Corrigé - DM n°6: Mécanique

I Pendule de longueur variable

1. L'étude de la première phase du mouvement est en tout point identique à celle présentée en cours. Seuls le poids et la tension du ressort s'appliquent au point mobile M. On travaille en coordonnées polaires dans le repère $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. On obtient donc, par une méthode énergétique ou en projetant le principe fondamental de la dynamique au point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen selon $\overrightarrow{u_\theta}$:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

2. Dans l'hypothèse de petites oscillations, l'équation différentielle s'écrit : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$. C'est une équation différentielle harmonique dont la solution générale s'écrit : $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Sachant qu'à $t = 0$, $\theta = \theta_0$, et que la vitesse est nulle, c'est à dire $\ell\dot{\theta} = 0$, on en déduit :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$$

La première phase du mouvement s'achève lorsque $\theta = 0$ pour la première fois, c'est à dire lorsque $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$. On en déduit donc : $\boxed{\Delta t_{\mathrm{I}} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$.

3. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les instants $t = 0$ et t_1^- s'écrit :

$$\frac{1}{2}m(v_1^-)^2 - 0 = mg\ell(1 - \cos\theta_0)$$

où seul le travail du poids est non nul car la force de tension est orthogonale à la vitesse à tout instant. De plus, le travail du poids se calcule rapidement dans la base polaire où le déplacement élémentaire n'a qu'une composante puisque le fil est inextensible et donc de longueur constante :

$$\delta W(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = mg \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \ell\mathrm{d}\theta \end{pmatrix} = -mg\ell\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

Le travail mécanique algébriquement reçu entre 0 et t_1^- vaut donc :

$$W_{\mathrm{I}}(\overrightarrow{P}) = \int_{t=0}^{t_1^-} \delta W(\overrightarrow{P}) = \int_{\theta_0}^{0} -mg\ell\sin\theta\mathrm{d}\theta = [mg\ell\cos\theta]_{\theta_0}^{0} = mg\ell(1 - \cos\theta_0)$$

d'où le résultat.

On en déduit : $\boxed{v_1^- = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_0)}}$, or $v = -\ell\omega$, donc $\boxed{\omega_1^- = -\sqrt{2\frac{g}{\ell}(1-\cos\theta_0)}}$.

4. Le blocage de la partie supérieure du fil ne s'accompagnant d'aucun transfert d'énergie, l'énergie cinétique est continue en $t = t_1$, et donc $\boxed{v_1^+ = v_1^- = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_0)}}$.

La vitesse angulaire est cependant modifiée car la ficelle touche maintenant le clou, et le mouvement est circulaire, de rayon $\frac{2}{3}\ell$. Donc $\boxed{\omega_1^+ = -v_1^+\frac{3}{2\ell} = -\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{g}{\ell}(1-\cos\theta_0)}}$.

5. La seconde phase correspond à un pendule simple de longueur $\frac{2}{3}\ell$. L'équation différentielle régissant l'évolution de θ est donc identique en remplaçant ℓ par $\frac{2}{3}\ell$. La durée de la seconde phase s'exprime donc par : $\boxed{\Delta t_{\mathrm{II}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}}$.

6. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre les instants t_1^+ et t_2 s'écrit :

$$0 - \frac{1}{2}m(v_1^+)^2 = -mg\frac{2}{3}\ell(1-\cos\theta_2)$$

or $\frac{1}{2}m(v_1^+)^2 = \frac{1}{2}m(v_1^-)^2 = mg\ell(1-\cos\theta_0)$, donc $(1-\cos\theta_0) = d\frac{2}{3}(1-\cos\theta_2)$.

Finalement : $\boxed{\cos\theta_2 = \frac{1}{2}(3\cos\theta_0 - 1)}$.

On vérifie bien que $\theta_2 = 0$ lorsque $\theta_0 = 0$.

En utilisant un développement limité du cosinus, on montre que $\boxed{\theta_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\theta_0} > \theta_0$.

