
MÉCANIQUE

PARTIE 3

CHARLES TUCHENDLER



MPSI 4 – LYCÉE SAINT-LOUIS

ANNÉE 2019/2020

Table des matières

CHAPITRE XIV	INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE DU SOLIDE	2
Introduction		3
I Cinématique du solide		3
I.1 Cas d'un mouvement de translation pure		3
I.2 Cas d'un mouvement de rotation pure autour d'un axe fixe		4
II Eléments cinétiques		5
II.1 Masse et centre de masse		5
II.2 Quantité de mouvement		5
II.3 Moment cinétique d'un système en rotation autour d'un axe fixe		6
II.4 Moment d'inertie		6
II.5 Energie cinétique		9
III Systèmes de forces		10
III.1 Forces intérieures et extérieures		10
III.2 Moment de la résultante des forces		11
III.3 Relation de torseur statique		12
III.4 Couple		12
III.5 Quelques cas particuliers		12
III.5.a Cas du poids d'un système		12
III.5.b Cas d'une force colinéaire à l'axe de rotation d'un solide		13
III.5.c Liaison pivot		13
III.5.d Cas d'une corde sur une poulie		13
IV Théorèmes		13
IV.1 Théorème de la résultante cinétique		13
IV.2 Théorème du moment cinétique		14
IV.3 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique		14
V Comportement du solide en rotation autour d'un axe fixe Δ		16
V.1 Équivalence des théorèmes du moment et de la puissance cinétique		16
V.2 Expérience du tabouret d'inertie		16
V.3 Étude d'un pendule pesant		17
V.4 Étude d'un pendule de torsion		18

CHAPITRE XIV

INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE DU SOLIDE

Sommaire

Introduction	3
I Cinématique du solide	3
I.1 Cas d'un mouvement de translation pure	3
I.2 Cas d'un mouvement de rotation pure autour d'un axe fixe	4
II Éléments cinétiques	5
II.1 Masse et centre de masse	5
II.2 Quantité de mouvement	5
II.3 Moment cinétique d'un système en rotation autour d'un axe fixe	6
II.4 Moment d'inertie	6
II.5 Énergie cinétique	9
III Systèmes de forces	10
III.1 Forces intérieures et extérieures	10
III.2 Moment de la résultante des forces	11
III.3 Relation de torseur statique	12
III.4 Couple	12
III.5 Quelques cas particuliers	12
III.5.a Cas du poids d'un système	12
III.5.b Cas d'une force colinéaire à l'axe de rotation d'un solide	13
III.5.c Liaison pivot	13
III.5.d Cas d'une corde sur une poulie	13
IV Théorèmes	13
IV.1 Théorème de la résultante cinétique	13
IV.2 Théorème du moment cinétique	14
IV.3 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique	14
V Comportement du solide en rotation autour d'un axe fixe Δ	16
V.1 Équivalence des théorèmes du moment et de la puissance cinétique	16
V.2 Expérience du tabouret d'inertie	16
V.3 Étude d'un pendule pesant	17
V.4 Étude d'un pendule de torsion	18

Introduction

Nous nous sommes, jusqu'à présent, uniquement intéressés à la mécanique du point matériel, négligeant tout volume associé au système étudié ainsi que toute rotation de ce système sur lui-même.

Ce chapitre est l'occasion d'aller un peu plus loin dans l'étude des systèmes matériels en étendant d'abord les lois de la mécanique à un système de N points matériels discrets puis en passant ensuite à la limite continue la plus simple qu'est l'étude du solide indéformable.

Au cours de ce chapitre, on traitera spécifiquement le cas du solide en rotation autour d'un axe fixe, usuellement noté Δ .

I Cinématique du solide

Définition XIV.1 – Solide

On appellera dans ce chapitre **solide** tout système matériel indéformable, c'est-à-dire pour lequel, quels que soient A et B deux points du solide (S) , $\|\overrightarrow{AB}\|$ est constant.

$$\forall (A, B) \in S^2 \quad , \quad \|\overrightarrow{AB}\| = cte$$

Remarque : par définition, un solide n'est donc pas élastique mais parfaitement rigide. Il s'agit donc ici d'un cas idéal. La notion de solide est donc usuellement étendue par la suite au cas de systèmes déformables pour se rapprocher des situations réelles.

