
SIGNAUX PHYSIQUES

PARTIE 1

CHARLES TUCHENDLER



MPSI 4 – LYCÉE SAINT-LOUIS

ANNÉE 2019/2020

Table des matières

CHAPITRE V	CIRCUITS LINÉAIRES DU 1 ^{ER} ORDRE EN RÉGIME TRANSITOIRE	1
Introduction		2
I D'un régime continu à un autre régime continu		4
I.1 Exemple : circuit RC série soumis à un échelon montant		4
I.2 Etude théorique des régimes continus		5
I.2.a Régime continu initial		5
I.2.b Régime continu final		6
I.3 Comportement des grandeurs électriques à $t = 0$		6
I.4 Premier bilan théorique		8
I.5 Etude expérimentale		8
I.5.a Source de tension et oscilloscope		8
I.5.b Montage complet du circuit		12
I.5.c Observation de la tension aux bornes du condensateur		13
I.5.d Observation de la tension aux bornes de la résistance		14
II Etude théorique complète du régime transitoire d'un circuit RC série		16
II.1 Modélisation idéale - Mise en équation du circuit - Evolution temporelle		16
II.2 Etude des solutions		19
II.2.a Tension aux bornes du condensateur		19
II.2.b Intensité du courant circulant dans le circuit		20
II.3 Interprétation de la charge du condensateur		21
II.4 Bilan énergétique		21
II.5 Prise en compte du caractère réel du GBF		22
II.6 Etude de la réponse d'un circuit RC série à un échelon descendant - <i>Régime libre</i>		23
III Portrait de phase		25
III.1 Définition		25
III.2 Cas d'un système d'ordre 1		25
III.3 Echelon montant		25
III.4 Echelon descendant		26
IV Etude de la réponse d'un circuit RL série		26

CHAPITRE V

CIRCUITS LINÉAIRES DU 1^{ER} ORDRE EN RÉGIME TRANSITOIRE

Sommaire

Introduction	2
I D'un régime continu à un autre régime continu	4
I.1 Exemple : circuit RC série soumis à un échelon montant	4
I.2 Etude théorique des régimes continus	5
I.2.a Régime continu initial	5
I.2.b Régime continu final	6
I.3 Comportement des grandeurs électriques à $t = 0$	6
I.4 Premier bilan théorique	8
I.5 Etude expérimentale	8
I.5.a Source de tension et oscilloscope	8
I.5.b Montage complet du circuit	12
I.5.c Observation de la tension aux bornes du condensateur	13
I.5.d Observation de la tension aux bornes de la résistance	14
II Etude théorique complète du régime transitoire d'un circuit RC série	16
II.1 Modélisation idéale - Mise en équation du circuit - Evolution temporelle	16
II.2 Etude des solutions	19
II.2.a Tension aux bornes du condensateur	19
II.2.b Intensité du courant circulant dans le circuit	20
II.3 Interprétation de la charge du condensateur	21
II.4 Bilan énergétique	21
II.5 Prise en compte du caractère réel du GBF	22
II.6 Etude de la réponse d'un circuit RC série à un échelon descendant - <i>Régime libre</i>	23
III Portrait de phase	25
III.1 Définition	25
III.2 Cas d'un système d'ordre 1	25
III.3 Echelon montant	25
III.4 Echelon descendant	26
IV Etude de la réponse d'un circuit RL série	26

Introduction

Rappel sur le régime continu

Dans le chapitre précédent, les circuits étudiés ne faisaient intervenir que des sources de tension ou de courant fonctionnant en *régime continu*, encore appelé *régime stationnaire*.

Propriété V.1 – Dipôles en régime continu

Dans ce type de régime, la variable temporelle, notée t , n'intervient pas et toutes les grandeurs du système sont constantes au cours du temps qu'il s'agisse :

★ de la f.é.m. d'une source de tension : $\forall t, \quad e(t) = E = cste$

★ du c.é.m. d'une source de courant : $\forall t, \quad \eta(t) = \eta = cste$

★ de l'intensité du courant circulant dans un dipôle : $\forall t, \quad i(t) = I = cste$

★ ou de la tension existant entre ses bornes : $\forall t, \quad u(t) = U = cste$.

Dans le cadre de l'étude des circuits en régime continu, nous avons notamment pu modéliser :

★ un condensateur idéal par un interrupteur ouvert :



★ une bobine par un fil (interrupteur fermé) :



Evolution entre deux régimes continus

Objectif V.1 – Comprendre comment un circuit évolue entre deux régimes continus

Nous allons maintenant nous intéresser à des circuits en évolution au cours du temps, et passant plus précisément d'un régime continu à un autre régime continu. Ce type de situations nous est familier puisqu'il correspond notamment à l'allumage ou à l'extinction d'une ampoule, au démarrage ou à l'arrêt d'un moteur...

Parmi les différents circuits en évolution entre deux régimes continus, nous allons tout particulièrement porter notre attention sur les circuits dits du *premier ordre* dont on donnera une définition générale dans ce chapitre.

Dans de tels circuits, la dépendance temporelle des relations caractéristiques concernant les condensateurs ou les bobines est explicite :

★ Pour les condensateurs, on a :

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

★ Pour les bobines, on a :

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Cette dépendance temporelle va jouer un rôle important car elle va influencer la nature et la durée du régime séparant les deux régimes continus et en particulier l'évolution des grandeurs électriques, intensité et tension.

Définition V.1 – Régime transitoire

On appelle **régime transitoire d'un circuit** l'intervalle de temps nécessaire à ce système pour passer d'un régime continu, pour lequel l'ensemble des grandeurs électriques peuvent être considérées constantes au cours du temps, à un autre régime continu.

Propriété V.2 – Validité de l'ARQS en régime transitoire

Les échelles de temps que nous rencontrerons dans l'étude des régimes transitoires nous permettront de toujours considérer que **l'ARQS reste valable** et qu'elle peut s'appliquer sans aucune difficulté à toutes les grandeurs instantanées, comme par exemple l'intensité $i(t)$ traversant un condensateur ou encore la tension $u(t)$ régnant à ses bornes.

La loi des branches est donc toujours valable pour tous les circuits en évolution que nous étudierons.

Définition V.2 – Notation des variables

Afin de distinguer aisément, lors de nos calculs ou sur nos schémas, les grandeurs constantes des variables en évolution au cours du temps, on prendra l'habitude d'utiliser :

- ★ des notations en **lettres minuscules pour les grandeurs dépendantes du temps** comme $i(t)$ ou $u(t)$ (on se passera par la suite de mentionner la dépendance en "t"),
- ★ des notations en **lettres majuscules pour les grandeurs stationnaires** (constantes au cours du temps) comme I ou U .

Afin d'introduire les concepts relatifs au régime transitoire, nous allons nous appuyer sur un circuit donné : **le circuit RC série**. Ce dernier ne possède pas de propriétés particulières vis-à-vis d'autres circuits du premier ordre. Il est cependant relativement simple à étudier et permet une compréhension rapide des principaux concepts à maîtriser.

Nous aborderons en fin de chapitre l'étude d'autres circuits du premier ordre avec l'objectif de mettre en application les résultats que nous aurons établis au cours de l'étude du circuit RC série.

I D'un régime continu à un autre régime continu

Dans un premier temps, nous allons nous consacrer à l'étude des régimes continus sur le circuit RC série.

I.1 Exemple : circuit RC série soumis à un échelon montant

On s'intéresse donc à un circuit RC, constitué d'un résistor idéal de résistance R placé en série avec un condensateur idéal de capacité C , l'ensemble étant alimenté par une source idéale de tension de f.é.m. $e(t)$.

Le schéma électrique correspondant est représenté sur la figure V.1 :

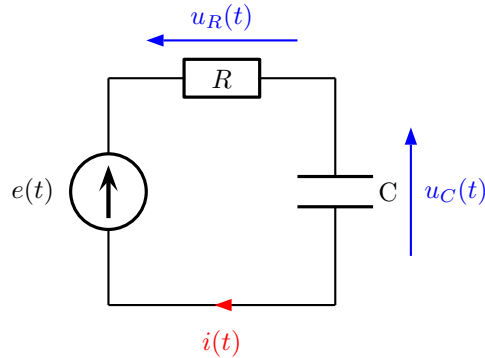


FIGURE V.1 – Schéma électrique d'un circuit RC série

Sur ce schéma, nous avons introduit les grandeurs électriques utiles : l'intensité $i(t)$ du courant électrique circulant dans l'unique maille du circuit, les tensions $u_R(t)$ et $u_C(t)$ aux bornes respectivement du résistor et du condensateur auxquelles nous nous intéresserons tout particulièrement.

Le circuit ne comportant qu'une maille, il ne présente pas de noeud. La seule loi de Kirchhoff à appliquer est donc la loi des mailles :

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

sachant que les relations caractéristiques s'écrivent en convention récepteur :

$$u_R(t) = Ri(t) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

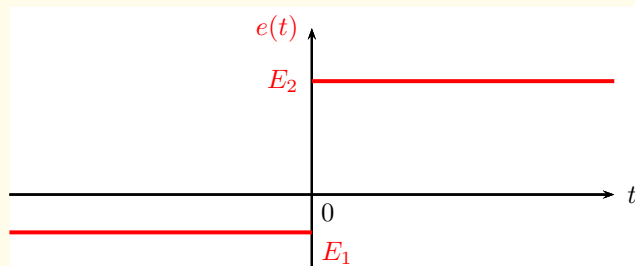
Dans le cadre de notre étude nous allons considérer le passage d'un régime permanent à un autre régime continu par la simple variation de la tension appliquée par la source idéale de tension au reste du circuit.

