
SIGNAUX PHYSIQUES

PARTIE 4

CHARLES TUCHENDLER



MPSI 4 – LYCÉE SAINT-LOUIS

ANNÉE 2020/2021

Table des matières

CHAPITRE VII	OSCILLATEURS FORCÉS	1
Introduction		3
I Intérêt du régime sinusoïdal		3
I.1 Pourquoi est-il intéressant d'étudier des signaux périodiques ?		3
I.2 Pourquoi des signaux sinusoïdaux ?		4
I.3 Réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale		5
I.4 Réponse à une excitation sinusoïdale		6
I.5 Résolution de l'équation différentielle d'un système en régime sinusoïdal forcé (RSF)		6
I.5.a Mise en équation		7
I.5.b Solutions transitoire et permanente		7
I.5.c Recherche de la solution en régime permanent		8
II Résonance en intensité (ou en vitesse)		12
II.1 Expression de l'amplitude complexe		12
II.2 Etude du gain et du déphasage en intensité		14
III Résonance en élancement (ou en charge)		17
IV Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé (RSF)		20
IV.1 Impédance		20
IV.2 Cas des dipôles linéaires passifs usuels		21
IV.2.a Résistor		21
IV.2.b Condensateur		21
IV.2.c Bobine		22
IV.2.d Dipôle quelconque		23
IV.3 Lois de l'électrocinétique		24
IV.4 Association d'impédances		24
IV.4.a En série		24
IV.4.b En parallèle		24
IV.4.c Application : circuit RC série en RSF		25
IV.5 Ponts diviseurs		26
IV.5.a Tension		26
IV.5.b Courant		26
IV.5.c Application : circuit RC série en RSF		27
IV.6 Puissance en RSF		27
IV.6.a Cas d'un résistor idéal		29
IV.6.b Cas d'une bobine idéale		29
IV.6.c Cas d'un condensateur idéal		29
IV.6.d Cas d'un dipôle quelconque		29
IV.6.e Résonance en puissance d'un circuit RLC série		30
IV.6.f Application à l'amélioration du rendement d'une installation électrique		31

CHAPITRE VII

OSCILLATEURS FORCÉS

Sommaire

Introduction	3
I Intérêt du régime sinusoïdal	3
I.1 Pourquoi est-il intéressant d'étudier des signaux périodiques ?	3
I.2 Pourquoi des signaux sinusoïdaux ?	4
I.3 Réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale	5
I.4 Réponse à une excitation sinusoïdale	6
I.5 Résolution de l'équation différentielle d'un système en régime sinusoïdal forcé (RSF)	6
I.5.a Mise en équation	7
I.5.b Solutions transitoire et permanente	7
I.5.c Recherche de la solution en régime permanent	8
II Résonance en intensité (ou en vitesse)	12
II.1 Expression de l'amplitude complexe	12
II.2 Etude du gain et du déphasage en intensité	14
III Résonance en élongation (ou en charge)	17
IV Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé (RSF)	20
IV.1 Impédance	20
IV.2 Cas des dipôles linéaires passifs usuels	21
IV.2.a Résistor	21
IV.2.b Condensateur	21
IV.2.c Bobine	22
IV.2.d Dipôle quelconque	23
IV.3 Lois de l'électrocinétique	24
IV.4 Association d'impédances	24
IV.4.a En série	24
IV.4.b En parallèle	24
IV.4.c Application : circuit RC série en RSF	25
IV.5 Ponts diviseurs	26
IV.5.a Tension	26
IV.5.b Courant	26
IV.5.c Application : circuit RC série en RSF	27
IV.6 Puissance en RSF	27
IV.6.a Cas d'un résistor idéal	29
IV.6.b Cas d'une bobine idéale	29
IV.6.c Cas d'un condensateur idéal	29
IV.6.d Cas d'un dipôle quelconque	29
IV.6.e Résonance en puissance d'un circuit RLC série	30

IV.6.f Application à l'amélioration du rendement d'une installation électrique	31
--	----

Introduction

On a étudié les régimes transitoires au chapitre précédent. On a montré que le régime transitoire d'un système linéaire du premier ordre comme celui d'un système linéaire du deuxième ordre était caractérisé par une **constante de temps** τ s'exprimant en fonction des grandeurs des dipôles intervenant dans le circuit étudié.

Question 1 – Influence de la dépendance temporelle du signal d'excitation

Jusqu'à présent, on s'est intéressé à la réponse à un échelon de tension.

- Mais que se passerait-il si le signal émis devenait périodique et correspondait maintenant à un enchaînement périodique d'échelons montants et descendants (signal créneau) ?
- Que se passerait-il si la période de l'excitation était soit très largement plus grande que le constante de temps du système, soit du même ordre de grandeur et soit beaucoup plus petite que la constante de temps du système ?

Nous avons déjà abordé cette notion en TD et montré qu'un oscillateur soumis à une excitation périodique sera forcé d'osciller à la même fréquence que l'excitateur.

Mais si la fréquence d'oscillation sera la même, nous avons aussi montré que l'amplitude de la réponse de l'oscillateur dépendra de la fréquence d'excitation. C'est pourquoi nous étudierons dans ce chapitre **la réponse à une excitation périodique sinusoïdale**, c'est-à-dire à un signal qui ne comporte qu'une seule raie spectrale.

Objectif 1 – Lien entre excitation et réponse - Phénomène de résonance

Nous verrons dans ce chapitre que non seulement l'amplitude mais aussi le déphasage de la réponse de l'oscillateur par rapport à l'excitation dépendront de la fréquence d'excitation. Ce chapitre mettra en avant le rôle particulier des **résonances**, phénomènes très fréquents dans la vie courante et dont on cherche tantôt à limiter les effets (mécanique, électricité) et tantôt à les accentuer (LASER, RMN et IRM, musique, montre à quartz).

I Intérêt du régime sinusoïdal

I.1 Pourquoi est-il intéressant d'étudier des signaux périodiques ?

Les signaux sinusoïdaux permettent de décrire tous les phénomènes ondulatoires comme nous l'avons étudié en début d'année.

On les rencontre en mécanique, en optique, en électromagnétisme, en acoustique, en mécanique des fluides, en thermodynamique ...

Prenons l'exemple du domaine électrique. Les signaux périodiques sont :

- ★ **faciles à obtenir et moins coûteux** : alternateur (dynamo de vélos), éolienne ou turbine de barrage, ... sont plus efficaces que les machines à courant continu qui sont plus utilisées comme moteur. Dans le cas de courant alternatif, le fonctionnement repose souvent sur le phénomène d'induction électromagnétique.¹
- ★ **facile à manipuler à l'aide d'un transformateur** : un courant alternatif se manipule plus facilement grâce à l'invention du transformateur. Le transformateur permet en effet de diminuer le courant à puissance constante, en augmentant la tension. Cela permet de limiter les pertes par effet Joule lors du transport de l'électricité dans les lignes à haute tension. Cette limitation est en revanche impossible en régime continu².

1. Les valeurs de 50 Hz en Europe et 60 Hz aux Etats-Unis sont historiques et correspondent aux fréquences apportant le meilleur rendement des premières machines électriques inventées. Dès lors, elles sont restées des valeurs conventionnelles dans chaque pays.

2. Les notions de puissance seront abordées à la fin de ce chapitre.

I.2 Pourquoi des signaux sinusoïdaux ?

On rappelle deux propriétés énoncées dans les chapitres sur les signaux et les ondes.

Propriété 1 – Série de Fourier

Tout signal périodique $s(t)$ se décompose en **série de signaux sinusoïdaux**. Le spectre associé à un signal T -périodique est discret et composé :

- ★ d'une raie à **fréquence nulle**.
- ★ d'une raie **fondamentale** de pulsation $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$,
- ★ de raies **harmoniques** de pulsation $\omega_n = n \times \omega_1 = n \times \frac{2\pi}{T}$.

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)]$$

ou encore :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

où s_0 correspond à la valeur moyenne temporelle du signal

Exemple : cas d'un signal créneau d'amplitude E , de fréquence f_0 et de valeur moyenne E_0 :

$$e(t) = E_0 + E \times \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\sin((2n+1)2\pi f_0 t)}{(2n+1)} \right]$$

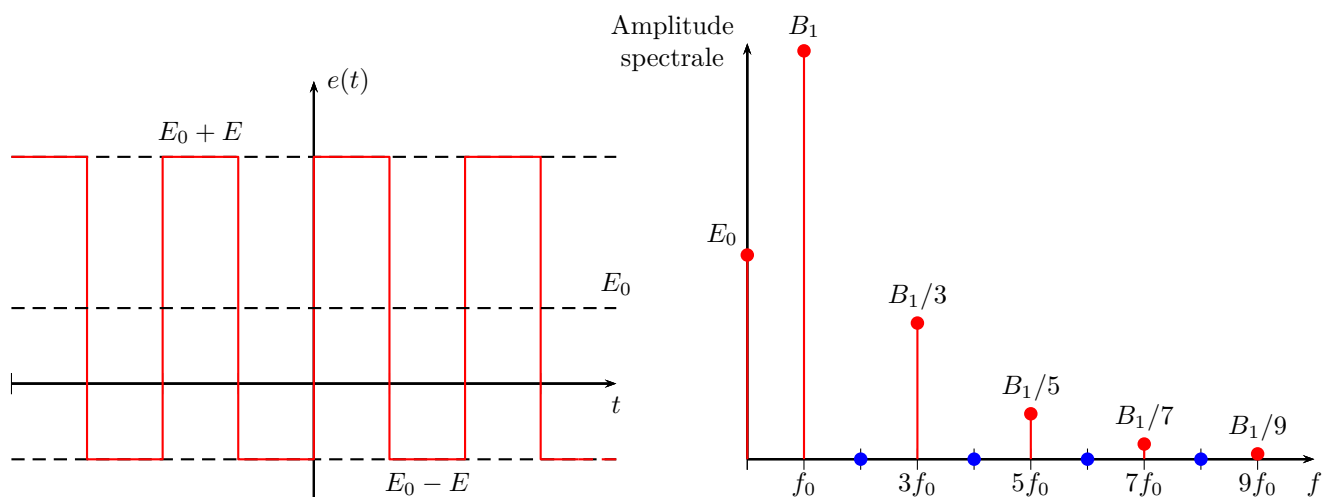


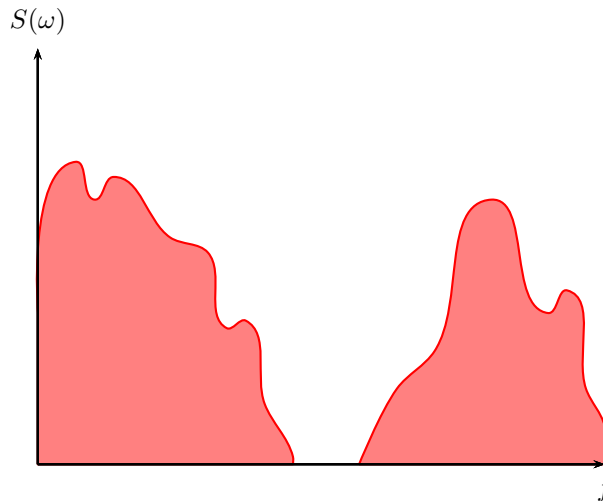
FIGURE VII.1 – Un signal créneau de valeur moyenne non nulle et les premières raies du spectre correspondant.