Propriété XIV.1 – Mouvement d'un solide

Tout mouvement d'un solide peut se décomposer en un mouvement de translation (rectiligne, circulaire, elliptique, ...) et en un mouvement de rotation. Pour le décrire, on fait appel à **six degrés de liberté** :

- trois degrés de liberté de **translation** permettant de décrire le mouvement dans l'espace d'un point A quelconque du solide.
- trois degrés de liberté de **rotation** permettant de décrire le mouvement de tout autre point du solide relativement à celui du point A .

I.1 Cas d'un mouvement de translation pure

Propriété XIV.2 – Translation d'un solide

Si un solide est en translation, l'ensemble des points qui constituent le solide possède le même vecteur vitesse :

$$\forall (A, B) \in S^2, \quad \vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(B/\mathcal{R}) = \vec{v}(t)$$

Ceci est valable quel que soit le type de translation (rectiligne, circulaire, elliptique, ...) et quelle que soit la nature du mouvement de translation (uniforme, uniformément varié, quelconque).

Remarques :

- ★ La vitesse peut dépendre du temps.
- ★ La trajectoire est identique pour tous les points du solide.
- ★ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + cste$.

Exemple XIV.1 – Trois exemples de mouvement de translation

I.2 Cas d'un mouvement de rotation pure autour d'un axe fixe

Dans la suite, on notera Δ l'axe autour duquel s'effectuera la rotation et on orientera cet axe par le vecteur unitaire \vec{u}_Δ . On se placera dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z = \vec{u}_\Delta$.

Propriété XIV.3 – Trajectoire circulaire

Tout point M_i du solide décrit une trajectoire circulaire :

★ de centre H_i , projeté orthogonal de M_i sur Δ ,

★ de rayon :

$$r_i = H_i M_i$$

★ de vitesse angulaire

$$\omega_i = \dot{\theta}_i = \dot{\theta} = \omega$$

indépendante de M_i ^a

Ainsi, pour tout point M_i du solide :

$$\vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = r_i \omega \vec{u}_{\theta_i} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{u}_{r_i} = \frac{\overrightarrow{H_i M_i}}{H_i M_i} \\ \vec{u}_{\theta_i} \text{ tel que } \vec{u}_{r_i} \wedge \vec{u}_{\theta_i} = \vec{u}_z = \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

a. Cette propriété découle de l'invariance de $||\overrightarrow{AB}||$.

II Éléments cinétiques

II.1 Masse et centre de masse

On considère un système \mathcal{S} constitués de N points matériels discrets M_i de masse respectives m_i .

Définition XIV.2 – Masse totale m

La masse du système est :

$$m = \sum_{i=1}^N m_i$$

Définition XIV.3 – Centre de masse

Le centre de masse de \mathcal{S} , noté G , est le barycentre des points M_i pondérés par les m_i soit :

$$\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Remarque : on peut mieux comprendre le rôle de G , en appliquant la relation de Chasles à la relation précédente en passant par le point O :

$$\sum_{i=1}^N m_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{GO} \sum_{i=1}^N m_i + \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i}$$

II.2 Quantité de mouvement

Définition XIV.4 – Quantité de mouvement du système de N points matériels

La quantité de mouvement totale, notée \vec{p} , d'un système \mathcal{S} de N points matériels se définit comme :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Propriété XIV.4 – Quantité de mouvement d'un système et barycentre

La quantité de mouvement totale de \mathcal{S} vérifie :

$$\vec{p} = m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

Démonstration XIV.1 – Quantité de mouvement d'un système et barycentre

Démontrons le résultat en dérivant par rapport au temps l'expression obtenue pour le barycentre G du système :

$$\vec{p} = \sum_i^N \vec{p}_i = \sum_i^N m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = \sum_i^N m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt} \underset{m_i \text{ cst}}{=} \frac{d\left(\sum_i^N m_i \vec{OM}_i\right)}{dt} = \frac{d(m\vec{OG})}{dt} = m \vec{v}(G/\mathcal{R})$$

