

– Correction du DS (6) de physique-chimie –

Optique géométrique & Mécanique quantique

Le samedi 13 mars 2021 - Durée 3h

I Capture d'empreintes digitales par réflexion totale frustrée (D'après Centrale-Supélec MP 2019)

1. (a) Notons i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction sur le dioptre.

Dans ce cas, on a $\tan i = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}}$ et $\tan r = \frac{\overline{HI}}{\overline{A_1H}}$ d'où $\frac{\tan i}{\tan r} = \frac{\overline{A_1H}}{\overline{AH}}$.

En remarquant que $\tan r = \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \cos^2 r}}$ et en utilisant la relation de Snell-Descartes $n \sin i = \sin r$ sur la réfraction et , on obtient la relation :

$$\boxed{\frac{\overline{A_1H}}{\overline{AH}} = \frac{\tan i \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}{n \sin i}}$$

- (b) Les conditions de Gauss pour un système centré consistent à n'utiliser que des rayons paraxiaux, c'est-à-dire peu inclinés par rapport à l'axe optique et peu éloignés de celui-ci. Les angles d'incidence étant petits, on peut écrire en se limitant à des développements limités d'ordre inférieur ou égal à 1 : $\sin i \simeq i$, $\tan i \simeq i$, $\cos i \simeq 1$, $\sin^2 i \simeq 0$, ...

La relation de conjugaison se simplifie dans ce cas en :

$$\boxed{\frac{\overline{A_1H}}{\overline{AH}} = \frac{1}{n}}$$

2. (a) On a $p = \overline{OA_1}$ et $p' = \overline{OA'_1}$. On en déduit $D_1 = \overline{A_1A'_1} = \overline{A_1O} + \overline{OA'_1}$ soit $D_1 = p' - p$. En outre, comme le grandissement transversal s'écrit $\gamma = \frac{p'}{p}$, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} D_1 = p' - p \\ \gamma = \frac{p'}{p} \end{cases}$$

On trouve $\boxed{p = \frac{D_1}{\gamma - 1}}$ et $\boxed{p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma - 1}}$.

- (b) Relation de conjugaison de Descartes : $\boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}}$

- (c) En combinant la formule de conjugaison de Descartes avec les expressions de p et p' en fonction de γ et D_1 , on obtient immédiatement :

$$f' = -D_1 \frac{\gamma}{(\gamma - 1)^2}$$

soit :

$$\boxed{\frac{D_1}{f'} = f(\gamma)} \quad \text{avec} \quad \boxed{f(\gamma) = -\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma}}$$

3. Posons $\frac{D_1}{f'} = f(\gamma) = 2 - \gamma - \frac{1}{\gamma}$ donc $f'(\gamma) = \frac{1}{\gamma^2} - 1$ qui vérifie $f'(\gamma) < 0$ pour $\gamma < -1$, d'où le tableau de variation :

γ	$-\infty$	-1	0
$f'(\gamma)$		$-$	0
$f(\gamma)$	$+\infty$	\searrow	4
		\nearrow	$+\infty$

Ceci impose $f(\gamma) \geq 4$ puisque $\gamma < 0$ donc $D_1 \geq 4f'$.

4. Pour $\gamma = -2$, on a $\frac{D_1}{f'} = -\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma} = \frac{9}{2}$ soit $f' = \frac{2}{9}D_1$. En outre, on obtient $p' = \frac{\gamma D_1}{\gamma-1} = \frac{2}{3}D_1$. Par ailleurs, $D_1 = \overline{A_1A'_1} = \overline{A_1H} + \overline{HA'_1} = \frac{\overline{AH}}{n} + \overline{HA'_1}$ soit $D_1 = \frac{D}{n} + D - L$. Comme $n = 1,5$, $L = 3$ cm et $D = 10$ cm, il vient $D_1 = 9$ cm donc $f' = 2$ cm et $p' = 6$ cm qui est la distance entre lentille et écran.
5. À la question 2.c, nous avons établi la relation $\frac{D_1}{f'} = f(\gamma)$. Puis à la question 3., la fonction $f(\gamma)$ a été étudié. Il en ressort que quand $|\gamma|$ croît pour atteindre $+\infty$ alors $f(\gamma)$ croît pour atteindre également $+\infty$. Pour D_1 constant, ces conditions impliquent que f' diminue pour tendre vers 0. En pratique, plus la distance focale diminue, plus la courbure des faces (ou l'indice du verre) augmente ce qui risque de finir par faire sortir le système des conditions de Gauss.

