

– DS (1) de physique-chimie –

Analyse dimensionnelle & électrocinétique

Le samedi 3 octobre 2020 - Durée 3h

Prologomènes : vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction !

- Les fautes de français et les copies mal présentées seront pénalisées.
 - N'utilisez que des **copies doubles** que vous devrez **numéroter en indiquant le total** (par exemple 1/3, 2/3, 3/3).
 - Une **marge** doit être laissée pour la correction sur la partie **gauche** de votre copie.
 - Les réponses non justifiées et les applications numériques ne comportant pas d'unité **seront ignorées**.
 - Vous prendrez soin de bien **numéroter les questions** et **d'encadrer vos réponses**.
-

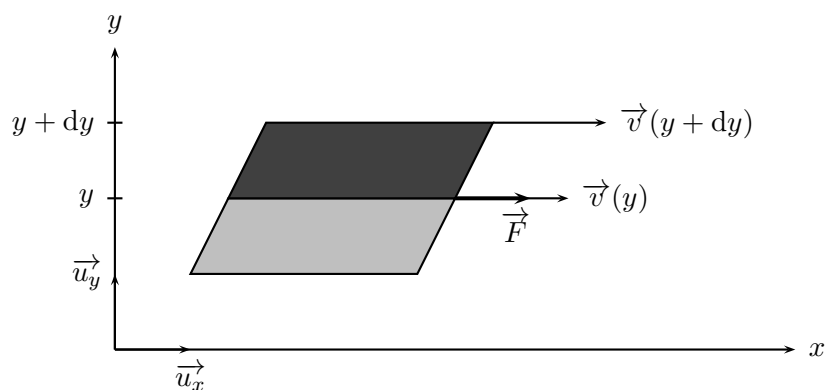
I Résistance à l'avancement d'un bateau

La résistance à l'avancement est un sujet important de l'hydrodynamique navale car il s'agit de déterminer l'effort à vaincre pour déplacer un engin maritime.

Historiquement, c'est l'un des premiers thèmes étudiés en hydrodynamique navale, discipline apparue au XVIII^e siècle. C'est à la suite des travaux de d'Alembert, puis de Reech et de Froude, que la théorie de la similitude appliquée au problème de la résistance à l'avancement a été mise au point, théorie qui régit maintenant toute expérience sur modèle réduit. C'est aussi un domaine complexe qui pose encore aujourd'hui des problèmes non résolus du point de vue de la recherche. C'est enfin un sujet vital pour la connaissance des performances d'un navire car la résistance à l'avancement est nécessaire pour dimensionner l'appareil propulsif à mettre à bord.

Par définition, on appelle résistance à l'avancement d'un engin, notée R , l'amplitude de la force qu'il faut exercer sur lui pour le déplacer d'un mouvement rectiligne uniforme à vitesse constante sur une mer complètement calme. La connaissance de cette résistance donne une première idée de la puissance à installer à bord qui doit être au moins égale au produit de la résistance par la vitesse d'avance.





- Supposons le cas simple où deux volumes élémentaires de fluide glissent l'un sur l'autre dans des plans horizontaux. Notons $\vec{v}(y) = v(y)\vec{u}_x$ la vitesse du fluide à l'altitude y en régime stationnaire. Le volume élémentaire du dessus exerce sur le volume élémentaire du dessous une force de cisaillement, ou force de viscosité, d'expression :

$$\vec{F} = \eta \frac{dv}{dy} S \vec{u}_x$$

où S est la surface de contact entre les deux volumes élémentaires et η le coefficient de viscosité dynamique.

- On définit également le coefficient de viscosité cinématique ν comme le rapport du coefficient de viscosité dynamique sur la masse volumique ρ du fluide :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

- Compléter le tableau ci-dessous (à reproduire sur la copie) en déterminant les équations aux dimensions de toutes les grandeurs nécessaires à la description du phénomène étudié. On utilisera les notations suivantes : M (masse), L (longueur) et T (temps). Les raisonnements seront justifiés et on pourra s'aider du DOCUMENT 1 pour établir la dimension de ν .

Grandeur	Notation	Équation aux dimensions
Longueur caractéristique du navire	ℓ	L
Vitesse d'avance	U	L T ⁻¹
Accélération de la pesanteur	g	
Masse volumique de l'eau	ρ	
Force de résistance à l'avancement	R	
Viscosité cinématique de l'eau	ν	

- On cherche la force de résistance à l'avancement sous la forme :

$$R = k \rho^\alpha \ell^\beta U^\gamma$$

où k est une constante sans dimension. Par analyse dimensionnelle, déterminer les valeurs des coefficients α , β et γ . Conclure en fournissant l'expression de R .

