Mécanique

Partie 1

Charles Tuchendler

MPSI 4 – Lycée Saint-Louis

Année 2019/2020

Table des matières

CHAPITRE X

DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

Sommaire

Introduction

Après nous être intéressés à la description du mouvement d'un point dans le chapitre précédent, nous allons maintenant nous intéresser à la prévision du mouvement d'un point en fonction des **causes** qui lui ont donné naissance.

I Lois de la dynamique

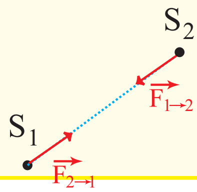
Il y existe trois principes de la dynamique énoncés par I. Newton (1642-1727) au XVII$^{\text{ème}}$ siècle [1]. Il ne s'agit pas de théories démontrées, comme dans le cas d'un théorème en mathématique, mais d'un ensemble de relations qui sont phénoménologiquement vérifiées et que l'on pose comme universellement valables.

On les qualifie toujours aujourd'hui de *principes* ou de *lois* bien que des expériences plus récentes les ai mis en défaut, notamment en *mécanique relativiste* et *mécanique quantique*.

I.1 Notion de force

Définition X.1 – Force

Passer du concept cinématique à celui de la dynamique, c'est prendre en compte les causes du mouvement dans l'étude du mouvement, c'est-à-dire les **forces**.
On dit que deux systèmes S_1 et S_2 sont en **interaction** si une modification du système S_1 entraîne une modification de S_2. On admettra qu'on peut décrire une telle interaction par une grandeur **vectorielle** $\overrightarrow{F}$ appelée **force**.



Définition X.2 – Forces intérieures et extérieures

Considérons un système $\mathcal{S}$ constitué de N points matériels M_i. On distingue deux types de force :

- ⋆ ***Forces extérieures*** : forces s'exerçant sur un point M_i du système mécanique étudié par un point extérieur à ce système.
- ⋆ ***Forces intérieures*** : forces s'exerçant entre deux points M_i et M_j du système mécanique étudié.

On note $\overrightarrow{f_{i,int}}$ **la résultante des forces intérieures s'exerçant sur le point M_i** de $\mathcal{S}$ telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{i,int}} = \sum_{j\in\mathcal{S}, j\neq i} \overrightarrow{f_{j/i}}}$$

On note $\overrightarrow{F_{int}}$ **la résultante totale des forces intérieures s'exerçant sur l'ensemble du système** telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{int}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{f_{i,int}} = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j\in\mathcal{S}, j\neq i} \overrightarrow{f_{j/i}}\right)}$$

Définition X.3 – Système isolé ou pseudo isolé

Lorsqu'un système n'est soumis à **aucune force**, on dit qu'il est **isolé**.

Lorsque la **somme des forces** s'exerçant sur lui **est nulle**, on dira qu'il est **pseudo-isolé**.

1. En 1687 précisément, dans son ouvrage "Principia Mathematica". Pour rappel, il montrera en 1704 dans "Optiks" que la lumière blanche se décompose en arc-en-ciel.

I.2 Masse inertielle, masse gravitationnelle

On constate qu'il est plus difficile de mettre en mouvement une voiture qu'une bille. La vitesse et l'accélération ne suffisent pas à décrire l'évolution dynamique de ces corps.

Définition X.4 – Inertie

L'inertie d'un corps est sa capacité à s'opposer à la modification de son mouvement.

Définition X.5 – Masse inertielle et masse gravitationnelle

Pour rendre compte du mouvement d'un objet, on associe ainsi à chaque corps une grandeur scalaire positive appelée **masse inertielle**. Celle-ci s'identifie à la **masse gravitationnelle** que nous introduirons par la suite. On l'appellera donc tout simplement **masse**.

Propriété X.1 – Masse

- ⋆ La masse se conserve au cours du temps et elle s'exprime en kg.
- ⋆ La masse est une grandeur intrinsèque. Elle est invariante par changement de référentiel.

Définition X.6 – Masse totale m d'un système de points ou d'un solide

Si l'on considère un système $\mathcal{S}$ constitués de N points matériels discrets M_i de masse respectives m_i, on définit la masse du système est :

$$\boxed{m = \sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Cette définition s'étend au cas du solide par passage à la limite continue.

Définition X.7 – Centre de masse

Le centre de masse de $\mathcal{S}$, noté G, est le barycentre des points M_i pondérés par les m_i soit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}}$$

Remarque : on peut mieux comprendre le rôle de G, en appliquant la relation de Chasles à la relation précédente en passant par le point O :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GM_i}) = \overrightarrow{0} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{GO}\sum_{i=1}^{N} m_i + \sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{OM_i}}$$

I.3 Quantité de mouvement

C'est l'inertie, à travers la masse du système, qui permet de faire le lien entre l'étude cinématique d'un mouvement et ses propriétés dynamiques régies par les forces. On introduit la quantité de mouvement pour traduire mathématiquement ce lien.

Définition X.8 – Quantité de mouvement associée à un point

La **quantité de mouvement** d'un point matériel M, de masse m (inertie) et de vitesse $\vec{v}$ (cinématique) dans un référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{p}(M)_{/\mathcal{R}} = m\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}}}$$

La quantité de mouvement dépend donc du référentiel d'étude.

Définition X.9 – Quantité de mouvement du système de N points matériels

La quantité de mouvement totale, notée $\overrightarrow{p}$, d'un système $\mathcal{S}$ de N points matériels se définit comme :

$$\boxed{\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p_i}}$$

Propriété X.2 – Quantité de mouvement d'un système de N points matériels et centre de masse

La quantité de mouvement totale de $\mathcal{S}$ vérifie :

$$\boxed{\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})}$$

Démonstration X.1 – Quantité de mouvement et centre de masse

Démontrons le résultat en dérivant par rapport au temps l'expression obtenue pour le centre de masse G du système :

$$\overrightarrow{p} = \sum_i^N \overrightarrow{p_i} = \sum_i^N m_i \overrightarrow{v}(M_i/\mathcal{R}) = \sum_i^N m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t} \underset{m_i \text{ cst}}{=} \frac{\mathrm{d}\left(\sum_i^N m_i \overrightarrow{OM_i}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\overrightarrow{OG})}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})$$

Définition X.10 – Quantité de mouvement d'un solide

En adoptant une description continue de la matière pour l'état solide, c'est-à-dire en faisant notamment tendre N vers $+\infty$, on peut exprimer la quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ d'un solide de masse m en fonction de la vitesse du centre de masse et de la masse totale du solide :

$$\boxed{\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}(G/\mathcal{R})}$$

I.4 Référentiels galiléens

Les principes de la dynamique que nous allons énoncer ne s'appliquent tels quels que dans un type particulier de référentiels, appelé **référentiels galiléens**. En cinématique, nous n'avons fait aucune différence entre les référentiels. Il en existe cependant une en dynamique.

Question X.1 – Peut-on mettre en évidence la non-équivalence de deux référentiels ?

On considère deux spationautes dans une région vide de l'espace comme indiqué sur la figure X.1. Leur éloignement de tout objet massif permet de considérer que chacun d'entre eux est un objet isolé. Le spationaute 2 se déplace aléatoirement en utilisant de petits réacteurs fixés à sa combinaison.

