Annexes de Cours

Charles Tuchendler

MPSI 4 – Lycée Saint-Louis

2018/2019

Table des matières

annexe H

Outils Vectoriels

Sommaire

I Vecteurs

Définition H.1 – Vecteur de l'espace

Un **vecteur** est défini par sa **direction** (celle de la droite qui porte le vecteur), son **sens** (celui de la flèche qui oriente le vecteur) et sa **norme**.

II Produit scalaire

II.1 Définition projective et premières propriétés

Définition H.2 – Produit scalaire de deux vecteurs

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$, est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \triangleq \|\overrightarrow{A}\| \times \|\overrightarrow{B}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}}\right)} \tag{H.1}$$

où $\|\overrightarrow{A}\|$ et $\|\overrightarrow{B}\|$ sont respectivement les normes de $\overrightarrow{A}$ et de $\overrightarrow{B}$ et où $\widehat{\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}}$ est l'angle orienté de $\overrightarrow{A}$ vers $\overrightarrow{B}$.

Propriété H.1 – Produit scalaire de deux vecteurs

- ⋆ Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est donc nul : $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B} \Rightarrow \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$.
- ⋆ En outre, le produit scalaire possède la plupart des propriétés d'un produit (commutativité, distributivité par rapport à l'addition, règle de dérivation, ...).

Exemple :

- ⋆ $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}$
- ⋆ $\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}$
- ⋆ $\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t}$

II.2 Norme d'un vecteur

Définition H.3 – Norme d'un vecteur

Compte tenu de la relation H.1, la **norme** $\|\overrightarrow{A}\|$ d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ peut être redéfinie à partir du produit scalaire :

$$\boxed{\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A}}} \tag{H.2}$$

Remarque : La norme d'un vecteur est toujours positive ou nulle.

II.3 Base orthonormée

Définition H.4 – Base et base orthonormée de l'espace

- ⋆ On dit de **trois vecteurs non coplanaires** qu'ils forment une **base** de l'espace.
- ⋆ Un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ constitue une **base orthonormée** [a] si et seulement si :

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0, \quad \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0, \quad \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0 & \text{(vecteurs de base orthogonaux 2 à 2)} \\ \|\overrightarrow{u_1}\| = \sqrt{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1}} = \|\overrightarrow{u_2}\| = \|\overrightarrow{u_3}\| = 1 & \text{(norme des vecteurs de base égale à 1)} \end{cases}} \tag{H.3}$$

a. Vous connaissez par exemple la base cartésienne $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ qu'on notera plutôt cette année $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.

II.4 Décomposition d'un vecteur sur une base

Propriété H.2 – Composantes ou projections d'un vecteur

Tout vecteur $\overrightarrow{A}$ de l'espace admet une **décomposition unique** sur une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ donnée :

$$\boxed{\overrightarrow{A} = A_1\overrightarrow{u_1} + A_2\overrightarrow{u_2} + A_3\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}} \tag{H.4}$$

Remarques :

- ⋆ Les $A_i\overrightarrow{u_i}$ sont les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{A}$ dans la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.
- ⋆ D'un point de vue géométrique, **une projection correspond à une longueur algébrique**. Contrairement à la norme, **une projection peut ainsi prendre des valeurs négatives**.

Définition H.5 – Coordonnées d'un vecteur dans une base

Les $A_i\overrightarrow{u_i}$ vérifient les relations : $\boxed{A_i\overrightarrow{u_i} = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{u_i}\right)\overrightarrow{u_i} \quad \text{soit} \quad A_i = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{u_i}}$ avec $(i = 1, 2, 3)$.

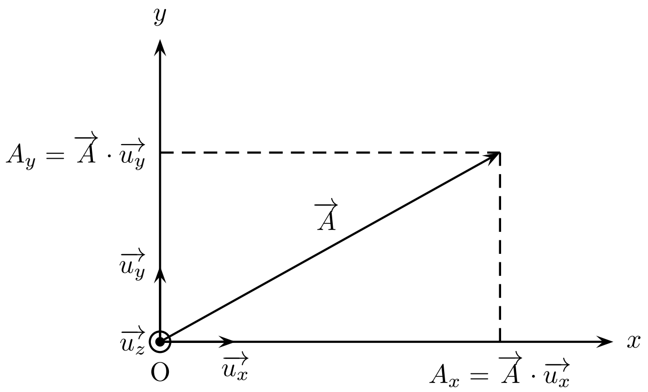
Les A_i sont alors appelées les **coordonnées** de $\overrightarrow{A}$ dans la base des vecteurs $\overrightarrow{u_i}$.

Démonstration 1 – Cas de A_1

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{u_1} = (A_1\overrightarrow{u_1} + A_2\overrightarrow{u_2} + A_3\overrightarrow{u_3}) \cdot \overrightarrow{u_1} = A_1\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} + A_2\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_1} + A_3\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_1} = A_1 + 0 + 0 = A_1$$

En pratique, il faut calculer [a] ces coordonnées avant de pouvoir décomposer un vecteur comme dans la relation H.4 en utilisant les données fournies dans un énoncé de problème.

a. Ce qu'on peut faire le plus souvent de tête, avec un peu d'entraînement ...



