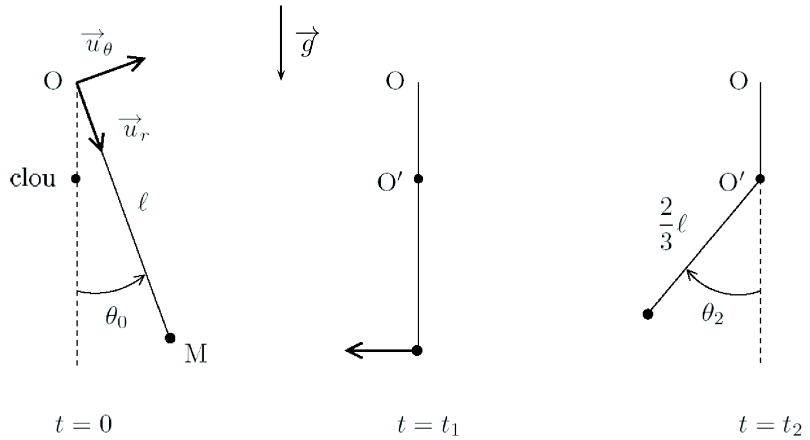
DM n°6: Mécanique

A faire pour le jeudi 17 décembre 2020

I Pendule de longueur variable

On étudie le mouvement du pendule simple modifié représenté sur la figure ci-dessous.



Un mobile ponctuel M de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixée en O. On néglige tout frottement et le référentiel d'étude est supposé galiléen. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ a pour norme $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. On notera v la norme du vecteur vitesse de M dans le référentiel d'étude.

La position du mobile est repérée par l'inclinaison θ du fil par rapport à la verticale descendante. Lorsque $\theta > 0$, le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur ℓ. À la verticale et en-dessous de O, un clou est planté en O′, tel que $OO' = \dfrac{\ell}{3}$. Ce clou bloque la partie haute du fil pour $\theta < 0$ qui est dès lors défini comme l'angle entre la partie basse du fil et la verticale descendante. Le mobile se comporte donc pour $\theta < 0$ comme un pendule simple de centre O′ et de longueur $\dfrac{2}{3}\ell$.

À la date $t = 0$, on abandonne sans vitesse initiale le mobile M tel que $\theta(0) = \theta_0 > 0$. On note t_1 la date de la première rencontre du fil avec le clou et t_2 la date de la première annulation de la vitesse du mobile pour $\theta < 0$. On appellera l'intervalle $[0,\, t_1]$ *la première phase du mouvement*. L'intervalle $[t_1,\, t_2]$ correspond à *la deuxième phase du mouvement*. A la date t_1^- immédiatement inférieure à t_1, le fil n'a pas encore touché le clou et à la date t_1^+, le fil vient de toucher le clou.

1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par θ pendant la première phase du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

2. Dans l'hypothèse de petites oscillations, en déduire l'expression de $\theta(t)$ pendant la première phase du mouvement. Déterminer la durée Δt_{I} de la première phase du mouvement.

3. En utilisant une méthode énergétique, déterminer la vitesse v_1^- de M à la date t_1^-. En déduire la vitesse angulaire ω_1^- à cette date.

4. Le blocage de la partie supérieure du fil ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique : l'énergie mécanique du système est donc conservée entre les dates t_1^- et t_1^+. Quelle est alors la vitesse v_1^+ de M à la date t_1^+ ? En déduire la vitesse angulaire ω_1^+.

5. Par analogie avec les résultats obtenus dans la première phase du mouvement, en déduire sans calcul la durée Δt_{II} de la deuxième phase.

6. Déterminer l'expression de l'angle θ_2 à la date t_2, en se plaçant toujours dans l'approximation des petits angles.

7. Décrire brièvement la suite du mouvement de ce système et donner l'expression de sa période T.

8. Applications numériques : calculer les valeurs de t_1, t_2, θ_2 et de T pour $\theta_0 = 8{,}00°$ et $\ell = 60{,}0\,\mathrm{cm}$.