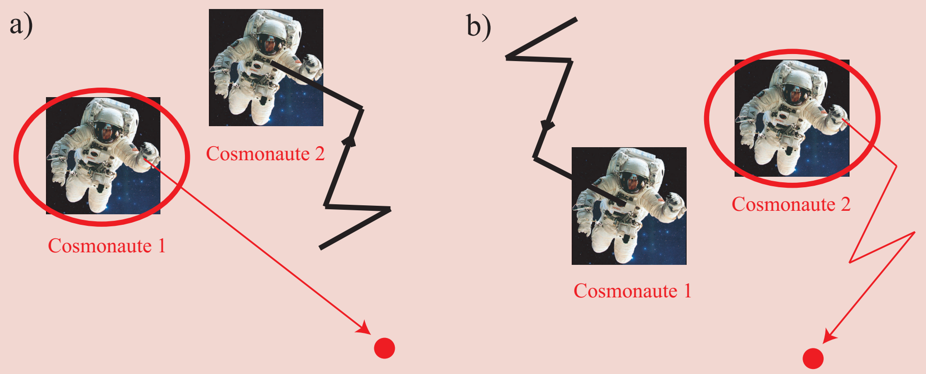


FIGURE X.1 – *Mouvement de l'autre spationaute et d'une balle perçus par a) le spationaute 1 n'utilisant pas ses réacteurs b) le spationaute 2 se déplaçant à l'aide se ses petits réacteurs.*

Du point de vue de chacun des deux spationautes, c'est-à-dire en choisissant comme référentiel l'un ou l'autre des deux spationautes, le confrère est perçu comme se déplaçant aléatoirement. En revanche, le mouvement d'une balle lancée dans l'espace par l'un des spationautes, isolée dès qu'elle quitte la main de celui-ci, n'aura une trajectoire rectiligne et uniforme que par rapport à ce spationaute.

Les deux référentiels ne sont donc pas équivalents au regard d'un objet pseudo-isolé. On dira que le premier est **galiléen**, et que le second est **non-galiléen**.

Définition X.11 – Référentiel galiléen

Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel un objet isolé ou pseudo-isolé se déplace avec un vecteur-vitesse constant $\vec{v}$, c'est-à-dire qu'il est soit au repos, soit animé d'un **mouvement (de translation) rectiligne uniforme**.

Compte tenu de ces différences entre référentiels, il est naturel de se demander si une interaction entre objet s'exprime de manière identique dans tout référentiel.

Propriété X.3 – Invariance d'une force par changement de référentiel galiléen

En **mécanique classique**, contrairement au cas de la mécanique relativiste, on considérera qu'une **force est invariante par changement de référentiel galiléen.**

I.5 Principe d'inertie (ou première loi de Newton)

Il est, en pratique, **impossible d'isoler totalement un objet matériel**. D'une part, certaines interactions, comme la gravitation, ont une portée infinie. D'autre part, le mouvement incessant des objets, les bruits expérimentaux, les incertitudes de mesures ne permettent pas d'établir de manière infiniment précise le caractère pseudo-isolé d'un objet même au prix de la meilleure compensation possible des forces appliquées au système.

On ne pourra donc jamais valider expérimentalement l'existence de référentiels galiléens. C'est pourquoi on le pose comme principe. Il s'agit de la $1^{\text{ère}}$ loi de la dynamique.

Principe 1 – Principe d'inertie - $1^{ère}$ *loi de Newton*

Il existe des référentiels galiléens. Tout référentiel galiléen est donc : soit fixe, soit en translation rectiligne uniforme, par rapport à un autre référentiel galiléen.

Remarque : en pratique, certains référentiels sont de bonnes approximations de référentiels galiléens à certaines échelles. Dans le référentiel terrestre par exemple, un palet de hockey sur glace glissant sur la patinoire a une trajectoire rectiligne uniforme pendant au moins quelques instants. Le palet est pseudo-isolé car la réaction du support compense son poids. Le référentiel terrestre peut donc être considéré localement comme un référentiel galiléen [a].

[a] On verra par la suite que le référentiel terrestre est non-galiléen à cause de la rotation de la Terre, mais que cet effet n'est visible que dans certains phénomènes se produisant à plus grande échelle.

Méthode X.1 – Référentiel galiléen

On considérera pour le moment que le référentiel terrestre est un exemple de référentiel galiléen.

Tout référentiel au repos ou en en translation rectiligne uniforme par rapport à lui sera donc aussi galiléen.

I.6 Lois des actions réciproques (ou troisième loi de Newton)

La troisième loi de Newton complète la compréhension de l'évolution des systèmes materiels en tenant compte du point de vue de l'observateur. Elle s'énonce de la façon suivante.

Principe 2 – Principe des actions réciproques - $3^{ème}$ *loi de Newton*

Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\overrightarrow{F_{A/B}}$, alors le point B exerce réciproquement sur A une force $\overrightarrow{F_{B/A}}$ telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{B/A} = -\overrightarrow{F}_{A/B}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{F}_{B/A} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{AB}}$$

On distingue deux types de forces : les forces ***attractives*** et les forces ***répulsives***.

Propriété X.4 – Résultantes des forces intérieures pour un système de points

- D'après le principe des actions réciproques, quels que soient les points du système M_i et M_j considérés :

$$\boxed{\overrightarrow{f_{j/i}} = -\overrightarrow{f_{i/j}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{f_{i/j}} \,//\, \overrightarrow{M_iM_j}}$$

- La résultante des forces intérieures d'un système mécanique est nulle :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{int}} = \overrightarrow{0}}$$

ce qui est évident d'après la propriété précédente.

- **Attention, cela ne signifie pas que ces forces ne jouent aucun rôle !**
- La résultante de toutes les forces s'exerçant sur un système mécanique est uniquement égale à la résultante des forces extérieures s'exerçant sur celui-ci :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{res}} = \overrightarrow{F_{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{f_{i,ext}}}$$

I.7 Loi de la quantité de mouvement (ou deuxième loi de Newton)

L'observation répétée du mouvement des objets à amener Newton à poser une seconde loi.

Principe 3 – Loi de la quantité de mouvement - 2ème *loi de Newton*

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, lorsqu'un point matériel M de masse m n'a pas un mouvement rectiligne uniforme, c'est qu'il est soumis à des forces.

La loi de la quantité de mouvement permet alors de faire le lien entre les forces $\overrightarrow{F}_i$ auquel est soumis ce point et sa quantité de mouvement dans le référentiel d'étude.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}(M)_{/\mathcal{R}_g}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{F}_i}$$

Cette relation peut également se mettre sous la forme suivante **lorsque la masse est conservée** :

$$\boxed{m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathcal{R}_g} = \sum_i \overrightarrow{F}_i}$$

Exercice X.1 – Objet isolé ou pseudo-isolé

Vérifier que la deuxième loi de Newton est compatible avec la définition d'un objet isolé ou pseudo-isolé.

