Électrocinétique

Partie 1

Charles Tuchendler

MPSI 4 – Lycée Saint-Louis

Année 2019/2020

Table des matières

CHAPITRE I

SIGNAL - RAPPELS ET DÉFINITIONS DE BASE

Sommaire

I Définitions

I.1 Nature de signaux et grandeurs associées

Définition I.1 – Signal

Un signal $s(t)$ est une fonction mathématique décrivant les variations temporelles d'une grandeur physique.

Il rend compte de l'état instantané de cette grandeur par l'information qu'il contient. Cette dernière peut s'exprimer au travers des différents paramètres intervenant dans $s(t)$ (amplitude, pulsation, phase...) et peut être de différentes natures (analogique, numérique,...).

En sciences physiques, nous serons notamment amenés à étudier des grandeurs physiques correspondant à des :

- *signaux électriques* : tension et courant ;
- *signaux acoustiques* : pression, densité de particules, masse volumique ;
- *signaux mécaniques* : position, vitesse, accélération ;
- *signaux électromagnétiques* : champs électrique et magnétique.

I.2 Nature des ondes et grandeurs associées

Définition I.2 – Onde

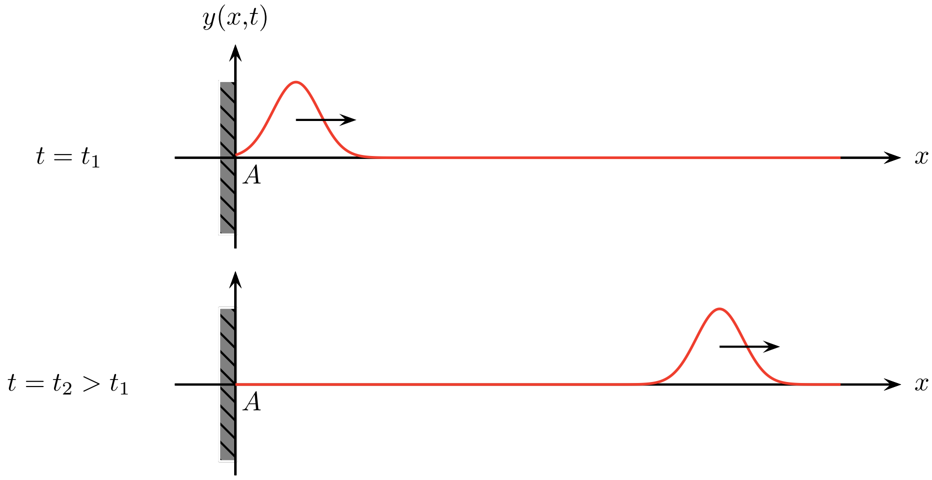
Une onde correspond à un phénomène physique dans lequel une perturbation se déplace dans l'espace sans déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique perturbée par l'onde peut donc être considérée comme un signal modulé dans l'espace. Elle sera donc décrite par une fonction mathématique de la forme $s(M, T)$ où M correspond à un point quelconque de l'espace où l'on observe l'onde.

Les déformations à la surface d'un liquide sont un exemple bien connu d'onde ("unda" en latin signifie "eau"). Parmi les différents types d'ondes plusieurs font partie de notre quotidien :

- *ondes élastiques* : dans les solides, ondes sismiques ;
- *ondes acoustiques* : microphones ;
- *ondes électromagnétiques* : lumière visible, infrarouge, ultraviolette, rayons X et γ, ondes radio, micro-ondes ;
- *ondes électriques* : propagation guidée d'ondes électromagnétiques, courant (onde de courant) et tension ;
- *ondes gravitationnelles* : déformation de l'espace-temps induisant des variations de longueurs, projet VIRGO, LIGO...

II Onde progressive unidimensionnelle

II.1 Approche expérimentale



Expérience I.1 – Déformation d'une corde tendue

- ⋆ On déforme une corde tendue en l'étirant rapidement et légèrement verticalement et vers le haut depuis l'une de ses extrémités (schéma à t_1).
- ⋆ On observe qu'une déformation verticale sur une petite portion de corde se transmet de proche en proche, on dit qu'elle se ***propage***, vers l'autre extrémité (schéma à t_2)
  Cette onde est dite ***progressive*** et se dirige vers les x croissants. La déformation peut donc être observée à distance du point d'émission sans qu'il y ait de déplacement de matière.

II.2 Expressions - Vitesse de propagation

Définition I.3 – Onde unidimensionnelle

On appelle onde unidimensionnelle, une onde ne dépendant que d'une seule variable d'espace. Dans le cas de l'expérience 1, celle-ci s'effectue selon l'axe (Ox) et peut s'écrire :

$$\boxed{s(M,t) = s(x,t)}$$

Définition I.4 – Onde progressive unidimensionnelle

Une onde progressive unidimensionnelle $s(x,t)$ correspond à la propagation, sans déformation ni atténuation, d'un signal selon la direction (Ox) à une vitesse de propagation appelée ***célérité*** et notée $\boldsymbol{c}$.

