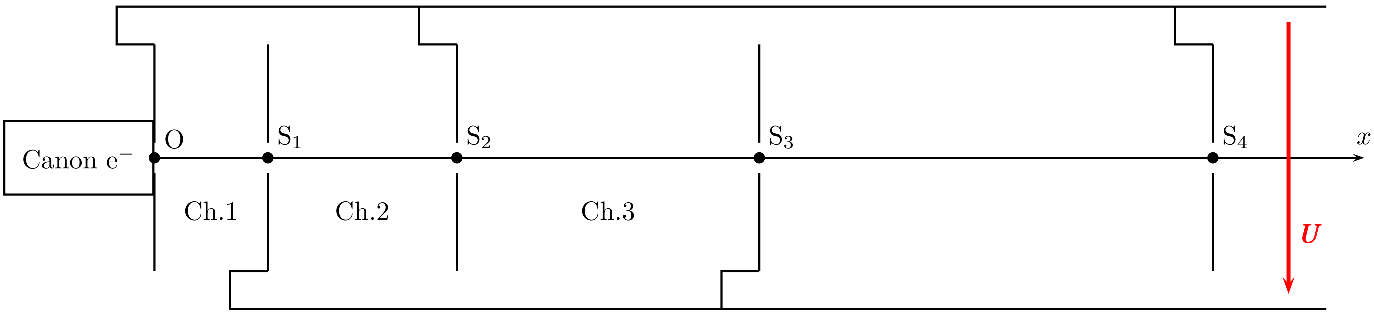
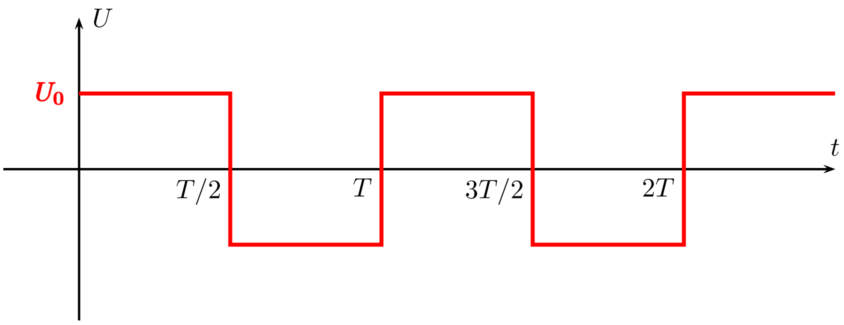
# Accélérateurs de particules

## Accélérateur linéaire

### Cas classique

Voici une schématisation possible du principe d'un l'accélérateur linéaire d'électron.




On considère qu'à $t = 0$, l'électron arrive en O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$, $v_0 > 0$, et que la tension $U$ bascule et devient égale à $U_0 > 0$.

A la sortie de la première chambre, en $S_1$, d'après le théorème de l'énergie cinétique, l'électron a atteint une vitesse :

$$\boxed{v_{S_1} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU_0}{m_e}}}$$

L'équation horaire de son mouvement tout au long de son parcours est :

$$x(t) = \frac{eU_0}{2m_e\ell_1}t^2 + v_0 t$$

et

$$v(t) = \frac{eU_0}{m_e \ell_1} t + v_0$$

On souhaite que la tension $U$ bascule et devienne égale à $-U_0$ à l'instant $t = T/2$ correspondant à $x(T/2) = \ell_1$, c'est-à-dire au moment où l'électron quite la chambre 1 pour entrer dans la chambre 2, soit :

$$v_{S_1} = \frac{eU_0}{m\ell_1}\frac{T}{2} + v_0$$

d'où :

$$\boxed{\ell_1 = \frac{eU_0}{m_e\left(v_{S_1} - v_0\right)}\frac{T}{2} = \frac{eU_0}{m_e\left(\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU_0}{m_e}} - v_0\right)}\frac{T}{2}}$$

L'électron ressortira de la chambre 2 en $\mathrm{S}_2$ avec une vitesse :

$$v_{S_2} = \sqrt{v_{S_1}^2 + \frac{2eU_0}{m_e}} = \sqrt{v_0^2 + 2 \times \frac{2eU_0}{m_e}} > v_{S_1}$$

Il faut qu'il quitte la deuxième chambre et qu'il pénètre dans la troisième à l'instant $T$. On doit donc avoir :

$$\ell_2 = \frac{eU_0}{m_e\left(\sqrt{v_0^2 + 2 \times \frac{2eU_0}{m_e}} - \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU_0}{m_e}}\right)}\frac{T}{2}$$

La longueur des chambres s'allonge donc au fur et à mesure.

En répétant ces calculs sur $n$ chambres, on obtient notamment :

$$\boxed{v_{S_n} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU_0}{m_e} \times n}}$$

et donc :

$$\ell_n = \frac{eU_0}{m_e\left(\sqrt{v_0^2 + n \times \frac{2eU_0}{m_e}} - \sqrt{v_0^2 + (n-1) \times \frac{2eU_0}{m_e}}\right)}\frac{T}{2}$$

Ce résultat indique que le passage successif par $n$ chambres à $U_0$ fixe est équivalent au passage à travers une chambre possédant une différence de potentiel $nU_0$.

