– Correction du DS (1) de physique-chimie –
Analyse dimensionnelle et & électrocinétique

I Résistance à l'avancement d'un bateau

1. En utilisant les notations M (masse), L (longueur) et T (temps), on a :

- $[g] = [\text{accélération}] = \mathrm{L\,T^{-2}}$
- $[\rho] = \dfrac{[\text{masse}]}{[\text{volume}]} = \mathrm{M\,L^{-3}}$
- $[R] = [\text{force}] = [mg] = \mathrm{M\,L\,T^{-2}}$
- $[\nu] = \dfrac{[\eta]}{[\rho]} = \dfrac{[\text{force}][\text{longueur}]}{[\text{vitesse}][\text{surface}][\rho]} = \dfrac{\mathrm{M\,L\,T^{-2}} \times \mathrm{L}}{\mathrm{L\,T^{-1}} \times \mathrm{L^2} \times \mathrm{M\,L^{-3}}} = \mathrm{L^2\,T^{-1}}$

Résumons les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous :

Grandeur	Notation	Équation aux dimensions
Longueur caractéristique du navire	ℓ	L
Vitesse d'avance	U	$\mathrm{L\,T^{-1}}$
Accélération de la pesanteur	g	$\mathrm{L\,T^{-2}}$
Masse volumique de l'eau	ρ	$\mathrm{M\,L^{-3}}$
Force de résistance à l'avancement	R	$\mathrm{M\,L\,T^{-2}}$
Viscosité cinématique de l'eau	ν	$\mathrm{L^2\,T^{-1}}$

2. Compte tenu de l'expression fournie, on peut écrire :

$$[R] = [k][\rho]^\alpha[\ell]^\beta[U]^\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{M\,L\,T^{-2}} = 1 \times \mathrm{M^\alpha\,L^{-3\alpha}} \times \mathrm{L^\beta} \times \mathrm{L^\gamma\,T^{-\gamma}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{M\,L\,T^{-2}} = \mathrm{M^\alpha\,L^{\beta+\gamma-3\alpha}\,T^{-\gamma}}$$

Il en découle :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta + \gamma - 3\alpha = 1 \\ -\gamma = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}}$$

d'où finalement

$$\boxed{R = k\rho\ell^2U^2}$$

3. (a) Pour trouver a et b, exploitons le fait que les deux membres de l'équation ont même dimension :

$$[Re] = \frac{[\ell]^a[U]^b}{[\nu]} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{\mathrm{L}^a \times \mathrm{L}^b\,\mathrm{T}^{-b}}{\mathrm{L^2\,T^{-1}}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L^2\,T^{-1}} = \mathrm{L}^{a+b}\,\mathrm{T}^{-b} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a = b = 1}$$

ou encore

$$\boxed{Re = \frac{\ell U}{\nu}}$$

(b) De même :

$$[Fr] = \frac{[U]}{[g]^c[\ell]^d} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{\mathrm{L\,T^{-1}}}{\mathrm{L}^c\,\mathrm{T}^{-2c} \times \mathrm{L}^d} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L\,T^{-1}} = \mathrm{L}^{c+d}\,\mathrm{T}^{-2c} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c = d = \frac{1}{2}}$$

soit

$$\boxed{Fr = \frac{U}{\sqrt{g\ell}}}$$

4. (a) En égalisant les nombres de Reynolds et les nombres de Froude du bateau et de sa maquette, on obtient :

$$\frac{\ell_r U_r}{\nu_r} = \frac{\ell U_m}{\nu_m} \qquad \text{et} \qquad \frac{U_r}{\sqrt{g\ell_r}} = \frac{U_m}{\sqrt{g_m \ell_m}}$$

Dans l'hypothèse $\nu_m = \nu_r$, ces deux relations fournissent respectivement :

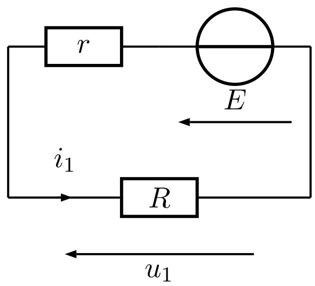
$$\boxed{\frac{U_m}{U_r} = \frac{1}{e}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{U_m}{U_r} = \sqrt{e}}$$

(b) Les deux expressions précédentes sont $\boxed{\text{incompatibles sauf pour } e = 1}$, c'est-à-dire quand la maquette possède des dimensions identiques à l'original.