Propriété I.1 – Expressions mathématiques

Plusieurs formes mathématiques correspondent à une onde progressive unidimensionnelle :

⋆ si la propagation a lieu dans le ***sens des x croissants*** :

$$\boxed{s(x,t) = F(x - ct)} \quad \text{ou} \quad \boxed{s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

⋆ si la propagation a lieu dans le ***sens des x décroissants*** :

$$\boxed{s(x,t) = G(x + ct)} \quad \text{ou} \quad \boxed{s(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)}$$

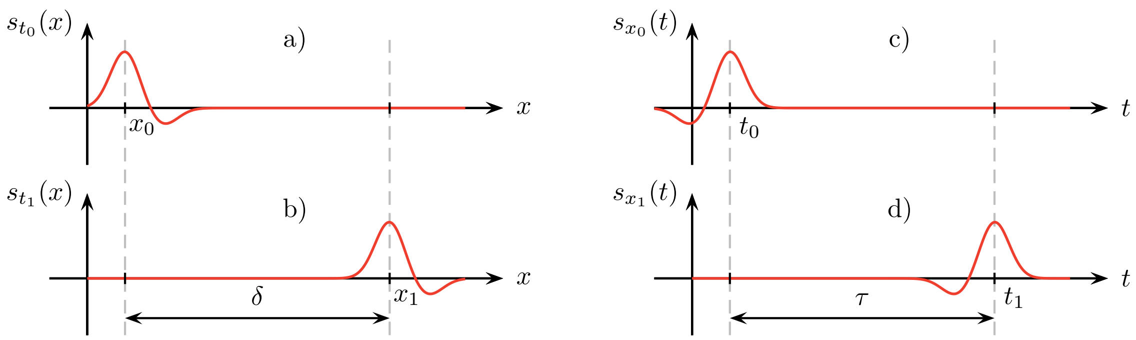


Figure I.1 – *Points de vue spatial - (a) et (b) - ou temporel - (c) et (d) - de l'évolution de la corde au passage de l'onde*

Démonstration I.1 – Validité des expressions - 1

Considérons une onde progressive unidimensionnelle quelconque se propageant dans le sens des x croissants (schéma a)). A l'instant t_0 la déformation qu'elle représente passe au point d'abscisse quelconque x.
Cette déformation se propageant sans déformation ni atténuation, on la retrouve identique à elle-même à l'instant $t_1 > t_0$ en un point d'abscisse $x_1 = x + \delta$ (schéma b)) :

$$s(x, t_0) = s(x + \delta, t_1)$$

Compte tenu de sa vitesse de propagation, $\delta = c(t_1 - t_0)$ et on peut donc écrire :

$$s(x, t_0) = s(x + c(t_1 - t_0), t_1)$$

expression valable pour tout t_0 et tout t_1, y compris pour $t_1 < t_0$. Prenons le cas où $t_1 = 0$ et $t_0 = t$ quelconque, on obtient : $s(x,t) = s(x - ct, 0)$. Il s'agit en réalité d'un fonction que d'une seule variable $x - ct$ et on peut donc écrire :

$$\boxed{s(x,t) = F(x - ct)}$$

Remarque : pour obtenir l'expression dans le sens des x décroissants, il suffit de définir l'axe Ox' dirigé en sens inverse et pour lequel on aura donc $x' = -x$. Le résultat apparait immédiatement.

Démonstration I.2 – Validité des expressions - 2

Considérons cette fois encore une onde progressive unidimensionnelle quelconque se propageant dans le sens des x croissants (schéma d)). Au point d'abscisse x_1 la déformation qu'elle représente passe à l'instant quelconque t.

Cette déformation se propageant sans déformation ni atténuation, elle est passée de la même manière au point x_0 à l'instant $t_0 < t$ tel que $\tau = t - t_0$ (schéma c)) :

$$s(x_1, t) = s(x_0, t - \tau)$$

Compte tenu de sa vitesse de propagation, $\tau = (x_1 - x_0)/c$ et on peut donc écrire :

$$s(x_1, t) = s\left(x_0, t - \frac{(x_1 - x_0)}{c}\right)$$

expression valable pour tout x_0 et tout x_1, y compris pour $x_1 < x_0$. En posant $x_1 = x$ quelconque et $x_0 = 0$, on obtient : $s(x,t) = s\left(0, t - \dfrac{x}{c}\right)$. Il s'agit en réalité d'un fonction que d'une seule variable $t - x/c$ et on peut donc écrire :

$$\boxed{s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

Remarque : pour obtenir l'expression dans le sens des x décroissants, il suffit de définir l'axe Ox' dirigé en sens inverse et pour lequel on aura donc $x' = -x$. Le résultat apparait immédiatement.