7. À partir de t_2 le mouvement d'oscillation harmonique se poursuit symétriquement. Le pendule rejoint le point le plus bas de la trajectoire avec la même vitesse (système conservatif) et le fil se libère du clou. On retrouve alors le mouvement symétrique de la première phase jusqu'à θ_0 et ainsi de suite. La période globale du système correspond au temps pour revenir à θ_0 à partir de $t = 0$:

$$\boxed{T = 2(\Delta t_{\mathrm{I}} + \Delta t_{\mathrm{II}}) = \pi\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

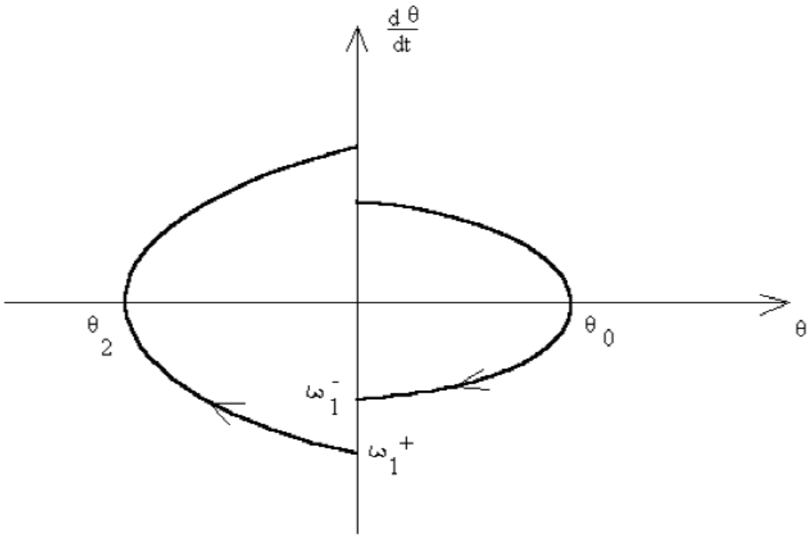
8. A.N. :

$$\boxed{t_1 = 388\,\mathrm{ms}} \quad ; \quad \boxed{t_2 = 706\,\mathrm{ms}} \quad ; \quad \boxed{T = 1{,}41\,\mathrm{s}} \quad ; \quad \boxed{\theta_2 = 9{,}80°}$$

9. Dans les coordonnées imposées par l'énoncé, les trajectoires de phase d'un oscillateur harmonique sont des arcs d'ellipse puisqu'en multipliant l'équation différentielle du mouvement par $\dot{\theta}$ et en intégrant par rapport au temps on obtient :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega_0^2\frac{\theta^2}{2} = cste$$

qui est l'équation d'un ellipse de demi-axe horizontal $a = \theta_0$ ou $a = \theta_2$ et demi-axe vertical $b = \omega_1^-$ ou $b = \omega_1^+$.



II Le cyclotron de Lawrence - *(D'après TnT)*

1. (a) Cf annexe : la trajectoire proposée est rectiligne selon $\overrightarrow{u_x}$. La force électrique sur un proton s'écrivant $\overrightarrow{F} = e\overrightarrow{E}$, on choisira $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_x}$.

(b) On étudie le proton assimilé à un point matériel M de masse m constante dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On utilise le repère $(\mathcal{S}, \overrightarrow{u_x})$. Le proton est alors décrit par : $\overrightarrow{\mathcal{S}M} = x\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}$. Le poids étant négligeable devant la force électrique, on ne considérera que cette dernière sous la forme $\overrightarrow{F} = e\overrightarrow{E_0}\overrightarrow{u_x}$. La loi de la quantité de mouvement projetée selon $\overrightarrow{u_x}$ donne alors :

$$m\ddot{x} = eE_0$$

dont on déduit que :

$$\boxed{x(t) = \frac{eE_0}{2m}t^2}$$

Le durée τ mis par un proton pour parcourir la distance d est donc :

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2md}{eE_0}}}$$

(c) Dans le cas d'un champ électrique stationnaire et uniforme, la force électrique est constante et donc conservative. On a donc :

$$\mathrm{d}E_p = -\delta W(\overrightarrow{F}) = -eE_0\overrightarrow{u_x} \cdot \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} = -eE_0\mathrm{d}x$$

On en déduit donc $\boxed{E_p(x) = -eE_0x + cste}$.

