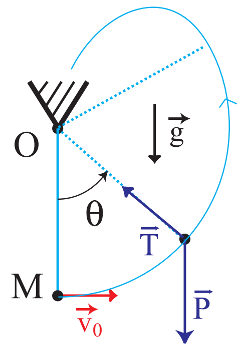
Correction partielle - TD n°6 - Dynamique en référentiel galiléen

5 Pendule simple



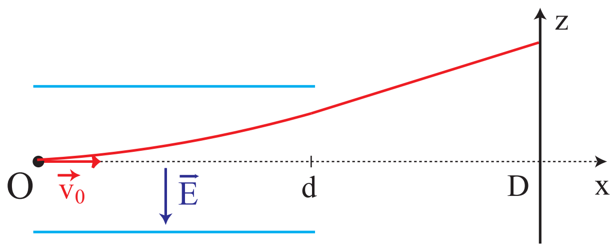
1. $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$, $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, et $\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$
2. a) $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

   b) $m\ell\ddot{\theta} = -mgsin\theta$, donc $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}sin\theta = 0}$.
3. a) L'équation $\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g\dot{\theta}}{\ell}sin\theta = 0$ s'intègre en $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{\ell}cos\theta = cste$, or $v = l\dot{\theta}$, et en $\theta = 0$, $v = v_0$, donc $\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell(cos\theta - 1)}}$. On vérifie bien que $v < v_0$.

   b) θ_M est telle que $v = 0$ (ou $\dot{\theta} = 0$). On obtient donc $cos\theta_M = -\frac{1}{2}$, et donc $\boxed{\theta_M = \frac{2\pi}{3}}$.
4. $-m\ell\dot{\theta}^2 = mgcos\theta - T$, et donc $\boxed{T = mg\,(3cos\theta + 1)}$.
5. Les équations précédentes restent valables tant que le fil reste tendu, c'est à dire tant que $T > 0$, soit tant que $cos\theta > -\frac{1}{3}$. On trouve donc $\boxed{\theta_{lim} \simeq 110°}$. Cette valeur est inférieure à $\theta_M = 120°$. Le fil se détendra donc avant que la masse M n'arrive en haut de son mouvement. Le mouvement est donc circulaire entre $\theta = 0$ et $\theta = \theta_{lim}$, puis le fil se détend, et la masse n'est plus soumise qu'à son poids : c'est une chute libre. La trajectoire est esquissée sur la figure ci-dessus.

7 Oscilloscope

1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron entre les plaques ($0 < x < d$) dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel terrestre donne $m\vec{a} = \vec{F}_e$. En projection sur les axes x et z, on obtient : $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = eE \end{cases}$ et par intégration : $\begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{z} = \frac{eEt}{m} \end{cases}$ et finalement : $\begin{cases} x = v_0 t \\ z = \frac{eEt^2}{2m} \end{cases}$. On en tire $t = \frac{x}{v_0}$, et donc l'équation de la trajectoire est celle d'une parabole : $\boxed{z = \frac{eEx^2}{2mv_0^2}}$ pour $0 < x < d$.



2. En $x = d$, $z = \frac{eEd^2}{2mv_0^2}$, et $\vec{v} = v_0\vec{u}_x + \frac{eEd}{mv_0}\vec{u}_z$.
3. Pour $x > d$, l'électron est en *chute libre* car il n'est plus soumis à aucune force à la sortie des plaques. Il a donc un mouvement rectiligne uniforme. Sa position est donnée par : $\begin{cases} x = d + v_0\left(t - \frac{d}{v_0}\right) \\ z = \frac{eEd^2}{2mv_0^2} + \frac{eEd\left(t - \frac{d}{v_0}\right)}{mv_0} \end{cases}$ Il touche l'écran en $x = D$ pour $t = \frac{d}{v_0} + \frac{D-d}{v_0}$ en $\boxed{z = \frac{eE}{mv_0^2}\left(dD - \frac{d^2}{2}\right)}$. Cette position sur l'écran peut être modifiée en changeant la tension U, et donc en changeant le champ $\vec{E}$. On illustre bien ici le principe de l'oscilloscope.