9. Représenter l'allure du portrait de phase, dans le système d'axes $(\theta, \dot{\theta})$. Conclure.

II Le cyclotron de Lawrence - *(D'après TnT)*

Le premier cyclotron de l'Histoire fut construit en 1931 par S. Livingston sous la direction de E. O. Lawrence à l'Université de Californie de Berkeley. En 1932, ces deux scientifiques décrirent leur invention dans un article publié dans le journal *Physical Review* et intitulé *« The production of high speed light ions without the use of high voltages »*. Pour ses travaux sur l'invention et le développement des cyclotrons, Lawrence reçut le prix Nobel de physique en 1939.

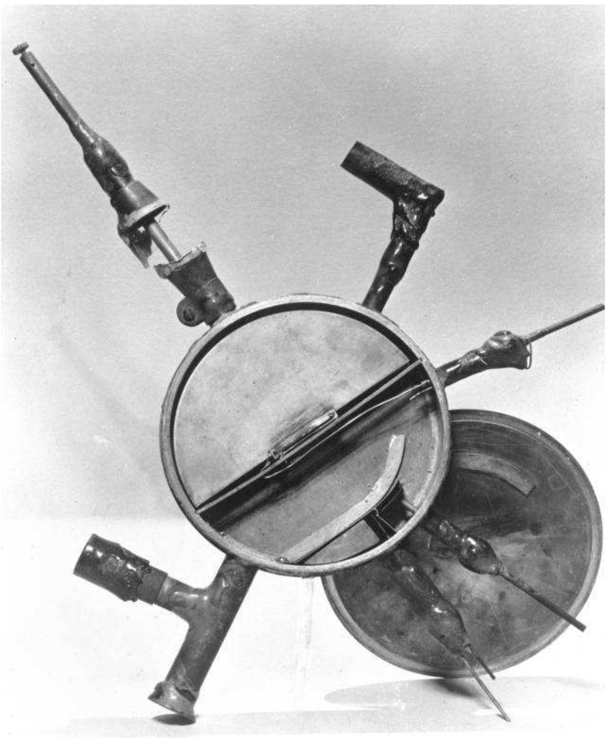


FIGURE 1 – *Photographie de l'un des premiers cyclotrons construits par Lawrence.*

L'objectif de ce problème est de comprendre le fonctionnement d'un tel appareil et de retrouver quelques uns des résultats présentés par les deux chercheurs dans leur article.

On fournit dans l'annexe située à la fin de l'énoncé, et **à rendre avec la copie**, une schématisation simplifiée d'un cyclotron. On y a représenté deux demi-disques appelés « dees », respectivement notés $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, au sein desquels règne un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$, supposé stationnaire et uniforme. Ces deux dees se font face selon leur deux diamètres et sont séparés d'une distance notée d. Ces diamètres laissent en pratique des particules chargées pénétrées dans $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ mais possèdent chacun une armature électrique. Il est donc possible d'appliquer entre ces armatures une tension $u(t) = U\cos(\omega t)$, d'amplitude $U > 0$ et de pulsation ω, de manière a créé un champ électrique qu'on note $\overrightarrow{E}$ dans l'espace séparant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Les particules chargées sont émises depuis une source $\mathcal{S}$, placée au milieu du diamètre de $\mathcal{D}_1$, en direction de $\mathcal{D}_2$.

On supposera dans toute la suite que le champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ est nul en dehors des dees et que le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est nul à l'intérieur des dees. On supposera en outre que la vitesse initiale des particules chargées à la sortie de la source est nulle.

Dans le cas du cyclotron construit par Livingston et Lawrence, le rayon des dees $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ valait $R = 14{,}0\,\text{cm}$. Leur cyclotron permettait de communiquer à des protons, de masse $m = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$ et de charge $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C}$, une énergie cinétique maximale $E_{c,\max} = 1{,}20\,\text{MeV}$ grâce à l'application d'une différence de potentiels d'amplitude $U = 4{,}00\,\text{kV}$ et de fréquence $f = 17{,}0\,\text{MHz}$.

1. On s'intéresse pour commencer à la première phase d'accélération. L'objectif de chaque phase d'accélération est de communiquer aux protons la plus grande énergie cinétique possible.

