– DS (3) de physique-chimie –
Mécanique

Le samedi 05 décembre 2020 - Durée 3h

Prolégomènes : vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction !

— *Les fautes de français et les copies mal présentées seront pénalisées.*

— *N'utilisez que des **copies doubles** que vous devrez **numéroter en indiquant le total** (par exemple 1/3, 2/3, 3/3).*

— *Une **marge** doit être laissée pour la correction sur la partie **gauche** de votre copie.*

— *Les réponses non justifiées et les applications numériques ne comportant pas d'unité **seront ignorées**.*

— *Vous prendrez soin de bien **numéroter les questions** et **d'encadrer vos réponses**.*

I Ici, c'est Paris ! ! !

Bien qu'inspiré de faits et de personnages réels, les évènements présentés dans ce problème sont une fiction. Il n'y a donc aucun intérêt à essayer de retrouver les vidéos des actions décrites.

Dans tout le problème, on se placera dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ sera supposé uniforme tel que $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$ avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ dans la base cartésienne orthonormée directe $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. Sauf mention contraire, on négligera les frottements fluides ainsi que la poussée d'Archimède.

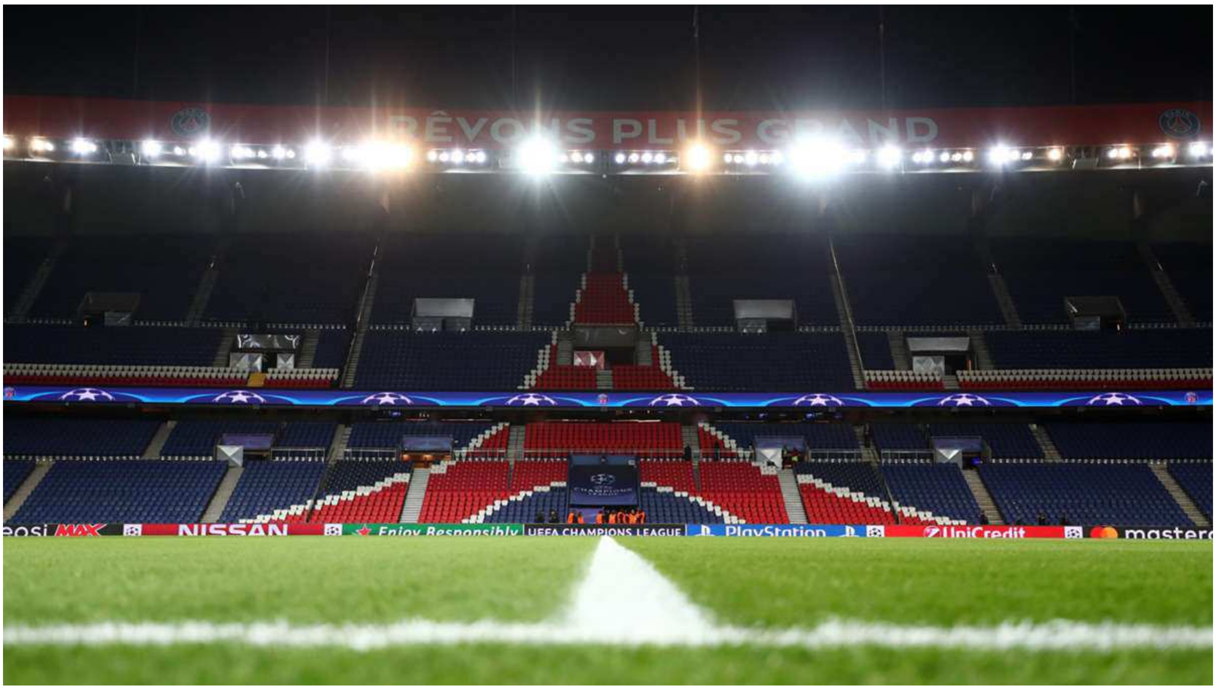


FIGURE 1 – *Le Parc des Princes, lieu des exploits du PSG.*

Sauf mention contraire, on assimilera chaque joueur à un point matériel en contact avec le sol. On utilisera l'indice "0" pour caractériser les positions des joueurs au départ de l'action.

Le problème commence à la fin d'un match entre le Paris Saint-Germain (PSG) et l'Olympique de Marseille (OM) alors que le PSG mène 1 - 0 au Parc des Princes à la 88 ème minute.