Définition X.12 – Position d'équilibre d'un système mécanique

- Un système mécanique M occupe **une position d'équilibre** $M_{éq}$ si, lâché sans vitesse initiale en $M_{éq}$, M y reste.
- Un système est donc au repos ou **à l'équilibre** dans un référentiel donné si $\forall t, \vec{v}(t) = \vec{0}$.
  Dès lors, toute position d'équilibre dans ce référentiel vérifie les définitions suivantes :

$$\boxed{\vec{a}(M = M_{éq}) = \vec{0} \qquad \text{(définition CINÉMATIQUE)}}$$

- Si, de plus, le référentiel est galiléen, alors d'après la loi de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i(M = M_{éq}) = \vec{0} \qquad \text{(définition DYNAMIQUE)}}$$

Théorème X.1 – Théorème de la résultante cinétique

Dans un référentiel galiléen, pour un système de points matériels M_i ou un solide de masse m constante, de centre de masse G :

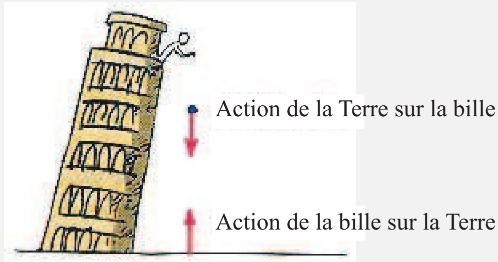
$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_g} = m\vec{a}(G/\mathcal{R}_g) = \overrightarrow{F_{ext}}}$$

Remarque : grâce à ce théorème, il est possible d'établir le mouvement du centre de masse comme nous le faisions auparavant. Tous les résultats précédents restent donc vrai et l'approximation du point matériel était donc bien valide.

Exercice X.2 – Même force mais pas même mouvement

Il peut paraître surprenant de remarquer que la loi des actions réciproques conduit à montrer que la force exercée par une bille lâchée du haut d'une tour sur la Terre est de même norme que celle exercée par la Terre sur la bille, c'est à dire égale à son poids...

Justifier avec soin que la Terre peut être considérée comme immobile lorsqu'elle est soumise à la force réciproque du poids de la balle.



II Interactions fondamentales

Histoire – Modèles physiques théoriques

Afin d'expliquer l'ensemble des phénomènes dans l'Univers, les physiciens ont développé différents modèles théoriques. Deux modèles suffisent pour rendre compte de l'ensemble de phénomènes jamais observés : **le modèle standard et la relativité générale**.

Le modèle standard est une théorie quantique et relativiste des champs, qui rend compte à l'échelle microscopique des interactions entre les particules élémentaires.

La relativité générale décrit quant à elle l'interaction gravitationnelle dont la faiblesse ne rend son influence sensible qu'à grande échelle.

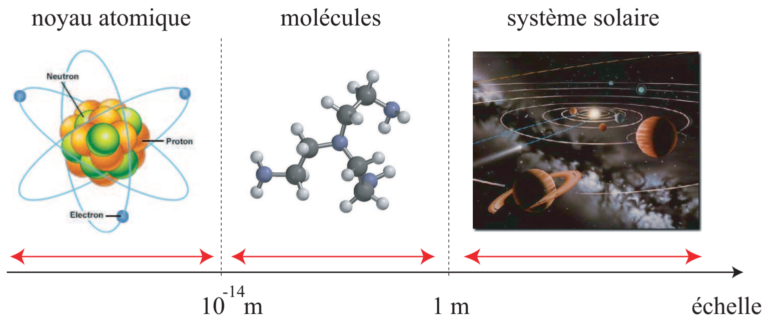


Figure X.2 – *Les trois interactions fondamentales et les échelles sur lesquelles elles dominent.*

Histoire – Interactions fondamentales

Ces modèles ne recensent que trois interactions fondamentales : **l'interaction forte, l'interaction électrofaible et la gravitation**.

Dans le modèle standard, la chromodynamique quantique rend compte de l'interaction forte responsable de la cohésion du noyau à très petite échelle, de l'ordre de la taille du noyau.

Toujours dans le modèle standard, l'électrodynamique quantique rend compte des interactions électromagnétique et faible. La première rend compte des propriétés chimiques des atomes. Elle est à courte distance, 1000 fois plus faible que l'interaction forte. Elle prédomine donc à l'échelle interatomique. La seconde est notamment responsable de la radioactivité bêta de certains éléments et explique la façon dont les étoiles produisent de l'énergie lors de réactions thermonucléaires. Elle est 100000 fois plus faible que l'interaction forte à même échelle et ne se fait sentir que sur des tailles inférieures à celle du noyau. Elle est donc difficile d'en appréhender les effets.

La relativité générale rend compte de l'interaction gravitationnelle qui explique l'attraction qui agit sur toute forme d'énergie et proportionnelle à la masse de chaque objet.

Histoire – Une quatrième interaction fondamentale

Jusqu'en 2012, toutes les forces rencontrées en physique résultaient d'une ou de la combinaison de plusieurs des trois interactions citées plus haut. Depuis quelques années et la découverte du boson de Higgs, une quatrième interaction, prévue par le modèle standard a été découverte. Cette interaction est celle qui permet de donner une masse aux particules élémentaires fermioniques n'en possédant pas au départ. Le médiateur de cette interaction est un boson, dénommé Boson de Higgs, de spin nul.

Histoire – Dans le futur...

Dans leur volonté d'élaborer une théorie de grande unification, les physiciens se heurtent depuis plusieurs décennies à leur impossibilité de trouver une théorie quantique de la gravitation. La découverte du boson de Higgs a une fois encore montré la qualité du modèle standard capable de prévoir l'existence d'une nouvelle particule et de rendre compte de masses impossible à interpréter avant elle. Le défi des prochaines décennies restera donc de tester et de développer des modèles d'unification permettant de rendre compte de tout en une seule théorie comme cela avait partiellement été fait avec l'électrodynamique quantique.

II.1 Interaction gravitationnelle

Définition X.13 – Masse gravitationnelle

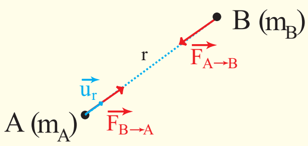
Le mouvement des planètes et la chute des corps résultent d'une même interaction : la **gravitation**.
La sensibilité d'un corps à l'interaction gravitationnelle est mesurée par une grandeur scalaire appelée **masse gravitationnelle**.
On parle aussi de charge gravitationnelle à l'image de la charge électrique.

Remarque : la masse gravitationnelle s'identifie avec la *masse inertielle*, on ne les distingue donc pas. On ne fera référence qu'à la masse.

Définition X.14 – Force d'interaction gravitationnelle

Soit A et B deux corps de masse respective m_A et m_B. A exerce une force **attractive** sur B donnée par :

$$\boxed{\vec{F}_{grav_{A/B}} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_r}$$



où $\mathcal{G}$ est la constante universelle de la gravitation de valeur expérimentale $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ $\mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$, et de dimension $[\mathcal{G}] = \frac{[\mathrm{Force}]\mathrm{L}^2}{\mathrm{M}^2} = \frac{\mathrm{MLT^{-2}L^2}}{\mathrm{M}^2} = \mathrm{L^3M^{-1}T^{-2}}$.
Le vecteur $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire pointant de A vers B, et r est la distance AB.

Propriété X.5 – Force gravitationnelle

- ⋆ $\vec{F}_{grav_{A/B}} = -\vec{F}_{grav_{B/A}}$.
- ⋆ L'interaction gravitationnelle étant **toujours attractive**, ses effets se cumulent dans un système comportant un grand nombre de particule, et explique qu'elle soit **prépondérante à grande échelle**.

