TP M4 : Pendule pesant

Objectifs

Ce TP est consacré à l'étude du pendule pesant. A l'issue du TP, il s'agira de maîtriser les capacités suivantes :

⋆ *Mesure d'une période via une carte d'acquisition ;*

⋆ *Choisir de façon cohérente la fréquence d'échantillonnage et la durée totale d'acquisition ;*

⋆ *Mettre en évidence le non isochronisme des oscillations ;*

⋆ *Réaliser l'acquisition expérimentale du portrait de phase d'un pendule pesant ;*

⋆ *Mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique ;*

⋆ *Repérer la position d'un centre de masse et mesurer un moment d'inertie à partir d'une période et de l'application de la loi d'Huygens.*

I. Présentation du matériel

Le matériel utilisé pour ce TP est :

— un pendule pesant et ses accessoires (masse, carte d'acquisition, ailette pour frottements...) ;

— un ordinateur muni du logiciel Latispro.

Important : Le pendule est muni d'un capteur angulaire. Lors de la première connexion, il faut presser le bouton rouge lorsque la tige est immobile en position verticale. Ceci permet de "faire le zéro", le signal de sortie du capteur (à relier à la carte d'acquisition de Latispro) donnant alors l'angle entre la tige et la verticale.

II. Étude des oscillations non amorties

Les principales notions théoriques sont rappelées dans l'Annexe 1.

1. Influence de l'amplitude

a. Petites oscillations

On lâche ici le pendule sans vitesse initiale d'un angle $\theta_0 < 20°$.

☞ Acquérir le mouvement angulaire du pendule pesant grâce au logiciel Latispro sur quelques oscillations. Prendre soin de bien paramétrer le déclenchement et l'acquisition (durée totale, nombre de points) afin d'acquérir correctement le signal en respectant le critère de Shannon (voir Annexe 2).

☞ À l'aide du menu « traitement / modélisation », déterminer la période T_0 des oscillations.

☞ Répéter la mesure pour différentes amplitudes initiales θ_0 toujours inférieures à 20°. Tracer la courbe $T_0(\theta_0)$ et vérifier l'isochronisme des petites oscillations.

Prendre soin de bien paramétrer le déclenchement de l'acquisition sous LatisPro et de cliquer sur "ajouter les courbes" pour garder la trace de chaque acquisition.

☞ Tracer le portrait de phase du système pour l'une des acquisitions précédentes. On pourra s'aider de la fonction « dérivée » du menu « traitement / calculs spécifiques ». Commenter.

b. Grandes oscillations

☞ Effectuer à présent plusieurs acquisitions pour différents angles initiaux compris entre 20° et 70°.

☞ Tracer la courbe $T(\theta_0)$ de la période des oscillations en fonction de l'angle initial et conclure.

☞ Tracer le portrait de phase du système pour $\theta_0 < 90°$ le plus grand possible et le comparer au portrait de phase du pendule aux faibles amplitudes. Commenter.

2. Mesure d'un moment d'inertie

On cherche ici à vérifier la loi de Huygens et à mesurer le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ_G. On se reportera à l'Annexe 1 pour les rappels théoriques concernant le moment d'inertie.

☞ Proposer un protocole simple pour venir repérer rapidement la position du centre d'inertie du solide {tige + masse}.

☞ Réaliser plusieurs mesures de la période du pendule pesant, dans le cas d'oscillations de faible amplitude, pour différentes distances d entre l'axe de rotation Δ et le centre d'inertie G.

☞ Montrer, par une modélisation simple et adéquate que les mesures sont cohérentes avec la loi d'Huygens et donner une valeur du moment d'inertie du solide par rapport à Δ_G.

III. Étude des oscillations amorties

1. Rappels théoriques

En présence de frottements, l'équation horaire du mouvement, pour les petites oscillations, se met sous la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \, e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi) \tag{1}$$

avec Ω la pseudo-pulsation du système, $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ le coefficient d'amortissement et Q le facteur de qualité du système.

2. Enveloppe et coefficient d'amortissement

☞ Positionner l'ailette (plaque rectangulaire jaune) au sommet de la tige (la surface rectangulaire étant perpendiculaire au mouvement lors des oscillations pour assurer un meilleur frottement !).

Enregistrer les oscillations amorties pendant au moins 2 minutes. Observer l'amortissement des oscillations.

✍ On veut déterminer la valeur du coefficient d'amortissement λ. Établir une relation simple entre λ et les maxima d'amplitude de la courbe.

☞ Proposer et mettre en œuvre une méthode de détermination de λ à partir de la courbe obtenue. On pourra réaliser une régression linéaire sur des données pertinentes.

3. Paramètres des oscillations amorties

☞ En utilisant la fonction modélisation, montrer la validité de l'équation horaire du mouvement donnée ci-dessus en comparant la courbe expérimentale et la modélisation. Relever les valeurs numériques de θ_0, λ, Ω et φ proposées pour la modélisation. Commenter.
Comparer la valeur de λ avec celle précédemment obtenue.

Remarque : si le logiciel ne parvient pas à trouver les 4 paramètres nécessaires à la modélisation, vous pouvez "l'aider" en rentrant par exemple les valeurs de θ_0 et Ω.