Définition V.3 – Échelon de tension montant

Nous allons plus précisément étudier la réponse du dipôle RC série soumis à un *échelon de tension montant* caractérisé par :

$$e(t) = \begin{cases} E_1 & \text{si } t < 0 \\ E_2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

où E_1 et E_2 sont des paramètres constants. Dans l'exemple ci-dessous, on a pris $E_1 < 0$ et $E_2 > 0$.



I.2 Etude théorique des régimes continus

Dans toute la suite du chapitre, on prendra pour l'échelon montant : $E_1 = 0$ et $E_2 = E$.

I.2.a Régime continu initial

On s'intéresse d'abord aux instants précédents le passage de la tension d'alimentation de 0 à E et on suppose qu'un régime continu est établi. Comme indiqué sur la figure V.2, $e(t) = 0$ depuis suffisamment longtemps pour que toutes les grandeurs électriques puissent être considérées comme constantes.

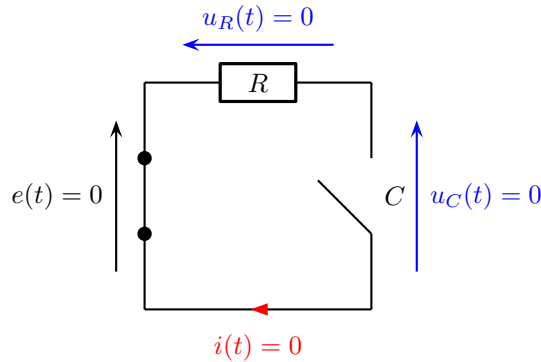


FIGURE V.2 – Circuit modélisé pour le régime continu initial

Concernant $i(t)$, la relation caractéristique du condensateur permet de modéliser ce dernier par un interrupteur ouvert et donc d'établir directement que pour ce régime continu $i(t) = 0$. On peut donc en déduire que $u_R(t) = 0$.

Propriété V.3 – La tension aux bornes d'un résistor idéal peut servir d'image du courant

D'après la loi d'Ohm pour le résistor idéal $u_R(t) = Ri(t)$, les évolutions du courant dans la branche de circuit où se trouve R et la tension aux bornes de ce dipôle sont identiques au coefficient R près. On dit alors que la tension $u_R(t)$ est une **image du courant**.

Concernant la tension $u_C(t)$ l'application de la loi des mailles sur le circuit de la figure V.2 permet d'établir que $u_C(t) = 0$ pendant ce régime. On peut donc représenter l'ensemble de ces grandeurs en fonction du temps comme indiqué sur la figure V.3.

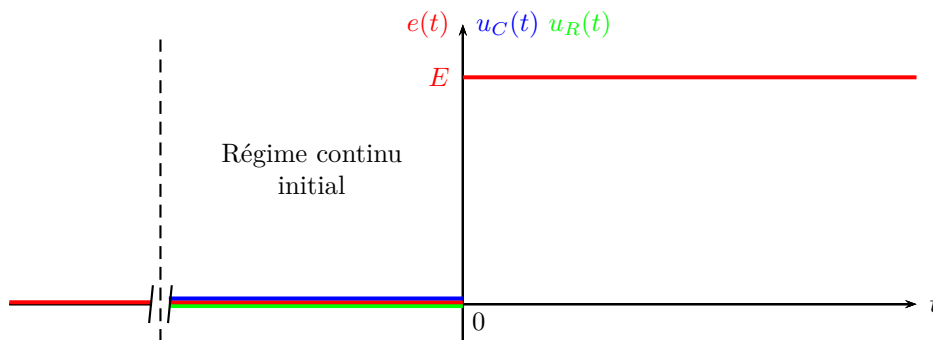


FIGURE V.3 – Grandeurs électriques au cours du régime continu initial

Remarque : même si le condensateur était précédemment chargé, en attendant suffisamment longtemps, les charges accumulées sur les armatures auront suffisamment de temps pour pouvoir se rééquilibrer au travers de la résistance de fuite du condensateur et dissiper ainsi l'énergie électrique stockée dans ce dernier.

I.2.b Régime continu final

On s'intéresse maintenant aux instants très éloignés du passage de la tension d'alimentation de 0 à E , ce qui revient à considérer que $t \rightarrow \infty$, et on suppose qu'un régime continu est établi dans cet intervalle temporel. Comme indiqué sur la figure V.4, $e(t) = E$ depuis suffisamment longtemps pour que toutes les grandeurs électriques puissent être considérées comme constantes.

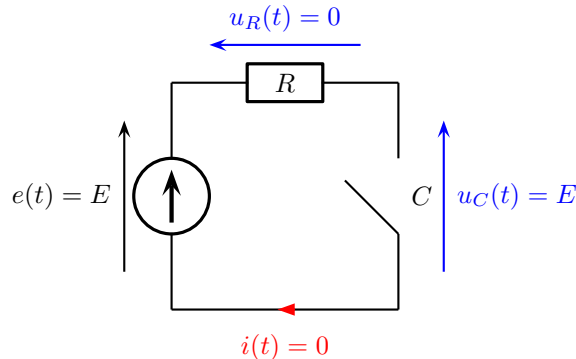


FIGURE V.4 – Circuit modélisé pour le régime continu final

Concernant $i(t)$, la relation caractéristique du condensateur permet de modéliser ce dernier par un interrupteur ouvert et donc d'établir directement que pour ce régime continu $i(t) = 0$. On peut donc à nouveau en déduire que $u_R(t) = 0$.

Concernant la tension $u_C(t)$ l'application de la loi des mailles sur le circuit de la figure V.4 permet d'établir que $u_C(t) = E$ pendant ce régime. On peut donc représenter l'ensemble de ces grandeurs en fonction du temps comme indiqué sur la figure V.5.

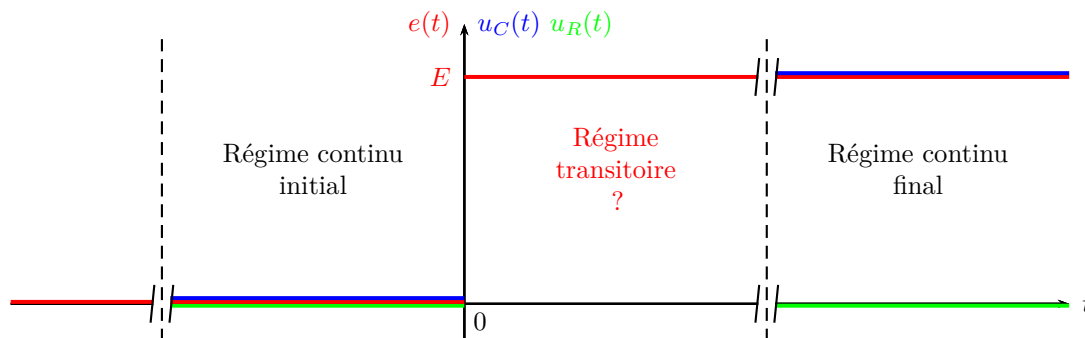


FIGURE V.5 – Grandeurs électriques au cours du régime continu initial

Remarque : même si le condensateur se décharge à tout instant légèrement à travers sa résistance de fuite en dissipant de l'énergie électrique, il est constamment rechargé grâce à l'énergie électrique fournie par la source de tension idéale. Un équilibre dynamique se crée. On peut donc bien prévoir que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_C(t) = E$$

La figure V.5 ne permet pas de préciser quand cesse le régime transitoire. On sait cependant que celui-ci débute à $t = 0$. Avant d'étudier ce régime transitoire aussi bien du point de vue expérimental que du point de vue théorique, nous allons donc nous intéresser à ce qui se passe au moment du basculement de la tension d'alimentation, c'est-à-dire en $t = 0$.

I.3 Comportement des grandeurs électriques à $t = 0$

Rappelons tout d'abord que pour l'échelon montant considéré, on a :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E > 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

La tension $e(t)$ est donc une fonction mathématique **discontinue** à $t = 0$.

Définition V.4 – Notation au moment de l'échelon

Pour distinguer ce qui se passe immédiatement avant de ce qui se passe immédiatement après le basculement de la tension d'alimentation, nous allons définir les notations suivantes :

- ★ L'instant immédiatement avant le basculement est noté $t = 0^-$.
- ★ L'instant immédiatement après le basculement est noté $t = 0^+$.

Ainsi, la tension d'alimentation vérifie :

$$e(t = 0^-) = 0 \quad ; \quad e(t = 0^+) = E$$

Que valent chacune des grandeurs électriques utiles $i(t)$, $u_R(t)$ et $u_C(t)$ à $t = 0^-$ et $t = 0^+$?