I. A Résolution de l'image

6. Il est possible de distinguer deux crêtes successives à condition que la taille d'un pixel soit plus petite que la distance sur l'écran entre ces deux crêtes. Cette condition correspond à $\ell_c \leq |\gamma|a$. On en déduit $\ell_{c,\max} = |\gamma|a$. AN : $\ell_{c,\max} = 200 \mu\text{m}$.
7. On note d le diamètre de la monture de la lentille (\mathcal{L}) et e' la distance de M'_2 à la surface du capteur CCD.

(a) Par application du théorème de Thalès, on obtient directement $\frac{\phi}{e'} = \frac{d}{p' - e'}$ soit $\phi = \frac{e'd}{p' - e'}$.

(b) Pour $e' \ll p'$, l'expression de la question précédente se simplifie en $\phi \simeq \frac{e'd}{p'}$. En exploitant les

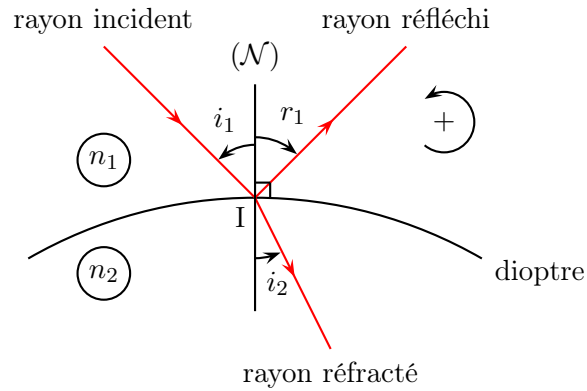
relations $e' \simeq \gamma^2 e$ et $\gamma = \frac{p'}{p}$, on obtient finalement $\phi \simeq \frac{\gamma e d}{p}$.

8. On a $M'_1 M'_3 = |\gamma| M_1 M_2 = |\gamma|a$. La condition $\phi > M'_1 M'_3$ équivaut à $\frac{\gamma e d}{p} > |\gamma|a$ soit $\frac{d}{|p|} > \frac{a}{e}$.

Avec les données numériques de l'énoncé, on trouve en ordre de grandeur $\frac{d}{|p|} > 3$. Pour un diamètre de lentille trois fois plus grand que la distance objet lentille, et en l'absence de diaphragme, les rayons arriveront aux extrémités haute et basse de la lentille avec un angle θ par rapport à l'axe optique tel que $\tan \theta = \frac{d}{2|p|} > 1,5$. L'angle $\theta > 57^\circ$ correspondant est bien trop élevé pour que les conditions de Gauss puissent être respectées.

I. B Réflexion totale

9. Les lois de Snell-Descartes décrivent le comportement de la lumière à l'interface de deux milieux (dioptre) d'indices respectifs n_1 et n_2 .



Elles s'énoncent ainsi :

