pour l'équation de conservation de l'énergie) :

$$m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

Remarque : on retrouve bien ici que la force résultante, conservative pour un système conservatif, dérive d'une énergie potentielle : l'énergie potentielle totale.

La définition cinématique de l'équilibre impose qu'à l'équilibre :

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_{\text{éq}}} = 0$$

Les positions d'équilibres correspondent donc à un extremum d'énergie potentielle.

Pour étudier la stabilité de ces positions, il faut revenu à la définition de la stabilité : un système est dit stable, si pour une excitation bornée (ici l'énergie mécanique initiale du système) au voisinage de l'équilibre, la solution de l'équation du mouvement reste bornée. Plaçons nous donc au voisinage d'une position d'équilibre donnée $x_{\text{éq}}$ et posons :

$$x = x_{\text{éq}} + \epsilon \quad \text{soit} \quad \epsilon = x - x_{\text{éq}}$$

Effectuons un développement limité à l'ordre 1 de la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x} = \left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_{\text{éq}}} + \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_{\text{éq}}} (x - x_{\text{éq}}) + o\left(x - x_{\text{éq}}\right)$$

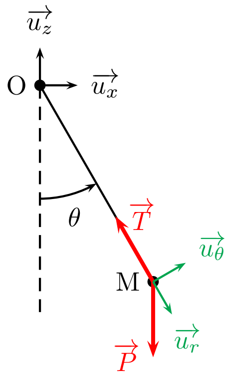
Part définition de l'équilibre, nous venons de voir que le premier terme du membre de droite est nul. L'équation du mouvement peutdonc se mettre sous la forme :

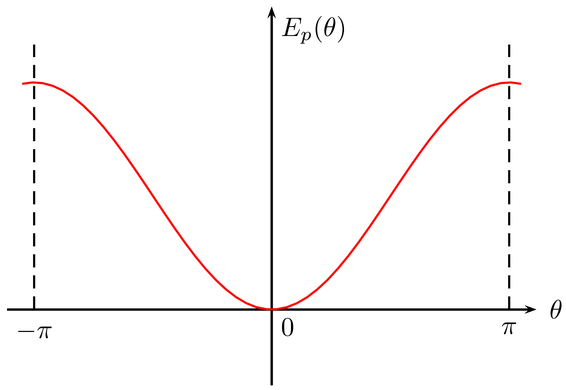
$$m\ddot{\epsilon} = -\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_{\text{éq}}} \times \epsilon$$

La solution de cette équation différentielle n'est bornée, et correspond alors à celle d'un oscillateur harmonique, que si $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_{\text{éq}}} > 0$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un minimum d'énergie potentielle.

VI Etude d'un exemple : le pendule simple

VI.1 Méthode énergétique d'établissement de l'équation du mouvement





Exercice XIX.3 – Equation horaire du pendule simple

Soit un pendule constitué d'une masse m suspendue à un fil rigide de masse négligeable et de longueur ℓ accroché en un point fixe O. On appelle θ l'angle entre la verticale descendante et la direction du fil. La masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une position θ_0. Tout frottement est négligé.

Par une méthode énergétique, établir les positions d'équilibre stables ou instables du système, l'expression de la vitesse en fonction de l'angle θ ainsi que l'équation différentielle régissant le mouvement.

---

1. Système étudié : masse m
2. Référentiel : du laboratoire, considéré comme galiléen
3. Forces appliquées : poids $\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g}$, et tension du fil $\overrightarrow{T}$ (la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids)
4. Type de mouvement : plan et circulaire - Base de projection adaptée : base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$
5. Le calcul de l'énergie potentielle conduit à : $E_p = -mg\ell\cos\theta$ où on a choisi O comme origine des énergies potentielles. La variable d'espace est θ. Recherchons les positions d'équilibre et leur stabilité.
   $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = mg\sin\theta = 0$ pour $\theta_{eq_1} = 0$ ou $\theta_{eq_{2,3}} = \pm\pi$.
   La première position est stable car $\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{eq}} = mg\cos\theta_{eq} = mg > 0$. Ceci est bien conforme à l'expérience.
6. Afin de déterminer l'expression de la vitesse, appliquons maintenant le théorème de l'énergie cinétique entre les instants correspondant aux angles θ_0 et θ :
   $$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W(\overrightarrow{P}) + W(\overrightarrow{T})$$
   Or $W(\overrightarrow{P}) = -\Delta E_p = mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)$. De plus, $W(\overrightarrow{T}) = 0$ car la tension du fil est perpendiculaire au mouvement à tout instant. On obtient donc :
   $$\frac{1}{2}\,mv^2 + mg\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0$$
   et l'expression de la vitesse est, avec $\theta_0 > \theta$, donc $\cos\theta > \cos\theta_0$:
   $$v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$
   Le théorème de l'énergie mécanique permet d'obtenir exactement le même résultat :
   $$E_m = E_c + E_p$$
   L'énergie mécanique est constante car les forces s'exerçant sur le point M sont conservatives (poids), ou perpendiculaire au mouvement (tension du fil), on obtient donc
   $$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta = cste$$