Exercice V.1 – Étude des grandeurs électriques au moment du basculement

- ★ Etude à $t = 0^-$: cette étude a déjà été menée puisque $t = 0^-$ est le dernier instant du régime continu initial. On a donc déjà montré que :

$$i(t = 0^-) = 0$$

;

$$u_R(t = 0^-) = 0$$

et

$$u_C(t = 0^-) = 0$$

- ★ Etude de $u_C(t = 0^+)$: pour déterminer ces valeurs, et compte tenu de la discontinuité mathématique de $e(t)$, un étudiant doit immédiatement penser à se servir de la propriété de la charge portée par les armatures et de la tension d'un condensateur idéal : **ces deux grandeurs sont des fonctions continues mathématiquement du temps.**

On peut donc tout de suite affirmer que :

$$u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$$

et

$$q_C(t = 0^-) = q_C(t = 0^+)$$

et comme on vient de rappeler que :

$$u_C(t = 0^-) = 0$$

on peut conclure que :

$$u_C(t = 0^+) = 0$$

- ★ Etude de $u_R(t = 0^+)$ et $i(t = 0^+)$: ce cas est plus complexe à résoudre car on ne sait rien, a priori, de la continuité mathématique vérifiée ou non de ces grandeurs. Il faut donc représenter le circuit électrique à $t = 0^+$ pour y avoir accès.

Voici ce circuit :

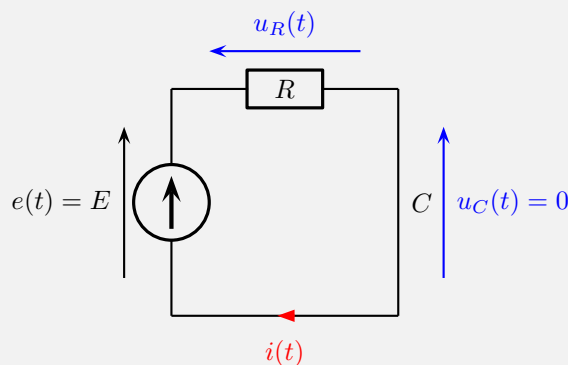


FIGURE V.6 – Circuit modélisé à $t = 0^+$

Exercice V.1 – Étude des grandeurs électriques au moment du basculement (suite)

Puisque $u_C(t = 0^+) = 0$, le condensateur est équivalent à un simple fil à cet instant. L'application de la loi des mailles fournit immédiatement :

$$u_R(t = 0^+) = E$$

et d'après la loi d'Ohm, on déduit aisément que :

$$i(t = 0^+) = \frac{E}{R}$$

I.4 Premier bilan théorique

Méthode V.1 – Tableau récapitulatif des résultats

Il sera très souvent utile lors d'une épreuve de présenter sous la forme d'un tableau l'ensemble des résultats obtenus lors de l'étude des régimes continus et de la continuité mathématique des grandeurs à l'origine des temps.

Dans le cas du circuit RC série que nous avons étudié, ce tableau prend la forme suivante :

Instant \ Grandeurs	$t = 0^-$	$t = 0^+$	$t \rightarrow \infty$
Tension $e(t)$	0	E	E
Intensité $i(t)$	0	$\frac{E}{R}$	0
Tension $u_R(t)$	0	E	0
Tension $u_C(t)$	0	0	E

Tableau V.1 – Tableau récapitulatif des valeurs prises par les principales grandeurs électriques au cours de l'évolution du circuit RC série avant l'étude du régime transitoire.

I.5 Etude expérimentale

I.5.a Source de tension et oscilloscope

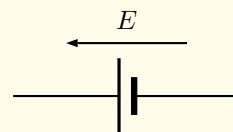
Pour vérifier nos résultats et pour observer le régime transitoire, nous allons maintenant étudier le circuit RC série du point de vue expérimental. Naturellement, la première question qui se pose est : quels composants choisir ?

Quelle source choisir ? Plusieurs dipôles électriques peuvent être envisagés :

- * une pile,
- * un générateur basses fréquences (G.B.F.),
- * ...

Définition V.5 – Pile électrique

Une pile est usuellement représentée de la manière ci-contre où la borne positive est représentée par une barre perpendiculaire à la branche plus longue que la barre correspondant à la borne négative.



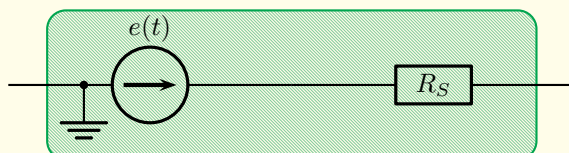
Remarque : pour réaliser un échelon de tension montant, il est nécessaire d'associer à la pile un interrupteur qu'il faudra manuellement fermer pour réaliser l'échelon. Ceci pose un problème pratique s'il faut répéter les mesures pour différentes valeurs de paramètres.

En outre, il n'est pas aisé de modifier la tension d'alimentation. Il s'agit donc d'un système peu versatile.

Définition V.6 – Générateur de signaux basses fréquences (G.B.F.)

Pour s'affranchir des difficultés évoquées dans le cas de la pile, on s'intéresse au GBF ($f_{max} < 10$ MHz) délivrant notamment et principalement des signaux périodiques : sinusoïdaux, triangulaires, créneaux.

Le modèle électrique d'un GBF est le suivant :



avec $e(t)$ un signal périodique d'amplitude et de fréquence ajustables et où :

$$R_S = 50 \, \Omega$$

Remarque : le GBF possède une masse bien définie qui impose un potentiel nul à l'une de ses bornes et qui servira de potentiel de référence pour tout le circuit dans lequel ce GBF sera connecté. Le schéma électrique réel est donc le suivant :

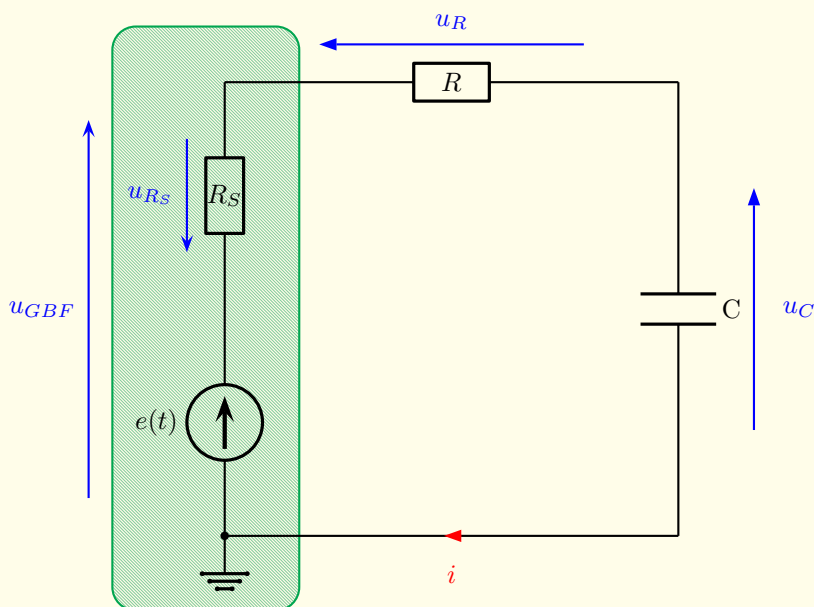


FIGURE V.7 – Schéma du circuit avec une source réelle de tension comme le GBF.

Expérience V.1 – Branchements du GBF

Pour réaliser une expérience d'électrocinétique, il est nécessaire de commencer par régler correctement les paramètres de la source d'alimentation, c'est-à-dire ici du GBF. On réalise donc dans un premier temps le circuit suivant dans lequel on branche simplement le GBF sur un oscilloscope numérique, c'est-à-dire un voltmètre :

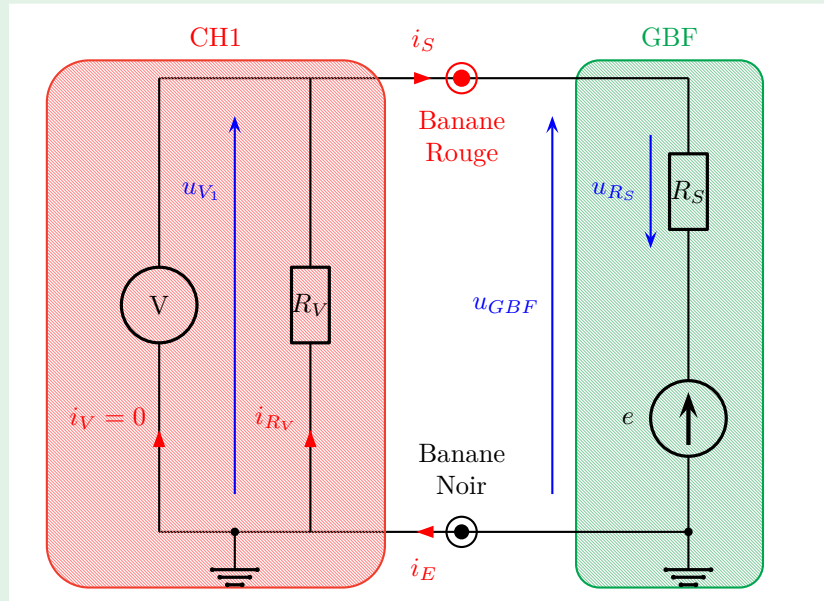


FIGURE V.8 – Branchement du GBF à l'oscilloscope.

Propriété V.4 – Branchements du GBF

L'oscilloscope peut être modélisé par l'association en parallèle d'un voltmètre idéal et d'un résistor de résistance :

$$R_V = 1 \text{ M}\Omega$$

On y connecte le GBF sur la voie "CH1" (voie 1) grâce à des câbles de connexions de type BNC (côté oscilloscope) et banane (côté GBF) en respectant, pour ce dernier type le code couleur imposé par la connexion à la masse de l'oscilloscope (câble noir).