Remarque : en pratique, le terme $v_0^2$ est très vite négligeable, et on a donc en bonne approximation :

$$\boxed{v_{S_n} \simeq \sqrt{\frac{2eU_0}{m_e} \times n} = K \times \sqrt{n}}$$

La limite de $v_{S_n}$ avec $n$ est donc $+\infty$. On rentrera donc assez rapidement dans un domaine où la physique classique ne peut plus s'appliquer. Il faut prendre en compte des effets relativistes. Par ailleurs, la longueur des chambres devient de plus en plus grande (elles croient elles aussi en $\sqrt{n}$) et la longueur totale devient très vite gigantesque. On préférera donc souvent mettre en oeuvre un cyclotron plutôt qu'un accélérateur linéaire.

### Cas relativiste

L'énergie cinétique et la quantité de mouvement d'une particule de masse $m$ et de vitesse $v = \|\overrightarrow{v}\|$ s'écrivent :

$$E_c = (\gamma - 1)\, mc^2$$
$$\overrightarrow{p} = \gamma m \overrightarrow{v}$$

avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

On prend ici $\overrightarrow{E_0} = E_0 \overrightarrow{u_x}$ avec $E_0 > 0$. On considère à nouveau à un mouvement rectiligne et une vitesse initiale nulle pour simplifier. On applique la deuxième loi de Newton dans le cas relativiste en projetant selon $\overrightarrow{u_x}$ :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = qE_0 \overrightarrow{u_x}$$

soit :

$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{x}^2}{c^2}}} = qE_0 t$$

ou encore en élevant au carré et en regroupant les termes :

$$\left[m^2 + \frac{(qE_0 t)^2}{c^2}\right] \dot{x}^2 = (qE_0 t)^2$$

et donc :

$$\boxed{\dot{x} = c \frac{qE_0 t}{\sqrt{m^2c^2 + (qE_0 t)^2}}}$$

Avec ce dernier résultat on retrouve bien la limite relativiste : quand $t \to +\infty$ on a $\dot{x} \to c$.

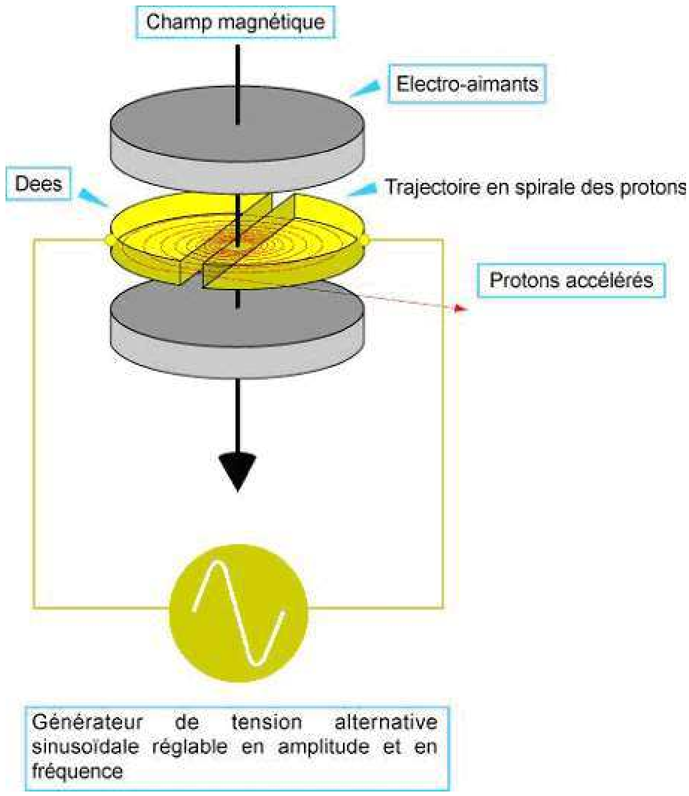
Remarque : on peut alors aussi remonter à l'équation horaire de la forme :

