Mécanique

Partie 1

Charles Tuchendler

MPSI 4 – Lycée Saint-Louis

Année 2019/2020

Table des matières

CHAPITRE IX

CINÉMATIQUE

Sommaire

Introduction générale de la mécanique

Objectif IX.1 – Aborder l'étude des mouvements par l'étude des trajectoires

La mécanique étudie le mouvement ou le non-mouvement (c'est-à-dire l'équilibre) d'objets matériels soumis à des phénomènes physiques (qui se traduisent par les forces) qui régissent l'évolution du système. Notre objectif général sera de faire le lien entre le mouvement **cinématique** d'un objet et les causes **dynamiques** qui lui ont donné naissance.

Introduction

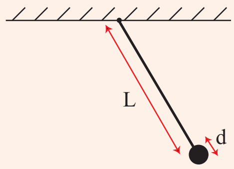
Définition IX.1 – Cinématique

La **cinématique** est l'étude du mouvement (vitesse, accélération, trajectoire), indépendamment des causes qui lui ont donné naissance.

Dans le cadre du programme de MPSI, on se restreindra principalement à l'étude du mouvement d'un **point matériel** mais on abordera aussi, ici et là, différents aspects liés à la mécanique du solide. Plus de détail sur le mouvement d'un solide sera donné en seconde année.

Propriété IX.1 – Cadre de la cinématique du point

- ⋆ Dans ce cadre, l'étude du mouvement de l'objet se ramène à celle du centre de gravité du solide supposé indéformable. Pour être applicable, il faut pouvoir négliger la rotation de l'objet sur lui-même et les effets d'inertie du solide.
- ⋆ Prenons l'exemple du pendule ci-contre : on pourra considérer la masse comme ponctuelle, c'est à dire comme un point matériel, si elle ne tourne pas sur elle-même et si $d \ll L$.



Perspective 1 – Limite classique et compléments quantique et relativiste

On se restreindra également au cadre de la **mécanique classique (ou newtonienne)** du point matériel, sans aborder :

- ⋆ la **mécanique relativiste**. Cette restriction permet de définir un temps "absolu", qui s'écoule de la même façon pour tous les observateurs, quels que soient leur mouvement. Ceci reste valable tant que la vitesse v de l'objet considéré vérifie $v \ll c$.
- ⋆ la **mécanique quantique**. Cette restriction permet notamment de définir simultanément la position et la vitesse d'un objet. Elle restera valable tant que la dimension de ce dernier est grande à l'échelle microscopique ($d > 1\ \mu$m) [a].

[a]. On rencontrera également d'autres cas pour lesquels la particule considérée est de taille inférieure et pour lesquels la mécanique classique permet de bien décrire le mouvement (avec des électrons par exemple).

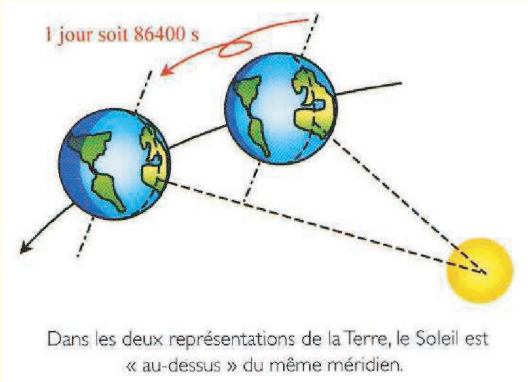
Afin de décrire le mouvement d'un point, il faut bien évidemment le repérer dans l'espace et le temps. Nous allons donc tout d'abord être amenés à définir une échelle de temps et un référentiel d'espace.

I Repérage d'un point dans l'espace et le temps

I.1 Echelle de temps

Définition IX.2 – Echelle de temps et périodicité

- ⋆ Nécessité d'une **mesure de temps** : utilisation d'un phénomène périodique dont on peut compter les répétitions. Ex : le jour.
- ⋆ Unité SI : **la seconde** (symbole s). Elle correspond historiquement à un soixantième de minute, elle-même un soixantième d'heure, elle-même un vingt-quatrième de jour solaire (voir figure).
- ⋆ Aujourd'hui, utilisation d'horloges atomiques et d'horloges optiques.
- ⋆ L'échelle du temps est **orientée** dans le sens de l' **irréversibilité** des évènements physiques. C'est ce qu'on appelle la **flèche du temps**. Ex : lâcher de pierre depuis une montagne.



