

– Correction du DS (4) de physique-chimie –

Mécanique & Électrocinétique

I Spectrométrie de masse (*D'après TnT*)

1. Force de Lorentz : $\boxed{\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)}$.

2. D'après la question précédente :

$$[B] = \frac{[\text{force}]}{[\text{charge}] [\text{vitesse}]} = \frac{[\text{force}]}{[\text{intensité} \times \text{temps}] [\text{vitesse}]} = \frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{ITLT}^{-1}} = \text{MT}^{-2}\text{I}^{-1}$$

En effet, $i = \frac{dq}{dt}$ par définition de l'intensité électrique. Le champ magnétique s'exprime donc en $\boxed{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}}$.

3. Le champ magnétique créé par un aimant permanent usuel varie de 10 mT à 100 mT. Le champ magnétique créé par un électroaimant utilisé en IRM est de l'ordre de 10 T.
4. Compte tenu de la géométrie du problème, le champ électrique entre les deux plaques est dirigé selon (Oy). Le terme électrique s'écrit donc $\vec{F}_{\text{elec}} = qE_0\vec{u}_y$. Cette force étant indépendante de la position et de la vitesse, elle est conservative. Plus précisément, on cherche E_p telle que :

$$dE_p = -\delta W(\vec{F}_{\text{elec}}) = -q\vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell} = -qE_0 dy$$

en coordonnées cartésiennes.

On en déduit donc $\boxed{E_p = -qE_0 y + k}$ avec k une constante et E_0 dépendant éventuellement du temps.

5. Par définition du potentiel électrique, $E_p = qV$. On a donc :

$$E_p(O') - E_p(O) = q(V(O') - V(O)) = qU_{O'O} = qU_a$$

Or d'après la question précédente,

$$E_p(O') - E_p(O) = -qE_0(y_{O'} - y_O) = qE_0 L$$

On en déduit finalement que $\boxed{E_0 = \frac{U_a}{L} = 1,00 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}}$.

Comme U_a et L sont des constantes, E_0 l'est aussi et donc \vec{E} aussi

6. Par définition,

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_{\text{elec}}\|} = \frac{m\|\vec{g}\|}{qE_0}$$

En ordres de grandeur, $q = 4e \sim e$ et $m \sim 100m_p$ pour les ions uranium. On a donc :

$$\boxed{\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_{\text{elec}}\|} \sim 10^{-9}}$$

On peut donc considérer que le poids est négligeable devant la force électrique.

7. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre O' et O :

$$\Delta Ec = -\Delta E_p \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv_0^2 = 4eU_a$$

et donc

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{8eU_a}{m}}}$$

8. Le PFD appliqué aux ions dans le repère (O, \vec{u}_y) s'écrit :

$$m\ddot{y} = 4e\frac{U_a}{L}$$

On en déduit la vitesse :

$$\dot{y} = \frac{4eU_a}{mL}t \quad \text{puisque} \quad \dot{y}(0) = 0$$

et la position :

$$y = \frac{4eU_a}{mL} \frac{t^2}{2} - L \quad \text{puisque} \quad \dot{y}(0) = -L$$

On en déduit que $\tau = \sqrt{\frac{mL^2}{2eU_a}} \sim 1 \times 10^{-5} \text{ s}$

9. ① Le terme magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas car $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$. D'après le théorème de l'énergie mécanique $\Delta E_m = W(\vec{F}_{res}^{nc})$, cette force ne peut donc pas modifier l'énergie mécanique de la particule.
- ② Cette force ne travaillant, d'après le théorème de l'énergie cinétique, l'énergie cinétique de la particule est ne change pas. La norme de la vitesse est donc une constante du mouvement. Seule la direction du vecteur vitesse peut changer. Cela n'est possible que si $\vec{v} \wedge \vec{B} \neq \vec{0}$. Il faut donc que le champ magnétique et vecteur vitesse de la particule ne soient pas colinéaires pour que cette force agisse sur la direction de la particule.
- ③ Comme expliqué ci-dessus, la particule chargée est accélérée si le champ et le vecteur vitesse ne sont pas colinéaires.
- ④ On a montré que cette force ne modifie pas la norme de la vitesse. Elle ne modifiera donc pas la norme de la quantité de mouvement puisque $\vec{p} = m\vec{v}$.
10. On applique le PFD aux ions dans la zone de champ magnétique dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. L'ordre de grandeur de la vitesse de ions étant $v_0 \sim 1 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$, la norme de la force magnétique (en prenant $\|\vec{B}\| \sim 1 \text{ T}$ est de l'ordre de $1 \times 10^{-13} \text{ N}$ ce qui est très largement supérieur à la norme du poids ($\sim 1 \times 10^{-24} \text{ N}$). On aura donc :