II.2 Interaction électromagnétique

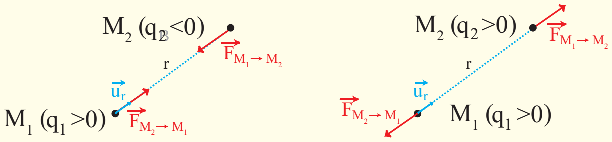
Exemple – Manisfestation de l'interaction électromagnétique

- ⋆ Interaction beaucoup plus complexe à traduire et entrainant des effets beaucoup plus variés (action d'un aimant, cohésion des molécules, frottement solide,, . . .)
- ⋆ Elle est abordée en première année et étudiée en détail en deuxième année (électromagnétisme).
- ⋆ Ses propriétés diffèrent selon qu'elle s'applique à des particules fixes ou en mouvement.

Définition X.15 – Force électrostatique - *particules immobiles ou lentes*

La **force électrique** s'exerçant sur une particule M_2 de charge q_2 par une particule M_1 de charge q_1 est appelée **force de Coulomb** et son expression est :

$$\boxed{\vec{F}_{élec}(M_1/M_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}}$$



Attraction électrostatique Répulsion électrostatique

- ⋆ $r = M_1M_2$ et $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$.
- ⋆ $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,10^9$ kg.m^3.s^{-4}.A^{-2} fait intervenir la **permittivité diélectrique du vide**. ϵ_0.
- ⋆ $\left[\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\right] = \dfrac{[\text{Force}]\,\text{L}^2}{[\text{Charge}]^2} = \dfrac{\text{MLT}^{-2}\text{L}^2}{\text{I}^2\text{T}^2} = \text{ML}^3\text{T}^{-4}\text{I}^{-2}$.

Propriété X.6 – Force électrostatique - *particules immobiles ou lentes*

- ⋆ $\vec{F}_{élec}(M_1/M_2) = -\vec{F}_{élec}(M_2/M_1)$.
- ⋆ L'interaction électrique peut être **attractive** ou **répulsive** suivant le signe des charges de M_1 et M_2 :

$$\boxed{\begin{cases} q_1q_2 > 0 \Leftrightarrow \text{force répulsive} \\ q_1q_2 < 0 \Leftrightarrow \text{force attractive} \end{cases}}$$

La matière étant globalement neutre, cette interaction jouera un rôle plus faible à grande échelle.

- ⋆ On peut regrouper les effets de plusieurs charges électrostatiques fixes q_i placées en différents points A_i sur une particule de charge q placée en M en introduisant le **champ électrostatique** $\overrightarrow{E}$ en M tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}(M)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\overrightarrow{E}(M) = \sum_i \frac{q_i\overrightarrow{A_iM}}{4\pi\epsilon_0 A_iM^3}}$$

Définition X.16 – Force magnétique - *particules en mouvement*

- Des particules chargées se déplaçant dans l'espace sont sensibles à une autre force : **la force magnétique** issue de la présence d'un **champ magnétique**.
- Nous reviendrons sur la génération d'un tel champ à la fin de l'année dans deux chapitres consacré au magnétisme et plus particulièrement à **l'induction magnétique**.
- La force magnétique associée au déplacement d'une particule chargée dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B}}$$

Définition X.17 – Force de Lorentz

Ainsi, la force électromagnétique, appelée **force de Lorentz**, qui s'exerce dans le cas général sur une particule de charge q se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$ en présence d'un champ électromagnétique caractérisé par les champ $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ s'exprime de la façon suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{Lorentz} = q\left(\overrightarrow{E} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{B}\right)}$$

II.3 Interaction forte

L'étude de l'interaction forte ne relève pas du programme. Notons cependant que :

Propriété X.7 – Interaction forte

- Elle est à l'origine de la **cohésion des noyaux atomiques** : les protons, qui constituent le noyau, se repoussent du fait de l'interaction électromagnétique. Il existe donc une force prédominante qui les maintient ensemble dans le noyau.
- Elle est de **courte portée** (10^{-14} m), et est utile pour comprendre les réactions nucléaires et les réactions se produisant dans les noyaux des étoiles.

II.4 Interaction faible

L'étude de l'interaction faible ne relève pas du programme. Notons cependant que :

Propriété X.8 – Interaction faible

- Elle se manifeste à l'échelle subatomique dans un certain type de réactions nucléaires comme la désintégration β.
- Elle est responsable de la fusion nucléaire dans les étoiles.
- Depuis la fin des années 1960, elle est décrite comme une partie de l'interaction unifiée électrofaible.

III Forces usuelles

Les interactions fondamentales évoquées dans la section précédente se traduisent par deux forces fondamentales : la force gravitationnelle et la force électromagnétique. Mais à notre échelle, ces interactions fondamentales peuvent se traduire par d'autres forces mieux à même de décrire les phénomènes dont elles rendent compte.

Propriété X.9 – Les forces usuelles à l'échelle humaine

- ⋆ A notre échelle, l'interaction gravitationnelle terrestre se traduit par une force qui prédomine devant tout autre effet gravitationnel.
- ⋆ Les autres forces que nous percevons à notre échelle sont généralement des conséquences de l'interaction électromagnétique.
- ⋆ Les interactions fondamentales régissent les phénomènes à l'**échelle microscopique**.
- ⋆ Nous utiliserons des forces traduisant les effets observés à l'**échelle macroscopique**.
- ⋆ Ces **forces macroscopiques** ne font en général pas référence aux interactions fondamentales, et aux forces microscopiques, qui en sont à l'origine.

III.1 Force de pesanteur

Définition X.18 – Force gravitationnelle terrestre à la surface de la Terre

La Terre de masse M_T, assimilée à une sphère de rayon R_T, exerce une force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{\text{surf}}}$ sur un objet ponctuel M, de masse m, **à sa surface**, dont l'expression est donnée par :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{surf}}(M) = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T^2}\,\overrightarrow{u_r}}$$

avec $\vec{u}_r$ dirigé du centre de la Terre vers l'objet.

Remarque : cette formulation semble considérer que l'ensemble de la masse terrestre est concentrée en son centre. On montrera cette propriété en début de deuxième année dans le cours d'électrostatique comme application du théorème de Gauss.

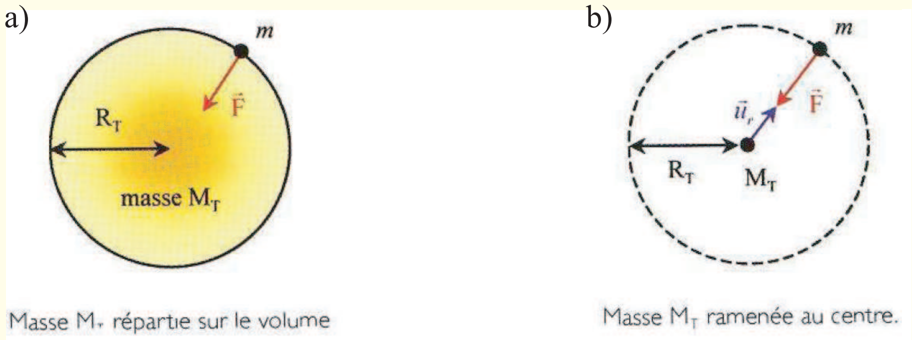


Figure X.3 – *Equivalence des forces gravitationnelles exercées par a) un corps à distribution sphérique de masse totale M_T et b) un point matériel de masse M_T situé en son centre.*