8 Masse tirée par un ressort

1. Le PFD appliqué à la masse m dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen s'écrit : $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$.
   Tant que la masse n'a pas bougé, ceci sécrit en projection sur les axes horizontaux et verticaux : $\begin{cases} 0 = k(x_A - \ell_0) - R_T \\ 0 = R_N - mg \end{cases}$, or $x_A = v_0 t + \ell_0$, et la masse se met en mouvement dès qu'il y a glissement, c'est à dire lorsque $R_T = fR_N$, donc t_0 est tel que $0 = k(v_0 t_0 + \ell_0 - \ell_0) - fmg$, et donc $\boxed{t_0 = \frac{fmg}{kv_0}}$.
2. Lorsque la masse est en mouvement, son abscisse vérifie maintenant l'équation différentielle suivante pour $t > t_0$, donc avec la variable $t' = t - t_0 > 0$: $\boxed{m\ddot{x}_B = k(x_A - x_B - \ell_0) - \mu mg}$.
   x_B et x_A dépendent du temps, donc on ne peut pas simplement intégrer cette équation différentielle. On pose donc $X = x_A - x_B - \ell_0$, qui vérifie : $\ddot{X} + \frac{k}{m}X = \mu g$, qui s'intègre en une solution harmonique : $X = \frac{\mu mg}{k} + Acos\omega_0 t' + Bsin\omega_0 t'$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On en déduit en utilisant les conditions initiales que : $x_\mathrm{B}(t') = v_0 t' + \left(v_0 t_0 - \frac{\mu mg}{k}\right)\left[1 - cos\omega_0 t'\right] - \frac{v_0}{\omega_0} sin\omega_0 t'$,
   soit $\boxed{x_\mathrm{B}(t') = v_0 t' + \frac{mg}{k}\left(f - \mu\right)\left[1 - cos\omega_0 t'\right] - \frac{v_0}{\omega_0} sin\omega_0 t'}$. .
   Afin de savoir si le mouvement ultérieur est bien décrit par cette équation, on doit s'assurer que la masse m ne s'arrête pas, auquel cas l'équation précédente n'est plus valable car R_T peut très bien être inférieure à R_N. Pour cela, on calcule la vitesse du point B en dérivant l'expression précédente : $\dot{x}_\mathrm{B} = \frac{mg\omega_0}{k}\left(f - \mu\right) sin\omega_0 t' - v_0\left[\cos\omega_0 t' - 1\right]$. Celle-ci s'annule pour t_1 tel que $\omega_0 t_1 = 2\pi$. On est ramené exactement au même problème que précédemment avec $t'' = t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}$ comme temps initial, et $x_B = v_0 t''$ et $x_A = v_0 t'' + \ell_0$ (le ressort est aussi au repos). La masse va donc s'arrêter pendant un temps t_0 avant de se remettre en mouvement pendant un temps t_1, puis se réarrêter, et ainsi de suite...

9 Enroulement d'un fil autour d'un cylindre

1. $\ell_0 = \ell + R\theta$.
2. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = R\vec{u}_r + \ell\vec{u}_\theta = R\vec{u}_r + (\ell_0 - R\theta)\vec{u}_\theta$.
3. $\vec{v} = -(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{u}_r + (R\dot{\theta} - R\dot{\theta})\vec{u}_\theta = -(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{u}_r$. La vitesse est donc portée uniquement par $-\vec{u}_r$ car $(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta} > 0$.

4. $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{R}$, où le poids et la réaction du support se compensent, donc on peut réécrire cette relation : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{T}$.
5. En multipliant la relation précédente scalairement par $\vec{v}$, on obtient : $m\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}.\vec{T} = 0$ car la tension du fil $\vec{T}$ est orientée suivant $\vec{u}_\theta$ à tout instant, et est donc perpendiculaire à $\vec{v}$. On peut réécrire la relation précédente comme : $\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} = 0$, et donc $v^2 = cste$, soit $||\vec{v}|| = cste$ et le mouvement est donc uniforme.
6. On en déduit directement que $v_0 = (\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}$ en identifiant les expressions de la norme de la vitesse à $t = 0$ et à t quelconque. On remarque que lorsque $(\ell_0 - R\theta) = 0$, c'est à dire lorsque le fil est complètement enroulé autour du cylindre, $\dot{\theta}$ tend nécessairement vers l'infini pour que le produit reste constant.
7. En utilisant $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, on peut séparer les variables, et on obtient $d\theta(\ell_0 - R\theta) = v_0 dt$. On intègre cette relation entre les instants $t = 0$ et t quelconque : $\int_0^\theta (\ell_0 - R\theta')d\theta' = \int_0^t v_0 dt'$, et donc $\ell_0\theta - \frac{R\theta^2}{2} = v_0 t$.
8. a) Lorsque le fil est complètement enroulé autour du cylindre, $\theta = \frac{\ell_0}{R}$.

   b) En remplaçant dans la relation précédente, on peut obtenir $t_f = \frac{\ell_0^2}{2v_0 R}$. En utilisant le fait que la norme de la vitesse est constante, on montre comme vu précédemment que $\dot{\theta}$ tend vers l'infini en $t = t_f$.
9. a) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, sachant que $\vec{v} = -v_0\vec{u}_r$, on obtient : $\vec{T} = -mv_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

   b) Comme on a montré que $\dot{\theta}$ divergeait, la tension tend elle aussi vers l'infini quand on se rapproche de l'enroulement total. Le fil va donc nécessairement se casser dans ce modèle.

   c) On peut obtenir $\dot{\theta}$ au moment de la rupture en utilisant $\dot{\theta} = \frac{T}{mv_0} = 0.8 rad.s^{-1}$. Et on peut obtenir ensuite θ par la relation $(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta} = v_0$, et on trouve $\theta_{rup} = 2.42s$.

   d) Lorsque le fil se rompt, la longeur du fil vaut $\ell = \ell_0 - R\theta_{rup} = 0.016 < R$, donc la particule va heurter le cylindre.