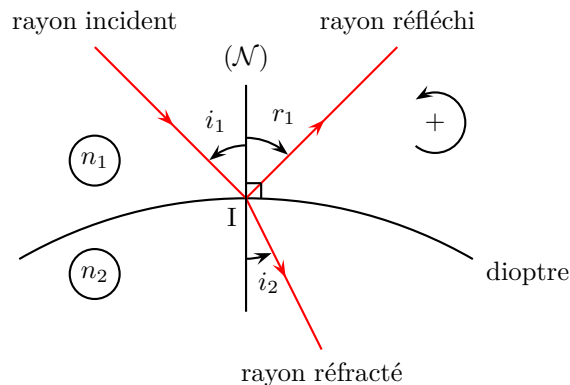


Corrigé - DM n°9: Optique

I Propagation géométrique de la lumière (D'après Mines-Ponts MP 2012)

1. Les lois de Snell-Descartes, énoncées au XVII^e siècle, décrivent le comportement de la lumière à l'interface de deux milieux (dioptre) d'indices respectifs n_1 et n_2 .



Elles s'énoncent ainsi :

- Première loi de Snell-Descartes : Le rayon réfléchi et le rayon réfracté (lorsqu'il existe) sont tous deux dans le plan d'incidence.
 - Deuxième loi de Snell-Descartes : $i_1 = -r_1$
 - Troisième loi de Snell-Descartes : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$
2. Quand un rayon lumineux se propageant dans un milieu d'indice n_1 arrive sur la surface de séparation avec un milieu d'indice $n_2 < n_1$, au delà d'un certain angle d'incidence, toute l'énergie lumineuse est réfléchi. En effet, l'existence du rayon réfracté nécessite

$$r_2 \leq \pi/2 \Leftrightarrow \sin r_2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \leq 1 \Leftrightarrow \sin i_1 \leq \frac{n_2}{n_1}$$

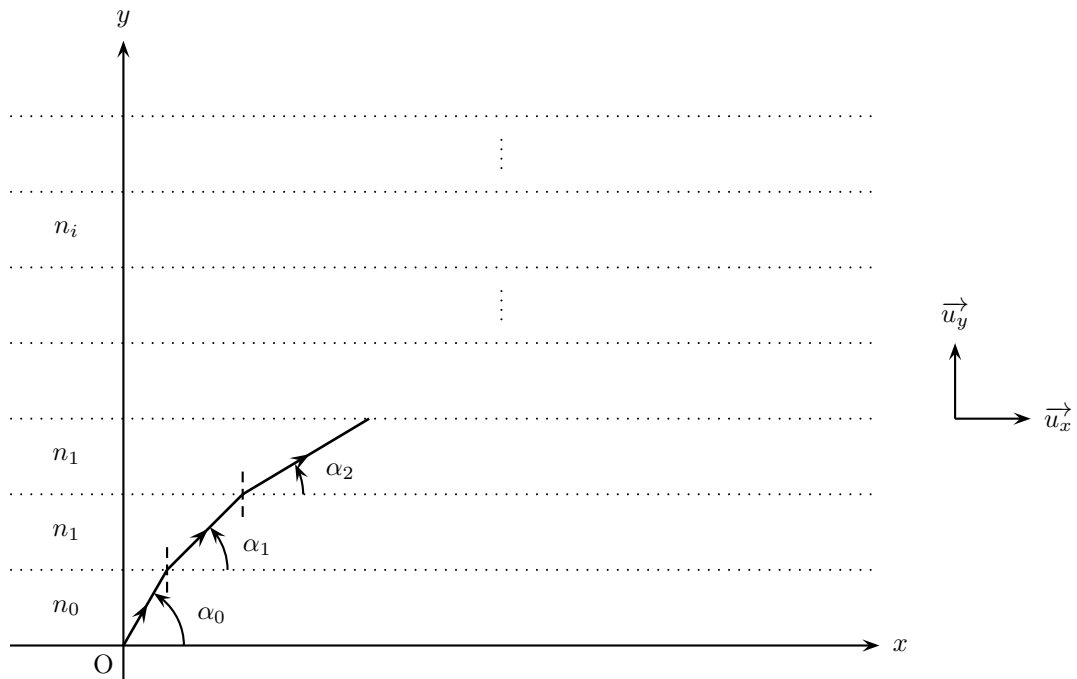
d'où $\sin i_{\text{lim}} = n_2/n_1$. Avec les notations de l'énoncé (introduites seulement dans la question suivante...), $\alpha_{\text{lim}} = \pi/2 - i_{\text{lim}}$ d'où $\alpha_{\text{lim}} = \arccos(n_2/n_1)$.