Propriété X.10 – Champ gravitationnel à la surface de la Terre et champ de pesanteur

- ⋆ La force $\overrightarrow{F}_{\text{surf}}(M)$ est proportionnelle à la masse m de l'objet, et en plaçant cette masse en facteur, on fait apparaître un champ, appelé **champ gravitationnel terrestre** [a], noté $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, analogue gravitationnel du

Propriété X.10 – Champ gravitationnel à la surface de la Terre et champ de pesanteur (suite)

champ électrique, de sorte que, à la surface de la Terre :

$$\overrightarrow{F}_{\text{surf}}(M) = m\overrightarrow{G} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{G} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2}\,\overrightarrow{u_r}$$

- ⋆ Ordre de grandeur de $||\overrightarrow{G}|| = G \Rightarrow G = \frac{6{,}67.10^{-11}\times 6.10^{24}}{(6{,}38.10^{6})^2} \simeq\ 9,8\ \text{m.s}^{-2}$.
- ⋆ $\overrightarrow{G}$, malgré sa valeur, ne correspond pas à l'accélération de la pesanteur qui apparaît dans l'expression du poids. Le champ de pesanteur tient en compte, en plus du terme gravitationnel, d'un terme dû à la **rotation de la Terre**. Ce terme de **force centrifuge** n'est pas identique en tout point de la surface du globe.
- ⋆ On retiendra que le **poids** s'exprime comme

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m\vec{g}}$$

où $\vec{g}$ **n'est pas seulement dû à la force gravitationnelle** :

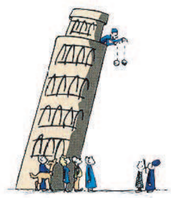
$$\boxed{\vec{g} \neq \overrightarrow{G}} \quad \text{et} \quad \boxed{g = \|\vec{g}\| = 9,81\ \text{m.s}^{-2}} \quad \text{à Paris}$$

a. On pourrait de la même manière définir le champ gravitationnel en tout point de l'espace quelle que soit sa distance au centre de la Terre. Il suffirait de remplacer R_T par r dans l'expression de $\overrightarrow{G}$.

Remarque : lorsqu'un objet est en chute libre, c'est à dire soumis seulement à son poids, le principe fondamental s'écrit $m_i\vec{a} = m_g\vec{g}$ où le terme gauche fait intervenir l'inertie, et le terme de droite la gravité.

On obtient $\vec{a} = \vec{g}$ si on applique le **principe d'équivalence** qui identifie m_i à m_g. Avec ces hypothèses, l'accélération de deux objets de masses différentes est identique.

Galilée testa, en 1630, le principe d'équivalence. Il effectua une expérience consistant à lâcher des boulets de masses différentes du haut de la tour de Pise et à déterminer les instants auxquels ces boulets atteignent le sol.



III.2 Forces de tension - Cas d'un fil ou d'une corde

Définition X.19 – Force de tension d'un fil

- ⋆ Un fil est supposé idéal s'il peut être considéré comme infiniment souple, de masse négligeable et inextensible,c'est-à-dire de longueur ℓ constante.
- ⋆ Un objet M accroché à l'extrémité d'un fil idéal est soumis de la part du fil à une **force de tension** $\overrightarrow{T}$ telle que :
  - la force est portée par la direction du fil et orientée au point M vers « l'intérieur » du fil :

$$\boxed{\overrightarrow{T} = T\overrightarrow{u_{\text{int}}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{T \geq 0}$$

  - la force est « adaptative » c'est-à-dire qu'elle dépend a priori des autres forces appliquées à M. La projection $T = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{u_{\text{int}}}$ dépend donc a priori du temps.
  - $\overrightarrow{T}$ n'a donc pas d'expression générale et sera déterminée par application du PFD.
- ⋆ Un fil est tendu tant que $T > 0$. Il est détendu pour $T = 0$.

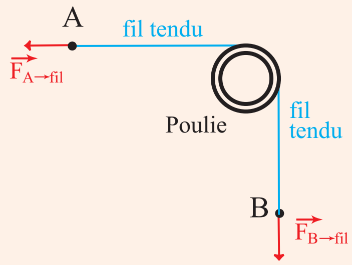
Propriété X.11 – Force de tension d'un fil

- ⋆ Pour qu'un fil idéal rectiligne soit tendu, il faut exercer deux forces, de même norme, opposées, à ses extrémités :

$$\overrightarrow{F}_{A\to \text{fil}} = -\overrightarrow{F}_{B\to \text{fil}}$$

D'après le principe des actions réciproques, ceci entraine :

$$\boxed{\overrightarrow{T}_{\text{fil}\to A} = -\overrightarrow{T}_{\text{fil}\to B}}$$



- ⋆ Dans le cas de deux points reliés par un fil tendu, les forces de tension sont transmises en norme et en direction.
- ⋆ On notera que la présence d'une **poulie parfaite**, de masse négligeable et sur laquelle les frottements sont négligeables, ne modifie que la direction des forces s'appliquant sur le fil, sans en modifier la norme : un fil idéal a donc la propriété de **transmettre les normes des forces**. Dans ce cas :

$$\boxed{\|\overrightarrow{T}_{\text{fil}\to A}\| = \|\overrightarrow{T}_{\text{fil}\to B}\|}$$

Exemple – Masse suspendue à un point fixe

Le principe des **actions réciproques** permet de vérifier que l'action exercée sur le fil à l'une de ses extrémités est identique à l'action exercée par le fil à l'autre extrémité.

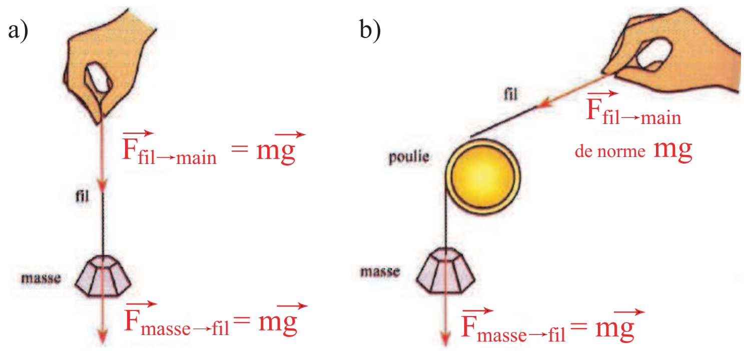


FIGURE X.4 – *Forces de tension faisant intervenir a) un fil de masse nulle et b) une poulie sans frottement.*

On pourra traiter le pendule simple à la partie IV.3 comme exemple d'application.

III.3 Force de rappel élastique

Définition X.20 – Force de rappel élastique

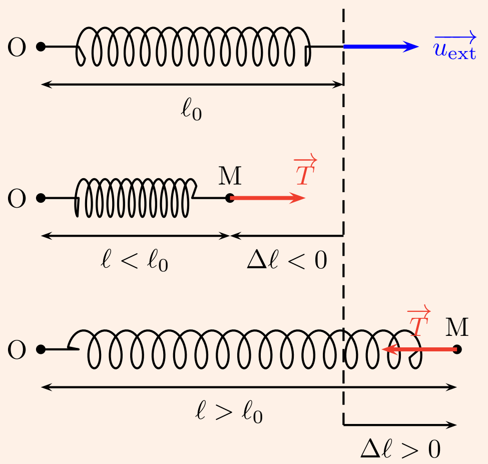
Il s'agit de la force exercée sur un objet par un système déformable (ressort, élastique, membranes) en **réponse à une déformation**.

