Corrigé partiel - TD n°20 : Premier principe de la thermodynamique

7 Compression adiabatique d'un gaz parfait

1. a) Déterminons tout d'abord la pression initiale P_1 et la pression finale P_2 en appliquant le principe fondamental de la dynamique au piston dans l'état d'équilibre initial et dans l'état d'équilibre final (identique dans les deux cas, quelle que soit la transformation 1) ou 2)).
Système : piston.
Référentiel : laboratoire supposé galiléen.
Forces :
— poids $\vec{P} = M_0\vec{g} = -M_0 g\vec{u}_z$;
— force de pression atmosphérique : $\vec{F_0} = -P_0 S\,\vec{u}_z$;
— force de pression intérieure : $\vec{F_1} = P_1 S\vec{u}_z$.
Principe fondamental de la dynamique à l'équilibre : $\vec{P} + \vec{F_0} + \vec{F_1} = \vec{0}$.
Selon $\vec{u}_z$: $-M_0 g - P_0 S + P_1 S = 0 \Rightarrow \boxed{P_1 = P_0 + \dfrac{M_0 g}{S}} \Rightarrow \underline{P_1 = 1,98\text{ bar}}$
Pour l'état d'équilibre final :
Système : piston+masse.
Référentiel : laboratoire supposé galiléen.
Forces :
— poids $\vec{P'} = 2M_0\vec{g} = -2M_0 g\vec{u}_z$;
— force de pression atmosphérique : $\vec{F_0} = -P_0 S\,\vec{u}_z$;
— force de pression intérieure : $\vec{F_2} = P_2 S\,\vec{u}_z$.
Principe fondamental de la dynamique à l'équilibre : $\vec{P'} + \vec{F_0} + \vec{F_2} = \vec{0}$.
$-2M_0 g - P_0 S + P_2 S = 0 \Rightarrow \boxed{P_2 = P_0 + \dfrac{2M_0 g}{S}} \Rightarrow \underline{P_2 = 2,96\text{ bar}}$.
La transformation est adiabatique, brutale et irréversible $\Rightarrow\ Q_{12} = 0 \ \Rightarrow\ \Delta_{12}U = W_{12}$.
$\Delta_{12}U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$
$P_1V_1 = nRT_1 \ \Rightarrow\ nR = \frac{P_1Sh_1}{T_1} \ \Rightarrow\ \Delta_{12}U = \frac{P_1Sh_1}{\gamma-1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$.
$W_{12} = -\int_1^2 P_2 \mathrm{d}V = -P_2(V_2 - V_1) = -nRT_2 + P_2V_1 = P_2Sh_1 - \frac{P_1Sh_1T_2}{T_1} = \left(P_2 - \frac{P_1T_2}{T_1}\right)Sh_1$
On a donc : $\frac{P_1}{\gamma-1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = P_2 - \frac{P_1T_2}{T_1} \ \Rightarrow\ P_1\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{1}{\gamma-1} + 1\right) = P_2 + \frac{P_1}{\gamma-1}$.
$\frac{\gamma P_1}{(\gamma-1)T_1}T_2 = P_2 + \frac{P_1}{\gamma-1} \ \Rightarrow\ T_2 = \frac{P_2(\gamma-1)T_1}{\gamma P_1} + \frac{T_1}{\gamma}$
$\Rightarrow \boxed{T_2 = \left[\dfrac{(\gamma-1)P_2}{P_1} + 1\right]\dfrac{T_1}{\gamma}} \ \Rightarrow\ \underline{T_2 = 342\text{ K}}$.
$P_2V_2 = nRT_2 \ \Rightarrow\ P_2Sh_2 = \frac{P_1Sh_1}{T_1}T_2 \ \Rightarrow\ \boxed{h_2 = \dfrac{P_1T_2}{P_2T_1}h_1} \ \Rightarrow\ \underline{h_2 = 0,763\text{ m}}$.

   b) On a $\boxed{W = \dfrac{P_1Sh_1}{\gamma-1}\left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right)} \Rightarrow \underline{W = 6,93\text{ kJ}}$.