(a) Indiquer sur le schéma fourni en annexe la direction et le sens du champ électrique $\overrightarrow{E}$ qu'il faut appliquer entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ grâce à la tension u pour réaliser la première accélération d'un proton depuis la source $\mathcal{S}$ vers le point O, milieu du diamètre de $\mathcal{D}_2$.

(b) On fait ici l'hypothèse que le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est stationnaire et uniforme durant toute la première phase d'accélération. Établir l'expression du temps τ mis par un proton pour traverser la région séparant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ en fonction de m, e, $E_0 = \|\overrightarrow{E}\|$ et de d.

(c) Toujours dans le cas d'un champ électrique stationnaire et uniforme, établir l'expression de l'énergie potentielle associée à la force électrique en fonction de e, E_0 et x, coordonnée du proton dans l'espace séparant $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (cf. annexe).

(d) Montrer que l'hypothèse d'un champ électrique stationnaire et uniforme durant le passage d'un dee à l'autre est satisfaite si la pulsation ω vérifie la relation :

$$\omega \ll 2\pi\sqrt{\frac{eU}{2md^2}}$$

La distance d étant de l'ordre de 1 mm, en déduire l'ordre de grandeur de $\omega_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{eU}{2md^2}}$.

(e) Cette hypothèse est-elle satisfaite dans le cas du cyclotron de Lawrence ?
On supposera dans le reste du problème que cette hypothèse est vérifiée.

(f) Établir en fonction de e, m et U l'expression littérale de la norme $v_1 = \|\overrightarrow{v_1}\|$ de la vitesse des protons après la première accélération.

2. On s'intéresse à présent au mouvement des protons une fois qu'ils ont pénétré dans $\mathcal{D}_2$ après la première accélération.

(a) Justifier, **succinctement**, que l'énergie cinétique des protons est constante à l'intérieur des dees. Que peut-on en déduire sur la nature du mouvement ?

(b) On se place dans le repère $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ dans lequel un proton est repéré par le triplet de variables d'espace (x, y, z). Le champ magnétique s'écrit donc $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_z}$. Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ d'un proton dans $\mathcal{D}_2$. On posera $\omega_c = \dfrac{eB_0}{m}$ où $B_0 = \|\overrightarrow{B_0}\|$.

(c) Montrer que les protons décrivent dans cette phase un mouvement circulaire dont on exprimera le rayon r en fonction de m, e, U et B_0.
Montrer que le temps nécessaire pour ressortir de $\mathcal{D}_2$ est indépendant de v_1.

(d) En déduire que choisir $\omega = \omega_c$ permet d'augmenter l'énergie cinétique des protons à chaque passage entre les dees.

(e) Établir dès lors, en fonction de k, e, m et U, l'expression littérale de la vitesse des protons après la k-ième accélération.

(f) Tracer avec soin l'allure de la trajectoire des protons jusqu'à ce qu'ils aient été accélérés quatre fois.

Nous allons à présent revenir sur les calculs présentés par Lawrence dans son article.

3. On rappelle qu'1 eV correspond à la quantité d'énergie communiquée à un proton soumis à une différence de potentiel de 1 V. Convertir un 1 eV en J.

4. (a) Déterminer la valeur maximale de la vitesse atteinte par les protons dans le cyclotron de Lawrence ?

(b) Est-il nécessaire d'adopter un modèle relativiste ?

(c) Rappeler les expressions générales de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement d'une particule dans le cas relativiste.

5. À quelle valeur de tension accélératrice U' aurait-il fallu soumettre les protons accélérés par Lawrence pour leur communiquer en une seule fois la vitesse obtenue à la question précédente ? Commenter.

6. Quel(s) avantage(s) et quel(s) inconvénient(s) présentent un cyclotron par rapport aux accélérateurs linéaires ?

7. Citer un autre type d'accélérateur de particules et résumer **en cinq lignes maximum** son principe de fonctionnement.

8. Établir l'expression littérale et retrouver la valeur de la fréquence f de $u(t)$ dans le cas du cyclotron de Lawrence.

9. On note N le nombre de tours décrits par les protons dans le cyclotron de Lawrence. Exprimer N en fonction de U, e et $E_{c,\max}$ et calculer sa valeur.