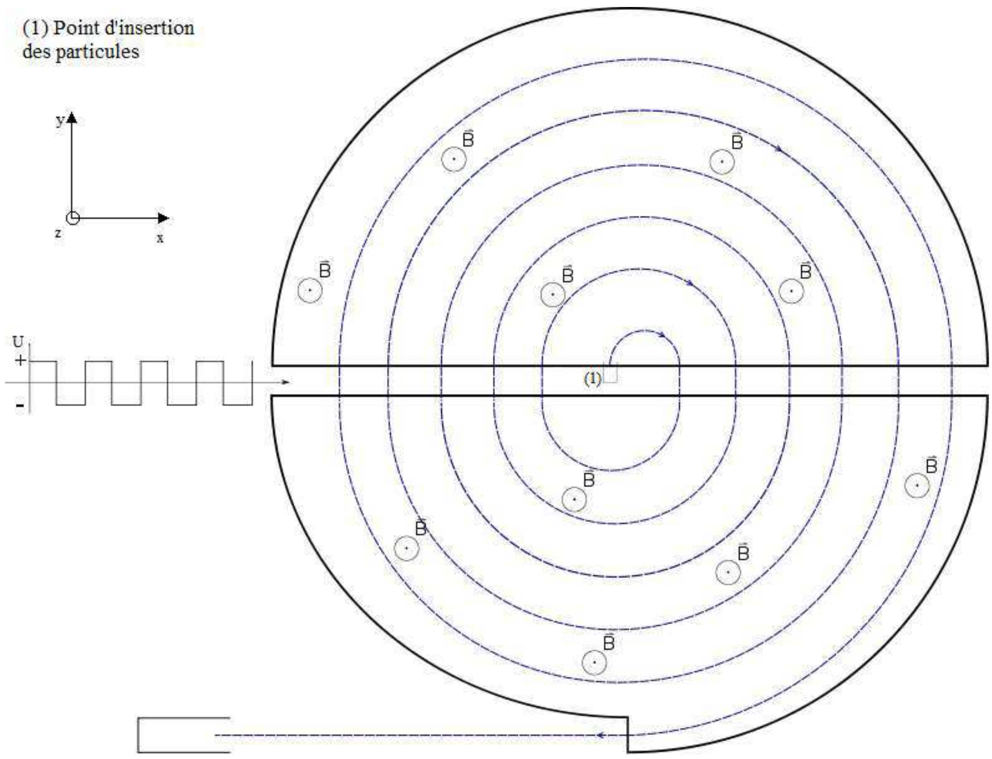
$$\boxed{x(t) = \frac{mc^2}{qE_0} \left[\sqrt{\left(\frac{qE_0 t}{mc}\right)^2 + 1} - 1\right]}$$

On peut vérifier ici qu'aux temps courts, on retrouve le résultat classique et qu'aux temps longs on obtient $x(t) = ct$.

# Cyclotron

### Schéma de principe



Dans le cas du schéma précédent, on considère des protons.

Introduits dans la zone où règne le champ magnétique, ils sont d'abord déviés selon une trajectoire hémi-circulaire uniforme.

Après un demi-tour, ils pénètrent dans la zone où règne le champ électrique qui est orienté de manière à les accélérer.

Une fois accélérés, ils entrent à nouveau dans une zone de champ magnétique et décrivent une deuxième trajectoire hémi-circulaire. Comme la norme de leur vitesse a augmenté, le rayon de la trajectoire est plus grand qu'au demi-tour précédent.

Les protons sont alors prêts à entrer de nouveau dans la zone où règne le champ électrique dont le sens a été inversé par application d'une tension de signe opposé entre les armatures d'accélération. Ils sont donc à nouveau accéléré entre les armatures.

En répétant cet enchaînement tant que les protons sont à l'intérieur des Dees, on peut accélérer les particules dans un volume spatial beaucoup plus raisonnable que dans le cas d'un accélérateur linéaire.

### Cas classique

Pour des vitesses faibles par rapport à $c$, la pulsation cyclotron $\omega_c = \dfrac{|q|B_0}{m}$ est constante et identique à chaque passage dans les zones de champ magnétique. Les protrons mettront donc tous, quelque soit leur vitesse initiale à l'entrée d'une zone, la même durée pour effectuer un demi-tour. On peut donc appliquer une tension périodique de période $T = 2\pi/\omega$ aux armatures pour créer un champ électrique synchrone permettant d'accélérer les particules.

Remarque : en pratique, la durée de traversée de la zone d'accélération est négligeable devant la période $T$. Elle est en pratique négligée.

### Cas relativiste

Nous avons déjà étudié les limites relativistes de l'accélération d'une particule chargée par un champ électrique. Qu'en est-il lorsqu'il s'agit de l'action de déviation d'un champ magnétique ?

En mécanique relativiste comme en mécanique classique, le terme magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas car il est à tout instant orthogonal au déplacement de la particule. En conséquence, le mouvement reste uniforme $\|\overrightarrow{v}\| = v = cte$ comme précédemment et pour un vecteur-vitesse initial orthogonal au champ magnétique, la trajectoire est circulaire.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\gamma m \overrightarrow{a} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$$

car $\gamma = cte$, soit en coordonnées polaires :

$$\gamma m \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qB_0R\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc ici :

$$\boxed{\omega = \frac{|q|B_0}{m\gamma} = f(\|\overrightarrow{v}\|)}$$

Appliqué au cas du cyclotron, on se rend compte que la pulsation dépend de la vitesse de la particule (ou de façon équivalente du rayon de la trajectoire) et que, par conséquent, la durée mis pour effectuer un demi-tour n'est plus constante : on observe donc une **désynchronisation** par rapport au champ électrique accélérateur.