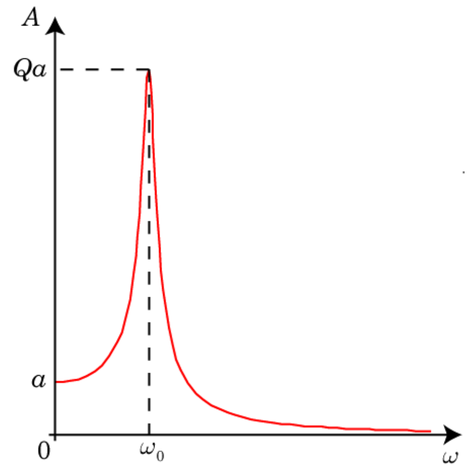
Correction partielle - TD n°9 - Oscillateurs forcés

4 Oscillations forcées d'une masse

1. Système : masse.
   Référentiel : laboratoire supposé galiléen.
   Forces :
   — Poids : $\vec{P} = mg\vec{u}_x$.
   — Frottements fluides : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.
   — Tension du ressort : $\vec{T} = -k\left(L - L_0\right)\vec{u}_x$.
   $L = L_0 + \frac{mg}{k} + x - \Delta x \Rightarrow \vec{T} = -\left[mg + k\left(x - \Delta x\right)\right]\vec{u}_x$.
   Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{T}$.
   Selon $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = mg - \lambda\dot{x} - mg - k\left(x - \Delta x\right) = -\lambda\dot{x} - kx + k\Delta x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\Delta x$.
   Avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on obtient : $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a\cos\left(\omega t\right)}$.
2. Le régime permanent est sinusoïdal de pulsation ω : $x\left(t\right) = A\left(\omega\right)\cos\left(\omega t + \varphi\right)$.
   On utilise la notation complexe : $x\left(t\right) \to \underline{x} = Ae^{j\left(\omega t + \varphi\right)}$ et $\cos\left(\omega t\right) \to e^{j\omega t}$.
   Sous forme complexe, l'équation différentielle s'écrit : $-\omega^2\underline{x} + j\omega\frac{\lambda}{m}\underline{x} + \omega_0^2\underline{x} = \omega_0^2 a e^{j\omega t}$.
   On en déduit : $\underline{x} = \frac{\omega_0^2 a e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\lambda}{m}}$.
   Comme $A\left(\omega\right) = \left|\underline{x}\right|$, on a : $A\left(\omega\right) = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\omega\frac{\lambda}{m}\right)^2}}$.
   Avec $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, on a enfin : $\boxed{A\left(\omega\right) = \dfrac{\omega_0^2 a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}}$.
3. Résonance :

   $\omega \ll \omega_0$: $A \approx a$
   $\omega \gg \omega_0$: $A \approx 0$
   $\omega = \omega_0$: $A = Qa$
   Avec $2Q^2 \gg 1$, la résonance en amplitude est atteinte pour $\omega_{\mathrm{r}} \approx \omega_0$.

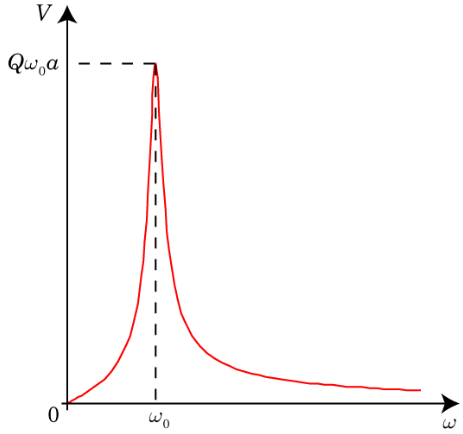


4. $v_x\left(t\right) \to \underline{v_x} = Ve^{j\left(\omega t + \psi\right)}$.

$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \underline{v_x} = j\omega \underline{x} = \frac{j\omega\omega_0^2 a e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $\frac{Q}{j\omega\omega_0}$, on obtient : $\underline{v_x} = \frac{Q\omega_0 a e^{j\omega t}}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Comme $V = |\underline{v_x}|$, on a : $\boxed{V = \frac{Q\omega_0 a}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$.



Il y a résonance en vitesse lorsque V est maximum, c'est-à-dire pour $\omega = \omega_0$.
$\omega \ll \omega_0$: $V \approx 0$
$\omega \gg \omega_0$: $V \approx 0$
$\omega = \omega_0$: $V = Q\omega_0 a$.

