

– DS (7) de physique-chimie –

Mécanique et architecture de la matière

Le samedi 24 avril 2021 - Durée 3h00

À la fin du temps prévu pour le devoir, vous aurez 10 min pour faire parvenir vos copies par email selon **un unique fichier** enregistré au format « .pdf » de la forme « DS8_nom_prenom.pdf. »

Prolégomènes : vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction !

- Les fautes de français et les copies mal présentées seront pénalisées.
 - N'utilisez que des **copies doubles** que vous devrez **numéroter en indiquant le total** (par exemple 1/3, 2/3, 3/3).
 - Une **marge** doit être laissée pour la correction sur la partie **gauche** de votre copie.
 - Les réponses non justifiées et les applications numériques ne comportant pas d'unité **seront ignorées**.
 - Vous prendrez soin de bien **numéroter les questions** et **d'encadrer vos réponses**.
-

I Exercice de cristallographie

Le nitrure de titane présente une dureté dépassant celle de la plupart des matériaux métalliques et a une température de fusion très élevée (environ 3000 °C). Ces remarquables propriétés physiques sont contrebalancées par sa fragilité, ce qui conduit à l'employer principalement comme film de revêtement. Ce composé présente une structure cristalline dans laquelle les atomes de titane forment un réseau cubique à faces centrées, les atomes d'azote occupant tous les sites interstitiels octaédriques de la structure.

Données :

- ★ masse molaire de l'azote : $14,0 \text{ g mol}^{-1}$
- ★ masse molaire du titane : $48,0 \text{ g mol}^{-1}$
- ★ paramètre de maille du nitrure de titane : $a = 425 \text{ pm}$
- ★ nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- ★ $r_{\text{Ti}} = 145 \text{ pm}$

1. Représenter en perspective la maille du réseau métallique. Vous indiquerez et décrirez précisément la localisation et le nombre de sites octaédriques.
2. Déterminer le nombre de motifs par maille, ainsi que la coordinence du titane et de l'azote.
3. Donner un ordre de grandeur de la masse volumique du nitrure de titane.
4. Écrire la relation de tangence entre le métal et l'azote.
5. En considérant que les atomes de titane ne doivent pas être tangents, donner l'inégalité vérifiée par le rayon r_{Ti} des atomes métalliques.
6. Indiquer la relation entre la taille du site octaédrique et r_{Ti} le rayon de l'atome métallique dans une maille cubique à face centrée de titane pur de paramètre de maille a .
7. Le rayon de l'atome d'azote est de 65,0 pm. Que pouvez-vous en conclure ?

II Détection d'exoplanètes par la méthode des vitesses radiales

La première méthode fiable de détection des exoplanètes repose sur l'exploitation du fait que l'interaction gravitationnelle entre une étoile et une planète a non seulement un impact sur le mouvement de la planète, mais aussi, et réciproquement, sur le mouvement de l'étoile. C'est la mesure de ce mouvement stellaire, et plus précisément de la vitesse radiale de l'étoile, c'est-à-dire de la composante de sa vitesse projetée sur la ligne de visée la reliant à l'observateur, qui permet de détecter l'existence d'une planète en orbite autour de cette étoile. Dans cette partie, nous allons établir l'expression de cette vitesse radiale, en fonction des différents paramètres physiques du problème.

II. A Réduction du problème de Kepler à deux corps

On considère le problème suivant, dit de Kepler : un système constitué d'une étoile E , de masse M , et d'une planète P , de masse m , toutes deux assimilées à des objets ponctuels, en interaction gravitationnelle.

On fait l'hypothèse que ce système est isolé, et on se place dans un référentiel (\mathcal{R}) , supposé galiléen, attaché à un observateur terrestre O . On note $\vec{R}_E = \vec{OE}$ le rayon vecteur liant cet observateur à l'étoile, $\vec{R}_P = \vec{OP}$ celui le liant à la planète, et $\vec{r} = \vec{R}_P - \vec{R}_E$ le rayon vecteur liant l'étoile à la planète.