Propriété 2 – Généralisation : Transformée de Fourier

Un signal quelconque peut se décomposer sur une somme continue et infinie de signaux sinusoïdaux. Le spectre associé à un signal quelconque est continu et composé d'une infinité de signaux de pulsations infiniment proches.

$$s(t) = \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega$$

Exemple : spectre d'un signal $s(t)$ quelconque.



Conclusion : ces propriétés mettent en évidence le rôle crucial des signaux sinusoïdaux.

Il suffira notamment de s'intéresser à la **réponse harmonique** (signal sinusoïdal) d'un système pour déterminer la dépendance de celle-ci en fonction de la pulsation pour ensuite déduire la réponse de ce système à n'importe quel type d'excitation, périodique ou non.

I.3 Réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale**Propriété 3 – Analyse harmonique**

La réponse d'un système linéaire à une combinaison linéaire d'excitations sinusoïdale est la **combinaison linéaire des réponses** à chacune des excitations prises individuellement.

Pour un signal de la forme :

$$e(t) = E_1 \sin(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t)$$

on peut symboliser cette propriété de la manière suivante :

$$\text{Rep}[e(t)] = \text{Rep}[E_1 \sin(\omega_1 t)] + \text{Rep}[E_2 \cos(\omega_2 t)]$$

Remarque : pour un signal créneau de la forme :

$$e(t) = \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots$$

on aura donc :

$$\text{Rep}[e(t)] = \text{Rep}[\sin(\omega t)] + \frac{\text{Rep}[\sin(3\omega t)]}{3} + \frac{\text{Rep}[\sin(5\omega t)]}{5} + \dots$$

I.4 Réponse à une excitation sinusoïdale

Les équations qui décrivent un système linéaire amènent à dériver, additionner, et multiplier par des constantes les grandeurs oscillantes du système (élongation, vitesse, charge, intensité...).

On peut remarquer que ces opérations, pour une pulsation ω donnée, conservent le caractère sinusoïdal d'un signal, et conservent cette pulsation. En effet :

$$a \sin(\omega t + \varphi_a) + b \sin(\omega t + \varphi_b) = c \sin(\omega t + \varphi_c) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} [a \sin(\omega t + \varphi_a)] = a \cos(\omega t + \varphi_a) = a \sin(\omega t + \varphi_a + \frac{\pi}{2})$$

On peut donc en déduire la propriété importante suivante.

Propriété 4 – Réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale

Lorsqu'un système linéaire est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω , toutes les grandeurs oscillantes du système (élongation, vitesse...) sont également sinusoïdales, de pulsation identique ω .

Suivant les cas on aura affaire pour l'excitation à des expressions faisant intervenir soit des cosinus soit des sinus. On cherchera la réponse sous la même forme que l'excitation fournie par l'énoncé :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t \quad \longrightarrow \quad r(t) = R_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ou

$$e(t) = E_0 \sin \omega t \quad \longrightarrow \quad r(t) = R_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Si l'énoncé ne précise rien de plus que la pulsation d'excitation, on choisira la fonction arbitrairement. Quoi qu'il en soit les deux types d'excitation sont identiques à un déphasage de $\pi/2$ près.

I.5 Résolution de l'équation différentielle d'un système en régime sinusoïdal forcé (RSF)

On reprend les exemples du chapitre précédent sur les oscillateurs libres amortis en les soumettant à présent à une excitation dépendant du temps. Ainsi :

★ pour l'oscillateur mécanique : on fixe à une masselotte oscillant sans frottements solides sur un support, grâce à un ressort dont l'une des extrémités lui est attachée, une palette de masse négligeable plongeant dans un liquide exerçant sur elle une force de frottement fluide linéaire $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ dans le cadre de l'approximation des vitesses faibles - cf figure VII.2.a). L'autre extrémité du ressort subit une excitation sinusoïdale $x_A(t) = X_0 \cos \omega t$ avec $X_0 > 0$.

★ pour l'oscillateur électrique : on étudie un circuit RLC série soumis à une tension $e(t) = E_0 \cos \omega t$ avec $E_0 > 0$. Le terme d'amortissement linéaire provient du résistor R - cf figure VII.2.b).

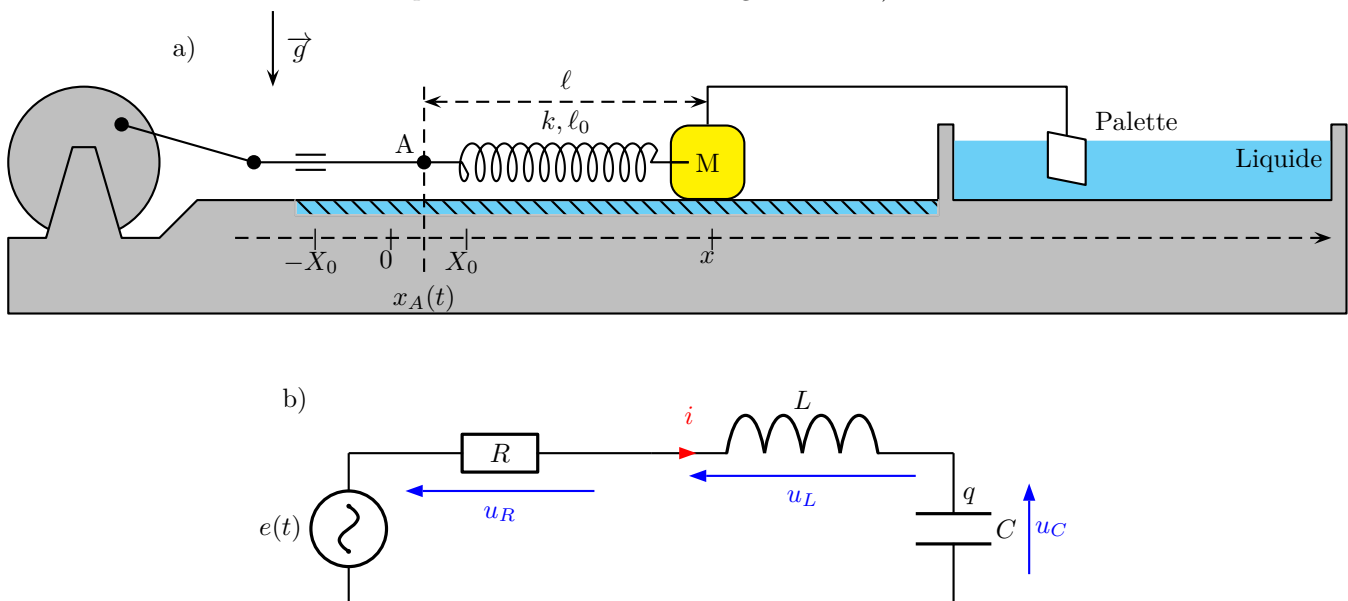


FIGURE VII.2 – Oscillateurs harmoniques mécanique et électrique amortis : a) masse reliée à un ressort et munie d'une ailette de freinage, b) circuit RLC série.

I.5.a Mise en équation

On s'intéresse à la réponse en élongation dans le premier cas et la réponse en charge aux bornes du condensateur dans le second cas.

Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
<p>Le théorème de la quantité de mouvement appliqué à la masse dans le référentiel terrestre assimilé à un référentiel galiléen, projeté sur l'axe horizontal, s'écrit :</p> $m\ddot{x} = -k(x - x_A - \ell_0) - \alpha\dot{x}$	<p>Pour $t > 0$, la loi des mailles s'écrit :</p> $e(t) = u_L + u_C + u_R$ <p>En utilisant les équations caractéristiques des composants, on obtient :</p> $e(t) = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C$
<p>En l'absence d'excitation ($x_A = 0$), la position d'équilibre du système est $x_{eq} = \ell_0$, et en utilisant à nouveau la variable $X = x - x_{eq}$, on obtient donc :</p> $\ddot{X} + \frac{\alpha}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{k}{m} X_0 \cos \omega t$	<p>D'après l'équation caractéristique d'un condensateur idéal $q = Cu_c$, on obtient :</p> $\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{LC} q_0 \cos \omega t$ <p>en posant $q_0 = CE_0$.</p>

Tableau VII.1 – Mise en équation d'un oscillateur mécanique et d'un oscillateur électrique amortis

Objectif 2 – Equation différentielle à résoudre

On aboutit dans chaque cas à une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{\text{exc}}(t) = \omega_0^2 X_0 \cos \omega t \quad (\text{VII.1})$$

Si l'on est capable de résoudre cette équation différentielle alors il est possible de déterminer la réponse de ces systèmes linéaires à tout type d'excitation périodique.

I.5.b Solutions transitoire et permanente

Propriété 5 – Nature de la solution complète

La solution complète est la somme d'une solution de l'équation avec second membre nul (homogène) correspondant à un **régime transitoire** $X_{\text{transitoire}}(t)$ et d'une solution particulière de l'équation complète, qui correspond au **régime permanent** $X_{\text{permanent}}(t)$.

$$X(t) = X_{\text{transitoire}}(t) + X_{\text{permanent}}(t)$$

Remarque : quel que soit le régime de fonctionnement (apériodique, critique ou pseudo-périodique) et quelles que soient les conditions initiales de l'oscillateur, **la solution homogène tend toujours vers une valeur nulle**. C'est pourquoi on peut parler de régime transitoire. On pourra noter que la pseudo-pulsation du régime pseudo-périodique est totalement indépendante de la pulsation d'excitation.