$$m\ddot{x} = 4eB_0\dot{y} \quad \text{et} \quad m\ddot{y} = -4eB_0\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = 0$$

On montre rapidement que le mouvement est plan car $z = 0$. On a de plus :

$$\dot{x} = \frac{4eB}{m}y \quad \text{et} \quad \dot{y} = -\frac{4eB}{m}x + v_0$$

On en déduit donc :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0 v_0 \quad \text{et} \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

avec $\omega_0 = \frac{4eB_0}{m}$. On obtient :

$$x = A_x \cos(\omega_0 t) + B_x \sin(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \quad \text{et} \quad y = A_y \cos(\omega_0 t) + B_y \sin(\omega_0 t)$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes d'intégration :

$$A_x = -\frac{v_0}{\omega_0} \quad \text{et} \quad B_x = 0$$

et

$$A_y = 0 \quad \text{et} \quad B_y = \frac{v_0}{\omega_0}$$

Finalement :

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega_0} (1 - \cos(\omega_0 t))} \quad \text{et} \quad \boxed{y = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

Les équations horaires étant connues, on peut établir l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{\left(x - \frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

Il s'agit bien de l'équation cartésienne d'un cercle de rayon $\boxed{R = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{mv_0}{4eB_0}}$.

11. Les ions frappent l'écran lorsqu'ils ont parcouru un demi-tour, c'est-à-dire quand x est maximal. On a donc :

$$x_1 = 2R_1 = \frac{mv_0}{2eB_0} = \frac{\sqrt{8eU_a m_1}}{2eB_0} = \frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{2U_a m_1}{e}}$$

et de même $x_2 = \frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{2U_a m_2}{e}}$.

On en déduit donc :

$$\boxed{d = \frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{2U_a}{e}} (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})}$$

12. $\boxed{d = 4,43 \times 10^{-3} \text{ m}}$.

On souhaite séparer les ions plus largement, c'est-à-dire augmenter d . On choisit pour cela d'augmenter la valeur de la tension U_a .

13. (a) Par analyse dimensionnelle, on trouve $\boxed{\vec{f}(m, \vec{v}) = m \vec{v}}$ et $\boxed{g(m, c) = mc^2}$. On retrouve ainsi les formules relativistes $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et $E_c = (\gamma - 1)mc^2$.

- (b) Dans l'hypothèse non relativiste, on a $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$. On en déduit que $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq 1$ à l'ordre 0, ce qui permet de retrouver la formule $\boxed{\vec{p} = m \vec{v}}$. Pour l'énergie cinétique, il faut pousser le développement limité de γ à l'ordre 1 : $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$. On obtient ainsi :

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2 = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1\right) mc^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} mc^2 \text{ soit } \boxed{E_c = \frac{1}{2} mv^2}.$$

14. Pour $v = 0,9 c$, on a $\gamma = 2,3$. Or, $\boxed{U_{a,r} = \frac{(\gamma - 1)mc^2}{4e}}$ d'après le théorème de l'énergie cinétique, soit numériquement $U_{a,r} \simeq 71 \times 10^9 \text{ V}$. C'est une tension gigantesque qui correspond à un champ entre les plaques très largement supérieur à $3,6 \times 10^6 \text{ V m}^{-1}$, c'est-à-dire très grand devant le champ disruptif de l'air. On ne peut pas travailler dans l'air avec ce dispositif.

