Action d'un champ magnétique stationnaire et uniforme sur une particule chargée

Situation générale

On s'intéresse à une particule chargée de charge q, de masse m et de vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ placée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ stationnaire et uniforme. Pour cet exercice, on a pris la situation suivante dans l'espace muni d'un repère cartésien(O,$\overrightarrow{u_x}$,$\overrightarrow{u_y}$,$\overrightarrow{u_z}$) :

⋆ $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_z}$ avec $B_0 > 0$

⋆ $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} v_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{pmatrix}$

⋆ le point M est confondu avec l'origine O à $t = 0$

Méthode 1

Toutes les conditions étant réunies on applique la deuxième loi de Newton :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qB_0}{m}\dot{y} \\ -\frac{qB_0}{m}\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On intègre ce systèmes d'équations par rapport au temps :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qB_0}{m}y + v_{0,x} \\ -\frac{qB_0}{m}x + v_{0,y} \\ v_{0,z} \end{pmatrix}$$

Suivant l'axe (Oz) le mouvement est rectiligne et uniforme tel que $z(t) = v_{0,z}t$. On ne s'intéressera donc plus qu'aux coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.

En remplaçant les expressions de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ dans le premier système d'équations, on a :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 x + \frac{qB_0}{m}V_0 \sin\alpha \\ -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 y - \frac{qB_0}{m}V_0 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

où α est l'angle tel que $v_{0,x} = V_0\cos\alpha$ et $v_{0,y} = V_0\sin\alpha$ avec $V_0 = \sqrt{v_{0,x}^2 + v_{0,y}^2}$.

On pose alors :

$$\boxed{\omega = \frac{|q|B_0}{m}}$$

Les solutions de ces équations différentielles harmoniques sont alors :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,x}\cos\omega t + C_{2,x}\sin\omega t + \dfrac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha \\ C_{1,y}\cos\omega t + C_{2,y}\sin\omega t - \dfrac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

On utilise alors les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, ce qui donne :

$$C_{1,x} = -\frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha \quad \text{et} \quad C_{1,y} = \frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha$$

soit :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha\,[1-\cos\omega t] + C_{2,x}\sin\omega t \\ \dfrac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha\,[\cos\omega t - 1] + C_{2,y}\sin\omega t \end{pmatrix}$$

La condition initiale sur la vitesse $\dot{x}(0) = V_0\cos\alpha$ avec :

$$\dot{x}(t) = \frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha \times \omega\sin\omega t + C_{2,x}\omega\cos\omega t$$

donne :

$$C_{2,x} = \frac{V_0\cos\alpha}{\omega} = \frac{mV_0\cos\alpha}{|q|B_0}$$

De même on montre que :

$$C_{2,y} = \frac{V_0\sin\alpha}{\omega} = \frac{mV_0\sin\alpha}{|q|B_0}$$

On obtient donc finalement :

$$\boxed{x(t) = \frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha\,[1-\cos\omega t] + \frac{mV_0}{|q|B_0}\cos\alpha\sin\omega t} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t) = \frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha\,[\cos\omega t - 1] + \frac{mV_0}{|q|B_0}\sin\alpha\sin\omega t}$$

Etablissons l'équation de la trajectoire. On réécrit les équations horaires sous la forme quivante :

$$x(t) - \frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha = -\frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha\cos\omega t + \frac{mV_0}{|q|B_0}\cos\alpha\sin\omega t \quad \text{et} \quad y(t) + \frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha = \frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha\cos\omega t + \frac{mV_0}{|q|B_0}\sin\alpha\sin\omega t$$

soit :

$$x(t) - \frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha = \frac{mV_0}{qB_0}\left[-\sin\alpha\sin\omega t + \frac{q}{|q|}\cos\alpha\sin\omega t\right] \quad \text{et} \quad y(t) + \frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha = \frac{mV_0}{qB_0}\left[\cos\alpha\cos\omega t + \frac{q}{|q|}\sin\alpha\sin\omega t\right]$$

ou encore :

$$x(t) - \frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha = \frac{mV_0}{qB_0}\sin\left(\frac{qB_0}{m}t - \alpha\right) \quad \text{et} \quad y(t) + \frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha = \frac{mV_0}{qB_0}\cos\left(\frac{qB_0}{m}t - \alpha\right)$$

En élevant chacune de ces deux dernières équations au carré et en les sommant, on obtient :

$$\boxed{\left(x(t) - \frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha\right)^2 + \left(y(t) + \frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha\right)^2 = \left(\frac{mV_0}{qB_0}\right)^2}$$