Le régime permanent ne correspond donc plus à des grandeurs physiques indépendantes du temps mais simplement au régime qui suit le régime transitoire.

On peut se référer à l'exercice 2 du TD sur les régimes transitoires et à la simulation Python associée pour comprendre que seule la solution particulière nous sera donc utile ici. **On supposera donc dans la suite du cours et des exercices le régime permanent établi.**

1.5.c Recherche de la solution en régime permanent

D'après la Propriété 4, on sait que la solution du régime permanent est à rechercher sous la forme :

$$X = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où seules l'amplitude réelle X_m et la phase φ sont des inconnues, car ω correspond à la pulsation de l'oscillateur forcé.

On cherche donc à déterminer X_m et φ

L'expression de $X(t)$ indique aussi que :

$$\dot{X} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

et que :

$$\ddot{X} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

En remplaçant $X(t)$ par ces expressions dans l'équation différentielle, on obtient :

$$-X_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\omega_0}{Q} X_m \omega \sin(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$$

ou encore :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) X_m \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\omega \omega_0}{Q} X_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

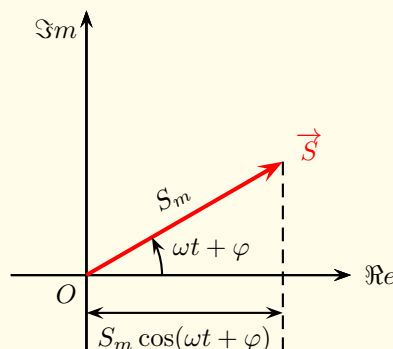
La résolution directe de l'équation différentielle n'est pas aisée. Il n'existe pas de solution formelle aisée car il est techniquement difficile de regrouper les termes en sinus et en cosinus.

Deux méthodes permettent cependant d'accéder à la solution particulière de l'équation différentielle.

□ Méthodes des vecteurs de Fresnel

Définition 1 – Rappel : Vecteur de Fresnel

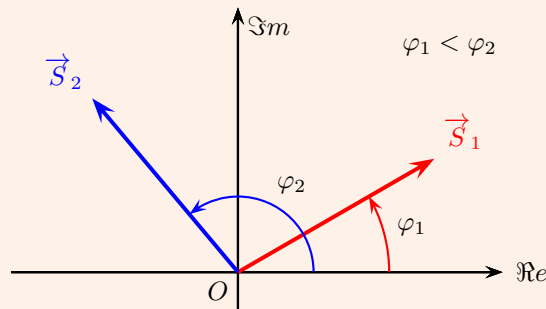
A tout signal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $S_m > 0$, on associe un **vecteur de Fresnel** noté \vec{S} , de norme S_m et faisant un angle $\omega t + \varphi$ par rapport à l'axe des abscisses du plan complexe, appelé **plan de Fresnel**.



Remarque : la projection instantanée de ce vecteur de Fresnel sur l'axe des abscisses n'est autre que le signal $s(t)$ cherché.

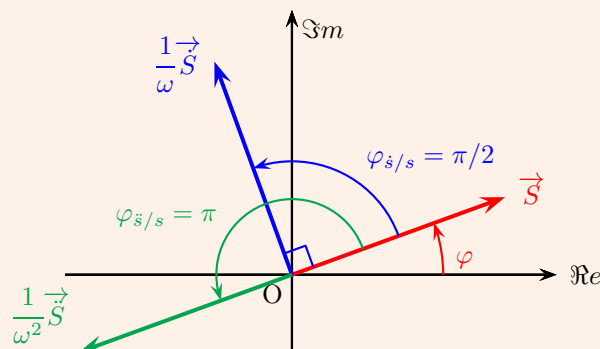
Propriété 6 – Rappel : Signaux synchrones et vecteurs de Fresnel

Deux signaux s_1 et s_2 de même fréquence tournant à la même vitesse angulaire ω dans le plan de Fresnel, ils gardent un déphasage constant au cours du temps : il suffira de représenter dans ce cas les vecteurs de Fresnel associés à instant donné $t = t_0$. Ici, pour $t = 0$:

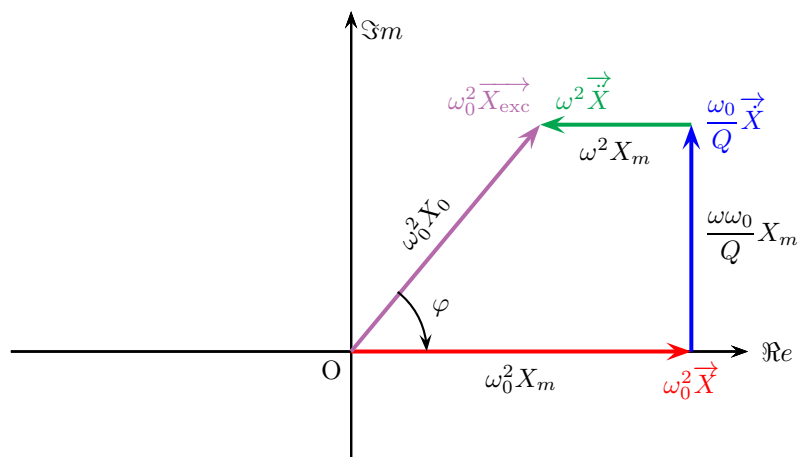

Propriété 7 – Rappel : vecteurs de Fresnel associés aux dérivées première et seconde d'un signal

Le vecteur de Fresnel associé au signal $\frac{1}{\omega}\dot{s}(t)$ est déphasé de $+\pi/2$ par rapport à celui de $s(t)$: $\dot{s}(t)$ est en quadrature de phase avance par rapport à $s(t)$.

Le vecteur de Fresnel associé au signal $\frac{1}{\omega^2}\ddot{s}(t)$ est déphasé de π par rapport à celui de $s(t)$: $\ddot{s}(t)$ est en opposition de phase par rapport à $s(t)$.



Dans le cas présent, l'équation (VII.1) équivaut au tracé suivant, en prenant $\omega t_0 + \varphi = 0$. Attention, on notera que dans ces conditions $\varphi < 0$, comprise entre 0 et $-\pi$.



Exercice 1 – Détermination de X_m et φ

- Pour déterminer X_m , on applique le théorème de Pythagore :

$$(\omega_0^2 X_0)^2 = [(\omega_0^2 - \omega^2) X_m]^2 + \left[\left(\frac{\omega \omega_0}{Q} \right) X_m \right]^2$$

soit :

$$X_m = \frac{\omega_0^2 X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q} \right)^2}}$$

- Pour déterminer le déphasage φ de la réponse par rapport à l'excitation, on applique les relations de trigonométrie :

$$\omega_0^2 X_0 \cos \varphi = (\omega_0^2 - \omega^2) X_m \quad \text{et} \quad \omega_0^2 X_0 \sin \varphi = - \left(\frac{\omega \omega_0}{Q} \right) X_m$$

On a donc :

$$\tan \varphi = - \frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

□ Méthodes des nombres complexes**Définition 2 – Notation complexe**

On associe à toute **grandeur sinusoïdale réelle** $X(t)$ une **grandeur complexe** $\underline{X}(t)$ telle que :

$$X(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X_m} e^{j\omega t}$$

Ces deux grandeurs sont reliées par :

$$\begin{aligned} X(t) &= \operatorname{Re} [\underline{X}(t)] \\ X_m &= |\underline{X_m}| \\ \varphi &= \operatorname{Arg}(\underline{X_m}) \end{aligned}$$

où X_m est l'amplitude réelle du signal et $\underline{X_m}$ son **amplitude complexe**.

Propriété 8 – Addition, dérivation et intégration en complexe

- ★ **Addition** : $\underline{X_1} + \underline{X_2} = \underline{X_1} + \underline{X_2}$.

Pour des signaux synchrones, les amplitudes complexes se somment.

- ★ **Dérivation** : $\frac{dX(t)}{dt} = j\omega \underline{X}(t)$.

Dériver un signal revient donc à le multiplier par $j\omega$.

- ★ **Intégration** : $\int X(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{X}(t)$.

Intégrer un signal temporellement revient donc à le diviser par $j\omega$.

Exercice 2 – Détermination de X_m et φ

On repart de l'équation (VII.1) que l'on passe en complexe :

$$\underline{\ddot{X}} + \frac{\omega_0}{Q} \underline{\dot{X}} + \omega_0^2 \underline{X} = \omega_0^2 \underline{X_{exc}}$$

soit d'après la Définition 2 et la Propriété 8 :

$$\underline{X_m} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega\omega_0}{Q}} X_0$$

- Pour déterminer X_m , on calcule le module de $\underline{X_m}$:

$$X_m = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} X_0$$

puisque $X_m = \sqrt{\underline{X_m}^* \times \underline{X_m}}$.

- Pour déterminer le déphasage φ de la réponse par rapport à l'excitation, on calcule l'argument de $\underline{X_m}$:

$$\varphi = \arg(\underline{X_m}) = \arg(\omega_0^2 X_0) - \arg\left((\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega\omega_0}{Q}\right) = \arg\left((\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{j\omega\omega_0}{Q}\right)$$

donc :

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

Définition 3 – Gain d'un système soumis à des oscillations forcées

Quelle que soit la méthode utilisée (Fresnel ou nombres complexes), on définit une **grandeur adimensionnée** appelée **gain** et notée G comme le rapport de l'amplitude de la réponse sur celle de l'excitation associée.