Le ballon est dans les pieds Marseillais qui se ruent à l'assaut du but parisien. Toute l'équipe marseillaise est dans le camp parisien et cherche à marquer un but dans les derniers instants de la rencontre. Le jeune et talentueux milieu de terrain marseillais Maxime Lopez tente alors une passe, qui est rapidement interceptée par son homologue parisien Neymar (point N) à 35,0 m de la cage de but parisienne. Plus haut sur le terrain, Kylian Mbappé (point K) comprend très vite qu'une opportunité de contre-attaque s'offre à lui et son équipe. En effet, la disposition des joueurs, à l'instant où Neymar récupère le ballon, est représentée sur la figure 2 ci-dessous.

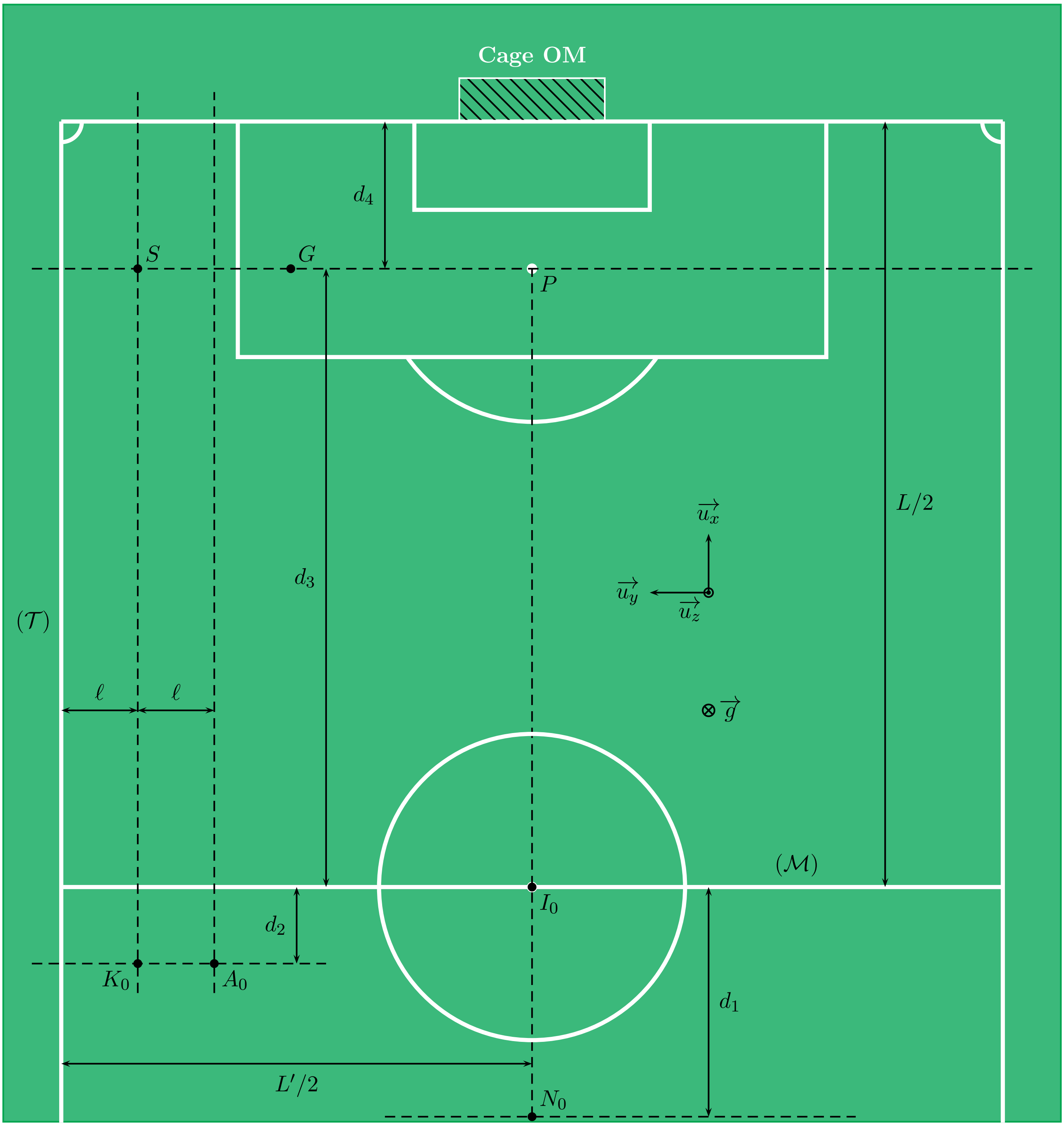


FIGURE 2 – *Schéma général et positions des joueurs à l'instant initial où Neymar effectue sa passe.*