La tension u_V mesurée à l'oscilloscope est égale à la tension u_{GBF} aux bornes du GBF, mais celle-ci n'est pas égale à la tension e de la source idéale dont on peut régler la valeur sur le GBF.

Exercice V.2 – Erreur d'insertion

Question :

Montrer qu'avec les valeurs de R_S et R_V fournies, l'erreur de mesure due au caractère non-idéal est faible. On attend une expression littérale qui permettra de donner un critère testant l'influence de la résistance R_V , aussi appelée *résistance d'entrée*, sur le comportement du GBF.

Démonstration :

Puisque le voltmètre représenté sur la figure est idéal, il n'y a aucun courant qui le traverse. On reconnaît donc un pont diviseur de tension qui donne directement :

$$u_{V1} = \frac{R_V}{R_V + R_S} e$$

Exercice V.2 – Erreur d'insertion (suite)

On obtiendra une mesure fidèle de e à condition que $\frac{R_V}{R_V + R_S} \simeq 1$ ce qui revient à :

$$R_V \gg R_S$$

Conclusion :

Pour que l'influence de l'oscilloscope soit négligeable, il suffit que sa résistance d'entrée soit beaucoup plus grande que la résistance de sortie du GBF.

Plus généralement, pour que l'influence de l'oscilloscope soit faible, il faut que R_V soit nettement plus grande que les autres résistances présentes dans le circuit.

Remarque : cette condition entraîne aussi $i_{R_V} \simeq 0$. On pourra donc considérer qu'aucun courant ne circule dans les branches arrivant à ou sortant de l'oscilloscope : $i_E = i_S = 0$.

Les branchements du GBF à l'oscilloscope étant maintenant réalisés, nous allons à présent régler ce GBF de manière à ce qu'il délivre le signal souhaité, ici un créneau, à la bonne fréquence, possédant la bonne amplitude, passant bien de 0 à E comme indiqué plus haut et étant correctement synchronisé à l'oscilloscope.

Méthode V.2 – Réglages du GBF et de l'oscilloscope

Prenons l'exemple d'un signal créneau compris entre 0 et $E = 4$ V. On rappelle que :

- ★ Les axes de l'écran de l'oscilloscope ne correspondent à rien. Il s'agit simplement d'un guide pour l'oeil permettant de centrer le signal étudié.
- ★ On ajuste le niveau de déclenchement à l'aide du bouton "Level" du bloc "Trigger" de l'oscilloscope pour synchroniser le signal convenablement et ce, après avoir choisi dans le menu "Trigger" la bonne source de synchronisation.
- ★ On optimise enfin le réglages des échelles et le centrage sur l'écran.
- ★ Concernant le GBF, l'amplitude est réglable par l'intermédiaire d'un bouton "Level" et correspond ici à la variable U_0 telle que :

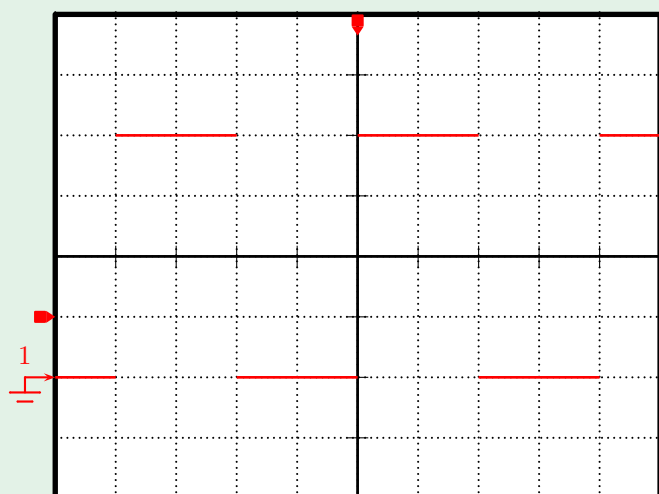
$$u_{GBF} = \begin{cases} U_0 & \text{si } nT \leq t \leq nT + \frac{T}{2} \\ -U_0 & \text{si } nT + \frac{T}{2} \leq t \leq (n+1)T \end{cases} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Elle ne doit pas être confondue avec l'amplitude crête-à-crête qui correspond à la différence de potentiel $V_{\max} - V_{\min}$. Ici, l'amplitude crête à crête vaut donc $2U_0$ on souhaite naturellement qu'elle soit égale à E . On a donc :

$$U_0 = \frac{E}{2} = 2 \text{ V}$$

- ★ La fréquence est ajustée elle aussi sur la face avant du GBF.
- ★ Pour s'assurer que le signal soit bien compris entre 0 et E , on applique une tension de décalage par l'intermédiaire du GBF, appelée "Offset".
- ★ On ajuste enfin la position du signal sur l'écran en manipulant le bouton de la voie 1 de façon à observer les phénomènes étudiés dans les meilleures conditions.
- ★ Le choix de la base de temps s'effectue au moyen d'un bouton dans le menu "Horizontal". L'objectif est d'afficher quelques périodes.
- ★ Les choix de sensibilité se font au moyen d'un bouton dans le menu "Vertical". L'objectif est d'observer l'intégralité du signal sur la plus grande partie de l'écran possible.

Expérience V.2 – Visualisation du signal du GBF à l'oscilloscope



CH1 :
Sensibilité :/DIV
Mode couplage : AC - DC - GND

CH2 :
Sensibilité :/DIV
Mode couplage : AC - DC - GND

Synchronisation :
Source :
Base de temps :/DIV
Tension seuil :
Mode :

I.5.b Montage complet du circuit

On réalise maintenant le montage de l'ensemble du circuit. On va donc compléter la figure V.8 en indiquant les branchements permettant d'observer à l'oscilloscope la tension aux bornes du condensateur.

On obtient la figure V.9 où l'on a pris soin de connecter les bornes de ce condensateur aux bornes de la voie 2 ("CH2") en portant une attention particulière au sens de branchement pour éviter tout problème de masse (il ne peut y avoir qu'un seul potentiel de référence sur le circuit!) et on remarque qu'on a bien $U_{V_3} = u_C$.

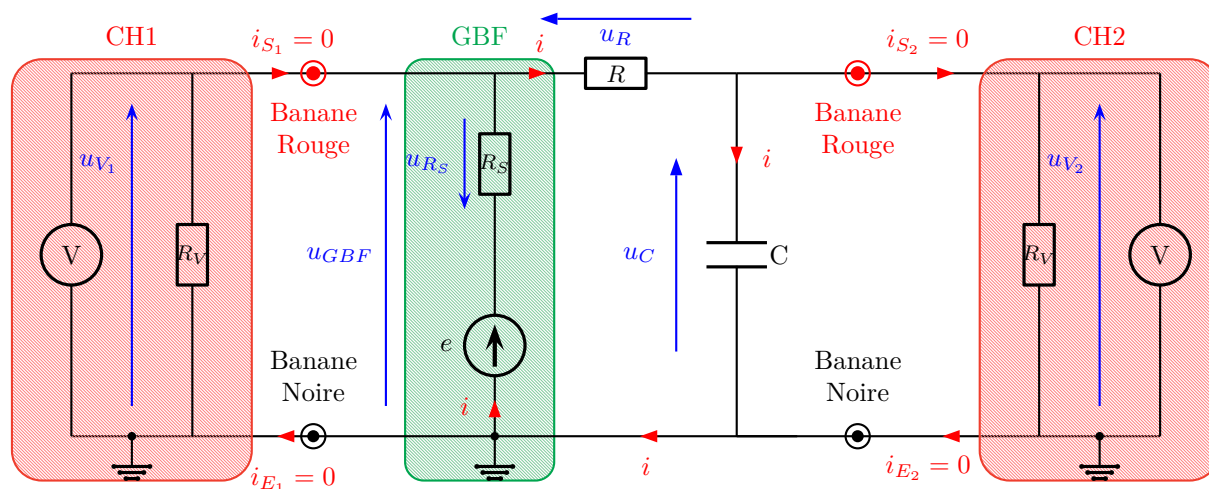


FIGURE V.9 – *Branchements complet du circuit.*

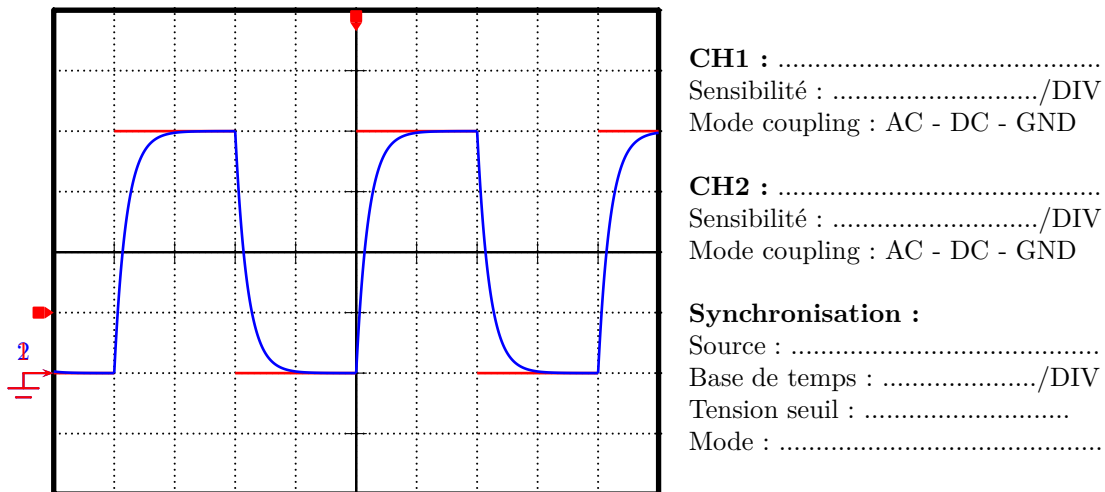
Dans la suite, on prendra les valeurs arbitraires suivantes :

$$R = 5 \text{ k}\Omega \quad C = 6 \text{ nF} \quad ; \quad E = 4 \text{ V}$$

L'ensemble des mesures sera effectué à l'aide des outils de curseurs de l'oscilloscope que l'on sera amené à utiliser en travaux pratiques.