II.3 Moment cinétique d'un système en rotation autour d'un axe fixe

On se place toujours dans le cas d'un système de N points matériels M_i de masse m_i . Etablissons l'expression du moment cinétique du système par rapport à un point O, origine du repère d'étude cylindrique. Par définition :

$$\vec{OM}_i = r_i \vec{u}_{r_i} + z_i \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = \dot{r}_i \vec{u}_{r_i} + r_i \dot{\theta}_i \vec{u}_{\theta_i} + \dot{z}_i \vec{u}_z$$

Dans l'hypothèse où le solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ tel que $\vec{u}_\Delta = \vec{u}_z$, on peut affirmer que :

$$\begin{cases} \dot{r}_i = 0 \\ \dot{z}_i = 0 \\ \dot{\theta}_i = \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = r_i \dot{\theta} \vec{u}_{\theta_i}$$

Ainsi le moment cinétique d'un point M_i , par rapport à O s'écrit :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M_i/\mathcal{R}) = \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R}) = m_i (r_i^2 \dot{\theta} \vec{u}_z - z_i r_i \dot{\theta} \vec{u}_{r_i})$$

et donc :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \sum_i^N m_i (r_i^2 \dot{\theta} \vec{u}_z - z_i r_i \dot{\theta} \vec{u}_{r_i})$$

L'expression obtenue n'est pas commode à utiliser. Il est souvent préférable de se ramener au moment cinétique par rapport à l'axe orienté Δ .

Propriété XIV.5 – Moment cinétique d'un système en rotation autour d'un axe fixe orienté Δ

Par définition :

$$\mathcal{L}_\Delta = \vec{\mathcal{L}}_A \cdot \vec{u}_\Delta \quad \text{où } A \text{ appartient à } \Delta$$

donc :

$$\mathcal{L}_\Delta = \sum_i^N m_i r_i^2 \dot{\theta} = J_\Delta \dot{\theta}$$

II.4 Moment d'inertie

Toujours dans les mêmes conditions, on repart de l'expression du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe orienté Δ . On a montré que :

$$\mathcal{L}_\Delta = \sum_i^N m_i r_i^2 \dot{\theta}$$

soit

$$\mathcal{L}_\Delta = \underbrace{\left(\sum_i^N m_i r_i^2 \right)}_{J_\Delta} \dot{\theta}$$

Le moment cinétique dépend de $\dot{\theta}$ et est donc algébrique. Par ailleurs son signe dépend de l'orientation de Δ

Définition XIV.5 – Moment d'inertie d'un système par rapport à un axe fixe

On appelle **moment d'inertie** et on note J_Δ , la grandeur caractérisant la répartition des masses dans l'espace d'un système \mathcal{S} autour d'un axe donné Δ .

★ Dans le cas d'un système de N points matériels, le moment d'inertie s'écrit :

$$J_\Delta = \sum_i^N m_i r_i^2$$

★ Dans le cas d'un solide à répartition de masse continue, le moment d'inertie s'écrit sous la forme générale suivante :

$$J_\Delta = \int_{P \in \mathcal{S}} r^2(P) dm(P) = \int_{P \in \mathcal{S}} r^2(P) \mu(P) dV$$

où $dm(P)$ est l'élément de masse infinitésimal associé à un volume élémentaire dV de solide de masse volumique $\mu(P)$ au point P .

Exercice XIV.1 – Moment d'inertie de quelques systèmes à répartition de masse homogène

Etablir l'expression du moment d'inertie d'un cylindre homogène de masse m , de rayon a et de hauteur h autour de son axe de symétrie longitudinal ainsi que celui d'une tige homogène de masse m et de longueur ℓ autour de l'un de ses axes médiateurs.

Propriété XIV.6 – Loi de Huygens

Soit \mathcal{S} un solide de masse m . Soient (Δ) et (Δ_G) deux axes parallèles entre eux, distants de d et tels que (Δ_G) passe par le centre de masse G de \mathcal{S} .

Les moments d'inertie J_Δ par rapport à (Δ) et J_{Δ_G} par rapport à (Δ_G) de \mathcal{S} vérifient la relation suivante :

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2$$

Démonstration XIV.2 – Loi de Huygens

Démontrer la loi de Huygens.