10. En déduire la valeur de la norme B_0 du champ magnétique utilisé. Commenter.

DOCUMENT RÉPONSE - À REMETTRE AVEC LA COPIE

NOM :

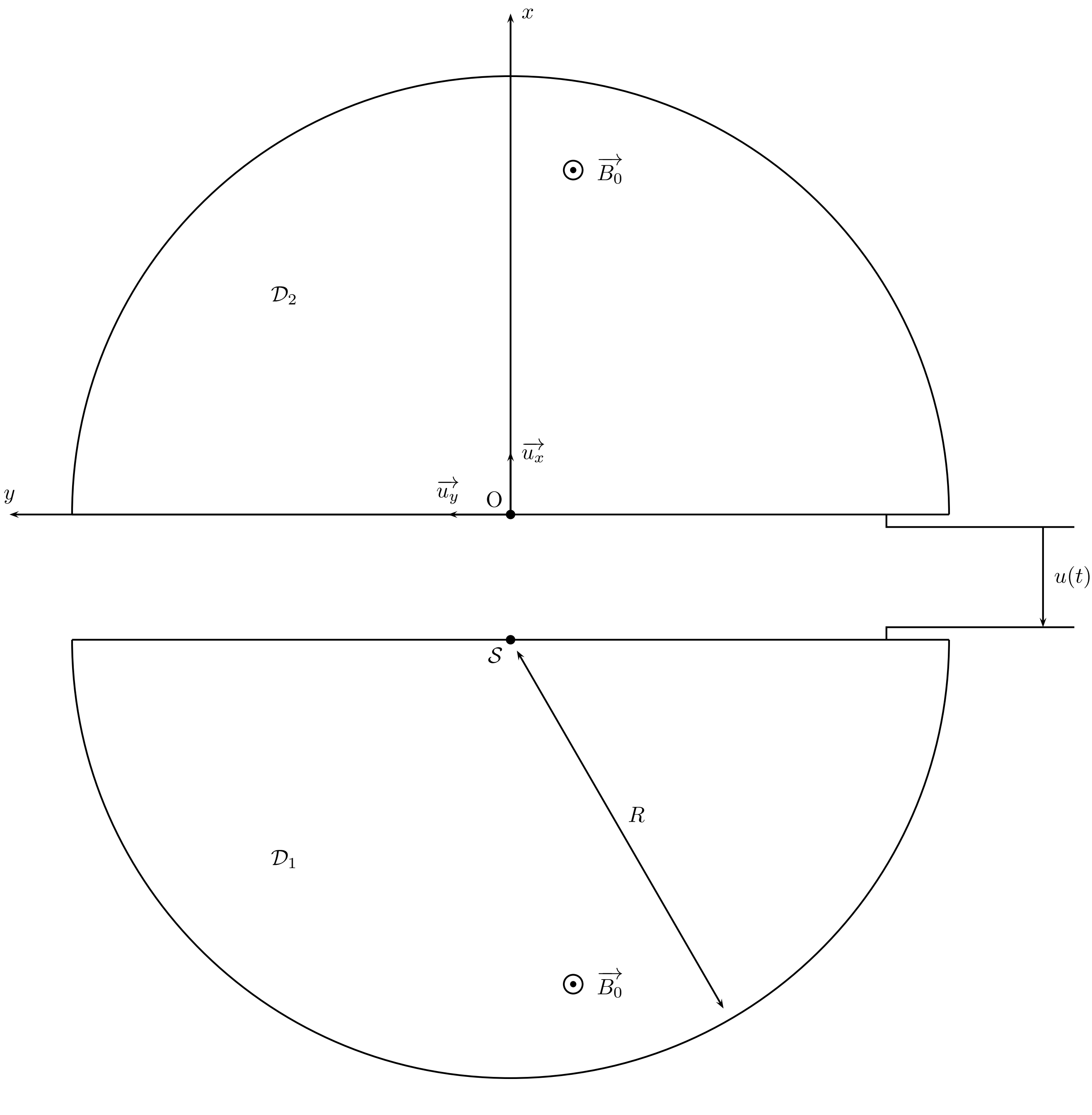


FIGURE 2 – *Schéma simplifié d'un cyclotron.*