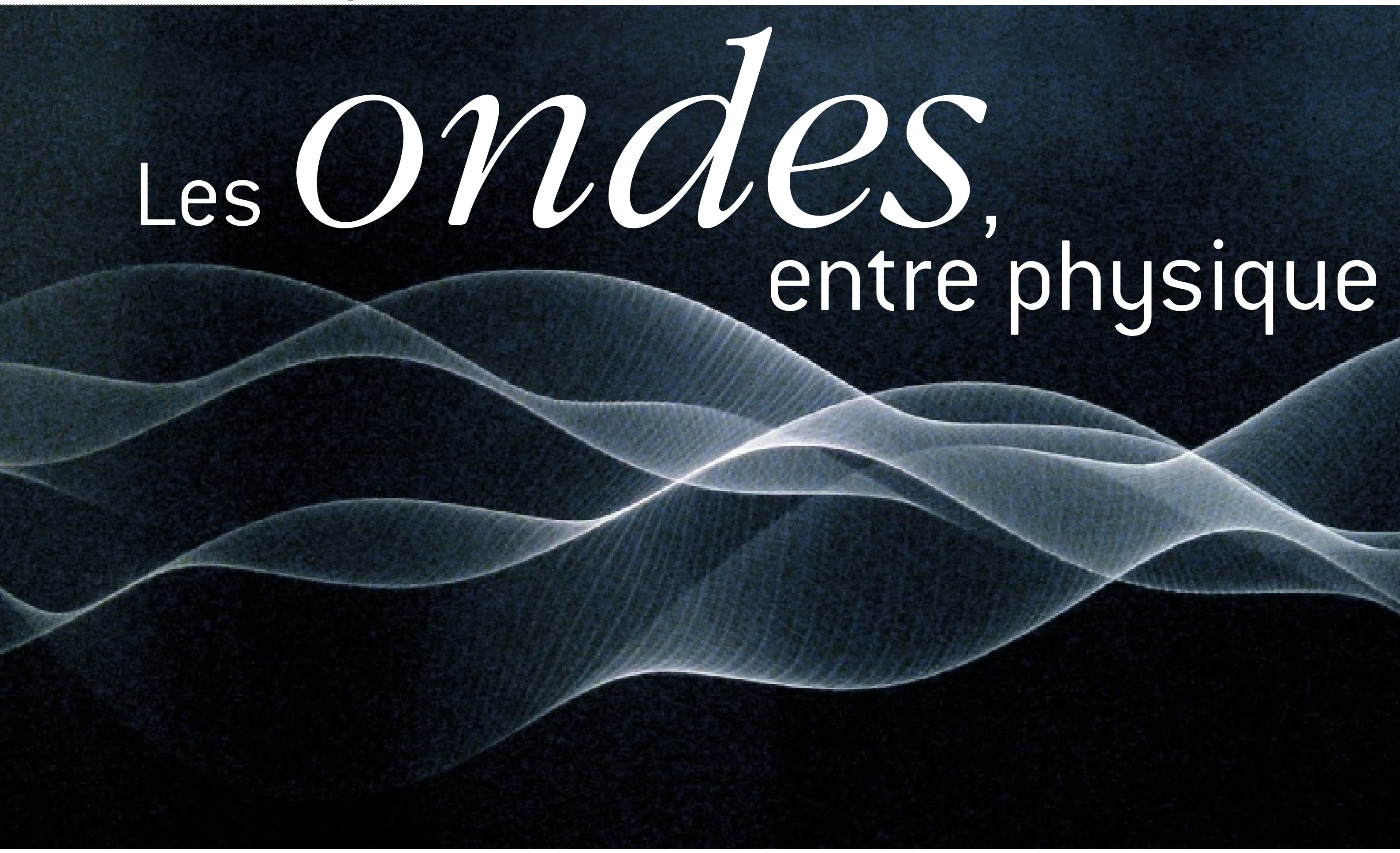
Les *ondes*, entre physique



Claude Bardos

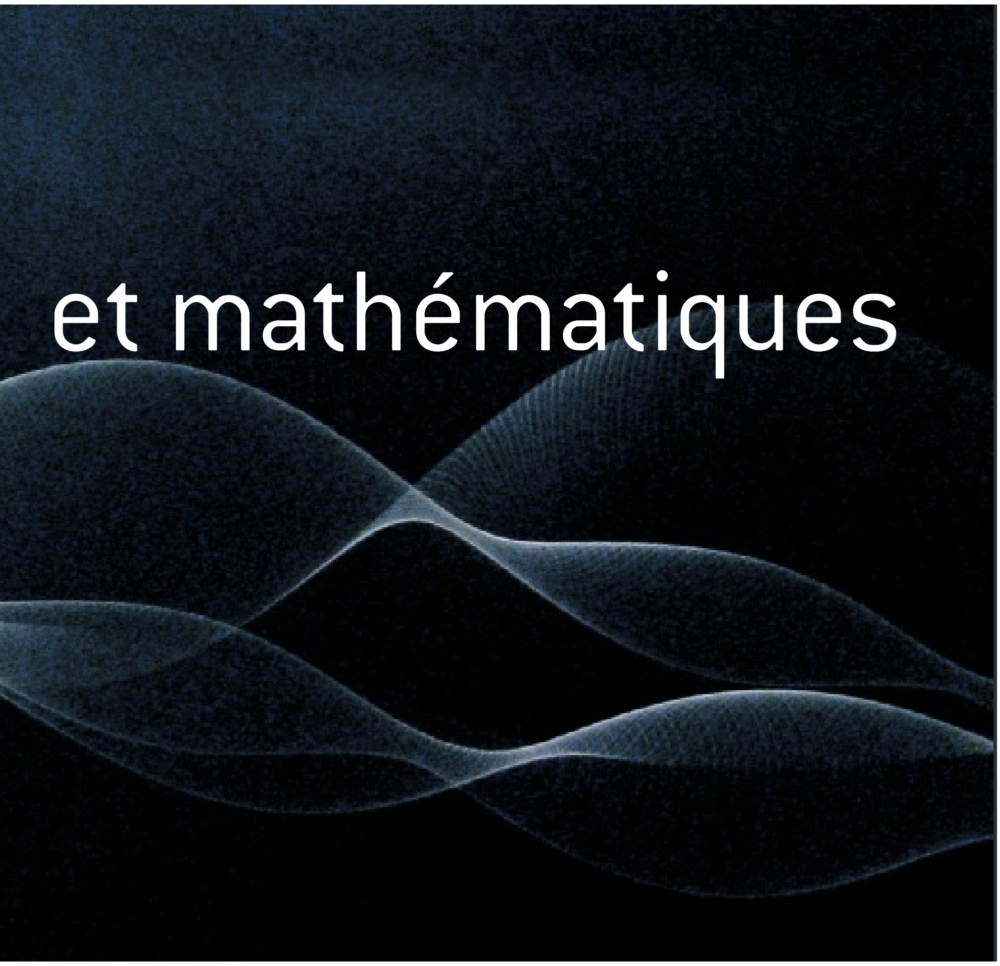
Malgré leur diversité, les ondes constituent un phénomène physique universel. Leur description et leur compréhension sont liées aux grandes avancées de la physique et des mathématiques.

