fiche de cours 10

Approche énergétique de la mécanique

Ce que je dois être capable de faire après avoir appris mon cours

- ❑ Définir l'énergie cinétique d'un point matériel.
- ❑ Définir la puissance d'une force.
- ❑ Définir le travail élémentaire d'une force algébriquement reçu par un point matériel.
- ❑ Définir le travail total d'une force algébriquement reçu par un point matériel.
- ❑ Démontrer le théorème de la puissance cinétique.
- ❑ Démontrer le théorème de l'énergie cinétique.
- ❑ Définir une force conservative à partir du travail d'une force ou de l'énergie potentielle associée.
- ❑ Établir les expressions des énergies potentielles des forces conservatives usuelles : gravitationnelle, pesanteur, électrostatique (2 particules ou champ uniforme), rappel élastique.
- ❑ Définir l'énergie mécanique d'un point matériel.
- ❑ Démontrer les théorèmes de la puissance mécanique et de l'énergie mécanique.
- ❑ Utiliser le théorème de la puissance mécanique pour établir l'équation du mouvement.
- ❑ Établir la valeur de l'énergie mécanique d'un système grâce aux conditions initiales du système dans un problème conservatif.
- ❑ Analyser graphiquement la courbe d'énergie potentielle dans un problème conservatif pour étudier qualitativement le mouvement d'un système.
- ❑ Relier les positions d'équilibre aux extrema de l'énergie potentielle pour un problème conservatif.
- ❑ Associer le caractère stable d'une position d'équilibre à un minimum d'énergie potentielle pour un problème conservatif.
- ❑ Tracer plusieurs trajectoires du portrait de phase d'un pendule simple à partir de l'étude graphique de l'énergie potentielle et de plusieurs valeurs possibles d'énergie mécanique.
- ❑ Mettre en évidence les effets non-linéaires du puits de potentiel.
- ❑ Effectuer une approximation harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable pour un système quelconque.
- ❑ Étudier les mouvements de petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

Les relations sur lesquelles je m'appuie pour développer mes calculs

- Énergie cinétique et énergie mécanique :

$$\boxed{E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m\,\|\overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})\|^2} \quad \text{et} \quad \boxed{E_m(M)_{/\mathcal{R}} = E_c(M)_{/\mathcal{R}} + E_p(M)_{/\mathcal{R}}}$$

- Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c(M/\mathcal{R}_g)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{\text{rés}}})} \quad \text{et} \quad \boxed{\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_c(M/\mathcal{R}_g) = E_c(t_B) - E_c(t_A) = \underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{F}_{\text{rés}})}$$

- Force dérivant d'une énergie potentielle pour un problèem à un degré de liberté :

$$\overrightarrow{F}(\alpha) = f(\alpha)\overrightarrow{u}_\alpha \quad \text{avec} \quad \boxed{f(\alpha) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\alpha}}$$

- Energies potentielles usuelles (attention aux hypothèses dans chaque cas) :

$E_{p_{\text{pes}}} = mgz + cste$	(pesanteur)
$E_{p_{\text{grav}}} = -\mathcal{G}\dfrac{m_O m_M}{r} + cste$	(gravitationnelle)
$E_{p_{\text{élec.1}}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_O q_M}{r} + cste$	(électrostatique, 2 particules)
$E_{p_{\text{élec.2}}} = -qE_0 x + cste$	(électrostatique, champ uniforme)
$E_{p_{\text{élas}}} = \dfrac{1}{2}k\,(\ell - \ell_0)^2 + cste$	(élastique)

- Théorèmes de la puissance et de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m(M/\mathcal{R}_g)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{\text{rés}}}^{nc})} \quad \text{et} \quad \boxed{\underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{\Delta} E_m(M/\mathcal{R}_g) = \underset{\substack{A\to B\\ \Gamma}}{W}(\overrightarrow{F_{\text{rés}}}^{nc})}$$

- Équilibre et stabilité pour un problème conservatif à 1 degré de liberté :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{\text{éq}}} = 0 \quad \text{(équilibre)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_{\text{éq}}} > 0 \quad \text{(stabilité)}}$$

- Approximation harmonique autour d'une position d'équilibre stable :

$$\boxed{E_p(x) \underset{x_{\text{éq}}}{=} E_p(x_{\text{éq}}) + (x - x_{\text{éq}})\underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\text{éq}}}}_{=0} + \frac{1}{2}(x - x_{\text{éq}})^2\underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\text{éq}}}}_{>0} + o(x - x_{\text{éq}})^2}$$