Dans le cas présent, la gain s'exprime de la manière suivante :

$$G = \frac{X_m}{X_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

Afin d'adimensionner complètement le problème, on fait souvent appel à la grandeur $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et le gain s'écrit alors dans le cas présent :

$$G = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

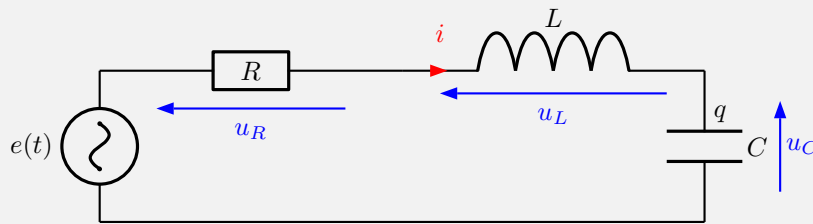
II Résonance en intensité (ou en vitesse)

II.1 Expression de l'amplitude complexe

Exercice 3 – Amplitude complexe de l'intensité

Montrer que l'amplitude complexe $\underline{I_m}$ de l'intensité circulant dans un circuit RLC série soumis à une tension $e(t) = E_0 \cos \omega t$ s'écrit :

$$\underline{I_m} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \frac{E}{R}$$



Puisque l'excitation est de la forme $e(t) = E_0 \cos \omega t$, on cherche l'intensité du courant électrique sous la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$. On doit donc établir les expressions de l'amplitude de l'intensité du courant électrique $\underline{I_m}$ et de son déphasage par rapport à l'excitation en tension appliquée φ .

D'après la loi des mailles :

$$e(t) = u_R + u_L + u_C$$

Or $i = C \frac{du_C}{dt}$, $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $u_R = Ri$. En dérivant la loi des mailles par rapport au temps, on obtient donc :

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C}$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega_0^2 C \frac{de}{dt}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Utilisons la méthode des nombres complexes. L'équation différentielle étant linéaire, on a simplement :

$$\frac{d^2\underline{i}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{i}}{dt} + \omega_0^2 \underline{i} = \omega_0^2 C \frac{d\underline{e}}{dt}$$

et on sait que $i(t) = \Re e \underline{i}$. On a alors :

$$-\omega^2 \underline{i} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{i} + \omega_0^2 \underline{i} = j\omega \omega_0 C \underline{e}$$

avec $\underline{i} = \underline{I_m} \exp(j\omega t) = I_m \exp(j\varphi) \exp(j\omega t)$ et $\underline{e} = E \exp(j\omega t)$.

L'amplitude complexe de l'intensité du courant électrique s'écrit donc :

$$\underline{I_m} = \frac{j\omega \omega_0^2 C}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega \omega_0}{Q}} E = \frac{\frac{j\omega \omega_0}{Q} \omega_0 Q C}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega \omega_0}{Q}} E$$

Exercice 3 - suite: Amplitude complexe de l'intensité

Or $\omega_0 Q C = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \times C = \frac{1}{R}$. Ainsi :

$$\underline{I_m} = \frac{\frac{j\omega\omega_0}{Q}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega\omega_0}{Q}} \frac{E}{R} = \frac{1}{\frac{Q}{j\omega\omega_0}(\omega_0^2 - \omega^2) + 1} \frac{E}{R}$$

Soit finalement :

$$\underline{I_m} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} I_0 \quad \text{avec} \quad I_0 = \frac{E}{R}$$

L'amplitude I_m et le déphasage s'écrivent donc :

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} I_0 \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

avec $\cos \varphi > 0$ et donc $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Propriété 9 – Amplitude et phase fonction de la pulsation d'excitation

L'amplitude de l'intensité du courant comme son **déphasage** par rapport à la tension d'excitation **dépendent de la pulsation d'excitation**.

Propriété 10 – Adimensionnement et grandeur caractéristique

L'amplitude de l'intensité du courant comme son déphasage peuvent être étudiés au travers de deux grandeurs caractéristiques du système :

- une **pulsation caractéristique** ω_c telle que ici : $\omega_c = \omega_0$
- une **amplitude caractéristique** I_c telle que ici : $I_c = I_0 = \frac{E}{R}$.

Il est donc particulièrement intéressant d'étudier par la suite la grandeur **adimensionnée** $\frac{I_m}{I_0}$ appelée **gain** en fonction de la grandeur **adimensionnée** $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ appelée **pulsation réduite**.

II.2 Etude du gain et du déphasage en intensité

Intéressons nous à la grandeur adimensionnée³ $G = \frac{I_m}{I_0}$.

Méthode 1 – Etude asymptotique préliminaire d'une grandeur dépendant de la pulsation d'excitation

Lorsqu'on étudie une grandeur dépendant de la pulsation, on commencera toujours par une étude asymptotique de son gain et de sa phase s'intéressant aux cas particuliers suivants :

- $x \ll 1$
- $x = 1$
- $x \gg 1$

Exercice 4 – Etude asymptotique du gain et de la phase en intensité

On a :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = -Q \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

- Pour $x \ll 1$:
 $G(x) \sim \frac{x}{Q} \rightarrow 0$ et $\tan \varphi \sim \frac{Q}{x}$ c'est-à-dire $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
- Pour $x \gg 1$:
 $G(x) \sim \frac{1}{Qx} \rightarrow 0$, ce qui signifie d'après le résultat précédent que le gain passe par un maximum. Et
 $\tan \varphi = -xQ$ c'est-à-dire $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
- Pour $x = 1$:
 $G(1) = 1$ et $\tan \varphi = 0$ c'est-à-dire $\varphi = 0$.

Méthode 2 – Recherche d'extrema et de résonance

Après avoir mené l'étude asymptotique, on cherchera à déterminer les pulsations pour lesquelles le gain associée à la grandeur étudiée passent par un minimum G_{\min} ou un maximum G_{\max} .

*Dans le cas d'un maximum global pour $\omega > 0$, on parlera de **résonance** pour $\omega_{\text{rés}}$ telle que :*

$$G(\omega_{\text{rés}}) = G_{\max}$$

Exercice 5 – Etude de la résonance en intensité

On rappelle que :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

3. On peut remarquer qu'on aurait pu retrouver simplement l'expression de I_0 si on s'était intéressé à la réponse en tension aux bornes de la résistance.

Exercice 5 - suite: Etude de la résonance en intensité

G est donc maximal lorsque $\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$ est minimal. Ceci se produit pour $x = 1$. On a donc :

$$\omega_{\text{rés}} = \omega_0$$

Méthode 3 – Bande passante de la résonance en intensité

Connaissant la valeur de G_{max} , on déterminera enfin la plage de pulsations sur laquelle le gain est supérieur ou égal au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$. On recherchera donc ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ telles que :

$$G(\omega_1 \text{ ou } 2) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Exercice 6 – Etude de la bande-passante en intensité

Si on cherche $\omega_{1,2}$ telles que $G(\omega_{1,2}) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$ alors x est tel que :

$$1 = Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{Q^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \pm \frac{1}{Q} = x - \frac{1}{x}$$

On a donc deux polynômes à étudier :

$$x^2 + \frac{x}{Q} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Calculons les discriminants :

$$\Delta_1 = \frac{1}{Q^2} + 4 = \Delta_2$$

Les solutions physiquement acceptables ($x > 0$) sont donc :

$$x_{1,2} = \frac{\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

On peut maintenant définir la largeur de la bande-passante :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \quad \text{soit} \quad \Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

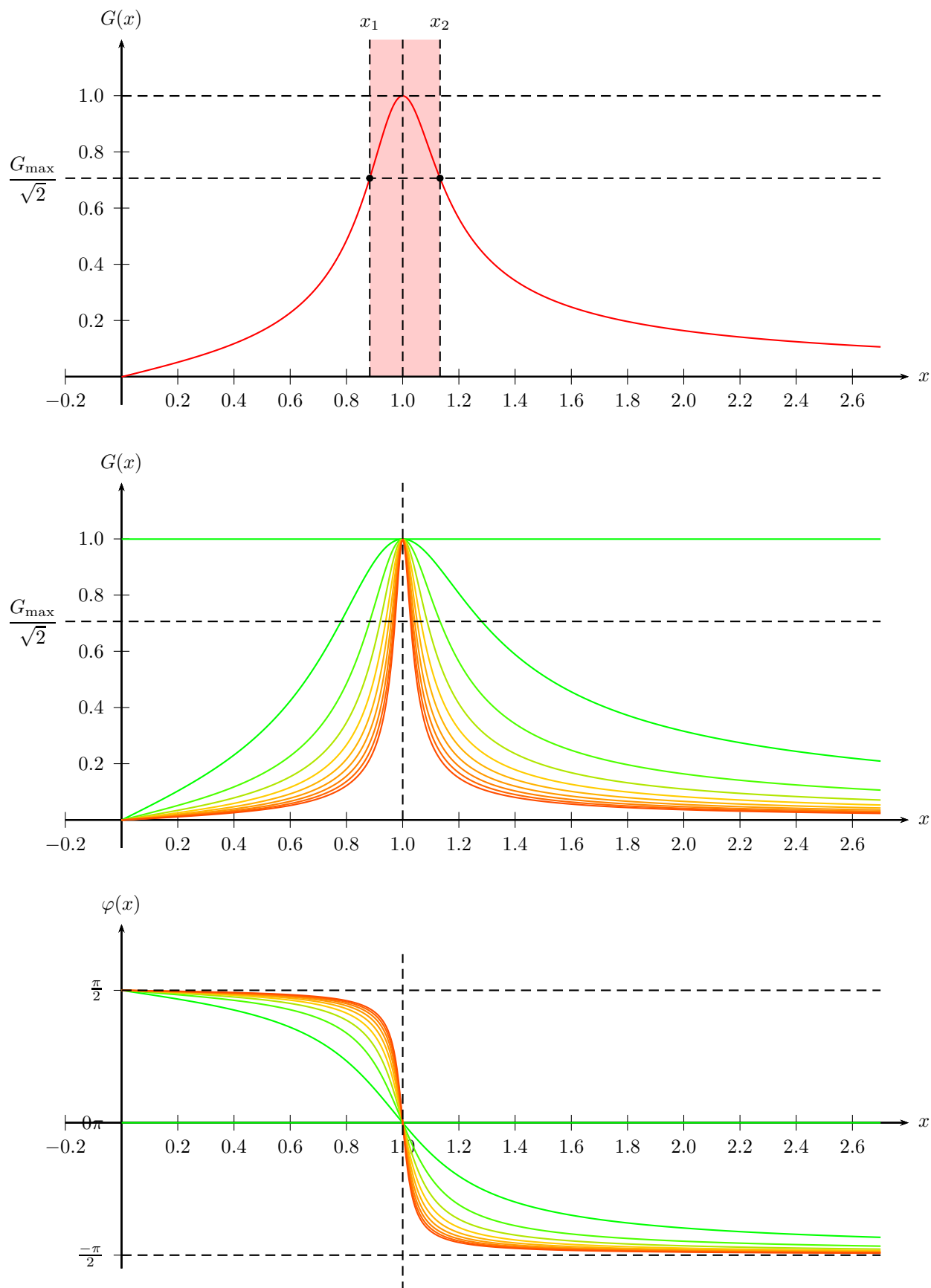


FIGURE VII.3 – Bande-passante à 3 dB pour $Q = 4$ (en haut) de l'intensité circulant dans un circuit RLC série. Résonance (au milieu) et évolution du déphasage (en bas) de l'intensité pour des valeurs du facteur de qualité Q variant de 0 à 20 par pas de 2.