Par définition, pour un système de N points matériels M_i de masses respectives m_i le moment d'inertie s'écrit :

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^N m_i \|\overrightarrow{M_i H_i}\|^2$$

soit :

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^N m_i \left(\|\overrightarrow{M_i H_{G_i}}\|^2 + 2\overrightarrow{M_i H_{G_i}} \cdot \overrightarrow{H_{G_i} H_i} + \|\overrightarrow{H_i H_{G_i}}\|^2 \right)$$

en utilisant le projeté orthogonal H_{G_i} de H_i sur (Δ_G) . On développe cette expression :

$$J_\Delta = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \|\overrightarrow{M_i H_{G_i}}\|^2}_{J_{\Delta_G}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \|\overrightarrow{H_i H_{G_i}}\|^2}_{d^2 \times m} + 2 \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{M_i H_{G_i}} \cdot \overrightarrow{H_{G_i} H_i}$$

Intéressons nous au dernier terme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_i H_{G_i}} \cdot \overrightarrow{H_{G_i} H_i} &= (\overrightarrow{M_i G} + \overrightarrow{G H_{G_i}}) \cdot \overrightarrow{H_{G_i} H_i} \\ &= \overrightarrow{M_i G} \cdot \underbrace{\overrightarrow{H_{G_i} H_i}}_{\vec{K} = \vec{cte}} + \underbrace{\overrightarrow{G H_{G_i}} \cdot \overrightarrow{H_{G_i} H_i}}_{= \vec{0}} \end{aligned}$$

d'où :

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2 + 2 \left(\underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{M_i G}}_{= \vec{0}} \right) \cdot \vec{K}$$

Exemple : on peut par exemple appliquer ce résultat au cas de la tige, (Δ) passant par une extrémité de celle-ci.

$$J_{\Delta} = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}$$

II.5 Energie cinétique

Définition XIV.6 – Energie cinétique d'un système de points matériels

Toujours pour un système de N points matériels, on définit l'énergie cinétique totale :

$$E_c = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v(M_i/\mathcal{R})^2$$

Propriété XIV.7 – Energie cinétique d'un système de points en rotation autour d'un axe fixe

Dans le cas d'une rotation pure $v(M_i/\mathcal{R})^2 = v_i^2 = r_i^2 \dot{\theta}^2$ et donc :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

ou encore

$$E_c = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\Delta} \dot{\theta}$$

Remarques :

- ★ Cette relation se généralise bien évidemment au cas d'un solide à répartition de masse continue en rotation autour d'un axe fixe.
- ★ Attention, le référentiel du centre de masse est en général **non-galiléen**. On ne pourra donc pas toujours appliquer le théorème de l'énergie cinétique tel quel dans ce référentiel.

III Systèmes de forces

III.1 Forces intérieures et extérieures

Définition XIV.7 – Forces intérieures et extérieures

- ★ **Force extérieure** : force s'exerçant sur un point M_i du système mécanique étudié par un point extérieur à ce système.
- ★ **Force intérieure** : force s'exerçant entre deux points M_i et M_j du système mécanique étudié.

On note $\overrightarrow{f_{i,int}}$ la résultante des forces intérieures s'exerçant sur le point M_i telle que :

$$\overrightarrow{f_{i,int}} = \sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j/i}}$$

On note $\overrightarrow{F_{int}}$ la résultante totale des forces intérieures s'exerçant sur l'ensemble du système telle que :

$$\overrightarrow{F_{int}} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{f_{i,int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \overrightarrow{f_{j/i}}$$

Propriété XIV.8 – Forces intérieures

- ★ D'après le principe des actions réciproques, quels que soient les points du système M_i et M_j considérés :

$$\overrightarrow{f_{j/i}} = -\overrightarrow{f_{i/j}}$$

et

$$\overrightarrow{f_{i/j}} // \overline{M_i M_j}$$

- ★ La résultante des forces intérieures d'un système mécanique est nulle :

$$\overrightarrow{F_{int}} = \vec{0}$$

ce qui est évident d'après la propriété précédente. **Attention**, cela ne signifie pas que ces forces ne jouent pas de rôle dans un problème donné.

