TD n°8: Circuits linéaires en régime transitoire

Exercice 2 - question subsidiaire

Solution analytique

On s'intéresse au régime transitoire suivi par la tension u aux bornes du condensateur d'un circuit RC, initialement déchargé et soumis à un signal créneau entre $-E_0$ et E_0.

L'exercice a pour objectif d'établir les limites u_+ et u_-du signal $u_C(t)$ lorsque le régime permanent est atteint.

On part donc du constat suivant :

⋆ $u(0) = 0$

⋆ Pour $(2p)\dfrac{T}{2} \leq t \leq (2p+1)\dfrac{T}{2}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = \frac{E_0}{\tau}}$$

⋆ Pour $(2p+1)\dfrac{T}{2} \leq t \leq 2(p+1)\dfrac{T}{2}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = -\frac{E_0}{\tau}}$$

Etudions pour commencer le premier cas. La solution complète de cette partie du régime est :

$$\boxed{u(t) = \left(u\left((2p)\frac{T}{2}\right) - E_0\right)\exp\left(-\frac{t-kT}{\tau}\right) + E_0}$$

Donc, en $(2p+1)\dfrac{T}{2}$:

$$u\left((2p+1)\frac{T}{2}\right) = u\left(2p\frac{T}{2}\right)\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) + E_0\left(1 - \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)\right)$$

De même, on montre que :

$$u\left(2(p+1)\frac{T}{2}\right) = u\left((2p+1)\frac{T}{2}\right)\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) - E_0\left(1 - \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)\right)$$

Soit :

$$u\left(2(p+1)\frac{T}{2}\right) = u\left(2p\frac{T}{2}\right)\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) + E_0\left(-\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) + 2\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) - 1\right)$$

ou encore :

$$\boxed{u\left((p+1)T\right) = u\left(pT\right)\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) + E_0\left[-\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) + 2\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right) - 1\right]}$$

Par récurrence, on montre alors que :

$$\boxed{u\left(pT\right)=u(0)\exp\left(-p\frac{T}{\tau}\right)+E_0\left[-\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)+2\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)-1\right]\sum_{n=0}^{p-1}\exp\left(-n\frac{T}{\tau}\right)}$$

Ainsi, lorsque on laisse passer un très grand nombre de période, la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur atteint périodiquement la limite u_- :

$$\boxed{u_-=-E_0\left[1-2\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)+\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)\right]\times\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}}$$

Remarque : ce résultat général permet de retrouver le cas limite pour lequel $T\gg\tau$. On retrouve en effet que :

$$\lim_{T\gg\tau}\left(u_-\right)=-E_0$$

En adoptant la même démarche, on montre encore que :

$$\boxed{u\left(pT+\frac{T}{2}\right)=u\left(\frac{T}{2}\right)\exp\left(-p\frac{T}{\tau}\right)+E_0\left[\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)-2\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)+1\right]\sum_{n=0}^{p-1}\exp\left(-n\frac{T}{\tau}\right)}$$

La borne supérieure u_+ de la tension $u(t)$ est alors :

$$\boxed{u_+=E_0\left[1-2\exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)+\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)\right]\times\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}=-u_-}$$

Remarque : ce résultat général permet de retrouver le cas limite pour lequel $T\gg\tau$. On retrouve en effet que :

