# Spectres des signaux

## b) Analyse spectrale : développement en série de Fourier

◆ Tout **signal périodique** $s(t)$ de **fréquence** $f_s$ peut s'écrire comme la somme de **fonctions sinusoïdales** dont les fréquences sont des **multiples entiers** de $f_s$ :

$$\boxed{s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(2\pi n f_s t + \varphi_n\right)} \; .$$

Cette écriture s'appelle un **développement en série de Fourier**.

◆ Les **amplitudes** $A_n$ $(n \neq 0)$ sont des **constantes positives.** Les **phases** $\varphi_n$ sont des constantes dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ .

◆ La constante $A_0$, qui peut être **positive ou négative**, est appelée **composante continue du signal**.

**Remarque :** $A_0$ est la valeur moyenne de $s(t)$ sur une période :

◆ La composante $A_1 \cos\left(2\pi f_s t + \varphi_1\right)$ a la même fréquence que le signal $s(t)$ et est appelée **fondamental**.

◆ La composante $A_n \cos\left(2\pi n f_s t + \varphi_n\right)$ $(n \neq 1)$ dont la fréquence est $n$ fois celle du fondamental et est appelée **harmonique de rang** $n$.

# Spectres des signaux

**Exemple : Séries de Fourier de quelques signaux périodiques.**

◆ **Signal créneau de période $T$ et de valeur moyenne nulle.**

La décomposition de Fourier de ce signal est :

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2m+1} \sin\left(2\pi(2m+1)t/T\right) \ .$$

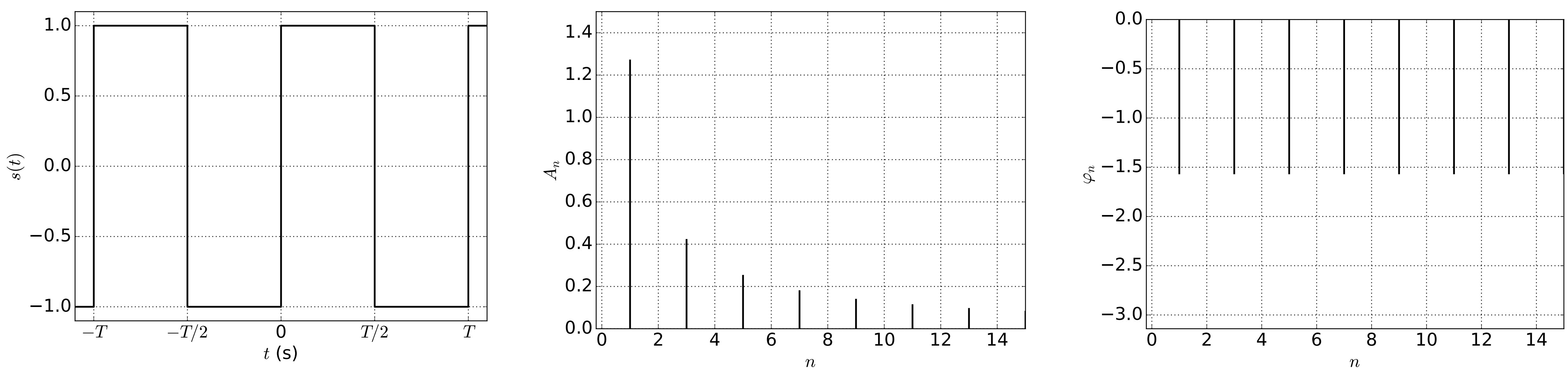



Figure 7: De gauche à droite : signal, spectrogramme d'amplitude , spectrogramme de phase.

