Correction partielle - TD n°10: Circuits linéaires en RSF

V Equivalence de circuits

1. La représentation de Norton des générateurs permet de les regrouper en un seul générateur idéal de courant, de courant électromoteur $\underline{\eta_{eq}} = \underline{\eta} + \frac{\underline{e_1}}{r} - jC\omega\underline{e_2}$, avec en parallèle la résistance r et le condesateur C. En appliquant la formule du pont diviseur de courant, on obtient finalement :

$$\boxed{\underline{i_L} = \frac{\frac{1}{jL\omega}}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{r} + jC\omega}\left(\underline{\eta} + \frac{\underline{e_1}}{r} - jC\omega\underline{e_2}\right) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{r}}\left(\underline{\eta} + \frac{\underline{e_1}}{r} - jC\omega\underline{e_2}\right)}$$

2. En utilisant le théorème de Millman en A, on obtient :

$$V_A\left(\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{r} + jC\omega\right) = \underline{\eta} + \frac{V_B}{jL\omega} - jC\omega\underline{e_2} + \frac{\underline{e_2}}{r}$$

Or $V_B = 0$, et $V_A = jL\omega\underline{i_L}$, donc on retrouve bien le même résultat :

$$\boxed{\underline{i_L} = \frac{\frac{1}{jL\omega}}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{r} + jC\omega}\left(\underline{\eta} + \frac{\underline{e_1}}{r} - jC\omega\underline{e_2}\right) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{r}}\left(\underline{\eta} + \frac{\underline{e_1}}{r} - jC\omega\underline{e_2}\right)}$$

VII Adaptation d'impédance

La puissance reçue par le dipôle est donnée par : $\mathcal{P} = Re[\underline{Z}]I_{eff}^2 = RI_{eff}^2$.

La loi des mailles donne, en notation complexe : $\underline{e} = (r + R + jX)\underline{i}$ et en module : $E = \left[(r+R)^2 + X^2\right] I_{eff}$, donc $\boxed{\mathcal{P} = \frac{RE^2}{\left[(r+R)^2 + X^2\right]^2}}$. Cette expression est maximale lorsque $X = 0$, et lorsque la fonction $f(x) = \frac{x}{(x+r)^2}$ est maximale. Or $f'(x) = \frac{x+r-2x}{(x+r)^3} = 0$ pour $x = r$.

La puissance reçue par l'appareil est maximale lorsque $\boxed{\underline{Z} = r}$, ce qui explique notamment pourquoi l'impédance d'entrée des cables BNC branchés à la sortie du GBF est de 50Ω. Cela permet ainsi de transmettre un maximum de puissance dans le cable.

VIII Relèvement d'un facteur de puissance

1. Pour relever le facteur de puissance à 1, il faut que tension et phase dans le dipôle équivalent à l'association de $\underline{Z}$ et du condensateur C_1 soient en phase, et donc que $\underline{Z_{eq}}$ soit réel. Or $\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}} + jC_1\omega}$. On en déduit par l'annulation de la partie imaginaire de $\underline{Z_{eq}}$ que $\boxed{C_1 = \frac{X}{(R^2 + X^2)\omega}}$ On remarquera que le facteur de puissance ne peut être relevé que pour une pulsation ω donnée.
2. Dans ce cas, $\underline{Z_{eq}} = \frac{1}{jC_2\omega} + R + jX$, et par l'annulation de la partie imaginaire, on en déduit que $\boxed{C_2 = \frac{1}{X\omega}}$
3. La première solution est plutôt à privilégier car elle permet d'éviter une chute de tension aux bornes du moteur. Le fait de mettre le condensateur en parallèle ne modifie pas la tension aux bornes du moteur.
4. La mise en parallèle d'une capacité permet de ramener le $\cos\varphi$ de l'installation à 1.
   a. L'intensité efficace est reliée à la puissance $\mathcal{P}$, au facteur de puissance $cos(\phi)$ et à la tension efficace U_{eff} par $I_{eff} = \frac{\mathcal{P}}{U_{eff}cos(\phi)} = \frac{\sqrt{2}\mathcal{P}}{u_m cos(\phi)} = \frac{10^4}{220\times 0.7} = \boxed{65\ A}$, avant le relèvement, et $I'_{eff} = \frac{10^4}{220} = \boxed{45\ A}$ après relèvement du facteur de puissance (attention, I'_{eff} correspond à l'intensité efficace provenant du secteur, et ne correspond pas à l'intensité parcourant le moteur, car une partie du courant passe par le condensateur).

b. Les pertes par effet Joule dans les lignes étant proportionnelles au carré de l'intensité efficace, on voit ici l'intérêt de relever le facteur de puissance car l'intensité fournie par le secteur est plus faible dans le cas où le facteur de puissance a été relevé à 1. Le fonctionnement du moteur dans le cas relevé aura donc un meilleur rendement vis à vis de la source d'électricité.

c. On peut calculer la résistance du moteur avant relèvement avec la valeur de la puissance de celui-ci et à l'intensité efficace le parcourant par la relation $\mathcal{P} = Re[\underline{Z}]I_{eff}^2$, d'où : $R = \frac{\mathcal{P}}{I_{eff}^2} = \frac{10^4}{65^2} = \boxed{2.4\Omega}$.

d. $\boxed{tan(\varphi) = \dfrac{X}{R}}$, et donc, en utilisant les questions précédentes :

$$C_1 = \frac{X}{(R^2+X^2)\omega} = \frac{Rtan(\varphi)}{2\pi f R^2(1+tan^2(\varphi))} = \frac{tan(\varphi)cos^2(\varphi)}{2\pi f R} = \frac{sin(\varphi)}{2\pi f R} = \frac{\sqrt{1-0.7^2}}{2\pi \times 50 \times 2.4} = \boxed{1\ mF}$$