Notre objectif est maintenant d'observer avec pertinence ces signaux et de relever leurs principales caractéristiques.

I.5.c Observation de la tension aux bornes du condensateur

FIGURE V.10 – Observation de $e(t)$ en rouge et $u_C(t)$ en bleu.Expérience V.3 – Analyse des signaux $e(t)$ et $u_C(t)$ acquis à l'oscilloscope

Sur la figure V.10, on a représenté les signaux obtenus et ceux-ci indiquent que :

- ★ $e(t)$ a bien la forme souhaitée : la modélisation idéale de la source et de l'oscilloscope semble justifiée.
- ★ $u_C(t)$ est bien une fonction mathématique continue du temps : $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$.
- ★ On observe bien un régime transitoire reliant les deux régimes continus :
 $u_C(t < 0) = 0$ et $u_C(t \rightarrow \infty) = E$.
- ★ La durée du régime transitoire peut être estimée grâce à une lecture à l'écran de l'oscilloscope : elle semble être de l'ordre de 100 à 200 μs .
Pour mesurer plus précisément cette durée, on met en oeuvre une méthode de mesure dont on justifiera a posteriori l'origine : on mesure la durée τ que le signal $u_C(t)$ met pour atteindre $0,63 \times E$ à partir de l'instant où $e(t)$ bascule de 0 à E . Expérimentalement, on obtient une valeur $\tau \simeq 30 \mu\text{s}$.
- ★ La valeur de la résistance comme celle de la capacité influent sur la durée du régime transitoire : plus R ou C sont élevées, plus le régime transitoire est long. Pour deux jeux de valeurs (R_1, C_1) et (R_2, C_2) de R et C tels que $R_1 C_1 = R_2 C_2$ on mesure une valeur identique pour $\tau \simeq 30 \mu\text{s}$. On peut faire l'hypothèse que $\tau = RC$.

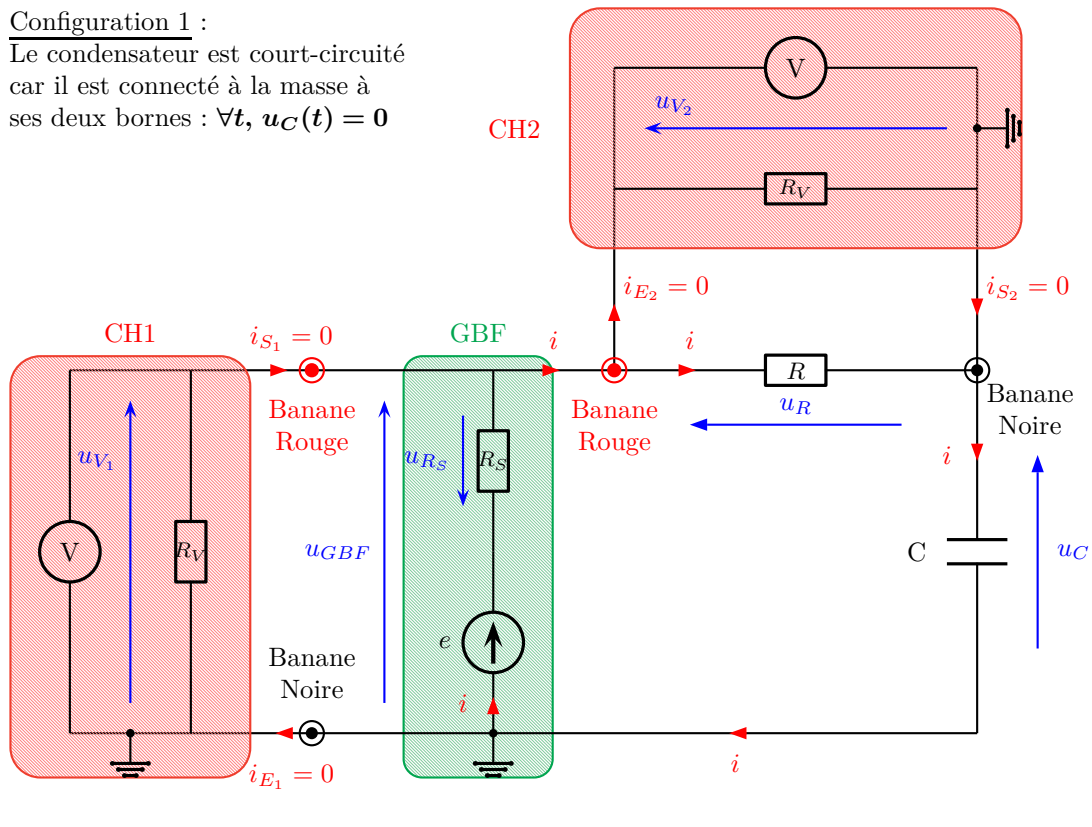
Remarque : si l'on diminue R de façon trop importante, on note une déformation au niveau du signal mesuré à l'oscilloscope pour $e(t)$. Ce phénomène ne se produit pas si c'est C que l'on fait varier.

Intéressons nous maintenant à la tension aux bornes de la résistance R pour étudier l'évolution temporelle du courant dans le circuit. Pour observer cette tension, il est nécessaire de modifier le montage électrique en branchant la voie 2 de l'oscilloscope en parallèle de cette résistance R .

I.5.d Observation de la tension aux bornes de la résistance

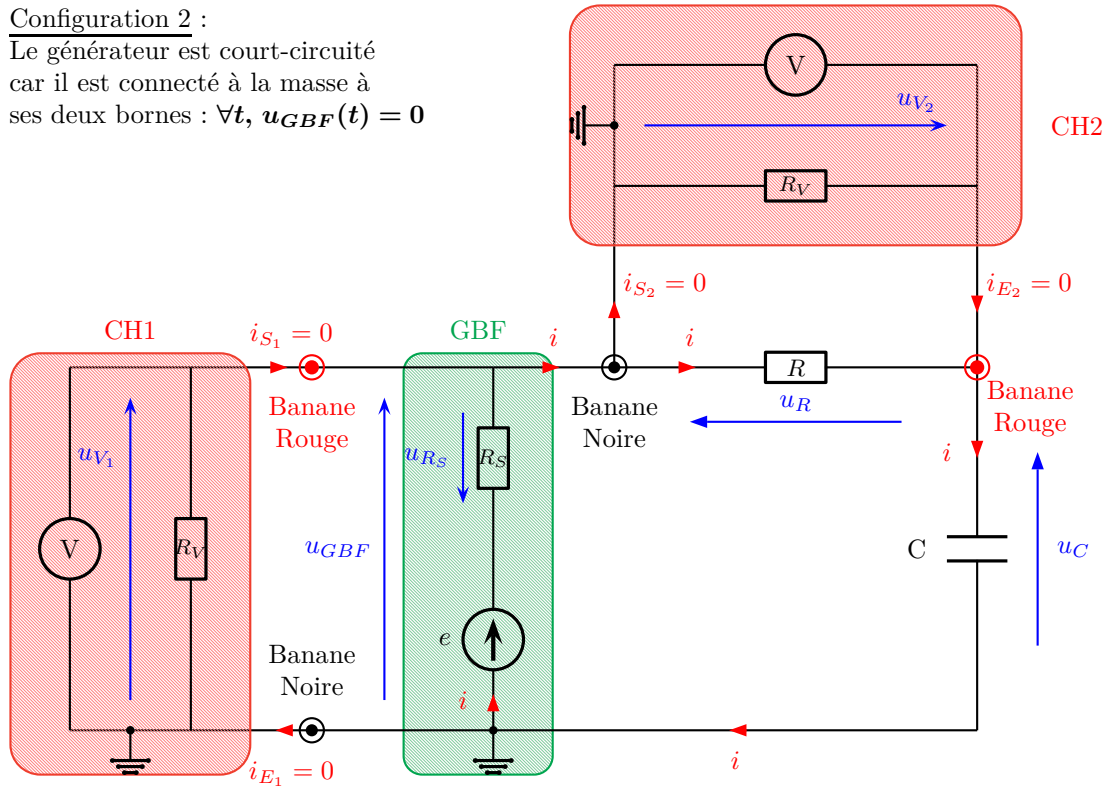
Configuration 1 :

Le condensateur est court-circuité car il est connecté à la masse à ses deux bornes : $\forall t, u_C(t) = 0$



Configuration 2 :

Le générateur est court-circuité car il est connecté à la masse à ses deux bornes : $\forall t, u_{GB}(t) = 0$



Propriété V.5 – Attention aux branchements!!!