III Résonance en élongation (ou en charge)

On reprend l'exemple du système masse-ressort dont l'évolution de l'élongation est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{\text{exc}}(t) = \omega_0^2 X_0 \cos \omega t$$

à partir de laquelle on a montré que :

$$G = \frac{X_m}{X_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad \text{et que :} \quad \tan \varphi = -\frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{avec} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

□ Etude asymptotique

Pour $x \ll 1$:

$x^2 \ll 1$ donc $(1-x^2)^2 \sim 1$ et donc $G \sim 1$ soit $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

De plus $\tan \varphi \sim \frac{x}{Q} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Or pour $x < 1$, $\cos \varphi > 0$ donc $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Pour $x \gg 1$:

$x^2 \gg 1$ donc $(1-x^2)^2 \sim x^4$ et donc $G \sim \frac{1}{x}$ soit $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

De plus $\tan \varphi \sim \frac{1}{xQ} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Or pour $x > 1$, $\cos \varphi < 0$ donc $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\pi$.

Pour $x = 1$:

$x^2 = 1$ donc $(1-x^2)^2 = 0$ et donc $G(1) = Q$.

De plus $\tan \varphi \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$ et $\tan \varphi \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$ donc $\varphi \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{\pi}{2}$.

□ Recherche d'extrema et résonance

Le gain est maximal lorsque la fonction $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$ est minimale et réciproquement le gain est minimal lorsque $f(x)$ est maximal. Calculons la dérivée de $f(x)$:

$$f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1-x^2) + \frac{2x}{Q^2}$$

La dérivée $f'(x)$ s'annule pour $x = 0$. Elle peut aussi s'annuler pour :

$$-2(1-x^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \iff x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

soit :

$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si et seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

qui correspond alors à un maximum de $G(x)$.

On en déduit alors que :

$$\omega_{\text{rés}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{et} \quad G_{\text{rés}}(Q) = G(\omega_{\text{rés}}) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Remarques :

★ On note que $\omega_{\text{rés}} \xrightarrow{Q \rightarrow +\infty} \omega_0$.

★ On vérifie en outre que le gain à résonance est supérieur à 1 pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$G_{\text{rés}}(Q) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}} = \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} \right)^{-1/2}$$

$$G'_{\text{rés}}(Q) = -\frac{1}{2}(-2Q^{-3} + Q^{-5}) \times \underbrace{\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} \right)^{-3/2}}_{>0 \text{ pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2Q^5} \underbrace{(-2Q^2 + 1)}_{<0 \text{ pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \underbrace{\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} \right)^{-3/2}}_{>0 \text{ pour } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$G_{\text{rés}}(Q)$ est donc une fonction croissante sur le domaine de définition $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right]$. Ainsi :

$$G_{\text{rés}}(Q) \geq G_{\text{rés}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

□ Etude de la bande-passante à 3 dB

Exercice 7 – Bande-passante de la résonance en élongation

Déterminer les pulsations telles que $G(\omega) \geq \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$.

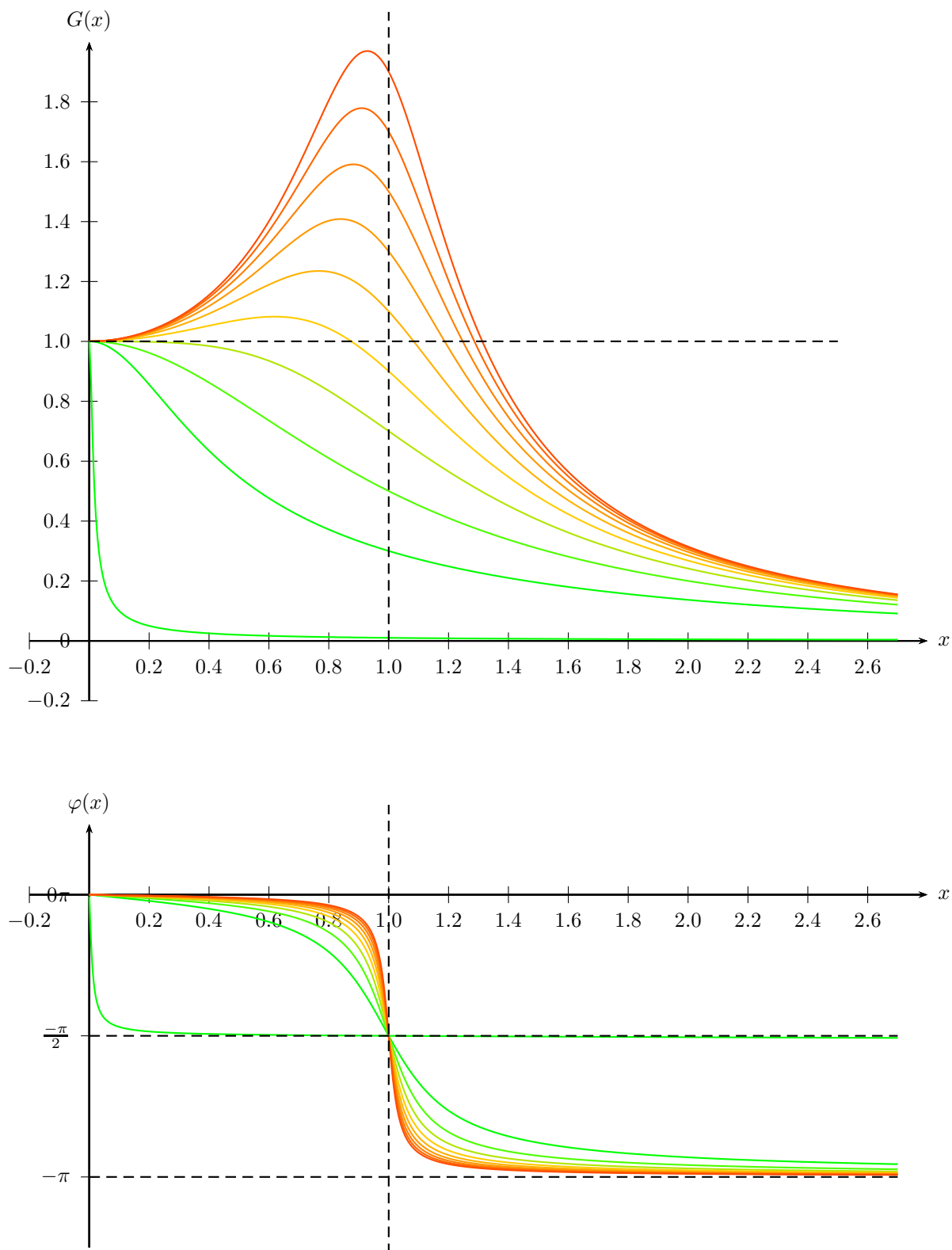


FIGURE VII.4 – Résonance (en haut) et évolution du déphasage (en bas) de l'intensité dans un circuit RLC série pour des valeurs du facteur de qualité Q variant de 0 à 20.

□ Bilan énergétique

Question 2 – Y a-t-il contradiction entre résonance et conservation de l'énergie ?

Est-il normal qu'on puisse obtenir un gain supérieur à 1 à la résonance ? La réponse à oui.

En effet, à chaque période, l'excitateur apporte de l'énergie au système supérieure aux pertes subies par ce système au cours d'une période tant que la résonance n'est pas atteinte.

IV Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé (RSF)

IV.1 Impédance

Définition 4 – Impédance complexe

Pour un dipôle D étudié en régime sinusoïdal traversé par un courant d'intensité i et soumis à une différence de potentiel u , on définit **l'impédance complexe** \underline{Z} comme :

$$\underline{Z} = \frac{u}{i}$$

On notera par la suite :

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \end{aligned}$$

On aura donc en notation complexe :

$$\begin{aligned} \underline{i} &= \underline{I_m} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{I_m} = I_m e^{j\varphi_i} \\ \underline{u} &= \underline{U_m} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U_m} = U_m e^{j\varphi_u} \end{aligned}$$

On peut donc réécrire \underline{Z} :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

et ainsi :

$$|\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} = Z_m$$

et

$$\arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i = \varphi$$

où φ est donc maintenant défini comme le déphasage de la tension u par rapport à l'intensité i relativement au dipôle D étudié.

Remarque : on définit aussi l'inverse de l'impédance appelée **admittance complexe** \underline{Y} telle que :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{i}{u}$$

IV.2 Cas des dipôles linéaires passifs usuels

IV.2.a Résistor

Définition 5 – Impédance d'un résistor

D'après la loi d'Ohm $u = Ri$ et donc en complexe $\underline{u} = R\underline{i}$.