Propriété X.12 – Force de rappel élastique

- ⋆ À l'échelle microscopique, elle résulte de l'interaction électromagnétique.
- ⋆ À l'échelle macroscopique, la force de rappel $\overrightarrow{F_{\text{élas}}}$ qui s'exerce sur un objet M attaché à une extrémité prend la forme d'une relation de proportionnalité empirique[a] :

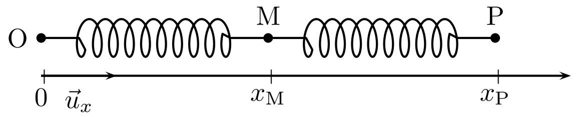
$$\boxed{\overrightarrow{F_{\text{élas}}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\ \overrightarrow{u_{\text{ext}}}}$$

- ⋆ $\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$ est ainsi un vecteur unitaire orienté vers **l'extérieur du ressort**.
- ⋆ k est la **constante de raideur** du ressort qui s'exprime en N.m^{-1}, de dimension $[k] = \frac{M.L.T^{-2}}{L} = M.T^{-2}$.
- ⋆ $\ell(t) > 0$, est la longueur instantanée du ressort. **Avant toute poursuite d'un exercice, il convient d'exprimer ℓ en fonction des variables d'espace du problème**.
- ⋆ $\ell_0 > 0$ est la **longueur à vide**, c'est-à-dire lorsque le ressort n'est soumis à aucune force. On a accès à ℓ_0 en posant par exemple le ressort sur une table horizontale.
- ⋆ En fonction de l'allongement $\Delta\ell(t) = \ell(t) - \ell_0$ du ressort, cette force est dirigée :
  - vers l'extérieur du ressort quand le ressort est **comprimé** ($\Delta\ell < 0$),
  - vers l'intérieur du ressort quand celui-ci est **étiré** ($\Delta\ell > 0$).



a. Il s'agit de la loi de Hooke. Cette relation n'est valable que pour une gamme de longueur de ressort. Au-delà de cette gamme de longueur, le comportement du ressort devient non-linéaire et la loi de Hooke ne s'applique plus.

Exemple – Masses accrochée à plusieurs ressorts



III.4 Force de réaction d'un support

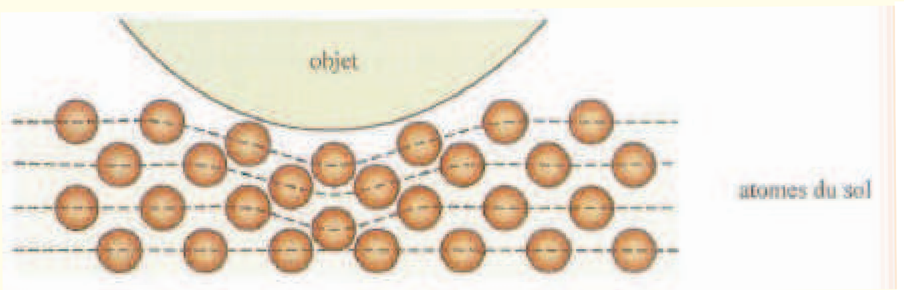
Définition X.21 – Support

Un **support** est une surface, une glissière ou un point fixe limitant le mouvement du point ou de l'objet étudié dans certaines directions de l'espace. On distingue communément deux types de liaisons entre l'objet étudié et le support :

- La liaison est **unilatérale** si l'objet étudié ne peut pas traverser le support, mais peut s'en détacher. *Exemples : objet posé sur une table, bille sur un plan incliné....*
- La liaison est **bilatérale** si l'objet étudié est contraint de rester en contact avec le support. *Exemples : anneau sur une tige, bille dans un tube....*

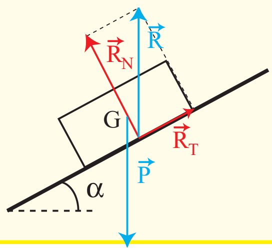
Définition X.22 – Force de réaction d'un support

⋆ A l'échelle microscopique, on peut expliquer la force de réaction $\overrightarrow{R}$ comme un cas particulier de force de rappel : le support exerce une force pour s'opposer à sa déformation.



⋆ Echelle macroscopique, cette déformation n'est pas perceptible, et on écrit la force de réaction comme la somme d'une **composante normale** $\overrightarrow{R}_N$, perpendiculaire au support, et d'une **composante tangentielle** $\overrightarrow{R}_T$:

$$\boxed{\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{R}_T}$$



Propriété X.13 – Composante normale de la réaction d'un support

⋆ Comme la tension d'un fil, **elle n'a pas d'expression générale** et peut être déterminée à partir de l'étude mécanique du système. **Il ne faut pas l'oublier !**

⋆ **Lorsque l'objet considéré quitte le support**, la réaction normale s'annule :

$$\boxed{||\overrightarrow{R}_N|| = 0 \quad \text{si le contact est rompu}}$$

⋆ Si le support est une tige, on prendra garde à bien considérer que l'orthogonalité à un axe définie un plan et donc une réaction normale qui se décomposera le plus souvent sur deux des trois vecteurs de base.

Propriété X.14 – Composante tangentielle de la réaction d'un support

Elle correspond à un terme de frottement, qualifié de **frottement solide**. On distingue deux expression connues sous le nom de **lois de Coulomb**.

- ⋆ **Pour un objet immobile**, la force de frottement solide s'oppose au glissement de l'objet sur le support et sa norme vérifie :

$$\boxed{||\overrightarrow{R}_T|| \leq \mu_s||\overrightarrow{R}_N||}$$

où μ_s est le **coefficient de frottement statique**.
Lorsque $||\overrightarrow{R}_T|| = \mu_s||\overrightarrow{R}_N||$, il y a **glissement**. Concrètement, cela signifie que plus on presse l'objet sur le support (plus on augmente la réaction normale), plus le frottement solide peut prendre une valeur élevée.

- ⋆ **Pour un objet en mouvement**, la force de frottement solide **s'oppose au vecteur vitesse** et s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_T = -\mu_c||\overrightarrow{R}_N||\overrightarrow{u}_v} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{u}_v = \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$$

où μ_c est appelé **coefficient de frottement cinétique**. Cela signifie que plus on presse un objet sur un support, plus la force de frottement est intense. On peut s'en convaincre en poussant un objet en appuyant dessus et sans appuyer pour sentir la résistance changer.

Exemple – Palet en équilibre sur un plan incliné

Sur la figure ci-dessus, l'équilibre du palet sur le plan incliné implique que : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ et donc que $R_T = P\sin\alpha$. Il n'y a pas glissement tant que $P\sin\alpha_s < \mu_s R_N = \mu_s P\cos\alpha_s$, c'est à dire tant que :

$$\boxed{\tan\alpha_s < \mu_s}$$

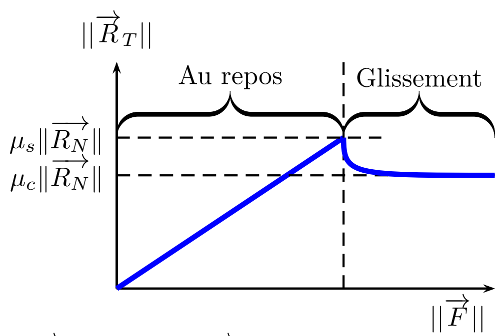
On parle alors d'**arc-boutement**. On notera que la masse de l'objet n'intervient pas. Si on augmente progressivement α, il va y avoir glissement dès que :

$$\tan\alpha_s = \mu_s$$

Ce phénomène est pris en compte pour le calcul de l'angle des pas de vis pour éviter que les vis ne se dévissent toutes seules.

