

Corrigé - DM n°10: Architecture de la matière et mécanique

I Seul sur Mars

I.1 La planète Mars

1. ★ Première loi : les planètes du système solaire décrivent dans le référentiel héliocentrique des trajectoires elliptiques dont le Soleil est l'un des foyers.
- ★ Deuxième loi : les planètes obéissent à la loi des aires. Le vecteur \overrightarrow{SP} d'une planète balaie des aires égales pendant des durées égales.
- ★ Troisième loi : le rapport du carré de la période de révolution d'une planète autour du Soleil sur le cube du demi-grand axe de cette ellipse est indépendant de la planète considérée.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

2. On s'intéresse au système {planète} assimilé à un point matériel P de masse M_P en interaction uniquement avec le Soleil S dans le référentiel héliocentrique. La planète ne subit que la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F} = -G \frac{M_P M_S}{PS^3} \overrightarrow{SP}$. Il s'agit d'une force centrale dont le moment par rapport à S est nul :

$$\vec{M}_S(\vec{F}) = \overrightarrow{SP} \wedge \left(-G \frac{M_P M_S}{PS^3} \overrightarrow{SP} \right) = \vec{0}$$

Soit $\vec{\mathcal{L}}_S(P)$ le moment cinétique de P dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Le théorème du moment cinétique appliqué à P s'écrit :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_S(P)}{dt} = \vec{M}_S(\vec{F}) = \vec{0}$$

Le moment cinétique de P est donc un vecteur constant.

Par définition du moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_S(P) = \overrightarrow{SP} \wedge M_P \vec{v}(P)$, le vecteur position \overrightarrow{SP} est à tout instant inclus dans le plan orthogonal à $\vec{\mathcal{L}}_S(P)$ passant par S. La trajectoire de P est donc plane.

3. Toujours avec le même système, appliquons la deuxième loi de Newton à la planète P décrivant une trajectoire circulaire de rayon R dans le référentiel héliocentrique toujours supposé galiléen. On utilise un système de coordonnées cylindriques.

$$\begin{pmatrix} -M_P R \dot{\theta}^2 \\ M_P R \ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G \frac{M_P M_S}{R^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La projection radiale donne :

$$R^3 \dot{\theta}^2 = GM_S$$

et la projection orthoradiale donne :

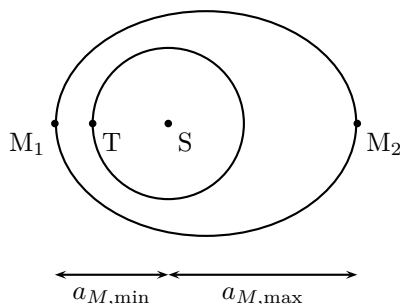
$$\ddot{\theta} = 0$$

soit $\dot{\theta} = cste$. La trajectoire circulaire est donc décrite de façon uniforme. Or, dans ce cas, $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T_P}$ avec T_P la période de révolution de la planète P autour du Soleil. La projection radiale s'écrit donc

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$$

ce qui correspond à la troisième loi de Kepler.

4. Représentons les situations. Les données de l'énoncé fournissent beaucoup d'informations : l'année martienne est notamment plus longue que l'année terrestre. D'après la troisième loi de Kepler, l'orbite martienne est donc extérieure à l'orbite terrestre.



Sur ce dessin, on peut remarquer que la distance entre la Terre et le Soleil est minimale pour un alignement Mars-Terre-Soleil. Cette situation correspond donc à la durée minimale Δt_{\min} de réception d'un signal entre les deux planètes. À l'inverse, lorsque les astres sont alignés dans l'ordre Terre-Soleil-Mars, la distance est maximale et correspond à la durée maximale Δt_{\max} entre émission et réception d'un signal entre les deux planètes. On a donc :

$$TM_1 = c\Delta t_{\min} = a_{M,\min} - a_T \quad \text{et} \quad TM_2 = c\Delta t_{\max} = a_{M,\max} + a_T$$

On en déduit :

$$a_{M,\min} = a_T + c\Delta t_{\min} = 2,40 \times 10^8 \text{ km} \quad \text{et} \quad a_{M,\max} = c\Delta t_{\max} - a_T = 2,46 \times 10^8 \text{ km}$$

On en déduit le demi-grand axe de l'orbite :

$$a_M = \frac{a_{M,\min} + a_{M,\max}}{2} = 2,43 \times 10^8 \text{ km}$$

5. D'après la troisième de Kepler pour Mars et la Terre :

$$\frac{a_M^3}{T_M^2} = \frac{a_T^3}{T_T^2}$$

et donc :

$$a_M = \left(\frac{T_M}{T_T} \right)^{2/3} = 2,29 \times 10^8 \text{ km}$$

Il s'agit d'une erreur proche de la précédente mais pas exact. On trouve la bonne valeur au deuxième chiffre significatif près ce qui semble acceptable au regard des hypothèses formulées par l'énoncé.

