# Travaux Dirigés de Physique

Charles Tuchendler

MPSI 4 – Lycée Saint-Louis

Année 2019/2020

# Table des matières

TD n° 16

# Moment cinétique et champ de forces centrales conservatives

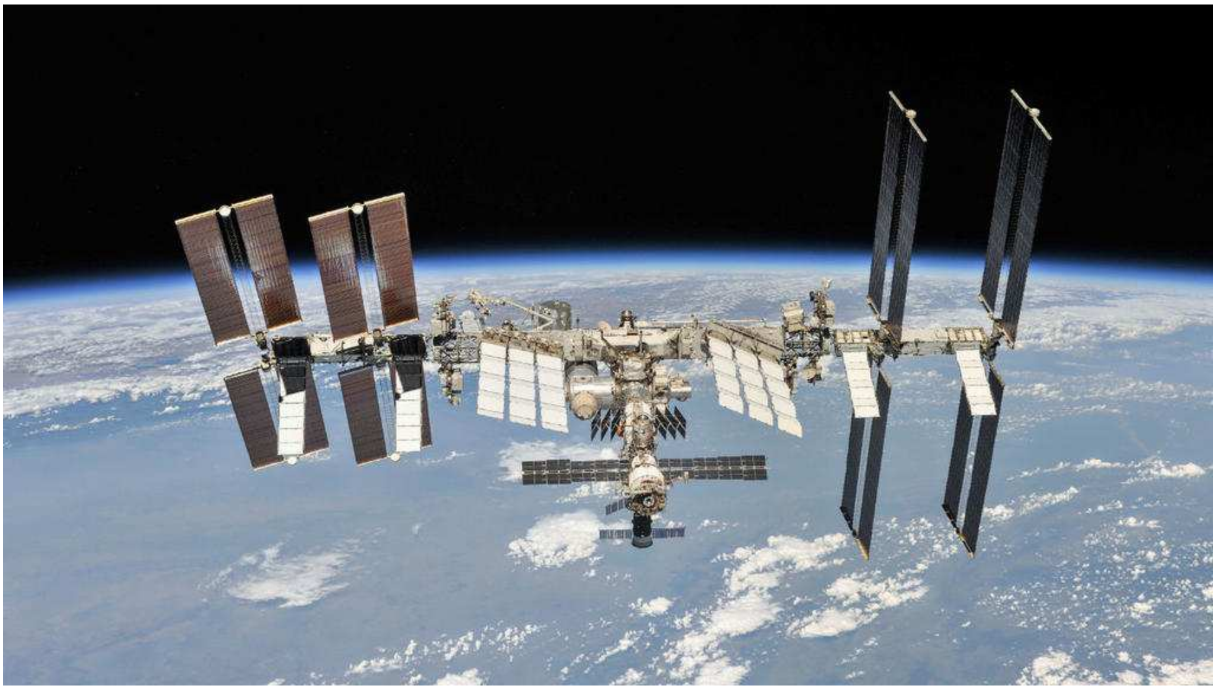
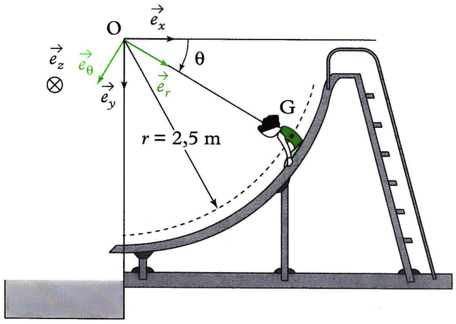


Figure 16.1 – *La station spatiale internationale (ISS) est en orbite à une altitude d'environ 400 km.*

## Exercice n° 1 - Toboggan

Un enfant assimilé à un point matériel G de masse $m$ glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2,5$ m depuis la position $\theta = \theta_0 = 15°$ où il possède une vitesse nulle, jusqu'à la position $\theta = 90°$ où il quitte le toboggan.

On néglige tous les frottements. On suppose le référentiel lié à la Terre galiléen.