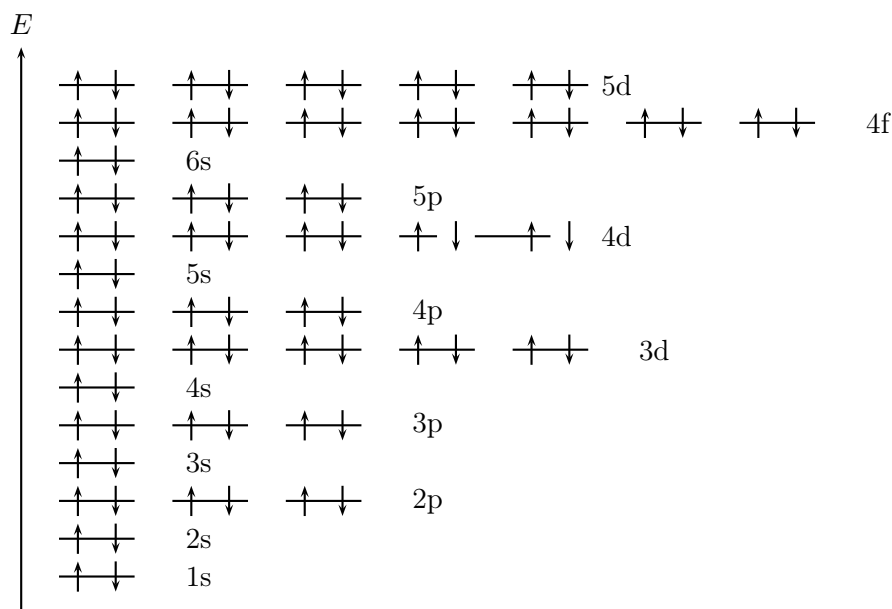
- Première loi de Snell-Descartes : Le rayon réfléchi et le rayon réfracté (lorsqu'il existe) sont tous deux dans le plan d'incidence.
- Deuxième loi de Snell-Descartes : $i_1 = -r_1$
- Troisième loi de Snell-Descartes : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

- 10.** Pour $n_2 < n_1$, il existe un angle d'incidence limite $i_{1\ell}$ au dessus duquel le rayon incident est totalement réfléchi (pas de rayon réfracté). Cette angle est solution de $n_1 \sin i_{1\ell} = n_2 \sin \frac{\pi}{2}$, soit $i_{1\ell} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$.
- 11.** D'après le schéma de l'énoncé, les rayons utilisés pour éclairer les sillons du doigt arrivent sur l'hypoténuse du prisme avec un angle d'incidence $i_1 = 45^\circ$. Or, pour le dioptré verre-air, l'angle d'incidence limite calculé à l'aide de la formule précédente pour $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1,0$ donne $i_{1\ell} = 42^\circ$. Comme $i_1 > i_{1\ell}$, le doigt ne pourra donc pas être éclairé.

II Spectre d'émission de l'atome de mercure

II. A Questions préliminaires

1. Z représente le nombre de protons dans le noyau. Un isotope est neutre. L'isotope considéré possède donc 80 électrons. Par ailleurs le nombre de masse de cet isotope vaut $A = 202$. Or $A = N + Z$ avec N le nombre de neutrons. On a donc ici $N = 122$.
2. Le principe d'exclusion de Pauli précise que deux électrons peuvent au maximum occuper une même orbitale atomique. Dans le cas où deux électrons occuperaient la même orbitale, ils devront être pris de spins opposés. n et ℓ étant respectivement le nombre quantique principal et le nombre quantique secondaire, la règle de Klechkowski indique qu'il faut remplir les sous-couches atomiques par ordre croissant de « $n + \ell$ ». À valeur égale de « $n + \ell$ », on remplira les sous-couches par valeur croissantes de n .
3. Hg : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^{10}$. Les électrons de valence sont ceux de la couche la plus externe et ceux des sous-couches non saturées. Ici les électrons de valence sont les deux électrons de la sous-couche 6s. Il y a donc 78 électrons de coeur pour le mercure.
4. Diagramme énergétique du mercure :



5. L'ion Hg^+ se termine en $6s^1 4f^{14} 5d^{10}$ ce qui correspond à une sous-couche s à moitié saturée, les autres sous-couches étant saturées. Cette configuration est stable. L'ion Hg^{2+} se termine en $5d^{10} 4f^{14}$. Cette configuration laisse toutes les sous-couches occupées saturées et évite de peupler une nouvelle couche externe. Cette configuration est stable.