# Spectres des signaux

◆ **Signal triangle de période $T$ et de valeur moyenne $1/2$.**

La décomposition de Fourier de ce signal est :

$$s(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos\left(2\pi(2m+1)t/T\right) \ .$$

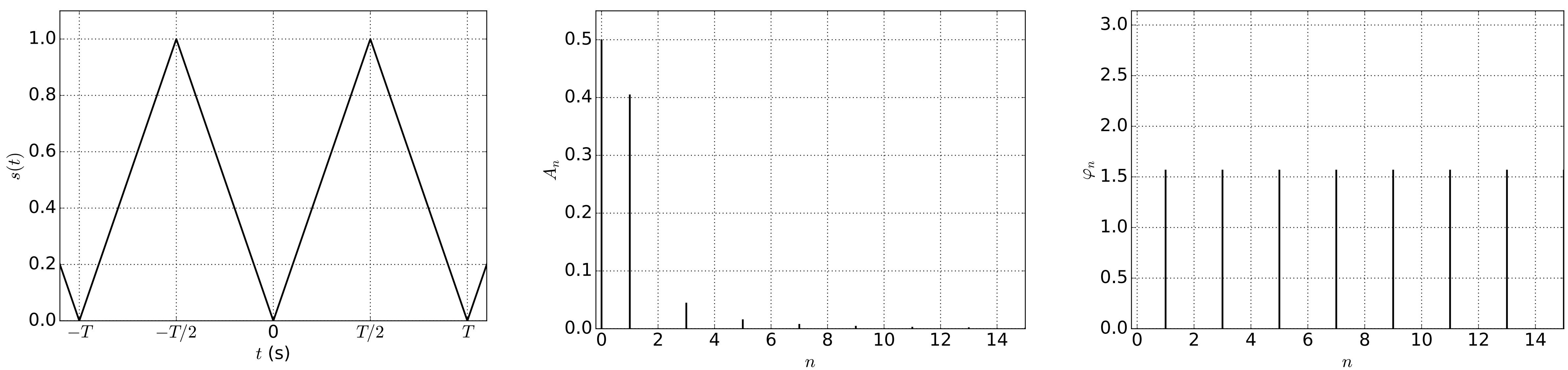



FIGURE 8: De gauche à droite : signal, spectrogramme d'amplitude , spectrogramme de phase.

### c) Synthèse de Fourier

On peut **reconstituer** un signal périodique en **sommant ses composantes** (composante continue, fondamental, harmoniques). Cette méthode s'appelle la **synthèse de Fourier**.

En pratique, pour un signal se décomposant sous la forme $s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$ , le **signal synthétisé** $s_N(t)$ sera de la forme :

$$s_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n) \ , \quad N \geq 1 \ .$$

Plus $N$ est grand, meilleure est la reconstitution du signal.