1. Écrire les équations du mouvement des deux corps dans (\mathcal{R}) en appliquant à chacun d'entre eux la deuxième loi de Newton.
2. On note C le centre de masse du système. Déterminer son rayon vecteur $\vec{R}_C = \vec{OC}$ en fonction des paramètres du problème.
3. Montrer que le mouvement du centre de masse du système est rectiligne uniforme.

Dans toute la suite du problème, on supposera, sans perte de généralité, que C est fixe par rapport à O , soit $\vec{R}_C = \vec{Cte}$. Le référentiel barycentrique (\mathcal{R}_C) est alors confondu avec (\mathcal{R}) .

4. Exprimer les vecteurs \vec{R}_E et \vec{R}_P en fonction de \vec{R}_C , r , et des masses m et M , puis les vecteurs position \vec{r}_E et \vec{r}_P des deux astres par rapport au centre de masse C .
5. Montrer que le mouvement relatif de P par rapport à E obéit à l'équation :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1)$$

où $\mu = \frac{mM}{M+m}$ est la masse réduite, et où l'on explicitera l'expression de la force \vec{F} . On pourra poser $M_t = M + m$ pour désigner la masse totale du système.

6. Une fois que le mouvement relatif décrit par l'équation (1) sera résolu, comment s'en déduiront les trajectoires de E et P dans le référentiel (\mathcal{R}) ? Pourquoi dit-on que l'on a ainsi réduit le problème de Kepler ?

II. B Résolution du mouvement relatif

On considère donc le mouvement $\vec{r}(t)$, décrit par l'équation (1), d'une particule ponctuelle fictive X de masse μ , soumise à la force centrale $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$, dans le référentiel (\mathcal{R}) . Le vecteur \vec{e}_r est le vecteur unitaire radial dirigé vers l'extérieur du centre de force, et $r = \|\vec{r}\|$. On note \vec{v} le vecteur vitesse de X .

7. Montrer que la force \vec{F} est associée à une énergie potentielle $E_p(r)$:

$$E_p(r) = -\mathcal{G} \frac{\mu M_t}{r}$$

où \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

8. Montrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_C = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}$ de X par rapport au centre de force C se conserve.
9. Quelle conséquence peut-on en tirer quant à la trajectoire de X ?
10. Exprimer le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_C$ en fonction des variables d'espace en coordonnées cylindriques, avec Cz l'axe portant le moment cinétique. On s'appuiera sur un schéma.
11. Montrer que l'énergie mécanique \mathcal{E} de X se conserve et peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p,\text{eff}}(r) \quad (2)$$

où $E_{p,\text{eff}}(r)$ est une énergie potentielle effective qu'on exprimera en fonction de $E_p(r)$, $L = \vec{\mathcal{L}}_C \cdot \vec{u}_z$, μ et r .

12. Représenter graphiquement l'énergie potentielle effective $E_{p,\text{eff}}(r)$ et indiquer la nature des trajectoires en fonction de la valeur de \mathcal{E} .
13. À quelle condition la trajectoire de la particule X est-elle bornée ?

On se place dans le cas de figure d'une trajectoire bornée pour le reste du problème.

On pose $u = \frac{1}{r}$.

14. Montrer que les distances minimales r_{\min} (périastre) et maximales r_{\max} (apoastre) entre le centre de force C et la particule fictive X sont associées à des valeurs $u_{\min} = \frac{1}{r_{\min}}$ et $u_{\max} = \frac{1}{r_{\max}}$ solutions d'un polynôme du deuxième degré en u de la forme :

$$Au^2 + Bu - \mathcal{E} = 0$$

On exprimera alors A et B en fonction de L , μ , M_t et \mathcal{G} .

15. En déduire que :

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad \text{et} \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

On exprimera p et e en fonction de L , μ , M_t , \mathcal{G} et \mathcal{E} .