15. On suppose dans cette question que $U_a = U_{a,r}$.

- (a) Dans un cadre relativiste, le caractère rectiligne de la trajectoire entre les plaques et l'aspect circulaire du mouvement dans la zone de champ magnétique restent vérifiés. En revanche, la pulsation ω_0 n'est plus constante car il faut remplacer m par γm dans son expression et donc prendre :

$$R = \frac{\gamma mv_0}{2eB_0}$$

En conséquence, deux ions, issus de deux isotopes différents, arrivant au même instant au niveau de la plaque \mathcal{P} , n'atteindront plus l'écran au même instant. Par ailleurs, la vitesse des ions étant plus grande, leurs points d'impact sur l'écran seront déplacés.

II Molécule d'ammoniac

1. L'unique force en présence est conservative si et seulement si on peut écrire $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$:

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = (-\alpha z(z^2 - a^2)\vec{u}_z) \cdot (dz\vec{u}_z) = -\alpha z(z^2 - a^2)dz = -dE_p = -\frac{dE_p}{dz}dz$$

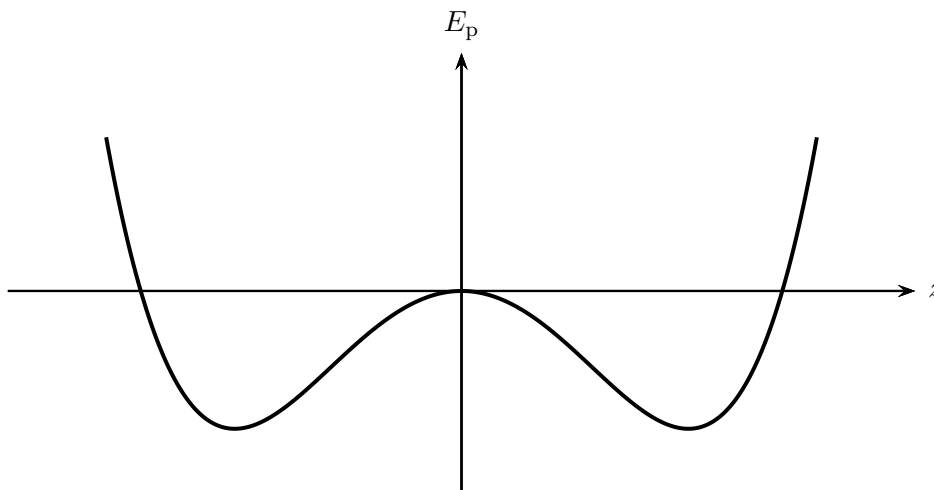
Par identification,

$$\frac{dE_p}{dz} = \alpha z(z^2 - a^2) \Leftrightarrow \int_{E_p(0)}^{E_p(z)} dE_p = \int_0^z \alpha z(z^2 - a^2)dz \Leftrightarrow E_p(z) - E_p(0) = \left[\frac{\alpha z^4}{4} \right]_0^z - \left[\frac{\alpha a^2 z^2}{2} \right]_0^z$$

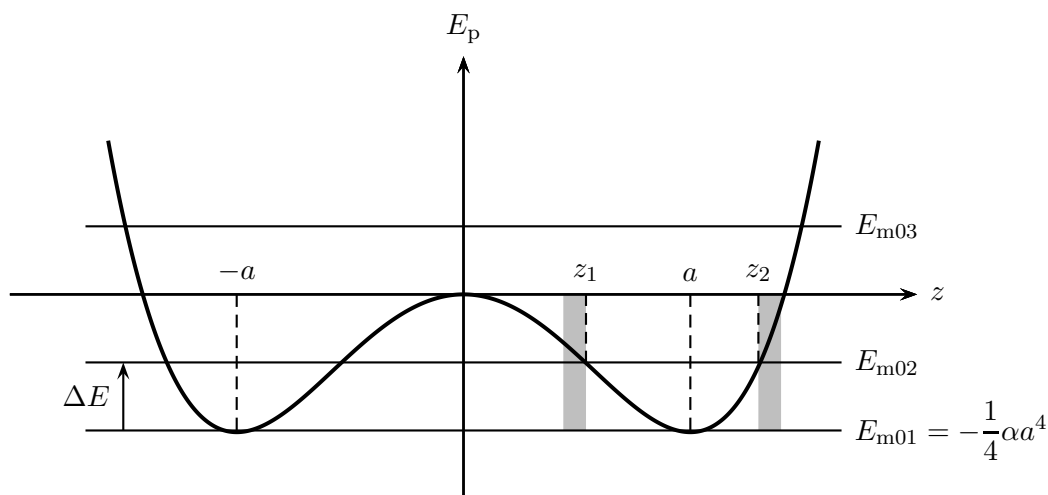
Comme $E_p(0) = 0$, on obtient finalement :

$$E_p(z) = \frac{1}{4}\alpha z^2(z^2 - 2a^2)$$

Par identification, on en déduit $k_1 = \frac{1}{4}\alpha$ et $k_2 = 2a^2$.