(d) L'énergie potentielle précédente est directement liée au potentiel électrique $V(x)$ selon la relation $E_p = eV(x)$. Par définition de la tension u :

$$u = V(\mathcal{S}) - V_O = E_0d$$

et pour accélérer au maximum le proton, il faut E_0 maximum et donc u maximum c'est-à-dire $\boxed{U = E_0d}$. On peut donc exprimer la durée τ en fonction de la tension U :

$$\tau = \sqrt{\frac{2md^2}{eU}}$$

Pour que le temps de parcours dans la zone entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soit négligeable, il faut que :

$$\tau \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Cette relation amène à :

$$\omega \ll 2\pi\sqrt{\frac{eU}{2md^2}}$$

L'application numérique donne $\boxed{\omega_0 \sim 1 \times 10^9\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}$.

(e) Dans le cas du cyclotron de Lawrence, la fréquence est de 17 MHz. Or, $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \sim 1 \times 10^8\,\mathrm{Hz}$. On peut donc considérer que l'hypothèse est satisfaite dans le cas de Lawrence.

(f) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un proton au cours de cette première phase. On obtient :

$$\frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_1}\|^2 = eU$$

soit :

$$\boxed{\|\overrightarrow{v_1}\| = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$$

2. (a) La force magnétique a pour expression $e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$. Par définition, cette force est donc orthogonale au vecteur vitesse et ne travaille donc pas. L'énergie cinétique n'est donc pas modifié dans cette phase. On en déduit que la norme de la vitesse est constante et on peut donc qualifier d'uniforme le mouvement du proton.

(b) L'application de la loi de la quantité de mouvement amène cette fois aux équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \dfrac{eB_0}{m}\dot{y} \\ \\ \ddot{y} &= -\dfrac{eB_0}{m}\dot{x} \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \dfrac{eB_0}{m}y + v_1 \\ \\ \dot{y} &= -\dfrac{eB_0}{m}x \end{cases}$$

En subsituant les relations de ce système d'équations dans le précédent, on aboutit à :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \left(\dfrac{eB_0}{m}\right)^2 x = 0 \\ \\ \ddot{y} + \left(\dfrac{eB_0}{m}\right)^2 y = -\dfrac{eB_0}{m}v_1 \end{cases}$$

La première équation a pour solution

$$\boxed{x(t) = \frac{v_1}{\omega_c}\sin(\omega_c t)}$$

et la deuxième :

$$\boxed{y(t) = \frac{v_1}{\omega_c}[\cos(\omega_c t) - 1]}$$

Remarque : on a utilisé les conditions initiales $x(0) = y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_1$ et $\dot{y}(0) = 0$; et on a noté v_1 la norme $\|\overrightarrow{v_1}\|$.

(c) En élevant les deux équations précédentes au carré et en les sommant, on obtient :

$$x^2 + \left(y + \frac{v_1}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_1}{\omega_c}\right)^2$$

Il s'agit bien de l'équation d'un cercle de centre $\mathrm{C}(0, -\dfrac{v_1}{\omega_c})$ et de rayon $r = \dfrac{v_1}{\omega_c}$ soit :

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{2mU}{eB_0^2}}}$$

Le mouvement étant circulaire et uniforme, le temps par un proton pour ressortir du deuxième dee sera égal à $T_c/2 = \dfrac{2\pi}{2\omega_c} = \dfrac{\pi m}{eB_0}$. Ce résultat ne dépend pas de la vitesse du proton.

(d) Si on choisit $\omega = \omega_c$, alors le proton se retrouve dans la zone d'accélération électrique avec à nouveau un champ électrique orienté dans le sens du vecteur vitesse. La force électrique est donc bien motrice, la puissance mécanique reçue est donc positive et l'énergie cinétique du proton augmente.

