Corrigé - DM n°8: Ondes

I Ondes sonores

1. La présence de nœuds et de ventres de vibration font penser à la présence d'une onde stationnaire entre les haut-parleurs. Ceci est cohérent aussi avec le fait que ceux-ci émettent deux ondes de même fréquence se propageant en sens inverse.

2. On suppose que les ondes se propagent sans déformation ni atténuation. Pour l'onde progressive émise par HP_1, ce qui se produit en x à l'instant t s'est produit en $x = 0$ à l'instant $t' = t - x/c$. Le signal émis en $x = 0$ étant de la forme $p_1(0, t) = P_0 \cos(2\pi f t + \varphi)$ on en déduit :

$$\boxed{p_1(x,t) = p_1(0,t') = P_0 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)}$$

Pour l'onde régressive émise par HP_2, ce qui se produit en x à t s'est produit en $x = d$ à l'instant $t' = t+(x-d)/c$. On en déduit de même :

$$\boxed{p_2(x,t) = p_1(0,t') = P_0 \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{x-d}{c}\right) + \varphi\right)}$$

3. D'après le principe de superposition, la surpression résultante $p(x, t)$ vérifie la relation :

$$p(x,t) = p_1(x,t) + p_2(x,t) = P_0\left[\cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) + \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{x-d}{c}\right) + \varphi\right)\right]$$

Avec les relations de trigonométrie, on en déduit :

$$\boxed{p(x,t) = 2P_0 \cos\left(\pi f \frac{2x-d}{c}\right)\cos\left(2\pi f t + \varphi - \pi f \frac{d}{c}\right)}$$

Cette expression est bien celle d'une onde stationnaire pour laquelle les variables spatiale et temporelle sont découplées.

4. D'après la question précédente, l'amplitude en un point x donné de l'onde stationnaire s'écrit :

$$\mathcal{A}(x) = 2P_0\left|\cos\left(\pi f \frac{2x-d}{c}\right)\right|$$

Lorsque cette amplitude est nulle, x représente la position d'un noeud de vibration, soit :

$$\pi\frac{2x_p - d}{c} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}$$

La distance e représentant la différence de position entre deux noeuds de vibration successifs, on a :

$$e = x_{p+1} - x_p \quad \text{avec} \quad x_p = \frac{d}{2} + (2p+1)\frac{c}{4f} \quad \text{et} \quad x_{p+1} = \frac{d}{2} + (2p+3)\frac{c}{4f}$$

On obtient alors la relation $e = \dfrac{c}{2f}$ soit :

$$\boxed{c = 2ef} \quad \text{A.N. :} \quad \boxed{c = 345\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Il s'agit de la valeur approché connue de la célérité d'une onde acoustique dans un air sec à 20 °C.

5. Quand on se rapproche d'un haut-parleur, l'amplitude du signal provenant de celui-ci devient plus importante que celle du signal provenant de l'autre haut-parleur. Dans ce cas, les minima d'amplitude obtenus ne sont plus nuls. Cette atténuation de l'amplitude avec la distance est principalement dû au fait que la propagation n'est pas unidimensionnelle.

6. Les ondes provenant des deux haut-parleurs s'écrivent maintenant :

$$p_1(x,t) = A_1 \cos\left(2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) \quad \text{et} \quad p_2(x,t) = A_2 \cos\left(2\pi f\left(t + \frac{x-d}{c}\right) + \varphi\right)$$

À x fixé, ces deux expressions correspondent à deux signaux synchrones dont le déphasage (de p_2 par rapport à p_1) s'écrit par définition :

$$\boxed{\Delta\varphi(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x) = 2\pi f\left(\frac{2x-d}{c}\right)}$$

7. Cette question n'impose pas clairement de démontrer la relation de Fresnel des interférences. On peut cependant le faire rapidement : soient $\overrightarrow{P}$ le vecteur de Fresnel associé à la surpression résultante p d'amplitude A, et $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$, ceux associés aux surpressions respectives p_1 et p_2. On a :

$$A^2 = \|\overrightarrow{P}\|^2 = \left(\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2}\right)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)$$

soit :

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(2\pi f\left(\frac{2x-d}{c}\right)\right)}}$$

8. Si le microphone est proche du haut-parleur HP_1, on a $A_1 \gg A_2$. L'expression de A peut donc être développée au premier ordre en $A_2/A_1 \ll 1$. En effet :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)} = A_1\sqrt{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + 2\frac{A_2}{A_1}\cos(\Delta\varphi)} \simeq A_1\sqrt{1 + 2\frac{A_2}{A_1}\cos(\Delta\varphi)}$$

$$A \simeq A_1\left(1 + 2\frac{A_2}{A_1}\cos(\Delta\varphi)\right)^{1/2} = A_1\left(1 + \frac{A_2}{A_1}\cos(\Delta\varphi)\right)$$

On a donc bien :

$$\boxed{A(x) \simeq A_1 + A_2\cos(\Delta\varphi)}$$

9. Si $A_1 \gg A_2$, on a $\overrightarrow{P} \simeq \overrightarrow{P_1}$: la phase initiale φ_u est alors quasiment égale à celle de p_1 qui diminue avec x, la durée de propagation dans les câbles étant négligée.