II. B Dispositif optique principal

II. B.1 Réglage de la lunette à l'infini

5. Le PP représente le point le plus proche du cristallin de l'oeil qui peut être vu nettement. Dans ce cas, l'oeil accomode au maximum, f'_c est maximale. Le PR représente le point le plus éloigné du cristallin de l'oeil qui peut être vu nettement. Dans ce cas, l'oeil n'accomode pas, f'_c est minimale.
6. Pour un oeil emmétrope, le PR est rejeté à l'infini tandis que le PP est arbitrairement placé à 25 cm devant le cristallin.

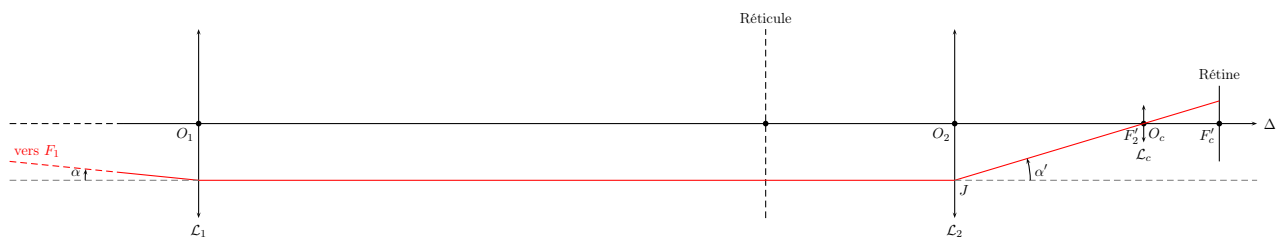
7. Avec les hypothèses de l'énoncé, oeil emmétrope au repos d'une part, stigmatisme et aplanétisme d'autre part (conditions de Gauss vérifiées), les point vus nettement par l'oeil sont situés dans un plan transversal à l'infini.
8. L'image d'un objet à l'infini par l'objectif de la lunette se formera dans le plan du réticule, c'est-à-dire le plan focal image de \mathcal{L}_1 . Il faut donc que cette image intermédiaire, objet pour \mathcal{L}_2 soit dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 pour que l'image finale par la lunette soit à l'infini et vu nettement par l'oeil ?
9. La conjugaison s'écrit :

$$A_\infty \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}} A'_\infty$$

$$A_\infty \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{F'_1 = F_2} A'_\infty$$

Il s'agit d'un système optique afocal.

10. Voici le schéma à l'échelle 1/2 de la lunette associée à l'oeil et le trajet d'un rayon incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique :



Pour obtenir le tracer ci-dessus, nous avons considéré un rayon incident faisant un angle α par rapport à Δ et passant par le foyer objet de \mathcal{L}_1 . Par construction, le rayon émergent de l'objectif est parallèle à Δ . Il ressort donc en passant par F'_2 en faisant un angle α' par rapport à Δ .

11. On introduit les points d'incidence du rayon lumineux considéré sur l'objectif (point I) et l'oculaire (point J). Par construction, et dans les conditions de Gauss, $\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{OI}{f'_1}$. De même, $\alpha' \simeq \tan \alpha' = \frac{-OJ}{f'_2}$. Par définition du grandissement G on a donc :

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2} = -3,00$$

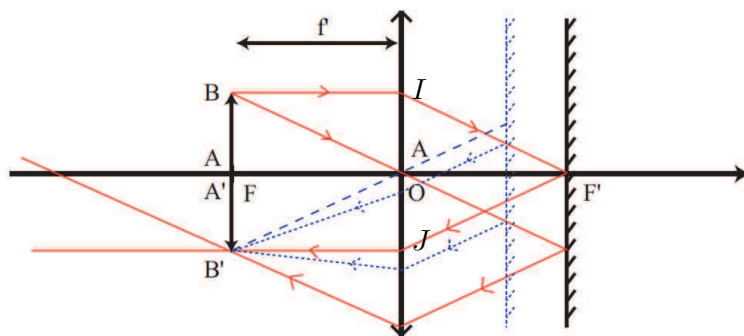
12. L'oculaire doit, dans cette configuration, réaliser la conjugaison suivante : $A_\infty \xrightarrow[\mathcal{L}_1]{F'_1} A'_{PR}$ dans laquelle A'_{PR} correspond au punctum remotum de l'oeil myope seul. Utilisons la relation de conjugaison de Newton : $\overline{F_2 F'_1} \times \overline{F'_2 A'_{PR}} = -f'^2_2$. Or, $\overline{F_2 F'_1} = -\bar{\ell}$ et $\overline{F'_2 A'_{PR}} = -d_{PR}$ avec $d_{PR} = 1$ m. On a donc finalement :