(e) À chaque passage dans la région où règnera le champ électrique, celui-ci accélérera les protons. Chaque fois, l'énergie cinétique augmentera, d'après le théorème de l'énergie cinétique de eU. Après k accélérations, cette énergie aura donc pour expression keU et la vitesse associée aura pour expression :

$$\boxed{v_k = \sqrt{k\frac{2eU}{m}}}$$

(f) Cf. annexe.

Nous allons à présent revenir sur les calculs présentés par Lawrence dans son article.

3. L'application numérique donne $1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ comme valeur pour $1\,\mathrm{eV}$.

4. (a) L'énoncé donne $E_{c,\max}$. En appliquant à nouveau le théorème de l'énergie mécanique au proton de $\mathcal{S}$ à la fin de la dernière accélération on a :

$$\boxed{v_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{c,\max}}{m}}} \quad \underline{\text{A.N.}} : \quad \boxed{v_{\max} = 1{,}52 \times 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

(b) Un traitement relativiste n'est justifié que si $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1$. Ici $\frac{v}{c} < 0{,}1$ et donc $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1$. Un traitement relativiste n'est p

(c) On aurait dans le cas relativiste à utiliser les expressions :

$$\boxed{E_c = (\gamma - 1)\, mc^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{p} = \gamma m \overrightarrow{v}}$$

avec c la célérité de la lumière dans le vide et $\boxed{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$.

5. D'après ce qui précède, on aurait :

$$\boxed{U' = \frac{E_{c,\max}}{e}} \quad \underline{\text{A.N.}} : \quad \boxed{U' = 1{,}20 \times 10^6\,\text{V}}$$

Cette valeur de tension serait très élevée et dangereuse. On comprend avec cette valeur pourquoi l'article de Lawrence porte son titre.

6. Un cyclotron présente l'immense avantage d'être très peu encombrant. En revanche, il requiert l'utilisation d'aimants. Ceux-ci sont plus difficiles à réaliser de façon à obtenir une valeur précise tant du point de vue théorique que pratique. D'autre part, la création du champ électrique uniforme est plus délicate dans le cas du cyclotron par rapport à l'accélérateur linéaire du faut de son faible encombrement.

7. On peut citer le synchrotron. Dans le cas du synchrotron, on retrouve le principe du cyclotron mais, cette fois, la trajectoire décrite par les protons est toujours la même. Il faut pour cela adapter l'intensité du champ magnétique appliqué entre les zones d'accélération pour qu'il s'adapte à la vitesse des particules et maintiennent constant le rayon de leur trajectoire.

8. Par définition, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$, avec T la période de $u(t)$. Or, on a montré que la trajectoire des protons dans les dees étaient circulaire et uniforme. En une demi-période, un proton parcours donc un demi-cercle de rayon r à la vitesse v. On a donc, pour le dernier demi-tour effectué :

$$\boxed{f = \frac{v_{\max}}{2\pi r_{\max}} = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{2E_{c,\max}}{m}}} \quad \underline{\text{A.N.}} : \quad \boxed{f = 17{,}3\,\text{MHz}}$$

Cette valeur est bien celle donné dans le cas du cyclotron de Lawrence.

9. On a déjà montré que $v_k = \sqrt{k}\sqrt{\frac{2eU}{m}}$. Au bout de N tours, on a donc :

$$v_{\max} = \sqrt{2N}\sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \text{soit} \quad E_{c,\max} = 2NeU$$

et donc :

$$\boxed{N = \frac{E_{c,\max}}{2eU}} \quad \underline{\text{A.N.}} : \quad \boxed{N = 150}$$

Les protons auront donc effectué 150 tours au moment où ils arriveront aux bords du cyclotron.