4. Portrait de phase

☞ Tracer le portrait de phase du système. Commenter.

5. Energie mécanique

☞ Tracer le graphe donnant l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ en fonction du temps. Commenter.

IV. Ce qu'il faut retenir !

Effectuer sur votre cahier de laboratoire un bilan de TP résumant :

- ⋆ *les propriétés physiques qui ont été mises en évidence*
- ⋆ *les lois physiques qui ont été démontrées ou utilisées*
- ⋆ *les nouvelles fonctions des différents appareils auxquelles vous avez fait appel. Pour ces dernières, préciser leur rôle et les moyens de les activer*

Annexe 1 : Rappels théoriques sur le solide en rotation autour d'un axe fixe

Equation du mouvement en l'absence de frottements

Cas général

Le système étudié est un pendule pesant régi, en l'absence de frottements, par l'équation différentielle suivante :

$$J_\Delta \ddot{\theta} + mgd \sin\theta = 0 \tag{2}$$

où θ est l'angle fait par le pendule avec la verticale, J_Δ son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, m sa masse, g l'accélération de la pesanteur et d la distance séparant son centre d'inertie de l'axe de rotation.

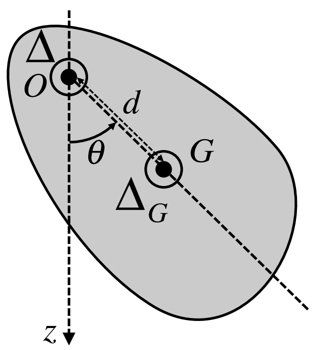
Approximation harmonique

Dans le cas de petites oscillations ($\sin\theta \simeq \theta$), l'équation du mouvement s'écrit sous la forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{3}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J_\Delta}}$ la pulsation propre du système.
Le mouvement est alors harmonique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et l'équation horaire du mouvement est $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. La période T_0 est indépendante de l'amplitude θ_0 des oscillations ; on dit qu'il y a isochronisme des petites oscillations.
Pour des oscillations de grande amplitude, l'approximation harmonique n'est plus vérifiée. La période T_0 dépend de cette amplitude et augmente avec elle.

Moment d'inertie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe



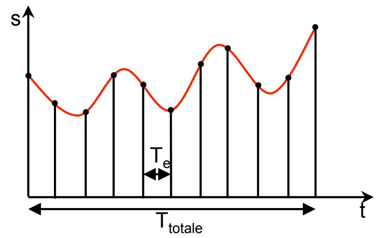
Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ, J_Δ, est une grandeur qui caractérise l'aptitude du solide à s'opposer à sa mise en rotation autour de Δ. J_Δ dépend de la répartition de la masse du solide autour de l'axe Δ. On cherche à mesurer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe passant par son centre d'inertie.
Considérons un solide Σ de masse totale M, de centre d'inertie G en rotation autour d'un axe Δ passant par un point O situé à une distance d de G. Le solide Σ est un pendule pesant en rotation autour de l'axe Δ et de moment d'inertie par rapport à cet axe J_Δ. Soit un axe Δ_G, parallèle à Δ passant par le centre d'inertie G du solide.
D'après la loi de Huygens, le moment d'inertie J_Δ s'écrit :

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + Md^2$$

Annexe 2 : Rappels sur le critère de Shannon

Lorsque vous lancer une acquisition d'un signal temporel avec LatisPro (menu « Paramétrage d'acquisition »), vous devez régler les paramètres : "nombre de points N", "T_e" et "T_{totale}".

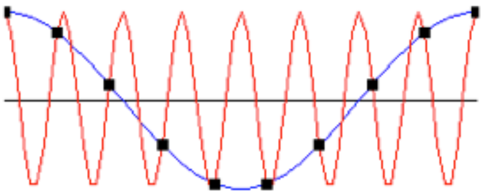
- Le "nombre de points N" correspond au nombre de points de mesure effectués au cours de l'acquisition.
- Le paramètre T_e permet de fixer la durée entre deux mesures successives.
- Le paramètre T_{totale} permet de fixer la durée totale d'acquisition.



Ces trois paramètres ne sont pas indépendants les uns des autres, mais sont liés par la relation : $T_{totale} = N \times T_e$. Seuls deux de ces paramètres peuvent être fixés par l'utilisateur, le troisième étant automatiquement déduit par le logiciel.

Critère de Shannon

Intéressons nous à l'acquisition d'un signal sinusoïdal. Pour que les mesures discrètes effectuées par la carte d'acquisition reflètent bien l'allure générale du signal réel, le critère de Shannon impose qu'**il faut effectuer au moins 2 mesures par période du signal réel**.



En effet sur le graphe ci-dessus, le critère de Shannon n'est pas vérifié, les points de mesures (carrés noirs) ne permettent pas d'avoir accès à la période réelle du signal (le signal acquis (courbe bleue) semble avoir une période inférieure au signal réel (courbe rouge)).

Ce critère peut se généraliser à tout signal périodique : si l'on note f_{max} la fréquence maximale du spectre du signal, la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ doit nécessairement vérifier

$$f_e > 2f_{\text{max}}$$