2. a) La transformation est maintenant quasistatique (réversible ou non en fonction des masses ajoutées et du temps d'attente entre l'ajout des masses). On a toujours $\boxed{P_2' = P_2} \Rightarrow \underline{P_2' = 2,96 \text{ bar}}$.
   On applique la loi de Laplace.
   $P_2' V_2'^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma} \;\Rightarrow\; P_2' \left(S h_2'\right)^{\gamma} = P_1 \left(S h_1'\right)^{\gamma} \;\Rightarrow\; P_2' h_2'^{\gamma} = P_1 h_1^{\gamma}$
   $h_2'^{\gamma} = \frac{P_1}{P_2'} h_1^{\gamma} \Rightarrow \boxed{h_2' = \left(\dfrac{P_1}{P_2'}\right)^{\frac{1}{\gamma}} h_1} \Rightarrow \underline{h_2' = 0,750 \text{ m}}$.
   $P_2' V_2' = nRT_2' = \frac{P_1 S h_1 T_2'}{T_1} \Rightarrow \boxed{T_2' = \dfrac{P_2' h_2'}{P_1 h_1} T_1} \Rightarrow \underline{T_2' = 336 \text{ K}}$.

   b) $W' = \Delta U' = \frac{nR}{\gamma - 1}\left(T_2' - T_1\right) = \frac{P_1 S h_1}{(\gamma-1) T_1}\left(T_2' - T_1\right) \Rightarrow \boxed{W' = \dfrac{P_1 S h_1}{\gamma - 1}\left(\dfrac{T_2'}{T_1} - 1\right)} \Rightarrow \underline{W' = 5,94 \text{ kJ}}$.

8 Travail fourni par un opérateur

1. Le travail W_{atm} de la force pressante due à l'atmosphère vaut simplement :

$$W_{atm} = -\int P_{atm} dV = -P_{atm} \Delta V = -P_{atm} V_1 = -500 J < 0$$

   Il y a eu une détente du gaz dans le piston, donc celui-ci fournit du travail et $W < 0$.
   Comme la transformation est quasistatique, il y a équilibre mécanique du piston à chaque instant, ce qui signifie que

$$F_{op} + PS - P_{atm} S = 0$$

   où P est la pression à l'intérieur du piston, qui varie au cours de la transformation. Au début de la transformation, comme $P = P_{atm}$, celui-ci n'a aucun effort à fournir. Cependant, celui-ci doit exercer une force de plus en plus importante afin d'atteindre une pression finale à l'intérieur du piston égale à $P_2 = \frac{nRT}{V_2} = \frac{P_1}{2}$ car la transformation est isotherme de V_1 à $V_2 = 2V_1$.
   L'opérateur doit fournir un travail donné par :

$$W_{op} = \int F_{op} dx = \int (P_{atm} - P) S dx = P_{atm} \Delta V - \int nRT \frac{dV}{V} = P_{atm} V_1 \left[1 - ln(2)\right] = 155 J > 0$$

   $W_{op} > 0$ car l'opérateur doit effectivement fournir un effort pour tirer le piston.
2. Si l'opérateur relache le piston, il y a alors un déséquilibre de pression entre l'intérieur ($P = \frac{P_{atm}}{2}$) et l'extérieur du piston (P_{atm}), le piston va revenir en arrière, de manière à égaliser à nouveau les pressions.
   Dans ce cas, le travail des forces de pression est simplement opposé au cas précédent :

$$W'_{atm} = -\int P_{atm} dV = -P_{atm} \Delta V = P_{atm} V_1 = 500 J > 0$$

   Le travail des forces de pression est positif car le gaz à l'intérieur du piston se comprime.

   Si l'opérateur relache progressivement son effort, de sorte que le système va repasser successivement par les mêmes états d'équilibre, le travail fourni par l'opérateur est là encore opposé au cas précédent et

$$W'_{op} = -155 J < 0$$

c'est à dire que l'opérateur reçoit cette fois du travail mécanique.

Enfin, si l'opérateur relache brusquement le piston, la transformation est irréversible. L'opérateur ne récupère aucun travail car il a relaché complètement le piston, et $W'_{op} = 0$!

10 Calorimétrie

La transformation étant monobare, puisque l'intérieur du calorimètre est à la pression P_0 extérieure, on en déduit que

$$\Delta H = Q$$

où Q est l'énergie thermique transférée au système pendant la transformation. Celle-ci est exclusivement apportée par effet Joule par la résistance et vaut $Q = RI^2\Delta t$. De plus, l'eau, le calorimètre et l'aluminium étant des phases condensées, on peut écrire :

$$\Delta H = m_e c_e \Delta T + m_l c_l \Delta T + m_{Al} c_{Al} \Delta T$$

On en déduit donc :

$$c_{Al} = \frac{1}{m_{Al}}\left[\frac{RI^2\Delta t}{T_f - T_i} - m_e c_e - m_l c_l\right] = 0.906 J.g^{-1}.K^{-1}$$