2. Les positions d'équilibre z_{eq} sont solutions de $\frac{dE_p}{dz}(z_{\text{eq}}) = 0$. Or $\frac{dE_p}{dz} = \alpha z(z^2 - a^2) = \alpha z(z - a)(z + a)$, d'où $z_{\text{eq}1} = 0$, $z_{\text{eq}2} = a$ et $z_{\text{eq}3} = -a$. Pour étudier la stabilité de ces équilibres, on étudie le signe de $\frac{d^2E_p}{dz^2}(z_{\text{eq}})$. Comme $\frac{d^2E_p}{dz^2} = \alpha(3z^2 - a^2)$ alors $\frac{d^2E_p}{dz^2}(z_{\text{eq}1}) = -\alpha a^2 < 0$ et $\frac{d^2E_p}{dz^2}(z_{\text{eq}2}) = \frac{d^2E_p}{dz^2}(z_{\text{eq}3}) = 2\alpha a^2 > 0$: $z_{\text{eq}1} = 0$ position d'équilibre instable ; $z_{\text{eq}2} = a$ et $z_{\text{eq}3} = -a$ positions d'équilibre stables.
3. (a) Une position d'équilibre instable correspond à un maximum local d'énergie potentiel, alors qu'une position d'équilibre instable représente un minimum local d'énergie potentielle. Compte tenu des questions précédentes, le graphe d'énergie potentielle a donc pour allure :



L'atome d'azote étant initialement au repos dans une position d'équilibre stable, $z_{\text{eq}2} = a$ par exemple, son énergie mécanique est donc $E_{\text{m}01} = E_{\text{c}01} + E_{\text{p}01} = 0 + E_{\text{p}}(a) = -\frac{1}{4}\alpha a^4$. L'énergie supplémentaire qu'on lui fournit depuis cette position fait passer son énergie mécanique à $E_{\text{m}02} = E_{\text{m}01} + \Delta E$. Puisque $0 < \Delta E < \frac{1}{4}\alpha a^4$, le système est toujours dans un puits de potentiel. Le problème étant conservatif, l'atome va osciller entre deux valeurs limites z_1 et z_2 .

- (b) Pour déterminer la fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $z_{\text{eq}2} = a$, on peut commencer par déterminer l'équation du mouvement. L'énergie mécanique $E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{4}\alpha z^2(z^2 - 2a^2)$ étant constante,

$$\frac{dE_{\text{m}}}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{z}(m\ddot{z} + \alpha z(z-a)(z+a)) = 0$$

soit $\dot{z} = 0$ (pas de mouvement) ou $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}z(z-a)(z+a) = 0$ (équation du mouvement).

Introduisons le petit écart à la position d'équilibre $\varepsilon = z - a$ tel que $\varepsilon \ll z, a$. Dans ce cas, $z \simeq a$, $z + a \simeq 2a$, $\ddot{z} = \ddot{\varepsilon}$ et l'équation du mouvement devient

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{2\alpha a^2}{m}\varepsilon = 0$$

On reconnaît un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\alpha a^2}{m}} = 2\pi f_0$ d'où la fréquence

demandée $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\alpha a^2}{m}}$.

4. Si l'énergie fournie ΔE est supérieure à $\frac{1}{4}\alpha a^4$, alors le système a une énergie mécanique $E_{\text{m}03}$ telle que représentée sur le graphe. Le mouvement de l'atome est toujours bornée mais l'énergie fournie est suffisante pour que le système puisse au cours du mouvement dépasser la position d'équilibre instable $z_{\text{eq}1} = 0$ et osciller en passant successivement par les positions d'équilibre $z_{\text{eq}2} = a$ et $z_{\text{eq}3} = -a$. En pratique, l'énergie fournie est suffisante pour que l'atome d'azote traverse le plan formé par les trois atomes d'hydrogène, et ce malgré la répulsion des nuages électroniques.