Les ondes sont présentes partout autour de nous et ont été observées bien avant l'avènement de la science moderne. Sous leur forme probablement la plus évidente, ce sont les rides circulaires créées à la surface d'un étang par la chute d'un petit cailloux, les vagues de l'océan créées par le vent, les marées dues à l'attraction du Soleil et de la Lune, les mascarets qui remontent les fleuves, etc. De fait, le mot onde provient du latin *unda*, qui signifie eau courante, ce qui souligne la proximité de la notion d'onde avec les phénomènes constatés sur des étendues d'eau. La langue anglaise n'a d'ailleurs qu'un seul et même mot *(wave)* pour désigner une onde et une vague.

D'autres types d'ondes sont faciles à remarquer, comme celles qui parcourent une corde que l'on agite à l'une de ses extrémités *(voir la figure 1)*. Mais les ondes prennent souvent des formes moins visibles : les sons, la lumière, les tremblements de terre sont aussi des phénomènes ondulatoires. Les sons mettent en jeu des ondes de pression se propageant dans l'air, la lumière des ondes de vibration du champ électromagnétique se propageant dans le vide, les tremblements de terre des ondes mécaniques se propageant dans le sol. À un niveau plus fondamental encore, la physique quantique associe à la matière et à ses interactions des ondes de nature abstraite, mais indispensables à la description et à la compréhension des phénomènes. Enfin, les ondes, qu'elles soient électromagnétiques ou autres, tiennent une place capitale dans les technologies modernes, comme en témoignent la télévision, les radars, la téléphonie mobile, la radiographie médicale ou industrielle, les fours à micro-ondes, l'échographie, etc.

L'histoire de l'étude des ondes se confond assez largement avec celle de la physique et des mathématiques. Si Pythagore et son école, vers le V^{e} siècle avant notre ère, ont mis en évidence des rapports numériques portant sur les cordes vibrantes et les sons musicaux, une véritable science des ondes n'est apparue qu'avec la naissance de la science moderne, à l'époque de Galilée et de Newton, aux XVI^{e} et

et mathématiques



Daniel Palacios Jimenez

XVII^{e} siècles. Le premier domaine concerné fut l'acoustique, avec Galilée et le père Marin Mersenne. En particulier, Galilée a relié le « nombre de vibrations » d'une corde à sa longueur, à sa masse et à sa tension, ainsi qu'au son plus ou moins aigu qu'elle produit. Quant à Mersenne, pionnier de l'acoustique, il fut le premier à évaluer la vitesse du son, dont il avait une conception ondulatoire.

La nature de la lumière a donné davantage de soucis aux physiciens. Malgré certaines de ses expériences qui s'interprètent plus facilement en termes d'ondes, Newton considérait la lumière comme un ensemble de corpuscules. D'autres savants, comme le jésuite Francisco Maria Grimaldi (1618-1663), défendaient une conception ondulatoire. Le débat s'est prolongé jusqu'au début du XVIII^{e} siècle, lorsque la balance a penché du côté de l'onde grâce notamment à la théorie proposée en 1815 par le physicien français Augustin Fresnel. Et en 1864, l'Écossais James Clerk Maxwell unifia en un seul ensemble d'équations (qui portent son nom) l'électricité, le magnétisme, l'induction électromagnétique et la théorie ondulatoire de la lumière – ce fut une étape cruciale du développement de la physique théorique.

Dans les équations de Maxwell, la vitesse de la lumière apparaît comme une constante absolue, indépendante de l'observateur et de ce fait contradictoire avec le principe de relativité de la physique galiléenne et newtonienne. C'est ce qui a conduit Einstein à sa théorie de la relativité restreinte, publiée en 1905. Par un curieux retour des choses, Einstein est aussi celui qui a montré clairement que l'énergie lumineuse est transportée par quantités bien définies, des « quanta » qu'on appela plus tard photons, ce qui représentait un retour – partiel – de la conception corpusculaire de la lumière. Et Einstein a participé à l'émergence de la physique quantique, où la notion d'onde intervient au niveau le plus fondamental.

Oscillation et propagation

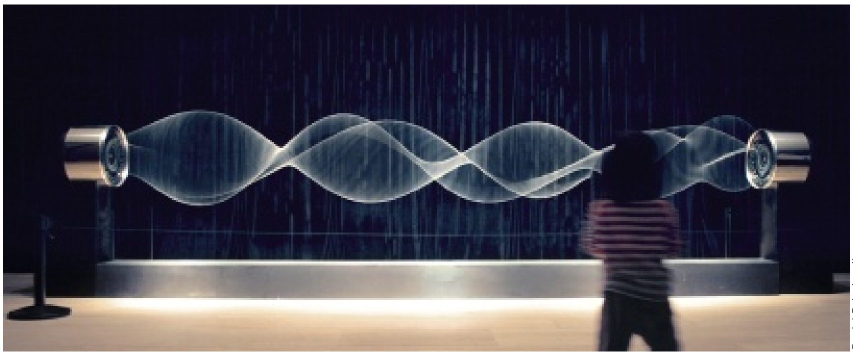
Ce rapide survol de plus de trois siècles ne rend pas justice aux efforts des physiciens, aux débats qui les ont agités, aux découvertes intrigantes ou surprenantes qu'ils ont faites. Toujours est-il que les ondes ont occupé dans cette histoire une place de choix. Elles ont aussi grandement stimulé les mathématiciens. L'étude des ondes a en effet nécessité l'élaboration d'outils de plus en plus puissants et complexes, ce qui a contribué au développement des mathématiques depuis Newton et Leibniz jusqu'à nos jours. Je vais présenter ici certains de ces développements en relation avec les ondes, car ils aident à comprendre ce qu'est une onde et ce que ce concept a de si universel.