- ★ La résultante de toutes les forces s'exerçant sur un système mécanique est uniquement égale à la résultante des forces extérieures s'exerçant sur celui-ci :

$$\overrightarrow{F_{res}} = \overrightarrow{F_{ext}} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{f_{i,ext}}$$

III.2 Moment de la résultante des forces

Soit $\vec{\mathcal{M}}_A$ le moment total des forces appliquées au système par rapport à un point A fixe dans le référentiel d'étude.

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_A &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{f_{i,res}} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge (\overrightarrow{f_{i,int}} + \overrightarrow{f_{i,ext}}) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{f_{i,int}}}_{\vec{\mathcal{M}}_{A,int}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{f_{i,ext}}}_{\vec{\mathcal{M}}_{A,ext}}\end{aligned}$$

Propriété XIV.9 – Nullité du moment des forces intérieures

Le moment des forces intérieures d'un système mécanique est nulle :

$$\vec{\mathcal{M}}_{A,int} = \vec{0}$$

Propriété XIV.10 – Moment total des forces appliquées au système

La conséquence directe de la propriété précédente est donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_{A,ext}$$

et dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe avec $A \in \Delta$:

$$\mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_{\Delta,ext}$$

III.3 Relation de torseur statique

Propriété XIV.11 – Torseur statique

Quels que soient les points A et B considérés :

$$\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

L'effort appliqué sur un solide se traduit par un couple de grandeurs $(\vec{F}, \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}))$ que l'on désignera sous le terme d'actions mécaniques et qui sont liées entre elles par une relation de torseur.

III.4 Couple

Définition XIV.8 – Couple

Lorsque le torseur dynamique associé à un couple de forces a une résultante nulle et un moment non nul $(\vec{0}; \vec{\mathcal{M}}_A)$, on appelle couple le moment résultant.

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, **un couple est résistant s'il diminue la vitesse angulaire de rotation** du solide. Dans le cas contraire, il est dit **moteur**.

Exemple : tourniquet à eau, pendule de torsion, ...

III.5 Quelques cas particuliers

III.5.a Cas du poids d'un système

Soit $\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{g}$ le poids du système étudié et A un point du référentiel d'étude.

On a d'une part :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{g} = m \vec{g}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) &= \sum_{i=1}^N (\overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{g}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{AM_i} \right) \wedge \vec{g} \\ &= m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} \end{aligned}$$

Propriété XIV.12 – Point d'application du poids

Le point d'application des actions mécaniques liées au poids est le centre de masse G du système et :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P}$$

III.5.b Cas d'une force colinéaire à l'axe de rotation d'un solide

Toute force colinéaire au vecteur \vec{u}_Δ par rapport auquel un solide est en rotation a un moment nul par rapport à cet axe.

III.5.c Liaison pivot

Définition XIV.9 – Liaison pivot

Une liaison pivot astreint le mouvement d'un solide à une rotation autour d'un seul axe.

Exemples : gonds d'une port, axe d'une roue de vélo, ...

Propriété XIV.13 – Liaison pivot idéale

Dans le cas d'une liaison pivot idéale (ou parfaite), il n'existe ni force de frottements ni moment de frottements associés à la rotation du solide.

Les forces de réaction restent non nulles mais seule leur composante normale intervient. Or, la réaction est une force orthogonale à l'axe de rotation dirigée vers l'axe. Son moment est donc nul.

$$\mathcal{M}_{\Delta, \text{liaison}} = 0$$

III.5.d Cas d'une corde sur une poulie

Dans le cas où la corde ne glisse pas dans la gorge de la poulie mais entraîne cette dernière dans un mouvement de rotation, la vitesse angulaire de rotation de la poulie est liée à la vitesse de la corde. Si la poulie est parfaite, la liaison de la poulie autour de son axe de rotation est parfaite.

IV Théorèmes

IV.1 Théorème de la résultante cinétique

Il s'agit de la version "solide" de la deuxième loi de Newton. Dans un référentiel galiléen,

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i(M/\mathcal{R}_g) \right) = \sum_{i=1}^N \left. \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} \stackrel{\text{PFD}}{=} \sum_{i=1}^N \vec{f}_{i, \text{res}} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_{i, \text{ext}} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Théorème XIV.1 – Théorème de la résultante cinétique

Dans un référentiel galiléen, pour un système solide de masse m constante :

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = m \vec{a}(G/\mathcal{R}_g) = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Remarque : grâce à ce théorème, il est possible d'établir le mouvement du centre de masse comme nous le faisons auparavant. Tous les résultats précédents restent donc vrais et l'approximation du point matériel était donc bien valide.