I.2 Référentiel d'espace

I.2.a Référentiel

Afin de décrire le mouvement d'un point, il est nécessaire de définir une référence spatiale, par rapport à laquelle le mouvement est observé, car la perception du mouvement d'un objet dépend du mouvement propre de l'observateur qui le regarde.

Exemples : selle et valve d'un vélo ou manège à voitures et chevaux (cf. Fig.IX.1 et Fig.IX.2)

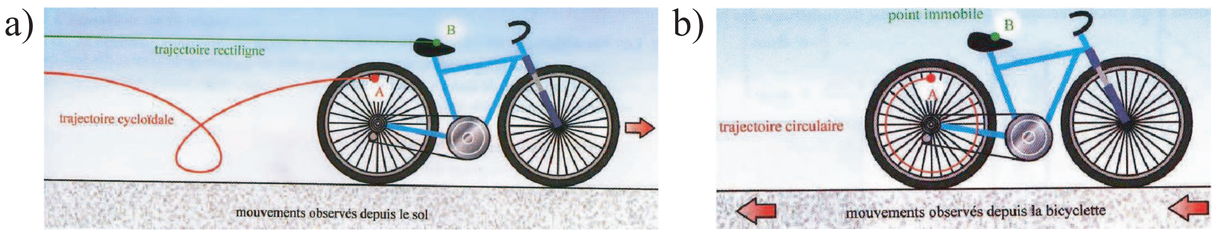


FIGURE IX.1 – *Les mouvements sont toujours relatifs au référentiel d'espace choisi pour l'observation. Ici, le référentiel est a) le sol, et b) le vélo.*

Définition IX.3 – Référentiel

Un référentiel $\mathcal{R}$ est l'ensemble rigide des points fixes par rapport à l'observateur. On parle aussi de solide lié à l'observateur.

Remarque : vitesse, accélération et trajectoire dépendent du référentiel d'étude, c'est pourquoi on précisera toujours le référentiel $\mathcal{R}$ choisi.

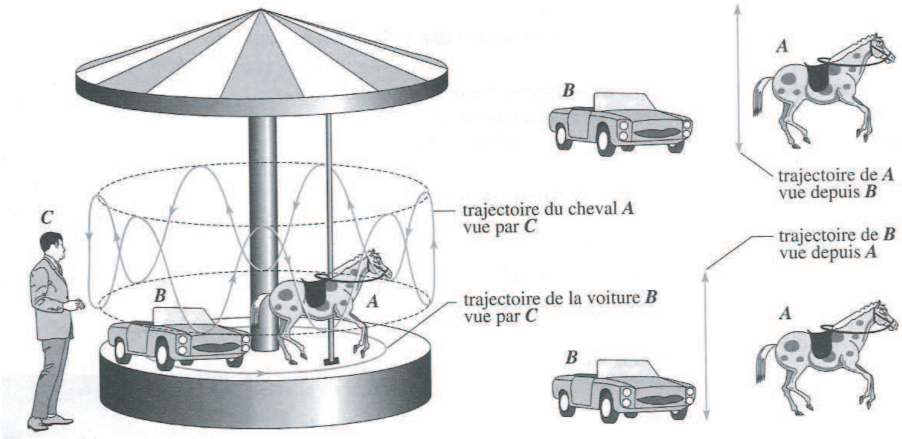


FIGURE IX.2 – *Un autre exemple montrant l'importance du référentiel d'espace. Ici, les mouvements sont perçus différemment si l'on se place du point de vue d'un observateur au sol, de l'automobile, ou du cheval de bois.*

I.2.b Base ou repère

Définition IX.4 – Base et repère

Pour étudier le mouvement d'un point dans un référentiel $\mathcal{R}$, on peut définir 3 vecteurs orthonormaux qui constituent une **base**. Si on adjoint de plus à cette base un point, on dispose alors d'un repère.

Remarque : il existe une infinité de bases et de repères, avec autant de systèmes de coordonnées pour décrire le mouvement d'un point dans un référentiel. *Exemples* : manège, vélo (cf figure IX.3), train.