3. L'angle d'incidence sur le dioptre séparant les indices n_i et n_j pris par rapport à la normale au dioptre est $i_i = \pi/2 - \alpha_i$ d'où la loi de Snell-Descartes, $n_i \cos \alpha_i = n_j \cos \alpha_j$. Comme n_i est une fonction décroissante de i , α_i est donc une fonction croissante de i et le rayon s'incurve toujours en direction de l'axe (Ox).
4. On généralise immédiatement le résultat précédent en $n(y) \cos \alpha(y) = C_0$ dans le cas d'une trajectoire dans un milieu continu. En remarquant que $\cos \alpha(y) = \frac{dx}{ds}$, on en déduit que $n(y) = C_0 \frac{ds}{dx}$
5. La relation $ds \vec{u}_s = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$ fournit aisément $ds^2 = dx^2 + dy^2$, ou encore $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

L'équation précédente est équivalente à $C_0^2 = n^2(y) \frac{(dx)^2}{(dx)^2 + (dy)^2} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(y)}{C_0^2}$ d'où, par dérivation par rapport à x , $2 \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C_0^2} \frac{d}{dy} (n^2(y)) \frac{dy}{dx}$. En dehors des points où le rayon devient parallèle à l'axe

(Ox), $\frac{dy}{dx} \neq 0$ et on trouve bien l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dy} \left(-\frac{n^2}{\beta^2} \right)$ demandée à condition de poser

$\beta^2 = 2C_0^2$. On admettra que cette équation peut être, par prolongement dérivable du rayon lumineux, étendue aux points où $\frac{dy}{dx} = 0$.



6. En reportant $n^2(y) = n_0^2 + ky^2$ dans l'équation du rayon lumineux, on obtient $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{k}{C_0^2}y = 0$.

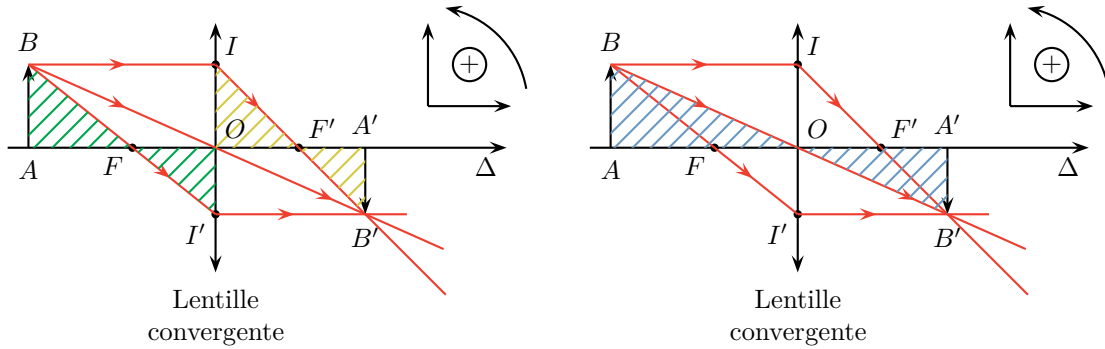
- Si $k < 0$ les solutions de cette équation sont du type $y(x) = A \exp\left(i \frac{\sqrt{-k}}{C_0} x\right) + B \exp\left(-i \frac{\sqrt{-k}}{C_0} x\right)$ avec A, B des constantes. Compte tenu de la condition initiale $y(0) = 0$, on trouve $B = -A$; en posant $A = y_0/2$, on en déduit $y(x) = y_0 \sin\left(\frac{\sqrt{-k}}{C_0} x\right)$: c'est le cas de la fibres optique à gradient d'indice, le rayon lumineux restant confiné à une distance finie de (Ox) de la fibre.
- Si $k > 0$ on trouve avec les mêmes notations $y(x) = y_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{k}}{C_0} x\right)$: c'est le cas du mirage, le rayon lumineux s'éloignant de la trajectoire rectiligne qu'on observerait dans un milieu homogène.