# Spectres des signaux

**Exemple : Synthèse d'un signal créneau**

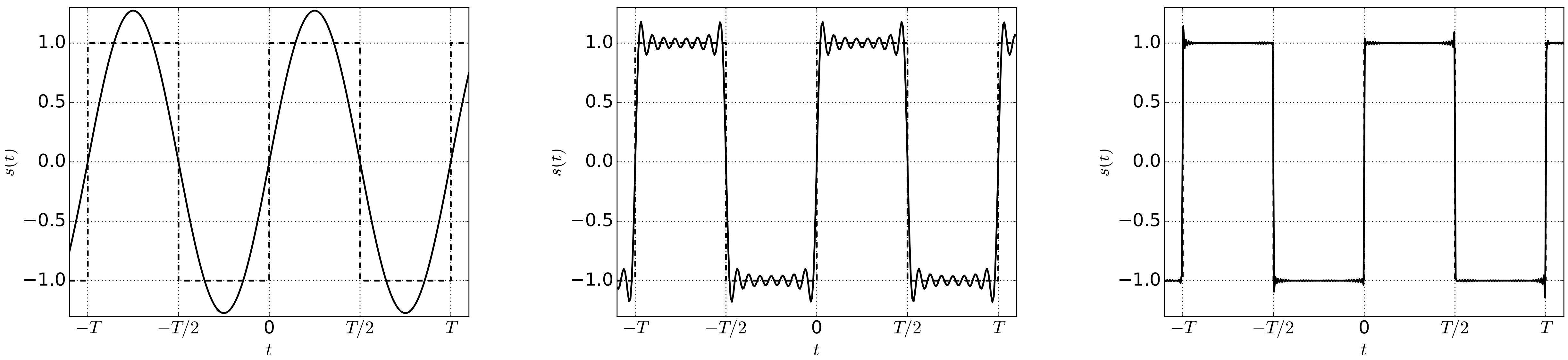
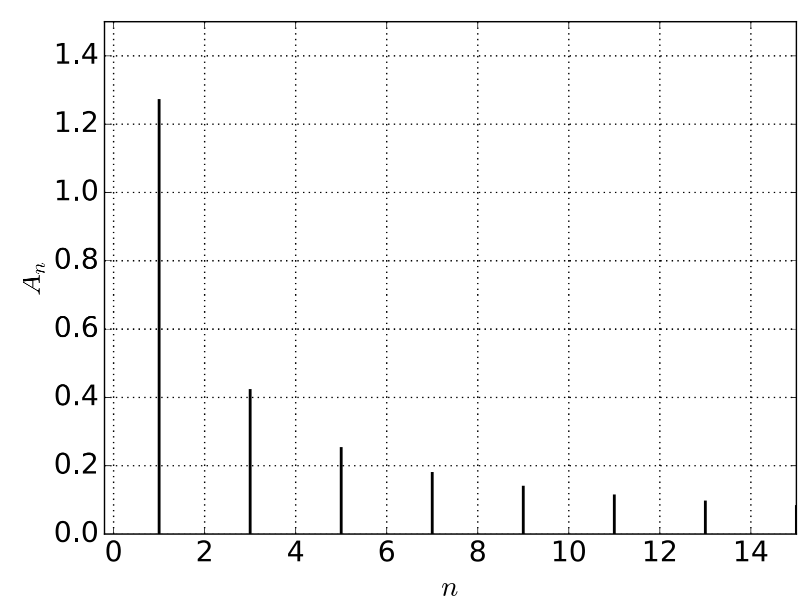



Figure 9: Synthèse de Fourier avec, de gauche à droite, 1 composante, 8 composantes, et 100 composantes non-nulles.

