

Corrigé - DM n°2: Électricité en régime continu

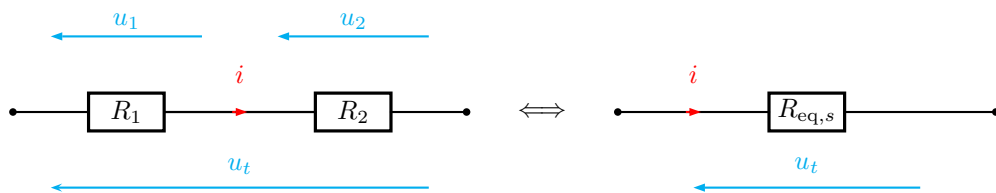
I Protection électrique d'une installation domestique

1. Pour qu'il y ait une coupure de courant, il faut que soumis à une différence de potentiel $U = 230$ V, un courant $I_f = I_{f,\text{seuil}} = 30$ mA traverse la résistance R_0 . D'après la loi d'Ohm, on aura donc :

$$U = R_0 I_f \quad \text{soit} \quad R_0 = \frac{U}{I_f} \quad \text{A.N. :} \quad R_0 = 7.7 \times 10^3 \Omega$$

2. (a) En série : $u_t = u + u = (R + R') i$ et $u_t = R_{\text{eq},s} i$, donc :

$$R_{\text{eq},s} = R + R'$$



- (b) En parallèle :

$$R_{\text{eq},P} = \frac{R R'}{R + R'}$$

3. D'une part, les bras et les jambes sont plus longs et moins large que l'abdomen, mais en plus leur résistivité est plus grande que celle de l'abdomen. En effet, ce dernier est essentiellement constitué d'eau alors que les muscles sont plus secs. La résistance des bras et des jambes est donc logiquement plus élevée.
4. (a) Si les chaussures sont isolantes, et si chaque main en contact avec les deux pôles, aucun courant ne traverse les résistances R_4 et R_5 . La résistance équivalente est alors schématiquement $R_1 + (R_2/2R_3) + R_1$ soit :

$$R_{\text{eq},a} = 2R_1 + \frac{2R_2 R_3}{R_2 + 2R_3} \quad \text{A.N. :} \quad R_{\text{eq},a} = 981 \Omega$$

On en déduit l'intensité du courant en appliquant la loi d'Ohm :

$$I_a = \frac{U}{R_{\text{eq},a}} \quad \text{A.N. :} \quad I_a = 235 \text{ mA}$$

Le courant de fuite est nul, le disjoncteur différentiel ne coupera pas le courant alors que l'intensité du courant traversant le corps est pourtant 10 fois supérieure à la valeur seuil : il y a risque de tétanisation des muscles et de décès de la personne !

- (b) On est dans la même situation mais cette fois $U = 16$ V donc $R_b = R_a = 981 \Omega$ et $I_b = 16,3 \text{ mA}$. Le courant de fuite est toujours nul, mais cette fois, l'intensité du courant traversant la personne est inférieur à la limite mortelle : il n'y a pas de risque d'électrocution grave.
- (c) Si une main tient une phase et les pieds sont posés par terre, le courant ne passe pas par un des bras mais parcourt R_1 puis $R_3/(R_3 + R_2)$ puis R_4 puis R_5/R_5 . La résistance équivalente est ici :

$$R_{\text{eq},c} = R_1 + \frac{R_3(R_2 + R_3)}{R_2 + 2R_3} + R_4 + \frac{R_5}{2} \quad \text{A.N. :} \quad R_{\text{eq},c} = 973 \Omega$$

On en déduit l'intensité du courant en appliquant la loi d'Ohm :

$$I_c = \frac{U}{R_{\text{eq},c}} \quad \text{A.N. :} \quad I_c = 236 \text{ mA}$$

L'intensité du courant de fuite est donc supérieure à l'intensité seuil. Le disjoncteur différentiel coupera le courant.

5. Pour un conducteur cylindrique de diamètre D , la section a pour expression $S = \pi D^2/4$. D'après la relation fournie par l'énoncé, on en déduit l'expression de la résistance R_c :

$$\boxed{R_c = \frac{d}{\gamma \times \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}} \quad \text{A.N. :} \quad \boxed{R_c = 1.66 \times 10^{-3} \Omega \ll R_s}$$

6. La résistance R_{n+1} correspond à l'association série d'une résistance R_c avec l'association parallèle d'une résistance R_s et de R_n . La relation de récurrence est donc :

$$\boxed{R_{n+1} = R_c + \frac{R_s R_n}{R_s + R_n}}$$

7. Lorsque n tend vers l'infini, $R_{n+1} = R_n = R_\infty$ et donc :

$$R_\infty = R_c + \frac{R_s R_\infty}{R_s + R_\infty} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_\infty^2 - R_c R_\infty - R_c R_s = 0}$$

En posant le discriminant, on détermine deux racines réelles de signes opposés. On ne garde que la solution physiquement acceptable car positive

$$\boxed{R_\infty = \frac{1}{2} \left[R_c + \sqrt{R_c (R_c + 4R_s)} \right]}$$

8. Compte tenu de l'inégalité $R_c \ll R_s$, on peut négliger R_c devant $4R_s$ puis R_c devant $2\sqrt{R_c R_s}$. On obtient alors :

$$\boxed{R_\infty \simeq \sqrt{R_c R_s}}$$

9. La valeur numérique calculée est $\boxed{R_\infty = 0,22 \Omega}$. Cette valeur est très inférieure à la limite admissible, ce dispositif semble donc efficace.