16. Déterminer les bornes des valeurs possibles de e .
17. Montrer que :

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

et en déduire que l'énergie \mathcal{E} se met sous la forme :

$$\mathcal{E} = A_0 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + A_1 u + A_2 u^2$$

On exprimera là encore A_0 , A_1 et A_2 en fonction de L , μ , M_t , \mathcal{G} .

18. En déduire que u obéit à une équation d'oscillateur harmonique.
19. On posera comme condition "initiale" que X passe au périastre lorsque $\theta = 0$. En déduire l'équation de la trajectoire $r(\theta)$:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Les coefficients p et e sont respectivement le **paramètre** et l'**excentricité** de cette éclipse.

On se place désormais dans le cas d'un mouvement circulaire.

20. Que vaut l'excentricité dans ce cas ?
21. Calculer le rayon r_0 de cette trajectoire, en fonction de L , μ , M_t , \mathcal{G} .
22. Montrer que le mouvement est uniforme et déterminer la norme v_0 de la vitesse de la particule fictive X en fonction des mêmes paramètres que r_0 .
23. On se place à présent en coordonnées cartésiennes telles que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Déterminer les lois horaires $x(t)$ et $y(t)$ en prenant comme origine des temps un instant où $y(0) = 0$ et $x(0) > 0$.
24. Montrer que la particule fictive vérifie la troisième loi de Kepler.

II. C Cinématique de l'étoile en présence d'une planète

Maintenant que le mouvement de la particule fictive X est déterminé, on revient à la situation considérée initialement, dans laquelle une étoile E de masse M et une planète P de masse m sont en interaction gravitationnelle. **On rappelle qu'on se place dans le cas d'un mouvement circulaire.**

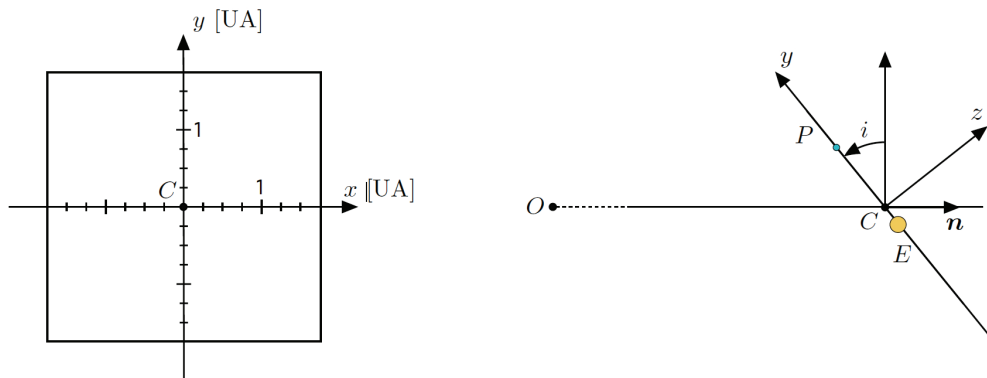
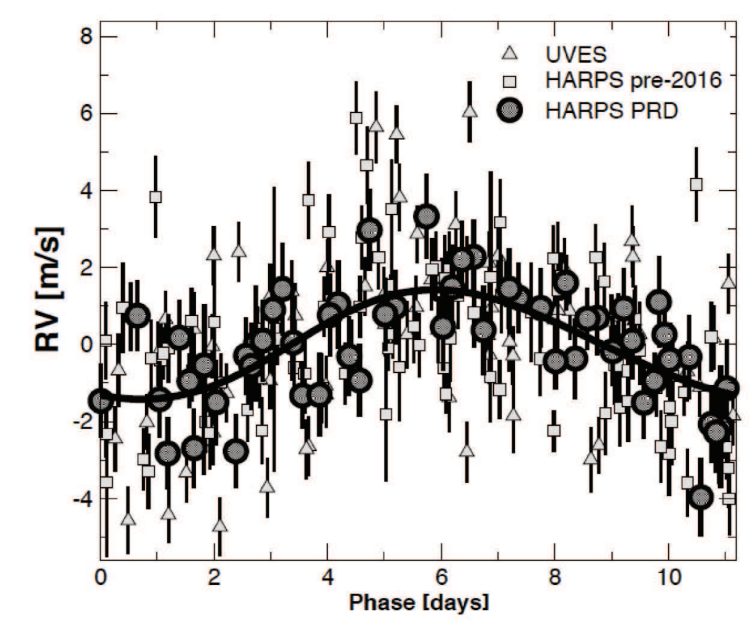


