Corrigé - DM n°12: Thermodynamique

I Résistance chauffante

I.1 Première transformation

1. Les deux compartiments contiennent la même quantité de matière :

$$n_A = n_B = n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} = 0.22\ mol$$

2. Quelle que soit la position du piston, le volume total des deux compartiments reste constant et vaut $2V_0$, donc

$$V_A + V_B = 2V_0$$

3. A l'état d'équilibre final, l'équilibre mécanique du piston implique que $P_A = P_B = P_1$, et l'équilibre thermique du compartiment B avec le thermostat implique que $T_B = T_0$. Le compartiment A atteint la température T_1 (celle-ci peut tout à fait être différente de T_0 car les parois du piston sont calorifugées.
De plus, les deux gaz sont des gaz parfaits, donc $P_1 V_B = nRT_0$, et $P_1 V_A = nRT_1$. On obtient ainsi

$$\frac{V_A}{T_1} = \frac{V_B}{T_0}$$

et en utilisant $V_A + V_B = 2V_0$, on obtient finalement en résolvant ces équations :

$$\boxed{V_B = \frac{2V_0 T_0}{T_1 + T_0} = 4.4\ L} \quad , \quad \boxed{V_A = \frac{2V_0 T_1}{T_1 + T_0} = 5.6\ L} \quad \text{et} \quad \boxed{P_1 = \frac{P_0(T_0 + T_1)}{2T_0} = 1.15\ bar}$$

On vérifie bien que si $T_1 = T_0$, la paroi ne bouge pas car le système est déjà à l'équilibre, donc $V_A = V_B = V_0$ et $P_1 = P_0$.

4. Ce sont des gaz parfaits, donc on peut utiliser la première loi de Joule :

$$\boxed{\Delta U_A = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = 220\ J} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Delta U_B = 0}$$

5. La transformation subie par le gaz dans le compartiment A est quasistatique (il y a équilibre interne à tout instant), irréversible (si on recomprime le gaz, cela ne donnera pas naissance à un courant dans la résistance).
La transformation subie par le gaz dans le compartiment B est quasistatique réversible (il y a équilibre entre l'intérieur et l'extérieur tout au long de la transformation) et isotherme à la température T_0.
Le travail W_B échangé par le gaz en B pendant la transformation est donc donné par :

$$W_B = -\int P_{ext} dV = -\int P dV = -nRT_0 \int \frac{dV}{V} = -nRT ln\left(\frac{V_B}{V_0}\right)$$

$$\text{etdonc} \boxed{W_B = -nRT_0 ln\left(\frac{2T_0}{T_1 + T_0}\right) = 68.3\ J}$$

$W_B > 0$ car le gaz se comprime et reçoit donc du travail mécanique.

6. $\Delta U_B = 0$, donc $W_B = -Q_B$, et donc $\boxed{Q_B = nRT_0 ln\left(\frac{2T_0}{T_1 + T_0}\right) = -68.3\ J}$

Le gaz se comprime et sa température aurait augmenté s'il n'avait pas été en contact avec le thermostat. C'est donc qu'il cède ici de l'énergie thermique au thermostat, donc $Q_B < 0$.

7. Le travail W_B reçu par le gaz en B est l'opposé de celui fournit par le gaz en A, d'après le principe de l'action et de la réaction, donc $W_A = nRT_0 ln\left(\frac{V_B}{V_0}\right)$, or d'après le premier principe, $Q_A = \Delta U_A - W_A$, donc

$$\boxed{Q_A = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) - nRT_0 ln\left(\frac{V_B}{V_0}\right) = 151.7\ J}$$

On vérifie bien que $Q_A > 0$ car le gaz du compartiment A reçoit de l'énergie thermique de la part de la résistance.

I.2 Deuxième transformation

8. La loi de Laplace $PV^\gamma = cste$ est valable pour une transformation quasistatique adiabatique d'un gaz parfait.
9. La transformation subie par le gaz du compartiment A est adiabatique, quasistatique et réversible (il y a équilibre mécanique entre le gaz intérieur et le milieu extérieur, et il n'y a pas de source d'irréversibilité car la résistance du compartiment A est inactive).
On peut donc utiliser la loi de Laplace, avec la pression P_1 et le volume V_A déterminés dans la partie précédente : $P_2 V_0^\gamma = P_1 V_A^\gamma$, donc

$$\boxed{P_2 = P_1\left(\frac{2T_1}{T_1 + T_0}\right)^\gamma = 1.4 bar}$$

10. Le gaz est parfait, donc $\boxed{T_A = \frac{P_2 V_0}{nR} = 382\ K}$. De plus, dans cet état final, on a des pressions identiques, des volumes identiques et des quantités de matière identiques, donc $\boxed{T_B = T_A = 382\ K}$, et ceci, bien que les deux compartiments soient isolés thermiquement.
11. En utilisant la première loi de Joule pour les deux gaz parfaits, on obtient :

$$\boxed{\Delta U'_A = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_1) = 80.4\ J} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\Delta U'_B = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_0) = 302\ J}$$

12. On peut utiliser deux méthodes pour en déduire le transfert thermique Q'_B apporté par la résistance chauffante au gaz en B.

Méthode 1 : Si on considère le système global constitué des deux gaz et du piston, le premier principe s'écrit : $\Delta U' = \Delta U'_A + \Delta'_B = Q'_B$ car le seul échange thermique est apporté par la résistance (les parois sont calorifugées), et le système ne reçoit aucun travail mécanique extérieur (le travail au niveau du piston est généré par les forces intérieures au système). On en déduit donc :

$$\boxed{Q'_B = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_1) + \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(2T_A - -T_1 - T_0) = 383\ J}$$

On vérifie bien que $Q'_B > 0$ car le gaz du compartiment B reçoit de l'énergie thermique de la part de la résistance.

Méthode 2 : Calculons W'_B. La pression extérieure exercée sur le compartiement B correspond à tout instant à P_A car il y a équilibre mécanique du piston. De plus, la variation de volume occupé par le gaz dans le compartiment B vaut $dV_B = -dV_A$, d'aprsè la relation $2V_0 = V_A + V_B$. On en déduit :

$$W'_B = -\int P_{ext} dV = \int P_a dV_a$$

où P_a et V_a sont donnés pour le gaz du compartiment A à un instant donné. Or pour le compartiment A, qui subit une transformation quasistatique réversible, $P_a V_a^\gamma = cste = P_1 V_A^\gamma$, donc

$$W'_B = P_1 V_A^\gamma \int \frac{dV_a}{V_a^\gamma} = P_1 V_A^\gamma \left[\frac{{V_a}^{(1-\gamma)}}{1-\gamma}\right]_{V_A}^{V_0} = \frac{P_1 V_A^\gamma}{1-\gamma}\left[V_0^{(1-\gamma)} - V_A^{(1-\gamma)}\right]$$

or $P_2 V_0^\gamma = P_1 V_A^\gamma$, donc

$$W'_B = \frac{P_2 V_0 - P_1 V_A}{1-\gamma} = -84\ J$$

On vérifie bien que $W'_B < 0$ car le gaz se détend et fournit donc du travail mécanique à l'extérieur.
D'après le premier principe appliqué au gaz du compartiment B,

$$Q'_B = \Delta U'_B - W'_B = 386\ J$$

On retrouve bien le même résultat, aux erreurs d'arrondis près.