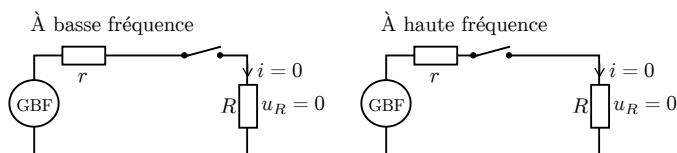


## Électrocinétique & Ondes

### I Étude d'une bobine réelle

- Loi d'additivité des tension aux bornes de la bobine :  $u(t) = ri(t) + L \frac{di}{dt}$ .
- En régime permanent, la bobine idéale se comporte comme un fil. La formule du diviseur de tension appliquée aux trois conducteurs ohmiques en série s'écrit :  $U_R = \frac{R}{R+r+r_0} E_0$  d'où  $r = \left( \frac{E_0}{U_R} - 1 \right) R - r_0$ .  
AN :  $r = 29 \, \Omega$ .
- Par lecture de l'oscillogramme :  $U_e = 5,0 \, \text{V}$  et  $U_R = 2,5 \, \text{V}$ .
- $I = \frac{U_R}{R}$  donc  $I = 0,063 \, \text{A}$ .
- Par définition, l'impédance d'un dipôle est défini par  $\underline{Z} = \frac{u}{i}$ . Si  $U$  est l'amplitude de la tension aux bornes d'un dipôle quelconque et  $I$  l'amplitude de l'intensité qui le traverse, alors  $Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I}$ . Pour le dipôle  $AM$ , on a  $Z_{AM} = \frac{U_e}{I}$ . AN :  $Z_{AM} = 80 \, \Omega$ .
- La tension  $u_e(t)$  est en avance sur  $u_R(t)$ , car elle passe par son maximum  $0,33 \, \text{ms}$  avant.
- Si on note  $\tau = 0,33 \, \text{ms}$  l'avance de  $u_e(t)$  sur  $u_R(t)$ , alors l'avance de phase de  $u_e(t)$  sur  $i(t)$  est  $\varphi_{u_e/i} = 2\pi\tau f$ . AN :  $\varphi_{u_e/i} = 0,52 \, \text{rad} (= 30^\circ)$ .
- $\underline{Z}_{AM} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R$ , donc  $\underline{Z}_{AM} = R + r + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$ .
- $\underline{Z}_{AM} = \frac{u_e}{i} = \frac{U_e e^{j\varphi_{u_e/i}}}{I}$ . Donc  $\underline{Z}_{AM} = Z_{AM} e^{j\varphi_{u_e/i}}$ .
- D'après 8),  $R + r = \text{Re}(\underline{Z}_{AM}) = Z_{AM} \cos \varphi_{u_e/i}$ . Donc  $r = Z_{AM} \cos \varphi_{u_e/i} - R$ . AN :  $r = 29 \, \Omega$ .
- D'après 8),  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \text{Im}(\underline{Z}_{AM})$ . Donc  $L = \frac{1}{\omega} \left( Z_{AM} \sin \varphi_{u_e/i} + \frac{1}{C\omega} \right)$ . AN :  $L = 0,066 \, \text{H}$ .
- Fonction de transfert du filtre :  $\underline{H} = \frac{u_R}{u_e}$
- À basse fréquence, l'inductance  $L$  est équivalente à un fil, le condensateur  $C$  est équivalent à un interrupteur ouvert. À haute fréquence, l'inductance  $L$  est équivalente à un interrupteur ouvert, le condensateur  $C$  est équivalent à un fil. On obtient les schémas équivalents suivants :



Le signal ne passant ni aux basses fréquences ni à hautes fréquences, le filtre est probablement un passe-bande.

14.  $\underline{H} = \frac{\underline{u}_R}{\underline{u}_e} = \frac{R}{\underline{Z}_{AM}}$ . Donc  $\underline{H} = \frac{R}{R+r+j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$ .

