

---

# ÉLECTROCINÉTIQUE

## PARTIE 2

---

CHARLES TUCHENDLER



MPSI 4 – LYCÉE SAINT-LOUIS

ANNÉE 2019/2020



# Table des matières

CHAPITRE VIII	FILTRAGE LINÉAIRE ET TRAITEMENT DU SIGNAL	1
<b>Introduction</b>		<b>2</b>
<b>I Fonction de transfert d'un quadripôle électrique</b>		<b>3</b>
I.1 Notion de quadripôle		3
I.2 Chaîne de quadripôles - Impédances d'entrée et de sortie		3
I.3 Réponse temporelle, ordre et stabilité d'un quadripôle		9
I.4 Réponse fréquentielle et fonction de transfert d'un quadripôle		10
I.5 Diagramme de Bode		13
<b>II Application au filtrage</b>		<b>15</b>
II.1 Principe d'un filtre ADSL		15
II.2 Couper les hautes fréquences : filtre passe-bas		16
II.3 Couper les basses fréquences : filtre passe-haut		21
II.4 Sélectionner les fréquences : filtre passe-bande		25
II.4.a Filtre passe-bande à partir de filtres d'ordre 1 - Associer des fonctions de base pour réaliser une fonction complexe		25
II.4.b Filtre passe-bande à partir d'un seul filtre d'ordre 2 : circuit LCR		28
II.5 Améliorer la sélectivité d'un filtre		33
II.6 Couper une bande de fréquence : coupe-bande		37
<b>III Filtrage linéaire d'un signal quelconque</b>		<b>38</b>
III.1 Cas d'une somme finie de signaux sinusoïdaux quelconques		38
III.2 Cas d'un signal périodique		38

## CHAPITRE VIII

## FILTRAGE LINÉAIRE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

## Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>I Fonction de transfert d'un quadripôle électrique</b>	<b>3</b>
I.1 Notion de quadripôle	3
I.2 Chaîne de quadripôles – Impédances d'entrée et de sortie	3
I.3 Réponse temporelle, ordre et stabilité d'un quadripôle	9
I.4 Réponse fréquentielle et fonction de transfert d'un quadripôle	10
I.5 Diagramme de Bode	13
<b>II Application au filtrage</b>	<b>15</b>
II.1 Principe d'un filtre ADSL	15
II.2 Couper les hautes fréquences : filtre passe-bas	16
II.3 Couper les basses fréquences : filtre passe-haut	21
II.4 Sélectionner les fréquences : filtre passe-bande	25
II.4.a Filtre passe-bande à partir de filtres d'ordre 1 – Associer des fonctions de base pour réaliser une fonction complexe	25
II.4.b Filtre passe-bande à partir d'un seul filtre d'ordre 2 : circuit LCR	28
II.5 Améliorer la sélectivité d'un filtre	33
II.6 Couper une bande de fréquence : coupe-bande	37
<b>III Filtrage linéaire d'un signal quelconque</b>	<b>38</b>
III.1 Cas d'une somme finie de signaux sinusoïdaux quelconques	38
III.2 Cas d'un signal périodique	38

## Introduction

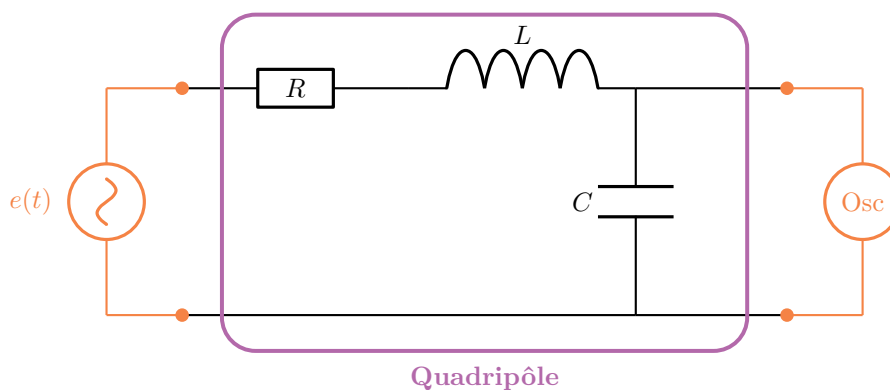
Les chapitres précédents ont mis en évidence la dépendance fréquentielle des systèmes électriques et mécaniques. Cette dépendance qui nous a permis d'étudier les phénomènes de résonance s'inscrit dans *l'étude plus large des signaux et de leur traitement*.

**Exemple – Signal acoustique : de l'instrument à l'écoute domestique en passant par l'enregistrement et le traitement**

On peut modéliser l'ensemble des étapes de l'écoute d'un titre musical par une chaîne d'appareils ayant chacun pour but de traiter le signal initialement émis.

Remarque : entre la source à l'origine des signaux et le dernier capteur, chaque appareil est un quadripôle et l'ensemble des appareils forme est une chaîne de quadripôles.

Exemple : le circuit RLC série que nous avons étudié au cours des deux derniers chapitres est un exemple de quadripôle.



# I Fonction de transfert d'un quadripôle électrique

## I.1 Notion de quadripôle

### Définition VIII.1 – Quadripôle électrique

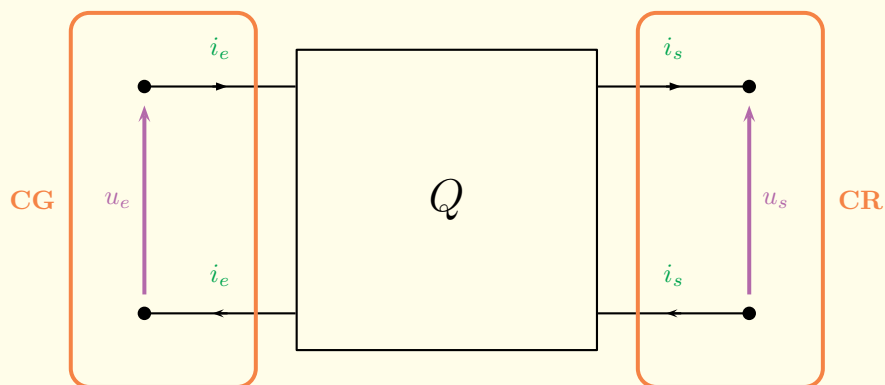
Un **quadripôle** est un composant électrique à **quatre bornes** :

- deux bornes d'entrée
- deux bornes de sortie

auquel on peut associer quatre grandeurs électriques :

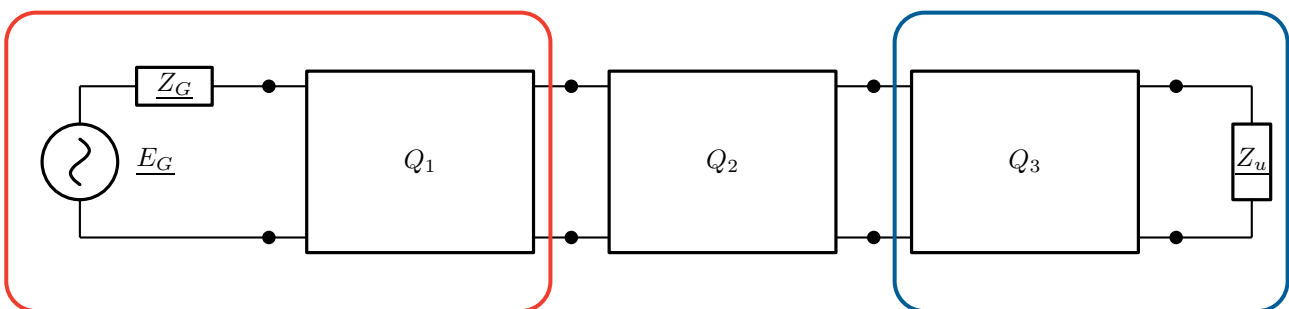
- un **courant d'entrée** d'intensité  $i_e$ , un **courant de sortie** d'intensité  $i_s$
- une **tension d'entrée** de f.é.m.  $u_e$ , une **tension de sortie** de f.é.m.  $u_s$

Schéma électrique modèle :

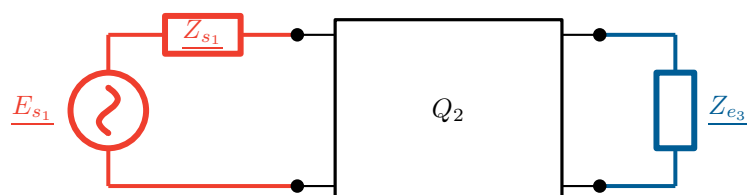


## I.2 Chaîne de quadripôles - Impédances d'entrée et de sortie

On considère un circuit complexe générique composé d'une source (on prend ici un générateur de Thévenin) branchée sur une chaîne de quadripôles et fermée sur un dipôle simulant l'appareil utilisé (on modélisera ici l'appareil par un dipôle d'impédance  $\underline{Z}_u$ ).



$\Leftrightarrow$

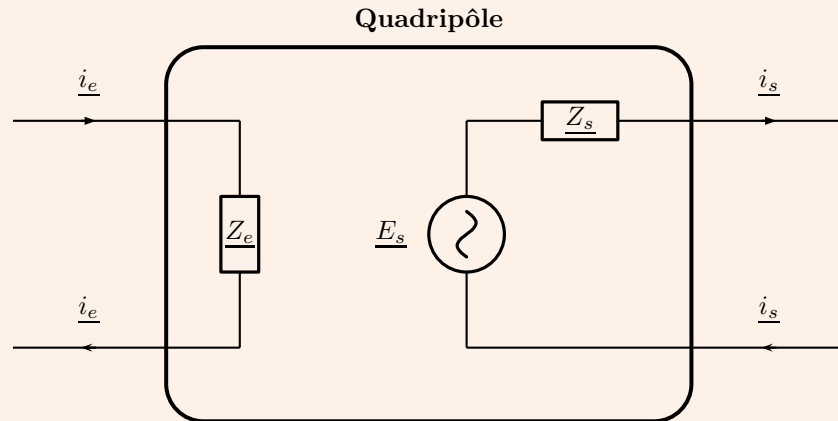


Chacun des quadripôles  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  est lui-même composé uniquement de dipôles passifs.

### Propriété VIII.1 – Modélisation électrique d'un quadripôle

Un quadripôle électrique peut être modélisé :

- à son entrée par un dipôle passif d'impédance  $\underline{Z}_e$
- et à sa sortie par un générateur de Thévenin de f.é.m.  $\underline{E}_s$  et d'impédance de sortie  $\underline{Z}_s$ .

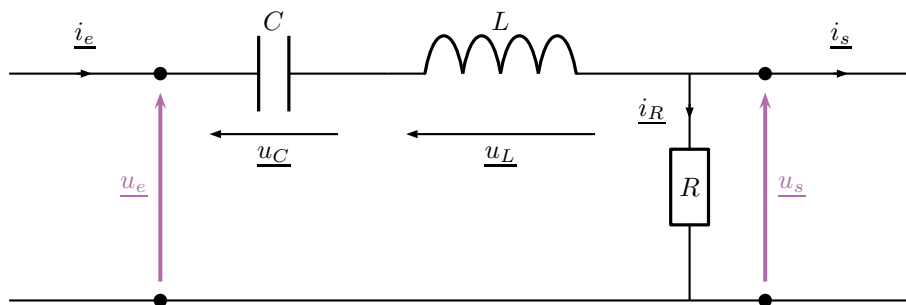


#### Remarques :

- l'impédance d'entrée  $\underline{Z}_e$  d'un quadripôle dépend des composants du quadripôle lui-même ainsi que de tous les composants qui suivent le quadripôle.
- l'impédance de sortie  $\underline{Z}_s$  et la f.é.m. de sortie  $\underline{E}_s$  d'un quadripôle dépendent du quadripôle lui-même ainsi que de tous les composants qui précèdent le quadripôle.

### Exemple – Calcul de l'impédance et de la f.é.m. de sortie du circuit RLC série aux bornes de R

On étudie le circuit RLC série ci-dessous et on cherche à établir les expressions de l'impédance et de la f.é.m. de sortie.



Utiliser les lois de Kirchhoff pour établir les expressions de l'impédance et de la f.é.m. de sortie du circuit.