II Analyse d'une goutte de sang

II.1 Étude directe au microscope

Questions préliminaires

1. Un oeil emmétrope voit nettement des objets à l'infini lorsqu'il est au repos, c'est-à-dire qu'il n'accomode pas : son punctum remotum est donc à l'infini. Un oeil emmétrope possède conventionnellement un punctum proximum à $d_m =$ de son oeil à son maximum d'accomodation. En deça de cette valeur, il voit flou.
2. En s'appuyant sur l'exemple d'une lentille convergent, on obtient la construction géométrique suivante :



En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles FAB et FOI' (figure ci-dessus à gauche), on obtient une première expression du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OI'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{f'}{\overline{FA}} \quad (1)$$

En utilisant toujours le théorème de Thalès, mais cette fois dans les triangles OIF' et $F'A'B'$ (figure ci-dessus à gauche), on obtient une deuxième expression du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \quad (2)$$

En utilisant enfin le théorème de Thalès, mais cette fois dans les triangles OAB et $OA'B'$ (figure ci-dessus à droite), on obtient une troisième expression du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (3)$$

3. Dans l'approximation de Gauss, on considère qu'un système optique est uniquement éclairé par des rayons paraxiaux : peu inclinés et peu éloignés de l'axe optique au niveau du système optique. Dans le cas d'instruments d'optique centré, travailler dans l'approximation de Gauss permet d'obtenir un stigmatisme approché.

Caractérisation des conjugaisons de l'oculaire et de l'objectif

4. L'oeil étant supposé emmétrope, au repos son punctum remotum est à l'infini. La conjugaison de A avec son image A' s'écrit donc, par stigmatisme :

$$A \xrightarrow{\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}} A'_\infty$$

et donc :

$$A \xrightarrow{\{\mathcal{L}_1\}} A_1 = F_2 \xrightarrow{\{\mathcal{L}_2\}} A'_\infty$$

L'image intermédiaire A_1B_1 se situe donc dans le focal objet de \mathcal{L}_2 .

5. Pour établir l'expression de $|\gamma_1|$, on utilise la relation de grandissement au foyer image pour \mathcal{L}_1 :

$$|\gamma_1| = \left| \frac{\overline{F'_1 A_1}}{f'_1} \right| = \frac{\overline{F'_1 F_2}}{f'_1} = \frac{\Delta}{f'_1}$$

On a donc $|\gamma_1| = \frac{\Delta}{f'_1}$. On notera que \mathcal{L}_1 est forcément une lentille convergente puisqu'elle conjugue un objet réel avec une image réelle.

6. Pour déterminer $G_{c,oc}$, on détermine les expressions de α' et de α dans le cas de l'oculaire. On notera que la lentille \mathcal{L}_2 est forcément une lentille convergente puisque l'oeil est placé dans son plan focal image.

Pour α' , on étudie la conjugaison $A_1 = F_2 \xrightarrow{\{\mathcal{L}_2\}} A'_\infty$. Dans l'approximation de Gauss, il vient :

$$\alpha' \simeq \tan \alpha' = -\frac{h}{f'_2}$$

où $h = A_1B_1$ est la taille de l'objet pour l'oculaire, placé dans son plan focal objet. Pour α , il n'y a pas cette fois de conjugaison (par l'oculaire) à étudier puisque l'observation se fait à l'oeil nu. On a donc directement :

$$\alpha \simeq \tan \alpha = -\frac{h}{d_m}$$

Finalement, on obtient l'expression de $G_{c,oc}$:

$$G_{c,oc} = \frac{d_m}{f'_2}$$

7. L'énoncé donne d'une part $\Delta = 160$ mm et d'autre part $|\gamma_1| = 60$. L'application numérique donne donc :

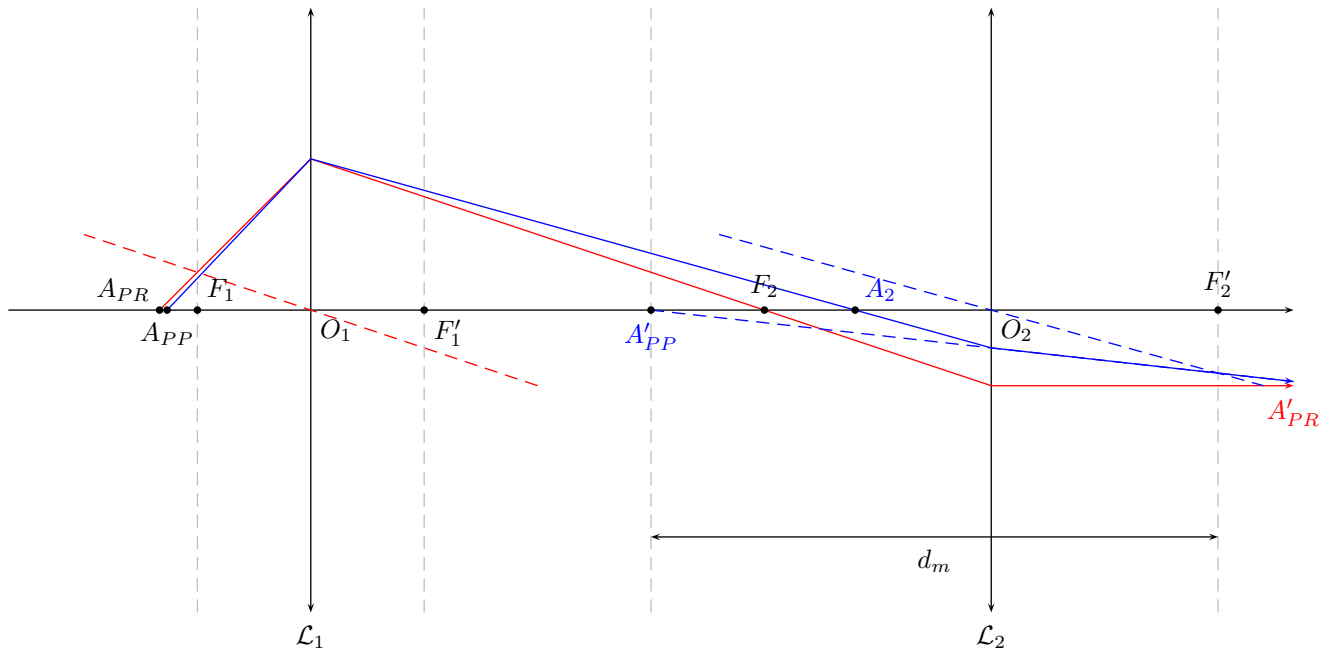
$$f'_1 = \frac{\Delta}{|\gamma_1|} = 2.7 \text{ mm}$$

Par ailleurs, l'énoncé donne $G_{c,oc} = 10$. Avec $d_m = 25$ cm, on en déduit :

$$f'_2 = \frac{d_m}{G_{c,oc}} = 25 \text{ mm}$$

Profondeur de champ

8. Schéma du microscope :



9. Tracé en rouge ci-dessus.

10. Tracé en bleu ci-dessus

11. On s'intéresse pour commencer au cas de A_{PR} . La conjugaison au travers du microscope s'écrit :

$$A_{PR} \xrightarrow{\{\mathcal{L}_1\}} A_1 = F_2 \xrightarrow{\{\mathcal{L}_2\}} A'_{\infty}$$

On étudie alors la conjugaison par la lentille \mathcal{L}_1 , grâce à la relation de conjugaison aux foyers (Newton) :

$$\overline{F_1 A_{PR}} \times \overline{F_1' F_2} = -f_1'^2$$

Or par hypothèse, $\Delta = \overline{F_1' F_2}$ est connu. On a donc :

$$\boxed{\overline{F_1 A_{PR}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}}$$

On s'intéresse maintenant au cas de A_{PP} . La conjugaison du microscope s'écrit :

$$A_{PP} \xrightarrow{\{\mathcal{L}_1\}} A_2 \xrightarrow{\{\mathcal{L}_2\}} A'_2$$

avec $\overline{F_2' A'_2} = -d_m$ puisque l'oeil accomode à son PP et est placé dans le plan focal image de \mathcal{L}_2 . Étudions d'abord, la conjugaison par \mathcal{L}_2 grâce à la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{F_2 A_2} \times \overline{F_2' A'_2} = -f_2'^2 \quad \text{soit} \quad \overline{F_2 A_2} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2' A'_2}} = \frac{f_2'^2}{d_m} = \frac{f_2'}{G_{c,oc}}$$