I. A La cours de Mbappé

Kylian Mbappé est sur la même ligne qu'Alvaro Gonzalès (point A), dernier défenseur de l'équipe marseillaise à 45,0 m de la ligne de but parisienne. Tous deux sont immobiles au moment de l'interception. Plus réactif qu'Alvaro, l'attaquant parisien, à l'instant pris comme origine des temps où Neymar récupère le ballon au point N_0, s'engage dans une course rectiligne vers la ligne de but marseillaise parallèlement à la ligne de touche $(\mathcal{T})$. On modélise l'accélération de Mbappé par la loi $\overrightarrow{a_K} = A_K \exp\left(-\dfrac{t}{\tau_K}\right)\overrightarrow{u_x}$. Alvaro réagit avec un temps de retard $\epsilon = 0{,}500\,\mathrm{s}$. Il reste donc d'abord immobile pour $0 < t < \epsilon$ puis se met lui aussi en action avec une accélération obéissant à la loi $\overrightarrow{a_A} = A_A \exp\left(-\dfrac{t-\epsilon}{\tau_A}\right)\overrightarrow{u_x}$.
A_K, A_A, τ_K et τ_A sont des constantes dont les valeurs sont fournies ci-dessous.

On donne :

- Repère d'étude dans le référentiel terrestre : $(N_0, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$
- Terrain : rectangle de longueur $L = 100$ m et de largeur $L' = 60,0$ m
- Point de pénalty P : situé à $d_4 = 11{,}0\,\mathrm{m}$ de la cage marseillaise
- Distance entre la ligne touche et Mbappé : $\ell = 5,00$ m
- Distance initiale entre Mbappé et Alvaro : $\ell = 5,00$ m
- $A_K = 6{,}85\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et $A_A = 4{,}72\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
- $\tau_K = 1{,}50\,\mathrm{s}$ et $\tau_A = 2{,}00\,\mathrm{s}$

Tous les résultats numériques calculés devront être donnés avec trois chiffres significatifs !

1. À l'aide des données de l'énoncé, déterminer les valeurs numériques des distances d_1, d_2 et d_3 indiquées sur la figure 2.

2. Montrer que Mbappé et Alvaro atteignent respectivement des vitesses limites $v_{K,\max}$ et $v_{A,\max}$ dont on déterminera les expressions et les valeurs.

3. Établir les équations horaires $x_K(t)$ et $x_A(t)$ relatives au mouvement de Mbappé et Alvaro.

4. Déterminer l'instant t_m pour lequel Mbappé atteint 95% de sa vitesse maximale.

5. Quelle est, à l'instant t_m, la position de Mbappé sur le terrain ?

Grâce à sa grande réactivité, Mbappé part donc avec un temps d'avance sur le défenseur. Mais pour éviter d'être signalé hors jeu et que l'arbitre siffle un coup franc pour les Marseillais, il faut que Neymar qui est resté en N_0, fasse une passe à Mbappé et frappe dans le ballon avant que celui-ci ne passe la ligne $(\mathcal{M})$ marquant le milieu de terrain.

On a représenté $x_K(t)$ et $x_A(t)$ sur la figure 3.

6. Quelle équation littérale doit vérifier l'instant t_p avant lequel Neymar doit effectuer sa passe s'il ne veut pas que Mbappé soit signalé hors-jeu ?