3. La constante k introduite à la question précédente est en réalité une fonction $k = f(Re, Fr)$ où Re et Fr sont deux grandeurs adimensionnées appelées respectivement nombre de Reynolds et nombre de Froude. On pose :

$$Re = \frac{\ell^a U^b}{\nu} \quad \text{et} \quad Fr = \frac{U}{g^c \ell^d}$$

- (a) Déterminer les valeurs des constantes a et b permettant d'adimensionner le nombre de Reynolds. Conclure en fournissant l'expression de Re .
- (b) Trouver de même c et d permettant d'adimensionner le nombre de Froude et conclure en fournissant l'expression de Fr .
4. Au XIX^e siècle, William Froude eut l'idée de construire des bassins de traction dans lesquels on mesure la résistance à l'avancement sur une maquette du navire à une échelle réduite. On affecte d'un indice r (pour réel) les grandeurs à l'échelle réelle et d'un indice m (pour modèle) les grandeurs à l'échelle de la maquette. Le rapport d'échelle e est défini par :

$$e = \frac{\ell_m}{\ell_r}$$

Pour que l'essai sur le modèle représente une situation physique identique au remorquage sur le navire réel, il faut, outre le fait que la géométrie du navire soit respectée sur la maquette, qu'on ait le même nombre de Froude et le même nombre de Reynolds au réel et au modèle. Les coefficients de viscosité de l'eau de mer et de l'eau douce (en bassin) ayant des valeurs très proches, on peut écrire $\nu_m = \nu_r$.

- (a) Établir deux expressions distinctes du rapport $\frac{U_m}{U_r}$ en fonction de e uniquement.
- (b) Les deux expressions précédentes sont-elles compatibles pour e quelconque ?
- (c) En hydrodynamique navale, on privilégie généralement le respect de l'égalité du nombre de Froude. Dans ces conditions, à quelle vitesse une maquette au 1/16 d'un bateau de 60 m se déplaçant à $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en mer doit-elle se déplacer en bassin ?

II Étude d'un système d'éclairage

Le but de ce problème est d'optimiser un système d'éclairage. Nous nous proposons d'étudier ici différents circuits et de déterminer lequel d'entre eux fournit la puissance maximale pour l'éclairage.

On considérera dans tout le problème que toutes les ampoules sont identiques, notée A , et qu'elles sont chacune bien modélisées par un simple conducteur ohmique de résistance R .

Données : $E = 4,5 \text{ V}$, $R = 6,2 \Omega$ et $r = 8,9 \Omega$.

II. A Système à une ampoule

On alimente dans un premier une unique ampoule par une pile de force électromotrice (f.é.m) E et de résistance interne r comme indiqué sur le schéma ci-dessous :

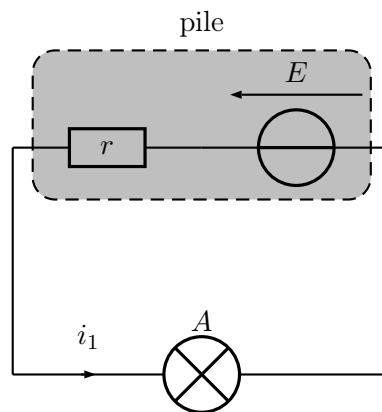


FIGURE 1 – Circuit à une ampoule

On note i_1 l'intensité du courant parcourant le circuit ci-dessus.

1. Reproduire le circuit sur la copie et y indiquer la tension u_1 aux bornes de l'ampoule en convention récepteur.
2. Quel nom donne-t-on à la représentation utilisée pour schématiser la pile ?
3. Donner l'expression de la puissance électrique P_1 reçue par l'ampoule en fonction u_1 et i_1 puis en fonction de R et i_1 uniquement.
4. Déterminer l'intensité i_1 traversant l'ampoule en fonction de E , R et r et en déduire l'expression de P_1 .
5. En déduire la valeur numérique de P_1 .

II. B Système à deux ampoules

Avec cette même pile, on veut maintenant alimenter deux ampoules.

Dans un premier temps, on branche ces deux ampoules **en série**.

6. Faire un schéma du montage en y faisant figurer l'intensité, notée i_2 , du courant traversant les ampoules et les tensions u_2 et u'_2 aux bornes de chacune des ampoules en convention récepteur.
7. Montrer que $u_2 = u'_2$.