FIGURE 1 – À gauche : représentation du plan de la trajectoire, à droite : définition de l'angle i d'inclinaison du plan de la trajectoire par rapport à la ligne de visée. Le vecteur unitaire \vec{n} définit la ligne de visée vers le centre de masse C du système.

25. En utilisant les résultats de 4. et 23., exprimer les lois du mouvement $x_P(t)$, $y_P(t)$, $x_E(t)$ et $y_E(t)$ des deux astres par rapport au centre de masse C supposé fixe. On posera $\beta = \frac{m}{M} < 1$.
26. Reproduire le schéma de la figure 1 (gauche) et y tracer les trajectoires de la particule fictive X et des deux astres E et P , dans le cas $r_0 = 1\text{UA}$ et $\beta = 1/3$. On représentera également les positions de X , E et P à un instant donné.
27. Le plan Cxy des trajectoires de E et P forme un angle i , compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, avec le plan du ciel (c'est-à-dire le plan perpendiculaire à la ligne de visée OC), comme indiqué sur le schéma de droite de la figure ci-dessus. Calculer la composante $v_{\parallel} = \vec{v}_E \cdot \vec{n}$ de la vitesse de l'étoile le long de la ligne de visée. Cette composante est appelée **vitesse radiale**.
28. Tracer l'allure de la vitesse radiale $v_{\parallel}(t)$ en fonction du temps. Ce signal est détecté par spectroscopie Doppler. Montrer que la mesure de l'amplitude K et de la période T de la variation de cette vitesse radiale en fonction du temps permet de contraindre la masse m de la planète en orbite autour de l'étoile, si l'on connaît la masse M de cette dernière et l'angle i de l'orbite planétaire. On fera apparaître la **fonction de masse** du système, définie par :

$$f = \frac{(m \sin i)^3}{(M + m)^2}$$

29. Simplifier le résultat obtenu dans le cas où la masse de la planète est très petite devant celle de l'étoile. Donner alors une estimation de la masse minimale m_{\min} de la planète. Pour quelle inclinaison de l'orbite est-il plus facile de détecter la présence d'une planète en orbite autour de l'étoile ? Vaut-il mieux que l'étoile soit de faible masse ou de grande masse ?
30. La figure ci-dessous, tirée de Anglada-Escudé et al. (2016), représente les mesures de la vitesse radiale de l'étoile Proxima Centauri effectuées à l'aide de deux instruments, HARPS et UVES, de l'Observatoire Européen Austral (ESO), au Chili. Estimer la période T et l'amplitude K du signal, et en déduire une estimation (grossière) de la masse minimale de la planète Proxima Centauri b.



La masse de l'étoile Proxima Centauri est de $2,4 \times 10^{29}$ kg, soit 0,12 masse solaire.

III Étude d'une balance romaine

III. A Description d'une balance romaine

De nombreux modèles de balance ont été conçus depuis plus de cinq millénaires. Nous allons étudier ici le fonctionnement d'une balance romaine, dont un modèle est représenté en photographie sur la figure ci-contre.

Ce type de balance présente la particularité de réaliser l'équilibre grâce à un contre-poids coulissant, appelé « peson », et non grâce aux ajouts successifs de masses marquées sur un plateau de charge, comme dans la plupart des balances traditionnelles.



On présente une modélisation de la plupart des balances romaines sur la figure 2 ci-dessous.