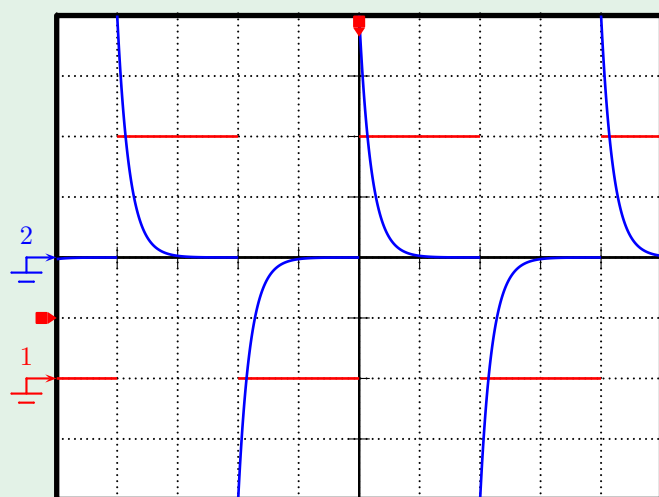
Les figures précédentes montrent que la mesure de $u_R(t)$ nécessite une modification du circuit et un échange des positions de R et de C . Sans cela, un problème de masse apparaît car au moins l'un des dipôles du montage se retrouve court-circuité.

Remarque : on retiendra que tout branchement, aussi simple soit-il influe sur le montage et modifie les mesures effectuées.

Expérience V.4 – Analyse du signal $u_R(t)$ et donc de $i(t)$ acquis à l'oscilloscope

Sur la figure V.10, on a représenté les signaux obtenus et ceux-ci indiquent que :

- ★ $u_R(t)$ est bien une fonction mathématique discontinue du temps : $u_R(t = 0^-) \neq u_R(t = 0^+) = E$.
- ★ La durée du régime transitoire peut être estimée grâce à une lecture à l'écran de l'oscilloscope : elle semble être de l'ordre de 100 à 200 μs comme pour $u_C(t)$.
On mesure la durée τ que le signal $u_R(t)$ met pour atteindre $0,37 \times E$ à partir de l'instant où $e(t)$ bascule de 0 à E . Expérimentalement, on obtient une valeur $\tau \simeq 30 \mu\text{s}$.
- ★ La valeur de la résistance comme celle de la capacité influent sur la durée du régime transitoire : plus R ou C sont élevées, plus le régime transitoire est long. Pour deux jeux de valeurs (R_1, C_1) et (R_2, C_2) de R et C tels que $R_1 C_1 = R_2 C_2$ on mesure une valeur identique pour $\tau \simeq 30 \mu\text{s}$. On peut faire l'hypothèse que $\tau = RC$.



CH1 :
Sensibilité :/DIV
Mode coupling : AC - DC - GND

CH2 :
Sensibilité :/DIV
Mode coupling : AC - DC - GND

Synchronisation :
Source :
Base de temps :/DIV
Tension seuil :
Mode :

FIGURE V.11 – Observation de $e(t)$ en rouge et $u_R(t)$ en bleu.

Nos observations étant à présent correctement rassemblées, nous allons utiliser les connaissances acquises dans les chapitres précédents du cours de physique pour décrire à l'aide d'un modèle la situation expérimentale que nous avons étudiée.

Nous confronterons nos mesures aux valeurs prévues par ce modèle afin de le critiquer.

II Etude théorique complète du régime transitoire d'un circuit RC série

II.1 Modélisation idéale - Mise en équation du circuit - Evolution temporelle

Méthode V.3 – Mise en équation type du problème - Equation vérifiée par $u_C(t)$

On considère dans cette partie que chacun des composants intervenant dans le circuit est idéal. On reprend donc ici le schéma de la figure V.1 que l'on reproduit ci-dessous.

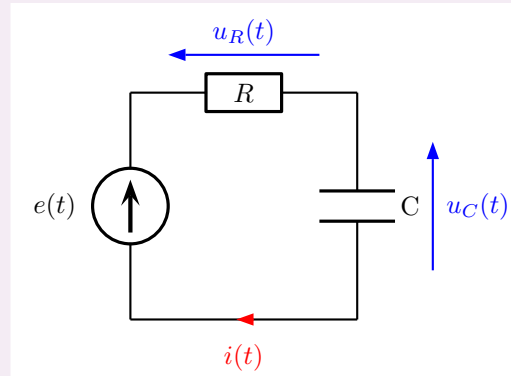


FIGURE V.12 – Schéma électrique du circuit RC série

L'application de la loi des mailles et de la loi d'Ohm donnent :

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) = E = Ri(t) + u_C(t)$$

qui, compte tenu de l'équation caractéristique du condensateur, se met sous la forme :

$$E = RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire à coefficient constant (EDLCC) du premier ordre que l'on met traditionnellement sous la forme suivante :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = \frac{E}{RC} \quad (\text{V.1})$$

Définition V.7 – Temps caractéristique

Dans une EDLCC du premier ordre vérifiée par le signal $s(t)$ et mise sous la forme :

$$\frac{ds(t)}{dt} + \frac{s(t)}{\tau} = f(t)$$

avec $f(t)$ une fonction quelconque du temps, on appelle *temps caractéristique du régime transitoire* le paramètre constant τ , qui dans le cas d'un circuit RC série s'écrit : $\tau = RC$.

Remarque : une analyse dimensionnelle permet de retrouver rapidement qu'on a bien : $[\tau] = T$, c'est-à-dire que τ est homogène à un temps.

Démonstration V.1 – Equations différentielles vérifiées par les autres grandeurs électriques

On peut immédiatement obtenir l'équation différentielle vérifiée par la charge q portée par le condensateur C

Démonstration V.1 – Equations différentielles vérifiées par les autres grandeurs électriques (suite)

puisque :

$$q(t) = Cu_C(t) \quad \text{soit} \quad u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

On a en effet :

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{E}{R} \quad (\text{V.2})$$

On peut, en outre, établir l'équation différentielle vérifiée par le courant électrique d'intensité $i(t)$. L'équation (V.2) équivaut en effet à :

$$i(t) + \frac{1}{RC} \int i(t) dt = \frac{E}{R}$$

Ainsi, en la dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{RC} = 0 \quad (\text{V.3})$$

Enfin, par application de la loi d'Ohm $u_R(t) = Ri(t)$, on obtient :

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{u_R(t)}{RC} = 0 \quad (\text{V.4})$$

Propriété V.6 – Caractérisation d'un circuit linéaire du premier ordre

Les équations (V.1), (V.2), (V.3) et (V.4) sont toutes de même type : il s'agit d'EDLCC du premier ordre. Leurs équations homogènes se mettent sous une même forme, appelée *forme canonique*, telle que :

$$\frac{ds_h(t)}{dt} + \frac{s_h(t)}{\tau} = 0 \quad (\text{V.5})$$

où $s_h(t) \in \{u_C(t), q(t), i(t), u_R(t)\}$ et où le temps caractéristique τ est une constante ne dépendant que des grandeurs caractérisant les dipôles.

Démonstration V.2 – Recherche des solutions - Evolution temporelle des grandeurs électriques

Dans le cas du circuit RC série, on a donc établi que :

$$\tau = RC$$

Les équations différentielles homogènes étant identiques, les solutions associées sont toutes de la même forme :

$$s_h(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{V.6})$$

où K est une constante appelée *constante d'intégration*.

Les solutions générales des équations avec second membre ne différeront les unes des autres que par la valeur

Démonstration V.2 – Recherche des solutions - Evolution temporelle des grandeurs électriques (suite)

de la solution particulière, ici constante, ainsi que par la valeur de la constante d'intégration :

$$s(t) = s_h(t) + s_p = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + s_p \quad (\text{V.7})$$

s_p se détermine facilement en cherchant une fonction constante au cours du temps :

$$u_{C_p} = E \quad ; \quad q_p = CE \quad ; \quad i_p = 0 \quad ; \quad u_{R_p} = 0 \quad (\text{V.8})$$

Remarque : pour chacune des grandeurs électriques, la solution particulière correspond à la valeur atteinte à la fin du régime transitoire, c'est-à-dire à sa valeur lors du régime permanent final.

On détermine les différentes constantes d'intégration K à partir de l'état connu du système à un instant donné du régime transitoire. Nous avons notamment déjà établi les conditions initiales à $t = 0^+$:

$$u_C(t = 0^+) = 0 \quad ; \quad q(t = 0^+) = 0 \quad ; \quad i(t = 0^+) = \frac{E}{R} \quad ; \quad u_R(t = 0^+) = E$$

ce qui entraîne :

$$K_C = -E \quad ; \quad K_q = -CE \quad ; \quad K_i = \frac{E}{R} \quad ; \quad K_R = E$$

On obtient finalement les solutions aux équations (V.1), (V.2), (V.3) et (V.4) :

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \\ q(t) &= CE \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \\ i(t) &= \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ u_R(t) &= E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Nous allons à présent étudier les solutions obtenues et comparer les résultats de notre étude théorique aux observations effectuées à la partie I.5.c.

On se limitera à $u_C(t)$ et $i(t)$ puisque $q(t)$ et $u_R(t)$ se déduisent aisément des deux premières.

II.2 Etude des solutions

II.2.a Tension aux bornes du condensateur

On a représenté ci-dessous la fonction $u_C(t)$ solution de l'EDLCC correspondante pour le régime transitoire.