(c) Pour une maquette telle que $e = \dfrac{1}{16}$, la relation $U_m = U_r\sqrt{e}$ conduit à $U_m = \dfrac{U_r}{4}$. Numériquement, on trouve $\boxed{U_m = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$.

II Système d'éclairage

1. Schéma :



2. Il s'agit d'une représentation dite de Thévenin.

3. Par définition, la puissance électrique algébriquement reçue par un dipôle en convention récepteur s'écrit :

$$\boxed{P_1 = u_1 i_1}$$

et d'après la loi d'Ohm en convention récepteur $u_1 = Ri_1$. On a ainsi :

$$\boxed{P_1 = Ri_1^2}$$

4. La loi des mailles appliquée au circuit ci-dessus s'écrit :

$$E = u_r + u_1$$

Ainsi, toujours d'après la loi d'Ohm en convention récepteur :

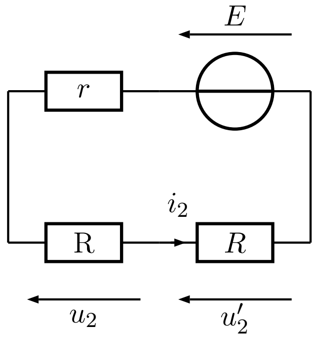
$$E = (R+r)i_1 \quad \text{soit} \quad \boxed{i_1 = \frac{E}{R+r}}$$

On remplace i_1 par cette expression dans celle de la puissance P_1 :

$$\boxed{P_1 = \frac{RE^2}{(R+r)^2}}$$

5. L'application numérique donne : $\boxed{P_1 = 0{,}55\,\text{W}}$.

6. Pour deux ampoules en série, le circuit est le suivant :



7. Les deux ampoules sont en série, elles sont donc parcourues par le même courant. De plus, elles sont modélisées par un même conducteur ohmique de résistance R. D'après la loi d'Ohm, on a donc en convention récepteur :

$$\boxed{u_2 = Ri_2 = u_2'}$$

Les deux tensions sont bien égales.

8. En adoptant la même démarche que dans la partie précédente (loi des mailles et loi d'Ohm), on obtient :

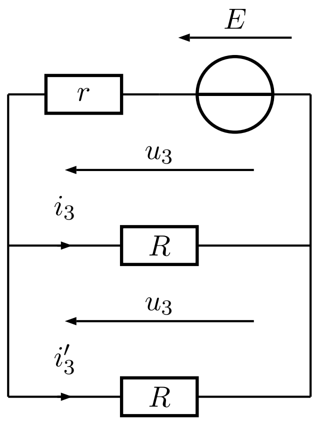
$$\boxed{i_2 = \frac{E}{2R + r}}$$

Chaque ampoule recevra donc la puissance algébriquement reçue :

$$\boxed{P_2 = u_2 i_2 = Ri_2^2 = \frac{RE^2}{(2R + r)^2}}$$

9. L'application numérique donne cette fois : $\boxed{P_2 = 0{,}28\,\mathrm{W}}$

10. <u>Schéma</u> :



11. Pour deux ampoules en parallèle, on obtient u_3 en associant les deux résistances. On a alors u_3 qui correspond à la tension aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance équivalente $R/2$. On peut alors déterminer u_3 en reconnaissant un diviseur de tension (et en tenant compte de la convention choisie) :

$$\boxed{u_3 = \frac{R/2}{R/2 + r}E = \frac{R}{R + 2r}E}$$

12. On en déduit l'expression de la puissance P_3 :

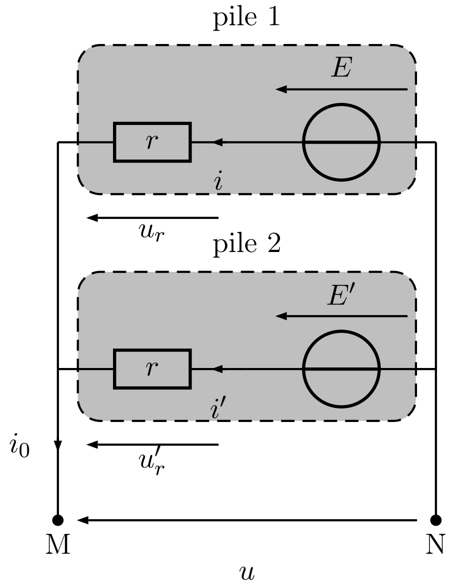
$$\boxed{P_3 = u_3^2/R = \frac{RE^2}{(R + 2r)^2}} \quad \text{AN :} \quad \boxed{P_3 = 0{,}22\,\mathrm{W}}$$