III Microrégénérateur piézoélectrique à quartz (D'après Centrale-Supélec TSI 2020)

III. A Microgénérateur piézoélectrique

III. A.1 Aspects mécaniques

5. Le terme $M \frac{d^2 z}{dt^2}$ représente le produit de la masse de la poutre par l'accélération de son centre de masse. Il est issu de la dérivée du terme cinétique utilisé de l'application d'un théorème de la dynamique (quantité de mouvement, énergie cinétique, ...).
6. La force $-kz$ est du type rappel élastique. Elle est associée à la flexibilité la poutre. La force $-\alpha \frac{dz}{dt}$ modélise quant à elle un frottement fluide et rend compte de la résistance opposée par l'air ambiant au mouvement de la poutre.
7. D'après le théorème d'équivalence, $z = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ est solution de $M \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz = F_0 \cos(\omega t)$ si et seulement si $\underline{z} = Z_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{Z_m} e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z_m} = Z_m e^{j\varphi}$ est solution de $M \frac{d^2 \underline{z}}{dt^2} + \alpha \frac{d\underline{z}}{dt} + k\underline{z} = F_0 e^{j\omega t}$. Cette dernière équation se réécrit :

$$(M(j\omega)^2 + \alpha j\omega + k)\underline{z} = F_0 e^{j\omega t} \Leftrightarrow (k - M\omega^2 + i\alpha\omega)\underline{Z_m} = F_0 \Leftrightarrow \left(\frac{k}{M} - \omega^2 + j\frac{\alpha}{M}\omega\right)\underline{Z_m} = \frac{F_0}{M}$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, on obtient finalement :

$$\underline{Z_m} = \frac{\frac{F_0}{M}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\alpha}{M}\omega}$$

8. L'amplitude Z_m s'obtient par la relation $Z_m = |\underline{Z_m}|$:

$$Z_m = \frac{\frac{F_0}{M}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{M}\omega\right)^2}}$$

On accède au déphasage φ par la formule $\varphi = \arg(\underline{Z_m})$:

$$\varphi = \arg\left(\frac{F_0}{M}\right) - \arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\alpha}{M}\omega\right)$$

Comme $\frac{F_0}{M}$ est un réel positif, son argument est nul. Pour ne pas avoir à distinguer les différents cas selon le signe de la partie réelle du second terme, on le factorise par j :

$$\varphi = -\arg\left(j\left(\frac{\alpha}{M}\omega - j(\omega_0^2 - \omega^2)\right)\right) = -\arg(j) - \arg\left(\frac{\alpha}{M}\omega - j(\omega_0^2 - \omega^2)\right)$$

Cette fois $\frac{\alpha}{M}$ est strictement positif, ce qui nous permet d'écrire :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\frac{\alpha}{M}}\right)$$

9. Pour $\omega = \omega_0$, les expressions de Z_m et φ établies à la questions précédente se simplifient en : $Z_m = \frac{F_0}{\alpha\omega_0}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi $z(t) = \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$ ou encore :

$$z(t) = \frac{F_0}{\alpha\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Le mouvement du centre de la poutre est donc en quadrature par rapport à la force excitatrice ambiante.

10. En exploitant la définition $v_z = \frac{dz}{dt}$, on aboutit à :

$$v_z(t) = \frac{F_0}{\alpha} \cos(\omega_0 t)$$

III. A.2 Aspects électriques

11. Une source idéale de courant est un dipôle générateur fournissant un courant dont l'intensité est indépendante de tension à ses bornes.
12. Par analyse dimensionnelle :

$$[\beta v_z] = \frac{[\text{force} \times \text{vitesse}]}{[\text{tension}]} = \frac{[\text{puissance}]}{[\text{tension}]} \Rightarrow [\beta v_z] = [\text{intensité}]$$

En effet, $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ définit la puissance d'une force et $P = ui$ la puissance reçue par un dipôle en convention récepteur.