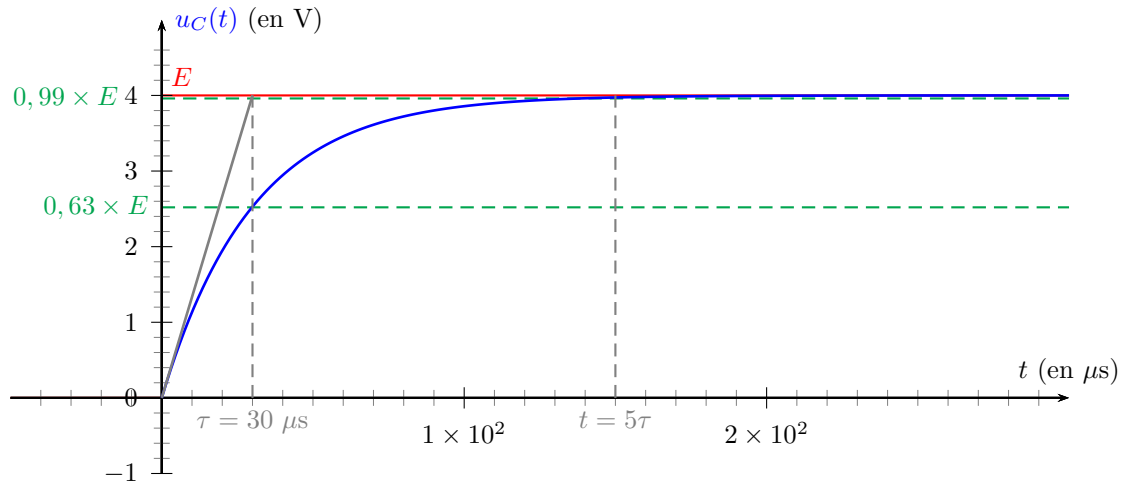


FIGURE V.13 – Evolution temporelle théorique de $u_C(t)$ pour $R = 5 \text{ k}\Omega$, $C = 6 \text{ nF}$ et $E = 4 \text{ V}$ dans le cadre d'une modélisation idéale.

Propriété V.7 – Observation expérimentale de la tension aux bornes du condensateur

On peut notamment observer que :

- ★ $u_C(t = 0^+) = 0$, il y a donc bien continuité de la tension en $t = 0$.
- ★ $u_C(t \rightarrow \infty) = E$, donc E est bien la valeur asymptotique atteinte si $e(t)$ reste suffisamment longtemps égal à E .
- ★ $u_C(t = \tau) = E(1 - e^{-1})$, soit environ 63% de E .
 τ est une constante de temps caractéristique de la charge du condensateur.
- ★ La valeur asymptotique, et donc le régime continu, sont presque atteints au bout de quelques τ . En effet :

$$\text{Pour } t = 5\tau \text{ on a } |E - u_C| < \frac{E}{100} \quad \text{et pour } t = 7\tau \text{ on a } |E - u_C| < \frac{E}{1000}$$

- ★ Pour les valeurs théoriques choisies, on a $\tau = 30 \mu\text{s}$ (à comparer à la mesure utilisant des curseurs) et $5\tau = 150 \mu\text{s}$ (à comparer à l'estimation à l'oeil de la durée du transitoire).
 Ces deux valeurs sont tout à fait en accord avec les relevés expérimentaux que nous avons effectués plus tôt aux incertitudes-type de mesure près.
- ★ La pente à l'origine permet d'estimer graphiquement τ :

$$\left(\frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t=0} = \left(E \times \frac{1}{\tau} \times \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)_{t=0} = \frac{E}{\tau}$$

La tangente est une droite affine d'équation $u(t) = \frac{E}{\tau}t$, et coupe donc l'asymptote ($u = E$) en $t = \tau$.

II.2.b Intensité du courant circulant dans le circuit

On a représenté ci-dessous la fonction $i(t)$ solution de l'EDLCC correspondante pour le régime transitoire.

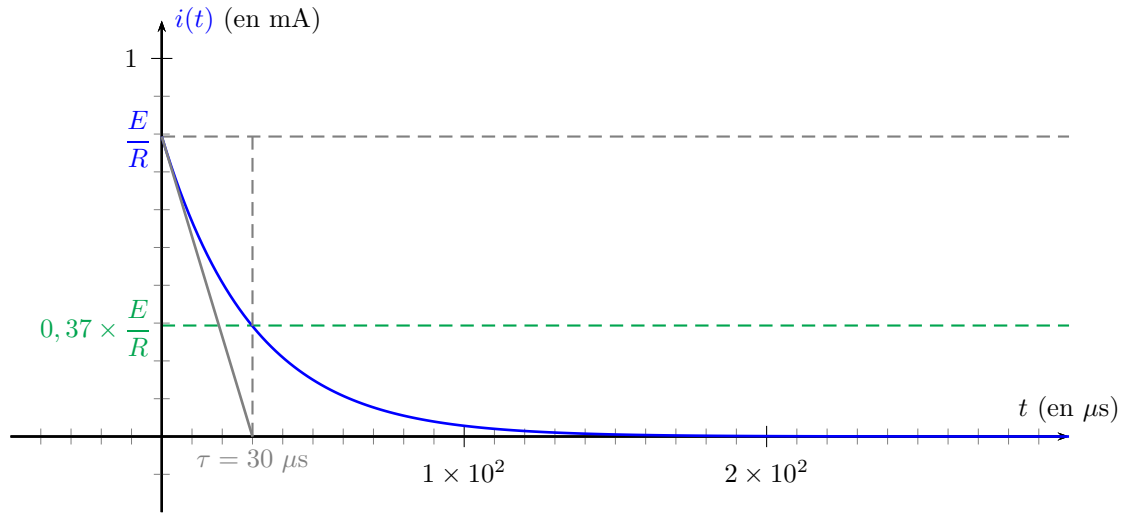


FIGURE V.14 – Evolution temporelle théorique de $u_C(t)$ pour $R = 5 \text{ k}\Omega$, $C = 6 \text{ nF}$ et $E = 4 \text{ V}$ dans le cadre d'une modélisation idéale.

Propriété V.8 – Observation expérimentale de l'intensité du courant dans le circuit

On peut notamment observer que :

- ★ $i(t = 0^+) = \frac{E}{R}$, il y a donc bien discontinuité de l'intensité en $t = 0$.
- ★ $i(t \rightarrow \infty) = 0$, donc 0 est bien la valeur asymptotique atteinte si $e(t)$ reste suffisamment longtemps égal à E .
- ★ $i(t = \tau) = \frac{E}{R}e^{-1}$, soit environ 37% de $\frac{E}{R}$. τ est une constante de temps caractéristique de la durée de circulation du courant.
- ★ La pente à l'origine permet là encore d'estimer graphiquement τ :

$$\left(\frac{di(t)}{dt} \right)_{t=0} = \left(-\frac{E}{R} \times \frac{1}{\tau} \times \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)_{t=0} = -\frac{E}{R\tau}$$

La tangente est une droite affine d'équation $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)$, et coupe donc l'asymptote ($i = 0$) en $t = \tau$.

On pourrait raisonner de la même façon sur tout autre grandeur électrique du système.

Remarque : pour comparer ces résultats à nos mesures précédentes, il suffit d'utiliser :

$$u_R(t) = Ri(t)$$

L'ensemble des valeurs prévues par le modèle sont observées expérimentalement.

II.3 Interprétation de la charge du condensateur

Propriété V.9 – Charge d'un condensateur

- ★ Lorsqu'une tension est appliquée à un condensateur, le courant ne circule que pendant un court instant car les charges ne peuvent pas traverser le condensateur, et elles s'accumulent sur ses armatures.
- ★ Du fait de la répulsion électrostatique entre les charges, le passage devient de plus en plus difficile : de nouvelles charges ne peuvent plus se rendre sur une armature déjà chargée négativement, et l'intensité du courant dans la branche diminue progressivement jusqu'à s'annuler. Le condensateur est alors dit **chargé**.
- ★ Dans le même temps, les charges portées par les armatures créent une tension d'origine électrostatique, qui augmente au cours de la charge. La tension aux bornes de la résistance décroît en même temps que l'intensité, pendant que la tension aux bornes du condensateur augmente progressivement.

II.4 Bilan énergétique

Démonstration V.3 – Calculs - Conservation de l'énergie

- ★ Energie fournie par le générateur lors de la charge du condensateur^a :

$$\mathcal{E}_G = \int_0^\infty E i(t) dt = \int_0^\infty E \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty$$

et donc

$$\mathcal{E}_G = CE^2$$

- ★ Energie reçue par le condensateur lors de sa charge :

$$\mathcal{E}_C = \int_0^\infty u_C(t) i(t) dt = \int_0^\infty E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty$$

et donc

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} CE^2$$

- ★ Energie reçue par la résistance lors de la charge du condensateur :

$$\mathcal{E}_R = \int_0^\infty R i^2(t) dt = \int_0^\infty R \frac{E^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty$$

et donc

$$\mathcal{E}_R = \frac{1}{2} CE^2$$

^a. Il n'est en fait même pas nécessaire de faire une intégration du courant car on peut utiliser le fait que $i = C \frac{du_C}{dt}$ pour la première expression par exemple : $\mathcal{E}_G = \int_0^\infty E i(t) dt = CE [u_C(t)]_0^\infty = CE^2 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\infty = CE^2$.