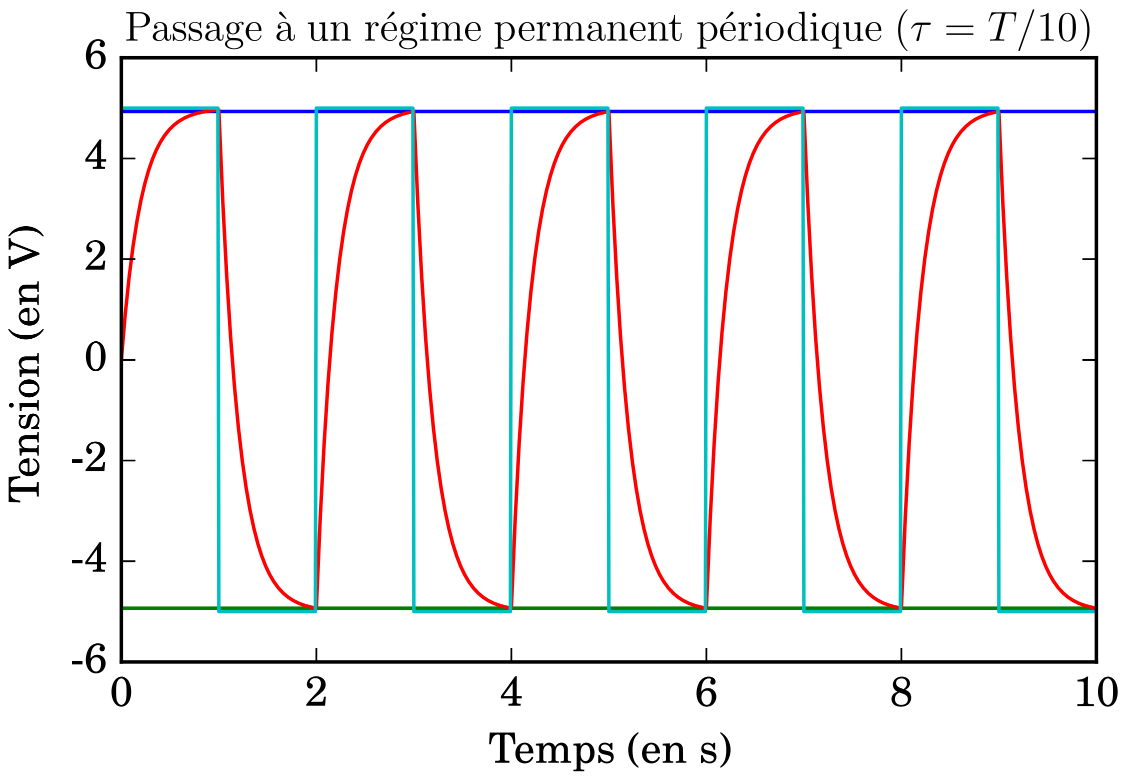
$$\lim_{T\gg\tau}\left(u_+\right)=E_0$$

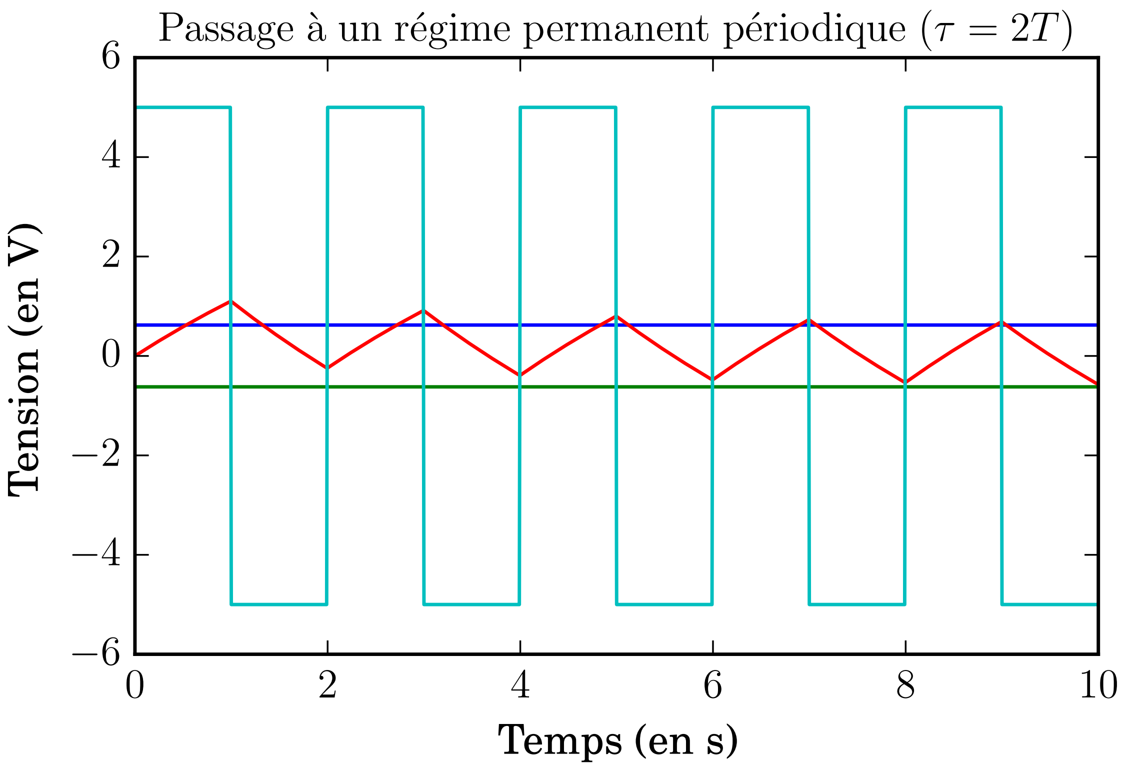
Code Python

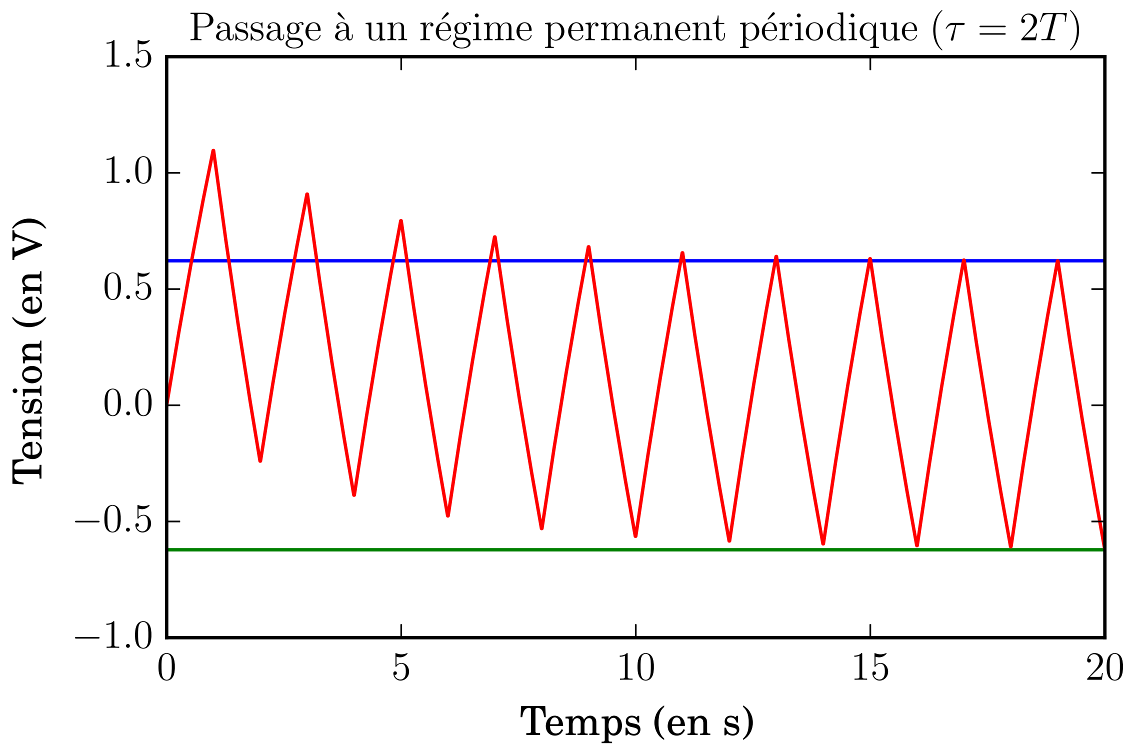
```
from scipy import *
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt


plt.close()

def deriv1(x,t):
    return -x/tau + E0/tau

def deriv2(x,t):
    return -x/tau - E0/tau

def isEven(number):
    return number % 2 == 0

E0 = 5.
tau = 0.2
DemiPeriode = 1
NIteration=100
DeltaTps=DemiPeriode/NIteration
NDemiPeriode = 10
tps=np.zeros(NIteration)
ValeurTension=np.zeros(NIteration)
temps=np.zeros(NIteration)
temps2=np.zeros(NIteration)
uPlus=np.zeros(NIteration*(NDemiPeriode))
uMoins=np.zeros(NIteration*(NDemiPeriode))
Excitation=np.zeros(NIteration)
ValeurExcitation=np.zeros(NIteration)
for i in range(NIteration*(NDemiPeriode)):
    uPlus[i]=E0*(1-2*exp(-DemiPeriode/tau) +
    exp(-2*DemiPeriode/tau))*1/(1-exp(-2*DemiPeriode/tau))
for i in range(NIteration*(NDemiPeriode)):
    uMoins[i]=-E0*(1-2*exp(-DemiPeriode/tau) +
    exp(-2*DemiPeriode/tau))*1/(1-exp(-2*DemiPeriode/tau))
for i in range(NIteration):
