Corrigé - DM n°1: Analyse dimensionnelle

I La course des dinosaures

I.1 Dimensions

1. En utilisant les symboles dimensionnels M (masse), L (longueur) et T (temps), on a :

— Foulée relative : $[f] = \left[\dfrac{D}{\ell}\right] = \dfrac{[D]}{[\ell]} = \dfrac{L}{L}$ soit $\boxed{[f] = 1}$;

— Nombre de Froude : $[F_\mathrm{r}] = \left[\dfrac{v}{\sqrt{g\ell}}\right] = \dfrac{[v]}{[g]^{1/2}\,[\ell]^{1/2}} = \dfrac{LT^{-1}}{(LT^{-2})^{1/2}L^{1/2}} = \dfrac{LT^{-1}}{LT^{-1}}$ soit $\boxed{[F_\mathrm{r}] = 1}$.

I.2 Coût énergétique d'une foulée

2. $\boxed{h = \ell - \ell\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. D'autre part, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{D}{4}\times\dfrac{1}{\ell}$ et $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. Ainsi, $h = \ell\left(1-\sqrt{1-\dfrac{D^2}{16\ell^2}}\right)$ soit finalement $\boxed{h = \ell\left(1-\sqrt{1-\dfrac{f^2}{16}}\right)}$.

3. Pour $f \ll 1$ alors $\sqrt{1-\dfrac{f^2}{16}} \simeq 1 - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{f^2}{16} = 1 - \dfrac{f^2}{32}$. Dans ce cas, l'expression obtenue à la question précédente se simplifie en $\boxed{h = \dfrac{\ell f^2}{32}}$.

4. Pour s'élever d'une hauteur h, l'animal doit s'opposer au travail du poids d'où $W_{\text{foulée}} = mgh$. Par conséquent, $\boxed{W_{\text{foulée}} = \dfrac{1}{32}mg\ell f^2}$.

I.3 Évaluation de l'énergie cinétique

5. Commençons par donner la dimension de toutes les grandeurs mises en jeu : $[\omega] = T^{-1}$, $[\ell] = L$, $[m] = M$, $[g] = LT^{-2}$ et $k = 1$. Les deux membres de l'égalité ayant nécessairement la même dimension, il vient : $T^{-1} = L^aM^bL^cT^{-2c}$. On en déduit le système :

$$\begin{cases} b = 0 \\ a + c = 0 \\ -2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 0 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

Finalement, $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}}$ et $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, soit $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}}$.

6. Pendant une période T, l'animal avance de D d'où $\boxed{v = \dfrac{D}{T}}$.

7. Par définition, $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}mv^2$. Ainsi, $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{D}{T}\right)^2 = \dfrac{1}{2}mD^2\times\dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{g}{\ell} = \dfrac{1}{8\pi^2}gml\dfrac{D^2}{\ell^2}$, soit finalement $\boxed{E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{8\pi^2}gmlf^2}$.

I.4 Similitude dynamique

8. $F_\mathrm{r} = \dfrac{v}{\sqrt{g\ell}}$; or $v = \dfrac{D}{T} = \dfrac{D}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ d'où $F_\mathrm{r} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{D}{\ell} \Leftrightarrow \boxed{F_\mathrm{r} = \dfrac{f}{2\pi}}$.

9. Compte tenu des chiffres significatifs proposés par l'énoncé, on trouve un nombre de Froude $\boxed{F_\mathrm{r} = 1,6}$ identique pour le furet et le rhinocéros qui sont pourtant des animaux assez dissemblables.

10. Par définition, le nombre de Froude est égal à $F_\mathrm{r} = \dfrac{v}{\sqrt{g\ell}}$. On trouve ainsi $\boxed{v_{\text{T-rex}} \simeq 5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$ ($20\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$) et $\boxed{v_{\text{raptor}} \simeq 9\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$ ($30\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$).