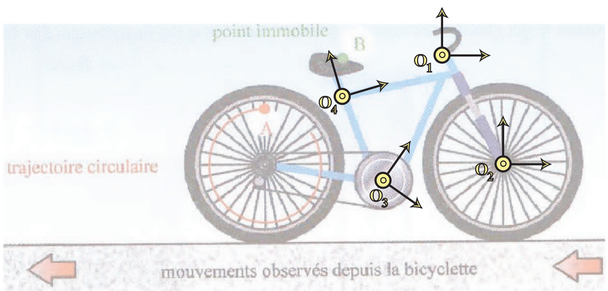


FIGURE IX.3 – *Infinité de repères pour décrire le mouvement d'un point par rapport à un référentiel donné*

I.2.c Mesure de distance

Définition IX.5 – Mesure de distance

- ⋆ Nombre de fois qu'un objet de référence peut être placé le long de cette distance.
- ⋆ Unité SI : **mètre** (m), historiquement la dix millionième partie du quart du méridien terrestre (mètre étalon platine). Aujourd'hui, le mètre est défini à partir de c et de la seconde.

I.2.d Mesure angulaire

Définition IX.6 – Mesure d'angles

On mesurera les angles en utilisant le rapport de longueur suivant : $\theta = \dfrac{\ell(AB)}{R}$, où $\ell(AB)$ est la longueur de l'arc et R le rayon du cercle.

L'angle s'exprime en radian (rad) dans l'unité du système international, et est une grandeur sans dimension.

Les mesures d'angle sont algébriques, et on défini conventionnellement un angle positif dans le sens trigonométrique (Rectus) opposé au sens horaire (Sinistre).

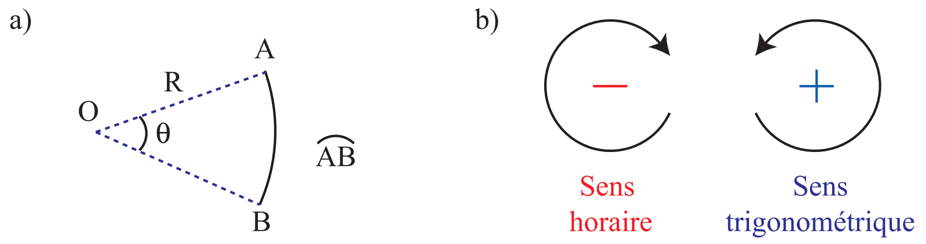


FIGURE IX.4 – *a) Définition d'une mesure angulaire. b) Sens conventionnel d'orientation des angles.*

I.2.e Orientation de l'espace

Définition IX.7 – Base directe

Pour former un trièdre de 3 vecteurs orthogonaux dans l'espace, il existe 2 possibilités pour placer le troisième vecteur une fois que les deux premiers ont été placés. Choisir l'une de ces possibilités, c'est "orienter" l'espace.

On ne s'intéressera qu'à l'orientation dite directe (règle des 3 trois doigts de la main droite : cf Fig. IX.5) [a]

a. On pourra se référer à l'annexe sur les outils vectoriels pour un compléments sur cette notion.

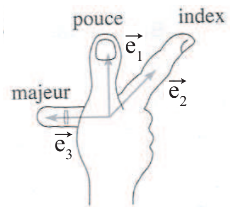


FIGURE IX.5 – *Règle des trois doigts de la main droite pour l'orientation d'un trièdre direct.*

II Description du mouvement

II.1 Vecteur position et trajectoire

Définition IX.8 – Vecteur-position

Soit $\mathcal{R}$ le référentiel d'étude et O un point fixe de $\mathcal{R}$. On repère la position d'un point mobile M par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Définition IX.9 – Trajectoire

On appelle **trajectoire** de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ l'ensemble des points occupés par M au cours de son mouvement.

II.2 Vecteur vitesse

Définition IX.10 – Vecteur-vitesse

Le vecteur vitesse instantanée du point M par rapport à $\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}}}$$

Propriété IX.2 – Vecteur-vitesse

- ⋆ Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ **est porté par la tangente à la trajectoire en** M**.**
- ⋆ $[v] = L.T^{-1}$, et l'unité SI de la vitesse est le $\mathrm{m.s^{-1}}$
- ⋆ On dit que le mouvement est **uniforme** si $\parallel \overrightarrow{v} \parallel = cte$.
- ⋆ Dans une base fixe, si les composantes du vecteur position sont $\overrightarrow{OM}(p_1, p_2, p_3)$ et celles du vecteur vitesse sont $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$ alors on a : $v_1 = \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}$, $v_2 = \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$ et $v_3 = \frac{\mathrm{d}p_3}{\mathrm{d}t}$

II.3 Vecteur accélération

Définition IX.11 – Vecteur-accélération

Le vecteur accélération du point M par rapport à $\mathcal{R}$ est :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{/\mathcal{R}}}$$