7. Déterminer une valeur numérique approchée de t_p par lecture graphique.

8. Estimer graphiquement l'instant t_u à partir duquel on peut considérer que le mouvement de Mbappé devient uniforme.

9. Retrouver alors, toujours par lecture graphique, la vitesse maximale que peut atteindre Kylian Mbappé.

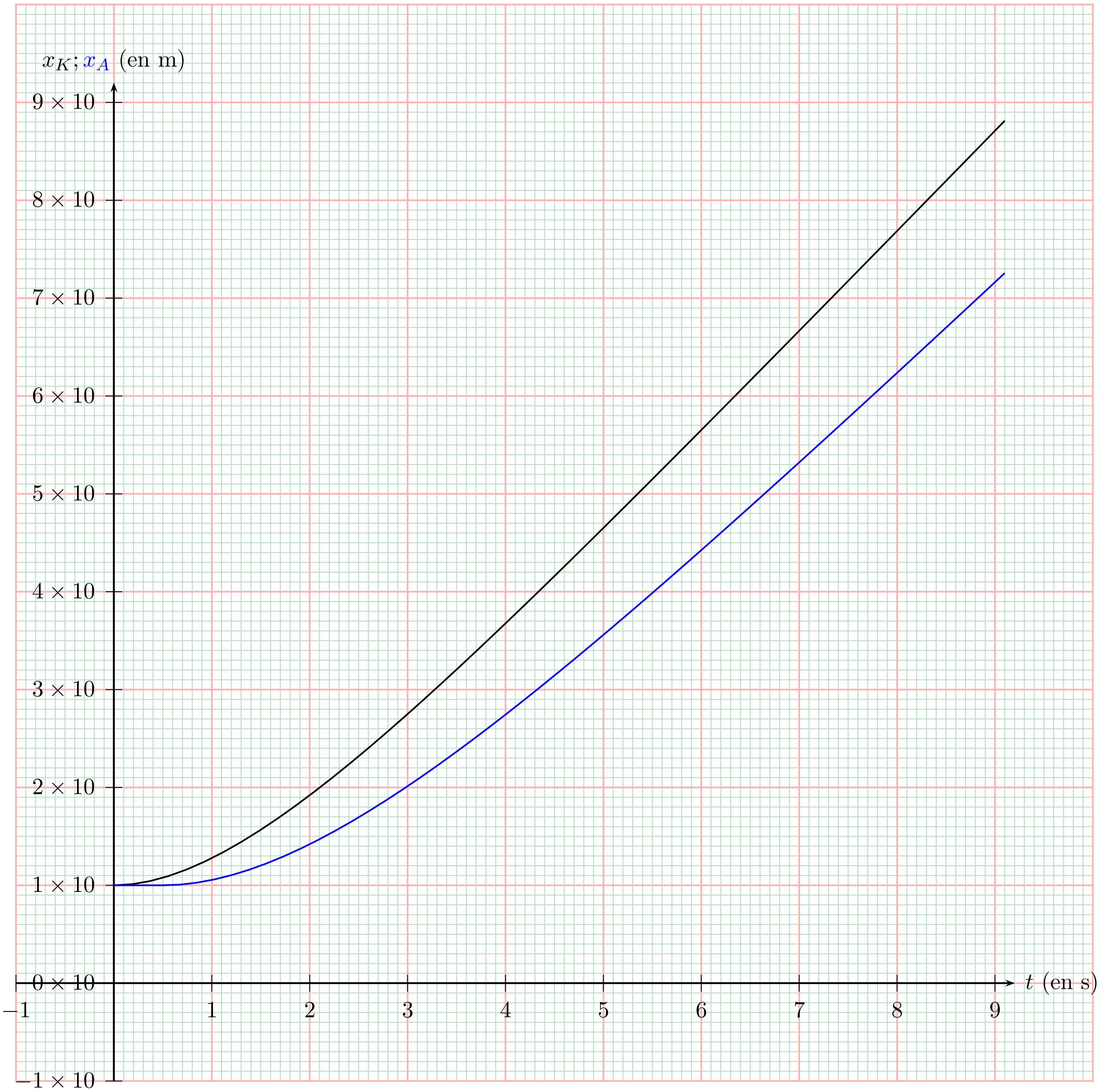


FIGURE 3 – *Évolutions temporelles des positions de Mbappé (courbe noire) et d'Alvaro (courbe bleue).*

I. B La passe de Neymar

On considère dans la suite du problème que Neymar déclenche sa passe exactement à $t = t_p$, Mbappé part donc à la limite du hors-jeu.

Neymar, qui est un très bon passeur, doit ajuster sa passe en direction et en force de façon à ce qu'elle arrive dans les pieds de Mbappé dans les meilleures conditions. En pratique, il faut que la ballon croise la course de Mbappé au moment où le joueur atteint 95% de sa vitesse maximale. On notera C le point correspondant de la trajectoire du joueur. On supposera que le ballon envoyé par Neymar à Mbappé est assimilable à un point matériel de masse $m = 430\,\mathrm{g}$ qui suit une trajectoire rectiligne au contact du pelouse. Celle-ci ayant été arrosée avant le coup d'envoi de la rencontre, on supposera que le ballon glisse dessus. On notera $f = 5{,}00 \times 10^{-2}$ le coefficient de frottement solide entre la pelouse et le ballon.