13. En régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω_0 , l'association parallèle du condensateur et du conducteur ohmique a pour admittance équivalente

$$\underline{Y} = jC\omega_0 + \frac{1}{R}$$

Ce dipôle équivalent est soumis à la tension \underline{u} et parcouru par le courant d'intensité $\beta \underline{v_z}$ d'où

$$\beta \underline{v_z} = \underline{Y} \underline{u} \Leftrightarrow \frac{\beta F_0}{\alpha} e^{j\omega_0 t} = \left(jC\omega_0 + \frac{1}{R}\right) \underline{U_m} e^{j\omega_0 t}$$

soit finalement

$$\underline{U_m} = \frac{\beta F_0}{\alpha} \left(\frac{R}{1 + jRC\omega_0} \right)$$

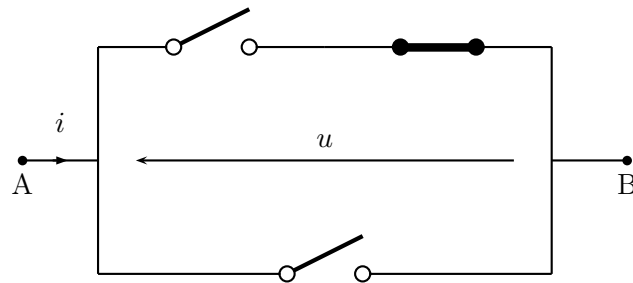
14. Compte tenu de la question précédente, la formule $P = \frac{|\underline{U_m}|^2}{2R}$ conduit à :

$$P = \frac{\beta^2 F_0^2 R}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_0)^2}} \right)$$

La puissance moyenne récupérée est bien proportionnelle au carré de F_0 .

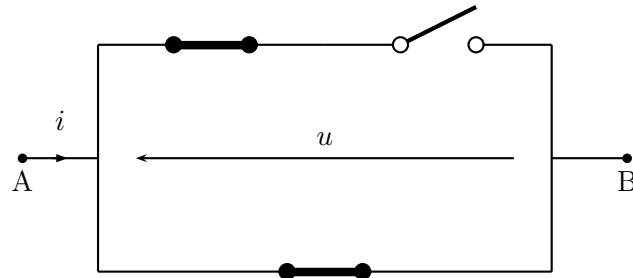
III. B Modèle électrique d'un quartz sans pertes

15. Pour $\omega \rightarrow 0$, le dipôle est équivalent à :



D'après la loi des noeuds $\forall u, i = 0$: le quartz est équivalent à un interrupteur ouvert à basse fréquence.

De même, pour $\omega \rightarrow \infty$, le dipôle est équivalent à :



Un fil relie A et B donc $\forall i, u = 0$: le quartz est équivalent à un fil à haute fréquence.

16. En utilisant les associations remarquables de dipôles, on détermine l'admittance équivalente du quartz :

$$\underline{Y}_{AB} = jC_0\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = jC_0\omega + \frac{1}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{-C_0\omega\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) + 1}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Comme $\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{\underline{Y}_{AB}}$, on obtient le résultat demandé :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{j\gamma(\omega)}{1 - C_0\omega\gamma(\omega)} \quad \text{avec} \quad \gamma(\omega) = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

17. \underline{Z}_{AB} est un imaginaire : $\text{Im}(\underline{Z}_{AB}) = \frac{\gamma(\omega)}{1 - C_0\omega\gamma(\omega)}$.

La pulsation ω_1 est telle que :

$$\text{Im}(\underline{Z}_{AB})(\omega_1) = 0 \Leftrightarrow \gamma(\omega_1) = 0 \Leftrightarrow L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La pulsation ω_2 est telle que :

$$\text{Im}(\underline{Z}_{AB})(\omega_1) \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow 1 - C_0\omega_2\gamma(\omega_2) = 0 \Leftrightarrow 1 - C_0\omega_2\left(L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2}\right) = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{C_0 + C}{LC_0C}}$$

18. Un condensateur de capacité $C > 0$ a pour impédance $\frac{1}{jC\omega} = -\frac{j}{C\omega}$. Le comportement du quartz est ainsi capacitif quand son impédance est un imaginaire pur négatif, c'est-à-dire sur les intervalles de pulsation : $]0, \omega_1]$ et $[\omega_2, \infty[$.