

# – DS (4) de physique-chimie –

## Mécanique & Électrocinétique

Le samedi 9 janvier 2021 - Durée 3h

---

Prolégomènes : vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction !

- Les fautes de français et les copies mal présentées seront pénalisées.
  - N'utilisez que des **copies doubles** que vous devrez **numéroter en indiquant le total** (par exemple 1/3, 2/3, 3/3).
  - Une **marge** doit être laissée pour la correction sur la partie **gauche** de votre copie.
  - Les réponses non justifiées et les applications numériques ne comportant pas d'unité **seront ignorées**.
  - Vous prendrez soin de bien **numéroter les questions** et **d'encadrer vos réponses**.
- 

### I Spectrométrie de masse (D'après TnT)

Des ions uranium  ${}_{92}\text{U}^{4+}$  de masse  $m$  sont accélérés depuis une source (point  $O'$ ) par une tension  $U_a = 1,00 \text{ kV}$  constante entre deux plaques percées  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  parallèles et distantes de  $L = 1,00 \text{ m}$ . Ils pénètrent ensuite (point  $O$ ) dans une zone où règne uniquement un champ magnétique stationnaire et uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$  avec  $B_0 > 0$  (figure 1). La vitesse initiale des ions en  $O'$  est supposée nulle. On note  $e = 1,61 \times 10^{-19} \text{ C}$  la charge électrique élémentaire et  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  la célérité de la lumière dans le problème.