Qu'est-ce qu'une onde ? Il est difficile de donner une réponse univoque à cette question. On peut dire que le terme onde désigne la propagation, de proche en proche, d'une variation à laquelle est soumise une certaine grandeur physique. Par exemple, une onde à la surface de l'eau correspond à la propagation d'un changement de la hauteur de l'eau par rapport à sa hauteur d'équilibre. La variation qui se propage prend souvent la forme d'une oscillation, d'une vibration. De fait, l'oscillation et la propagation sont deux aspects complémentaires et pratiquement indissociables de la notion d'onde.

Pour comprendre ce qu'est une onde et comment on la décrit mathématiquement,

L'ESSENTIEL

- ✔ **On rencontre les ondes partout dans la nature. Il s'agit généralement d'oscillations qui se propagent.**
- ✔ **Pour une onde évoluant dans un domaine clos, l'oscillation constitue l'aspect dominant. En régime linéaire, on peut la décrire à l'aide d'oscillations fondamentales nommées modes propres.**
- ✔ **Le comportement des ondes se complique beaucoup en présence d'effets non linéaires et du phénomène de « dispersion ».**



Daniel Palacios Jimenez

1. DANS CETTE INSTALLATION de l'artiste espagnol Daniel Palacios Jimenez (Berlin, 2006), une corde élastique est agitée à ses extrémités. Les ondes ainsi créées se propagent dans les deux sens et forment des ondes à peu près stationnaires, que perturbent les mouvements des spectateurs, captés par des caméras et transmis au mécanisme. Les variations des oscillations de la corde se traduisent aussi par des variations du son qu'elle produit. *(Voir aussi la photographie page 22.)*

commençons par la description d'une oscillation simple : l'oscillation de l'extrémité d'un ressort de part et d'autre de sa position d'équilibre *(voir la figure 2)*. On suppose pour simplifier que le ressort, de masse négligeable, est posé sur un plan horizontal sans frottement, avec une masse m attachée à son extrémité. Désignons par $x(t)$ la position, qui dépend du temps t, de cette masse par rapport à la position d'équilibre. Si cet écart $x(t)$ est petit, alors la force de rappel du ressort vers la position d'équilibre est, en première approximation, proportionnelle à l'écart. Autrement dit, sa valeur algébrique est $-k\,x(t)$, où k est une constante positive appelée la raideur du ressort.

D'après la deuxième loi de Newton, la force appliquée à un mobile est égale au produit de sa masse par son accélération. Dans notre cas, cela s'écrit : $-k\,x(t) = m\,x''(t)$, où $x''(t)$ est la dérivée seconde de $x(t)$. En posant $\omega^2 = k/m$, on obtient que le mouvement de l'extrémité du ressort obéit à l'équation différentielle $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$.

On montre que cette équation élémentaire a pour solution générale :

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t),$$

où a et b sont des constantes déterminées de façon unique par les conditions initiales, c'est-à-dire par la donnée de la position et de la vitesse du mobile à l'instant initial $t = 0$ (ou à tout autre instant fixé). Cette solution est périodique, la période T étant égale à $2\pi/\omega$; la fréquence ν de l'oscillation est l'inverse de la période ($\nu = 1/T$), tandis que ω est la « pulsation » de l'oscillation, qui est proportionnelle à sa fréquence ($\omega = 2\pi\nu$). Elle est même sinusoïdale, puisque $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ s'écrit aussi sous la forme $A\cos(\omega t + \phi)$, où les constantes A et ϕ se calculent à partir de a et b.

On voit ainsi apparaître, dans ce modèle simple de l'oscillation du ressort, les fonctions périodiques élémentaires sinus et cosinus qui jouent un rôle fondamental dans la description des phénomènes ondulatoires. Une autre remarque importante est que le modèle mathématique du ressort s'applique à d'innombrables autres systèmes et est de ce fait très général ; on le nomme « oscillateur harmonique ».

Équations linéaires pour petites vibrations

En effet, toute oscillation de part et d'autre d'une valeur d'équilibre se décrit par une équation différentielle semblable à celle du ressort, à condition que les amplitudes de l'oscillation ne soient pas trop grandes. Pourquoi ? Parce que l'expression d'une force $F(x)$ de rappel vers la valeur d'équilibre en fonction de l'écart x à la valeur d'équilibre peut toujours s'écrire (si la force est mathématiquement assez régulière) comme un développement en série $F(x) = k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \ldots$, où k_1, k_2, k_3, etc., sont des constantes. Le terme k_1x est le terme linéaire, les suivants sont les termes non linéaires. Or si l'amplitude de l'oscillation x est petite, ce qui est souvent le cas en pratique, x^2 est négligeable par rapport à x, x^3 est négligeable par rapport à x^2, etc. Autrement dit, au premier ordre d'approximation, seul subsiste le terme linéaire et l'équation différentielle de l'oscillateur se réduit à celle de l'oscillateur harmonique, dont le comportement est décrit par des fonctions sinusoïdales.

Dans le modèle d'oscillateur harmonique que nous venons de considérer, aucune force extérieure n'est imposée au système. Lorsqu'une telle force est présente, l'évolution dans le temps de l'oscillateur peut être très différente. Cette évolution doit désormais obéir à l'équation :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t),$$

où $f(t)$ représente les forces extérieures appliquées au système. On démontre que la solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) + I_\omega(t),$$

où la fonction $I_\omega(t)$ est donnée par une certaine intégrale où intervient la force extérieure f et qui dépend du paramètre ω. Selon l'expression de f, on peut ou non trouver une formule explicite pour $I_\omega(t)$.