La loi des noeuds donne :

$$\underline{i}_e = \underline{i}_R + \underline{i}_s$$

**Exemple - suite: Calcul de l'impédance et de la f.é.m. de sortie du circuit RLC série aux bornes de R**

et la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
 \underline{u_e} &= \underline{u_C} + \underline{u_L} + \underbrace{\underline{u_R}}_{\underline{u_s}} \\
 &= \frac{\underline{i_e}}{jC\omega} + jL\omega \underline{i_e} + \underline{u_s} \\
 &= \left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) (\underline{i_s} + \underline{i_R}) + \underline{u_s} \\
 &= \left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i_s} + \left( 1 + \frac{1}{R} \left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \right) \underline{u_s}
 \end{aligned}$$

On peut donc déduire l'expression de  $\underline{u_s}$  :

$$\underline{u_s} = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{R} \left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)}}_{\underline{E_s}} \underline{u_e} - \underbrace{\frac{\left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)}{1 + \frac{1}{R} \left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)}}_{\underline{Z_s}} \underline{i_s}$$

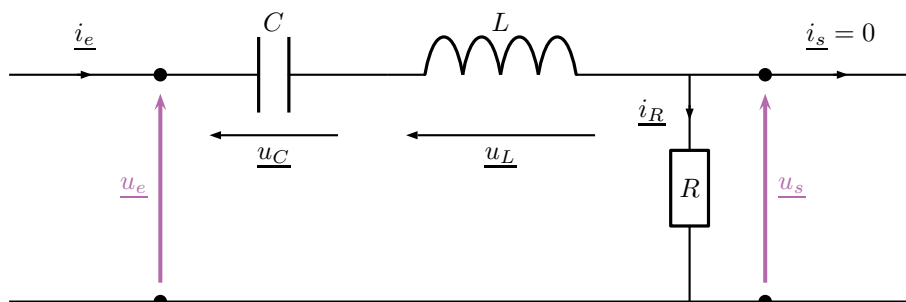
**Méthode VIII.1 – Expressions de l'impédance et de la f.é.m. de sortie**

Pour établir les expressions de  $\underline{Z_s}$  et  $\underline{E_s}$  d'un quadripôle, on applique les lois de Kirchhoff pour trouver une relation entre  $\underline{u_s}$  et  $\underline{i_s}$  :

$$\underline{u_s} = \underline{E_s} - \underline{Z_s} \underline{i_s}$$

**Exemple – Calcul de l'impédance d'entrée du circuit RLC série aux bornes de R**

On étudie le circuit RLC série ci-dessous et on cherche à établir l'expression de l'impédance d'entrée.



Utiliser les lois de Kirchhoff pour établir l'expression de l'impédance d'entrée du circuit en sortie ouverte, c'est-à-dire  $\underline{i_s} = 0$ .



## Exemple - suite: Calcul de l'impédance d'entrée du circuit RLC série aux bornes de R

La loi des mailles :

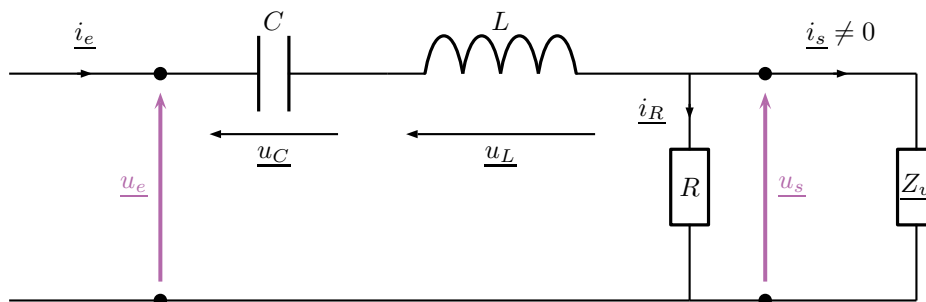
$$\begin{aligned}
 \underline{u_e} &= \underline{u_C} + \underline{u_L} + \underbrace{\underline{u_R}}_{R\underline{i_e}} \\
 &= \frac{\underline{i_e}}{jC\omega} + jL\omega\underline{i_e} + R\underline{i_e} \\
 &= \underbrace{\left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R \right)}_{\underline{Z_e}} \underline{i_e}
 \end{aligned}$$

## Méthode VIII.2 – Expressions de l'impédance d'entrée

Pour établir l'expression de  $\underline{Z_e}$  d'un quadripôle, on applique les lois de Kirchhoff pour trouver une relation entre  $\underline{u_e}$  et  $\underline{i_e}$  :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}}$$

Remarque : que se passerait-il si le circuit était mis en charge? On tient compte à présent d'un dipôle de charge  $\underline{Z_u}$  en sortie du quadripôle.



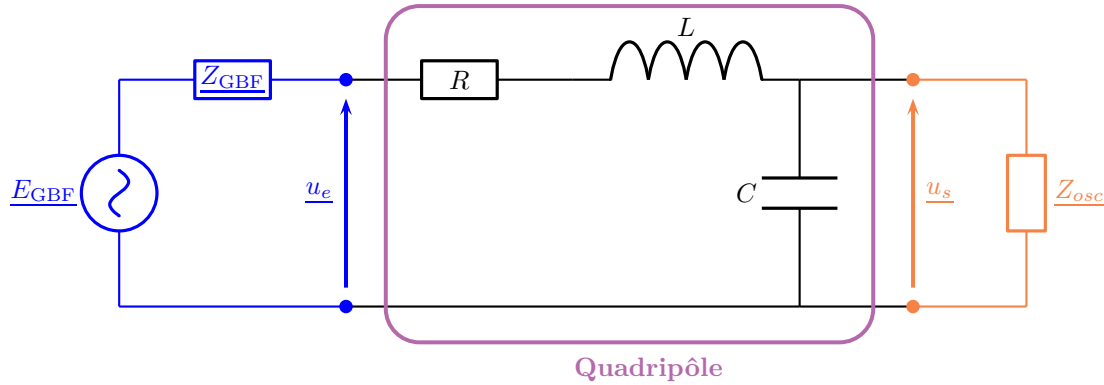
Ici :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{u_e}}{\underline{i_e}} = \underline{Z_{R//u}} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C} = \frac{\underline{Z_u Z_R}}{\underline{Z_u} + \underline{Z_R}} + \left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)$$

### Question VIII.1 – Qu'est-ce qu'un bon quadripôle ?

Nous venons de voir qu'un quadripôle influe sur le circuit dans lequel il se trouve, tant en amont qu'en aval. Comment doit-on choisir les valeurs des paramètres du quadripôle  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{Z}_s$  et  $\underline{Z}_e$  pour que la présence de ce quadripôle n'affecte pas le bon fonctionnement des autres appareils ou composants du circuit ?

Reprenons l'exemple du circuit RLC série.



avec  $|\underline{Z}_{GBF}| = 50 \, \Omega$  et  $|\underline{Z}_{osc}| = 1 \, \text{M}\Omega$ . Ainsi, si  $\underline{Z}_{GBF}$  est suffisamment petite, alors  $\underline{u}_e(t) = \underline{E}_{GBF}$  et si  $|\underline{Z}_{osc}|$  est assez grand alors  $\underline{i}_s$  est négligeable et on peut considérer le circuit en sortie ouverte.

#### Bon quadripôle à l'entrée

D'après la loi des mailles :

$$\underline{u}_e = \underline{E}_G - \underline{Z}_G \underline{i}_e$$

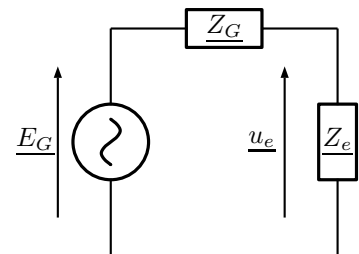
et avec la loi de Pouillet :

$$\underline{i}_e = \frac{\underline{E}_G}{\underline{Z}_G + \underline{Z}_e}$$

soit finalement :

$$\underline{u}_e = \underline{E}_G \left( 1 - \frac{\underline{Z}_G}{\underline{Z}_G + \underline{Z}_e} \right)$$

Ainsi, si  $\underline{Z}_G \ll \underline{Z}_e$  alors  $\underline{u}_e = \underline{E}_G$ .



#### Bon quadripôle à la sortie

D'après la loi des mailles :

$$\underline{u}_s = \underline{E}_s - \underline{Z}_s \underline{i}_s$$

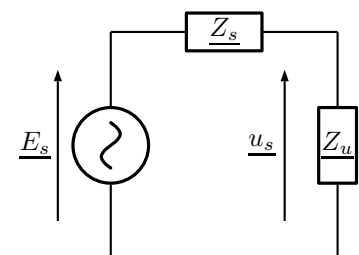
et avec la loi de Pouillet :

$$\underline{i}_s = \frac{\underline{E}_s}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_u}$$

soit finalement :

$$\underline{u}_s = \frac{\underline{Z}_u}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_s} \underline{E}_s$$

Ainsi, si  $\underline{Z}_u \gg \underline{Z}_s$  alors  $\underline{u}_s = \underline{E}_s$ .



## Propriété VIII.2 – Quadripôle idéal

**Pour un circuit commandé en tension**, un quadripôle sera de bonne qualité :

- si son impédance d'entrée est très supérieure à l'impédance de sortie du quadripôle qui le précède.
- si son impédance de sortie est très inférieure à l'impédance d'entrée du quadripôle qui le suit.

$$\text{Quadripôle idéal} \xleftrightarrow{\text{commande en tension}} \begin{cases} \underline{Z}_e \rightarrow +\infty \\ \underline{Z}_s \rightarrow 0 \end{cases}$$

Remarque : pour un circuit commandé en courant, c'est l'inverse :

$$\text{Quadripôle idéal} \xleftrightarrow{\text{commande en courant}} \begin{cases} \underline{Z}_e \rightarrow 0 \\ \underline{Z}_s \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Prenons l'exemple de l'impédance d'entrée pour un circuit commandé en courant :

D'après la loi des noeuds :

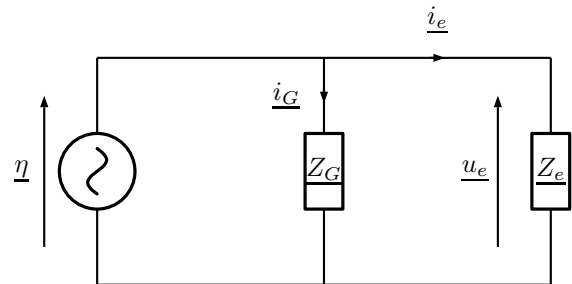
$$\underline{i} = \underline{i}_G + \underline{i}_e$$

et par définition de l'impédance :

$$\underline{\eta} = \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_G} + \underline{i}_e = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_G} \underline{i}_e + \underline{i}_e = \left(1 + \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_G}\right) \underline{i}_e$$

Ainsi, si  $\underline{Z}_e \ll \underline{Z}_G$  alors  $\underline{u}_s = \underline{E}_s$ .

Il faut donc  $\underline{Z}_e \rightarrow 0$ .



## Retour sur le circuit RLC série

D'après ce que nous venons de voir, le GBF servant de commande en tension, il est normal que son impédance soit faible. Quant à l'oscilloscope, celui-ci servant d'appareil de mesure, on ne veut pas qu'il provoque une chute de tension et modifie ainsi les propriétés du circuit lors du branchement, il faut donc que son impédance d'entrée soit très grande.

## Question VIII.2 – Pourquoi constate-t-on une chute de tension aux bornes du GBF lors d'une résonance aiguë ?

Pour le circuit RLC, l'impédance d'entrée s'écrit :

$$\underline{Z}_{e\text{RLC}} = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

A la résonance,  $\underline{Z}_{e\text{RLC}} = R$  ; or la résistance peut être faible ou du même ordre de grandeur que  $\underline{Z}_{\text{GBF}} = 50 \, \Omega$ . Dans ce cas, le courant à la sortie du GBF n'est plus négligeable et cela provoque une chute de tension à la sortie du GBF visible sur l'oscilloscope. Pour étudier proprement la résonance, il faudrait donc prendre en compte ce phénomène.

### I.3 Réponse temporelle, ordre et stabilité d'un quadripôle

#### Définition VIII.2 – Réponse temporelle

On appelle **réponse temporelle** la relation mathématique entre la tension de sortie  $u_s(t)$  d'un quadripôle linéaire et sa tension d'entrée  $u_e(t)$ . Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme suivante :

$$a_n \frac{d^n u_s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u_s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_s(t)}{dt} + a_0 u_s(t) = b_k \frac{d^k u_e(t)}{dt^k} + \dots + b_1 \frac{du_e(t)}{dt} + b_0 u_e(t) + c_0$$

Remarque : cette équation différentielle est obtenue à partir de :

- ★ la loi des mailles,
- ★ la loi des noeuds,
- ★ les équations caractéristiques des différents dipôles,
- ★ l'association de différents dipôles,
- ★ la reconnaissance de diviseur de tension ou de courant.

#### Définition VIII.3 – Ordre d'un quadripôle

L'**ordre d'un quadripôle** est égal à l'ordre de l'équation différentielle (maximum de  $n$  et  $k$ ) qui relie  $u_s(t)$  à  $u_e(t)$ .

#### Définition VIII.4 – Stabilité d'un quadripôle

Un quadripôle est dit **stable** s'il répond à une excitation d'amplitude constante par un signal de sortie qui reste borné en amplitude.

#### Propriété VIII.3 – Stabilité d'un quadripôle

En pratique, *un quadripôle est stable si sa réponse temporelle est une EDLCC dont l'équation homogène ne présente que des coefficients de même signe<sup>a</sup>.*

<sup>a</sup>. On notera que ceci correspond au théorème de Routh-Hurwitz (hors programme).

★ Ordre 1 :

$$a_1 \frac{du_s(t)}{dt} + a_0 u_s(t) = 0$$

La solution est du type :  $u_s(t) = Ae^{-\frac{a_0}{a_1}t}$  ; cette solution converge si et seulement si  $a_0$  et  $a_1$  sont de même signe<sup>a</sup>.

★ Ordre 2 :

$$a_2 \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{du_s(t)}{dt} + a_0 u_s(t) = 0$$

On se contentera de remarquer que si  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont de même signe, on se ramène à une équation différentielle similaire à celle décrivant le régime transitoire d'un circuit RLC<sup>b</sup>, et la solution est donc stable.

<sup>a</sup>. On a déjà rencontré ce type d'équation différentielle dans la charge d'un condensateur :  $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{RC} = 0$ .