15.  $\underline{H} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1 + \frac{j}{R+r}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1 + j\frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)}$ . En posant  $H_{\max} = \frac{R}{R+r}$ ,  
 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$ , on obtient bien  $\underline{H} = \frac{H_{\max}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ .

16.  $|\underline{H}| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$ . Donc  $|\underline{H}|$  est maximal si  $1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$  est minimal, i.e. si  $\omega = \omega_0$ .

Alors  $G_{\text{dB, max}} = 20 \log H_{\max} = 20 \log \frac{R}{R+r}$ . D'autre part, par lecture du diagramme de Bode, on obtient  $G_{\text{dB, max}} = G_{\text{dB}}(\omega_0 = 2\pi f_0) = -4,8 \text{ dB}$ , avec  $f_0 = 196 \text{ Hz}$ .

On en déduit  $L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C}$  et  $r = R \left( 10^{\frac{-G_{\text{dB, max}}}{20}} - 1 \right)$ . AN :  $L = 0,066 \text{ H}$ .  $r = 29,5 \text{ } \Omega$ .

17. Par définition la bande passante à -3 dB correspond à la bande spectrale sur laquelle  $G \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ .  
 Notons  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les pulsations aux bornes de cette bande spectrale.  $\omega_{1,2}$  vérifie :

$$1 = Q^2 \left( \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right)^2 \quad \text{soit} \quad \left( \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} \right)^2 \pm \frac{1}{Q} \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} + 1 = 0$$

On a alors :

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = -\frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} + \frac{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

Et donc :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{ou encore} \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q}$$

18. Graphiquement, on repère  $f_1 \simeq 130 \text{ Hz}$  et  $f_2 \simeq 300 \text{ Hz}$ . Donc  $\Delta f = 170 \text{ Hz}$ . Comme  $f_0 = 196 \text{ Hz}$ , on estime :

$$\boxed{Q = 1,15}$$

Cette valeur est en accord avec celle obtenue en utilisant directement l'expression de  $Q$  :

$$Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}} = 1,16$$

## II Ondes acoustiques dans un tuyau cylindrique (D'après ENAC 2020)

1. **Réponse C**. C'est la seule fonction d'onde qui vérifie à la fois les deux conditions aux limites  $\psi_n(0, t) = 0$  et  $\psi_n(L, t) = 0$  et la condition initiale  $\psi_n(x, 0) = 0$ .
2. **Réponses B et C**. Par définition, un noeud de vibration est défini comme un minimum d'amplitude. C'est donc le cas pour  $x = 0$  et  $x = L$  qui vérifient  $\psi_n(0, t) = 0$  et  $\psi_n(L, t) = 0$ . L'ensemble des ventres de vibration  $x_p$  où  $p \in \mathbb{Z}$  sont tels que  $\sin(k_n x_p) = 1 \Leftrightarrow k_n x_p = (2p+1)\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x_p = (p + \frac{1}{2})\pi \Leftrightarrow x_p = (p + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$ . Deux ventres de vibration successifs sont donc distants de  $x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda}{2}$ .
3. **Réponse B**. D'après le cours, pour que les extrémités  $x = 0$  et  $x = L$  correspondent à des noeuds, on a nécessairement une cavité donc la taille  $L$  doit être égale à un multiple entier de demi longueurs d'ondes, soit  $L = n\frac{\lambda_n}{2}$ . On retrouve cette condition par le calcul en posant que la fonction d'onde s'annule  $\forall t$  en  $x = L$ , ce qui implique nécessairement que  $\sin(k_n L) = 1 \Leftrightarrow k_n L = n\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda_n} L = n\pi \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$ .
4. **Réponse D**. En exploitant la relation de dispersion des ondes planes progressives sinusoïdales  $c = \lambda_n f_n$ , on trouve que  $f_1 = \frac{c}{\lambda_1}$  soit  $f_1 = \frac{c}{2L}$ . L'application numérique fournit  $f_1 = 85$  Hz.
5. **Réponses A, C et D**. Posons  $\psi_+(x, t) = \frac{\psi_m}{2} \cos(2\pi f_1 t - k_1 x)$  et  $\psi_-(x, t) = \frac{\psi_m}{2} \cos(2\pi f_1 t + \varepsilon k_1 x + \varphi)$ . D'après le cours, on sait qu'une onde stationnaire est obtenue par superposition d'ondes planes progressives sinusoïdales se propageant selon une même direction mais dans des sens opposés. On en déduit immédiatement que  $\varepsilon = +1$ . En outre, la superposition  $\psi_1(x, t) = \psi_+(x, t) + \psi_-(x, t)$  doit s'annuler en  $x = 0$ . C'est effectivement le cas si  $\psi_1(0, t) = \frac{\psi_m}{2} (\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_1 t + \varphi)) = 0 \Leftrightarrow \varphi = (2p+1)\pi$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ . Les angles  $\varphi = \pm\pi$  conviennent et conduisent à des fonctions d'ondes identiques. En utilisant la relation de trigonométrie  $\cos a + \cos b = -2 \sin(\frac{a+b}{2}) \sin(\frac{a-b}{2})$ , on peut valider le résultat obtenu :