Basses fréquences : allure de la courbe

Hautes fréquences : détails

Phénomène de Gibbs au niveau des discontinuités



# Spectres des signaux

**Exemple : Synthèse d'un signal triangle**

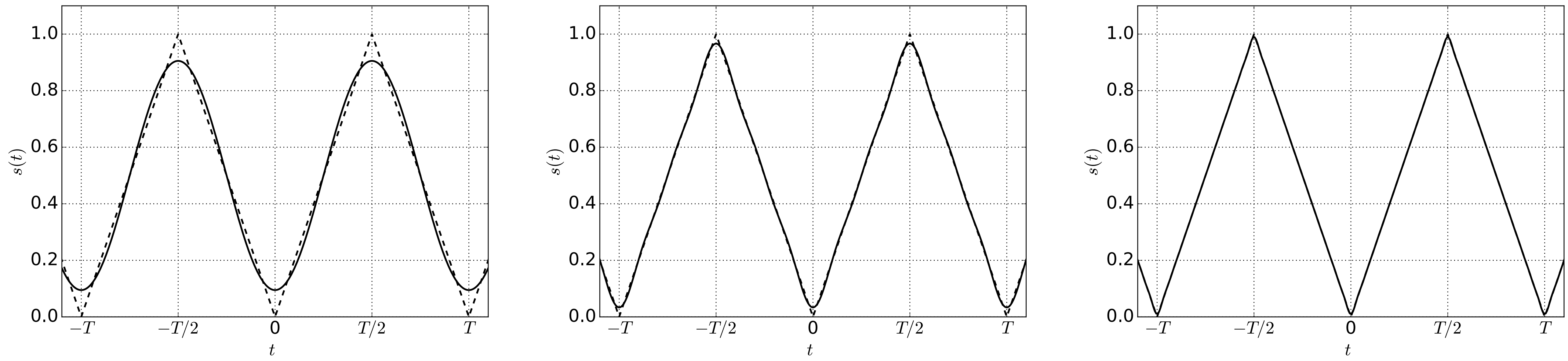
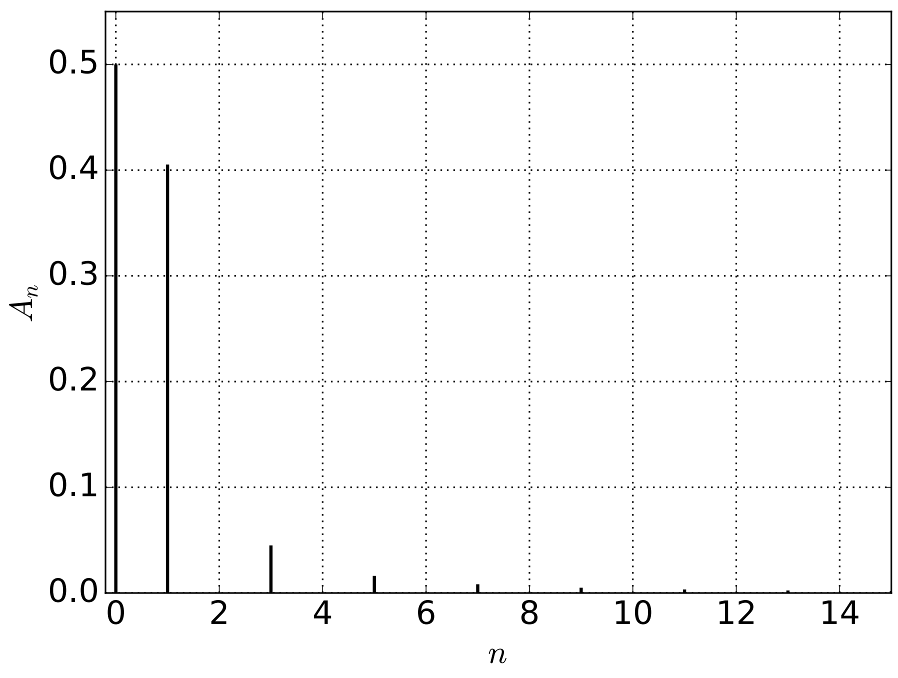



Figure 10: Synthèse de Fourier avec, de gauche à droite, 1 composante, 3 composantes, et 10 composantes non-nulles.

Pas de phénomène de Gibbs



## 3) Signaux à spectres continus

Pour certains signaux non-périodiques, la formule de décomposition donnée dans l'équation 1 est trop restrictive. Par exemple, pour le signal gaussien

$$s(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} ,$$

représenté dans la FIGURE 11, il est nécessaire d'adapter la formule.

