# Annexe : Etude théorique du quartz

## I Etude du quartz

### I.1 L'effet piézo-électrique

La piézo-électricité est un phénomène spécifique de certains cristaux anisotropes dont le plus connu est le quartz (variété polymorphique très répandue de la silice SiO2), découvert en 1880 par Jacques et Pierre Curie. Ce phénomène est l'ensemble de deux effets :

— l'effet piézo-électrique direct : soumis à une contraintemécanique, le cristal acquiert une polarisation électrique et des charges électriques apparaissent à sa surface ;

— l'effet piézo-électrique inverse : soumis à un champ électrique, le cristal se déforme.

Les applications de la piézo-électricité sont nombreuses, par exemple : capteurs de forces et de pression, transducteurs à ultrasons, résonateurs à quartz (filtres, horloges), etc.

### I.2 Modélisation électrique

Le résonateur à quartz, composé d'une lame de quartz partiellement métallisée sur ces deux faces, est modélisé par le circuit électrique de la figure 1 :

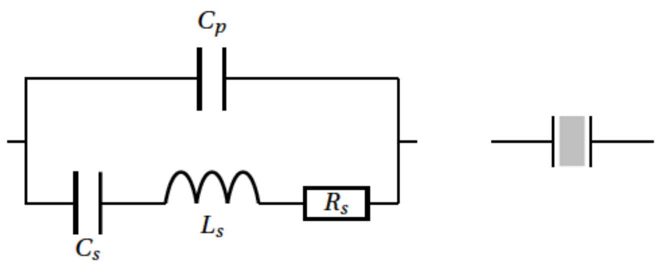


FIG. 1 – Schéma électrique équivalent d'un quartz et sa représentation symbolique (à droite)

La capacité $C_P$ traduit les effets capacitifs cumulés entre les deux électrodes, le boîtier métallique et les fils de liaison ; la résistance $R_S$ traduit la résistance de l'air et l'action des points de fixation de la lame sur son support, les paramètres $C_S$ et $L_S$ sont la traduction électrique des oscillations mécaniques du réseau cristallin.

### I.3 Etude théorique de l'admittance du quartz

#### I.3.a Quartz sans amortissement

En première approximation, on néglige l'amortissement ($R_S = 0$).Dans de telles conditions, on montre que l'admittance $\underline{Y}(\omega)$ du quartz s'écrit :

$$\underline{Y}(\omega) = j\left(C_P\omega + \frac{C_S\omega}{1 - L_S C_S \omega^2}\right)$$

✍ Déterminer mathématiquement :

— la pulsation de résonance $\omega_r$, c'est-à-dire la pulsation pour laquelle l'admittance est de module infini : l'intensité qui traverse le quartz est théoriquement infinie, en pratique maximale ;
— la pulsation d'antirésonance $\omega_a \neq 0$ pour laquelle l'admittance est nulle : l'intensité qui traverse le quartz est donc nulle.

On définit les quantités :

⋆ $Q_S = \dfrac{L_S \omega_r}{R_S}$, facteur de qualité de la branche série $L_S$, $C_S$, $R_S$ ;

⋆ $M = \dfrac{1}{R_S C_P \omega_r}$, le rapport des intensités dans les deux branches en parallèle à la résonance.

Avec ces notation , on montre que :

$$\omega_a^2 = \omega_r^2 \left(1 + \frac{M}{Q_S}\right)$$

✍ Pour le quartz étudié, les ordres de grandeurs de ces quantités sont $Q_S = 10^4$ à $10^5$ et $M = 10$ à 100. Que peut-on en déduire pour les pulsations $\omega_a$ et $\omega_r$ ?

### I.3.b Quartz avec amortissement

Dans toute la suite on tient compte de l'amortissement. Celui-ci étant pris en compte l'admittance du circuit devient :

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R_S}\left(\frac{j\omega}{M\omega_r} + \frac{1}{1 + jQ_S\left(\dfrac{\omega}{\omega_r} + \dfrac{\omega_r}{\omega}\right)}\right)$$

Vu les ordres de grandeurs de $Q_S$ et $M$, on admettra que la pulsation de résonance est toujours $\omega_r$, et la pulsation d'antirésonance $\omega_a$. La non nullité de $R_S$ modifie ces valeurs, mais de quantités qui sont de l'ordre de quelques dizaines de mHz, ce qui est très nettement inférieur à la précision des mesures effectuées dans la suite.

Au voisinage de la résonance, l'admittance vaut :

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R_S}\left(\frac{1}{1 + jQ\dfrac{2\Delta\omega}{\omega_r}}\right) \quad \text{avec} \quad |\underline{Y}(\omega_r)| = |\underline{Y}(\omega)|_{\max} = \frac{1}{R_S}$$

tandis qu'autour de l'antirésonance, on a

$$|\underline{Y}(\omega_a)| \simeq \frac{1}{R_S M^2}$$