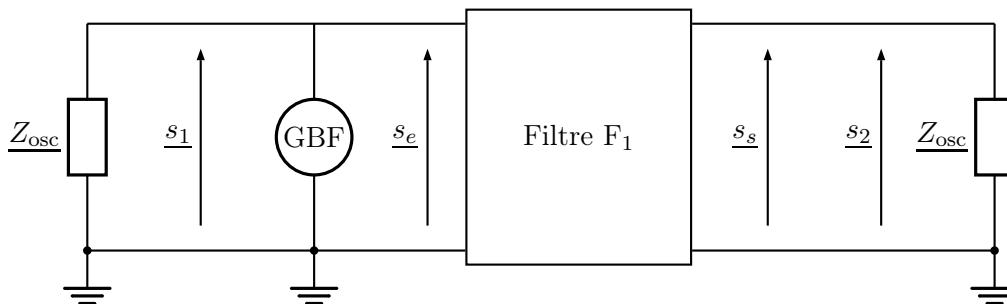
$$\begin{aligned}\psi_1(x, t) &= \psi_+(x, t) + \psi_-(x, t) \\ &= \frac{\psi_m}{2} \cos(2\pi f_1 t - k_1 x) - \frac{\psi_m}{2} \cos(2\pi f_1 t + k_1 x) \\ &= -\psi_m \sin(2\pi f_1 t) \sin(-2k_1 x) \\ &= \psi_m \sin(2\pi f_1 t) \sin(2k_1 x) \\ &= \psi_1(x, t)\end{aligned}$$

## III Détermination expérimentale d'un filtre inconnu

### III. A Acquisition des oscillogrammes

1. On repère la position du « trigger » le long de l'axe vertical gauche de chacun des oscillogrammes. Il est jaune comme la voie 1. Par ailleurs, il définit un niveau de seuil qui croise l'axe vertical central de chaque oscillogramme où est placé l'origine des temps (triangle jaune en haut). Ce point d'intersection coïncide avec la tension de la voie 1. Le déclenchement des oscillogrammes s'effectue donc par rapport à la voie 1. On peut par ailleurs en déduire le réglage du front pour l'acquisition : il s'agit d'un front montant.