6. Toujours avec la troisième loi de Kepler :

$$\frac{a_M^3}{T_M^2} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

et donc :

$$M_S = \frac{4\pi^2 a_M^3}{GT_M^2} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

7. En négligeant le terme axifuge dans le poids, on obtient :

$$\vec{g}_M = -\frac{GM_M}{R_M^2} \quad \text{et} \quad \vec{g}_T = -\frac{GM_T}{R_T^2}$$

On en déduit :

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{M_M}{M_T} \left(\frac{R_T}{R_M} \right)^2$$

Avec l'hypothèse de répartition de masse homogène à symétrie sphérique, on peut écrire :

$$M_M = \frac{4}{3}\pi R_M^3 \rho_M \quad \text{et} \quad M_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho_T$$

avec ρ_M et ρ_T les masses volumiques des deux planètes. Ainsi :

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{\rho_M R_M^3}{\rho_T R_T^3} \left(\frac{R_T}{R_M} \right)^2 = \frac{\rho_M R_M}{\rho_T R_T}$$

L'application numérique donne $g_M = 3,7 \text{ m s}^{-2}$.

I.2 Sauvetage de Mark Watney par le vaisseau Hermès

Trajectoire du vaisseau Hermès

8. Le périhélie de l'orbite de transfert est situé sur l'orbite terrestre, son aphélie sur l'orbite de martienne :

$$a = \frac{a_T + a_M}{2} = 1,89 \times 10^8 \text{ km}$$

9. Soit $\Delta t_{\text{transfert}}$ la durée du transfert qui correspond à la moitié de la période de révolution sur l'orbite de transfert. Toujours d'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{a^3}{2\Delta t_{\text{transfert}}} = \frac{a_M^3}{T_M^2}$$

soit :

$$\Delta t_{\text{transfert}} = \frac{T_M}{2} \left(\frac{a}{a_M} \right)^{3/2} = 259 \text{ jours}$$

En ce qui concerne les positions des planètes, prenons comme origine des angles la position de Mars notée M_1 dans cette partie. On a alors :

★ la position initiale de la Terre correspond à $\theta_{T,0} = -\pi$

★ la position initiale de Mars vérifie :

$$\theta_{M,1} = \theta_{M,0} + \Omega_M \Delta t_{\text{transfert}}$$

où $\Omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ est la pulsation angulaire de Mars (la trajectoire étant supposée circulaire, on a déjà montré que le mouvement était forcément uniforme et donc Ω_M est constant). On en déduit $\theta_{M,0} = -136^\circ$.

★ la position de la Terre au moment de la fin du transfert est donnée par :

$$\theta_{T,1} = \theta_{T,0} - \Omega_T \Delta t_{\text{transfert}}$$

où $\Omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$ est la pulsation angulaire de la Terre. On en déduit $\theta_{T,1} = 75,3^\circ$.

10. Pour effectuer un nouveau transfert, Mars et la Terre doivent se retrouver dans la même position relative par rapport au Soleil caractérisée par $\theta_M - \theta_T$ au moment du début du nouveau transfert. En notant T_s la durée séparant les débuts de deux transferts successifs et t_0 l'instant auquel le premier transfert débute, on a :

$$\theta_T(t_0 + T_s) - \theta_M(t_0 + T_s) = (\theta_T(t_0) - \theta_M(t_0)) [2\pi]$$

Or :

$$\theta_T(t_0 + T_s) = \theta_T(t_0) + 2\pi \frac{T_s}{T_T} \quad \text{et} \quad \theta_M(t_0 + T_s) = \theta_M(t_0) + 2\pi \frac{T_s}{T_M}$$