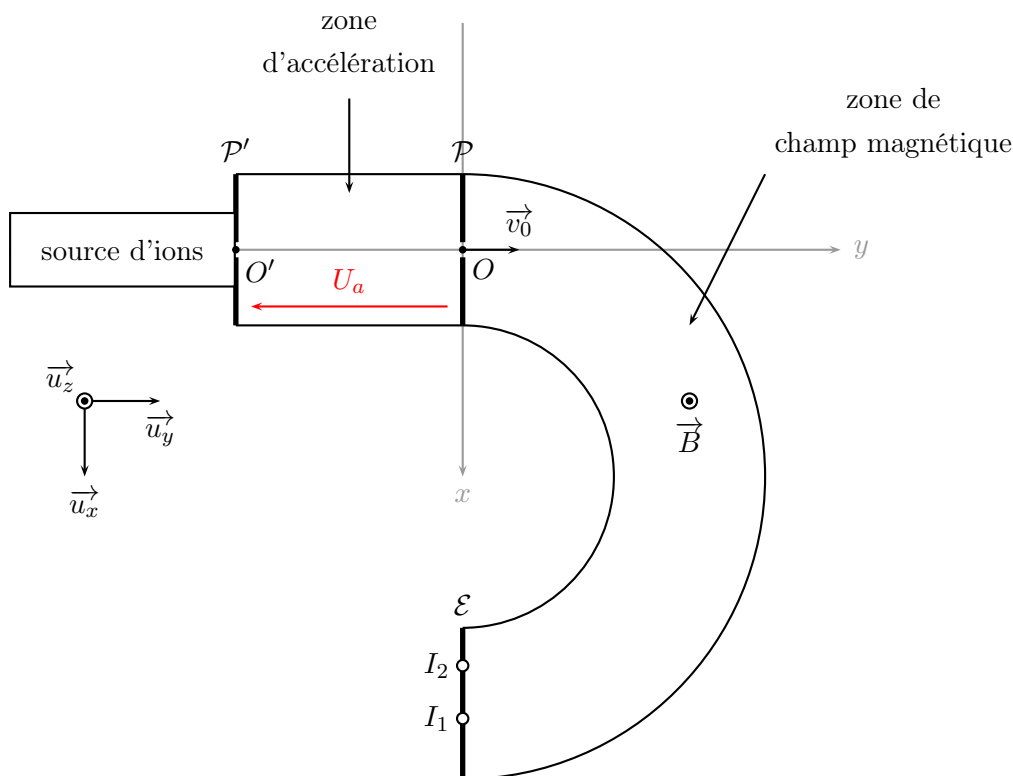


FIGURE 1 – Schéma de principe d'un spectromètre de masse

1. Quelle est l'expression générale de la force de Lorentz subie par une particule chargée de charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$ .
2. Déterminer à l'aide d'une analyse dimensionnelle l'unité de champ magnétique dans le Système International.
3. Donner l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par un aimant permanent utilisé au laboratoire et dans un appareil d'IRM.
4. On suppose le champ électrique  $\vec{E}$  uniforme et porté par  $(O'y)$  entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ . Montrer que le terme électrique de la force de Lorentz est alors conservatif et établir l'expression de l'énergie potentielle associée.
5. En déduire l'expression du champ  $\vec{E}$  qui règne dans la zone d'accélération en fonction de  $L$  et de  $U_a$ . Pourquoi peut-on dire que ce champ est stationnaire ? Évaluer numériquement sa norme notée  $E_0$ .
6. Comparer le poids des ions au terme électrique de la force de Lorentz qu'ils subissent dans la zone d'accélération. On donne  $\|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .
7. Déterminer la norme  $v_0$  de la vitesse des ions au point  $O$ .
8. Déterminer littéralement puis numériquement la durée  $\tau$  que mettent les ions à traverser la zone d'accélération.
9. On s'intéresse ici aux effets qu'entraîne l'application d'un champ magnétique sur une particule chargée en mouvement. Justifier clairement, pour chacune des propositions suivantes, si elles sont vraies ou fausses.
  - ① Le champ modifie l'énergie mécanique de la particule.
  - ② Le champ accélère la particule en modifiant seulement la direction du vecteur vitesse.
  - ③ Le champ n'accélère pas la charge.
  - ④ Le champ modifie la norme de la quantité de mouvement.
10. Montrer que les ions suivent une trajectoire circulaire, dont on déterminera le rayon  $R$  en fonction de  $e$ ,  $v_0$ ,  $m$  et  $B_0$ , dans la zone de champ où règne le champ magnétique.
11. Le faisceau d'ions est en réalité constitué de deux types d'ions issus d'un même isotope de l'uranium :  ${}^{238}_{92}\text{U}^{4+}$  et  ${}^{235}_{92}\text{U}^{4+}$ . On note respectivement  $m_1$  et  $m_2$  leur masse ( $m_1 > m_2$ ). On se rend compte qu'ils frappent un écran  $\mathcal{E}$  aux points  $I_1$  et  $I_2$  respectivement. Déterminer la distance  $d$  qui sépare ces deux points d'impact en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $B_0$ ,  $e$  et  $U_a$ .
12. Faire l'application numérique dans le cas où  $B_0 = 1,00 \text{ T}$ .

On souhaite séparer les ions plus largement, c'est-à-dire augmenter  $d$ . On choisit pour cela d'augmenter la valeur de la tension  $U_a$ .

13. On note  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  le coefficient de Lorentz, avec  $c$  la célérité de la lumière dans le vide et  $v$  la norme du vecteur vitesse  $\vec{v}$  d'un objet en mouvement. On se propose de retrouver par analyse dimensionnelle les formules relativistes de la quantité de mouvement  $\vec{p} = \gamma \vec{f}(m, \vec{v})$  et de l'énergie cinétique  $E_c = (\gamma - 1)g(m, c)$ .
  - (a) Proposer pour les fonctions  $\vec{f}(m, \vec{v})$  et  $g(m, c)$  les expressions les plus simples possibles.
  - (b) Montrer que les expressions de  $\vec{p}$  et de  $E_c$  ainsi obtenues sont compatibles avec les expressions connues dans le cas non relativiste. On rappelle que  $(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$  au voisinage de  $x = 0$ .
14. Pour quelle valeur  $U_{a,r}$  de tension  $U_a$  atteint-on  $v_0 = 0,9 c$  ? Est-il alors possible de réaliser l'accélération des ions dans l'air ?

15. On suppose dans cette question que  $U_a = U_{a,r}$ .

- Comment cette situation modifie le mouvement des ions dans la zone de champ magnétique ?
- Quelle est la nouvelle expression  $d_r$  de la distance  $d$  ?
- Calculer numériquement  $d_r$ .

## II Molécule d'ammoniac

Dans un modèle simplifié de la molécule d'ammoniac  $\text{NH}_3$  représentée figure 2, les trois atomes d'hydrogène H forment la base d'une pyramide dont l'azote N de masse  $m$  occupe le sommet. Les trois atomes d'hydrogène, définissant le plan  $xOy$ , sont supposés fixes dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen et muni d'un repère  $(O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . L'atome d'azote est en mouvement suivant l'axe  $Oz$  perpendiculaire au plan des atomes d'hydrogène. Il peut passer de part et d'autre de ce plan et sa cote est notée  $z$ . Le champ de pesanteur est négligeable pour décrire cette structure atomique et la résultante des forces électromagnétiques qui s'exercent sur l'atome d'azote N supposé ponctuelle est :

$$\vec{F} = -\alpha z(z^2 - a^2)\vec{u}_z$$

avec  $\alpha$  et  $a$  des constantes positives.