II Résolution de problème

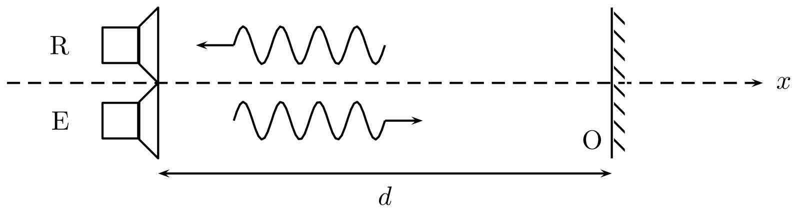
Traiter une résolution de problème s'est expliciter la démarche scientifique entreprise pour répondre à la question posée. Cette démarche s'effectue selon différentes étapes successives : l'appropriation, l'analyse, la réalisation, la validation ou la critique. Nous proposons ci-dessous une démarche de résolution possible.

❑ S'approprier

L'énoncé utilise les termes "émetteur", " récepteur", "onde", "ultrason" et "obstacle". Ces termes indiquent clairement que le problème sera traité au moyen des connaissances acquises dans le cours sur les ondes : propagation et/ou superposition. La résolution pourra donc faire appel aux notions suivantes :

- ⋆ onde progressive
- ⋆ déphasage
- ⋆ interférences
- ⋆ ondes stationnaires
- ⋆ noeuds et ventres ...

En l'occurrence, il est indiqué qu'il n'y a qu'un émetteur mais que l'onde se réfléchit sur un obstacle. On pourrait donc envisager un cas d'interférence ou d'onde stationnaire. Pour savoir dans quel situation nous sommes, il est indispensable de faire un schéma de la situation. L'élément clé de l'énoncé est que le récepteur est placé à côté de l'émetteur. On a donc :



où E représente l'émetteur, R le récepteur et O l'obstacle. On a figuré la distance d entre E et O.

❑ Analyser

Cette représentation permet de constater que le récepteur ne capte que l'onde régressive réfléchie par l'obstacle. Nous ne sommes donc pas dans un cas d'interférences ou d'ondes stationnaires, mais uniquement dans un cas d'ondes progressives. La progression du signal est alors quantitativement relié au déphasage de l'onde par rapport au signal d'émission, lui-même défini à partir de la célérité de l'onde c et de la distance d. Pour c, on pourra prendre la valeur approximative connue $c = 3.4 \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Une première étude rapide du chronogramme permet de conclure qu'il s'agit d'onde progressive sinusoïdale. Dans la suite, et comme l'indique le schéma, on se placera dans le cas d'une onde unidimensionnelle. On a donc affaire à une OPUS dont l'écriture mathématique générale est :

$$s_1(x,t) = S_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \quad \text{pour l'onde progressive}$$

et

$$s_2(x,t) = S_1 \cos(\omega t + kx + \varphi_2) \quad \text{pour l'onde régressive}$$

où

$$k = \frac{\omega}{c}$$

puisqu'il s'agit d'une OPUS.

Cette étude du chronogramme permet aussi de faire quelques remarques qualitatives et quantitatives :

* Les deux signaux sont manifestement synchrones puisqu'ils atteignent à chaque fois une valeur extrême aux mêmes instants. L'oscilloscope indique $f = 40\,\mathrm{kHz} > 20\,\mathrm{kHz}$, ce qui correspond bien à des ultrasons.
* Les deux signaux sont en opposition de phase : lorsque l'un des deux est maximal, l'autre est minimal.
* Le signal 2 est moins ample que le signal 1, il s'agit donc du signal capté par le récepteur.

Dans la partie d'« Analyse » d'une résolution de problème, on énonce clairement la démarche de résolution que l'on va utiliser pour répondre quantitativement à la question posée. Ici, nous allons :

* Déterminer le retard temporel accumulé par l'onde progressive entre E et O.
* Déterminer le retard temporel accumulé par l'onde régressive entre O vers R.
* En déduire le déphasage accumulé.
* Remonter du déphasage à la distance d

❑ Réaliser

Dans cette partie, nous allons mener les calculs permettant d'obtenir la réponse quantitative à la question.

Le déphasage accumulé par l'onde progressive entre E et O vaut $\Delta\varphi_1 = -k(x_O - x_E) = -kx_O$ car $x_E = 0$.
Le déphasage accumulé par l'onde régressive entre O et R vaut $\Delta\varphi_2 = k(x_R - x_O) = -kx_O$ car $x_R = 0$.
On obtient donc un déphasage total accumulé entre E et R de :

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \pi \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta\varphi = -2kx_O + \pi}$$

On a tenu compte ici du déphasage à la réflexion d'une OPUS sur un obstacle. On fait donc l'hypothèse que lorsque d est nulle, les deux signaux sont en opposition de phase.

Puisqu'il y a eu 50 remises en phase des signaux lors du déplacement de l'obstacle, le chronogramme correspond donc à la 51-ème remise en opposition de phase des deux signaux. La différence de déphasage accumulé, que l'on notera Φ entre $x_O = 0$ et $x_O = d$ vaut donc $2\pi n$ avec $n = 51$. On a donc :

$$\Phi = |\Delta\varphi(x_O = 0) - \Delta\varphi(x_O = d)| = 2kd = 2\pi n$$

soit :

$$d = \frac{\pi n}{k} = \frac{\pi c}{\omega} n = \frac{\pi c}{2\pi f} n = \frac{c}{2f} n$$

On obtient donc finalement :

$$\boxed{d = \frac{c}{2f} n} \quad \text{A.N. :} \quad \boxed{d = 22\,\text{cm}}$$

en gardant deux chiffres significatifs.

❑ Valider et/ou critiquer

La distance d obtenue correspond à l'ordre de grandeur de la distance utilisée en pratique en TP.
Compte tenu de la faible directivité des émetteurs à ultrasons, il est normal que l'amplitude du signal 2 soit faible et que par conséquent la distance d soit de l'ordre du centimètre.