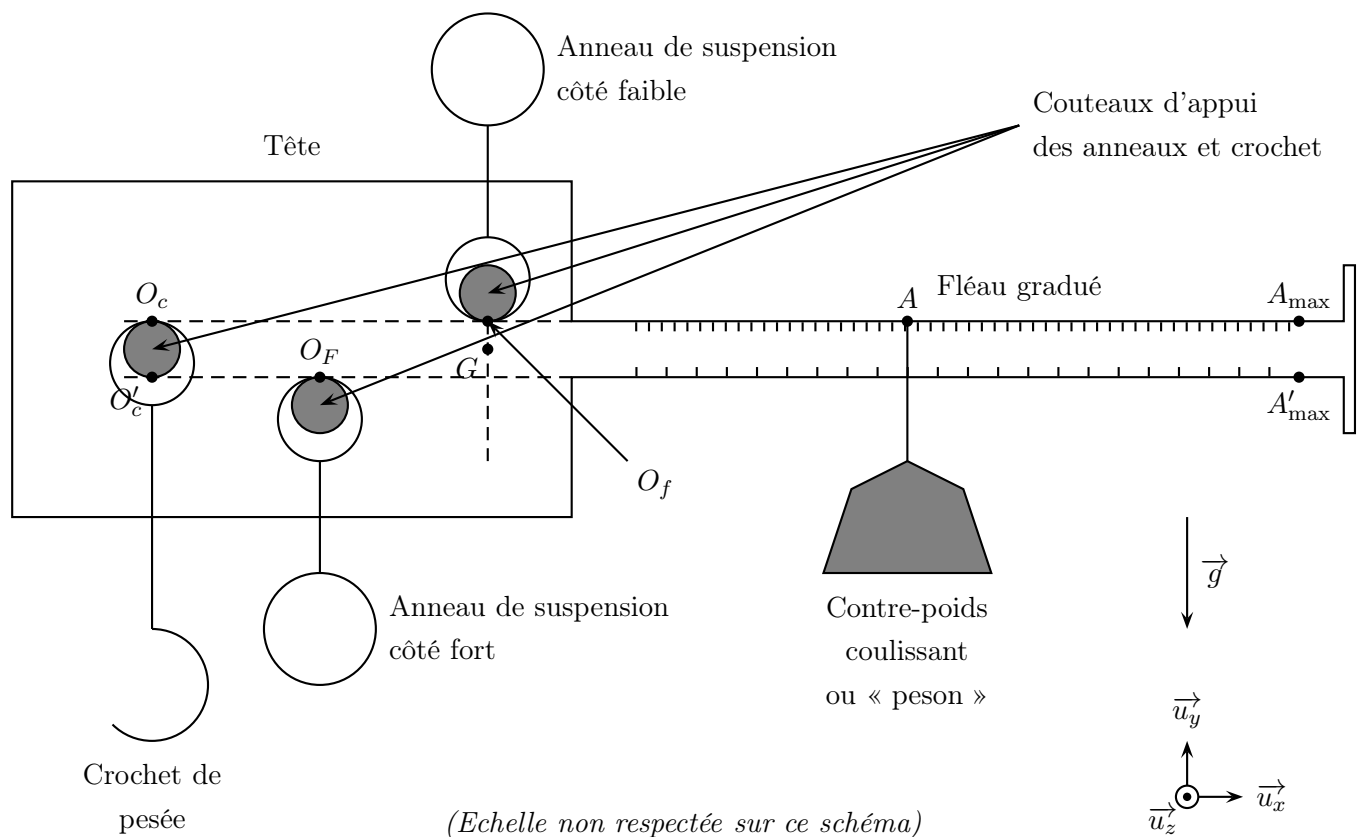


FIGURE 2 – Modélisation et éléments principaux d'une balance romaine

Document 1 – Modélisation d'une balance romaine

Le corps principal de la balance est constitué d'une unique pièce métallique, traditionnellement en fer, dont la forme permet d'identifier deux bras :

- ★ Le « fléau » correspond au bras fin et allongé sur lequel peut coulisser le peson. Ce fléau est gradué sur ces deux tranches pour indiquer, par une simple lecture, la masse qui est à peser.
- ★ La « tête » correspond au bras élargi et plus court de la balance. C'est du côté de la tête que la balance est suspendue grâce à un anneau de suspension et que la masse à peser est accrochée.