8. Établir l'expression de l'intensité i_2 , puis celle de la puissance électrique P_2 reçue par **chacune** des deux ampoules en fonction de E , r et R .
9. Calculer sa valeur numérique de P_2 .

On branche maintenant les deux ampoules **en parallèle**.

10. Faire un schéma du montage.
11. Déterminer l'expression de la tension u_3 aux bornes des deux ampoules en parallèle en fonction de E , r et R . On précisera bien la convention d'orientation choisie pour u_3 sur le schéma du montage.
12. En déduire l'expression de la puissance P_3 reçue par **une** des deux ampoules en fonction de E , r et R et calculer sa valeur numérique.
13. On suppose pour simplifier que toute la puissance électrique reçue par les ampoules est convertie en puissance lumineuse. Si l'on souhaite un éclairage maximal, lequel des trois montages étudiés jusque là est le plus favorable ?

II. C Système d'éclairage à deux sources

On s'intéresse à nouveau au montage où les deux ampoules sont connectées en série et sont alimentées par la pile de f.é.m E et de résistance interne r (notée ici « pile 1 »). En parallèle de cette pile, on branche une deuxième pile (notée ici « pile 2 ») de même résistance interne r mais de f.é.m réglable notée E' . L'association en parallèle des deux piles est représentée sur la figure 2.

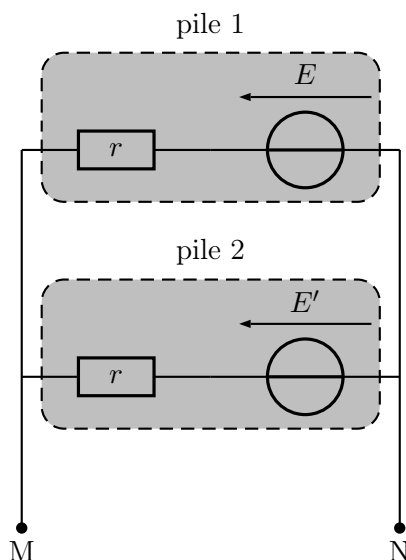


FIGURE 2 – Circuit à double alimentation

14. Montrer que l'association des deux piles est équivalente, entre les bornes M et N, à une unique source réelle de tension dont on déterminera les caractéristiques E_{eq} et R_{eq} en fonction de E , E' et r .
15. Établir alors l'expression de l'intensité I qui traverse les ampoules en fonction de r , R , E et E' .
16. On note P_{max} la puissance maximale que peut recevoir une ampoule sans être endommagée. Calculer la valeur maximale E'_{max} de la f.é.m E' que l'on peut imposer sans endommager les ampoules. On prendra : $P_{\text{max}} = 1,3 \text{ W}$.

II. D Et si l'une des ampoules grille ?

17. Discuter, en quelques lignes, suivants les cas, se qui se passerait si l'une des ampoules était grillée.
18. Serait-il alors préférable de monter les ampoules en série ou en parallèle ? On justifiera la réponse.

III Questions de cours sur le circuit RC série

On alimente un circuit constitué par l'association en série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C par une source de tension idéale émettant un échelon $u_e(t) = E$ pour $t \geq 0$ et 0 sinon. Le symbole t désigne le temps. On note $i(t)$ l'intensité du courant électrique délivré par la source en convention générateur.