Ceci conduit à :

$$T_s \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right) = 1$$

pour un délai minimal entre deux lancements. On aboutit à :

$$T_s = \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)^{-1} = 780 \text{ jours}$$

11. La position initiale T_0 de la Terre doit être à l'opposé de la position M_1 de Mars à la fin du transfert :

$$\theta_{M,1} - \theta_{T,0} = \pi$$

De même la position T_3 de la Terre à la fin du transfert de retour doit être à l'opposé de la position M_2 de Mars au départ de ce transfert :

$$\theta_{T,3} - \theta_{M,2} = \pi [2\pi]$$

Entre la position T_0 et la position T_3 , il s'écoule la durée des deux transferts et le temps d'attente Δt :

$$\theta_{T,3} = \theta_{T,0} + 2\pi \frac{2\Delta t_{\text{transfert}} + \Delta t}{T_T}$$

De même les positions M_1 et M_2 sont séparées temporellement de la durée d'attente Δt :

$$\theta_{M,2} = \theta_{M,1} + 2\pi \frac{\Delta t}{T_M}$$

On obtient donc :

$$\theta_{M,3} - \theta_{M,2} = \theta_{T,0} - \theta_{M,1} + 2\pi \left(\frac{2\Delta t_{\text{transfert}}}{T_T} + \Delta t \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right) \right)$$

On en déduit :

$$\frac{2\Delta t_{\text{transfert}}}{T_T} + \Delta t \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right) = 0 [2\pi] = n, n \in \mathbb{N}$$

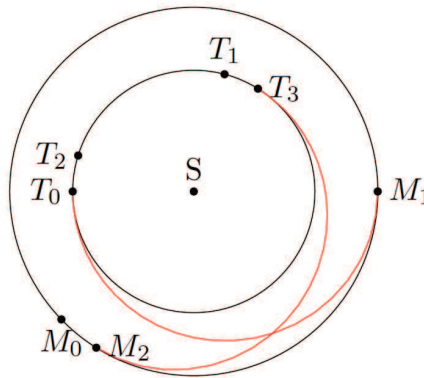
et donc :

$$\Delta t = \left(n - \frac{2\Delta t_{\text{transfert}}}{T_T} \right) \left(\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \right)^{-1} = \left(n - \frac{2\Delta t_{\text{transfert}}}{T_T} \right) T_s$$

On cherche la première valeur de n permettant d'obtenir $\Delta t > 0$. C'est le cas pour $n = 2$ et :

$$\Delta t = 454 \text{ jours}$$

12. Positions des planètes :



13. La mission totale Terre-Mars-Terre dure au minimum $2\Delta t_{\text{transfert}} + \Delta t = 972$ jours.

Il faut ici déterminer la durée minimale d'une mission totale Mars-Terre-Mars. Pour calculer la durée d'attente sur Terre, on peut reprendre le calcul précédent. On peut aussi remarquer que la durée minimale de l'aller-retour Mars-Terre-Mars (nécessairement supérieure à $\Delta t_{\text{transfert}}$) plus le temps d'attente sur Mars précédemment calculé doit correspondre à un nombre entier de périodes synodiques (puisque au bout de cette durée le vaisseau peut repartir en direction de la Terre) :

$$\Delta t_{M-T-M} = nT_s - \Delta t = 1106 \text{ jours} \quad (n = 2)$$

Cette durée correspond à environ trois ans. L'aller-retour grâce à l'orbite de Hohmann n'est donc pas envisageable en 549 jours. Il faut envisager une trajectoire plus complexe, ou alors faire jouer un rôle plus important u système de propulsion.

I.3 La récupération de Mark Watney

14. On applique le théorème de la résultante cinétique au système constitué de la station et du gaz éjecté dans le référentiel de Kepler supposé galiléen, en supposant que l'éjection de gaz est pratiquement instantanée. Ce système est fermé et uniquement soumis à la force gravitationnelle. Compte tenu de la durée très brève de l'éjection, on peut supposer l'effet de cette force négligeable. On considère donc que la quantité de mouvement du système est alors conservée. Initialement la station de masse M_H se déplace à la vitesse V . La masse m_e de gaz est éjectée avec la vitesse v_e par rapport à la station, donc à la vitesse $V + v_e$ par rapport au référentiel de Kepler et après l'éjection de gaz la vitesse de la station a diminué de ΔV .