Propriété IX.3 – Vecteur accélération

- ⋆ $[a] = L.T^{-2}$, et l'unité SI de l'accélération est le $\mathrm{m.s^{-2}}$
- ⋆ On peut avoir $\parallel \overrightarrow{v} \parallel = \mathrm{cte}$ et $\overrightarrow{a} \neq 0$ car $\overrightarrow{a}$ correspond à la variation du vecteur vitesse et non à la variation de sa norme ; c'est le cas dans un mouvement circulaire uniforme.
- ⋆ Dans une base fixe, si les composantes du vecteur accélération sont $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ et celles du vecteur vitesse

Propriété IX.3 – Vecteur accélération (suite)

sont $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ on a : $a_1 = \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$, $a_2 = \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$ et $a_3 = \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t}$

⋆ On se limitera en classe de MPSI aux vecteurs position, vitesse et accélération, mais on peut encore définir d'autres quantités par dérivations successives du vecteur position : par exemple, la dérivée de l'accélération, appelée *jerk* est parfois utilisée.

III Systèmes de coordonnées

Définition IX.12 – Coordonnées et variables d'espace, équations horaires

Soit un repère $(O, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ associé à un référentiel d'étude $\mathcal{R}$ et un point M en mouvement dans $\mathcal{R}$. Le vecteur-position se décompose de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM}(t) = a(t)\,\vec{u_1} + b(t)\,\vec{u_2} + c(t)\,\vec{u_3}$$

où $(a(t), b(t), c(t))$ sont **les coordonnées** du vecteur-position du point M à la date t dans le repère utilisé. Le triplet $(a(t), b(t), c(t))$ dépend du repérage utilisé, lui-même caractérisé par trois variables d'espace appelées maladroitement elles aussi **coordonnées** selon l'usage en physique. On les note par exemple (α, β, γ).

Remarque : différents systèmes de coordonnées peuvent être utilisés. Quel que soit le système choisi, on appellera **équations horaires du mouvement** la donnée de $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$. A partir de ces équations horaires, l'équation de la trajectoire reliant les différentes coordonnées d'espace peut être obtenue.

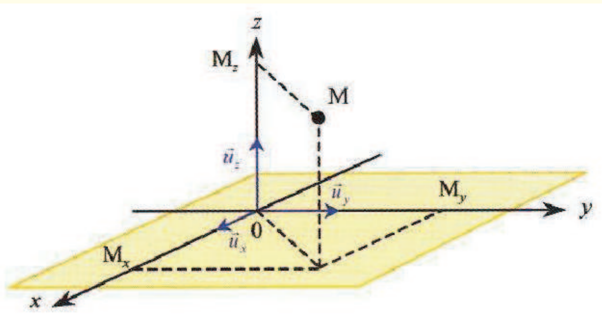
III.1 Coordonnées cartésiennes

Définition IX.13 – Repère cartésien et vecteur-position associé

Le repère cartésien $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ est un repère fixe dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire un repère dans lequel les vecteurs de base et le point O sont immobiles.

En coordonnées cartésiennes, le point M est repéré par les trois coordonnées d'espace (x, y, z) et son vecteur-position dans le repère d'étude s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}}$$



Propriété IX.4 – Vecteur-vitesse dans un système de coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\,\vec{u_x} + \dot{y}\,\vec{u_y} + \dot{z}\,\vec{u_z}}$$

Exercice IX.1 – Expression du vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes

Remarque : on peut aussi écrire $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}} = v_x\,\overrightarrow{u_x} + v_y\,\overrightarrow{u_y} + v_z\,\overrightarrow{u_z}$ avec $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ et $v_z = \dot{z}$.

Définition IX.14 – Déplacement élémentaire

On appelle **déplacement élémentaire** la variation du vecteur-position entre deux instants infinitésimalement proches t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{OM}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t}$$

On peut en déduire la longueur d'une courbe entre deux points A et B [a] :

$$\boxed{\ell = \int_A^B ||\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}|| = \int_A^B \|\overrightarrow{v}\|\mathrm{d}t}$$

a. La formule précédente, comme celle qui suit, reste valable quel que soit le système de coordonnées utilisé.

Exercice IX.2 – Expression du déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

Propriété IX.5 – Expression du vecteur-accélération en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}}$$

Exercice IX.3 – Surfaces et volume élémentaires

Remarque : on peut aussi écrire $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}} = a_x\,\overrightarrow{u_x} + a_y\,\overrightarrow{u_y} + a_z\,\overrightarrow{u_z}$ avec $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$ et $a_z = \ddot{z}$.