<sup>b</sup>. On rappelle que l'équation décrivant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série est donnée par :  $\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = 0$ .

## I.4 Réponse fréquentielle et fonction de transfert d'un quadripôle

La résolution de l'équation différentielle précédente en  $u_s$  est extrêmement fastidieuse dans le régime temporel. Celle-ci étant linéaire, on peut, comme dans les chapitres précédents, utiliser la notation complexe afin de déterminer  $u_s$ . On obtiendra ainsi l'amplitude complexe  $\underline{u}_{sm}$  de la tension de sortie en fonction de la pulsation  $\omega$  de la tension  $u_e$  appliquée en entrée.

En étudiant la circuit, et donc le quadripôle, en RSF, on passe de la variable temporelle  $t$  à la variable fréquentielle  $\omega$  (ou  $f$  ou  $x$ ).

Pour la réponse en tension, les notations complexes des tensions d'entrée et de sortie s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{u}_e(t) = U_{em} e^{j(\omega t + \varphi_e)} \\ \underline{u}_s(t) = U_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)} \end{cases}$$

### Définition VIII.5 – Fonction de transfert d'un quadripôle

La fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$  d'un quadripôle est le quotient complexe de  $\underline{u}_s$  sur  $\underline{u}_e$  :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$

On définit alors deux grandeurs adimensionnées, le gain  $G(\omega)$  et le déphasage  $\varphi$ , comme  $\underline{H}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi}$  avec :

$$G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \underbrace{\frac{U_{seff}}{U_{e eff}}}_{\text{car RSF}}$$

$$\text{et } \varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega)) = \varphi_s - \varphi_e$$

Remarque : afin d'adimensionner complètement l'étude du système, on ramène l'étude de  $\underline{H}(\omega)$  à celle de  $\underline{H}(x)$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_c}$  où  $\omega_c$  est une pulsation caractéristique qui ressortira naturellement de l'étude du quadripôle. Etudier un quadripôle revient donc à étudier l'évolution des fonctions  $G(x)$  et  $\varphi(x)$ .

### Exemple – Cas du circuit RC série et du circuit RLC série

★ RC série : on a déjà montré qu'aux bornes du condensateur

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et } \omega_c = \frac{1}{RC}$$

★ RLC série : on a déjà montré qu'aux bornes du condensateur

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et } \omega_c = \omega_0$$

Remarque : on constate ici que  $\underline{H}(x)$  dépend effectivement de la pulsation  $\omega$  de la tension d'entrée

**Définition VIII.6 – Filtre électrique**

Un circuit électrique dont la fonction de transfert dépend de la pulsation est appelé **filtre**.

Exemple : prenons l'exemple du circuit RC :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$G \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } U_{\text{seff}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Le signal est coupé à haute fréquence, donc sur au moins une partie du spectre, d'où le terme de filtre.

**Propriété VIII.4 – Ordre d'une filtre**

De façon générale, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{N}(\omega)}{\underline{D}(\omega)}$$

avec  $\underline{N}(\omega)$  et  $\underline{D}(\omega)$  des polynômes complexe de variable  $j\omega$ .

**L'ordre d'un filtre** correspond au maximum entre les degrés de  $\underline{N}(\omega)$  et de  $\underline{D}(\omega)$ .

Exemples :

- ★ pour le RC, le filtre est d'ordre 1
- ★ pour le RLC, le filtre est d'ordre 2

**Définition VIII.7 – Filtre passif ou actif**

Un filtre passif est un filtre dans lequel n'interviennent que des dipôles passifs. Le gain en puissance du quadripôle est alors inférieur à 1.

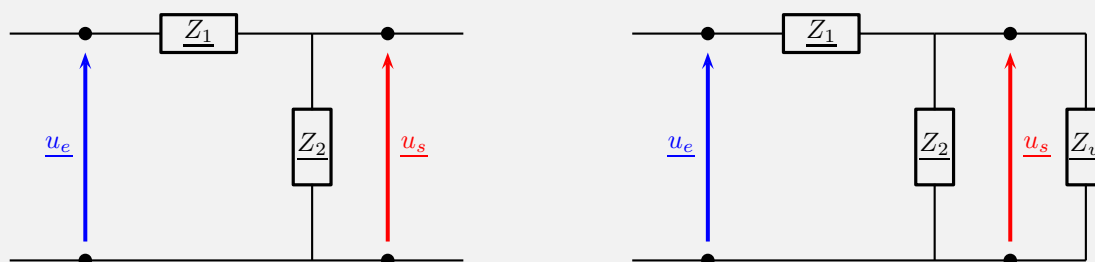
Un filtre actif est un filtre dans lequel intervient au moins un dipôle actif. Le gain en puissance du quadripôle peut alors être supérieur à 1.

**Propriété VIII.5 – Fonction de transfert d'un quadripôle dans une chaîne de quadripôle**

Tout comme les impédances d'entrée et de sortie, les fonctions de transfert dépendent de ce qui les suit dans le montage.

**Exercice VIII.1 – Fonctions de transfert avec sortie ouverte ou en charge**

Etudions le circuit ci-dessous en sortie ouverte (à vide, sans charge à la sortie).



$$\underline{H}_{\text{vide}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{H}_{\text{charge}} = \frac{\frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_u}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_u}}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_u}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_u}}$$

Donc :

$$\underline{H}_{\text{vide}} \neq \underline{H}_{\text{charge}}$$

Seule la fonction de transfert à vide caractérise intrinsèquement un quadripôle.

**Propriété VIII.6 – Fonction de transfert d'une chaîne de quadripôles**

Dans une chaîne de quadripôle, on a :

$$\underline{H}_{(1,2)} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2 \neq \underline{H}_{1\text{vide}} \times \underline{H}_{2\text{vide}}$$

Pour que  $\underline{H}_{(1,2)\text{vide}} = \underline{H}_{1\text{vide}} \times \underline{H}_{2\text{vide}}$ , il faut que les quadripôles  $Q_1$  et  $Q_2$  soient idéaux. Il faut donc que :

$$\underline{Z}_{s1} \ll \underline{Z}_{e2}$$

Remarque : en pratique, on peut intercaler des montages suiveurs entre les quadripôles pour les isoler et donc les idéaliser.

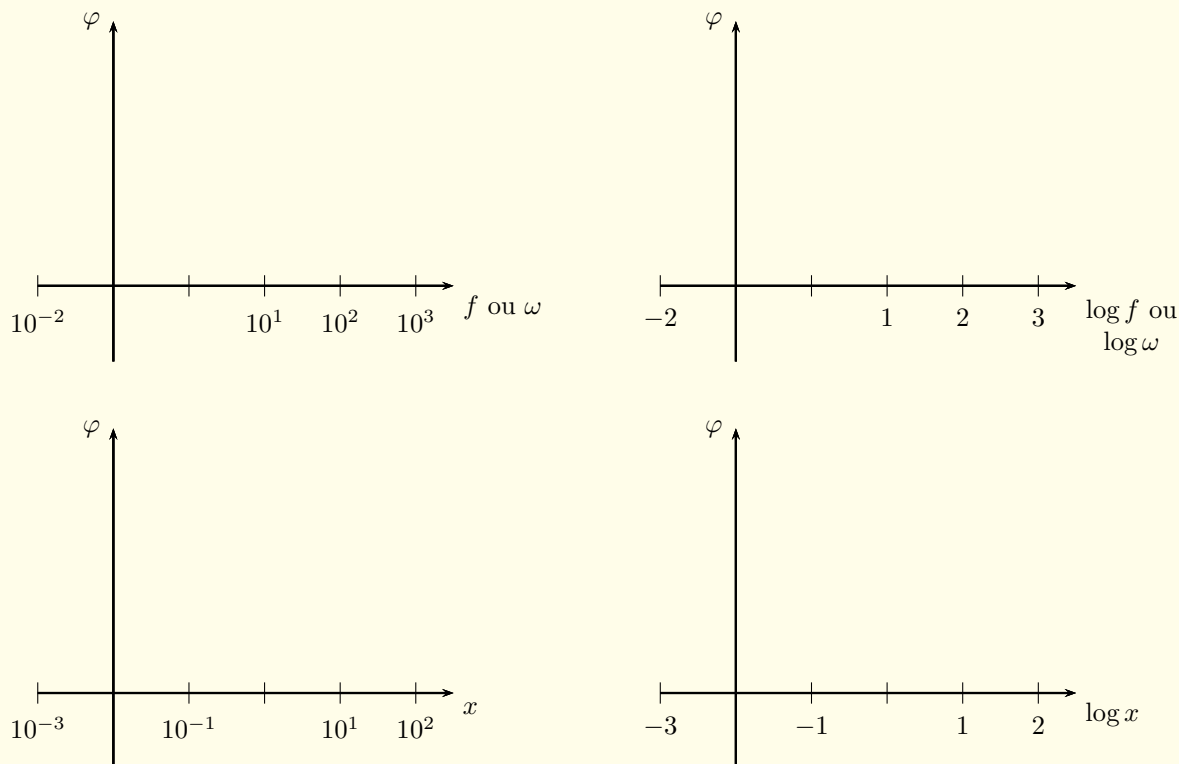
## I.5 Diagramme de Bode



**Définition VIII.8 – Diagramme de Bode**

Le diagramme de Bode est la représentation simultanée du gain et du déphasage associés à une fonction de transfert donnée en fonction d'une grandeur spectrale ( $\omega$ ,  $f$  ou  $x$ ).

★ Pour le déphasage, on représente  $\varphi$  sur une échelle semi-logarithmique :



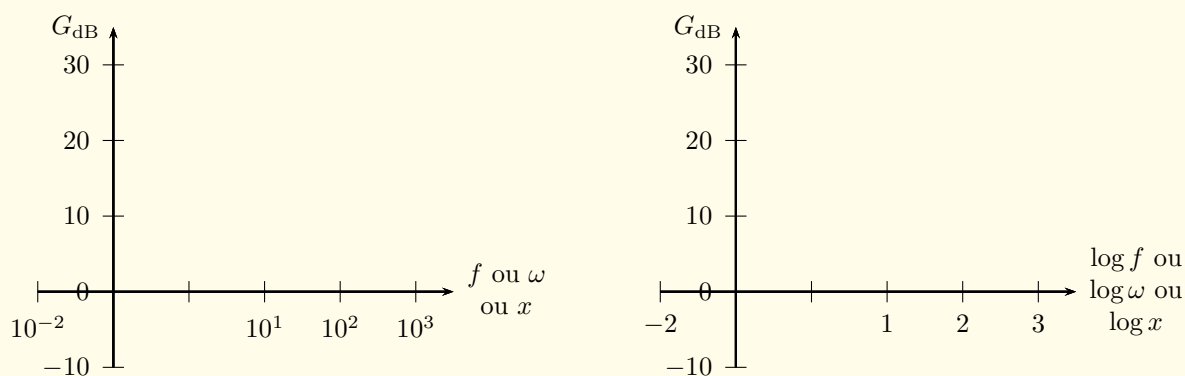
★ Pour le gain, on souhaite se rapporter à une unité de puissance. On représente donc le gain en décibel  $G_{dB}$  :

$$1 \text{ B} = 10 \text{ dB} \quad \text{et} \quad 1 \text{ B} = \log \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad \text{soit} \quad 1 \text{ dB} = 10 \log \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

Or la puissance est proportionnel au carré de la tension. Compte tenu de la définition du gain, on pose :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log (G(\omega))$$

Il s'agira donc d'une représentation « log-log » avec  $G_{dB}$  sur une échelle linéaire :



L'échelle logarithmique permet de faire ressortir des tendances en étalant les fréquences par décade.

## Propriété VIII.7 – Quelques cas particuliers

## Valeurs :

$$\star G_{\text{dB}} = 20 \text{ dB} \longrightarrow G = 10 \text{ et } U_{s_{\text{eff}}} = 10U_{e_{\text{eff}}}.$$

$$\star G_{\text{dB}} = -20 \text{ dB} \longrightarrow G = \frac{1}{10} \text{ et } U_{s_{\text{eff}}} = \frac{U_{e_{\text{eff}}}}{10}.$$

$$\star G_{\text{dB}} = 3 \text{ dB} \longrightarrow G = \sqrt{2} \text{ et } U_{s_{\text{eff}}} = \sqrt{2}U_{e_{\text{eff}}}.$$

$$\star G_{\text{dB}} = -3 \text{ dB} \longrightarrow G = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } U_{s_{\text{eff}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_{e_{\text{eff}}}.$$

## Asymptotes et comportements :

★ si, sur un domaine spectral donné,  $G(\omega) \sim \omega$  alors  $G_{\text{dB}} = 20 \log \omega + \text{cste}$  et  $G_{\text{dB}}$  a pour asymptote une droite de pente **+20 dB par décade**<sup>a</sup>.

On parle alors de *comportement dérivateur* du filtre.

★ si, sur un domaine spectral donné,  $G(\omega) \sim \frac{1}{\omega}$  alors  $G_{\text{dB}} = -20 \log \omega + \text{cste}$  et  $G_{\text{dB}}$  a pour asymptote une droite de pente **-20 dB par décade**.

On parle alors de *comportement intégrateur* du filtre.