$$\bar{\ell} = -\frac{f'^2_2}{d_{PR}} = -2,5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Il faut donc rapprocher l'oculaire de l'objectif d'une distance de 2,5 mm.

II. B.2 Réglage du collimateur

13. On veut que l'oeil emmétrope observe sans se fatiguer. La lunette étant réglée à l'infini, il faut que l'image de la fente par le collimateur soit à l'infini. La fente doit donc être placée dans le plan focal objet de \mathcal{L}_0 .
14. La figure ci-dessous présente un schéma mettant en évidence le principe de l'autocollimation : quelle que soit la position du miroir derrière la lentille du collimateur, l'image d'un objet dans le plan focal objet de ce collimateur est dans ce même plan focal objet.



15. La figure précédente montre que l'image sera renversée. D'autre part, à l'aide de la construction géométrique rouge, on montre que $OI = OJ$ soit $AB = A'B'$ d'après la loi de la réflexion sur le miroir plan. L'image est donc bien de même taille que l'objet.
16. L'angle sous lequel sera vue la fente est différent selon que l'on s'intéresse à la longueur ou à la largeur de la fente. Notons i_a l'angle absolu sous lequel la largeur de la fente sera vue et i_b celui correspondant à sa longueur. On travaille toujours sous les conditions de Gauss donc on peut exprimer simplement les angles des rayons émergents provenant des points extrêmes de la largeur de la fente (a/f'_0) ou de la longueur de la fente (b/f'_0). Au final, d'après ce qui précède, on obtient :

$$\boxed{i_a = |G| \frac{a}{f'_0} = 3,0 \times 10^{-2} \text{ rad}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_b = |G| \frac{b}{f'_0} = 6,00 \times 10^{-1} \text{ rad}}$$

Remarque : si la valeur de i_a reste acceptable, la valeur de i_b est sans doute trop grande pour que les conditions de Gauss restent satisfaites. Les propriétés de stigmatisme et d'aplanétisme risquent de ne pas être observées.

17. Notons ϵ_a la largeur de l'image de la fente sur la rétine et ϵ_b celle de sa longueur. En utilisant encore les relations de trigonométrie, on a simplement :

$$\boxed{\epsilon_a = i_a f'_c = 6,0 \times 10^{-4} \text{ m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\epsilon_b = i_b f'_c = 1,20 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

II. C Dispositif secondaire de séparation spectrale

18. La loi de Cauchy simplifiée s'écrit : $n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$. Cette loi intervient par exemple dans la formation des arcs-en-ciel.
19. La loi de la diffraction s'écrit : $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$. dans le cas d'une lumière observée à l'oeil, et donc dans le domaine spectral visible, le rapport λ/a est inférieur à $10^{-3} \ll 1$. L'angle θ est certes non nul mais suffisamment faible pour qu'on puisse négliger le phénomène de diffraction.
20. La régression linéaire donne $\boxed{d = 3,3 \times 10^{-6} \text{ m}}$.

II. D Structure énergétique de l'atome de mercure

On donne ci-dessous l'énergie associée à quelques uns des niveaux du diagramme énergétique de l'atome de mercure.

21. La raie verte à 546 nm correspond à l'énergie de photon de 2,27 eV d'après la relation de Planck-Einstein, ce qui correspond à la transition de E_5 à E_3 . La raie orange à 615 nm correspondant à 2,02 eV semble correspondre à la transition entre E_4 et E_1 .
22. L'ionisation correspond au passage de l'état fondamental à l'énergie nulle. Le photon associé possède une longueur d'onde de 118 nm qui correspond au domaine des UV.