Ce repère n'est pas toujours adapté à l'étude du mouvement d'un point. Prenons l'exemple d'une voiture remontant d'un parking souterrain en colimaçon. Son mouvement ressemble à un mouvement circulaire avec en plus un mouvement vertical ascendant. Ce type de mouvement est difficile à étudier avec les coordonnées cartésiennes. Cela nous amène à introduire un autre système de coordonnées : les coordonnées cylindriques.

III.2 Coordonnées cylindriques

III.2.a Repère de la base cylindrique

Définition IX.15 – Repère et coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont définies à partir du point M_p, **projeté** du point M sur le plan (xOy).
On définit :

$$\begin{cases} r = OM_p > 0 & \text{le rayon polaire (parfois noté } \rho) \\ \theta = (\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM_p}}) & \text{l'angle polaire avec } \theta \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

La base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ est orthonormale directe et locale : les vecteurs de la base dépendent du point considéré et donc du temps. Elle est donc mobile dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$. Sa définition est la suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} \text{ tel que } \overrightarrow{OM_p} = r\,\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_\theta} \text{ obtenu par une rotation de } \overrightarrow{u_r} \text{ de } +\pi/2 \text{ autour de } \overrightarrow{u_z} \text{ soit : } \overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_z} \text{ : identique au vecteur de la base cartésienne} \end{cases}$$

L'origine O du repère est en revanche fixe dans le référentiel d'étude.

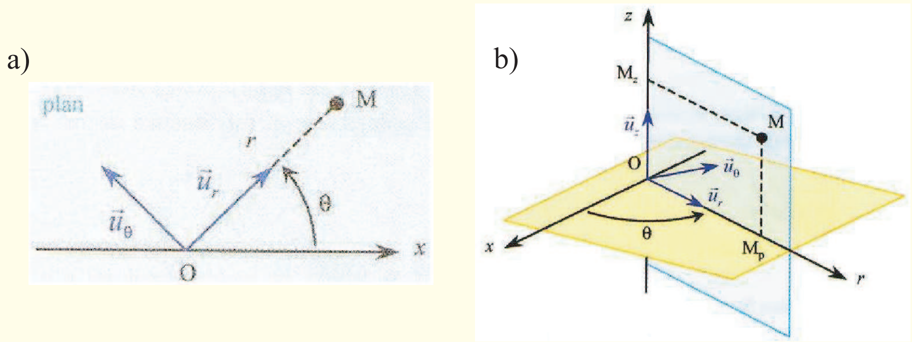


FIGURE IX.6 – *Coordonnées cylindriques : a) pour un mouvement plan (coordonnées polaires), et b) pour un mouvement tridimensionnel.*

III.2.b Vecteur-position

Définition IX.16 – Expression du vecteur-position en coordonnées cylindriques

Dans le système de coordonnées cylindriques, un point M repéré par les variables d'espace (r, θ, z) est décrit par le vecteur-position :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u> : il n'y a pas de composante du vecteur-position selon $\overrightarrow{u_\theta}$ car $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur mobile qui suffit à déterminer la position de M_p dans le plan xOy. En revanche, le vecteur-vitesse peut dépendre de $\overrightarrow{u_\theta}$.

III.2.c Vecteur-vitesse, déplacement élémentaire et accélération

Exercice IX.4 – Expression du vecteur-vitesse

Exercice IX.5 – Expression du vecteur-accélération

Exercice IX.6 – Expression du déplacement élémentaire

III.2.d Surfaces et volume élémentaires

Définition IX.17 – Surfaces et volume élémentaires

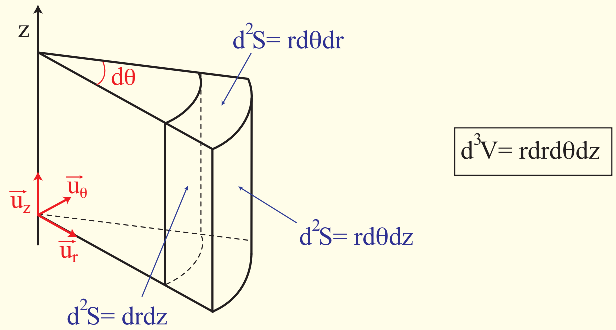


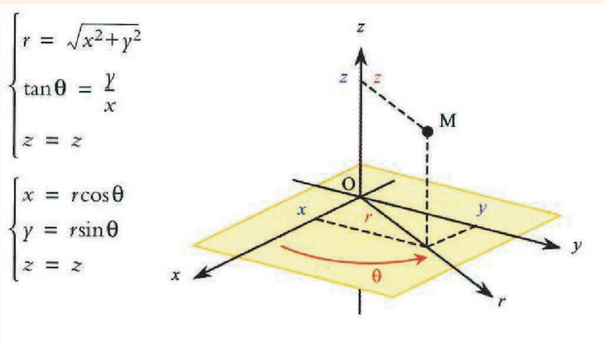
FIGURE IX.7 – *Surfaces et volume élémentaires en coordonnées cylindriques.*