2. La sensibilité de la voie 1 est de 1 V par division. Le niveau du « trigger » est situé deux divisions au-dessus du niveau de masse de la voie 1 : la tension seuil vaut approximativement 2 V.
3. (a) En haut à droite, on note la base de temps pour l'oscillogramme ① (50 ms) et pour l'oscillogramme ② (10 ms).
- (b) En haut à gauche, on note les sensibilités respectives  $S_1$  pour la voie 1 et  $S_2$  pour la voie 2. Pour l'oscillogramme ① ( $S_1 = 1$  V et  $S_2 = 10$  mV) et pour l'oscillogramme ② ( $S_1 = 1$  V et  $S_2 = 50$  mV)
- (c) Sur l'oscillogramme ①, les signaux tous les deux ont une période de deux divisions soit 100 ms. On en déduit une fréquence de 10 Hz.  
 Sur l'oscillogramme ②, les signaux ont tous les deux une période de 3,3 div soit 33 ms. On en déduit une fréquence de 30 Hz.
- (d) Sur l'oscillogramme ①, les signaux ont des amplitudes respectives  $A_1 = 2,5$  V et  $A_2 = 15$  mV. On en déduit les valeurs efficaces  $A_{1,\text{eff}} = 1,77$  V et  $A_{2,\text{eff}} = 10,61$  mV en divisant les amplitudes par un facteur  $\sqrt{2}$ .  
 Sur l'oscillogramme ②, les signaux ont des amplitudes respectives  $A_1 = 2,5$  V et  $A_2 = 45$  mV. On en déduit les valeurs efficaces  $A_{1,\text{eff}} = 1,77$  V et  $A_{2,\text{eff}} = 31,82$  mV.
4. On peut représenter le montage de la façon suivante :



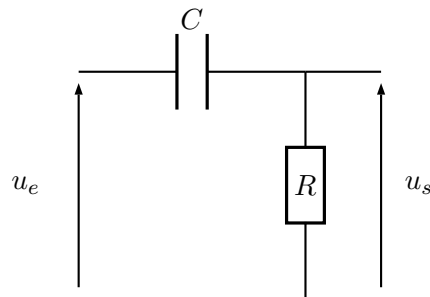
### III. B Etude du filtre inconnu

5. La courbe est fournie à la fin du document. Pour chaque oscillogramme, on détermine la fréquence des signaux, l'amplitude des signaux puis on calcule  $\log f$  et  $20 \log(S_2/S_1)$ . On place ensuite chaque couple sur le diagramme. On a au préalable évalué les valeurs extrêmes du gain en décibels pour positionner de façon judicieuse l'origine de l'axe des ordonnées ainsi que l'échelle associée. Le tableau de valeurs est à fournir :

Oscillogramme	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_e$ (ms)	100	33	17	10	2,5	0,50	0,17	0,10
$f_e$ (Hz)	10	30	60	$1,0 \times 10^2$	$4,0 \times 10^2$	$2,0 \times 10^3$	$6,0 \times 10^3$	$1,0 \times 10^4$
$s_e$ (V)	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5
$s_s$ (mV)	15	45	95	160	550	$1,2 \times 10^3$	$1,3 \times 10^3$	$1,3 \times 10^3$
$G_{\text{dB}}$	-44	-35	-28	-24	-13	-6,7	-6,0	-6,0

6. Les basses fréquences sont coupées (le gain tend vers 0 pour les fréquences basses) tandis que les hautes fréquences passent (le gain reste non nul et constant au delà de 3 kHz). Il s'agit d'un filtre passe-haut. La pente de l'asymptote à basse fréquence est de 20 dB par décade : il doit s'agir d'un ordre 1.
7. Le maximum de gain est atteint à hautes fréquences et correspond à un gain en décibels de -6. La courbe réelle du gain passe par -9 en  $f_0 \simeq 9 \times 10^2$  Hz. On a donc  $\Delta f = [9 \times 10^2 \text{ Hz}; +\infty[$ .

8. (a) On teste ces fonctions de transfert à basses et hautes fréquences, tant du point de vue du gain que la phase. Seule la fonction de transfert ② correspond au cas étudié.
- (b) Ce résultat est en accord avec l'évolution de la phase. Le signal de la voie 2 à basses fréquences est en quadrature avance alors qu'il est quasiment en phase à hautes fréquences. C'est le cas typique d'un filtre passe-haut d'ordre 1 et cela correspond aux propriétés de la fonction de transfert ②.
- (c) Dans ce cas,  $H_0$  représente le gain à hautes fréquences et  $f_0$  représente la fréquence caractéristique de coupure.  $Q$  n'intervient pas.
9. On a montré lors de la construction du graphe que  $H_{0,1} = 0,5$ ,  $f_{0,1} = 9 \times 10^2$  Hz. En effet, on montre aisément que le gain à  $f_0$  vaut  $H_0/\sqrt{2}$ .
- Remarque : on pouvait aussi utiliser le croisement des asymptotes, ce qui donnerait plutôt  $f_{0,1} = 8 \times 10^2$  Hz.
10. On peut par exemple considérer le filtre CR :