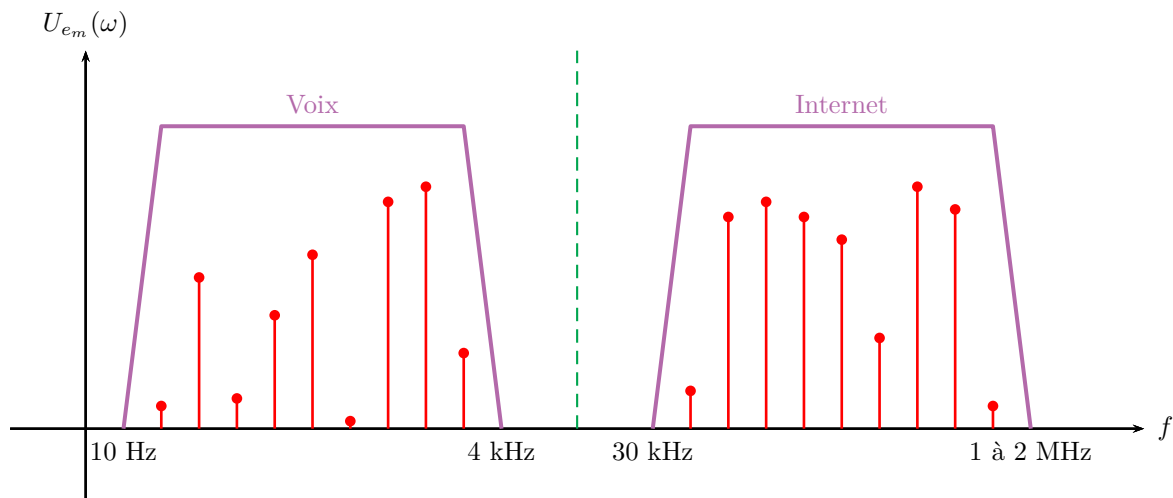
<sup>a</sup>. On parle de décade pour décrire la graduation de l'échelle logarithmique en abscisses du diagramme de Bode. Quand on passe de  $\omega$  à  $10\omega$  sur le diagramme, on s'est déplacé d'une décade.

## II Application au filtrage

Afin de comprendre l'intérêt des filtres, étudions tout d'abord en détail un exemple d'application : le filtre ADSL. Notons que nous aurions également illustré cette partie de cours avec le principe de fonctionnement d'une enceinte acoustique<sup>1</sup>.

## II.1 Principe d'un filtre ADSL

Les signaux utilisés pour la téléphonie classique (sonnerie, voix) occupent une bande de fréquences comprises entre 25 et 3500 Hz environ, alors que les fils de cuivre utilisés permettent de faire transiter des signaux de fréquence allant jusqu'à environ 1 MHz. Le principe de l'ADSL ("Asymmetric Digital Subscriber Line"<sup>2</sup>) consiste ainsi à exploiter la très grande bande de fréquences située au-dessus de celles utilisées pour la téléphonie, restée inutilisée en France jusqu'en 1999.



1. Cet exemple sera détaillé en exercice.

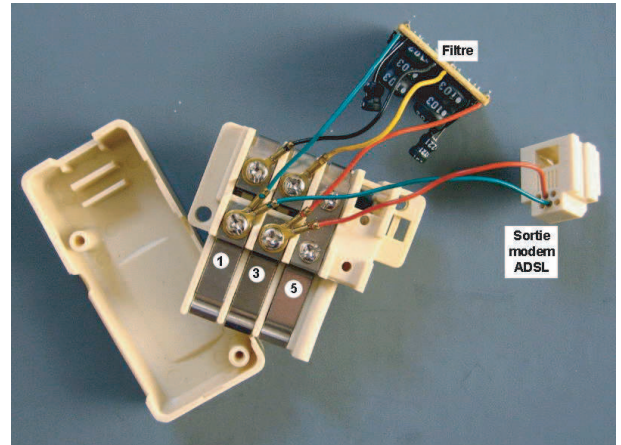
2. Traduction de ADSL : "Liaison numérique à liaison asymétrique".

Il est nécessaire de séparer ces deux types de signaux afin d'envoyer les uns vers le téléphone, et les autres vers le modem, puis vers l'ordinateur, comme l'illustre la figure ci-dessous. Cette séparation est faite avec un **filtre ADSL**.

En démontant ce filtre<sup>3</sup>, on voit que celui-ci est très simple, et ne comporte que quelques résistances, condensateur et bobines (voir figure ci-contre).

Dans le cas du filtre qui circule dans les rangs, on retrouve :

- ★ deux résistors de même résistance  $R = 22\ \Omega$
- ★ deux bobines de même inductance  $L = 10\ \text{mH}$
- ★ un condensateur de capacité  $C = 10\ \text{nF}$



Si le circuit pouvait être assimilé à un circuit RLC, cela correspondrait à :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \simeq 10^4\ \text{rad.s}^{-1}$$

Essayons donc de construire un tel filtre avec un circuit électrique le plus simple possible.

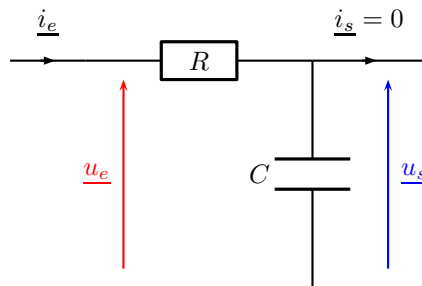
## II.2 Couper les hautes fréquences : filtre passe-bas

On cherche à isoler le signal « voix » pour l'envoyer vers le téléphone de l'utilisateur.

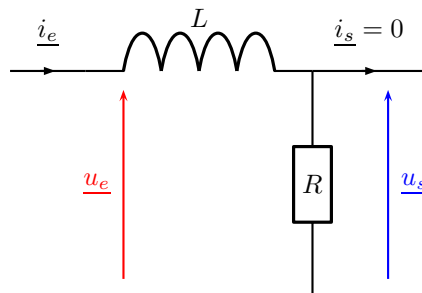
### Exemple – Circuit RC

Nous allons étudier simultanément les circuits RC et LR afin d'analyser le comportement spectral de ces quadripôle en *sortie ouverte*.

★ **Circuit RC :**



★ **Circuit LR :**



3. On fera à cet effet passer un tel filtre dans les rangs.

## Objectif 1 – Construction d'un diagramme de Bode

Nous allons profiter de ces exemples pour établir la méthode de construction d'un diagramme de Bode.

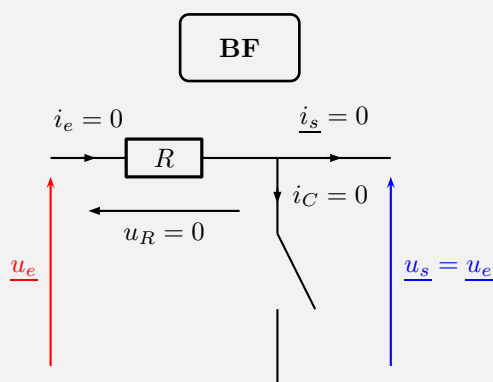
## Méthode VIII.3 – Utilisation de circuits équivalents à basses et hautes fréquences

Avant d'étudier dans le détail un filtre, on commencera systématiquement par **représenter le schéma électrique équivalent** de ce filtre à basses et à hautes fréquences afin d'établir un comportement asymptotique.

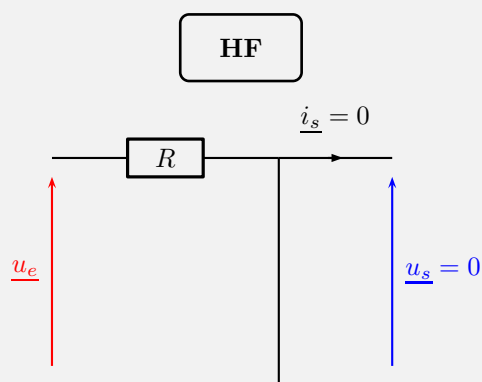
A l'issue de cette étude asymptotique, la **nature du filtre** (passe-bas, passe-haut, ...) sera déterminée.

## Exercice VIII.2 – Etude asymptotique schématique à basses et hautes fréquences

## ★ Circuit RC :

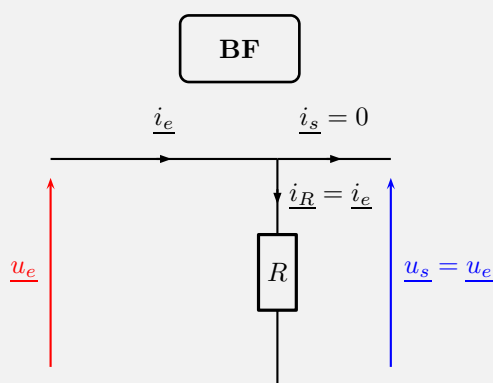


Les BF passent

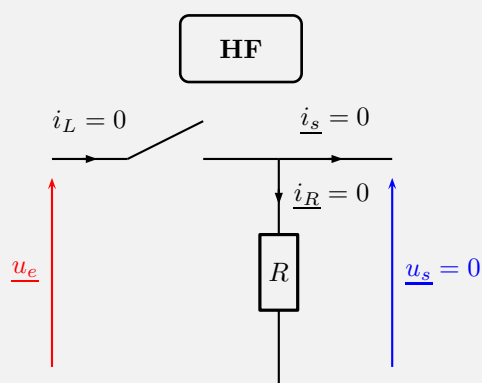


Les HF sont coupées

## ★ Circuit LR :



Les BF passent



Les HF sont coupées

**Conclusion** : Cette étude préliminaire permet de vérifier que ces filtres sont des filtres « passe-bas ».

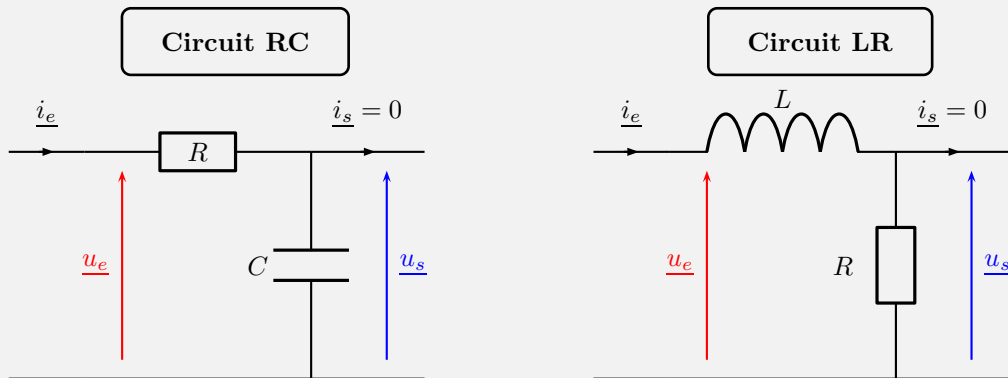
## Méthode VIII.4 – Fonction de transfert du filtre

Une fois la nature du filtre déterminée, la **fonction de transfert** doit être calculée et les expressions du **gain** et de la **phase** établies.

*L'ordre du filtre peut alors être identifié.*

## Exercice VIII.3 – Fonctions de transfert des circuits RC et LR

On se place en sortie ouverte. Déterminons les fonctions de transfert  $\underline{H}_{RC}$  et  $\underline{H}_{LR}$ .



★ **Circuit RC :**

$$\underline{H}_{RC} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

★ **Circuit LR :**

$$\underline{H}_{LR} = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R}} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega} = \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R}{L}$$

Remarque : on peut noter qu'il s'agit de filtres d'ordre 1.

## Propriété VIII.8 – Filtre passe-bas du premier ordre

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 1 peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jx}$$

où  $H_0 \in \mathbb{R}^+$  est appelé « gain statique » (ou gain à fréquence nulle)<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>. On verra dans ce qui suit que  $H_0$  est aussi le **gain maximal** du filtre passe-bas d'ordre 1.

Le gain et la phase ont donc les expressions suivantes :

$$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \arctan(-x) \\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases}$$

## Méthode VIII.5 – Diagramme de Bode asymptotique

Une fois l'expression de la fonction de transfert établie, l'étude asymptotique du diagramme de Bode, s'intéressant aux cas particulier  $x \ll 1$ ,  $x \simeq 1$  et  $x \gg 1$  doit être conduite.

## Exercice VIII.4 – Diagramme de Bode asymptotique d'un filtre passe-bas du premier ordre

- ① Pour  $x \ll 1$ ,  $\underline{H} \sim H_0$  et donc  $G_{\text{dB}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 20 \log H_0$ . On a donc une asymptote horizontale. Et  $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .
- ② Pour  $x \gg 1$ ,  $\underline{H} \sim \frac{H_0}{jx}$  et donc  $G_{\text{dB}} \sim 20 \log H_0 - 20 \log x$ . On a donc une asymptote qui est une fonction affine de pente  $-20 \text{ dB/déc}$ . Le filtre a un comportement intégrateur dans ce domaine fréquentiel. Et  $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2}$ .
- ③ Pour  $x \simeq 1$ ,  $\underline{H} \sim \frac{H_0}{1+j}$  et donc  $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log \left( \frac{H_0}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log H_0 - 3 \text{ dB}$ . Et  $\varphi(x=1) = -\frac{\pi}{4}$ .

Grâce au diagramme de Bode asymptotique et à quelques situations particulières, l'allure du diagramme de Bode peut donc être représentée comme l'indique la figure ci-dessous, où on a pris  $H_0 = 1$ .