IV.2 Théorème du moment cinétique

Considérons un point A fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\mathcal{L}}_A}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} &= \sum_{i=1}^N \left. \frac{d\vec{\mathcal{L}}_A(M_i)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_{i=1}^N \frac{d \left(\overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) \right)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) \wedge m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) + \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}(M_i/\mathcal{R}_g) \right] = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{f_{i,res}} = \vec{\mathcal{M}}_{A,ext} \end{aligned}$$

Théorème XIV.2 – Théorème du moment cinétique

★ Par rapport à un point fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$\left. \frac{d\vec{\mathcal{L}}_A}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{A,ext}$$

★ Par rapport à un axe Δ fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$\left. \frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_{\Delta,ext}$$

Remarque : le théorème de la résultante cinétique comme celui du moment cinétique s'applique à tout système de N points matériels, et pas uniquement au cas d'un solide en rotation autour d'un axe.

IV.3 Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique

On considère toujours un ensemble de N points matériels M_i de masse m_i .

$$\begin{aligned} \left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v^2(M_i/\mathcal{R}_g) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v^2(M_i/\mathcal{R}_g) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}(M_i/\mathcal{R}_g) \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) \\ &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{f_{i,res}} \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\overrightarrow{f_{i,int}} + \overrightarrow{f_{i,ext}} \right) \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) \\ &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{f_{i,int}} \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{f_{i,ext}} \cdot \vec{v}(M_i/\mathcal{R}_g) \\ &= \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext} \end{aligned}$$

Théorème XIV.3 – Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique

★ Théorème de la puissance cinétique :

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$$

★ Théorème de l'énergie cinétique :

$$\left. \Delta E_c \right|_{\mathcal{R}_g} = W_{int} + W_{ext}$$

Remarque : on notera bien que \mathcal{P}_{int} et W_{int} ne sont a priori pas nuls.

Exemple : les muscles, ...

Propriété XIV.14 – Puissance des forces intérieures d'un solide indéformable

La puissance des forces intérieures est nulle pour un **solide indéformable** $\mathcal{P}_{int} = 0$.

Démonstration : on considère un couple de points du système (M_i, M_j) en interaction. On pose :

$$\vec{f}_{i/j} = -\vec{f}_{j/i} = f_{i/j} \vec{u}_{i/j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_i M_j} = r_{ij} \vec{u}_{i/j}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(i,j)}^{int} &= \vec{f}_{i/j} \cdot \vec{v}(M_j) + \vec{f}_{j/i} \cdot \vec{v}(M_i) && \text{puissance des forces intérieures entre } M_i \text{ et } M_j \\ &= \vec{f}_{i/j} \cdot (\vec{v}(M_j) - \vec{v}(M_i)) && \text{d'après la 3^{ème} loi de Newton} \\ &= \vec{f}_{i/j} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} = \frac{d(r_{ij} \vec{u}_{i/j})}{dt} = \frac{dr_{ij}}{dt} \vec{u}_{i/j} + r_{ij} \frac{d\vec{u}_{i/j}}{dt}$$

On a donc :

$$\mathcal{P}_{(i,j)}^{int} = \vec{f}_{i/j} \cdot \frac{dr_{ij}}{dt} \vec{u}_{i/j} + \vec{f}_{i/j} \cdot r_{ij} \frac{d\vec{u}_{i/j}}{dt} = f_{i/j} \frac{dr_{ij}}{dt} + f_{i/j} r_{ij} \left(\vec{u}_{i/j} \cdot \frac{d\vec{u}_{i/j}}{dt} \right)$$

Le deuxième terme de la dernière équation est nul. En effet :

$$\vec{u}_{i/j} \cdot \frac{d\vec{u}_{i/j}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{u}_{i/j} \cdot \vec{u}_{i/j}) = \frac{d}{dt} \|\vec{u}_{i/j}\|^2 = 0 \quad \text{soit} \quad 2 \vec{u}_{i/j} \cdot \frac{d\vec{u}_{i/j}}{dt} = 0$$