$$MV = (M - m_e)(V - \Delta V) + m_e(\Delta V + v_e)$$

soit :

$$m_e = M \frac{\Delta V}{\Delta V + v_e} = 2,8 \times 10^4 \text{ kg}$$

Sous une pression de 1 bar, la masse volumique de l'air est d'environ $\mu = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$. Le volume de gaz initial à éjecter vaut alors $\mathcal{V} = 2,4 \times 10^4 \text{ m}^3$. En supposant que les modules cylindriques ont un rayon $R = 10 \text{ m}$, il faudrait une longueur d'environ $L = 76 \text{ m}$ alors que pour $R = 20 \text{ m}$ on obtient $L = 19 \text{ m}$. Le volume nécessaire semble plus important que le volume utile des modules de service.

15. Si les conditions dans le scaphandre sont identiques à celles des modules de service, la vitesse d'éjection est de l'ordre de $v_e = 500 \text{ m s}^{-1}$, et les débits volumique et massique éjectés valent $D_v = Sv = 60 \text{ L s}^{-1}$ et $D_m = Sv_e = 60 \text{ g s}^{-1}$: ces valeurs sont élevées et ne permettent pas de profiter de la poussée pendant une durée supérieure à une dizaine de secondes. Le bilan de quantité de mouvement sur le gaz éjecté donne :

$$\frac{dp}{dt} = D_m (v_e - 0) = \mu S v_e^2 = 30 \text{ N}$$

La poussée disponible est donc de 30 N.

En se plaçant dans le référentiel de la station supposé galiléen, en supposant la poussée $F = 30 \text{ N}$ constante, sur une durée $t = 10 \text{ s}$, pour un scaphandre de masse $M = 150 \text{ kg}$ et une vitesse initiale nulle, le déplacement possible vaut :

$$\ell = \frac{F}{2M} t^2 = 10 \text{ m}$$

Cette distance semble être en accord avec la figure de l'énoncé, mais c'est une limite supérieure qui est très faible. Sur la figure, la poussée n'est pas alignée avec le centre de masse probable du scaphandre, d'où la présence d'un moment non nul : le scaphandre va acquérir un mouvement de rotation, qui risque de le rendre incontrôlable.

I.5 Fabrication d'eau et culture sur Mars

16. Configurations électroniques :

- N : $1s^2 2s^2 2p^3$ possède 5 électrons de valence ;
- O : $1s^2 2s^2 2p^4$ possède 6 électrons de valence ;
- Cl : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ possède 7 électrons de valence ;
- Ir : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2 4f^{14} 5d^7$.

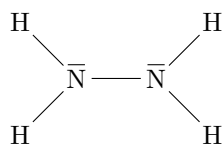
17. Le chlore appartient à la famille des halogènes, tout le comme le fluor F, le brome Br et l'iode I.

18. Les abondances isotopiques x_1 et x_2 sont solution du système d'équations :

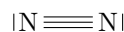
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ M(\text{Cl}) = x_1 M_1 + x_2 M_2 \end{cases}$$

La résolution de ce système fournit $x_1 = \frac{M(\text{Cl}) - M_2}{M_1 - M_2}$ et $x_2 = \frac{M_1 - M(\text{Cl})}{M_1 - M_2}$. Numériquement, on trouve $x_1 = 76\%$ et $x_2 = 24\%$.

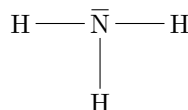
19. La molécule d'hydrazine possède 14 électrons de valence, soit 7 doublets. L'azote appartient à la 2^e période : il doit donc vérifier la règle de l'octet. On en déduit la formule de Lewis suivante :



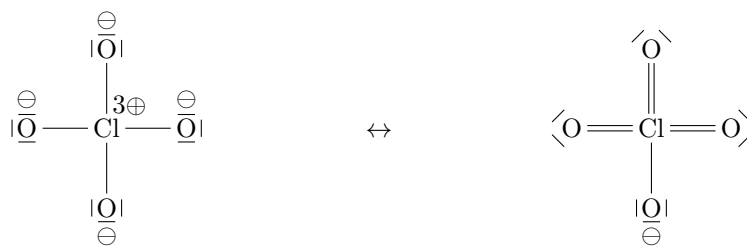
De même, la molécule de diazote possède 10 électrons de valence, soit 5 doublets ; celle possède d'ammoniac 10 électrons de valence, soit 5 doublets. On en déduit les formules de Lewis suivantes :



et



L'ion perchlorate possède $7 + 4 \times 6 + 1 = 32$ électrons de valence, soit 16 doublets. Le chlore appartient à la troisième période. Contrairement à l'oxygène qui appartient à la deuxième, il ne vérifie pas impérativement la règle de l'octet. On en déduit des formules de Lewis mésomères possibles :



