Corrigé - DM n°5: Mécanique

I Trajectoire en coordonnées cartésiennes et polaires *(D'après ICNA 2018)*

1. Les réponses sont $\boxed{B}$ et $\boxed{C}$.
Les relations de passage entre les coordonnées polaires et cartésiennes donnent notamment : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On en déduit immédiatement :

$$r = b\,\mathrm{e}^{-kt} \quad \text{et} \quad \theta = kt$$

2. La réponse est $\boxed{B}$.
Par une simple substitution :

$$r = b\,\mathrm{e}^{-kt} = b\,\mathrm{e}^{-\theta}$$

3. La réponse est $\boxed{E}$.

- pour une parabole, on devrait avoir $r = a\theta^2 + b\theta + c$, ce qui ne correspond pas au mouvement étudié.
- pour une hyperbole, on devrait avoir $r = \dfrac{cste}{\theta}$, ce qui ne correspond pas au mouvement étudié.
- pour une ellipse, on devrait avoir $\dfrac{(r-r_0)^2}{a^2} + \dfrac{(\theta-\theta_0)^2}{b^2} = 1$, ce qui ne correspond pas au mouvement étudié.
- pour une spirale dont les coordonnées cartésiennes du centre sont $(b, 0, 0)$, on devrait avoir soit $r(\theta = 0) = b$ soit $r(\theta \to +\infty) = b$, ce qui ne correspond pas au mouvement étudié.

Dans notre cas, il s'agit d'une spirale dont les coordonnées cartésiennes du centre sont $(0, 0, 0)$. En effet,

$$x^2 + y^2 = \left(b\,\mathrm{e}^{-kt}\right)^2$$

ce qui correspond à un cercle dont le rayon diminue au cours du temps et tend vers 0.

4. Les réponses sont $\boxed{B}$ et $\boxed{D}$.
En effet, par définition le vecteur vitesse en coordonnées polaires s'écrit : $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$.
D'après la question 1., on a :

$$v_r = \dot{r} = -kb\,\mathrm{e}^{-kt} = -kr \quad \text{et} \quad v_\theta = r\dot{\theta} = r \times (k) = kr$$

5. Les réponses sont $\boxed{A}$ et $\boxed{D}$.
En effet, par définition le vecteur accélération en coordonnées polaires s'écrit : $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}$.
D'après les question 1. et 4., on a :

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = k^2 b\,\mathrm{e}^{-kt} - rk^2 = 0 \quad \text{et} \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -2k^2 r + 0 = -2k^2 r$$

6. La réponse est $\boxed{B}$.
D'après la question 4., le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ se décompose dans la base polaire de la façon suivante :

$$\overrightarrow{v} = -kr\overrightarrow{u_r} + kr\overrightarrow{u_\theta} = kr\left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\theta}\right)$$

dont la norme vaut $kr\sqrt{2}$ et par définition $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$. En notant α l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{v} = \sqrt{2}kr\cos\alpha = -kr \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_\theta} \cdot \overrightarrow{v} = \sqrt{2}kr\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = kr$$

On en déduit donc que $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{\alpha = \dfrac{3\pi}{4}}$. On peut aussi répondre à cette question à l'aide d'un simple schéma.

7. La réponse est $\boxed{E}$.

En effet, le vecteur accélération est orienté dans le sens de $-\overrightarrow{u_\theta}$. L'angle β vaut donc $\boxed{\beta = -\dfrac{\pi}{2}}$. On peut aussi répondre à cette question à l'aide d'un simple schéma.

8. La réponse est $\boxed{B}$.

En effet, par composition des angles orientés $\gamma = \beta - \alpha = -\dfrac{5\pi}{4}$. Ce résultat étant valable à 2π près, on en déduit $\boxed{\gamma = \dfrac{3\pi}{4}}$. On peut aussi répondre à cette question à l'aide d'un simple schéma.

II Trajectoire des plombs d'une cartouche *(D'après CCP MP 2017)*

II.1 Équation du mouvement

1.
- Système : projectile en plomb de masse m
- Référentiel : terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen
- Repère : cartésien $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ à deux dimensions de coordonnées x et z
- Étude cinématique : $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$
- Étude dynamique : poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$ et force de trainée $\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{a}} SCv\overrightarrow{v}$

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement au projectile dans $\mathcal{R}$:

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{g} - \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{a}} SCv\overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\rho_{\mathrm{a}} SC}{2m}v\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}}$$

II.2 Premier modèle : trajectoire gravitaire

2. Comme les deux seules forces en présence sont le poids et la force de frottement fluide de l'air, négliger cette dernière devant le poids correspond à :

$$\frac{\|\overrightarrow{F}\|}{\|\overrightarrow{P}\|} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho_{\mathrm{a}} SCv^2}{2m} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 \ll \sqrt{\frac{2mg}{\rho_{\mathrm{a}}\pi R^2 C}}$$