Remarque : μ_s et μ_c sont des **grandeurs expérimentales** qui dépendent de l'objet et de la surface considérés. On constate généralement que $\mu_c < \mu_s$.

Ceci peut s'expliquer à partir de considérations microscopiques (voir figure X.5) : les surfaces en contact sont nécessairement plus proches dans le cas de l'immobilité que dans le cas d'un mouvement, et les interactions électromagnétiques sont donc plus faibles dans le cas d'un objet en mouvement.



Si l'on applique sur un palet au repos sur un plan horizontal une force $\overrightarrow{F}$ de norme $||\overrightarrow{F}||$ horizontalement, on observe expérimentalement les résultats de la figure ci-dessus.

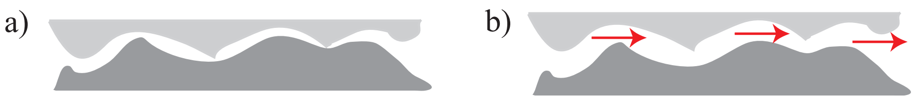
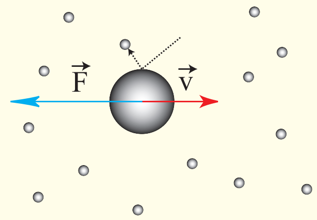


Figure X.5 – *Frottement solide a) sans glissement et b) avec glissement.*

III.5 Force de frottement fluide - Trainée

Définition X.23 – Force de frottement fluide

C'est la force de frottement qui s'exerce sur un objet en mouvement dans un liquide ou un gaz, états de la matière que l'on regroupe sous le terme de **fluide**.



⋆ Echelle microscopique, celle-ci résulte des chocs entre l'objet et les particules qui constituent le fluide.

⋆ Cette force dépend de la vitesse de l'objet (on peut s'en convaincre en pensant qu'on heurte moins de personnes en marchant qu'en courant dans une foule) à travers sa masse et sa forme. Elle dépend aussi naturellement du fluide traversé à travers la ***viscosité*** et la ***densité*** de celui-ci.

Propriété X.15 – Expression de la force de frottement fluide

On admettra que :

- Si la vitesse est faible $\alpha(\vec{v}) = Cte > 0$: la force est proportionnelle à la norme de la vitesse.

Si la vitesse est faible $\boxed{\vec{F} = -\alpha\vec{v}}$

- Si la vitesse est élevée $\alpha(\vec{v}) = \beta||\vec{v}||$, avec $\beta = Cte > 0$: la force est proportionnelle au carré de la norme de la vitesse.

Si la vitesse est élevée $\boxed{\vec{F} = -\beta||\vec{v}||\vec{v}}$

Quelle que soit la situation, $\alpha > 0$ est appelé **coefficient de frottement fluide**.

Remarques :

⋆ La transition d'un régime à l'autre dépend de la situation expérimentale rencontrée et sera soit établie numériquement, soit imposée par un énoncé.

⋆ La présence de cette force limite souvent la vitesse que peut atteindre le système, notamment dans le cas de mouvement rectiligne. Après un régime transitoire, le mouvement de l'objet atteint un régime permanent dans lequel le vecteur-vitesse, ou sa norme, sont constants. La limite de la norme peut d'ailleurs être nulle.

III.6 Poussée d'Archimède

Une dernière force, appelée **poussée d'Archimède**, apparait usuellement dans l'inventaire des forces des systèmes que nous serons amenés à rencontrer.

Définition X.24 – Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède correspond à la résultante des forces de pression s'exerçant sur un système placé dans un champ de pesanteur non-uniforme entrainant lui-même la non-uniformité du champ de pression à l'intérieur d'un fluide.

Remarque : cette étude théorique sort du cadre de l'enseignement de première année.

Théorème X.2 – Enoncé de la loi d'Archimède

Un corps $(\mathcal{S})$ totalement immergé dans un fluide au repos est soumis de la part de ce fluide à des forces de pression dont la résultante est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = -m_f\,\overrightarrow{g} = -\rho_f V\,\overrightarrow{g}}$$

On note que :

- ⋆ Cette force s'applique au centre de masse du système.
- ⋆ m_f correspond à la masse de fluide remplacé par le système $\mathcal{S}$ qui s'écrit $\rho_f V$ où V est le volume de $\mathcal{S}$ immergé dans le fluide et où ρ_f est la masse volumique du fluide.

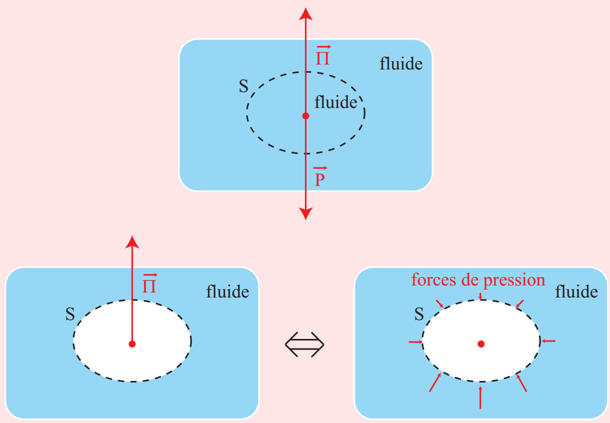


FIGURE X.6 – *La poussée d'Archimède correspond à la résultante des forces de pression s'exerçant sur un corps immergé délimité par la surface fermée S. Lorsque la surface S contient un fluide de même nature, il y a équilibre, c'est donc que la poussée d'Archimède s'oppose au poids du fluide compris dans la surface S.*

Expérience X.1 – Dépendance de la loi d'Archimède en fonction de ρ_f

- ⋆ **Cette force dépend de la masse volumique du fluide** : prenons un oeuf et plongeons le dans un cristallisoir rempli d'eau. Si cet oeuf est frais, il coule au fond du récipient (c'est une méthode de grand-mère pour savoir si un oeuf un peu vieux est toujours comestible).
Plongeons le maintenant dans ce même cristallisoir rempli d'eau mais cette fois-ci saturée en sel de table. L'oeuf flotte (c'est ce qui vous permet de faire la planche dans l'eau de mer plus facilement qu'à la piscine).

FIGURE X.7 – *La loi d'Archimède fait intervenir la masse volumique du fluide dans lequel le corps est plongé.*

Expérience X.2 – Sens de la force - dépendance en $\overrightarrow{g}$ et en V - indépendance en ρ_S

Cette force dépend du volume de l'objet immergé et non de sa masse : on considère cette fois le montage représenté sur la figure X.8.

Figure X.8 – *Schéma de principe d'une expérience permettant de valider l'expression de la loi d'Archimède.*

On dispose de trois boîtes de mêmes dimensions $L \times \ell \times h$ mais de masses différentes que nous avons munies de ficelle afin de pouvoir les suspendre à un dynamomètre.