20. La combinaison des 3 équations-bilans concernant l'hydrazine donne $5 \text{N}_2\text{H}_4 = 5 \text{N}_2 + 10 \text{H}_2$ soit $\text{N}_2\text{H}_4 = \text{N}_2 + 2 \text{H}_2$, et d'autre part la combustion de H_2 s'écrit $2 \text{H}_2 + \text{O}_2 = 2 \text{H}_2\text{O}$: globalement une mole d'hydrazine permet de former 2 moles d'eau.

On peut écrire pour l'eau et l'hydrazine (n désignant le nombre de moles, M la masse molaire, ρ la masse volumique et V le volume) :

$$V(\text{H}_2\text{O}) = \frac{n(\text{H}_2\text{O})M(\text{H}_2\text{O})}{\rho(\text{H}_2\text{O})} ; V(\text{N}_2\text{H}_4) = \frac{n(\text{N}_2\text{H}_4)M(\text{N}_2\text{H}_4)}{\rho(\text{N}_2\text{H}_4)}$$

comme le nombre de moles d'hydrazine nécessaire est égal à la moitié nombre de moles d'eau à former :

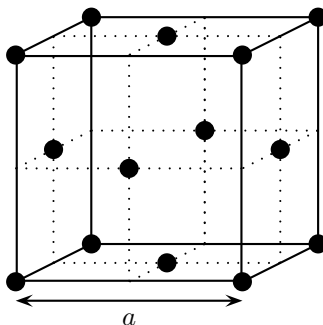
$$\frac{V(\text{N}_2\text{H}_4)}{V(\text{H}_2\text{O})} = \frac{n(\text{N}_2\text{H}_4)}{n(\text{H}_2\text{O})} \frac{M(\text{N}_2\text{H}_4)}{M(\text{H}_2\text{O})} \frac{\rho(\text{H}_2\text{O})}{\rho(\text{N}_2\text{H}_4)} = \frac{1}{2} \frac{M(\text{N}_2\text{H}_4)}{M(\text{H}_2\text{O})} \frac{1}{d(\text{N}_2\text{H}_4)}$$

où d désigne la densité. Avec $V(\text{H}_2\text{O}) = 600 \text{ L}$, $M(\text{N}_2\text{H}_4) = 32 \text{ g mol}^{-1}$ et $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g mol}^{-1}$

$$V(\text{N}_2\text{H}_4) = \frac{M(\text{N}_2\text{H}_4)}{M(\text{H}_2\text{O})} \frac{V(\text{H}_2\text{O})}{2d(\text{N}_2\text{H}_4)}$$

Application numérique : $V(\text{N}_2\text{H}_4) = 523 \text{ L}$.

21. Un catalyseur ne modifie pas l'état d'équilibre thermodynamique, il n'influence que la cinétique de réaction.
22. La maille est cubique de côté a . Les sphères représentant les entités chimiques sont placées aux sommets du cube et au centre des faces. Son allure est donc :



Cette maille CFC comporte 1 atome partagé entre 2 mailles au centre de chacune des 6 faces et 8 atomes partagés entre 8 mailles à chacun des sommets, soit $6/2 + 8/8 = 4$ atomes en propres : la masse d'une maille vaut $m = 4M(\text{Ir})/\mathcal{N}_A$, pour un volume a^3 , soit une masse volumique :

$$\rho = \frac{4M(\text{Ir})}{\mathcal{N}_A a^3} = d\mu(\text{H}_2\text{O})$$

La tangence des atomes se fait selon les diagonales des faces de longueur $\sqrt{2}a$, donc le rayon atomique vérifie $4R = \sqrt{2}a$. Le rayon atomique vérifie donc, avec $M(\text{Ir}) = 192,22 \text{ g mol}^{-1}$:

$$R = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{4M(\text{Ir})}{\mathcal{N}_A d\mu(\text{H}_2\text{O})} \right)^{1/3}$$

Application numérique : $R = 135,8 \text{ pm}$.