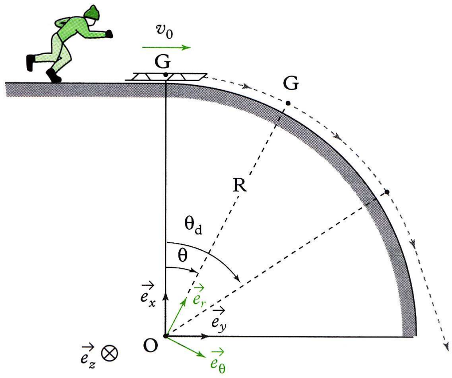

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant à l'aide du théorème du moment cinétique.
2. En déduire l'expression de la vitesse $v$ de l'enfant en fonction de sa position repérée par l'angle $\theta$ ?
3. Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter et proposer un modèle plus réaliste sans chercher à résoudre les nouvelles équations obtenues.

## Exercice n° 2 - Luge

Une luge assimilée à un point matériel G de masse $m$ arrive au niveau d'un profil circulaire avec une vitesse horizontale $v_0$.

Tant que la luge suit ce profil, elle décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = 5$ m et est repérée par l'angle $\theta$.

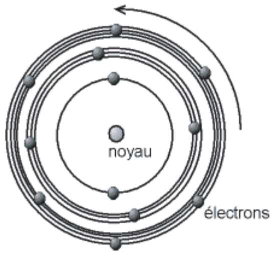
On néglige tous les frottements. On suppose le référentiel lié à la Terre galiléen.




1. Ecrire l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.
2. En déduire l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de la position, repérée par $\theta$, et de $v_0$.
3. Déterminer l'expression de la réaction du sol.
4. Déterminer l'angle limite $\theta_d$ au-delà duquel la luge quitte le profil circulaire en fonction de $v_0$ ?
5. Montrer qu'il existe une valeur limite de $v_0$ au-delà de laquelle la luge ne suit pas du tout le profil circulaire. Cette valeur est-elle accessible ?

## Exercice n° 3 - Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1. Donner l'ordre de grandeur de la masse et de la charge d'un électron, ainsi que de la distance entre l'électron et le proton.




2. En considérant l'électron en orbite circulaire autour du proton (supposé fixe) du fait de l'interaction coulombienne entre les deux particules, déterminer la vitesse de l'électron. Commentaire.

   On négligera le poids de l'électron dans le bilan des forces.

   On utilisera $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 S.I.$

   Pour expliquer l'existence de spectres de raies, Bohr eut l'idée d'introduire pour l'atome le même genre de quantification que pour la lumière, en disant que seule certaines orbites circulaires étaient stables. Il admit sans explication que pour qu'une orbite circulaire soit stable il fallait que son rayon $r$ et la vitesse de l'électron $v$ vérifient la relation :

$$m_e\, r\, v = n\hbar \quad \text{avec} \quad n \in N^* \qquad \text{et} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad \text{avec} \qquad h = 6,62.10^{-34}\text{J.s.}$$

3. Quelle est la grandeur que Bohr suppose quantifiée ? Vérifier l'homogénéité de la relation.
4. Démontrer que cette relation conduit à une quantification du rayon de la trajectoire sous la forme :

$$r = a_0 \times n^2$$

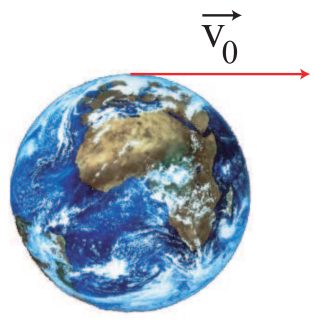
   avec $a_0 = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ le rayon de Bohr. Donner la valeur numérique de $a_0$, on prendra $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg.
5. A partir de cette relation, démontrer que l'énergie totale de l'électron se met sous la forme :

$$E_n = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \times \frac{1}{n^2}$$

   et calculer la valeur de la constante $\dfrac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$ en eV.