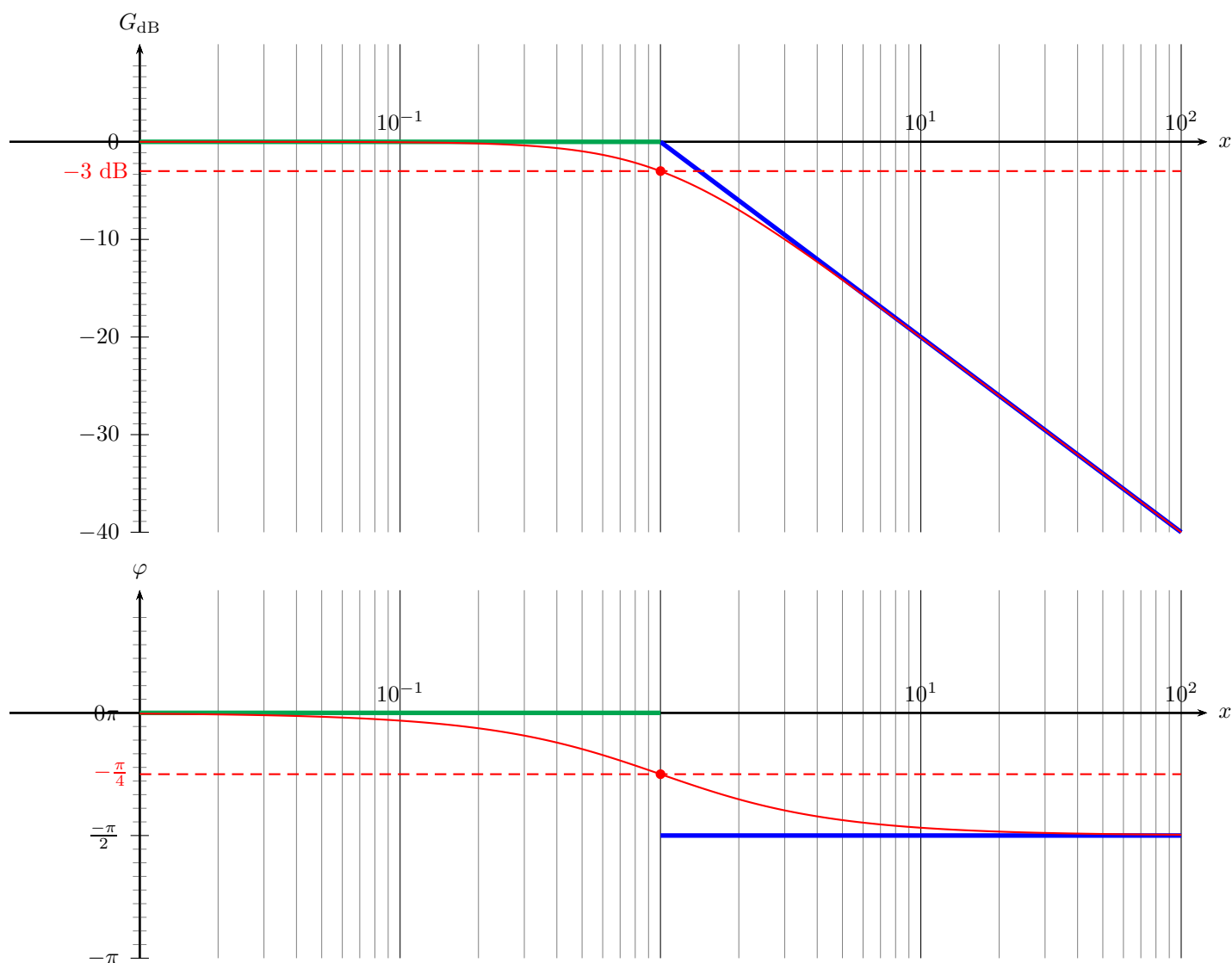


FIGURE VIII.1 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre.

**Question VIII.3 – Comment se matérialise l'effet du filtre passe-bas sur un signal donné ?**

Considérons un signal d'entrée comprenant un signal utile sinusoïdal d'amplitude  $E_1 = 1,5 \text{ V}$ , de fréquence  $f_1 = 200 \text{ Hz}$  et de valeur moyenne  $E_0 = 2 \text{ V}$  sur lequel on observe un signal parasite sinusoïdal d'amplitude  $E_2 = 0,2 \text{ V}$ , de fréquence  $f_2 = 20 \text{ kHz}$ . On veut filtrer le signal d'entrée afin de ne garder que le signal utile. L'utilisation d'un filtre passe-bas est recommandé.

Solution possible : on choisit un circuit RC et on prend une fréquence caractéristique  $f_c = 2 \text{ kHz}$ . On choisit de prendre  $R = 10 \text{ k}\Omega$ , ce qui entraîne  $C = 8 \text{ nF}$ . Le signal de sortie s'écrit :

$$u_s(t) = \underbrace{G(0)}_1 \times E_0 + \underbrace{G(2\pi f_1)}_{\simeq 1} \times E_1 \cos \left( 2\pi f_1 t + \underbrace{\varphi(2\pi f_1)}_{\simeq -0,1} \right) + \underbrace{G(2\pi f_2)}_{\simeq 0,1} \times E_2 \cos \left( 2\pi f_2 t + \underbrace{\varphi(2\pi f_2)}_{\simeq -1,47} \right)$$

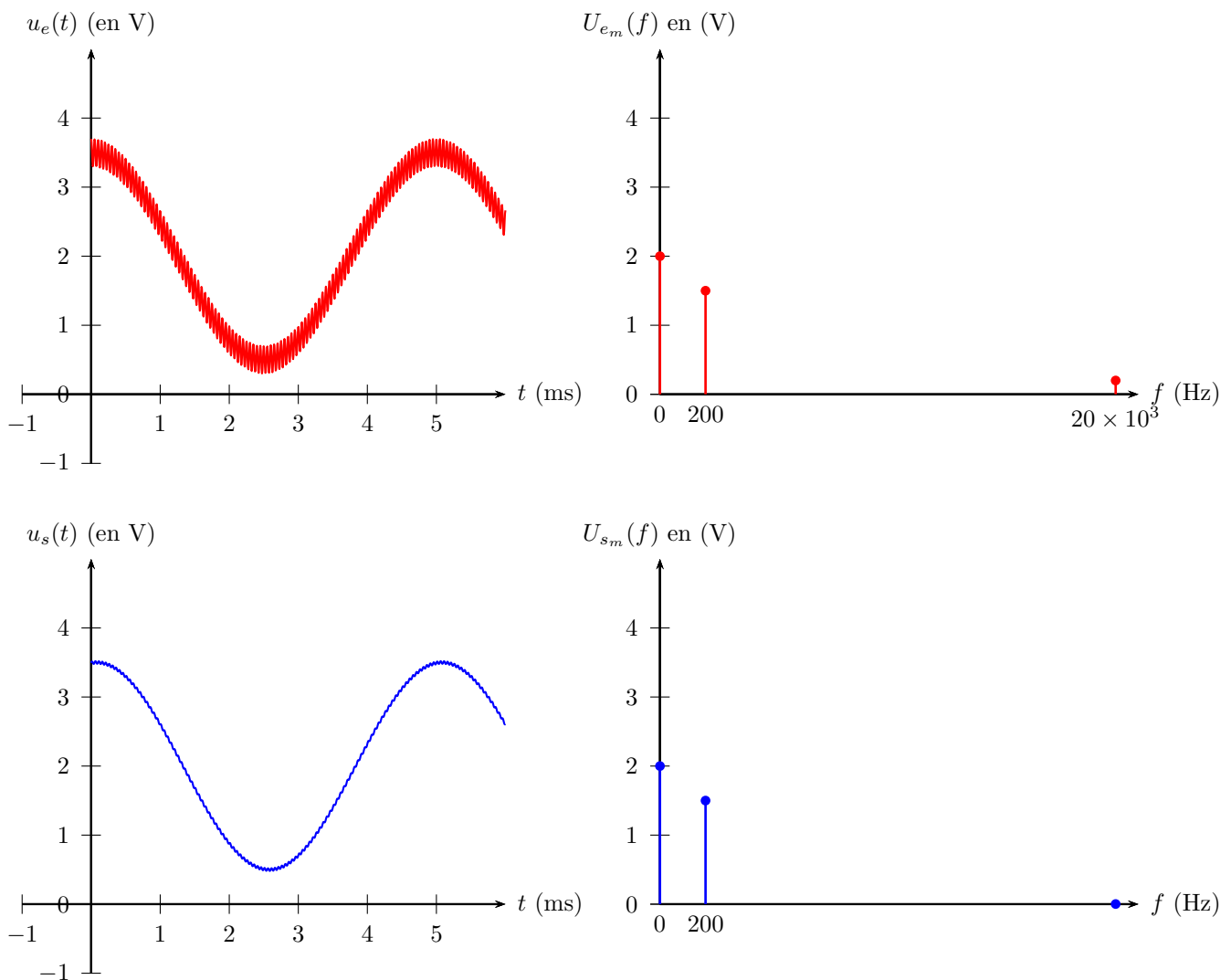


FIGURE VIII.2 – Effet d'un filtre passe-bas du premier ordre sur un signal à trois composantes spectrales : fréquence nulle, BF et HF.

### II.3 Couper les basses fréquences : filtre passe-haut

On cherche à présent à isoler le signal « internet » pour l'envoyer vers la box de l'utilisateur. On se propose d'étudier deux filtres : le circuit CR et le circuit RL.

#### Propriété VIII.9 – Filtre passe-haut du premier ordre

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 1 peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{jx}}$$

où  $H_0$  est appelé « gain à haute fréquence ». On a donc :

$$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

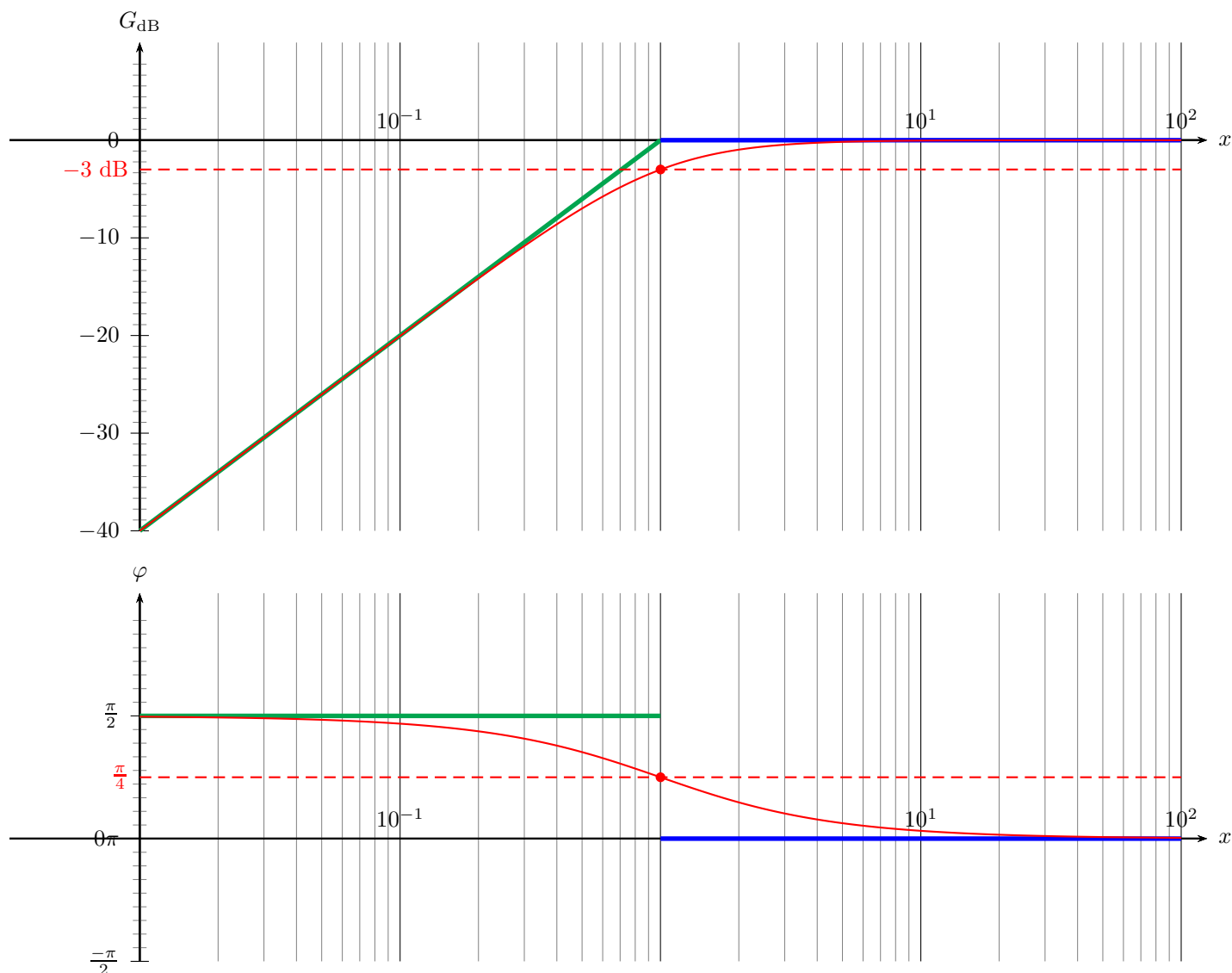


FIGURE VIII.3 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut du premier ordre. On a pris ici  $H_0 = 1$ .