Par conservation de l'énergie mécanique, on pourrait montrer dans cette hypothèse (et pour une trajectoire symétrique) que $v \leq v_0$ d'où la condition demandée :

$$\boxed{v_0 \ll v_\infty} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_{\mathrm{a}}\pi R^2 C}}}$$

3. En négligeant la force de frottement fluide, l'équation du mouvement devient :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{g}$$

En projection sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$, on en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}}$$

4. En intégrant une première fois les équations du mouvement compte tenu des conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0\cos(\theta_0)$ et $\dot{y}(0) = v_0\sin(\theta_0)$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0\cos(\theta_0) \\ \dot{z} = -gt + v_0\sin(\theta_0) \end{cases}$$

puis, par une seconde intégration pour laquelle $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, on aboutit à :

$$\boxed{\begin{cases} x = v_0\cos(\theta_0)t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\theta_0)t \end{cases}}$$

5. En éliminant le temps dans les équation horaires, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta_0)}x^2 + \tan(\theta_0)x}$$

C'est l'équation d'une $\boxed{\text{parabole}}$.

6. La portée du tir est la valeur x_M non nulle de x telle que $z = 0$:

$$x_\mathrm{M} = \frac{v_0^2}{g} 2\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_\mathrm{M} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}}$$

La hauteur maximale est atteinte à l'instant t_1 tel que $\dot{z}(t_1) = 0$, d'où $t_1 = \dfrac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$. On obtient alors la hauteur maximale en explicitant la relation $z_\mathrm{M} = z(t_1)$, soit :

$$z_\mathrm{M} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}\right)^2 + v_0(\sin\theta_0)\frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z_\mathrm{M} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}}$$

7. La portée x_M du tir est maximale pour $2\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, soit $\boxed{\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}}$.

8. Application numérique : en utilisant la relation $\boxed{m = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho}$ et les données fournies, on complète le tableau suivant :

n° du plomb	1	5	10
rayon R (mm)	2,0	1,5	0,875
masse m (g)	0,38	**0,16**	0,032
portée x_M (km)	**15**	**15**	**15**
hauteur z_M (km)	**3,7**	**3,7**	**3,7**
vitesse v_∞ ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)	33	**29**	22

9. Les plombs n°5 ont un diamètre de 3 mm, donc d'après le document 1, la distance maximale possible avec l'angle de tir le plus favorable est de 300 m, alors qu'avec notre modèle on obtient pour$\theta_0 = \pi/4$ une portée maximale de 15 km, soit 50 fois plus... L'autre facteur qui montre qu'il faut abandonner ce modèle est la valeur de $v_\infty \simeq v_0/10$, en contradiction avec l'hypothèse de départ $v_0 \ll v_\infty$.

II.3 Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

10. L'énoncé affirme que $v_0 \gg v_\infty$ pour des plombs de chasse. En se référant aux calculs de la question **??**, on en déduit directement que le poids d'un plomb est négligeable devant la force de traînée.

11. La deuxième loi de Newton appliquée au plomb dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\rho_\mathrm{a} SC}{2m} v\vec{v} = \vec{0}$$

Or, sur cette phase rectiligne du mouvement, on a $v = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}$, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}x'}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} + \frac{\rho_\mathrm{a} SC}{2m}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}x'} = -\frac{\rho_\mathrm{a} SC}{2m}\vec{v}$$

En remarquant que $\dfrac{\rho_\mathrm{a} SC}{2m} = g\dfrac{\rho_\mathrm{a}\pi R^2 C}{2mg} = \dfrac{g}{v_\infty^2}$, on obtient la relation de l'énoncé :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}x'} = -\frac{\vec{v}}{D}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{D = \frac{v_\infty^2}{g}}$$

12. Par analyse dimensionnelle de l'équation précédente, on peut affirmer que $[D] = \mathrm{L}$ (dimension d'une longueur).

13. L'équation du mouvement réécrite sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}x'} + \dfrac{\vec{v}}{D} = \vec{0}$ correspond à une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant et sans second membre. Ses solutions s'écrivent :

$$\vec{v} = \vec{A}\exp\left(-\frac{x'}{D}\right)$$

La condition initiale $\overrightarrow{v}(x'=0) = \overrightarrow{v_0}$ conduit à $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{v_0}$ d'où finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} \exp\left(-\frac{x'}{D}\right)}$$

Le paramètre D correspond à la distance caractéristique du phénomène. Plus précisément, au bout d'une distance D, vitesse du projectile a été divisée par $e \simeq 2,7$.

14. La distance d est solution de : $10 \times v_\infty = v_0 \exp\left(-\frac{d}{D}\right)$, soit $\boxed{d = D \ln\left(\frac{v_0}{10 \times v_\infty}\right)}$

On a en outre : $\boxed{v_\mathrm{u} = v_0 \exp\left(-\frac{x_1}{D}\right)}$ et $\boxed{E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{u}^2}$ avec $\boxed{x_1 = 40 \text{ m}}$.