Deux anneaux de suspension sont présents sur la plupart des balances romaines et permettent d'effectuer deux types de mesure.

Document 1 - suite: Modélisation d'une balance romaine

On a indiqué sur la figure 2 quelques points particuliers :

- ★ O_f est le point de contact avec la balance romaine de l'anneau de suspension côté faible.
- ★ O_F est le point de contact avec la balance romaine de l'anneau de suspension côté fort.
- ★ O_c et O'_c sont respectivement les points de contact du crochet à peser avec la balance suivant qu'elle utilise l'anneau de suspension respectivement côté faible ou côté fort.
- ★ A_{\max} et A'_{\max} sont respectivement les positions les plus éloignées de la tête que peut atteindre le peson sur le fléau avec une balance suspendue par l'anneau respectivement côté faible et côté fort.
- ★ G correspond au centre de masse du corps principal de la balance défini comme le point de l'espace où s'applique le poids de la balance, telle qu'elle est ici décrite. On suppose dans la suite que G est situé sur la droite verticale passant par O_f lorsque le corps de la balance est à l'équilibre horizontal.

On note m_b la masse du corps de la balance, m_c la masse du crochet de pesée et m_p la masse du peson. On note en outre $\ell_c = O_f O_c$, $\ell_p = O_f A$, $\ell_M = O_f A_{\max}$ et $L = O_f G$.

Dans la suite du problème, nous nous intéresserons uniquement au cas où la balance est suspendue par l'anneau côté faible et nous considérerons qu'il n'y a pas d'anneau de suspension côté fort. L'ensemble du système pourra être considéré comme plan.

La modélisation de la balance est donc encore simplifiée et on se référera pour la suite de la partie III à la figure 3 correspondant à une balance pouvant pivoter autour de l'axe $(O_f z)$ sans frottements et dont on repère l'inclinaison par rapport à l'axe horizontal $(O_f x)$ dans une position quelconque grâce à l'angle θ . On notera J le moment d'inertie de la balance par rapport à l'axe $(O_f z)$ en l'absence de charge à peser, de crochet de pesée et de peson.

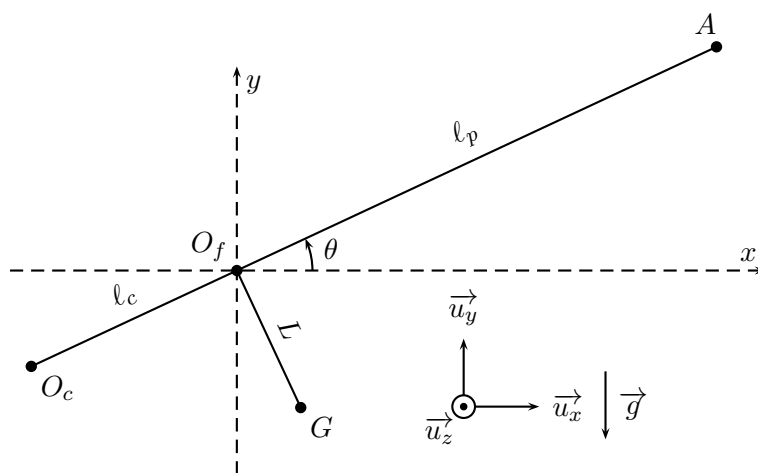


FIGURE 3 – Modélisation simplifiée de la balance romaine.

1. Montrer que le moment en O_f de la réaction de l'anneau de suspension sur la barre est toujours nul.
2. Reproduire la figure 3 sur votre copie et y représenter les différentes forces qui s'appliquent à la barre dans le cas général.

III. B Étude de l'équilibre mécanique de la balance pour $m = 0$

Nous allons à présent décrire une séquence de pesée d'un objet de masse m inconnue et fixé sur le crochet de pesée.