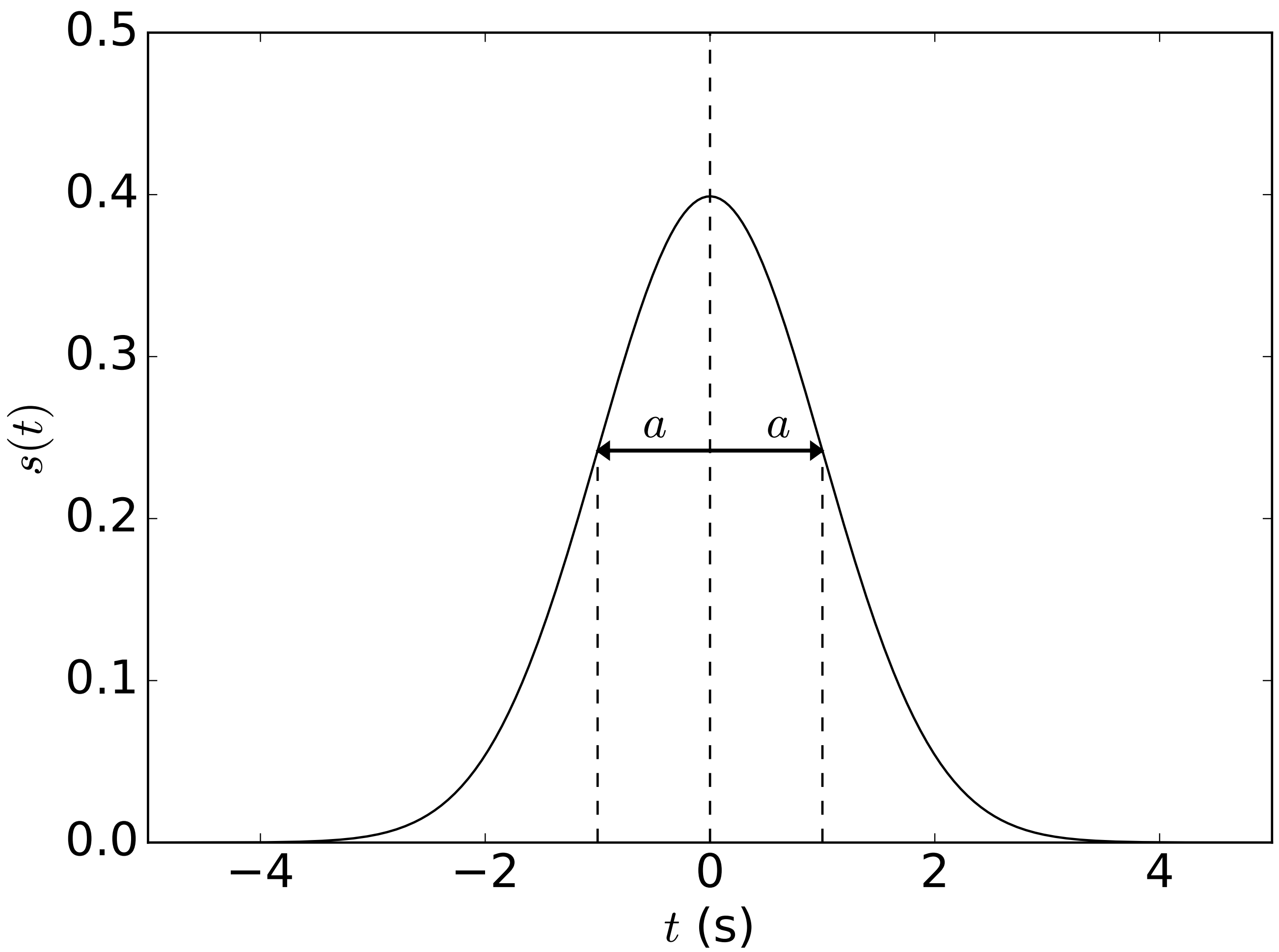


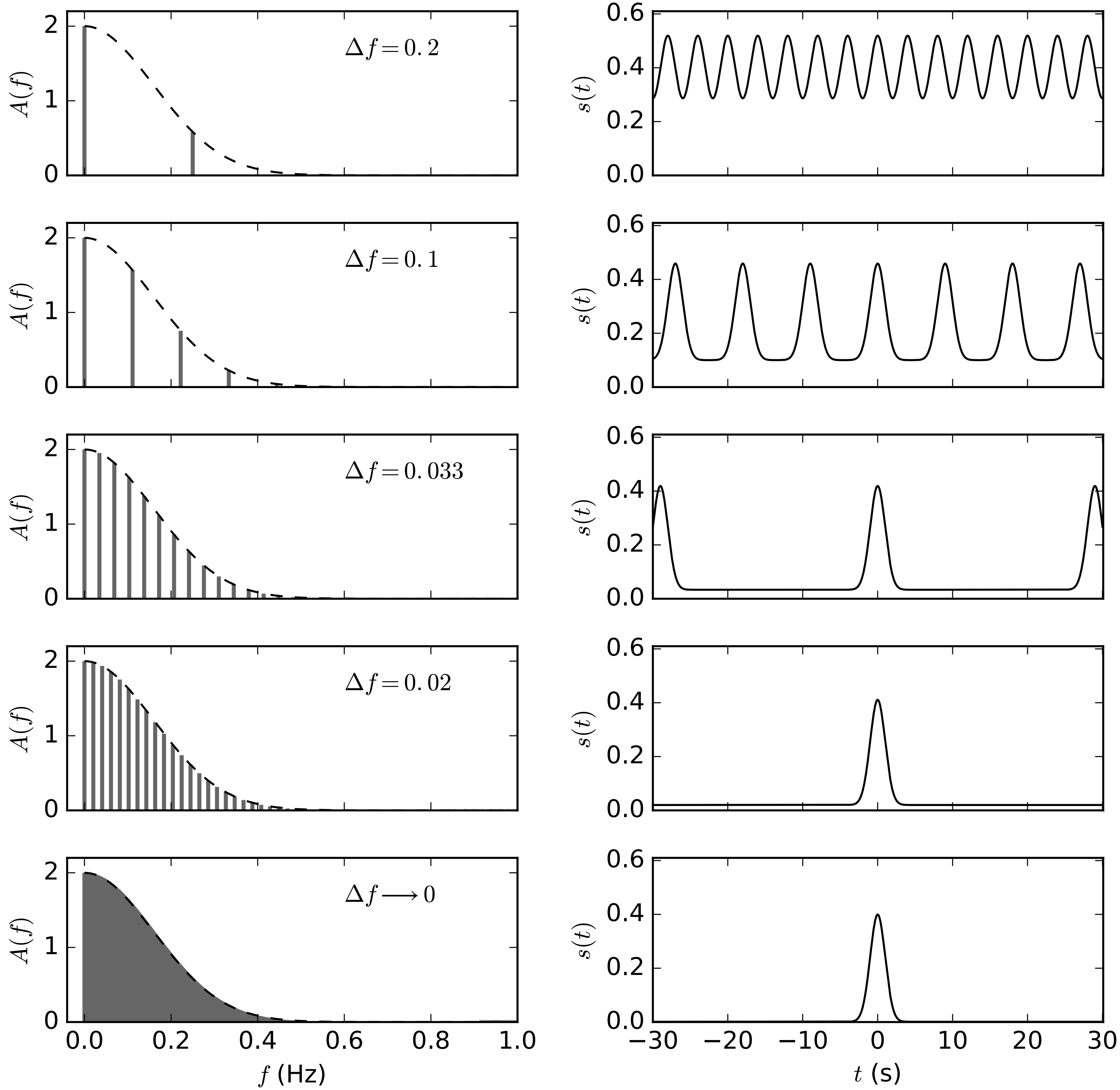

FIGURE 11: Signal gaussien $s(t)$ avec $a = 1\,\mathrm{s}$.

# Spectres des signaux

On reconstruit le signal en utilisant la formule suivante :

$$s(t) = \Delta f \sum_{n=0}^{N_{\max}} A(n\Delta f)\cos(2\pi n \Delta f t) \quad \text{avec} \quad A(f) = 2e^{-\frac{a^2(2\pi f)^2}{2}} \ .$$

# Spectres des signaux



# Spectres des signaux

On reconstruit le signal en utilisant la formule suivante :

$$s(t) = \Delta f \sum_{n=0}^{N_{\max}} A(n\Delta f)\cos(2\pi n\Delta f t) \quad \text{avec} \quad A(f) = 2e^{-\frac{a^2(2\pi f)^2}{2}} \ .$$

◆ Pour certains signaux non-périodiques $s(t)$ la décomposition de Fourier s'écrit sous la forme d'une intégrale :

$$\boxed{s(t) = \int_0^{+\infty} A(f)\cos\left(2\pi f t + \varphi(f)\right)\, \mathrm{d}f}\ , \qquad (2)$$

que l'on appelle **transformée de Fourier**.

◆ Le **spectre du signal** est l'intervalle $[f_{\min}, f_{\max}]$ des fréquences telles que $A(f) \neq 0$. On dit alors que le spectre est **continu**.