III.2.e Passage d'un système de coordonnées à un autre

Propriété IX.6 – Passage entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

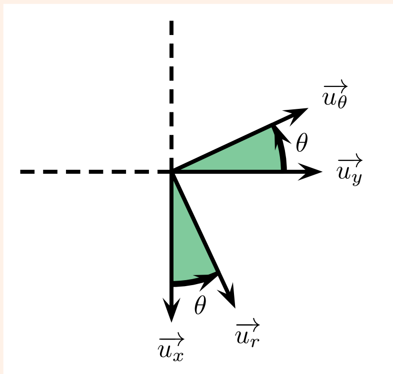
Les vecteurs de la base cylindrique s'écrivent dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos\theta\ \overrightarrow{u_x} + \sin\theta\ \overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\ \overrightarrow{u_x} + \cos\theta\ \overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_z} \end{cases}$$



Réciproquement, les vecteurs de la base cartésienne s'écrivent dans la base cylindrique :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_x} = \cos\theta\ \overrightarrow{u_r} - \sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{u_y} = \sin\theta\ \overrightarrow{u_r} + \cos\theta\ \overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_z} \end{cases}$$



III.3 Un exemple de trajectoire

Exercice IX.7 – Description du mouvement de la voiture dans un parking hélicoïdal

Déterminer la trajectoire d'une voiture parcourant un parking hélicoïdal.

La trajectoire projetée sur le plan xOy est un cercle repéré par $r = R$. Le mouvement vertical implique que la voiture monte d'une hauteur h (appelée pas de l'hélice) à chaque tour donc $\Delta z = h$ quand $\Delta\theta = 2\pi$ d'où $z = \frac{\theta\, h}{2\pi}$. Finalement, $\overrightarrow{OM} = (R, 0, \frac{\theta\, h}{2\pi})$:

$$\boxed{r = R = cste \quad \text{et} \quad z = \frac{\theta\, h}{2\pi}}$$

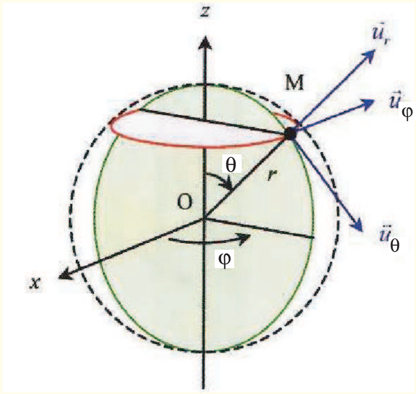
III.4 Coordonnées sphériques

Définition IX.18 – Repère et coordonnées sphériques

Dans le système des coordonnées sphériques, on repère le point M à partir d'un point O fixe dans $\mathcal{R}$, par la distance r entre le point O et M, la **longitude** φ, et la **colatitude** θ (la latitude correspond à $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$).

Les coordonnées du point M correspondent donc aux variables (r, θ, φ). Si on imagine M à la surface d'une sphère, la base sphérique associée $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ correspond à $\overrightarrow{u_r}$ dirigée selon la verticale, $\overrightarrow{u_\theta}$ dirigé vers le Sud et $\overrightarrow{u_\varphi}$ dirigé vers l'Est.

Il est important de noter que les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ ne sont pas ceux des coordonnées cylindriques !



Remarques : on retiendra les domaines de définition des différentes variables d'espace : $r \in [0; +\infty[$, $\theta \in [0; \pi]$ et $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Définition IX.19 – Vecteur-position et déplacement élémentaire

Dans le système de coordonnées sphériques, un point M repéré par les variables d'espace (r, θ, φ) est décrit par le vecteur-position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

et

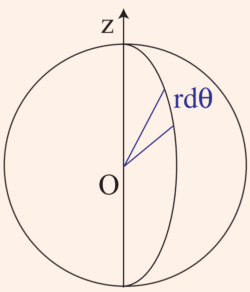
$$\boxed{\overrightarrow{d\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u}_\varphi}$$