Le cas où la force extérieure est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω', est particulièrement important, car il peut alors se produire un phénomène de résonance, un effet fréquemment rencontré avec les ondes. Si la pulsation ω' du forçage extérieur est différente de la pulsation propre ω de l'oscillateur, on trouve que l'oscillation $x(t)$ est une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations ω, ω', $\omega + \omega'$ et $\omega - \omega'$; son amplitude reste bornée à tout instant. Mais si $\omega' = \omega$, l'expression de $x(t)$ fait apparaître, en plus de termes périodiques de pulsations ω, ω' et $\omega + \omega'$, un terme apériodique proportionnel à $t\cos(\omega t)$, c'est-à-dire qui oscille avec une amplitude proportionnelle au temps écoulé. C'est le phénomène de résonance : lorsque la fréquence de la force extérieure est égale à la fréquence propre du système, l'amplitude de l'oscillation augmente sans limite avec le temps, jusqu'à ce que l'on sorte du régime linéaire ou que le système subisse une modification brutale. C'est par un tel phénomène de résonance qu'un pont qui vibre peut s'écrouler si une troupe le franchit en marchant au pas.

La discussion qui précède sur l'oscillateur harmonique relève de la mécanique newtonienne appliquée à un point matériel mobile (la masse m dans le cas du ressort). N'y interviennent que des fonctions d'une seule variable, le temps t. Pour décrire l'évolution de milieux continus tels qu'un solide ou un liquide, il faut introduire des fonctions qui dépendent non seulement du temps, mais aussi de la position dans l'espace, c'est-à-dire des coordonnées x, y et z. Le problème se complique alors considérablement.

En particulier, les variations dans l'espace doivent être décrites par des dérivées par rapport aux coordonnées spatiales, et les équations différentielles ordinaires que l'on a en mécanique du point sont remplacées par des «équations aux dérivées partielles» en mécanique des milieux continus. Le premier exemple d'une telle équation est, semble-t-il, dû au mathématicien français Jean le Rond d'Alembert et concerne la vibration d'une corde; il date de 1747 – pas si longtemps après l'invention du calcul infinitésimal pour les fonctions d'une seule variable, par Newton et Leibniz autour de 1670. Le mathématicien suisse Leonhard Euler suivra en 1755 en obtenant l'équation qui régit l'écoulement des fluides incompressibles et non visqueux. On est ainsi passé de la mécanique du point matériel à l'élasticité, puis à la mécanique des fluides.

Ondes stationnaires dans un espace fermé

L'équation qui régit les vibrations d'une corde de longueur finie L se déduit, comme pour le ressort, en appliquant la deuxième loi de Newton. Mais au lieu de l'appliquer à un point matériel, on l'applique à chacune des parties infinitésimales de la corde. On suppose celle-ci homogène, infiniment étroite, alignée au repos selon l'axe Ox et fixée à ses deux extrémités, de coordonnées $x=0$ et $x=L$. On suppose aussi qu'elle est soumise à une force de tension T constante et que chacun de ses points, repérés par leur coordonnée x, peut s'écarter transversalement de la position d'équilibre $u=0$ d'une petite quantité $u(x,t)$ *(voir la figure 3)*.

Un raisonnement géométrique assez simple sur un élément infinitésimal dx de corde, de masse ρdx, où ρ est la masse de corde par unité de longueur, montre alors que, en posant $c^2=T/\rho$, la deuxième loi de Newton se traduit en l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial^2u/\partial t^2 - c^2\,\partial^2u/\partial x^2 = 0.$$

La notation $\partial u/\partial x$ désigne la dérivée de $u(x,t)$ par rapport à x en considérant t constant, $\partial u/\partial t$ la dérivée de $u(x,t)$ par rapport à t en considérant x constant, $\partial^2u/\partial t^2$ la dérivée seconde de u par rapport à t, etc. Ces dérivées portant sur des fonctions de plusieurs variables sont nommées «dérivées partielles».

L'équation obtenue par d'Alembert constitue le prototype de l'équation des ondes à une dimension, où c représente la vitesse de propagation de l'onde. Pour exprimer le fait que la corde est fixée à ses deux bouts, on complète l'équation par les conditions aux limites:

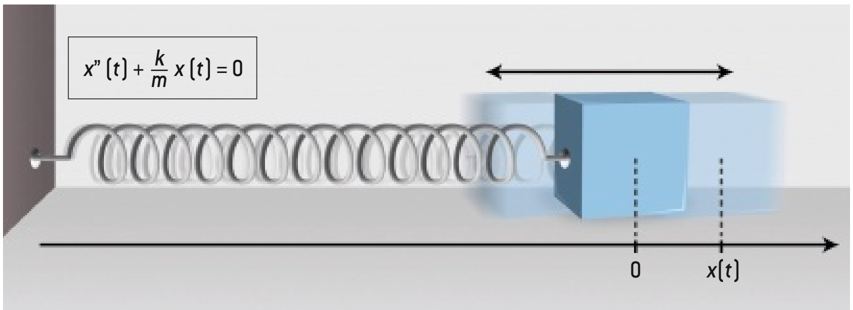
$$u(x=0,\,t) = u(x=L,\,t) = 0.$$

En cherchant pour l'équation de d'Alembert des solutions $u(x,t)$ sous la forme d'un produit $a(x)\,b(t)$ à variables séparées, on obtient les deux équations différentielles:
$a''(x)+(\omega^2/c^2)a(x)=0$ et $b''(t)+\omega^2\,b(t)=0$, où ω^2 est, pour le moment, un paramètre positif quelconque. Ces deux équations sont exactement de la même forme que celle de l'oscillateur harmonique. On en déduit, compte tenu des conditions aux limites, que l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante a des solutions particulières de la forme:

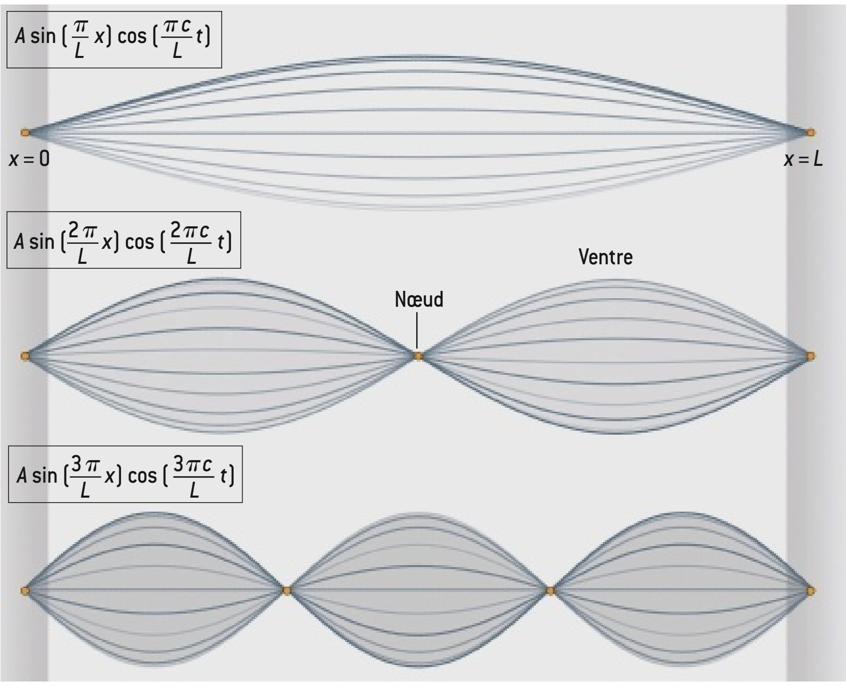
$$u_n(x,t) = A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \phi_n),$$

où n est un entier positif quelconque, $k_n = n\pi/L$ et $\omega_n = n\pi c/L = k_n c$, les constantes A_n et ϕ_n restant à déterminer en fonction des conditions initiales par exemple.

Que signifie physiquement une telle solution? En chaque point, la corde oscille dans le temps à une pulsation ω_n, tandis que l'amplitude de l'oscillation est modulée le long de la corde par la fonction périodique $\sin(k_n x)$. Les points x pour lesquels on a $\sin(k_n x) = 0$ ne vibrent pas du tout, ce sont les «nœuds» de vibration; ceux pour lesquels $\sin(k_n x) = \pm 1$ vibrent avec l'amplitude maximale, ce sont les «ventres» de vibration. L'oscillation décrite par une fonction $u_n(x,t)$ est ce qu'on appelle une onde stationnaire, car les positions des nœuds et ventres de vibration restent fixes au cours du temps.

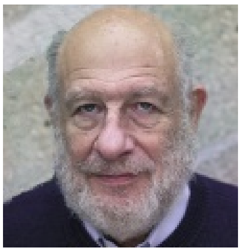


2. LE MOUVEMENT D'UNE MASSE LIÉE À UN RESSORT est décrit, pour un écart $x(t)$ petit par rapport à la position d'équilibre, par une équation différentielle linéaire simple *(cartouche)*, dont la solution est une fonction sinusoïdale du temps t. Une telle oscillation a un caractère très général.



3. TROIS ONDES STATIONNAIRES animant une corde fixée à ses deux extrémités (avec une amplitude très exagérée, et pour 11 instants successifs). Elles correspondent ici aux trois premiers modes propres d'oscillation de la corde, la fréquence de la deuxième onde étant le double de celle de la première, et la fréquence de la troisième le triple. Toute oscillation de la corde peut s'écrire comme une somme d'un nombre fini ou infini de ses modes propres.

L'AUTEUR



Claude BARDOS, mathématicien, est professeur émérite à l'Université Paris 7 (Denis Diderot). Il est membre du Laboratoire Jacques-Louis Lions à l'Université Pierre et Marie Curie, à Paris.

On appelle la solution $u_1(x,t)$, de la forme $\sin(k_1 x)\cos(\omega_1 t + \phi_1)$ avec $k_1 = \pi/L$ et $\omega_1 = \pi c/L$, le « mode fondamental » de vibration de la corde. Les autres solutions u_n correspondent à des fréquences de vibration égales à un multiple entier de la fréquence fondamentale et sont qualifiées d'harmoniques. Les ondes stationnaires $u_n(x,t)$ sont aussi nommées modes propres de vibration, car elles caractérisent les vibrations possibles d'une corde qui n'est pas soumise à des forces extérieures.

Comme l'équation des ondes de d'Alembert est linéaire, toute somme finie d'harmoniques $u_n(x,t)$ est encore une solution possible. En fait, l'analyse mathématique moderne, introduite par le mathématicien allemand David Hilbert il y a un siècle, a établi un résultat bien plus fort : toute solution de l'équation peut s'exprimer comme une somme de la forme :

$$A_1(t)\sin(k_1 x) + A_2(t)\sin(k_2 x) + \ldots$$

où $A_n(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation $\omega_n = k_n c$.

Des modes propres

On montre que les fonctions $\sin(k_n x)$ forment en effet une « base » de l'espace fonctionnel adéquat pour décrire les oscillations de la corde de longueur L, c'est-à-dire un espace de fonctions où l'on peut définir des notions de distance, de produit scalaire, de convergence, etc. Dans ce cadre formel, les fonctions $\sin(k_n x)$ doivent leur importance au fait que ce sont des « fonc-

La place privilégiée des ondes sinusoïdales

Pourquoi les sinusoïdes sont-elles si importantes dans la science des ondes ? De nombreux manuels de physique présentent systématiquement les solutions de l'équation des ondes sous forme sinusoïdale. Mais dans la réalité, l'évolution temporelle des ondes n'est jamais vraiment sinusoïdale, car une sinusoïde est une fonction idéale, partant d'un temps infini dans le passé et allant jusqu'à un temps infini dans le futur. Il faudrait ainsi que la source ayant donné naissance à l'onde soit active depuis un temps infini !