10. On note α l'angle que fait la trajectoire du ballon par rapport au vecteur $\overrightarrow{u_y}$ de la base de travail. Déterminer l'expression de α en fonction des données du problème.
Quelle distance d le ballon va-t-il parcourir avant de croiser la course de Mbappé ?

11. Appliquer la deuxième loi de Newton au ballon et en déduire la norme $\|\overrightarrow{v_0}\| = v_0$ du vecteur-vitesse avec lequel le ballon quitte les pieds de Neymar en fonction de d, f, g et t_m. Faire l'application numérique.

12. Montrer que la norme v_C de la vitesse du ballon au moment où Mbappé le récupère s'écrit :

$$v_C = \sqrt{v_0^2 - 2fgd}$$

Faire l'application numérique.

13. Pour qu'Alvaro puisse intercepter le ballon en taclant, le ballon doit passer à moins d'un mètre du défenseur marseillais. Compte tenu des résultats précédents, Alvaro est-il en mesure d'intercepter la passe de Neymar ?

I. C Le but d'Icardi

Face à la vitesse, au talent et au génie du jeune Kylian Mbappé, le gardien marseillais Steve Mandanda (point G) ne sait trop quoi faire. Après quelques hésitations, il se décide à sortir de sa cage. Au moment où Mbappé, ayant poursuivi sa trajectoire, se trouve au point S, Mandanda se situe au point G (placé sur la figure 2) tel que $SG = d_5 = 10\,\text{m}$. Le gardien pense ainsi pouvoir bloqué l'action de l'attaquant parisien. Mais c'est sans compter sur l'altruisme de ce dernier qui, très lucide, a vu que son compère d'attaque Mauro Icardi (point I) effectue une course rectiligne en direction du point de pénalty (point P) dans un timing parfait. Arrivé en S, Mbappé ajuste donc immédiatement un centre vers P pour tout juste lober G qui, malgré sa détente verticale, ne peut atteindre une hauteur supérieure à $H_1 = 3{,}20\,\text{m}$.
On suppose dans la suite, qu'en plus de son poids, le ballon subit une force de frottements fluides qui s'écrit $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur-vitesse instantané du ballon et où λ est une constante positive. On note β l'angle que fait le vecteur-vitesse du ballon avec le sol au moment où Mbappé tente son lob et v_b la norme de ce vecteur-vitesse à cet instant.

14. Déterminer l'unité et la dimension de λ.

15. Établir l'équation de la trajectoire du ballon durant le lob en fonction de v_b, β, g, m, λ. On fera un schéma de la situation sur lequel on représentera clairement le nouveau repère de travail utilisé.

16. Le coefficient de frottements fluides λ est en pratique très faible. Montrer que cette hypothèse permet d'écrire l'équation de la trajectoire obtenue à la question précédente sous la forme :

$$z = -\frac{g}{2v_b^2\cos^2\beta}y'^2 + y'\tan\beta$$

On utilisera le développement limité suivant $\ln(1-x) \simeq -x - \dfrac{x^2}{2}$ en $x = 0$.

17. Déterminer alors les expressions littérales puis les valeurs numériques que doivent vérifier β et v_b pour qu'Icardi ajuste une tête à une hauteur $H_2 = 1{,}90\,\text{m}$ au niveau du point de pénalty.

Icardi, seul au point de pénalty, n'a plus qu'à effectuer sa tête et à marquer dans le but marseillais vide. L'arbitre siffle la fin du match juste après la remise en jeu des Marseillais. Le PSG s'impose donc 2 - 0 sur sa pelouse et reste invaincu en tête du championnat. Les joueurs peuvent maintenant se concentrer sur le prochain match de Ligue des Champions dont ils sont les tenants du titre depuis 3 ans.

Si si, c'est possible, la devise du PSG n'est-elle pas «ensemble, rêvons plus grand !» ? Quoi qu'il en soit, le PSG est décidément magique. Et comme le disait si royalement Zlatan Ibrahimovic :

Ici, c'est ... Paris !