13. Pour avoir un éclairage maximal, il convient donc d'associer les ampoules en série puisque :

$$\boxed{2P_2 \simeq P_1 > 2P_3}$$

<u>Remarque</u> : avec deux chiffres significatifs, les montages à une ampoule et à deux ampoules en série semblent consommer la même puissance et donc fournir le même éclairage. Par le calcul, on montre que $2P_2 > P_1$ pour $r > \sqrt{2}R$.

14. On reproduit ci-dessous le dipôle fourni par l'énoncé et on l'annote :



On note u la tension du dipôle MN et i_0 l'intensité du courant le traversant en convention générateur. D'après la loi d'additivité des tensions, on obtient deux relations :

$$u = E - ri \quad (1)$$

$$u = E' - ri' \quad (2)$$

et la loi des noeuds ajoute une troisième relation indépendante :

$$i_0 = i + i'$$

On dispose de trois équations pour quatre inconnues i_0, i, i' et u. On peut donc exprimer i_0 en fonction de u :

$$i_0 = i + i' = \frac{E - u}{r} + \frac{E' - u}{r} = \frac{E + E'}{r} - \frac{2u}{r} \quad (3)$$

ou encore

$$\boxed{u = \frac{E + E'}{2} - \frac{r}{2}\, i_0}$$

Cette dernière équation correspond à la relation tension/courant en convention générateur d'une source réelle de tension dont on identifie les caractéristiques :

$$\boxed{E_{\text{éq}} = \frac{E + E'}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{éq}} = \frac{R}{2}}$$

15. On s'est ramené à la deuxième partie du problème (résistors en série) avec ici $i \to I$, $E \to E_{\text{éq}}$ et $r \to R_{\text{éq}}$. On en déduit donc directement :

$$I = \frac{E_{\text{éq}}}{2R + R_{\text{éq}}} = \frac{E + E'}{2\,(2R + r/2)}$$

soit :

$$\boxed{I = \frac{E+E'}{4R+r}}$$

16. On en déduit la puissance P_4 consommée par une des deux ampoules :

$$P_4 = \frac{R(E+E')^2}{(4R+r)^2}$$

et ainsi :

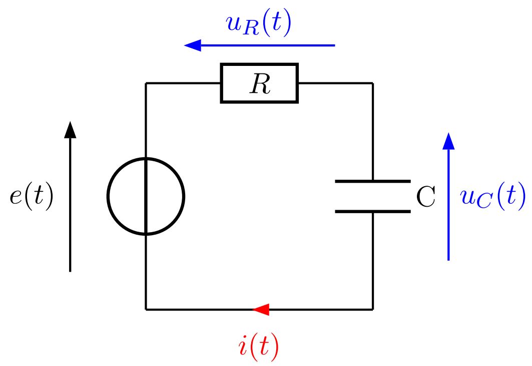
$$\boxed{E'_{\max} = (4R+r)\sqrt{\frac{P_{\max}}{R}} - E} \quad \text{AN :} \quad \boxed{E'_{\max} = 11\,\mathrm{V}}$$

17. Dans le cas de système d'éclairage à une ampoule ou à deux ampoules en série, si l'une des ampoules grille, elle n'est plus conductrice et peut donc être modélisée par un interrupteur ouvert (ou un résistor de résistance infini). Par conséquent, la puissance électrique reçue par ces résistors est nulle. Il n'y a plus d'éclairage.
Dans le cas de deux (ou plus) résistors en parallèle, si l'une des ampoules grille, l'intensité du courant dans la branche de l'ampoule grillée est nulle mais pas dans l'autre branche. La deuxième ampoule pourra alors fonctionner normalement tant que la puissance électrique qu'elle reçoit n'excède pas $P_{\max}$.

18. Compte tenu de ce qui précède, il est donc préférable de montre les ampoules en parallèle tout en s'assurant que la tension de la source n'est pas trop élevée.

III Questions de cours sur le circuit RC série

On redonne le schéma fourni du circuit.