Lorsque ce dernier supporte les différentes boîtes, il indique le poids en newton de ces différents objets.

La même expérience sera reproduite pour chacune des boîtes si bien que nous ne l'a décrirons qu'une fois.

Protocole :

- ⋆ On commence par mesurer les dimensions $L \times \ell \times h$ de la boîte à l'aide d'un pied à coulisse.
- ⋆ On place alors la boîte sur une balance de précision au gramme près.
- ⋆ On fixe ensuite la boite à l'extrémité du dynamomètre grâce à sa ficelle. On mesure alors le poids de la boite.
- ⋆ La boite restant attachée au dynamomètre, on l'immerge dans un cristallisoir lui-même placé sur la balance que l'on tare avant de plonger la boite.
- ⋆ On lit dune part l'indication du dynamomètre et d'autre part l'indication de la balance.

Analyse des résultats :

- ⋆ **Observation 1** : on note que l'indication de la balance est la même quelque soit la boîte utilisée. Ceci montre, par application de la loi des actions réciproques, que la poussée d'Archimède ne dépend pas de la masse de l'objet immergé.
- ⋆ **Observation 2** : on note que l'indication du dynamomètre est plus faible ce qui indique que le poids apparents de la boite est plus faible et donc que la poussée d'Archimède est bien dirigée dans un sens opposée au poids par symétrie du problème.
- ⋆ **Observation 3** : cette diminution de la mesure du poids apparent des boîtes est indépendant de la boîte et correspond exactement au poids mesuré par la balance, ce qui permet de vérifier la loi des actions réciproques. En outre, cette diminution est égale au produit $L \times \ell \times h \times g \times \rho_{eau}$.

Ceci permet de valider entièrement l'expression de la poussée d'Archimède posée ci-dessus.

IV Comment résoudre un problème de mécanique ?

IV.1 Méthode générale

Méthode X.2 – Méthode générale de résolution d'un problème de mécanique

① Définir le système (point matériel) étudié.

② Choisir le référentiel d'étude et préciser son caractère galiléen (ou non).

③ Recenser toutes les forces appliquées au système et faire un schéma.

④ Choisir une base de projection et écrire les expressions des grandeurs cinématiques dans cette base.

⑤ Choisir le théorème approprié (pour l'instant, nous n'utiliserons que la loi de la quantité de mouvement) à l'équilibre ou hors équilibre.

⑥ Projeter les vecteurs sur les axes de la base de projection pour obtenir des relations scalaires.

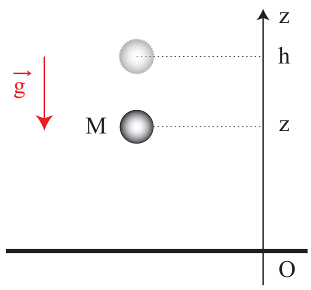
⑦ Résoudre les équations différentielles obtenues en utilisant les conditions initiales.

IV.2 Exemple 1 : Chute libre

IV.2.a En l'absence de frottement fluide

Exemple – Chute d'une bille dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme

On lâche une bille de masse m d'une hauteur h sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur, et on néglige les frottements dans un premier temps. On souhaite établir les équations horaires du mouvement.



1. Le système étudié est la bille, assimilée à un point matériel M.
2. On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre assimilé à un référentiel galiléen.
3. Une seule force s'exerce sur le point M : le poids $\overrightarrow{P} = m\vec{g}$.
4. On choisit les coordonnées cartésiennes, et on repère le point M par sa cote z le long de l'axe vertical ascendant Oz de vecteur unitaire $\vec{u}_z$.
5. L'application du principe fondamental de la dynamique donne :
$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_z$$
6. En projetant les trois axes Ox, Oy et Oz, on obtient : $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$
7. Par intégration, en utilisant les conditions initiales, on obtient : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$

IV.2.b Prise en compte d'un frottement fluide linéaire

Exercice X.3 – Chute dans le champ de pesanteur terrestre avec frottement fluide linéaire

Reprendre la question précédente en prenant en compte des frottements linéaires.

IV.2.c Prise en compte d'un frottement fluide quadratique

Exercice X.4 – Chute dans le champ de pesanteur terrestre avec frottement quadratique

Reprendre la question précédente en prenant cette fois en compte des frottements quadratiques.

L'équation différentielle selon l'axe vertical ascendant s'écrit : $m\ddot{z} = -mg + \beta\dot{z}^2$. Il s'agit d'une équation différentielle **Non Linéaire** à coefficients constants d'ordre 1 en $\dot{z}$ dont la solution générale **N'est Pas** la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière. On pose :

$$\dot{z} = \lambda \times v^* \quad v^* \text{ vitesse caractéristique} \quad \text{et} \quad t = \mu \times t^* \quad t^* \text{ temps caractéristique}$$

Alors, l'adimensionnement de l'équation conduit à :

$$m\ddot{z} = m\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{mv^*}{t^*}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}$$

donc :

$$\frac{mv^*}{t^*}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} = -mg + \beta {v^*}^2\lambda^2 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} = -\frac{gt^*}{v^*} + \frac{\beta v^* t^*}{m}\lambda^2$$

On pose alors $t^* = \dfrac{v^*}{g}$ et $\beta v^* t^* = m$ et donc :

$$\boxed{v^* = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}} \quad \text{et} \quad \boxed{t^* = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}}$$

Finalement, on obtient l'équation adimensionnée :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu} = -1 + \lambda^2$$

On intègre alors cette équation par séparation des variables :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2 - 1} = \mathrm{d}\mu \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{-\,\mathrm{d}\lambda}{1-\lambda} - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda+1}\right) = \mathrm{d}\mu$$

L'intégrale de cette relation donne :

$$\ln(1-\lambda) - \ln(\lambda+1) = 2\mu + K$$

où K est une constante. Or à $t = 0$, $\lambda = 0$ et $\mu = 0$ donc $K = 0$. Finalement,

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \mathrm{e}^{2\mu} \quad \text{ou encore} \quad \lambda = \frac{1-\mathrm{e}^{2\mu}}{1+\mathrm{e}^{2\mu}} = -\tanh(\mu)$$

On peut alors utiliser les expressions de λ et μ pour déterminer l'expression de $\dot{z}(t)$:

$$\boxed{\dot{z}(t) = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}}\,\tanh\left(\sqrt{\frac{g\beta}{m}}\,t\right)}$$

et obtenir enfin celle de $z(t)$:

$$\boxed{z(t) = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}}\,\ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{g\beta}{m}}\,t\right)\right) + H}$$

IV.3 Exemple 2 : Pendule simple

IV.3.a En l'absence de frottements

Exercice X.5 – Etude d'un pendule simple

Soit un pendule constitué d'une masse m suspendue à un fil de masse négligeable et de longueur ℓ accroché en un point fixe O. On appelle θ l'angle entre la verticale descendante et la direction du fil. La masse m est lâchée sans vitesse initiale d'une position θ_0.

Etablir l'équation du mouvement et préciser ces caractéristiques.

IV.3.b Intégrale première du mouvement et portrait de phase

Méthode X.3 – Intégrale première du mouvement

Obtenir l'intégrale première du mouvement.

Méthode X.4 – Portrait de phase

Obtenir le portrait de phase du mouvement.