10. On a montré que $\omega = \omega_c = \frac{eB_0}{m}$ avec $\omega = 2\pi f$. Ainsi :

$$\boxed{B_0 = \frac{mv_{\max}}{er_{\max}}} \quad \underline{\text{A.N.}} : \quad \boxed{B_0 = 1{,}13\,\text{T}}$$

DOCUMENT RÉPONSE - CORRECTION

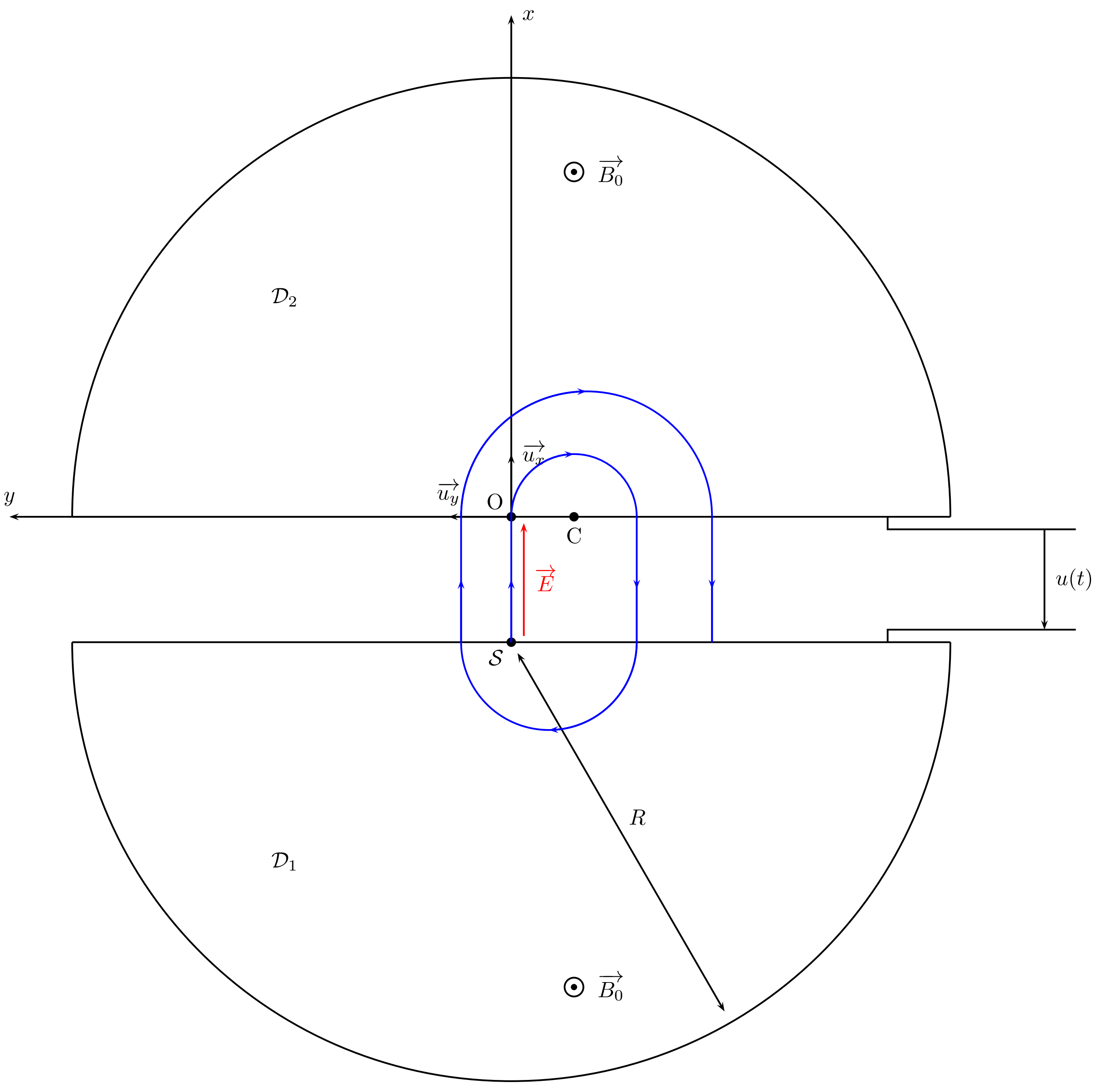


FIGURE 1 – *Schéma complété d'un cyclotron. La trajectoire des protons est représentée en bleu. L'orientation du champ électrique lors de la première accélération est indiquée en rouge.*