    temps[i] = i*DeltaTps
    tps[i] = temps[i]

x0 = 0
sols = odeint(deriv1,x0,temps)


x = sols[:,0]
for i in range(NIteration):
    ValeurTension[i]=x[i]
for i in range(NIteration):
    ValeurExcitation[i]=E0
```

```
for p in range(NDemiPeriode-1):
    if isEven(p):
        x0 = ValeurTension[-1]
        sols = odeint(deriv2,x0,temps)
        tension = sols[:,0]
        for i in range(NIteration):
            Excitation[i]=-E0
    else:
        x0 = ValeurTension[-1]
        sols = odeint(deriv1,x0,temps)
        tension = sols[:,0]
        for i in range(NIteration):
            Excitation[i]=E0
    for i in range(NIteration):
        temps2[i] = i*DeltaTps+(p+1)*DemiPeriode
    ValeurTension=np.append(ValeurTension,tension)
    ValeurExcitation=np.append(ValeurExcitation,Excitation)
    tps=np.append(tps,temps2)

plt.plot(tps,ValeurTension)
plt.plot(tps,ValeurExcitation)
plt.plot(tps,uPlus)
plt.plot(tps,uMoins)
plt.show()
```

Courbes simulées numériquement






Passage à un régime permanent périodique ($\tau = 2T$)
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20
Tension (en V)
Temps (en s)