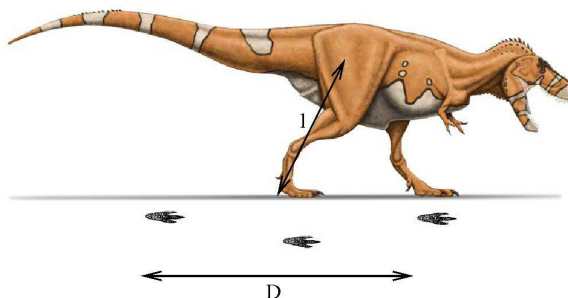


DM n°1: Analyse dimensionnelle

À rendre pour le jeudi 17 septembre 2020

I La course des dinosaures

L'étude des dinosaures fascine beaucoup de gens, de l'enfant de 4 ans jusqu'au scientifique le plus chevronné. Courez-vous assez vite pour échapper à un tyrannosaurus rex ?



On se propose dans ce problème de déterminer la vitesse de course des dinosaures. On procède pour cela à une similitude dynamique en cherchant un paramètre adimensionné qui nous permettrait de déduire l'allure de course des dinosaures à partir de l'observation du mouvement des animaux actuels. On cherche pour cela un lien entre la foulée relative d'un animal et un nombre sans dimension, qui caractérise l'importance relative de l'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle gravitationnelle, que l'on nomme nombre de Froude (du nom de l'architecte naval qui l'utilisait pour appliquer grandeur nature les résultats obtenus sur des maquettes de navire).

I.1 Dimensions

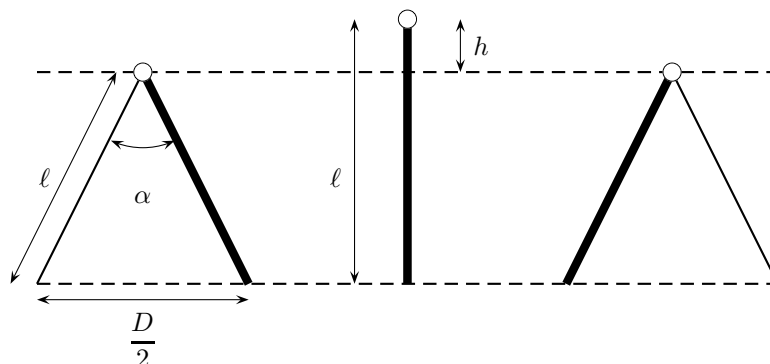
1. Vérifier que les deux grandeurs suivantes sont bien sans dimension :

- Foulée relative : $f = \frac{D}{\ell}$, avec ℓ la longueur des membres inférieurs et D la longueur de foulée (distance entre deux empreintes de patte gauche par exemple).
- Nombre de Froude : $F_r = \frac{v}{\sqrt{g\ell}}$, avec v la vitesse de déplacement et g l'intensité du champ de pesanteur.

Si on trouve un lien entre ces deux grandeurs adimensionnées pour un animal actuel, on pourra trouver la vitesse des dinosaures à partir de la mesure de leur foulée relative (accessible grâce aux empreintes fossiles et aux squelettes retrouvés par les archéologues).

I.2 Coût énergétique d'une foulée

On cherche ici à exprimer la dépense d'énergie potentielle lors d'une foulée. On modélise le mouvement des membres inférieurs par un mouvement de balancier, l'articulation des membres s'élevant de h au cours d'une foulée.



2. Exprimer h en fonction de ℓ et α , puis en fonction de ℓ et $f = \frac{D}{\ell}$. On rappelle que $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.
3. Simplifier l'expression précédente de f en fonction de ℓ et h dans l'hypothèse $D \ll \ell$ (soit $f \ll 1$). On pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 : $(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$ pour $x \ll 1$.
4. Dans l'hypothèse de la question précédente, montrer enfin que le travail fourni par l'animal pour effectuer une foulée s'écrit $W_{\text{foulée}} = \frac{1}{32} m g \ell f^2$, avec m la masse de l'animal. On assimilera le travail uniquement à la variation d'énergie potentielle lorsque le centre de gravité s'élève de h (soit $1/2$ foulée), la variation d'énergie lorsqu'il redescend étant dissipée dans le sol et dans les articulations.

I.3 Évaluation de l'énergie cinétique

5. La pulsation ω des oscillations d'un pendule de longueur ℓ et de masse m dans le champ de pesanteur g ne dépend que de ces trois paramètres dans l'hypothèse des petites oscillations. En admettant une expression du type :

$$\omega = k \ell^a m^b g^c$$

avec k une constante sans dimension, déterminer les coefficients a , b et c par analyse dimensionnelle. En déduire l'expression de ω puis celle de la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ associée à ce mouvement pendulaire en supposant $k = 1$.

6. Lier la vitesse moyenne de déplacement v de l'animal à la période T du mouvement pendulaire des membres inférieurs et à la longueur de foulée D .
7. Exprimer finalement l'énergie cinétique E_c associée à ce mouvement en fonction de g , m , ℓ et f .

I.4 Similitude dynamique

8. Exprimer le nombre de Froude Fr en fonction de la foulée relative $f = \frac{D}{\ell}$.
9. Calculer le nombre de Froude Fr pour le furet, sachant que celui-ci se met à courir lorsque sa vitesse atteint $v = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la longueur de ses membres étant $\ell = 0,090 \text{ m}$. Même question pour le rhinocéros blanc tel que $v = 5,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\ell = 1,2 \text{ m}$. Commenter. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
10. On donne la courbe suivante du nombre de Froude Fr en fonction de la foulée relative f . Sont également portées les valeurs des foulées relatives pour un tyrannosaurus rex ($f = 2,6$) et pour un vélociraptor ($f = 5,5$). Utiliser la courbe pour déterminer la vitesse de ces deux dinosaures, sachant que pour le tyrannosaurus rex, $\ell \simeq 2 \text{ m}$ et pour le vélociraptor $\ell \simeq 1 \text{ m}$.