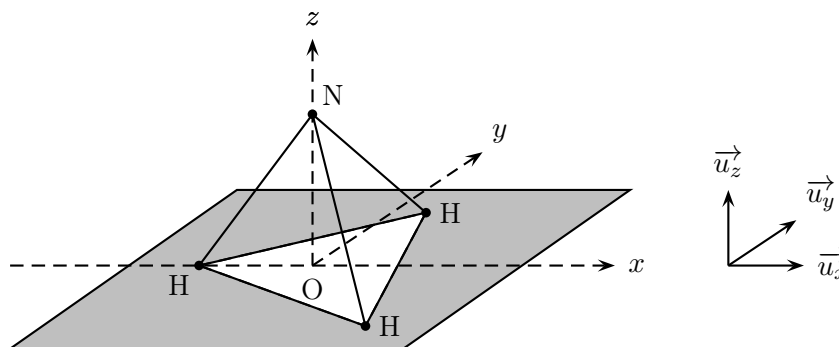


FIGURE 2 – Molécule d'ammoniac

- Montrer que l'énergie potentielle  $E_p(z)$  dont dérive la force  $\vec{F}$  peut se mettre sous la forme

$$E_p(z) = k_1 z^2 (z^2 - k_2)$$

avec  $k_1$  et  $k_2$  des constantes qu'on exprimera en fonction des données du problème ; on prendra pour référence  $E_p(0) = 0$ . Représenter l'allure de la courbe correspondante lorsque  $z$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

- Déterminer les positions d'équilibre de l'atome d'azote et étudier la stabilité de ces équilibres.
- L'atome d'azote étant au repos dans une position d'équilibre stable, on lui fournit une énergie supplémentaire  $0 < \Delta E < \frac{1}{4}\alpha a^4$ .
  - Montrer graphiquement que l'atome d'azote va osciller entre deux valeurs limites  $z_1$  et  $z_2$ .
  - Établir l'équation du mouvement. En déduire la fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable choisie.
- Que se passe-t-il si l'énergie fournie  $\Delta E$  est supérieure à  $\frac{1}{4}\alpha a^4$  ?

### III Microrégénérateur piézoélectrique à quartz (D'après Centrale-Supélec TSI 2020)

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu'on exerce sur elles une contrainte (effet direct) mais également de pouvoir se déformer sous l'action d'une différence de potentiel imposée (effet inverse), ce qui en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé aujourd'hui par exemple dans les montres pour créer des impulsions d'horloge.

Ce problème propose d'abord d'étudier le principe de récupération d'énergie par un microrégénérateur piézoélectrique, puis de s'intéresser au modèle électrique le plus fréquemment utilisé pour décrire un quartz piézoélectrique sans pertes. Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

#### III. A Microrégénérateur piézoélectrique

Un élément piézoélectrique est collé à une « poutre », qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures (figure 3). L'élément piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique, ce qui constitue une source autonome de puissance.

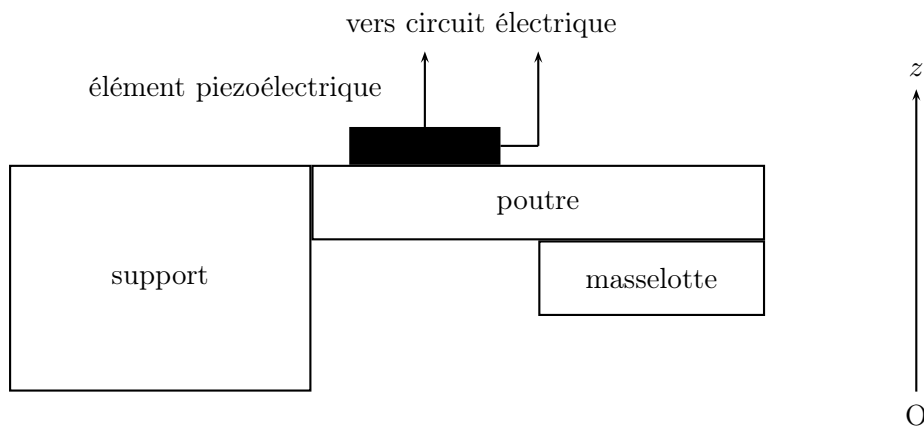


FIGURE 3

On appelle  $\vec{F}_E = F_E \vec{u}_z = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$  la force excitatrice ambiante, supposée sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Tout le problème est étudié en régime sinusoïdal forcé.