11. On reconnaît un diviseur de tension :

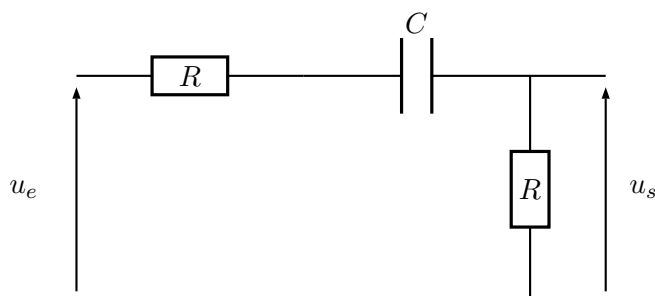
$$\underline{H(f)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j2\pi RCf}}$$

où l'on identifie  $H_{0,2} = 1$  et  $f_{0,2} = \frac{1}{2\pi RC}$ .

12. La fréquence de coupure du filtre  $F_1$  est très supérieure (plus d'une décade) à la fréquence du signal d'entrée. Le signal de sortie sera donc le signal dérivé du signal d'entrée au facteur multiplicatif près  $\frac{1}{2\pi f_{0,1}} \simeq \frac{1}{2\pi \times 9 \times 10^2}$ . Le signal de sortie sera donc d'amplitude quasi nulle. La composante continue (de fréquence nulle) est totalement coupée ce qui signifie que le signal de sortie sera de valeur moyenne nulle. Le système étant linéaire le signal de sortie sera donc un signal créneau de valeur moyenne nulle, de fréquence 10 Hz. Puisque le signal d'entrée à une pente de  $\pm 400 \text{ V s}^{-1}$ , le signal de sortie aura une amplitude de  $400 \times 0,5 \times \frac{1}{2\pi \times 9 \times 10^2} \simeq 36 \text{ mV}$ .

### III.C Résolution de problème

13. Les valeurs de  $H_0$  diffèrent et le filtre  $F_2$  ne peut donc pas correspondre au filtre  $F_1$ .
14. On peut imaginer le circuit suivant :