En pratique, il existe aussi bien des ondes pulsées très brèves, de spectre très large, que des ondes de forme temporelle très complexe. Il est vrai qu'en optique, les lasers peuvent émettre une onde lumineuse presque monochromatique, donc sinusoïdale. De même, les modes de vibration d'une corde dont les deux extrémités sont fixes correspondent à une oscillation collective de la corde qui est modulée par une sinusoïde. Mais ces deux exemples ne sont que des cas particuliers.

Pour comprendre le caractère universel et l'intérêt pratique de la modulation sinusoïdale en physique des ondes, il faut regarder de plus près l'équation des ondes en régime linéaire. Dans sa variante acoustique, le champ ondulatoire vérifie une équation d'onde du type $\partial^2 u/\partial t^2 - c^2 \Delta u = S$, où $S(\mathbf{r}, t)$ est une fonction source qui décrit l'ensemble des sources de l'onde (par exemple les haut-parleurs).

La relation qui existe entre le terme source $S(\mathbf{r}, t)$ (la cause) et l'onde $u(\mathbf{r}, t)$ (l'effet) a deux propriétés importantes. D'une part, elle est linéaire. D'autre part, si la vitesse c de l'onde ne varie pas au cours du temps, elle est « invariante par translation du temps » : l'onde créée par un haut-parleur excité dans une heure sera la même, à une heure près, que celle créée par ce même haut- parleur maintenant. La source peut avoir toutes les formes possibles de modulation temporelle. Si par exemple c'est la membrane d'un haut-parleur qui bouge de façon uniforme, le terme source peut s'écrire $S(\mathbf{r}, t) = O(\mathbf{r})s(t)$, où $s(t)$ est la modulation temporelle de la source.

L'intérêt mathématique de la modulation sinusoïdale est le suivant : c'est la seule modulation temporelle qui se conserve dans tout le champ ondulatoire. Autrement dit, si la source vibre de façon sinusoïdale, le champ acoustique $u(\mathbf{r}, t)$ mesuré en tous les points de l'espace aura la même modulation sinusoïdale (en revanche, l'amplitude et la phase dépendront du point d'observation). Le champ $u(\mathbf{r}, t)$ oscillera partout avec la même pulsation ω que celle de la source. On dira que la solution sinusoïdale est un invariant de l'opérateur de l'équation des ondes (on dit aussi un « vecteur propre »). La cause (la source) et l'effet (l'onde dans tout l'espace) auront exactement la même modulation temporelle.

Si, en revanche, tous les points du haut-parleur se déplaçaient pendant un temps bref avec une modulation temporelle quelconque (un créneau par exemple), la modulation temporelle de l'onde ne serait plus la même que celle de la source et différerait en chaque point de l'espace. Les signaux émis par chacun des points de la source mettent en effet un certain temps pour arriver en un point d'observation, et en ce point l'onde résultera de la somme de toutes les ondelettes émises par la source. Or la somme de nombreux petits créneaux décalés les uns par rapport aux autres ne ressemblera pas au créneau initial. Ce sera une fonction du temps compliquée, qui dépendra du point d'observation.

Parmi toutes les fonctions du temps, il n'en existe qu'une – la sinusoïde – qui se conservera : la somme d'une infinité de sinusoïdes de même pulsation ω et d'amplitude et de phase quelconques sera toujours une sinusoïde de pulsation ω. C'est là tout l'intérêt d'une source sinusoïdale. Un autre exemple de l'intérêt de la sinusoïde est l'émission d'un signal dans un milieu où la célérité de l'onde est très hétérogène (la vitesse $c(\mathbf{r})$ de l'onde dépend de la position $\mathbf{r}$). Par exemple, si une source émet un signal dans un milieu diffusant composé de nombreux obstacles, l'onde perçue en un point de l'espace sera la superposition de nombreux signaux élémentaires ayant suivi des trajets multiples. Si la source émet un signal bref, l'onde perçue pourra durer très longtemps avec des modulations très compliquées, qui ne ressembleront plus du tout à celle de la source. Mais si la source est modulée par une sinusoïde de pulsation ω, quelle que soit la complexité du milieu diffusant, la modulation de l'onde en tout point de l'espace sera toujours celle d'une sinusoïde de pulsation ω.

La sinusoïde est donc une fonction très pratique lorsqu'on s'intéresse à la physique des ondes. Mais limiter tous les raisonnements ondulatoires à ce type de signaux est très réducteur. Il existe une physique des ondes bien plus riche en milieu hétérogène avec des sources de modulation temporelle plus sophistiquée *(voir l'article* La complexité : un atout pour le retournement temporel des ondes *dans ce numéro)*.

Mathias Fink,
Institut Langevin, ESPCI ParisTech

tions propres » de l'opérateur nommé laplacien et noté Δ, défini à une dimension par $\Delta f = \partial^2 f/\partial x^2$ et complété par les conditions aux limites du problème considéré. On dit que f est une fonction propre de Δ si Δf est proportionnel à f, c'est-à-dire si $\Delta f = \alpha f$, où α est une constante, qualifiée de valeur propre. C'est le cas des fonctions $\sin(k_n x)$, puisqu'elles vérifient : $\Delta[\sin(k_n x)] = \partial^2[\sin(k_n x)]/\partial x^2 = -k_n^2 \sin(k_n x)$.

Ainsi, les solutions de l'équation de d'Alembert pour la corde de longueur L peuvent s'écrire sous la forme :

$$A_1(t)\sin(k_1 x) + A_2(t)\sin(k_2 x) + \ldots$$

Une telle somme est un exemple de « séries de Fourier », introduites par Joseph Fourier en 1822, mais dont une théorie satisfaisante n'a vu le jour qu'un siècle plus tard, grâce aux premiers concepts de l'analyse fonctionnelle et à une théorie de l'intégration plus puissante que la précédente. Les séries de Fourier ont d'ailleurs donné naissance à plusieurs branches de l'analyse : l'analyse harmonique, la théorie du signal, celle des ondelettes, etc.