**Exercice VIII.5 – Diagramme de Bode des circuits CR et RL**

Après avoir établi la nature de ces filtres par une étude asymptotique des circuits équivalents à BF et HF, établir l'expression des fonctions de transfert puis étudier le diagramme de Bode asymptotique de ces filtres afin de vérifier l'allure des courbes présentées ci-dessus.

★ **Circuit CR :**

BF

HF

Les BF sont coupées

Les HF passent

★ **Circuit RL :**

BF

HF

Les BF sont coupées

Les HF passent

Cette étude préliminaire permet de vérifier que ces filtres sont des filtres « passe-haut ». On se place en sortie ouverte pour établir les fonctions de transfert  $\underline{H}_{CR}$  et  $\underline{H}_{RL}$ .

Circuit CR

Circuit RL

**Exercice VIII.5 – Diagramme de Bode des circuits CR et RL (suite)**

★ **Circuit CR :**

★ **Circuit RL :**

Remarque : *on peut noter qu'il s'agit de filtres d'ordre 1.*

L'étude du diagramme de Bode asymptotique est la suivante :

① Pour  $x \ll 1$  :

② Pour  $x \gg 1$  :

③ Pour  $x \simeq 1$  :

Enfin, on peut établir la bande passante à -3 dB de ces filtres :

Comme précédemment on peut s'intéresser à l'effet de ce filtre sur un signal d'entrée donné. Reprenons l'exemple de la question VIII.3. On a choisi un circuit CR et on prend une fréquence caractéristique  $f_c = 2$  kHz. On choisit de prendre  $R = 10$  k $\Omega$ , ce qui entraîne  $C = 8$  nF. Le signal de sortie s'écrit :

$$u_s(t) = \underbrace{G(0)}_0 \times E_0 + \underbrace{G(2\pi f_1)}_{\simeq 0,1} \times E_1 \cos \left( 2\pi f_1 t + \underbrace{\varphi(2\pi f_1)}_{\simeq 1,7} \right) + \underbrace{G(2\pi f_2)}_{\simeq 1} \times E_2 \cos \left( 2\pi f_2 t + \underbrace{\varphi(2\pi f_2)}_{\simeq 0,1} \right)$$

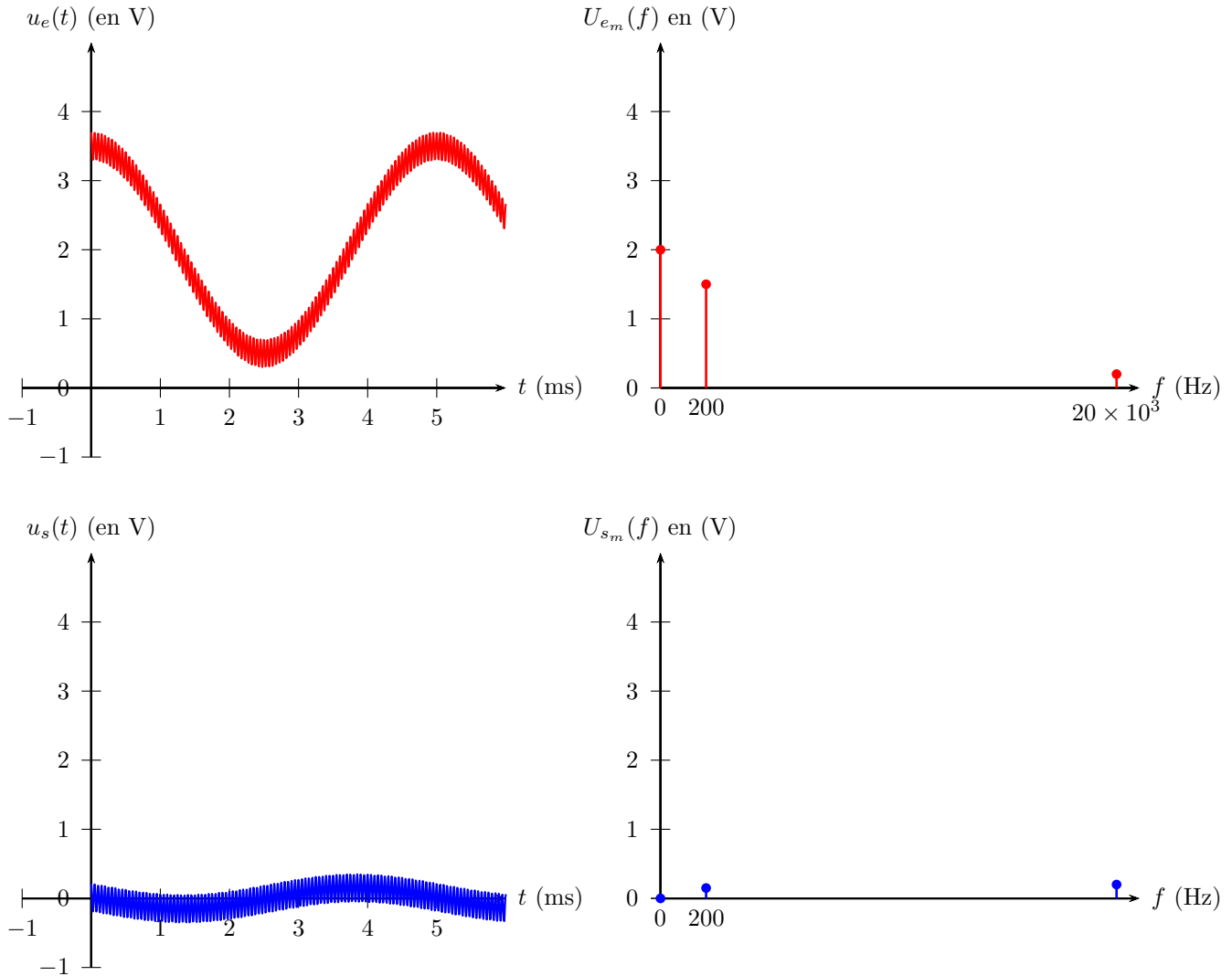


FIGURE VIII.4 – Effet d'un filtre passe-haut du premier ordre sur un signal à trois composantes spectrales : fréquence nulle, BF et HF.

**Question VIII.4 –** Peut-on à présent fabriquer un filtre permettant de sélectionner une bande spectrale autour d'une fréquence bien précise ?

Ce type de filtre passe-bande est très souvent utilisé en électrocinétique, comme en mécanique. Nous avons d'ailleurs déjà étudié un tel filtre lorsque nous nous sommes intéressés à la résonance en intensité dans un circuit RLC. Détaillons cet exemple.

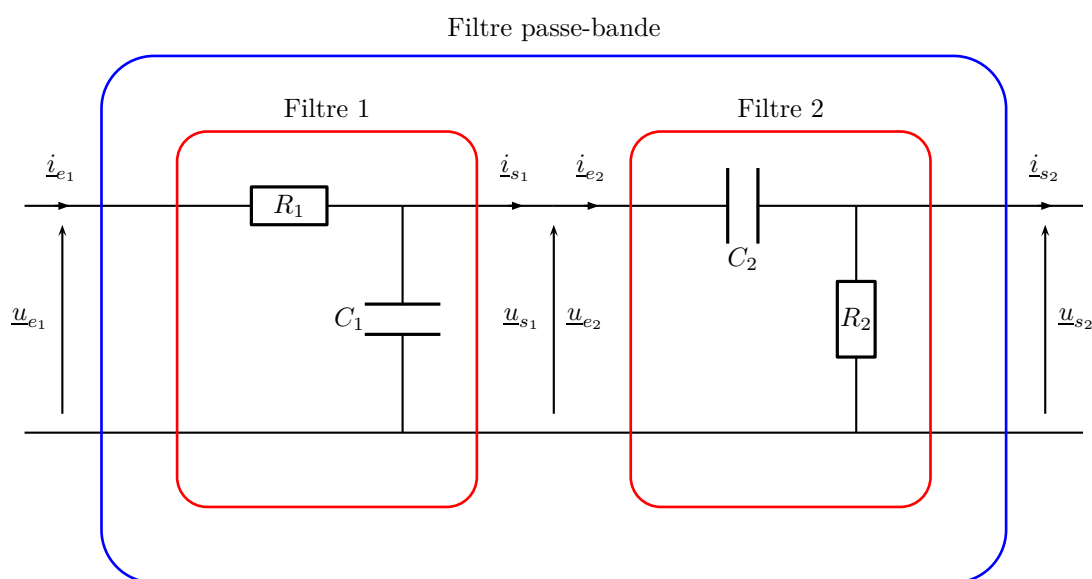
## II.4 Sélectionner les fréquences : filtre passe-bande

Réaliser un passe-bande consiste donc à ne laisser passer qu'une certaine plage de fréquences sur une bande passante bornée.

### II.4.a Filtre passe-bande à partir de filtres d'ordre 1 - Associer des fonctions de base pour réaliser une fonction complexe

Nos connaissances, à ce stade du chapitre, nous permettent déjà d'envisager un tel type de filtre : l'association d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut d'ordre 1 de fréquences caractéristiques bien choisies doit nous permettre de réaliser la fonction souhaitée.

#### □ Schématisation à partir de filtres RC



Le filtre 1, s'il était pris seul, correspondrait à un filtre de type passe-bas ; alors que le filtre 2 correspondrait à un filtre passe-haut. Posons  $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$  et  $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$ . On aurait donc dans le cas idéal une fonction de transfert globale à vide (cf.figure VIII.5) :

$$\underline{H}_{\text{vide}} = \frac{u_{s2}}{u_{e1}} = \frac{1}{1 + jx_1} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{jx_2}}$$

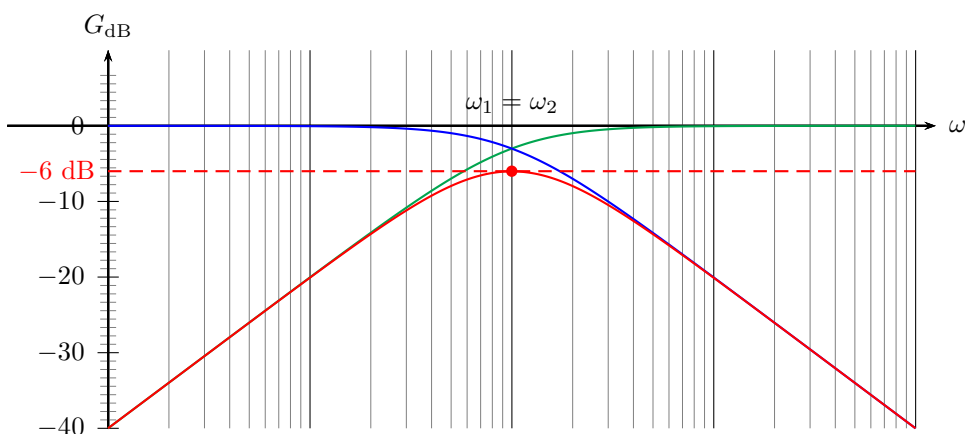


FIGURE VIII.5 – On prend ici le cas  $\omega_1 = \omega_2$ .

□ **Idéalité de la chaîne {filtre 1 + filtre 2} à vide commandée par une source idéale de tension**

On étudie le filtre passe-bande en sortie ouverte (c'est-à-dire  $i_{s2} = 0$ ) et commandé par une source idéale de tension  $\underline{e}$ . On voudrait :

$$\underline{H}_{\text{P-bande}} = \underline{H}_{1,\text{vide}} \times \underline{H}_{2,\text{vide}}$$

La condition pour que ceci soit vrai est que l'impédance de sortie du filtre 1  $\underline{Z}_{s,1}$  soit beaucoup plus petite que l'impédance d'entrée du filtre 2  $\underline{Z}_{e,2}$  de sorte que  $i_{s1} = i_{e2} \simeq 0$ . Evaluons chacune de ces quantités.

**Exercice VIII.6 – Impédances d'entrée et de sortie**

Montrer que les impédances  $\underline{Z}_{s,1}$  et  $\underline{Z}_{e,2}$  s'écrivent :

$$\underline{Z}_{s,1} = \frac{R_1}{1 + jR_1C_1\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{e,2} = R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}$$

Pour  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  donnés, on montre aisément qu'en fonction de la fréquence :

$$|\underline{Z}_{s,1}|_{\max} = R_1 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}_{e,2}|_{\min} = R_2$$

Le filtre passe-bande pourra donc être considéré comme idéal si :

$$R_1 \ll R_2$$

**Attention !** Si le filtre passe-bande est en charge et/ou branché à l'entrée sur une source réelle de tension, les expressions des impédances d'entrée et de sortie seront modifiées.