##### III. A.1 Aspects mécaniques

Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre de masse  $M$  peut être modélisé par l'équation mécanique :

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz = F_E$$

Les grandeurs  $F_0$ ,  $k$  et  $\alpha$  sont définies strictement positives.

1. Que représente le terme  $M \frac{d^2 z}{dt^2}$  ?
2. Indiquer à quel type de forces correspondent  $-kz$  et  $-\alpha \frac{dz}{dt}$ . Expliquer qualitativement à quelle(s) caractéristique(s) de la poutre et/ou de l'air elle sont associées.
3. On pose  $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}(\underline{Z}_m e^{j\omega t})$  où  $j^2 = -1$ . Exprimer  $\underline{Z}_m$ , amplitude complexe de la vibration mécanique suivant l'axe vertical ( $Oz$ ). On introduira la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ .

4. En déduire les expressions de  $Z_m$  et  $\varphi$ .

Dans toute la suite de cette partie III. A on se place à la pulsation  $\omega = \omega_0$ .

5. Quelle est, à cette pulsation, l'expression de la fonction  $z(t)$  en fonction de  $F_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\alpha$  et  $t$ ? Que peut-on dire dans ce cas du mouvement du centre d'inertie de la poutre par rapport à la force excitatrice ambiante?
6. Déduire de ce qui précède l'expression de la vitesse de déplacement vertical  $v_z(t)$  du centre d'inertie de la poutre en fonction de  $F_0$ ,  $\alpha$ ,  $\omega_0$  et du temps.

### III. A.2 Aspects électriques

La partie électrique du dispositif peut être modélisée de la façon suivante : une source idéale de courant délivrant une intensité  $\beta v_z$  est disposée en parallèle avec un condensateur de capacité  $C_0$  et une résistance d'utilisation  $R$  (figure 4). Soit  $V$  la tension aux bornes de  $R$ . On veut montrer que la puissance moyenne récupérée par le dipôle d'utilisation est proportionnelle au carré de  $F_0$ .

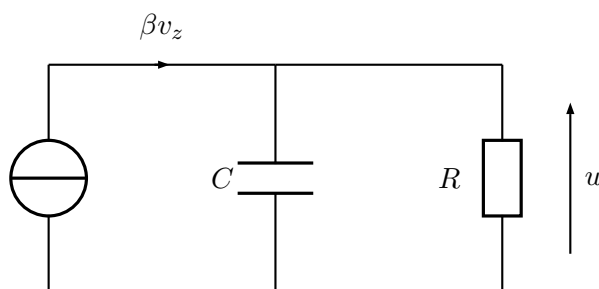


FIGURE 4

7. Rappeler la définition d'une source idéale de courant.
8.  $\beta$  est appelé facteur de force : c'est le rapport entre la force appliquée à la lame piézoélectrique et la tension aux bornes de celle-ci. Montrer par un calcul dimensionnel simple que  $\beta v_z$  est homogène à l'intensité d'un courant électrique.
9. Exprimer  $\underline{U}_m$ , amplitude complexe de la tension  $u$  aux bornes de la résistance d'utilisation en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $F_0$ ,  $R$ ,  $C$  et  $\omega_0$ .
10. En déduire l'expression de la puissance moyenne récupérée  $P = \frac{|\underline{U}_m|^2}{2R}$  par la résistance d'utilisation en fonction des données du problème.

### III. B Modèle électrique d'un quartz sans pertes

On donne fréquemment pour le quartz sans pertes le modèle électrique de la figure 5 qui résume assez bien son comportement.

11. Étudier le comportement asymptotique du modèle en donnant, pour les cas  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ , le dipôle entre A et B équivalent au quartz.
12. Montrer que l'impédance équivalence  $\underline{Z}_{AB} = \frac{u}{i}$  du quartz en régime sinusoïdal forcé entre A et B peut s'écrire :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{j\gamma(\omega)}{1 - C_0\omega\gamma(\omega)}$$

où  $\gamma(\omega)$  est une fonction de la pulsation qu'on exprimera à l'aide des données du problème.