Ainsi :

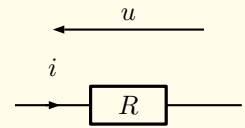
$$\underline{Z}_R = R$$

et donc :

$$Z_m = R$$

et

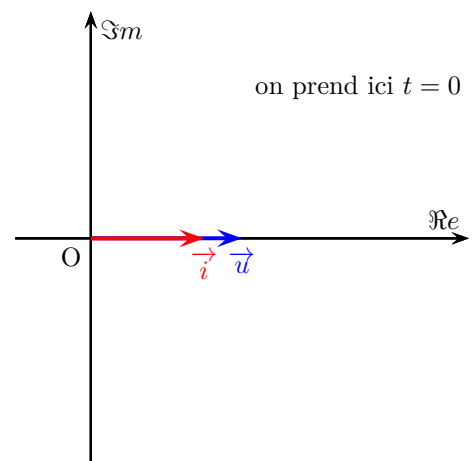
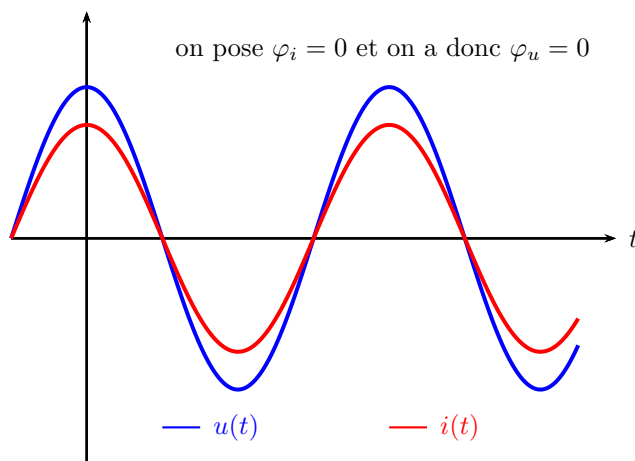
$$\varphi_R = 0$$



Remarque : l'impédance est donc homogène à une résistance et s'exprime en Ω .

Propriété 11 – Impédance d'un résistor

- ★ \underline{Z}_R est une grandeur réelle.
- ★ u et i sont en phase dans le cas d'un résistor.
- ★ \underline{Z}_R est indépendant de la pulsation ω .



IV.2.b Condensateur

Définition 6 – Impédance d'un condensateur

La loi caractéristique $i = C \frac{du}{dt}$ et donc en complexe $\underline{i} = jC\omega\underline{u}$.

Ainsi :

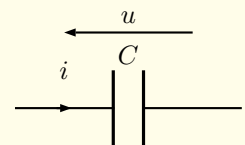
$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

et donc

$$Z_m = \frac{1}{C\omega}$$

et

$$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$$



Propriété 12 – Impédance d'un condensateur

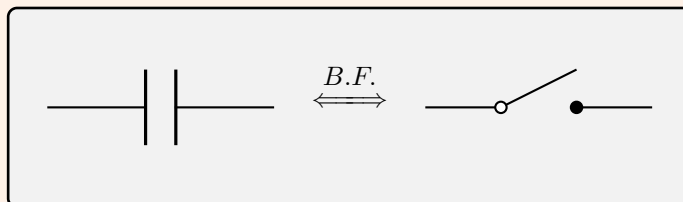
- ★ \underline{Z}_C est une grandeur imaginaire.
- ★ u est en quadrature de phase retard par rapport à i dans le cas d'un condensateur.

Propriété 12 - suite: Impédance d'un condensateur

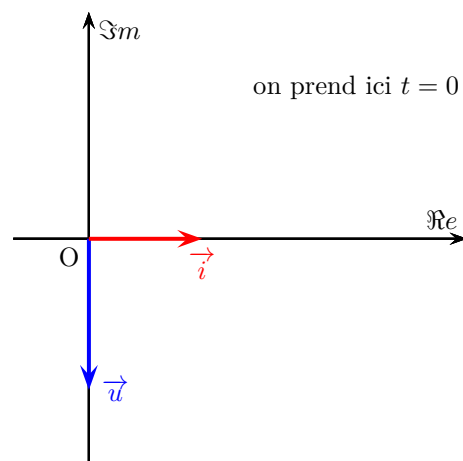
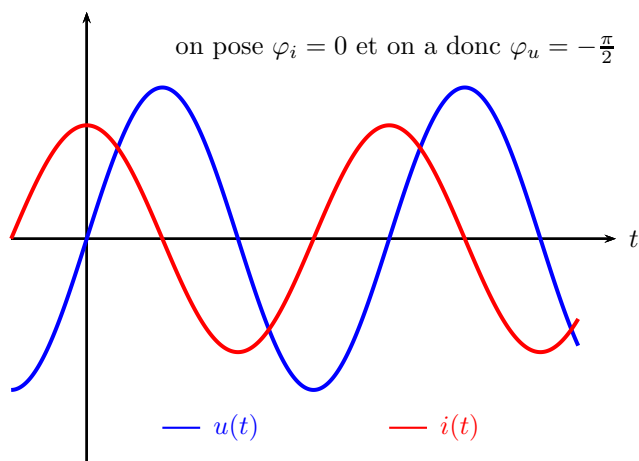
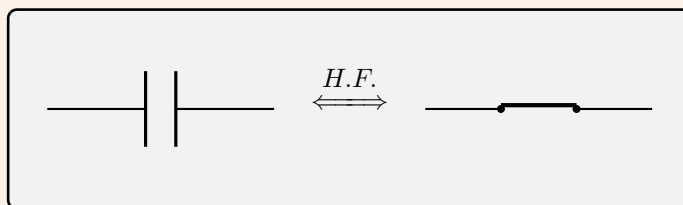
★ \underline{Z}_C dépend de la pulsation ω :

- Pour $\omega \rightarrow 0$: $|Z_C| = \frac{U_{mC}}{I_{mC}} = \frac{1}{C\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} +\infty$.
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$: $|Z_C| = \frac{U_{mC}}{I_{mC}} = \frac{1}{C\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi :



et :



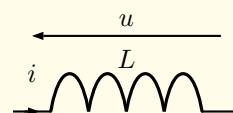
IV.2.c Bobine

Définition 7 – Impédance d'une bobine

La loi caractéristique $u = L \frac{di}{dt}$ et donc en complexe $\underline{u} = jL\omega \underline{i}$.

Ainsi :

$$\underline{Z}_L = jL\omega \quad \text{et donc} \quad Z_m = L\omega \quad \text{et} \quad \varphi_L = \frac{\pi}{2}$$

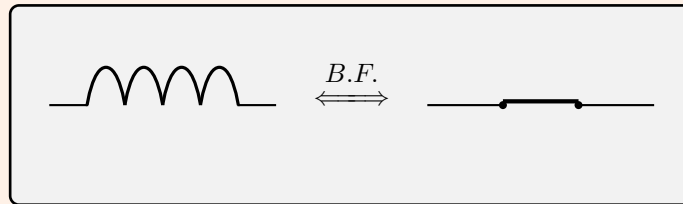


Propriété 13 – Impédance d'une bobine

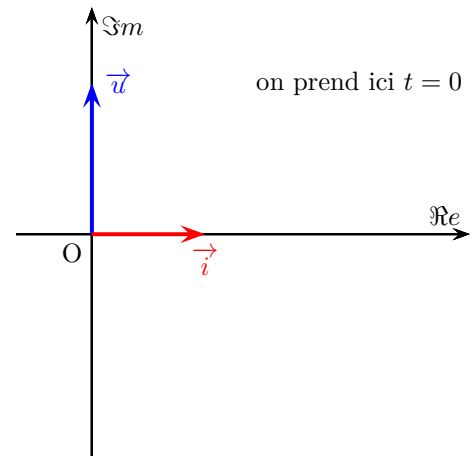
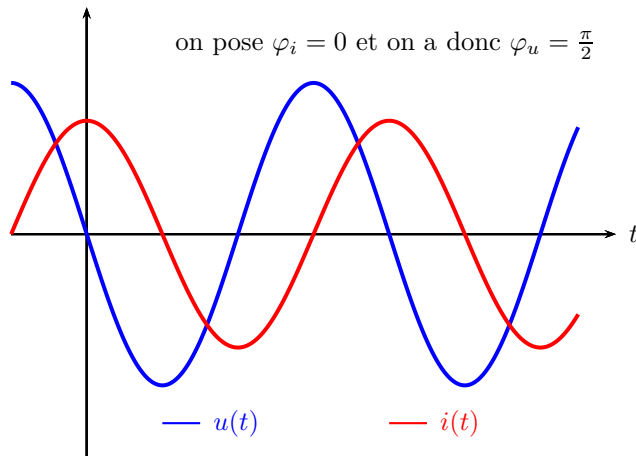
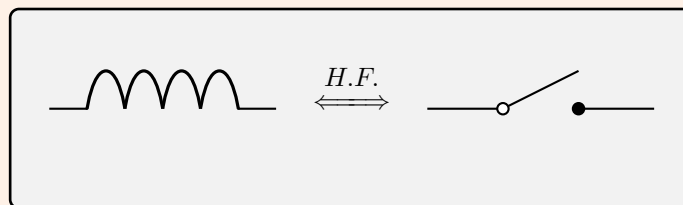
- ★ \underline{Z}_L est une grandeur imaginaire.
- ★ u est en quadrature de phase avance par rapport à i dans le cas d'un condensateur.
- ★ \underline{Z}_L dépend de la pulsation ω :

- Pour $\omega \rightarrow 0$: $|Z_L| = \frac{U_{mL}}{I_{mL}} = L\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$.
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$: $|Z_L| = \frac{U_{mL}}{I_{mL}} = L\omega \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi :



et :



IV.2.d Dipôle quelconque

Dans le cas d'un dipôle quelconque : $\underline{Z} = a + jb$ donc $|\underline{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Définition 8 – Caractère inductif ou capacitif

On dira que le dipôle D présente un caractère :

- inductif si $b > 0$ (car pour une bobine $a = 0$ et $b = L\omega > 0$).
- capacitif si $b < 0$ (car pour un condensateur $a = 0$ et $b = -\frac{1}{C\omega} < 0$).

IV.3 Lois de l'électrocinétique

Propriété 14 – Lois de Kirchhoff en RSF

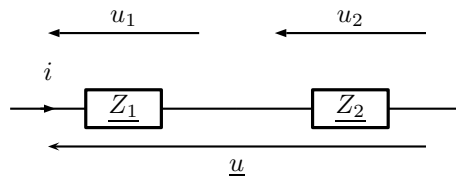
Les lois de Kirchhoff ont été énoncées dans le cas général et s'appliquent donc en RSF.

On pourra donc appliquer ces lois en RSF et utiliser la notation complexe dans celles-ci.

IV.4 Association d'impédances

IV.4.a En série

Soit deux dipôles D_1 et D_2 , placés en série, d'impédances respectives \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 et étudiés en RSF.



La loi d'additivité des tensions impose que $\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2$.