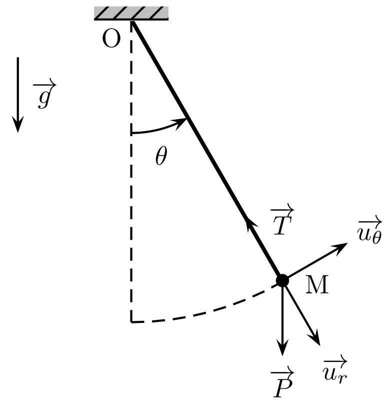


FIGURE H.1 – ***A gauche*** *: décomposition d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ quelconque dans la base orthonormée plane $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y)$.* ***A droite*** *: Schéma de l'expérience du pendule simple soumis à deux forces : le poids et la force de tension du fil.*

Exercice H.1 – Pendule simple

Par exemple, un objet M de masse m accroché au bout d'un fil tendu est soumis à deux forces :

- son poids $\overrightarrow{P}$,
- la tension $\overrightarrow{T}$ du fil.

Décomposer ces deux vecteurs sur la base orthonormée $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ du plan comme indiqué sur la figure II.4.

- $\overrightarrow{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_r}$; on a donc directement :

$$\overrightarrow{T} = T_r\overrightarrow{u_r} + 0 \times \overrightarrow{u}_\theta$$

ou encore $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$ avec $T = -T_r > 0$.

- $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ a pour projections respectivement sur $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$:

$$\overrightarrow{P} = P_r\overrightarrow{u}_r + P_\theta\overrightarrow{u}_\theta$$

avec $P_r = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{u_r} = \|\overrightarrow{P}\| \times \|\overrightarrow{u_r}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{P}, \overrightarrow{u_r}}\right) = mg \times 1 \times \cos\theta$

et $P_\theta = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{u_\theta} = \|\overrightarrow{P}\| \times \|\overrightarrow{u_\theta}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{P}, \overrightarrow{u_\theta}}\right) = mg \times 1 \times \cos(\theta + \pi/2) = -mg\sin\theta$

d'où finalement :

$$\overrightarrow{P} = mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta} = mg(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$$

Propriété H.3 – Produit scalaire et norme en fonction des composantes

Compte tenu des relations H.2 et H.4, on obtient aisément que :

$$\boxed{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3} \tag{H.5}$$

et

$$\boxed{\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \tag{H.6}$$

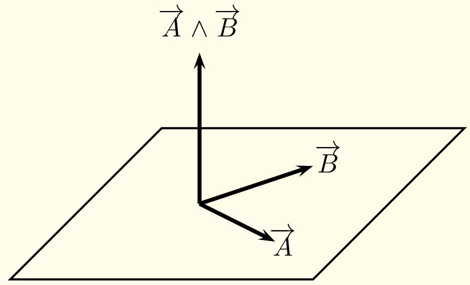
III Produit vectoriel

III.1 Définition et premières propriétés

Définition H.6 – Produit vectoriel de deux vecteurs

Le **produit vectoriel** de $\overrightarrow{A}$ par $\overrightarrow{B}$, noté $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$, est un **vecteur** tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{A} \text{ et } \overrightarrow{B} \\ \overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B} \text{ et } \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} \text{ forme un trièdre direct}^{1} \\ \|\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\| = \|\overrightarrow{A}\| \times \|\overrightarrow{B}\| \times \left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}}\right)\right| \end{cases} \quad \text{(H.7)}$$



1. En utilisant votre main droite, si vous orientez votre pouce selon le vecteur $\overrightarrow{A}$ et votre index selon le vecteur $\overrightarrow{B}$, alors votre majeur donne la direction du vecteur $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}$.

III.2 Comportement des vecteurs d'une base orthonormée directe

Propriété H.4 – Base orthornormée et produit vectoriel

Les vecteurs $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3)$ d'une base orthonormée directe vérifient les propriétés suivantes (en plus de celles énoncées au paragraphe II.3) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_3, \quad \overrightarrow{u}_2 \wedge \overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{u}_1, \quad \overrightarrow{u}_3 \wedge \overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{u}_2 & \text{(permutation circulaire)} \\ \overrightarrow{u}_i \wedge \overrightarrow{u}_j = -\overrightarrow{u}_j \wedge \overrightarrow{u}_i \qquad (i,j = 1,2,3 \text{ avec } i \neq j) & \text{(antisymétrie)} \\ \overrightarrow{u}_i \wedge \overrightarrow{u}_i = \overrightarrow{0} \qquad (i,j = 1,2,3) & \text{(colinéarité)} \end{cases}$$

III.3 Expression du produit vectoriel en fonction des projections

Propriété H.5 – Produit vectoriel et projection

En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sur la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} &= (A_1\overrightarrow{u}_1 + A_2\overrightarrow{u}_2 + A_3\overrightarrow{u}_3) \wedge (B_1\overrightarrow{u}_1 + B_2\overrightarrow{u}_2 + B_3\overrightarrow{u}_3) \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)\overrightarrow{u_1} + (A_3B_1 - A_1B_3)\overrightarrow{u_2} + (A_1B_2 - A_2B_1)\overrightarrow{u_3} \end{aligned}$$

Il est possible de retrouver rapidement ce résultat avec un moyen mnémotechnique utilisant la notation vectorielle en colonne :

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}$$

III.4 Propriétés du produit vectoriel

Propriété H.6 – Propriétés de base sur le produit vectoriel

- ⋆ Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul : $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B} \Rightarrow \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.
- ⋆ Il est antisymétrique : $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{A}$.

❑ Distributivité

$$\boxed{\overrightarrow{A} \wedge \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{C}}$$

❑ Multiplication par un scalaire

$$\boxed{\lambda\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \lambda\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} \wedge \lambda\overrightarrow{B}}$$

❑ Produit mixte

$$\boxed{\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{C} \cdot \left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{B} \cdot \left(\overrightarrow{C} \wedge \overrightarrow{A}\right)}$$

❑ Double produit vectoriel

$$\boxed{\overrightarrow{A} \wedge \left(\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) - \overrightarrow{C}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)}$$

❑ Dérivation

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{B}}{\mathrm{d}t}}$$