Ces considérations se généralisent à des espaces ou des domaines de dimension supérieure à 1 et permettent d'étudier les vibrations de la peau d'un tambour, d'une plaque métallique, d'un solide plein, etc. En dimension 3, l'équation des ondes de faible amplitude, sans forçage extérieur et limitées à un domaine borné de l'espace, s'écrit ainsi :

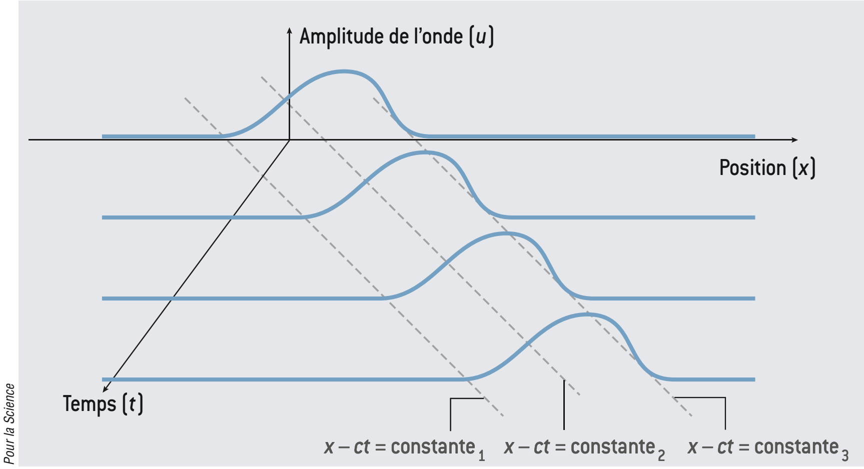
$$\partial^2 u/\partial t^2 - c^2 \Delta u = 0,$$

où le laplacien est défini par :

$$\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2.$$

Comme en dimension 1, on recherche un ensemble adéquat de fonctions propres $f_n(x, y, z)$ telles que $\Delta f_n = \alpha_n f_n$, où les α_n sont les valeurs propres et où les fonctions f_n vérifient les conditions aux limites imposées. Les solutions possibles de l'équation des ondes sont alors des sommes $A_1(t)\, f_1(x, y, z) + A_2(t)\, f_2(x, y, z) + \ldots$, où les $A_n(t)$ sont des fonctions sinusoïdales du temps, avec des pulsations ω_n données par les valeurs propres ($\omega_n^2 = -c^2 \alpha_n$). Chacun des termes représente un « mode propre d'oscillation » du système et le « spectre » désigne l'ensemble des fréquences possibles.

Soulignons que les fonctions et valeurs propres du laplacien dépendent de la géométrie du problème. La détermination des valeurs propres (le spectre) et l'analyse de leur relation avec cette géométrie ont de nombreuses applications, par exemple à l'étude des instruments de



4. L'ÉQUATION DE D'ALEMBERT pour les ondes à une dimension a des solutions de la forme $u(x, t) = f(x - ct)$, où f est n'importe quelle fonction d'une seule variable. Une telle solution représente une onde qui se propage sans se déformer à la vitesse c dans le sens positif sur l'axe Ox.

musique, mais aussi au contrôle non destructif, à la physique quantique, à la théorie des nombres, etc.

Une autre remarque concerne le cas où il existe un forçage extérieur (une source extérieure). Cette situation est plus compliquée, mais l'analyse en modes propres reste indispensable et sert de base pour déterminer le comportement du système et étudier les phénomènes de résonance notamment, comme on l'a expliqué plus haut en dimension 1.

Propagation dans un espace ouvert

Dans ce qui précède, le fait que les oscillations se développent dans un domaine borné (sur une longueur L dans le cas de la corde) est essentiel. C'est une contrainte forte sur les fonctions et vecteurs propres du laplacien, et elle détermine une infinité dénombrable (non continue) de modes d'oscillation.

Que se passe-t-il par exemple pour une corde vibrante de longueur infinie ? La recherche de solutions à variables séparées conduit dans ce cas à des solutions du type $A \sin(kx)\cos(\omega t + \phi)$, où $k = \omega/c$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle. On a donc une infinité continue de solutions particulières, et un spectre continu de fréquences.

Dans cette situation, les solutions plus générales de l'équation de la corde vibrante ne sont pas des séries de Fourier (des sommes dénombrables de fonctions sinusoïdales), mais des intégrales de Fourier (des sommes continues de fonctions sinusoïdales). L'étude de l'équation des ondes peut être alors effectuée en écrivant sous forme d'intégrales les fonctions recherchées. Cette technique, la transformation de Fourier, s'adapte à de très nombreux problèmes.

Pour la corde vibrante, un calcul simple montre directement un résultat intéressant. On remarque en effet que toute fonction $u(x, t)$ de la forme $f(x - ct)$ ou $g(x + ct)$, où f et g sont des fonctions quelconques d'une seule variable, vérifie *a priori* l'équation des ondes $\partial^2 u/\partial t^2 - c^2 \partial^2 u/\partial x^2 = 0$. Or $f(x - ct)$ représente une onde qui se propage sans se déformer vers la droite à la vitesse c, tandis que $g(x + ct)$ représente une onde qui se propage sans se déformer à la vitesse $-c$, c'est-à-dire vers la gauche à la vitesse $+c$ *(voir la figure 3)*. La solution générale de l'équation de la corde vibrante est alors une superposition $f(x - ct) + g(x + ct)$ de ces deux ondes voyageant en sens opposés, que l'on peut en principe déterminer complètement si l'on connaît la position et la vitesse de tous les points de la corde à un instant initial.

L'exemple simple de la corde vibrante a mis en évidence deux comportements liés à la notion d'onde : les oscillations dans le cas d'un domaine borné, et la propagation dans le cas d'un domaine infini. Nous avons jusqu'ici considéré l'équation de d'Alembert, qui s'applique à la corde vibrante et à de nombreux autres systèmes. Mais il existe d'autres types d'équations d'onde : l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, l'équation d'Airy qui intervient dans l'étude des caustiques (concentrations de lumière), l'équation de la vibration des poutres, etc. Les trois exemples cités sont des

Ondes, rayons et trajectoires

Comment se comportent les ondes lorsque les fréquences qui les décrivent sont très élevées ? Cette question relève de ce qu'on appelle l'analyse asymptotique, où l'on étudie mathématiquement le comportement d'un système lorsqu'un ou plusieurs de ses paramètres tendent vers des limites intéressantes.