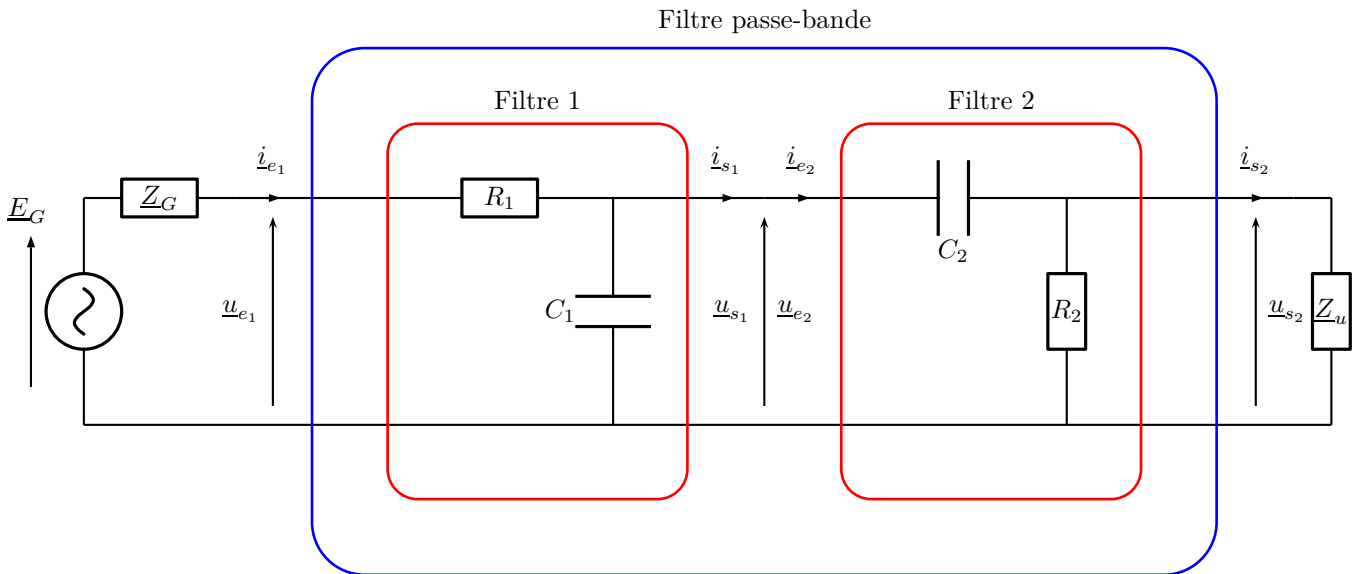
**Question VIII.5 – Comment prendre en compte le caractère réelle de la source et la charge du quadripôle ?**

Il faut reprendre les calculs de l'impédance.

Cette prise en compte va imposer de nouvelles contraintes sur le choix de  $R_1$  et  $R_2$ .

### □ Prise compte du caractère réel de la source de commande et de la charge

On veut toujours  $\dot{I}_{s1} = \dot{I}_{e2} \simeq 0$ . Le circuit est à présent le suivant :



A la sortie :

$$\underline{u}_{s,2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jR_2C_2\omega}} \underline{u}_{e,2} \quad \text{si } |\underline{Z}_u| \gg R_2$$

et on pourra considérer la sortie du filtre passe-bande ouverte (à vide c'est-à-dire  $\dot{I}_{s,2} = 0$ ).

A l'entrée, si on suppose dès lors que  $R_2 \gg R_1$  et que  $\dot{I}_{s,2} = 0$ , on a alors :

$$\underline{u}_{s,1} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} \underline{E}_G \quad \text{si } |\underline{Z}_G| \ll R_1$$

### □ Choix de valeurs expérimentales

Finalement, l'ensemble de notre étude amène au résultat suivant :

$$|\underline{Z}_G| \ll R_1 \ll R_2 \ll |\underline{Z}_u|$$

Ces inégalités ne sont pas forcément aisées à satisfaire. Prenons les valeurs suivantes qui correspondent à un montage électrique classique de TP, avec un GBF à l'entrée et un oscilloscope à la sortie :

- $|\underline{Z}_G| = 50 \, \Omega$
- $R_u = 1 \, \text{M}\Omega$

Si l'on veut un facteur 100 entre chaque grandeur pour les différentes inégalités à l'entrée et à la sortie, il faudrait  $R_1 > 5 \, \text{k}\Omega$  et  $R_2 < 10 \, \text{k}\Omega$  tout en maintenant  $R_1 \ll R_2$  ce qui n'est pas réalisable.

#### Propriété VIII.10 – Montage suiveur

On gère parfois les problèmes liés aux impédances d'entrée et de sortie en insérant en pratique des blocs d'isolation de type « montage suiveur » utilisant des ALI.

### □ Montage suiveur

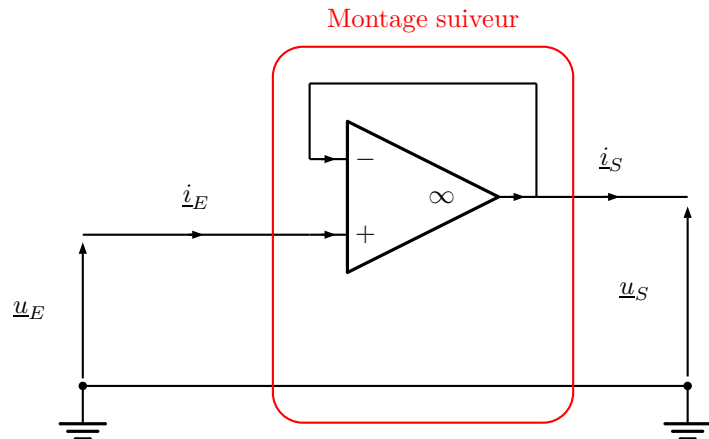
Il s'agit du montage le plus simple utilisant un ALI, composant actif devant être alimenté par une tension continue  $-15\text{V}/+15\text{V}$ . Sa fonction de transfert est particulièrement simple puisque :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_S}{\underline{u}_E} = 1$$

Le montage suiveur est donc un quadripôle dont les impédances d'entrée et de sortie sont particulièrement intéressantes :

- $|\underline{Z}_E| \sim 1 \text{ G}\Omega$
- $|\underline{Z}_S| \sim 10 \Omega$

Ces valeurs sont indépendantes des autres éléments du circuit.



Dans le cas qui nous intéresse, insérer un montage suiveur entre les filtres 1 et 2 permet d'assurer l'idéalité de la chaîne.

#### II.4.b Filtre passe-bande à partir d'un seul filtre d'ordre 2 : circuit LCR

Le paragraphe précédent a montré la difficulté de gérer les contraintes liées aux impédances d'entrée et/ou de sortie des blocs. Il serait donc peut-être plus simple de construire un filtre passe-bande à partir d'un unique quadripôle. Ceci peut être réalisé à partir d'un circuit LCR.

#### Propriété VIII.11 – Filtre passe-bande d'ordre 2

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

où  $H_0$  est le « gain maximal » ou « gain à résonance » et où  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

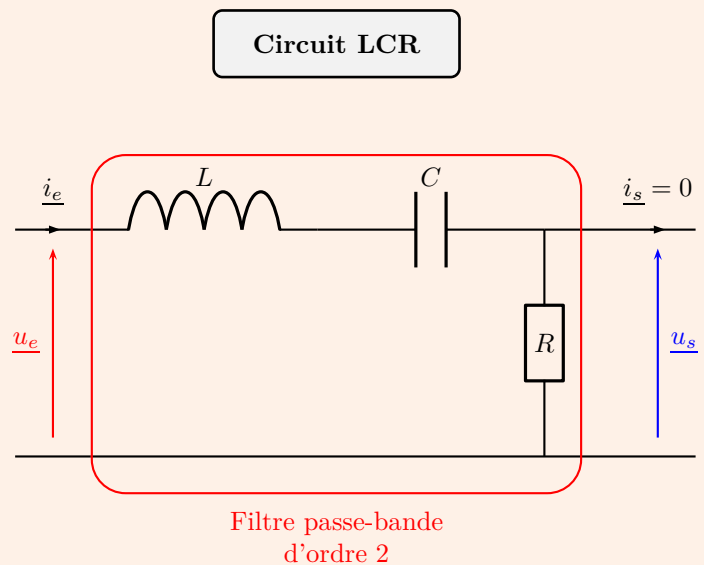
et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

On a donc :

$$G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

et :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \arctan \left( -Q \left( x - \frac{1}{x} \right) \right) \\ \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \end{cases}$$



## Méthode VIII.6 – Analyse d'un filtre passe-bande d'ordre 2

Sur un diagramme de Bode :

- ★ On détermine  $H_0$  en lisant à la résonance le gain en décibels maximal  $G_{dB}(1) = 20 \log H_0$ .
- ★ On détermine  $\omega_0$  :
  - soit par l'accord de phase  $\varphi(1) = 0$ ,
  - soit par l'abscisse du croisement des asymptotes.
- ★ On détermine  $Q$  :
  - ★ soit par la bande passante à -3 dB  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$ ,
  - ★ soit par l'ordonnée du croisement des asymptotes où on aura un gain en décibels égal à  $20 \log \left( \frac{H_0}{Q} \right)$ .

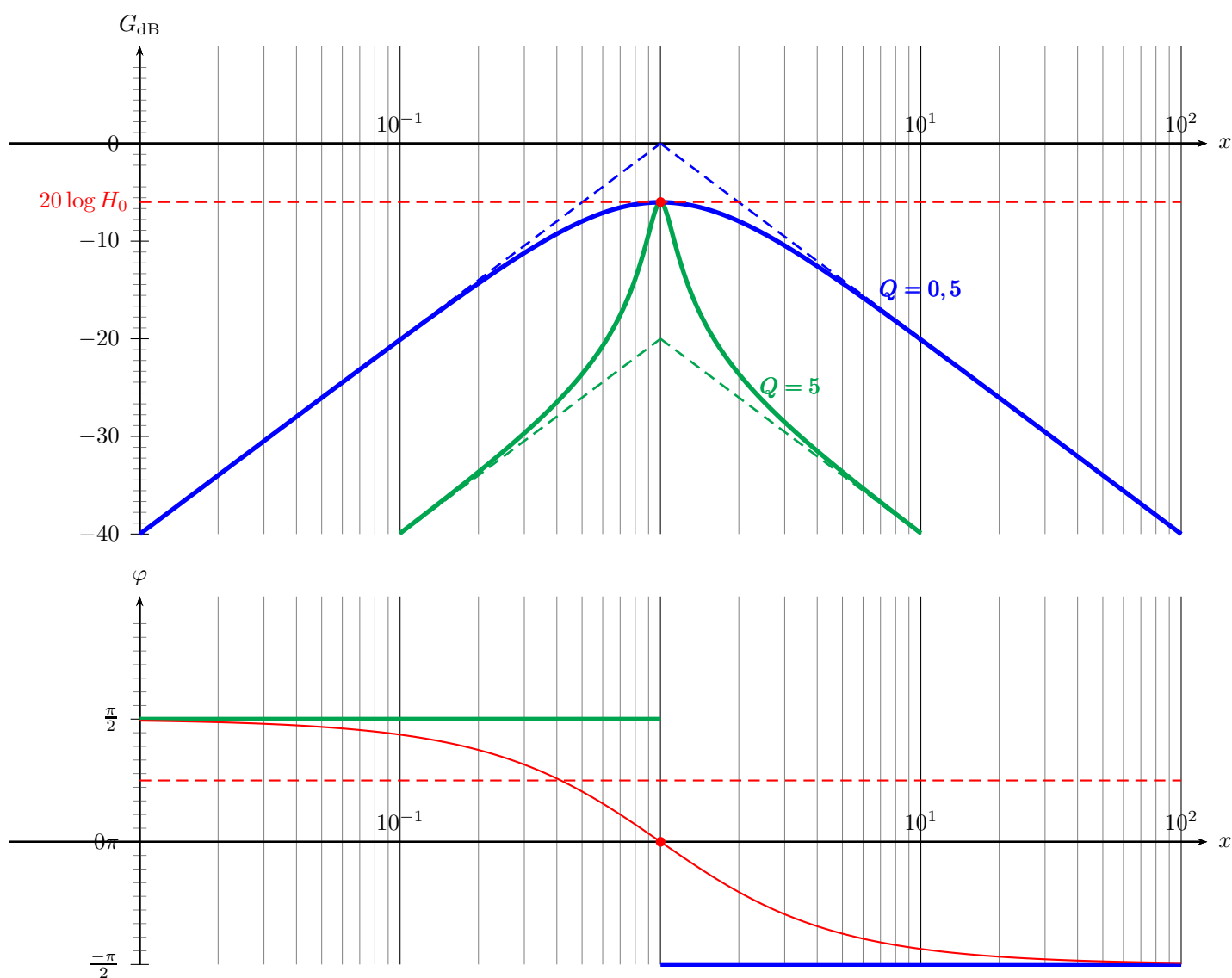


FIGURE VIII.6 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande du deuxième ordre. On a pris ici  $H_0 = 0,5$ .



**Exercice VIII.7 – Diagramme de Bode du circuit LCR**

Après avoir établi la nature de ce filtre par une étude asymptotique des circuits équivalents à BF et HF, établir l'expression de la fonction de transfert puis étudier le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre afin de vérifier l'allure des courbes présentées ci-dessus.

★ **Circuit LCR :**

BF

HF

Les BF sont coupées

Les HF sont coupées

Cette étude préliminaire permet de vérifier que ce filtre est un filtre « passe-bande ». On se place en sortie ouverte pour établir la fonction de transfert  $\underline{H}_{\text{LCR}}$ .

Circuit LCR

★ **Circuit LCR :**

Remarque : on peut noter qu'il s'agit d'un filtre d'ordre 2.