II Autour de la luge *(D'après Concours ATS 2013)*

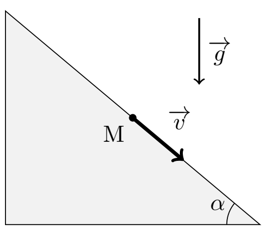
La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, il ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les vitesses atteintes peuvent êtres supérieures à 100 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

II. A Trajectoires

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble {luge+lugeur} (désigné par la suite sour le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 1,0 \times 10^2$ kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Descente rectiligne

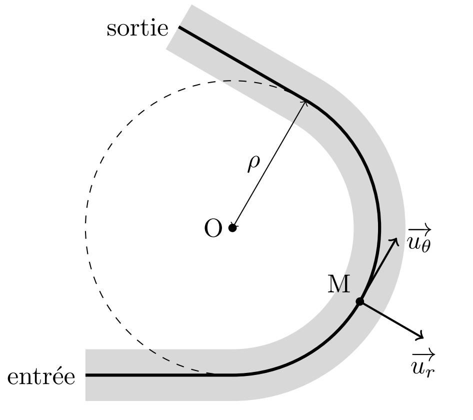
Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0 = 5,0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré



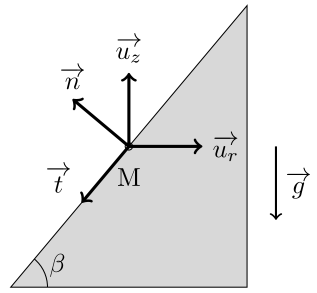
1. Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces, en justifiant soigneusement leur direction et leur sens.
2. Par application de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer et calculer numériquement l'accélération a de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.
3. L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse v en fonction du temps. Au bout de quelle durée t_a la luge atteint-elle la vitesse $v_\text{a} = 30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$? Application numérique.
4. Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? Application numérique.

Virage circulaire

À présent, le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V, sur un cercle de rayon ρ. La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. La trajectoire se situe dans un plan horizontal : $\vec{v} = V\vec{u_\theta}$. Le trièdre de vecteurs unitaires $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ est orthonormé direct. On désigne par $\vec{R} = R_\text{N}\vec{n} + R_\text{T}\vec{t}$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires $\vec{n}$ (normal) et $\vec{t}$ (tangent) sont définis sur la figure de droite ci-dessous.



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

5. Exprimer l'accélération $\overrightarrow{a}$ en fonction de V, ρ et de $\overrightarrow{u_r}$. Justifier physiquement le sens de l'accélération.

6. La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{n})$.

7. En déduire les expressions des réactions R_N et R_T en fonction de V, ρ, β, g et m.

8. Quelle est la valeur V_c de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ? Écrire alors R_T en fonction de m, ρ, β et $(V^2 - V_\mathrm{c}^2)$.

Soit $f = 0,4$ le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_\mathrm{T}| < f R_\mathrm{N}$. Dans la suite des questions, on ne considère que le cas $V \geq V_\mathrm{c}$ ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

9. Montrer que V^2 doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :

$$V^2(\cos\beta - f\sin\beta) < g\rho(\sin\beta + f\cos\beta)$$

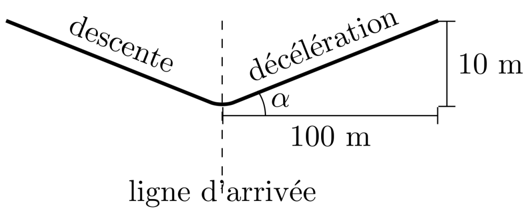
10. En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse V. Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f. Faire l'application numérique, en degrés.

11. Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse V à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de g, ρ, β et f. Que risque la luge si sa vitesse est trop grande ?

12. Montrer à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse V_c. Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.

II. B Freinage mécanique

La luge franchit la ligne d'arrivée à la vitesse $v_\mathrm{a} = 30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Dans cette partie, les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le ralentissement à l'arrivée se fait sur une piste inclinée de 10% (on monte de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On note l'angle d'inclinaison α.



13. Déterminer la longueur L de la piste de ralentissement nécessaire pour que la luge passe de $v_\mathrm{a} = 30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à l'arrêt, en utilisant la conservation de l' énergie mécanique.
Faire l'application numérique et conclure sur la faisabilité de cette méthode de ralentissement.

FIN DE L'ÉNONCÉ

***