Cette équation est l'équation d'un cercle de rayon :

$$\boxed{R = \frac{mV_0}{|q|B_0} = \frac{V_0}{\omega}}$$

et de centre C ayant pour coordonnées :

$$\boxed{x_C = \frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha \quad \text{et} \quad y_C = -\frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha}$$

Méthode 2

On repart de :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qB_0}{m}\dot{y} \\ -\frac{qB_0}{m}\dot{x} \end{pmatrix}$$

et on pose :

$$\boxed{u = x + iy}$$

soit :

$$\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$$

En sommant la première équation du système avec la deuxième multipliée par i, on obtient :

$$\boxed{\ddot{u} = -i\frac{qB_0}{m}\dot{u}}$$

On en déduit donc :

$$\dot{u}(t) = A\exp\left(-i\frac{qB_0}{m}t\right)$$

Les conditions initiales donnent ici $\dot{u}(0) = V_0\cos\alpha + iV_0\sin\alpha = V_0\exp(i\alpha)$ soit :

$$\boxed{\dot{u}(t) = V_0\exp\left(-i\left[\frac{qB_0}{m}t - \alpha\right]\right)}$$

On retrouve bien ici un mouvement uniforme puisque $|\dot{u}| = V_0 = cte$. On en déduit aussi $u(t)$:

$$u(t) = i\frac{mV_0}{qB_0}\exp\left(-i\left[\frac{qB_0}{m}t - \alpha\right]\right) + K$$

Or, $u(0) = x(0) + iy(0) = 0$. Donc :

$$K = -i\frac{mV_0}{qB_0}\exp(i\alpha)$$

ce qui donne :

$$\boxed{u(t) = i\frac{mV_0}{qB_0}\left[\exp\left(-i\left[\frac{qB_0}{m}t - \alpha\right]\right) - \exp(i\alpha)\right]}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les parties réelles et imaginaires de u pour identifier respectivement $x(t)$ et $y(t)$. cela donne :

$$\boxed{x(t) = \frac{mV_0}{qB_0}\sin\alpha + \frac{mV_0}{qB_0}\sin\left(\frac{qB_0}{m}t - \alpha\right)}$$

et

$$\boxed{y(t) = -\frac{mV_0}{qB_0}\cos\alpha + \frac{mV_0}{qB_0}\cos\left(\frac{qB_0}{m}t - \alpha\right)}$$

Ces relations sont bien évidemment identiques à celles obtenues par la méthode 1.

Méthode 3

Dans cette partie, on suit le programme officiel et on part donc des hypothèses suivantes :

- ⋆ le champ magnétique est orthogonal au vecteur vitesse initial
- ⋆ la trajectoire est supposée circulaire

En pratique, on va donc poser $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_z}$ avec $B_0 > 0$ et $\overrightarrow{v_0} = V_0\overrightarrow{u_y}$ avec $V_0 > 0$. On choisit un repère polaire dont l'origine est prise au centre de la trajectoire circulaire. M n'est donc plus initialement au point O. La deuxième loi de Newton s'écrit cette fois :

$$\begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{qB_0}{m}R\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La dernière relation montre que $\dot{z} = cte = 0$ d'après les conditions initiales et de même $z = cte$. On retrouve donc ici que le mouvement est plan.

La deuxième équation du système donne $\dot{\theta} = cte$. Or $\|\overrightarrow{v}\| = R|\dot{\theta}| = \|\overrightarrow{v_0}\| = V_0$. La norme du vecteur vitesse est donc constante. Le mouvement circulaire est donc **uniforme**. On retrouve un résultat établi par les deux méthodes précédentes.

Enfin la première équation du système indique que :

$$\boxed{\dot{\theta} = -\frac{qB_0}{m}}$$

Si $q > 0$ la particule tourne donc dans le sens horaire dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. Si $q < 0$, elle tournera dans le sens trigonométrique. On en déduit R le rayon de la trajectoire :

$$V_0 = R|\dot{\theta}| = R\frac{|q|B_0}{m}$$

donc :

$$\boxed{R = \frac{mV_0}{|q|B_0} = \frac{v_0}{\omega}}$$

Quelle est la position initiale du point M dans ce repérage ? On utilise les conditions initiales pour l'établir. On veut $\overrightarrow{v_0} = V_0\overrightarrow{u_y}$. Cela ne peut correspondre qu'à $\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_y}$ et à ce moment là $\theta_0 = 0$ <u>ou bien</u> $\overrightarrow{u_\theta} = -\overrightarrow{u_y}$ et $\theta_0 = \pi$ avec $\overrightarrow{v_0} = -V_0\overrightarrow{u_\theta}$.