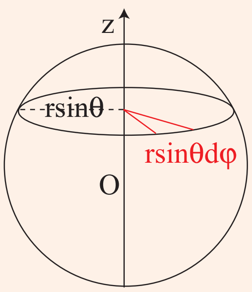
Remarque : les formules de la vitesse et de l'accélération ne sont pas à connaître. Il est pourtant parfois nécessaire de les employer lorsque la symétrie du problème est sphérique. On les donne à titre purement indicatif :

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Propriété IX.7 – Surfaces et volume élémentaires





$d^2S = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$

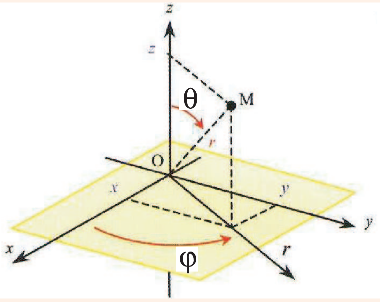
$d^2S = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ $\quad\boxed{d^3V = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}$

$d^2S = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

Propriété IX.8 – Equivalence cartésien / sphérique

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \\ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



IV Etude de mouvements simples

IV.1 Mouvement rectiligne uniforme

Définition IX.20 – Mouvement rectiligne et rectiligne uniforme (MRU)

- ⋆ **Un mouvement rectiligne est un mouvement dont la trajectoire est portée par une droite**.
- ⋆ Système de coordonnées adaptées : **coordonnées cartésiennes** dont un axe coïncide avec l'axe de la trajectoire rectiligne.
- ⋆ Un point est dit en mouvement rectiligne **uniforme** dans un référentiel $\mathcal{R}$ si son vecteur-vitesse instantanée dans $\mathcal{R}$ est constant au cours du temps $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{cte} = \overrightarrow{v_0}$.

Exercice IX.8 – Mouvement d'une voiture en ligne droite

Une voiture en mouvement rectiligne et uniforme se déplace à une vitesse $v_0 = 110$ km.h^{-1}. Quelle durée lui faut-il pour parcourir 500 m ?

IV.2 Mouvement rectiligne uniformément varié

Définition IX.21 – Mouvement rectiligne uniformément varié

- Un point est dit en mouvement **uniformément varié** dans un référentiel $\mathcal{R}$ si la norme de son accélération dans $\mathcal{R}$ est constante au cours du temps $||\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}}|| = cte$
- Le mouvement est dit :
  - **uniformément accéléré** si $\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} > 0}$

    Dans ce cas, l'accélération fait croître la vitesse en norme ($\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sont de même sens).
  - **uniformément décéléré** si $\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{v} < 0}$

    Dans ce cas, l'accélération est en sens opposé à la vitesse et la norme de la vitesse décroît ($\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sont de sens opposés).

Exercice IX.9 – Mouvement d'une voiture accélérant ligne droite

Un automobiliste roule sur une route rectiligne à la vitesse $v_1 = 90$ km.h^{-1} et atteint un panneau précisant que la vitesse sera limitée à 50 km.h^{-1} à 500 m plus loin. Quelle doit être la valeur de la décélération constante de la voiture pour atteindre 50 km.h^{-1} au bout de 10 s. Quelle distance aura alors été parcourue ?

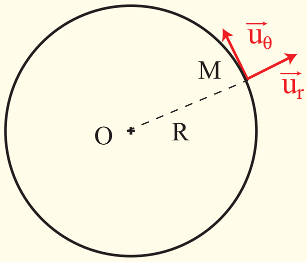
IV.3 Mouvement circulaire uniforme

Définition IX.22 – Mouvement circulaire

Un mouvement est dit circulaire si la trajectoire décrite par le point mobile M est un cercle.

Définition IX.23 – Mouvement circulaire uniforme (MCU)

Soit un point M dont la trajectoire dans un référentiel $\mathcal{R}$ est un **cercle** $\mathcal{C}$ de rayon R (Lune autour de la Terre, enfant dans un tourniquet, pierre dans une fronde...). Le mouvement circulaire est **uniforme** si $||\vec{v}|| = cste$.



Remarque : les coordonnées les plus adaptées sont les coordonnées cylindriques (ou polaires ici car le mouvement est plan) [a].

[a] En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM} = R(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y})$; $\vec{v} = R(-\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{u}_x + \dot{\theta}\cos\theta\vec{u}_y)$; $\vec{a} = R[-\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{u}_x - \dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{u}_y]$

Propriété IX.9 – Mouvement circulaire

- ⋆ Vecteur-position, vecteur-vitesse et vecteur-accélération :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = R\,\vec{u}_r}$$

$$\boxed{\vec{v}\,(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}} = R\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = R\omega\,\vec{u_\theta}}$$

$$\boxed{\vec{a}\,(M)_{/\mathcal{R}} = -R\omega^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} = -\frac{v^2}{R}\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}}$$

  où ω est la **vitesse angulaire** ou **pulsation du mouvement**.