Le protocole de mesure de m commence par étudier l'équilibre de la balance « à vide », c'est-à-dire lorsqu'aucune masse n'est fixée sur le crochet de pesée : $m = 0$. On étudie plus particulièrement l'équilibre horizontal de la balance pour lequel l'angle θ de la balance avec l'axe $(O_f x)$ est nul. On note dans ces conditions A_0 la position correspondante du peson sur le fléau.

3. Établir l'expression de $\ell_0 = \ell_p(m = 0) = O_f A_0$ en fonction de ℓ_c , m_c et m_p .

III. C Étude de l'équilibre mécanique de la balance pour $m \neq 0$

On poursuit le protocole de mesure en accrochant la masse m inconnue au crochet de pesée.

4. Dans quel sens doit-on déplacer le peson si l'on souhaite retrouver une situation d'équilibre horizontal de la balance ? On repérera à présent la position du peson grâce à la distance ℓ définie par $\ell_p = \ell_0 + \ell$.

On souhaite retrouver un état d'équilibre de la balance pour un angle θ_{eq} quelconque. L'objectif est de déterminer l'expression de la longueur ℓ en fonction de la masse m .

5. Appliquer la loi du moment cinétique à la balance supportant la masse à peser et le peson.
6. En déduire l'expression de l'angle θ_{eq} d'équilibre en fonction de m , m_p , m_b , L , ℓ_c et ℓ .
7. Quelle relation vérifie ℓ , ℓ_c , m_p et m si on ramène θ_{eq} à une valeur nulle ?
8. En déduire le principe de fonctionnement de la balance romaine. On explicitera notamment dans le détail un protocole permettant de graduer le fléau pour réaliser la conversion "longueur - masse".
9. Pendant très longtemps, la balance romaine a été préférée aux balances à plateaux par les maraîchers. Proposer une justification à ce choix.
10. On appelle sensibilité, notée S , la variation de position du peson par unité de masse ajoutée au crochet de pesée. Établir l'expression de la sensibilité en fonction de ℓ_c et de m_p .
11. Quelle est l'expression de la portée M de la balance, valeur maximale de masse m qui peut être mesurée sur cette balance ? On exprimera le résultat en fonction de m_p , m_c , ℓ_M et ℓ_c .
12. En déduire l'expression de la sensibilité S en fonction de M , m_c et ℓ_M .

On souhaite fabriquer, côté faible, une balance d'une portée de 5,00 kg. On souhaite pour cela utiliser un fléau de longueur $\ell_M = 50,0$ cm, un peson de $m_p = 500$ g et un crochet de masse $m_c = 100$ g.

13. Déterminer les valeurs de ℓ_c et de ℓ_0 correspondant à une telle balance.
14. Déterminer la sensibilité de cette balance. On exprimera le résultat en cm.kg^{-1} .

On suppose à présent que la balance a été conçue de manière à ce que la position ℓ_0 corresponde à un peson en butée contre la tête de la balance. On s'intéresse, pour ces dernières questions, au côté fort de la balance précédente en retournant cette dernière pour la suspendre par le second anneau.

On appelle I le point d'intersection de la droite $(O_f G)$ et du segment $[O_F A'_{\text{max}}]$ et on note dans ce cas $d = O_F I$. On donne $m_b = 250$ g. On souhaite disposer côté fort d'une portée $M' = 20,0$ kg.

15. Faire un schéma de la situation puis déterminer l'expression de d en fonction de ℓ_c , ℓ_M , m_c , m_p , m_b et M' . On supposera qu'il n'y a pas d'anneau de suspension coté faible et on se limitera au cas où l'angle θ de la balance avec l'horizontale est nul.
16. Calculer la valeur de d .
17. Quelle est la masse minimale que l'on peut mesurer côté fort ?
18. La sensibilité de la balance est-elle meilleure côté fort ou côté faible ?

FIN DE L'ÉNONCÉ

* * *