1. L'application de la loi des mailles et des relations courant/tension $u_R = Ri$ et $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ en convention récepteur donne :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = RC}$$

2. La solution de l'équation homogène s'écrit $u_{C,h}(t) = Ae^{-t/\tau}$. Une solution particulière est $u_{C,p}(t) = E$. On a donc une solution générale de la forme :

$$u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

Avec la condition initiale $u_C(t=0) = \dfrac{q_0}{C}$, on en déduit :

$$\boxed{A = \frac{q_0}{C} - E}$$

et

$$\boxed{u_C(t) = \frac{q_0}{C}e^{-t/\tau} + E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

3. L'expression obtenue ci-dessus montre que $u_C(t) \to E$ quand $t \to \infty$.
Remarque : on peut retrouver ce résultat en étudiant le circuit en régime continu soumis à la tension constante E.

4. On observe que le graphe de u_C tend vers la valeur 5 V aux temps longs. On en déduit immédiatement que $\boxed{E = 5\,\text{V}}$. De plus, à $t = 0$, $u_C = \dfrac{q_0}{C}$ qui correspond donc à la valeur 9 V. Pour $t = \tau$, l'expression de la tension aux bornes du condensateur est $u_C(\tau) = \left(\dfrac{q_0}{C} - E\right)e^{-t/\tau} + E \simeq 6{,}48\,\text{V}$. On note A le point d'intersection de ce niveau de tension avec la courbe de u_C sur le graphe et on relève l'abscisse de A. On en déduit $\tau = 220\,\mu\text{s}$ et donc $\boxed{C = \tau/R = 22\,\text{nF}}$. Avec la valeur précédemment obtenue de q_0/C on en déduit finalement $\boxed{q_0 = 198\,\text{nC}}$

5. La relation courant/tension du condensateur permet d'exprimer l'intensité i :

$$i(t) = C\left(-\frac{q_0}{C\tau}e^{-t/\tau} + \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau}\right)$$

soit :

$$\boxed{i(t) = \left(\frac{E}{R} - \frac{q_0}{\tau}\right)e^{-t/\tau}}$$

6. On peut réécrire l'expression de i pour établir plus facilement le signe du coefficient pré-exponentiel :

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(E - \frac{q_0}{C}\right)e^{-t/\tau}$$

Ainsi, comme $E - \dfrac{q_0}{C} < 0$, on peut tracer l'allure de $i(t)$ (cf ci-dessous).

7. Au cours de la phase transitoire le dipôle RC série a algébriquement reçu de la source :

$$\mathcal{E}_e = \int_{t=0}^{t\to+\infty} Ei(t)\mathrm{d}t = \frac{E}{R}\left(E - \frac{q_0}{C}\right)\int_{t=0}^{t\to+\infty} e^{-t/\tau}\mathrm{d}t = -CE\left(E - \frac{q_0}{C}\right)\left[e^{-t/\tau}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_e = CE\left(E - \frac{q_0}{C}\right)} \quad \text{A.N.} \quad \boxed{\mathcal{E}_e = -0{,}440 \times 10^{-6}\ \text{J}}$$

8. On procède de même pour les deux énergies algébriquement reçues :

- ⋆ pour le résistor :

$$\mathcal{E}_R = \int_{t=0}^{t\to+\infty} Ri^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{R}\left(E - \frac{q_0}{C}\right)^2\int_{t=0}^{t\to+\infty} e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = -\frac{C}{2}\left(E - \frac{q_0}{C}\right)^2[0 - (1)]$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_R = \frac{C}{2}\left(E - \frac{q_0}{C}\right)^2} \quad \text{A.N.} \quad \boxed{\mathcal{E}_R = 0{,}176 \times 10^{-6}\ \text{J}}$$

- ⋆ pour le condensateur :

$$\mathcal{E}_R = \int_{t=0}^{t\to+\infty} u_C(t)i(t)\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t\to+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)\mathrm{d}t$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{C}{2}\left(E^2 - \left(\frac{q_0}{C}\right)^2\right)} \quad \text{A.N.} \quad \boxed{\mathcal{E}_C = -0{,}616 \times 10^{-6}\ \text{J}}$$

9. Le deux derniers résultats montrent que la résistance a fonctionné en mode récepteur (c'est toujours le cas) et que le condensateur a fonctionné en mode récepteur. Le premier résultat montre quant à lui que la source idéale de tension a fonctionné en mode récepteur puisque c'est le circuit RC série qui a fourni une énergie algébriquement positive à la source.

Remarque : on note que la conservation de l'énergie est bien vérifiée ici.