Or par définition $\underline{u}_1 = \underline{Z}_1 \underline{i}$ et $\underline{u}_2 = \underline{Z}_2 \underline{i}$.

On a donc :

$$\underline{u} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{i}$$

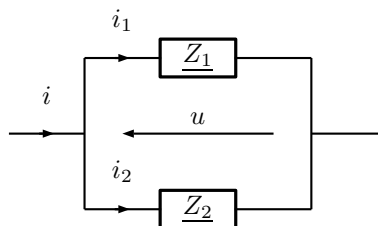
Propriété 15 – Association en série de dipôles

Lorsque N d'impédances respectives $\underline{Z}_{k \in \{1, \dots, N\}}$ sont placés en série, ils sont équivalents à un unique dipôle d'impédance \underline{Z}_{eq_S} telle que :

$$\underline{Z}_{eq_S} = \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k$$

IV.4.b En parallèle

Soit deux dipôles D_1 et D_2 , placés en parallèle, d'impédances respectives \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 et étudiés en RSF.



Par définition $\underline{u}_1 = \underline{Z}_1 \underline{i}_1$ et $\underline{u}_2 = \underline{Z}_2 \underline{i}_2$.

La loi des noeuds impose que $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$.

On a donc :

$$\underline{i} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right) \underline{u}$$

soit :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}$$

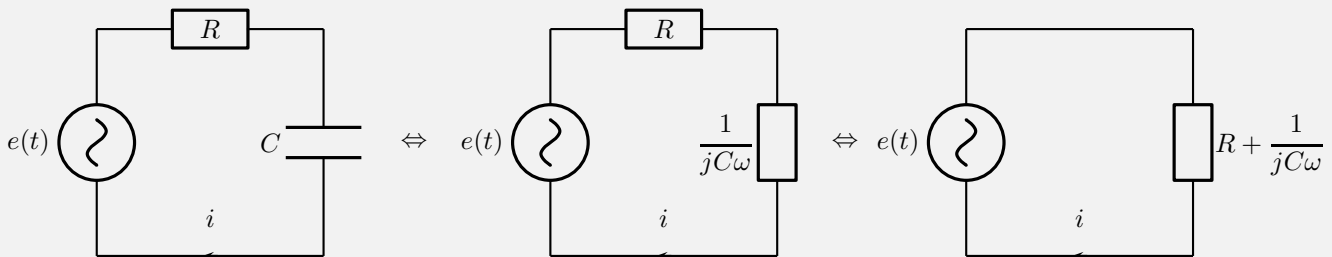
Propriété 16 – Association en série de dipôles

Lorsque N d'impédances respectives $\underline{Z}_{k \in \{1, \dots, N\}}$ sont placés en parallèle, ils sont équivalents à un unique dipôle d'impédance \underline{Z}_{eq_P} telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq_P}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

IV.4.c Application : circuit RC série en RSF**Exercice 8 – Gain en intensité dans un circuit RC série**

Etablir l'expression du gain en intensité pour un circuit RC série soumis à une tension excitatrice sinusoïdale d'amplitude E_0 et de phase initiale nulle.



Appliquons la loi des mailles en notation complexe sur le circuit équivalent :

$$\underline{e} = \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i} \quad \text{soit} \quad \underline{i} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e}$$

On pose :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t \quad \text{et} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_{i/e})$$

Avec ces notations, on obtient :

$$\underline{I}_m = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} E_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} \frac{E_0}{R} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} I_0$$

et donc :

$$G(\omega) = \frac{I_m}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

où :

$$x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

et

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

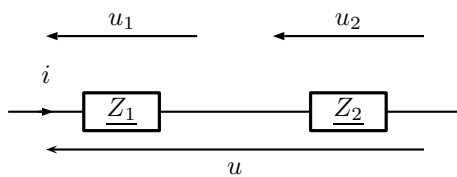
Remarque : on peut aisément retrouver l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ à partir de la notation complexe :

$$\left(R + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i} = \underline{e} \iff R\underline{i} + \frac{\underline{i}}{jC\omega} = \underline{e} \iff \frac{d}{dt} R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

IV.5 Ponts diviseurs

IV.5.a Tension

Soit deux dipôles D_1 et D_2 , placés en série, d'impédances respectives \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 et étudiés en RSF.



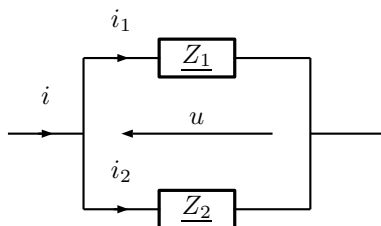
Propriété 17 – Pont diviseur de tension

Lorsque deux dipôles placés en série sont soumis à la tension \underline{u} , on peut directement donner la tension aux bornes de l'un ou l'autre des deux dipôles en reconnaissant un pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u} \quad \text{et} \quad \underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u}$$

IV.5.b Courant

Soit deux dipôles D_1 et D_2 , placés en parallèle, d'impédances respectives \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 et étudiés en RSF.



Propriété 18 – Pont diviseur de courant

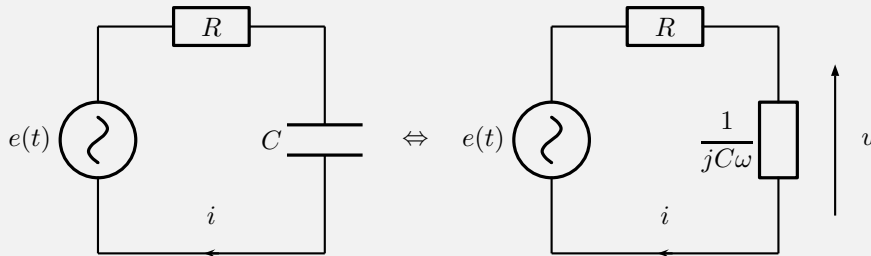
Lorsque l'association en parallèle de deux dipôles est soumise au passage d'un courant d'intensité \underline{i} , on peut directement donner l'intensité du courant circulant dans l'un ou l'autre des deux dipôles en reconnaissant un pont diviseur de courant :

$$\underline{i}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{i} \quad \text{et} \quad \underline{i}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{i}$$

IV.5.c Application : circuit RC série en RSF

Exercice 9 – Tension aux bornes du condensateur d'un circuit RC série

Etablir l'expression de l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RC série soumis à une tension excitatrice sinusoïdale d'amplitude E_0 et de phase initiale nulle.



On reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\frac{U_m}{E_0} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

IV.6 Puissance en RSF

Définition 9 – Puissance instantanée

La puissance instantanée reçue $p(t)$ par un dipôle étudié en convention récepteur s'écrit :

$$p(t) = u(t) \times i(t)$$

En RSF, on écrit à nouveau :

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} p(t) &= U_m \times I_m \times \cos(\omega t + \varphi_u) \cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= \frac{1}{2} \times U_m \times I_m [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(\varphi_u + \varphi_i + 2\omega t)] \end{aligned}$$

Cette puissance est de valeur moyenne a priori non nulle de période :

$$T' = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$$

Déterminons cette valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \langle p(t) \rangle_{T'} &= \frac{1}{T'} \int_t^{t+T'} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(t) dt = \langle p(t) \rangle_T \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} \times U_m \times I_m [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(\varphi_u + \varphi_i + 2\omega t)] dt \\ &= \frac{U_m \times I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \frac{U_m \times I_m}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) dt \end{aligned}$$

$$\langle p(t) \rangle_{T'} = \frac{U_m \times I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) + \frac{U_m \times I_m}{2T} \left[\frac{\sin(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}{2\omega} \right]_0^T$$

Le second terme du membre de droite est nul et on a donc :

$$\langle p(t) \rangle_{T'} = \frac{U_m \times I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{U_m \times I_m}{2} \cos(\varphi)$$

Définition 10 – Valeur efficace

La valeur efficace d'un signal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$ s'écrit comme :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} s^2(t) dt}$$

Exemple – Puissance moyenne reçue par un résistor idéal

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} Ri^2(t) dt = R \times \underbrace{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} i^2(t) dt}_{I_{\text{eff}}^2} = RI_{\text{eff}}^2$$

Remarque : ainsi l'énergie reçue par un résistor idéal en RSF est identique à celle que recevrait ce même résistor en RP, s'il était traversé par un courant constant d'intensité I_{eff} .

Propriété 19 – Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Pour $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$:

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}} \quad \text{car} \quad \langle \cos^2(\omega t + \varphi_s) \rangle = \frac{1}{2}$$

Au final, la valeur moyenne de la puissance s'exprime simplement en fonction des valeurs efficaces de la tension et du courant ainsi que d'un facteur de puissance :

$$\langle p(t) \rangle_{T'} = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \times \cos(\varphi)$$

Définition 11 – Facteur de puissance

On appelle **facteur de puissance** le facteur $\cos \varphi = \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \cos(\arg(\underline{Z}))$ apparaissant dans l'expression de la puissance moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal forcé.

Dans les parties suivantes, on notera \mathcal{P} la valeur moyenne de la puissance reçue par un dipôle.

IV.6.a Cas d'un résistor idéal

Dans le cas d'un résistor idéal, $\varphi = 0$ et donc $\cos \varphi = 1$. Ainsi :

$$\mathcal{P}_R = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}}$$

Or :

$$|Z| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = R$$

Finalement :

$$\mathcal{P}_R = R I_{\text{eff}}^2$$

Propriété 20 – Puissance instantanée reçue par un résistor idéal

Dans le cas du résistor idéal, la puissance instantanée $p(t)$ est positive à tout instant. Un résistor idéal fonctionne donc à tout instant en mode récepteur.

IV.6.b Cas d'une bobine idéale

Dans le cas d'une bobine idéale, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et donc $\cos \varphi = 0$. Ainsi $\mathcal{P}_L = 0$.

Propriété 21 – Puissance moyenne reçue par une bobine idéale

En moyenne, une bobine idéale ne consomme pas d'énergie.

IV.6.c Cas d'un condensateur idéal

Dans le cas d'un condensateur idéal, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et donc $\cos \varphi = 0$. Ainsi $\mathcal{P}_C = 0$.

Propriété 22 – Puissance moyenne reçue par une bobine idéale

En moyenne, une bobine idéale ne consomme pas d'énergie.