**Remarque :** On peut avoir $f_{\max} \to +\infty$.

# Spectres des signaux

Comme deuxième exemple, prenons la fonction suivante :

$$s(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \cos(2\pi f_0 t) \ ,$$

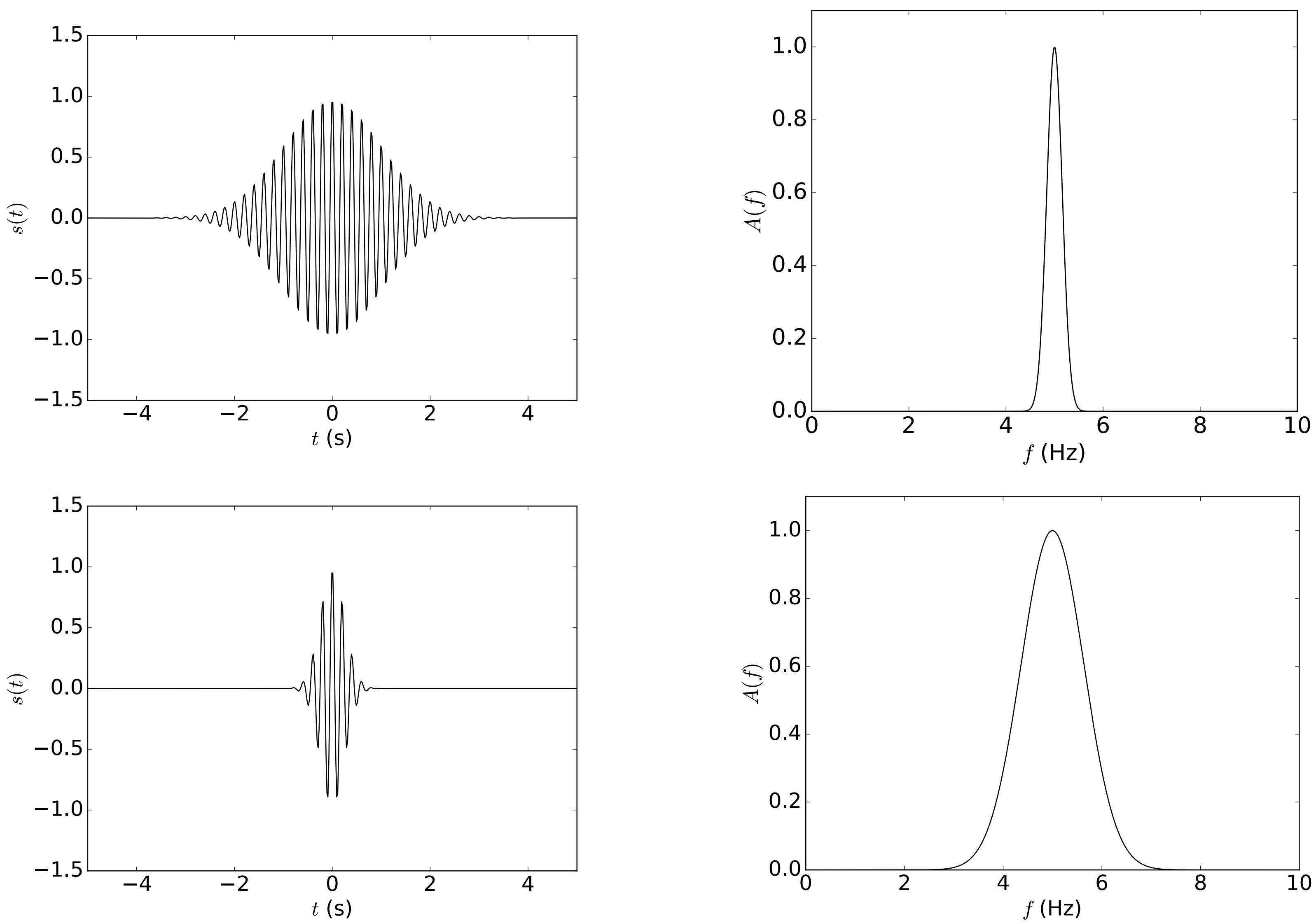
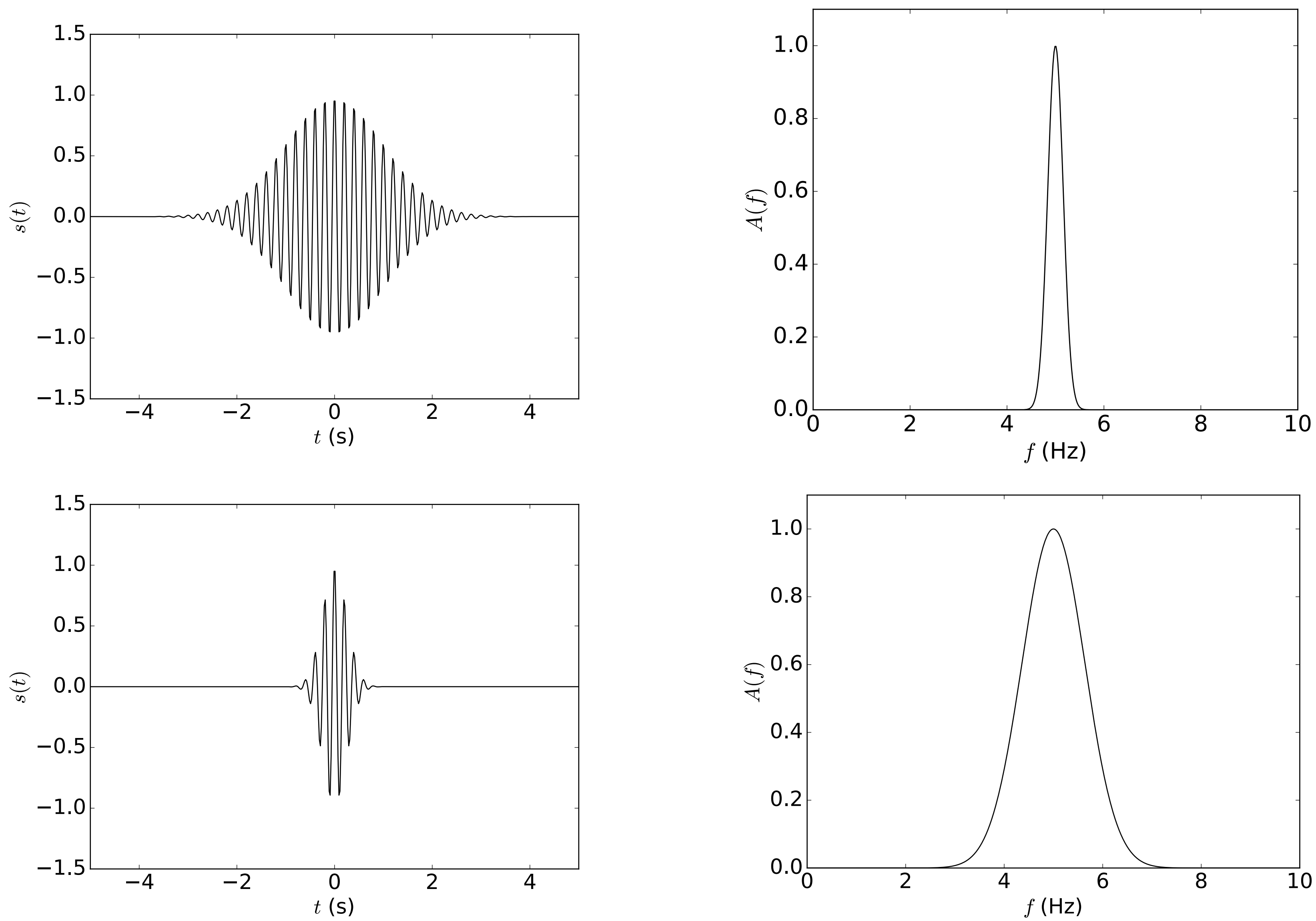



FIGURE 13: Tracé de la fonction $s(t)$ et de son spectrogramme d'amplitude pour $f_0 = 5\,\mathrm{Hz}$. Sur la première ligne, on a $a = 1\,\mathrm{s}$ et sur la deuxième ligne $a = 0{,}25\,\mathrm{s}$.

# Spectres des signaux




Pour un signal non-périodique $s(t)$ ayant un spectre continu on retiendra le lien entre l'**extension temporelle** $\tau$ du signal et la **largeur** $\Delta f$ **des pics de fréquences** :

$$\boxed{2\pi\Delta f \times \tau \simeq 1}\,.$$