**Exercice VIII.7 – Diagramme de Bode du circuit LCR (suite)**

L'étude du diagramme de Bode asymptotique est la suivante :

① Pour  $x \ll 1$  :

② Pour  $x \gg 1$  :

③ Pour  $x \simeq 1$  :

Enfin, on peut établir la bande passante à -3 dB de ce filtre :

Comme précédemment on peut s'intéresser à l'effet de ce filtre sur un signal d'entrée donné. Reprenons l'exemple de la question VIII.3. On choisit un circuit LCR et on prend une fréquence propre  $f_0 = f_1 = 2$  kHz. On choisit de prendre  $R = 1,0$  k $\Omega$ , et  $L = 1$  H ce qui entraîne  $C = 633$  nF et  $Q = 1,3$ . Le signal de sortie s'écrit :

$$u_s(t) = \underbrace{G(0)}_0 \times E_0 + \underbrace{G(2\pi f_1)}_{\simeq 1} \times E_1 \cos \left( 2\pi f_1 t + \underbrace{\varphi(2\pi f_1)}_0 \right) + \underbrace{G(2\pi f_2)}_{\simeq 0,008} \times E_2 \cos \left( 2\pi f_2 t + \underbrace{\varphi(2\pi f_2)}_{\simeq -1,56} \right)$$

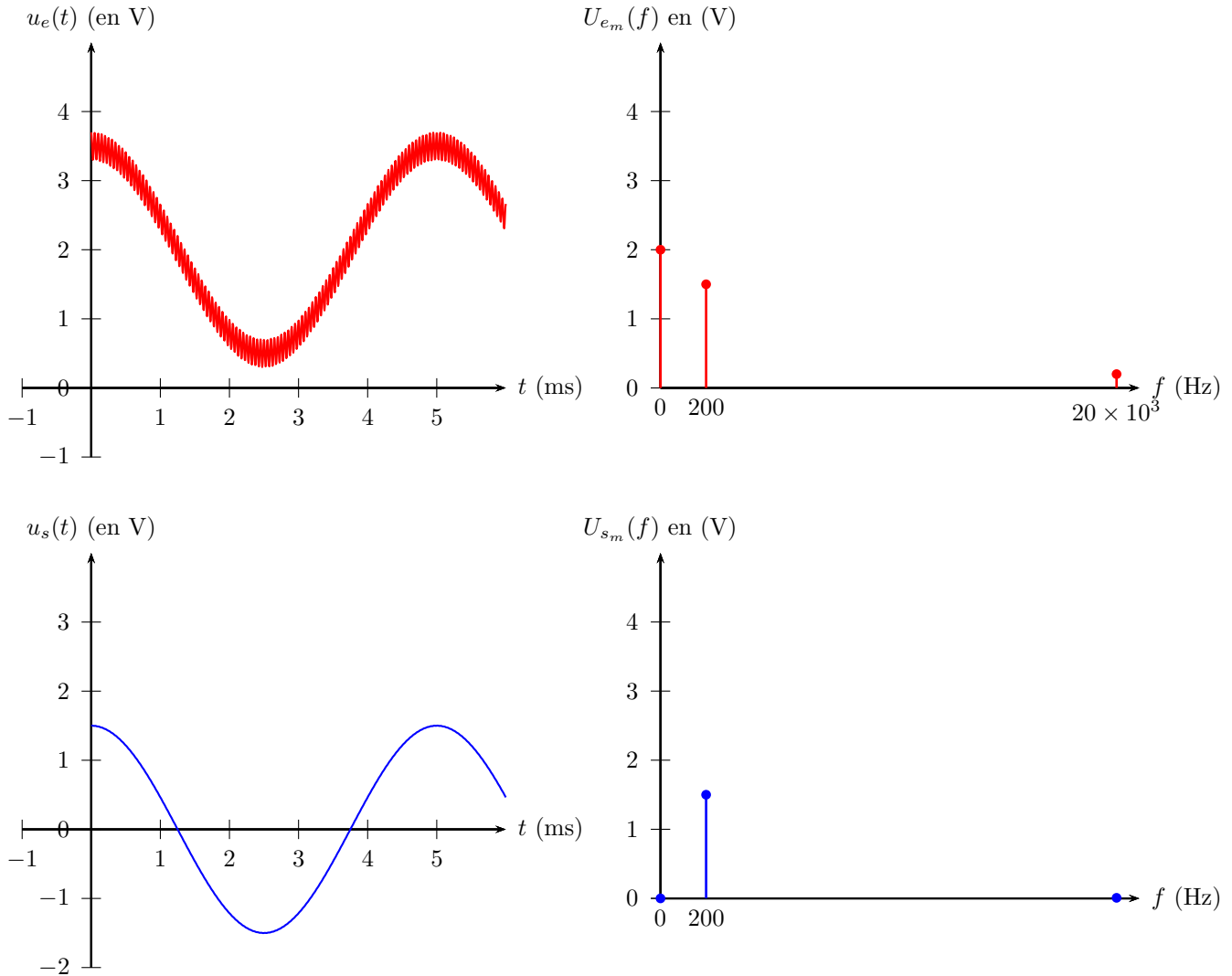


FIGURE VIII.7 – Effet d'un filtre passe-bande sur un signal à trois composantes spectrales : fréquence nulle, BF et HF.

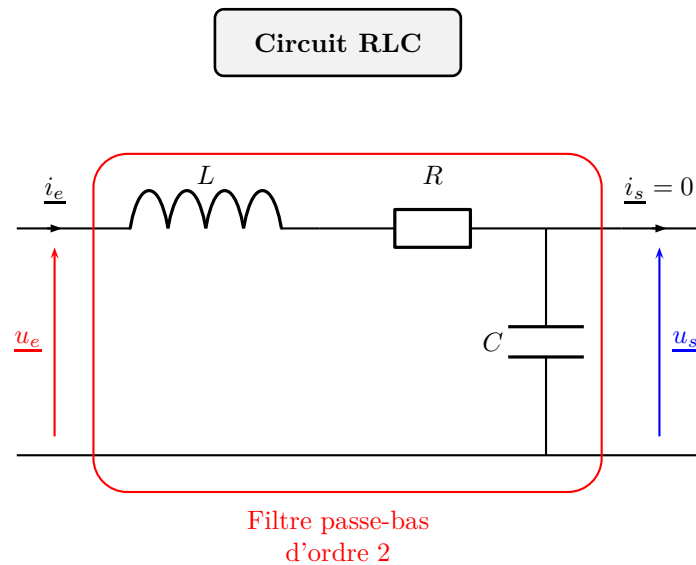
Le signal de fréquence  $f_2$  est donc presque totalement éliminé et on ne récupère à la sortie que le signal utile. La sélectivité du filtre venant de la résonance aiguë à la fréquence propre du circuit permet d'améliorer l'efficacité du filtrage. Cependant, le signal de valeur moyenne nulle a été totalement coupé.

#### Question VIII.6 – Peut-on améliorer la sélectivité d'un filtre ?

Plus l'ordre d'un filtre de type donné est élevé, plus sa sélectivité sera grande. Pour améliorer l'efficacité de coupure à HF d'un filtre passe-bas, on peut chercher à construire un filtre passe-bas d'ordre 2.

## II.5 Améliorer la sélectivité d'un filtre

Nous allons étudier un filtre passe-bas d'ordre 2 afin de mettre en évidence les analogies et les différences avec un filtre passe-bas d'ordre 1. Un tel filtre peut être réalisé à partir d'un circuit RLC :



### Propriété VIII.12 – Filtre passe-bas d'ordre 2

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2 peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\underline{H}(x) = \frac{H_0}{(1 - x^2) + j \frac{x}{Q}}$$

où  $H_0$  est le « gain statique » et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

$$\text{On a donc : } G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tan \varphi(x) = \frac{x}{Q(1 - x^2)} \\ \varphi \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

### Méthode VIII.7 – Analyse d'un filtre passe-bas d'ordre 2

Sur un diagramme de Bode :

- ★ On détermine  $H_0$  en lisant à très basses fréquences  $G_{\text{dB}}(0) = 20 \log H_0$ .
- ★ On détermine  $\omega_0$  :
  - soit par la quadrature de phase  $\varphi(1) = -\frac{\pi}{2}$ ,
  - soit par l'abscisse du croisement des asymptotes.
- ★ On détermine  $Q$  à la résonance avec  $G_{\text{dB}}(1) = 20 \log (H_0 Q)$ .



FIGURE VIII.8 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du deuxième ordre. On a pris ici  $H_0 = 0,5$ .

**Exercice VIII.8 – Diagramme de Bode du circuit RLC**

Après avoir établi la nature de ce filtre par une étude asymptotique des circuits équivalents à BF et HF, établir l'expression de la fonction de transfert puis étudier le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre afin de vérifier l'allure des courbes présentées ci-dessus.

★ **Circuit RLC :**

BF

HF

Les BF passent

Les HF sont coupées

Cette étude préliminaire permet de vérifier que ce filtre est un filtre « passe-bas ». On se place en sortie ouverte pour établir la fonction de transfert  $\underline{H}_{\text{RLC}}$ .

Circuit RLC

★ **Circuit RLC :**

Remarque : *on peut noter qu'il s'agit d'un filtre d'ordre 2.*

**Exercice VIII.8 – Diagramme de Bode du circuit RLC (suite)**

L'étude du diagramme de Bode asymptotique est la suivante :

① Pour  $x \ll 1$  :

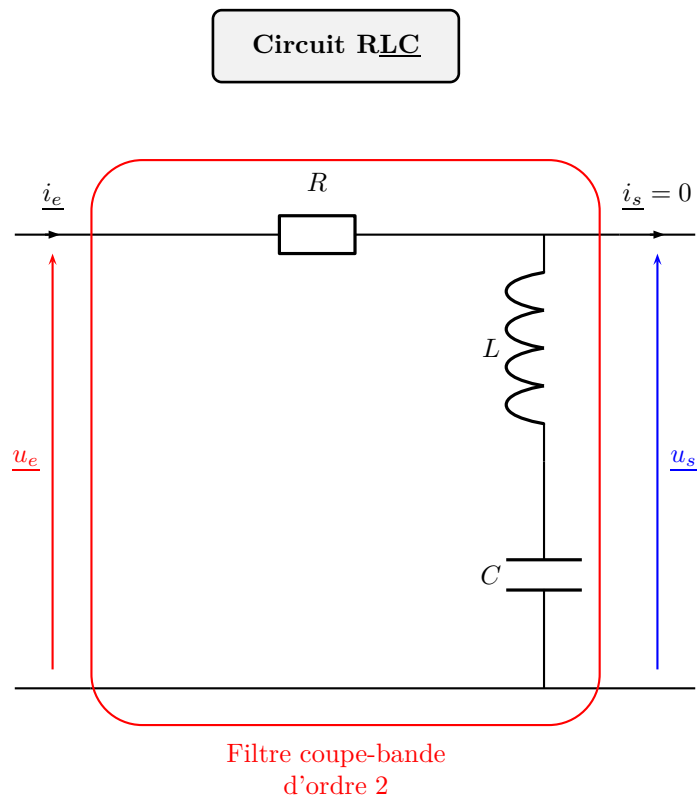
② Pour  $x \gg 1$  :

③ Pour  $x \simeq 1$  :

Enfin, on peut établir la bande passante à -3 dB de ce filtre :

## II.6 Couper une bande de fréquence : coupe-bande

Pour éliminer un signal parasite d'un signal utile, on a parfois recours à un filtre type « coupe-bande » dont un montage possible est :





### III Filtrage linéaire d'un signal quelconque

#### III.1 Cas d'une somme finie de signaux sinusoïdaux quelconques

Pour un signal, somme de  $N$  signaux sinusoïdaux de pulsation  $\omega_k$  quelconques, de la forme :

$$u_e(t) = U_{e0} + \sum_{k=1}^N U_{ek} \cos(\omega_k t + \varphi_{ek}) \quad \text{avec donc} \quad \omega_k \neq k\omega_1$$

à l'entrée d'un filtre de fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ , de gain  $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$ , de déphasage  $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega))$ , on récupère à la sortie du filtre un signal :

$$\underline{u}_s(\omega) = \underline{H}(\omega)\underline{u}_e$$

tel que :

$$u_s(t) = \underbrace{G(0)U_{e0}}_{U_{s0}} + \sum_{k=1}^N \underbrace{G(\omega_k)U_{ek}}_{U_{sk}(\omega_k)} \cos\left(\omega_k t + \underbrace{\varphi_{ek} + \varphi(\omega_k)}_{\varphi_{sk}(\omega_k)}\right)$$

#### III.2 Cas d'un signal périodique

Pour un signal périodique de pulsation  $\omega_e$  dont la décomposition en série de Fourier est de la forme :

$$u_e(t) = U_{e0} + \sum_{k=1}^{+\infty} U_{ek} \cos(k\omega_e t + \varphi_{ek})$$

à l'entrée d'un filtre de fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$ , de gain  $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$ , de déphasage  $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega))$ , on récupère à la sortie du filtre un signal :

$$\underline{u}_s(\omega) = \underline{H}(\omega)\underline{u}_e$$

tel que :

$$u_s(t) = \underbrace{G(0)U_{e0}}_{U_{s0}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{G(k\omega_e)U_{ek}}_{U_{sk}(k\omega_e)} \cos\left(k\omega_1 t + \underbrace{\varphi_{ek} + \varphi(k\omega_1)}_{\varphi_{sk}(k\omega_e)}\right)$$