IV.6.d Cas d'un dipôle quelconque

On rappelle que : $Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} e^{j\varphi}$ et donc $\Re(Z) = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \cos \varphi$. Finalement $\mathcal{P}_D = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \times \cos(\varphi) = \Re(Z) I_{\text{eff}}^2$.

Propriété 23 – Puissance moyenne reçue par dipôle quelconque

Pour un dipôle quelconque :

$$\mathcal{P}_D = \Re(Z) I_{\text{eff}}^2$$

On montre aussi que :

$$\mathcal{P}_D = \Re(Y) U_{\text{eff}}^2$$

IV.6.e Résonance en puissance d'un circuit RLC série

Revenons à présent sur le phénomène de résonance.

Question 3 – Résonance en puissance ?

Existe-t-il une résonance en puissance et si oui, quelle est sa bande-passante ?

L'impédance totale du circuit RLC s'écrit :

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Donc, la puissance moyenne s'écrit :

$$\mathcal{P}_D = \Re(\underline{Z}_{\text{eq}}) I_{\text{eff}}^2 = R I_{\text{eff}}^2 = R \frac{I_m^2}{2}$$

Propriété 24 – Puissance consommée dans un RLC série

Toute l'énergie dissipée dans un circuit RLC série est dissipée au travers de la résistance. La bobine et le condensateur présente un bilan énergétique nul.

Par ailleurs, d'après l'étude de la résonance en courant, ceci donne :

$$\mathcal{P}_D = \frac{R}{2} \frac{1}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2} \left(\frac{E}{R} \right)^2$$

On a donc :

$$\mathcal{P}_{\text{max}} = \frac{E^2}{2R}$$

On peut remarquer que $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{\text{max}}}{2}$ est obtenue pour $x_{1,2}$ correspondant à la bande-passante en intensité puisque :

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}_{\text{max}}}{2} \iff Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1$$

Propriété 25 – Bande-passante en puissance

Ainsi, la bande-passante est une caractéristique d'un phénomène résonant traduisant la *plage de fréquences sur laquelle au moins la moitié de la puissance maximale pouvant être reçue est effectivement récupérée*.

IV.6.f Application à l'amélioration du rendement d'une installation électrique

Un générateur délivre une puissance moyenne \mathcal{P}_G . Le récepteur (installation électrique) fonctionne avec une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220\text{V}$ et consomme une puissance moyenne \mathcal{P}_u avec un facteur de puissance caractérisé par $\cos(\varphi)$.

En notant \mathcal{P}_L est la puissance moyenne perdue en ligne (pendant le transport), on obtient alors :

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_u$$

Le rendement de cette installation vaut :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_G} = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_u} = \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{P}_L}{\mathcal{P}_u}}$$

Afin d'avoir le meilleur rendement possible, il faut donc minimiser le rapport $\frac{\mathcal{P}_L}{\mathcal{P}_u}$. Pour une consommation \mathcal{P}_u fixée (fonctionnement d'un moteur, d'un radiateur...), EDF a donc intérêt à minimiser la puissance $\mathcal{P}_L = R_L I_{\text{eff}}^2$ perdue dans les lignes pour obtenir un rendement le plus élevé possible.

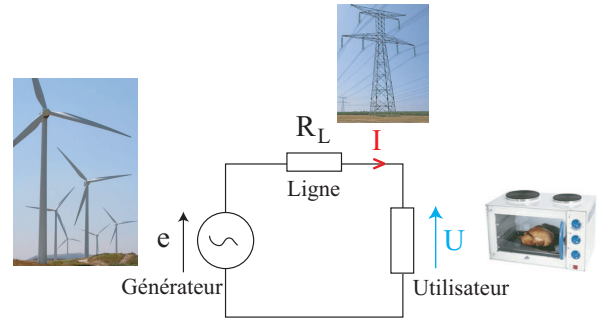
Deux méthodes peuvent être adoptées :

- diminuer R_L (augmenter la section des câbles en cuivre, mais cela est coûteux),
- diminuer I_{eff} . Or

$$I_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{P}_u}{U_{\text{eff}} \cos \varphi}$$

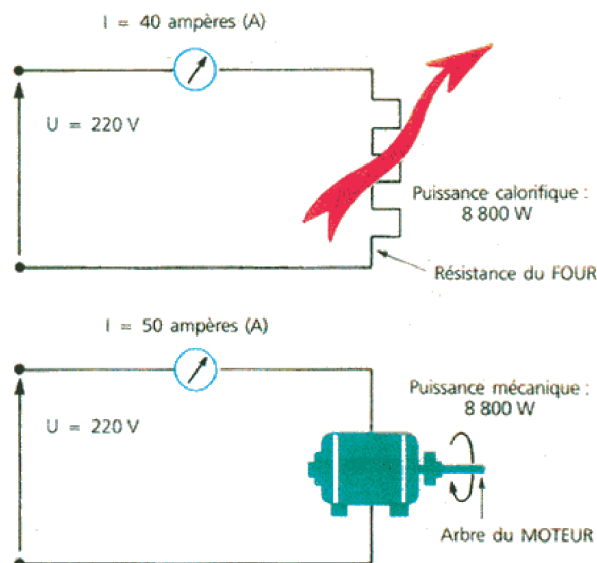
donc à \mathcal{P}_u et U_{eff} fixés, diminuer I_{eff} revient à augmenter $\cos \varphi$.

Ainsi, EDF impose aux appareils des installations d'avoir $\cos \varphi > 0,9$. Nous verrons en exercice qu'on peut notamment améliorer le rendement d'une installation principalement inductive en rajoutant une capacité en parallèle aux installations, de manière à augmenter le $\cos(\varphi)$.



Exemple – Rendement d'une installation

Considérons deux appareils électriques fréquemment employés, fonctionnant sous la tension de 220V alternatif : un four électrique à résistances, et un moteur.



A puissance utile égale ($\mathcal{P}_u = 8800 \text{ W}$), et à tension efficace égale ($U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$), nous pouvons voir sur la

Exemple - suite: Rendement d'une installation

figure ci-dessous que :

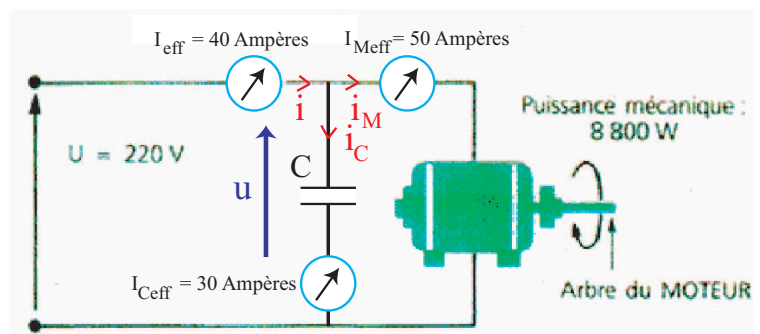
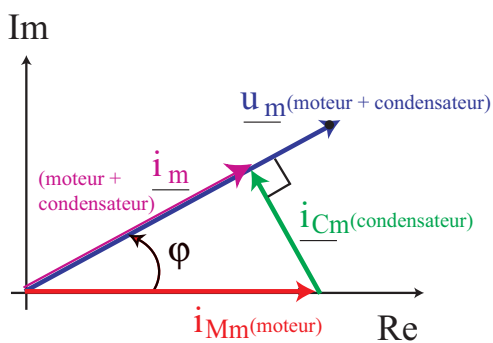
$$I_{\text{eff}}(\text{moteur}) > I_{\text{eff}}(\text{four})$$

Cela est dû au fait que le moteur est un circuit inductif car il comporte généralement un bobinage associé à un aimant, contrairement au four, qui est un circuit résistif.

Calculons le $\cos(\varphi)$ dans chaque cas :

- four (résistif) : $\cos(\varphi) = \frac{P_u}{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{8800}{220 \times 40} = 1$.
- moteur (inductif) : $\cos(\varphi) = \frac{P_u}{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}} = \frac{8800}{220 \times 40} = 0,8$.

Comme évoqué précédemment, afin d'améliorer le rendement de l'installation électrique, rajoutons maintenant une capacité en parallèle avec le moteur. Ceci permet d'augmenter le $\cos(\varphi)$ sans consommer davantage d'énergie. En effet, le condensateur ne consomme pas d'énergie en moyenne, et permet de compenser l'effet inductif du moteur et ainsi de ramener la tension aux bornes de l'ensemble (moteur + condensateur) en phase avec le courant délivré par le secteur.



D'après la représentation de Fresnel ci-dessus, afin que u et i soient en phase pour l'ensemble de l'installation (moteur + condensateur), la capacité doit être choisie de sorte que $i_{Cm} = i_{Mm} \sin(\varphi)$, or $i_{mC} = C\omega u_m$, et

$$C = \frac{I_{\text{eff},M} \sin(\varphi)}{U_{\text{eff}} \omega} = \frac{50 \sin(\arccos(0,8))}{220 \times 2\pi \times 50} = 430 \mu\text{F}$$

On remarquera que I_{eff} délivré par le secteur vaut maintenant $I_{\text{eff}} = I_{\text{eff},M} \cos(\varphi) = 50 \times 0,8 = 40 \text{ A}$, comme dans l'installation avec le four. De plus, $I_{\text{eff},C} = I_{\text{eff},M} \sin(\varphi) = 50 \times 0,6 = 30 \text{ A}$.

On voit donc que la loi des noeuds n'est pas du tout vérifiée pour les valeurs efficaces des courants sinusoïdaux. Ceci s'explique par le fait que les courants circulant dans le moteur et dans le condensateur sont déphasés. Lorsque l'un est positif, l'autre est parfois négatif, de sorte que la loi des noeuds avec les valeurs instantanées n'est pas mise en défaut.

Finalement, on retiendra la conclusion importante suivante, lorsque la valeur de C est bien choisie : les deux systèmes suivants sont équivalents du point de vue électrique :

$$\text{moteur} + \text{condensateur} \iff \text{four}$$

Une telle compensation des effets inductifs est faite soit au niveau de l'appareil inductif directement, soit au niveau de l'ensemble de l'installation électrique. Ceci permet de limiter la consommation d'électricité, et donc de réduire les coûts pour les utilisateurs ou EDF, suivant le positionnement du condensateur par rapport au compteur d'électricité.