Le cas où la fréquence tend vers l'infini est intéressant notamment parce qu'il concerne les ondes lumineuses. Les fréquences des ondes sinusoïdales permettant de décrire la lumière sont en effet extrêmement élevées : autour de 10^{14}-10^{15} hertz, c'est-à-dire autant de cycles d'oscillation du champ électromagnétique par seconde.

Le comportement des ondes à haute fréquence a occupé de nombreux mathématiciens au XXe siècle. L'une des contributions majeures est celle du chercheur suédois Lars Hörmander (médaille Fields en 1962), avec ses travaux sur l'« analyse microlocale ». L'étude mathématique de la limite des hautes fréquences a justifié de façon rigoureuse le fait que les ondes lumineuses peuvent être considérées comme des rayons si la taille des obstacles est grande par rapport à la longueur d'onde, cette dernière étant d'autant plus courte que la fréquence est élevée. Les lois de l'optique géométrique, dues à Snell et Descartes, ont ainsi reçu une explication satisfaisante, et des résultats qualitatifs, utiles pour les applications aux radars, aux images de synthèse, etc., sont systématiquement utilisés aujourd'hui.

Un autre exemple important d'analyse asymptotique des ondes est l'étude de l'équation de Schrödinger (une équation fondamentale de la mécanique quantique) quand la constante de Planck h (dont la valeur réelle est petite) tend vers 0. De nombreux travaux mathématiques ont porté sur cette limite dite semi-classique, et ont permis de préciser dans quel sens le fait de faire tendre h vers 0 permet de retrouver les lois de la mécanique classique, et notamment les trajectoires qui n'existent qu'en mécanique classique.

équations linéaires, que l'on peut analyser avec la technique des transformations de Fourier. Cela revient à représenter les solutions comme des intégrales (des sommes infinies) d'ondes sinusoïdales.

L'étude de telles équations d'onde, outre leur intérêt propre, met en évidence un phénomène ondulatoire nouveau par rapport à l'équation de d'Alembert : la dispersion. Cela signifie que les ondes sinusoïdales se propagent à des vitesses différentes, en fonction de la fréquence (ou de la longueur d'onde), ce qui n'était pas le cas avec la corde vibrante. Les composantes sinusoïdales d'une onde finissent alors par se séparer au fil du temps. La dispersion explique par exemple la décomposition par un prisme en verre de la lumière blanche, constituée d'ondes lumineuses de nombreuses fréquences. Elle explique aussi qu'une onde de forme initiale très localisée peut se déformer et s'étaler en se propageant, avec une amplitude qui diminue au fil du temps (même s'il n'y a pas dissipation d'énergie).

Par ailleurs, si les amplitudes des ondes ne peuvent pas être considérées comme petites, les équations qui les décrivent sont non linéaires. C'est fréquemment le cas, et les vagues à la surface de l'eau sont un exemple d'ondes non linéaires (décrites par l'équation dite de Korteweg-de Vries lorsque la profondeur peut être considérée comme faible). Du point de vue mathématique, les équations non linéaires sont plus variées et plus compliquées à analyser, mais elles rendent compte de phénomènes singuliers tels que les ondes de choc (par exemple lorsqu'un avion franchit le mur du son), qui correspondent à des solutions présentant des discontinuités.

Un autre phénomène intéressant décrit par certaines équations non linéaires est l'existence d'« ondes solitaires » ou « solitons » : des perturbations localisées qui se propagent sans déformation sur de longues distances, et dont les mascarets et les tsunamis sont des exemples *(voir l'article* Les vagues en équations *dans ce numéro)*. Les solitons correspondent à des ondes où l'effet de la dispersion est compensé par celui des non-linéarités.

L'étude mathématique des différentes équations d'onde, qu'elles soient linéaires ou non, qu'elles fassent apparaître ou non de la dispersion, est d'une grande richesse et continue à susciter l'invention de concepts et techniques adaptés. Il est rare que des solutions exactes et explicites puissent être trouvées aux équations. Cela arrive tout de même, notamment avec des équations dites intégrables telles que l'équation de Korteweg-de Vries, et une telle propriété révèle souvent des liens avec des domaines mathématiques *a priori* éloignés.

Un univers foisonnant

Sinon, des calculs approchés sont réalisables et utiles, tant pour l'étude mathématique des problèmes que pour leur interprétation physique. L'analyse dite asymptotique, qui examine ce qui se passe quand certains paramètres ou certaines grandeurs tendent vers des limites données, entre aussi dans ce cadre. Ainsi, l'étude de la limite des hautes fréquences, réalisée au XXe siècle, justifie le fait que les ondes lumineuses peuvent, dans les situations courantes, être assimilées à des rayons décrits par l'optique géométrique *(voir l'encadré ci-dessus)*.

L'univers des ondes est un univers foisonnant. Les ondes interviennent sous une forme ou une autre dans presque tous les phénomènes physiques. Liant oscillation et propagation, avec des effets de dispersion et des non-linéarités qui augmentent d'autant leur complexité et leur richesse, elles sont fondamentales pour les physiciens et les ingénieurs. L'étude des ondes a aussi été un stimulant essentiel de plusieurs champs des mathématiques. Elle l'est toujours. ■

✔ BIBLIOGRAPHIE

C. Bardos et M. Zerner, **Équations aux dérivées partielles**, *Encyclopædia Universalis*, 2009.

J. Bruneaux et J. Matricon, **Vibrations, ondes**, Ellipses, 2008.

F. Baskevitch, **Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie**, thèse de doctorat, Université de Nantes, 2008.

B. Valeur, **Lumière et luminescence**, Belin-Pour la Science, 2005.

R. Knobel, **An Introduction to the Mathematical Theory of Waves**, American Mathematical Society, 2000.

G. B. Whitham, **Linear and Nonlinear Waves**, John Wiley & Sons, 1974.