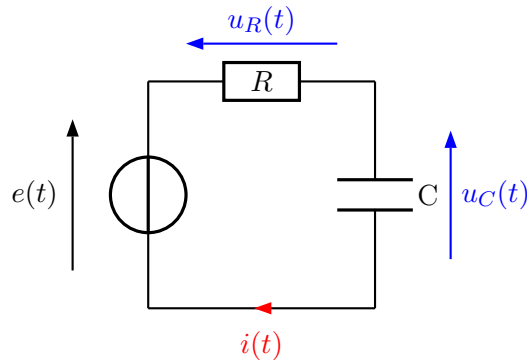


FIGURE 3 – Schéma électrique du circuit RC série

1. Établir l'équation différentielle du premier ordre qui régit l'évolution temporelle, pour $t \geq 0$, de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateurs ?
2. Déterminer l'expression de $u_C(t)$ en fonction du temps, solution de l'équation différentielle précédente, si à l'instant initial $t = 0$ le condensateur porte une charge $q(t = 0) = q_0$ telle que $u_C(t = 0) = \frac{q_0}{C}$.
3. Que vaut la tension u_C lorsqu'un régime continu s'établit après une phase transitoire ?
4. On a représenté sur la figure 4 l'évolution temporelle de u_C pour $R = 1,00 \times 10^4 \Omega$. Déterminer les valeurs de E , C et q_0 correspondant à la courbe fournie.
5. Quelle est l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant dans le circuit en fonction du temps ?
6. Représenter sur la copie l'allure de l'intensité i en fonction du temps.
7. On souhaite faire un bilan énergétique du circuit RC. Quelle est, à l'issue de la phase transitoire, l'expression de l'énergie électrique \mathcal{E}_e reçue algébriquement par le circuit RC série de la part de la source de tension ? Calculer sa valeur numérique.
8. Établir, à l'issue de la phase transitoire, les expressions de l'énergie \mathcal{E}_C reçue algébriquement par le condensateur et \mathcal{E}_R algébriquement reçue par le conducteur ohmique de la part de la source de tension et calculer leur valeur numérique.
9. En déduire le mode de fonctionnement de chacun des dipôles pendant le régime transitoire.

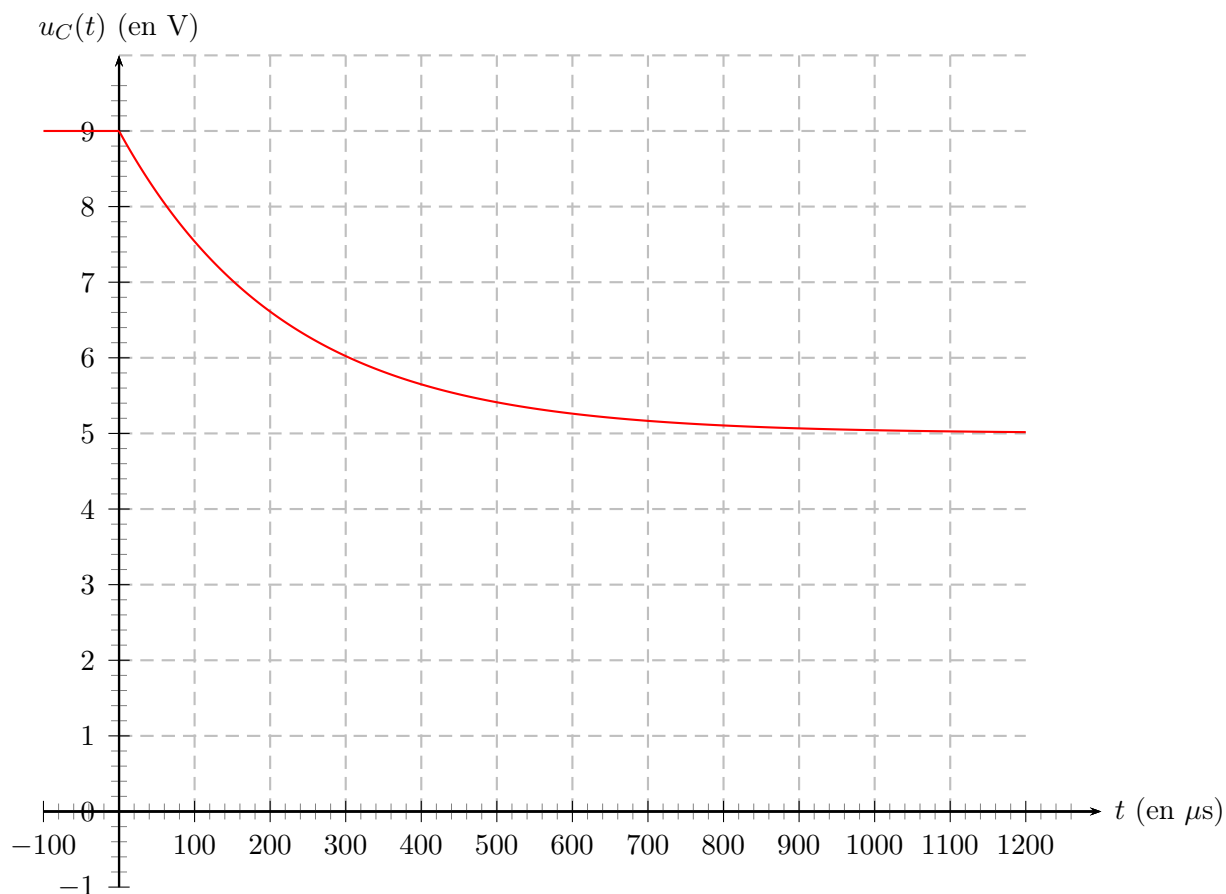


FIGURE 4 – Tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps. La résistance R vaut $1,00 \times 10^4 \Omega$

FIN DE L'ÉNONCÉ

* * *