- ⋆ La vitesse, dirigée suivant $\vec{u}_\theta$, est bien **tangente** à la trajectoire circulaire.

- ⋆ Mouvement circulaire uniforme :
  - uniforme si $||\vec{v}|| = cste$, c'est-à-dire si $\boxed{\omega = \dot{\theta} = Cte}$
  - La période du mouvement circulaire uniforme s'écrit : $\boxed{T = \frac{2\pi\,R}{v} = \frac{2\pi\,R}{R\,\omega} = \frac{2\pi}{\omega}}$
  - L'accélération du mouvement circulaire uniforme est centripète et vaut $\boxed{\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r}}$.

V Cinématique du solide

Nous ne nous sommes, jusqu'à présent, intéressés qu'à la mécanique du point matériel en négligeant tout volume associé au système étudié ainsi que toute rotation de ce système sur lui-même.

Nous allons à présent tenir compte de ces propriétés physiques dans notre description cinématique d'un système. Nous commencerons par étudier un système de N points matériels discrets puis, en passant à la limite continue la plus simple, nous aborderons l'étude du solide indéformable.

Définition IX.24 – Solide

On appelle ***solide*** tout système matériel indéformable, c'est-à-dire pour lequel, quels que soient A et B deux points du solide $(\mathcal{S})$, $||\overrightarrow{AB}||$ est constant.

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{S}^2 \quad , \quad ||\overrightarrow{AB}|| = cte}$$

Remarque : par définition, un solide n'est donc pas élastique mais parfaitement rigide. Il s'agit donc ici d'un cas idéal. La notion de solide est donc usuellement étendu par la suite au cas de systèmes déformables pour se rapprocher des situations réelles.

Propriété IX.10 – Mouvement d'un solide

Tout mouvement d'un solide peut se décomposer en un mouvement de translation (rectiligne, circulaire, elliptique, ...) et en un mouvement de rotation. Pour le décrire, on fait appel à ***six degrés de liberté*** :

- trois degrés de liberté de ***translation*** permettant de décrire le mouvement dans l'espace d'un point A quelconque du solide.
- trois degrés de liberté de ***rotation*** permettant de décrire le mouvement de tout autre point du solide relativement à celui du point A.

V.1 Cas d'un mouvement de translation pure

Propriété IX.11 – Translation d'un solide

Si un solide est en translation, tous les points du solide possèdent le même vecteur vitesse :

$$\boxed{\forall\ (A, B) \in \mathcal{S}^2, \quad \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(t)}$$

Ceci est valable quel que soit le type de translation (rectiligne, circulaire, elliptique,...) et quelle que soit la nature du mouvement de translation (uniforme, uniformément varié, quelconque).

Remarques :

⋆ La vitesse peut dépendre du temps.

⋆ La trajectoire est identique pour tous les points du solide.

⋆ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{cste}$.

Exemple IX.1 – Trois exemples de mouvement de translation

V.2 Cas d'un mouvement de rotation pure autour d'un axe fixe

Dans la suite, on note Δ l'axe autour duquel s'effectue la rotation du solide et on oriente cet axe par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$. On se place dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_\Delta}$.

Propriété IX.12 – Trajectoire cicrulaire

Tout point M_i du solide décrit une trajectoire circulaire :

- ⋆ de centre H_i, projeté orthogonal de M_i sur Δ,
- ⋆ de rayon : $\boxed{r_i = H_iM_i}$
- ⋆ de vitesse angulaire $\boxed{\omega_i = \dot{\theta}_i = \dot{\theta} = \omega}$ indépendante de M_i [a]

Ainsi, pour tout point M_i du solide :

$$\boxed{\vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = r_i\ \omega\ \overrightarrow{u_{\theta i}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{u_{ri}} = \dfrac{\overrightarrow{H_iM_i}}{H_iM_i} \\ \\ \overrightarrow{u_{\theta i}} \text{ tel que } \overrightarrow{u_{ri}} \wedge \overrightarrow{u_{\theta i}} = \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases}}$$

Il est donc naturellement plus aisé d'étudier le mouvement dans un repère cylindrique.

a. Cette propriété découle de l'invariance de $||\overrightarrow{AB}||$.