Au final, on a donc montré que :

$$\mathcal{P}_{(i,j)}^{int} = f_{i/j} \frac{dr_{ij}}{dt}$$

Dans le cas d'un solide indéformable, la distance entre deux points M_i et M_j d'un solide est constante et $\delta W_{i,j}^{int}$ est donc bien nul. En sommant ce résultat sur tous les couples de points du système, on montre que :

$$\mathcal{P}_{int} = \frac{\delta W_{int}}{dt} = 0$$

Remarque : évidemment ce résultat n'est plus vrai si le solide est déformable.

V Comportement du solide en rotation autour d'un axe fixe Δ

V.1 Équivalence des théorèmes du moment et de la puissance cinétique

On s'intéresse à un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ de moment d'inertie J_Δ .

On a montré que :

$$\mathcal{L}_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$$

soit :

$$\left. \frac{d\mathcal{L}_\Delta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = J_\Delta \ddot{\theta} \underset{\text{TMC}}{=} \mathcal{M}_{\Delta, ext}$$

Par ailleurs,

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \right) = J_\Delta \ddot{\theta} \times \dot{\theta} \underset{\text{TPC}}{=} \mathcal{P}_{ext}$$

Propriété XIV.15 – Moment et puissance pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ dans un référentiel galiléen vérifie la relation :

$$\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{M}_{\Delta, ext} \times \dot{\theta}$$

V.2 Expérience du tabouret d'inertie

Dans cette expérience, on définit le système constitué par la personne, le plateau tournant et les haltères. On note m la masse du système. On étudie le système dans le référentiel terrestre supposé galiléen en rotation autour d'un axe Δ vertical. Le système est soumis aux forces extérieures que sont le poids \vec{P} et la réaction du support de l'axe \vec{R} . La liaison est supposée idéale.

Le moment par rapport à l'axe du poids est nul car cette force est colinéaire à l'axe Δ . Quant au moment de la réaction, il est nul parce que la réaction s'applique sur l'axe lui-même.

D'après le théorème du moment cinétique, le moment cinétique du solide déformable en rotation autour de l'axe Δ est constant :

$$J_\Delta \dot{\theta} = cste$$

On note J_1 le moment d'inertie par rapport à Δ du solide lorsque la personne a les bras recroquevillés et J_2 le moment d'inertie lorsque les bras sont tendus. Par définition du moment d'inertie, on a :

$$J_1 < J_2 \quad \text{soit} \quad \frac{J_2}{J_1} > 1 \quad \text{et donc} \quad \dot{\theta}_1 = \frac{J_2}{J_1} \dot{\theta}_2 > \dot{\theta}_2$$

Déterminons à présent l'énergie cinétique du solide indéformable dans chaque configuration :

$$E_{c,1} = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{J_2}{J_1} \right)^2 \dot{\theta}_2^2 = \left(\frac{J_2}{J_1} \right) \left(\frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \right) = \frac{J_2}{J_1} E_{c,2} \quad \text{soit} \quad E_{c,1} > E_{c,2}$$

Cette variation d'énergie cinétique ne peut s'expliquer que par l'existence et le travail de forces intérieures. En effet, le travail des forces extérieures est nul car le poids et la réaction ne travaillent pas et la liaison est idéale. D'après le théorème de l'énergie cinétique :

- ★ le passage de 1 à 2 correspond à $\Delta E_c < 0$ soit $W_{int} < 0$
- ★ le passage de 2 à 1 correspond à $\Delta E_c > 0$ soit $W_{int} > 0$

V.3 Étude d'un pendule pesant

Exercice XIV.2 – Étude d'un pendule pesant

Établir l'équation du mouvement d'un pendule pesant et comparer le résultat à celui du pendule simple.
Déterminer l'intégrale première du mouvement et tracer le portrait de phase.

V.4 Étude d'un pendule de torsion

Exercice XIV.3 – Étude d'un pendule de torsion

Établir l'équation du mouvement d'un pendule de torsion et comparer le résultat à celui du pendule simple.
Déterminer l'intégrale première du mouvement et tracer le portrait de phase.