En utilisant ces formules ainsi que les données fournies dans l'énoncé, on complète le tableau ci-dessous :

n° du plomb	1	5	10
D (m)	112	**84**	49
v_0/v_∞	11,5	13	17
d (m)	15,4	**24**	27
v_u ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)	266	**236**	168
E_c (J)	13,4	**4,5**	0,45

15. On pourrait définir la protée utile d'un tir comme la distance que peut parcourir le plomb dans la direction x' sans que sa vitesse ait trop diminué. En supposant la portée utile atteinte par exemple pour $v \simeq 10 v_\infty$, on aurait dans ce cas une portée utile de l'ordre de d.

16. On peut supposer qu'il faut ici exploiter les énergies cinétiques à 40 m du tableau précédent et supposer qu'une même énergie cinétique totale est responsable de dommages identiques :

- $2 \times E_{\mathrm{c}1} = p \times E_{\mathrm{c}5}$ d'où $\boxed{p \simeq 6 \text{ plombs n°5}}$;
- $2 \times E_{\mathrm{c}1} = q \times E_{\mathrm{c}10}$ d'où $\boxed{p \simeq 60 \text{ plombs n°10}}$;

17. Les billes en fer doux possèdent une masse volumique plus faible : pour le même rayon R, m et v_∞ seraient plus petits, donc D, v_u et E_c également. L'augmentation de R permet de compenser cet effet et en particulier de conserver la même énergie cinétique.

Si les plombs s'agglutinent, la masse et le diamètre augmentent, donc la portée utile aussi. La distance de sécurité à respecter est donc supérieure à celle indiquée sur les mises en garde, ce qui peut créer des accidents.

Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

18. La troisième phase correspond à une chute libre avec frottements quadratiques.

19. En prenant en compte toutes les forces, l'équation du mouvement s'écrit ici :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\rho_\mathrm{a} S C}{2m} v \overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}$$

La vitesse limite est associée à la condition $\overrightarrow{v_\infty} = -v_\infty \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$ d'où $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}$. On en déduit :

$$\frac{\rho_\mathrm{a} S C}{2m} v_\infty \overrightarrow{v_\infty} = \overrightarrow{g} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\rho_\mathrm{a} S C}{2m} v_\infty^2 \overrightarrow{u_z} = -g \overrightarrow{u_z}$$

En projetant la relation précédente sur $\overrightarrow{u_z}$ et en utilisant $S = \pi R^2$, on aboutit à :

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_\mathrm{a} \pi R^2 C}}$$

et donc à la relation demandée :

$$\boxed{\overrightarrow{v_\infty} = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho_\mathrm{a} \pi R^2 C}} \overrightarrow{u_z}}$$

Le terme « mur » fait référence au fait que cette vitesse limite est finie et ne peut pas être dépassée. Le terme « aérodynamique » est associé à la présence des grandeurs R et C dans l'expression de la vitesse limite qui sont directement liés au caractère aérodynamique du projectile.

Deuxième phase : la phase intermédiaire

20. On suppose que la vitesse a suffisamment diminué pour qu'elle soit négligeable devant v_∞. La première modélisation s'applique également dans cette phase, d'où le terme « phase gravitaire ».

21. Pour $\theta_0 = 16\,°$, l'exploitation de la formule de l'énoncé fournit :

n° du plomb	1	5	10
portée x_M (m)	**268**	**212**	**137**

à comparer avec la formule « diamètre des plombs × 100 = zone dangereuse en m » :

n° du plomb	1	5	10
portée x_M (m)	**400**	**300**	**175**

Le document 1 donne des valeurs supérieures à celles du calcul théorique, en particulier pour les grands diamètres, mais c'est le bon ordre de grandeur. Cependant, le calcul théorique est basé sur une approximation et est calculé pour un angle $\theta_0 = 16\,°$ qui n'est pas forcément celui donnant la portée maximale. Quant à la formule du document, elle est qualifiée de « grossière » et pour des raisons de sécurité, il vaut mieux qu'elle donne une valeur supérieure à la valeur réelle.

22. En utilisant les rapports de v_0/v_∞ obtenus précédemment et en lisant les valeurs de θ_max sur le graphe, on obtient le tableau suivant :

n° du plomb	1	5	10
v_0/v_∞	11,5	13	17
$\log\left(\dfrac{v_0}{v_\infty}\right)^2$	2,1	2,2	2,5
θ_max (°)	**18**	**17**	**16**

23. En lisant sur le graphe les points d'intersection des courbes avec l'axe des abscisses, on obtient les portées suivants :

n° du plomb	1	5	10
portée x_M (m)	**345**	**265**	**170**

Ces valeurs sont plus proches de celles du document 1 qu'à la question 21, tout en étant toujours légèrement inférieures (pour des questions de sécurité).