Propriété V.10 – Conservation de l'énergie

- ★ **La puissance fournie par le générateur se partage donc équitablement** entre le condensateur et la résistance.
- ★ **L'énergie dissipée par la résistance ne dépend pas de R** :
 - R faible conduit à une intensité élevée qui circule pendant un régime transitoire de courte durée,
 - alors qu'une résistance plus élevée diminue l'intensité du courant et allonge le régime transitoire, de sorte que l'énergie dissipée par la résistance est inchangée entre les deux cas.

II.5 Prise en compte du caractère réel du GBF

Dans les précédentes sous-sections de cette étude théorique, nous n'avons pas pris en compte le caractère réel des appareils utilisés pour observer les signaux électriques du circuit RC : GBF et oscilloscope.

Nous avons déjà vu que le caractère réel de l'oscilloscope numérique pouvait être négligé tant que la résistance du dipôle en parallèle est négligeable ce qui est le cas ici.

Concernant le GBF, nous allons nous intéresser à l'influence de la résistance interne de celui-ci. Le circuit ci-contre tient compte du caractère idéal de l'oscilloscope.

Sur la figure V.15, la présence de la résistance R_S entraîne deux modifications :

- ★ la résistance équivalente (association en série) du circuit est $R + R_S$, elle entraîne une modification de la valeur du temps caractéristique τ .
- ★ la tension mesurée aux bornes du GBF doit tenir compte du courant $i(t)$ circulant dans la maille (additivité des tensions) : $u_{GBF}(t) = e(t) - Ri(t)$. En conséquence, à $t = 0^+$ (C équivaut à un interrupteur ouvert), la tension mesurée sur la voie 1 diffère de E et vaut :

$$u_{GBF}(t = 0^+) = E \left(1 - \frac{R_S}{R + R_S} \right)$$

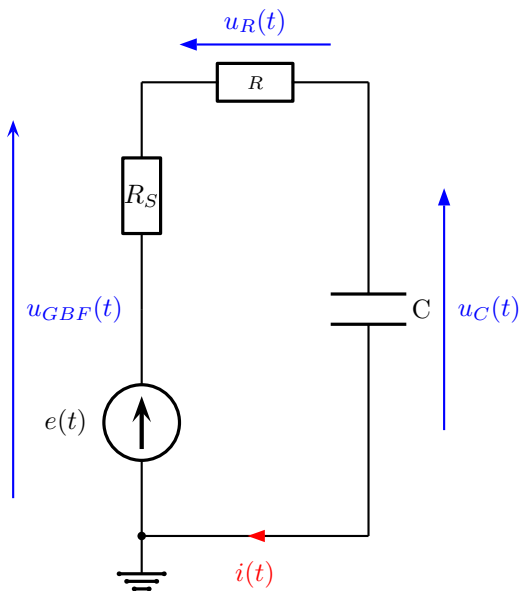


FIGURE V.15 – Schéma électrique d'un circuit RC série tenant compte du caractère réel du GBF.

Dans ces deux situations le constat est le même : le caractère réel du GBF se fait particulièrement sentir lorsque $R_S \sim R$.

Propriété V.11 – Validité de l'hypothèse sur le caractère idéal des appareils utilisés

On veillera à choisir une résistance R pour le circuit RC tel que :

- ★ R est suffisamment élevée pour éviter toute influence du GBF sur les mesures effectuées
- ★ R est suffisamment faible pour éviter que l'oscilloscope influe lui-même sur les mesures qu'il effectue.

En pratique, on choisira le plus souvent

$$R \sim 1 - 10 \text{ k}\Omega$$

II.6 Etude de la réponse d'un circuit RC série à un échelon descendant - *Régime libre*

III Portrait de phase

III.1 Définition

Une représentation fréquemment utilisée pour visualiser le comportement d'un système est le portrait de phase. Nous allons l'utiliser pour étudier les circuits électriques linéaires d'ordre 1.

Définition V.8 – Portrait de phase unidimensionnel

Le **portrait de phase** d'un système unidimensionnel décrit par la variable X correspond au tracé de la dérivée temporelle \dot{X} en fonction de X .

Propriété V.12 – Portrait de phase

- ★ L'état initial du système est caractérisé par un point particulier dans le plan de phase. On donnera souvent $X(0)$ et $\dot{X}(0)$.
- ★ L'évolution du système est matérialisée par une courbe : **la trajectoire des phases**.
- ★ La trajectoire des phases est toujours décrite dans le **sens horaire** : lorsque X augmente, \dot{X} est nécessairement positif, ce qui impose le sens de parcours.
- ★ Si le mouvement est périodique, le système repasse régulièrement par les mêmes points du plan de phase : la trajectoire des phases est donc une **courbe fermée**.

III.2 Cas d'un système d'ordre 1

La figure V.16 présente le portrait de phase relatif à chaque phase du signal créneau pour la grandeur $u_C(t)$.

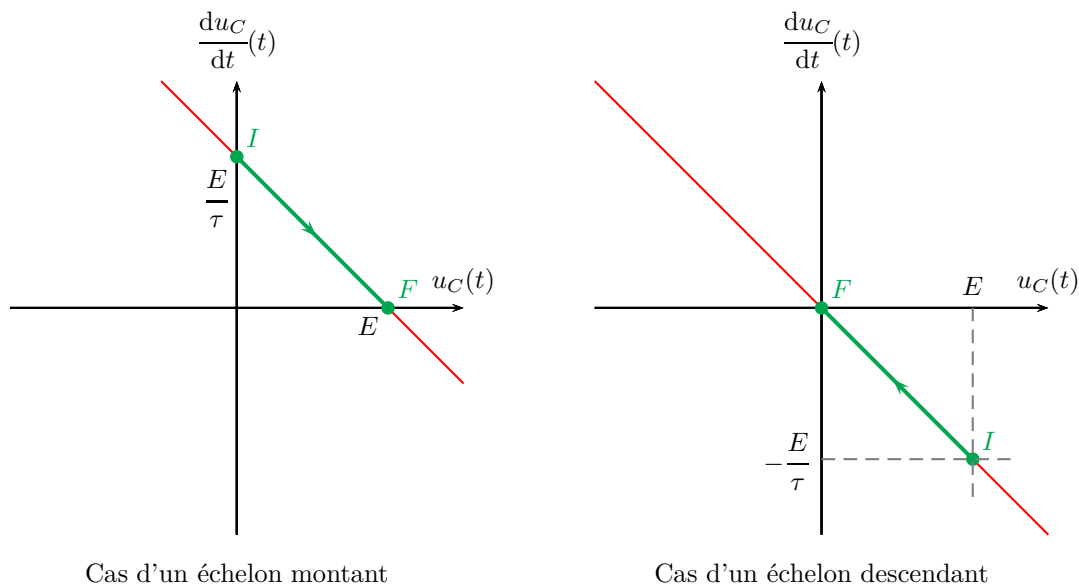


FIGURE V.16 – Portrait de phase d'un circuit RC pour la tension aux bornes de C pour t allant de $t = 0^+$ à $t \rightarrow +\infty$.

III.3 Echelon montant

L'ED vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$ est :

$$\frac{du_C}{dt}(t) = \frac{E - u_C(t)}{\tau}$$

Dans un portrait de phase, il s'agit donc d'une droite de pente $-\frac{1}{\tau}$, d'ordonnée $\frac{E}{\tau}$ pour $u_C(t) = 0$ (c'est-à-dire ici pour $t = 0$) et d'abscisse E pour $\frac{du_C}{dt}(t) = 0$ (c'est-à-dire pendant le R.P. final).

On déduit de l'étude des régimes permanents et de la continuité de $u_C(t)$ les points I et F caractérisant les instants $t = 0^+$ et $t \rightarrow \infty$ et donc les limites du déplacement sur ce portrait de phase. Depuis I , la dérivée temporelle de $u_C(t)$ est positive donc $u_C(t)$ doit augmenter : on doit se déplacer vers la droite dans le premier quart du plan. Arrivé en F , l'évolution ne pourrait se poursuivre que si la dérivée devient négative et que $u_C(t)$ se met à diminuer ce qui est incompatible avec la droite obtenue. Le seul segment parcouru est donc celui de I à F .

III.4 Echelon descendant

L'ED vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$ est :

$$\frac{du_C}{dt}(t) = \frac{-u_C(t)}{\tau}$$

Dans un portrait de phase, il s'agit donc d'une droite de pente $-\frac{1}{\tau}$ passant par l'origine.

On déduit de l'étude des régimes permanents et de la continuité de $u_C(t)$ les points I et F caractérisant les instants $t = 0^+$ et $t \rightarrow \infty$ et donc les limites du déplacement sur ce portrait de phase. Depuis I , la dérivée temporelle de $u_C(t)$ est négative donc $u_C(t)$ doit diminuer : on doit se déplacer vers la gauche dans le quatrième quart du plan. Arrivé en F , l'évolution ne pourrait se poursuivre que si la tension $u_C(t)$ continue de décroître ce qui est incompatible avec la droite obtenue pour laquelle la dérivée est positive. Le seul segment parcouru est donc celui de I à F .

Un tracé rapide du portrait de phase et surtout une interprétation efficace de celui-ci nous a permis de comprendre comment la tension aux bornes du condensateur allait évoluer, et ce, sans avoir déterminé et établi les solutions des ED.

IV Etude de la réponse d'un circuit RL série