Démonstration I.3 – Equivalence des expressions

Connaissant $f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$, on peut facilement trouver $F(x - ct)$ en posant $t = 0$. On a alors :

$$\boxed{F(x) = f\left(-\frac{x}{c}\right)}$$

De même, on aurait $G(x) = g\left(\dfrac{x}{c}\right)$ pour une propagation en sens inverse.

Connaissant $F(x - ct)$, on peut facilement trouver $f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$ en posant $x = 0$. On a alors :

$$\boxed{f(t) = F(-ct)}$$

De même, on aurait $g(t) = G(ct)$ pour une propagation en sens inverse.

II.3 Evolution à position fixée

Méthode I.1 – Prévoir l'évolution temporelle de la corde en une position donnée

Pour une onde progressive unidimensionnelle de célérité c, ce qui se passe en x_0 à t_0 se reproduit en un point de position x :

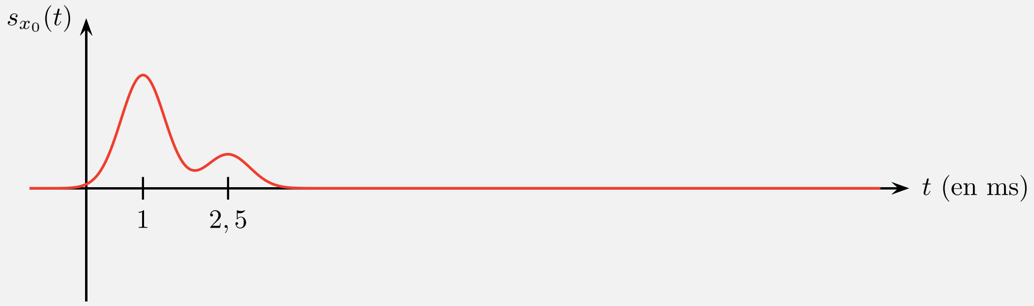
- ⋆ avec un retard temporel $(x - x_0)/c$ si l'onde se propage selon les x croissants ;
- ⋆ avec un retard temporel $-(x - x_0)/c$ si l'onde se propage dans le sens des x décroissants.

Remarque : le retard temporel est une ***grandeur algébrique*** correspondant à un réel retard si elle est positive et effectivement à une avance si elle est négative.

Exercice I.1 – Signal de la déformation d'une corde à position donnée

On reprend l'exemple d'une corde subissant une onde de déformation selon l'axe Ox à une célérité de $c = 500$ m.s^{-1} se dirigeant dans le sens des x croissants.
On représente la variation temporelle de l'élongation transverse de la corde au point $x_0 = 0$ m (courbe rouge).

On souhaite représenter la variation temporelle de l'élongation en un point d'abscisse $x_1 = 1$ m (courbe bleue) puis en un point d'abscisse $x_2 = 5$ m (courbe verte).



II.4 Evolution à instant donné

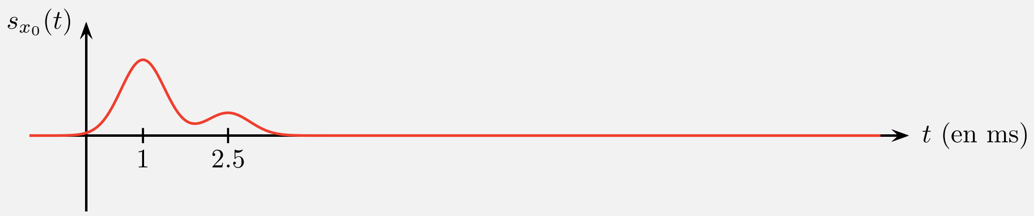
Méthode I.2 – Prévoir la forme de la corde à un instant donné

Pour une onde progressive unidimensionnelle de célérité c, ce qui se passe en x_0 à t_0 se reproduit à l'instant t :

- ⋆ en $x = x_0 + c(t - t_0)$ si l'onde se propage selon les x croissants ;
- ⋆ en $x = x_0 - c(t - t_0)$ si l'onde se propage selon les x décroissants.

Exercice I.2 – Signal de la déformation d'une corde à un instant donné

On reprend l'exemple d'une corde subissant une onde de déformation selon l'axe Ox à une célérité de $c = 500$ m.s^{-1} se dirigeant dans le sens des x croissants.
On représente la variation temporelle de l'élongation transverse de la corde au point $x_0 = 0$ m (courbe rouge).



Toujours dans les mêmes conditions, on souhaite déterminer la forme de la corde au bout de $t_1 = 2$ ms (courbe bleue), $t_2 = 4$ ms (courbe verte) et $t_3 = 6$ ms (courbe orange).