Or $\overline{F_1' A_2} = \overline{F_1' F_2} + \overline{F_2 A_2} = \Delta + \overline{F_2 A_2}$. On va donc utiliser la relation précédente dans la relation de conjugaison de Newton de la lentille \mathcal{L}_1 :

$$\overline{F_1 A_{PP}} \times \overline{F_1' A_2} = -f_1'^2$$

soit

$$\overline{F_1 A_{PP}} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F_1' A_2}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'}{G_{c,oc}}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} \times \frac{1}{1 + \frac{f_2'}{G_{c,oc}\Delta}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} \times \frac{1}{1 + \frac{d_m}{G_{c,oc}^2\Delta}}$$

On peut alors exprimer δ d'après la définition de l'énoncé :

$$\delta = |A_{PR}A_{PP}| = \frac{f_1'^2}{\Delta} \times \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{d_m}{G_{c,oc}^2 \Delta}} \right)$$

Or, d'après ce qui précède, $f_1'^2 = \frac{\Delta^2}{\gamma_1^2}$. On a donc au final :

$$\delta = \frac{\Delta}{\gamma_1^2} \times \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{d_m}{G_{c,oc}^2 \Delta}} \right)$$

12. L'application numérique donne $\epsilon = 1.6 \times 10^{-2}$.

13. La valeur numérique de ϵ permet de faire l'hypothèse $\epsilon \ll 1$. On peut donc effectuer un développement limité de l'expression de δ . En effet, $(1 + \epsilon)^{-1} = 1 - \epsilon$. On a alors :

$$\delta = \frac{\Delta}{\gamma_1^2} \times \left(1 - \frac{1}{1 + \epsilon} \right) \simeq \frac{\Delta}{\gamma_1^2} \times (1 - (1 - \epsilon)) = \frac{\Delta}{\gamma_1^2} \epsilon = \frac{d_m}{(G_{c,oc} \gamma_1)^2}$$

On a donc obtenu :

$$\delta = \frac{d_m}{(G_{c,oc} \gamma_1)^2} = 0.69 \mu\text{m}$$

Cette valeur est extrêmement faible car elle est très inférieure à l'épaisseur d'un globule rouge d'une part et que d'autre part elle est de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde du rayonnement visible. Le modèle de l'optique géométrique n'est pas valable à cette échelle.

Taille et densité des globules rouges dans le sang

14. Le diaphragme d'ouverture du microscope étant placé dans le plan focal objet de l'oculaire, le diamètre du disque d'observation est γ_1 fois plus petit que D . On a donc :

$$r = \frac{D}{2|\gamma_1|} = 1.7 \times 10^{-4} \text{ m}$$

15. Le long d'un diamètre du disque d'observation, on peut aligner environ 30 globules rouges (on peut aussi estimer la taille moyenne d'un globule rouge). On en déduit que la taille moyenne d'un globule rouge est de l'ordre de 10 μm , ce qui est notablement plus grand que la taille de référence donnée par l'énoncé. Il s'agit cependant d'une moyenne et il est tout à fait envisageable qu'un patient possède des hématies un peu plus grosses.

16. À partir de r , on a pour un disque :

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi D^2}{4\gamma_1^2} = 8.7 \times 10^{-8} \text{ m}^2$$

17. Pour calculer n^* , il faut estimer le nombre d'hématies sur l'image. Pour cela, on observe qu'il y a environ $N = 10$ hématies selon un rayon du disque et qu'on a donc $N_{tot} = \pi N^2 \simeq 300$ hématies sur la photographie. On a alors :

$$n^* \simeq \frac{N_{tot}}{V} = \frac{N_{tot}}{S\delta} = 5 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Cette valeur est dans l'intervalle de numérations acceptable pour un patient. Avec cette méthode, il semble donc que le patient ne souffre pas d'anémie.

18. Compte tenu de la faible valeur de δ , il paraît difficile d'exprimer un volume à partir de cette grandeur. On aurait tout aussi bien pu prendre pour volume celui correspondant à la surface S multipliée par l'épaisseur d'un globule rouge. D'autant que lorsque la goutte de sang est placée entre lame et lamelle, la répartition des globules rouges n'est pas uniforme et quasiment monocouche. Cette exploitation de la photographie ne paraît pas acceptable.

II.2 Utilisation d'une cellule hématimètre

- 19.** On compte sur la photographie environ entre 30 et 40 cellules pour 5 carrés (EM). On a donc en moyenne 7 cellules par cuve (EM). Le volume individuel de celles-ci étant de $V' = 5 \times 10^{-4} \text{ mm}^3$. On en déduit une densité $n^* \simeq 140$ millions de cellules par mm^3 . Il ne s'agit donc clairement pas de globules rouges humains !