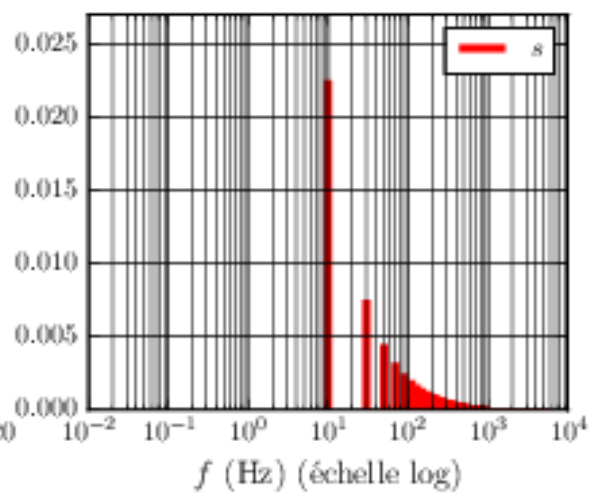
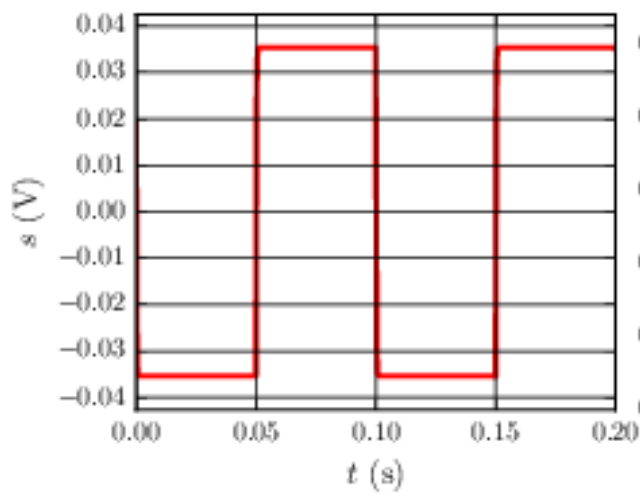
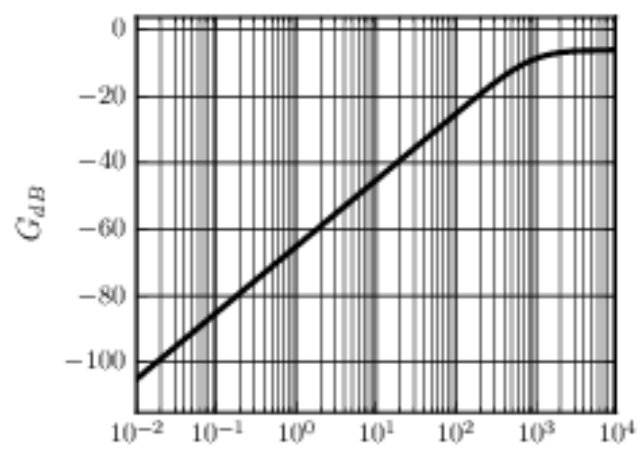
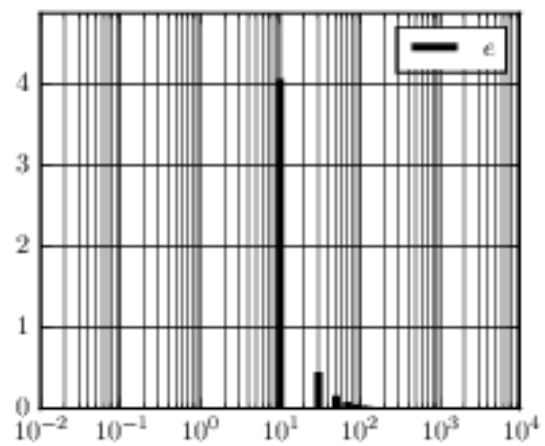
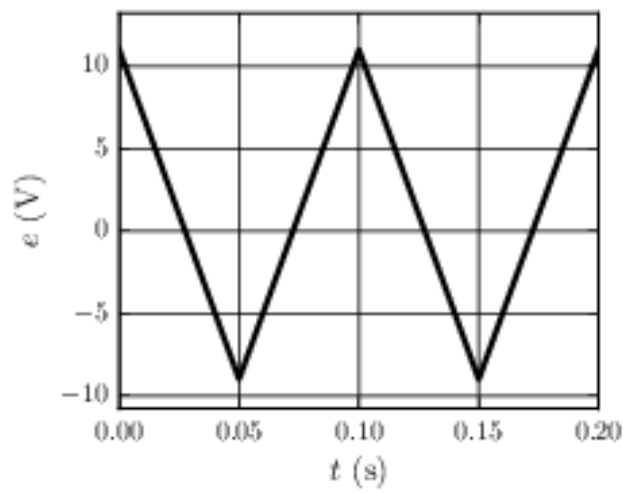


On a alors :

$$\underline{H}(f) = \frac{R}{R + R + \frac{1}{jC \times 2\pi \times f}} = \frac{H_0}{1 - j \frac{f_0}{f}}$$

Dans ce montage, on a  $H_0 = 1/2$  comme souhaité et  $f_0 = \frac{1}{2\pi \times 2RC}$ .

- 15.** Pour éviter tout problème lié au caractère réel des sources et des appareils de mesure, on choisira  $R = 10 \text{ k}\Omega$ . Cela conduit à prendre  $C = 9 \text{ nF}$  qui est une valeur tout à fait accessible au laboratoire.



## Annexe - Courbes à produire