Exercice XIX.3 – Equation horaire du pendule simple (suite)

La constante peut être déterminée en utilisant les conditions initiales pour lesquelles $v = 0$ et $\theta = \theta_0$. Finalement :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0$$

7. Afin de retrouver l'équation différentielle du mouvement, on exprime la vitesse en fonction de l'angle θ : $\vec{v} = \ell\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$.
   On en déduit donc l'équation :
   $$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0$$
   En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :
   $$\frac{1}{2}m\ell^2 \times 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta \times \dot{\theta} = 0$$
   Donc pour $\dot{\theta} \neq 0$, on retrouve l'équation différentielle du pendule simple obtenue en dynamique, qu'on peut la résoudre dans le cadre de petites oscillations autour de la position d'équilibre (cf cours précédent) :
   $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

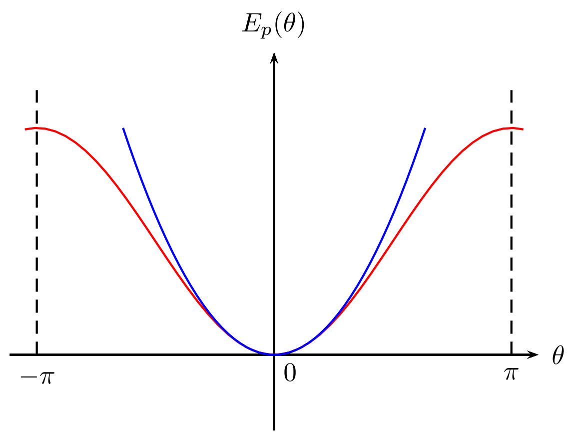
VI.2 Oscillateur harmonique linéarisé - approximation harmonique

VI.2.a Exemple du pendule simple

Nous avons montré au paragraphe précédent que l'énergie potentielle d'un tel système pouvait être définie de la manière suivante :

$$E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

en prenant l'origine des énergies potentielles au niveau de la position d'équilibre $\theta_{\text{éq}} = 0$.



On voit sur le schéma ci-contre que la courbe représentative de l'énergie potentielle s'identifie très bien avec celle d'une parabole au voisinage de la position d'équilibre.

Si l'on s'intéresse aux petites oscillations autour de la position d'équilibre $\theta_{\text{éq}} = 0$, on peut utiliser un développement limité de Taylor pour établir l'expression approchée de l'énergie potentielle.

Dans le cas qui nous intéresse, à l'ordre 2, $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ pour $\theta \simeq 0$:

$$E_p(\theta) \simeq \frac{mg\ell\theta^2}{2}$$

Remarque : on voit que cette expression approchée s'identifie à celle de l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique de variable θ et de constante de raideur $k = mg\ell$.

L'expression de l'énergie mécanique de ce système conservatif devient :

$$E_m = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mg\ell\theta^2}{2} = cste$$

La dérivation par rapport au temps de cette expression conduit à l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

dans le cas des petites oscillations.

Remarques :

- ⋆ celle-ci s'identifie encore une fois avec l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.
- ⋆ on remarquera que remplacer le $\cos\theta$ par $1 - \frac{\theta^2}{2}$ dans l'expression de l'énergie potentielle revient au même que de remplacer $\sin\theta$ par θ dans l'équation différentielle générale du pendule simple [1].

VI.2.b Approximation harmonique

Définition XIX.9 – Approximation harmonique

Approcher l'énergie potentielle du pendule simple au voisinage de sa position d'équilibre par une parabole correspond à faire ce que l'on appelle l'**approximation harmonique**.

Une telle approximation est possible pour n'importe quel système **au voisinage d'une position d'équilibre stable**, comme le montre la figure ci-dessous.