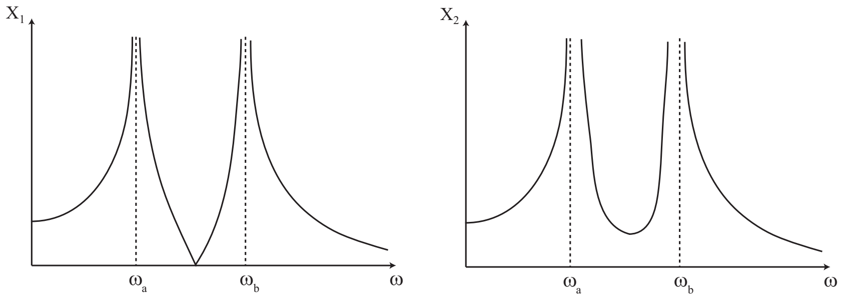
6 Oscillateurs couplés

1. On note $\ell_{1,}$, $\ell_{2,}$ et $\ell_{3,}$ les longueurs à l'équilibre des trois ressort. On montre que $\ell_{1,} = \ell_{3,} = \dfrac{k'}{2k'+k}L$ et $\ell_{1,} = \dfrac{k}{2k'+k}L$.

   On considère l'axe horizontal ayant pour origine le point d'attache du premier ressort. On pose alors : $\ell_1 = \tilde{x}_1$, $\ell_1 + \ell_2 = \tilde{x}_2$. $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ repèrent donc les positions de M_1 et M_2 au cours du temps.
   Les équations différentielles du mouvement de chacune des deux masses sur l'axe horizontal sont données par :
   $\begin{cases} m\ddot{\tilde{x}}_1 = -k\tilde{x}_1 - k'(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) + F_0\cos(\omega t) \\ m\ddot{\tilde{x}}_2 = -k\tilde{x}_2 - k'(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) \end{cases}$.
   On pose alors $\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i,} + x_i$.
   On obtient alors les deux équations différentielles : $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k'(x_1 - x_2) + F_0\cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{cases}$

2. En utilisant la notation complexe avec $\underline{x_i} = X_i e^{j\omega t}$, et en posant $\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_b = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$,
   on obtient : $\begin{cases} X_1 = \dfrac{F_0\left(\frac{\omega_a^2+\omega_b^2}{2} - \omega^2\right)}{(\omega^2-\omega_a^2)(\omega^2-\omega_b^2)} \\ X_2 = \dfrac{F_0\left(\frac{\omega_b^2-\omega_a^2}{2}\right)}{(\omega^2-\omega_a^2)(\omega^2-\omega_b^2)} \end{cases}$
   Pour obtenir ces résultats, nous avons posé $S = x_1 + x_2$ et $D = x_1 - x_2$ et en passant en complexe avant de repasser aux grandeurs réelles.

3. Allure de X_1 et X_2 en fonction de la pulsation ω de la force excitatrice :



4. On voit que les deux masses entrent en résonance lorsque la pulsation de l'excitateur est égale à l'une des deux pulsations propres ω_a et ω_b. L'amplitude des oscillateurs tend vers l'infini pour ces pulsations, ce qui n'est évidemment pas réaliste, car nous avons négligé les frottements. Si nous en tenions compte, cela amortirait les résonances, et arrondirait les courbes au niveau des résonances..
5. On voit que pour une pulsation $\omega = \sqrt{\frac{\omega_a^2+\omega_b^2}{2}}$, l'amplitude des vibrations de la première masse est nulle, et presque minimale pour la seconde. On dit alors qu'il y a anti-résonance. Ce phénomène peut être mis à profit pour atténuer ou supprimer des vibrations dans un oscillateur.

Par exemple, la tour Tapei 101, construite à Taiwan, qui culmine à 508 m, assimilable à un oscillateur, a été couplée à un pendule simple afin d'exploiter ce phénomène. En effet, une boule d'acier de 660 tonnes a été suspendue au 92e étage de la tour. Elle est dotée d'une amplitude pouvant aller jusqu'à 1,5 mètre pour amortir de 30 à 40 % les mouvements de l'édifice causés par des vents violents dus aux typhons, par un tremblement de terre ou par une collision avec un aéronef léger.