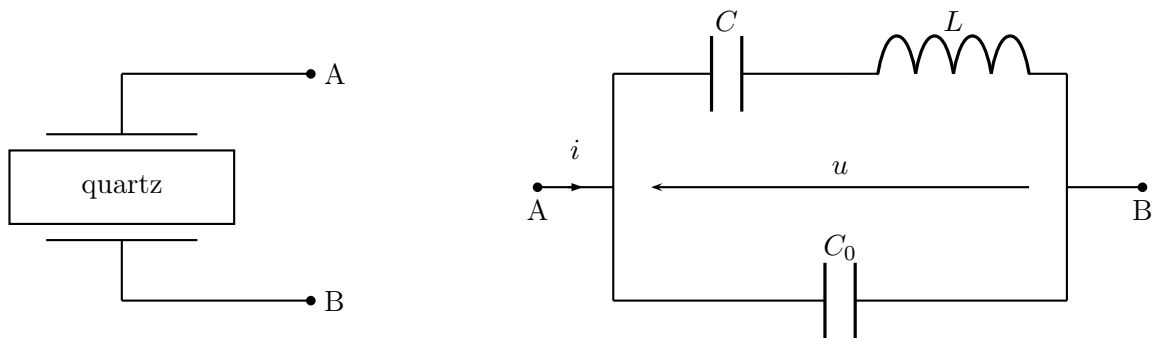


FIGURE 5

La courbe de la figure 6 représente l'allure de la partie imaginaire  $\text{Im}(\underline{Z}_{AB})$  de l'impédance équivalente du modèle électrique du quartz en fonction de la pulsation.

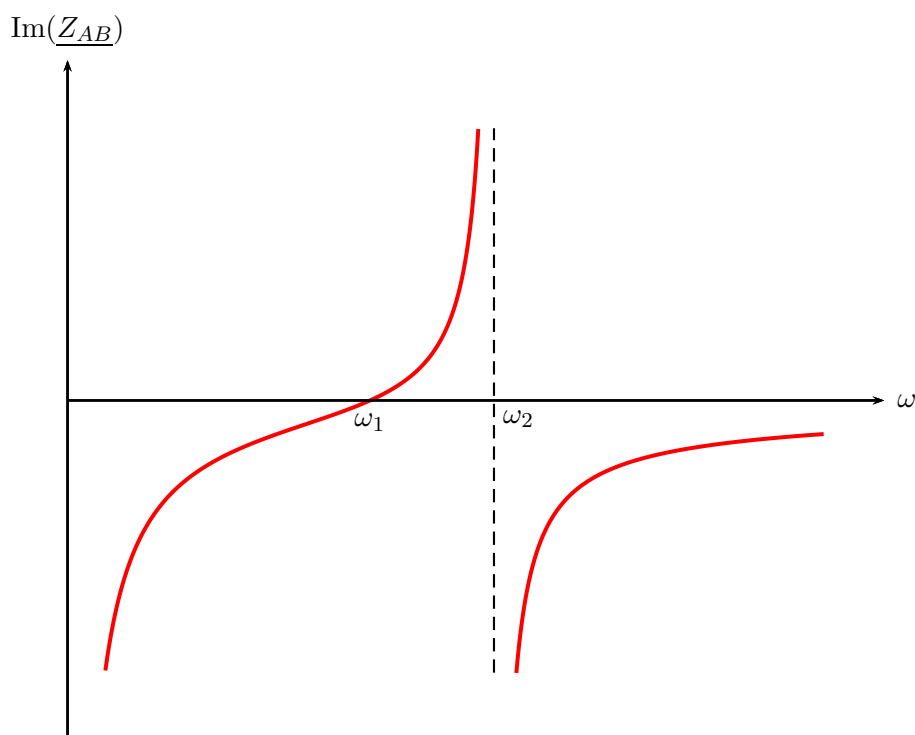


FIGURE 6

13. Exprimer les pulsations remarquables  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en fonction des données du problème.
14. Dans quel(s) intervalle(s) peut-on dire que le comportement du quartz est capacitif?

**FIN DE L'ÉNONCÉ**

\* \* \*