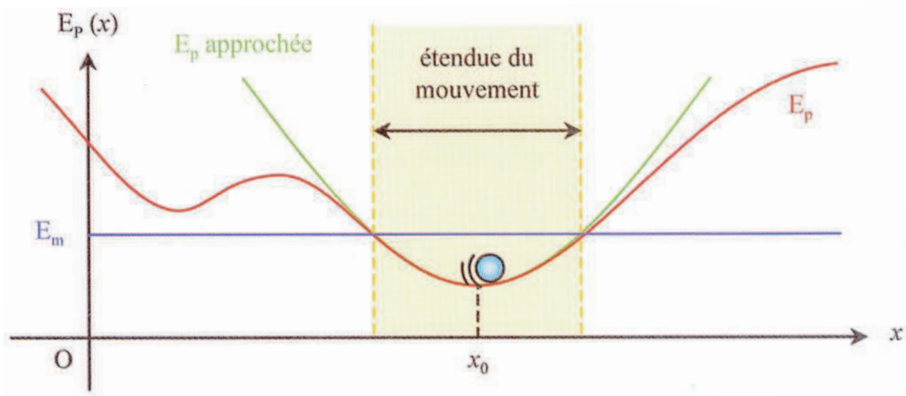


FIGURE XIX.6 – *L'approximation harmonique consiste à approcher l'expression de l'énergie potentielle par une parabole au voisinage d'une position d'équilibre stable x_0.*

Démonstration XIX.2 – Approximation harmonique

L'expression approchée de l'énergie potentielle obtenue dans l'approximation harmonique correspond au **développement limité de Taylor à l'ordre 2** de $E_p(x)$ **au voisinage de la position d'équilibre** $x = x_{\text{éq}}$:

$$E_p(x) \underset{x_{\text{éq}}}{=} E_p(x_{\text{éq}}) + (x - x_{\text{éq}}) \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\text{éq}}}}_{=0} + \frac{1}{2}(x - x_{\text{éq}})^2 \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\text{éq}}}}_{>0} + o(x - x_{\text{éq}})^2$$

où $\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\text{éq}}} = 0$, car $x_{\text{éq}}$ correspond à une position d'équilibre, et $\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\text{éq}}} > 0$, car cet équilibre est stable.

En utilisant la variable $X = x - x_{\text{éq}}$ et en posant $k = \left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\text{éq}}}$, on obtient donc l'énergie potentielle approchée suivante, correspondant à celle d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{E_p(X) \simeq \frac{1}{2}kX^2}$$

1. Cette remarque correspond en fait à un résultat général : *pour un système unidimensionnel, l'application de l'approximation harmonique à l'énergie potentielle équivaut à la linéarisation de l'équation du mouvement.*

Propriété XIX.14 – Approximation harmonique et oscillateur harmonique

Un système mécanique quelconque oscillant autour d'une position d'équilibre stable peut être considéré comme un oscillateur harmonique, avec une constante de raideur k définie par :

$$\boxed{k = \left.\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\text{éq}}} > 0}$$

Cette approximation permet de donner un modèle imagé des oscillations dans une molécule ou dans un cristal, comme le montre la figure ci-dessous.

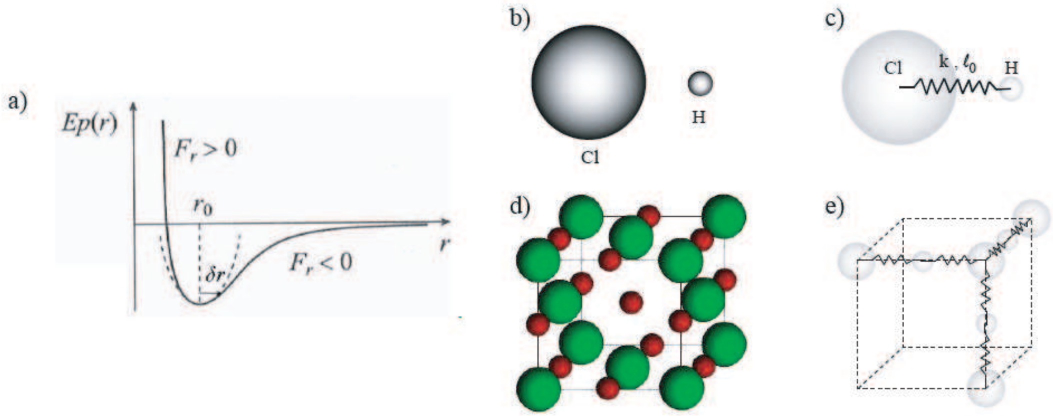


FIGURE XIX.7 – *L'approximation harmonique permet de modéliser les interactions entre atomes par des ressorts. a) Profil de l'énergie potentielle d'une paire d'atomes dans une molécule. b) et c) Molécule de HCl et sa modélisation. d) et e) Cristal de NaCl et sa modélisation.*