## Exercice n° 4 - Lancer d'un projectile

On tire horizontalement un projectile de masse $m$ à la surface de la Terre avec une vitesse $V_0$ telle que :




$$V_0^2 = \alpha\frac{GM_\text{T}}{R}$$

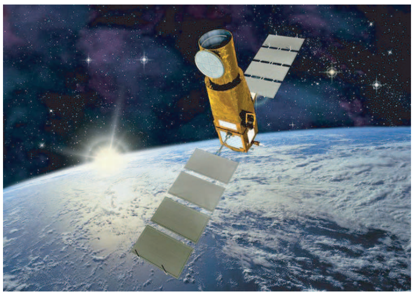
$(1 \leq \alpha < 2)$, $G$ désignant la constante de gravitation universelle, $M_\text{T}$ la masse de la Terre et $R$ son rayon.

1. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de $\alpha$, $G$, $m$, $M_\text{T}$ et $R$.
2. Exprimer $\dot\theta$ en fonction de $R$, $V_0$ et $r$.
3. En déduire que l'énergie mécanique peut également s'écrire sous la forme

$$E_\text{m} = E_\text{cr}\left(\dot r\right) + E_\text{peff}\left(r\right)$$

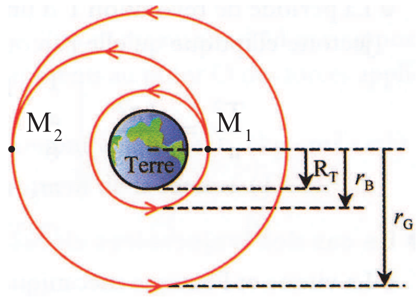
   On donnera les expressions de l'énergie cinétique radiale $E_\text{cr}\left(\dot r\right)$ et de l'énergie potentielle effective $E_\text{peff}\left(r\right)$.
4. Que peut-on dire de $\dot r$ aux altitudes maximale et minimale du projectile ? Calculer celles-ci. Interpréter les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \to 2$.

## Exercice n° 5 - Mise en orbite d'un satellite



On souhaite placer un satellite en orbite géostationnaire autour de la Terre. Les mouvements sont étudiés dans le référentiel géocentrique dans lequel la Terre est animée d'un mouvement de rotation de période $T$.

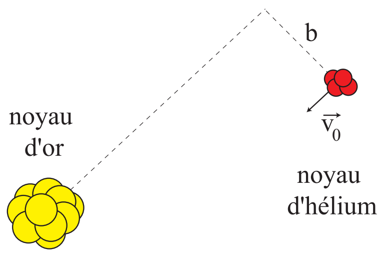
1. Calculer l'énergie mécanique $E_{\mathrm{mB}}$ d'un satellite de masse $m$ en orbite circulaire basse à une distance $r_{\mathrm{B}}$ du centre de la Terre. L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie nulle à l'infini.
2. Exprimer l'énergie du satellite $E_{\mathrm{S}}$ avant son lancement, lorsqu'il est posé à la surface de la Terre à la latitude $\lambda$. Où est-il préférable de procéder au lancement ?
3. L'orbite géostationnaire est celle pour laquelle le satellite reste à la verticale d'un même point de la Terre.
   (a) Peut-on placer un tel satellite au dessus d'un point quelconque de la Terre ?
   (b) Déterminer le rayon $r_{\mathrm{G}}$ de l'orbite géostationnaire.
   (c) Calculer l'énergie mécanique $E_{\mathrm{mG}}$ d'un satellite géostationnaire.




4. Une fois le satellite placé sur une orbite basse, on veut le transférer vers l'orbite géostationnaire.
   Pour cela, on lui communique une impulsion au point $\mathrm{M}_1$, afin qu'il décrive une ellipse dont l'apogée se trouve en $\mathrm{M}_2$ sur l'orbite géostationnaire (ellipse de Hohmann).
   Une seconde impulsion permet alors de le stabiliser sur cette orbite.
   (a) Déterminer l'énergie mécanique $E_{\mathrm{mT}}$ du satellite sur l'ellipse de transfert. En déduire l'énergie qu'il faut fournir en $\mathrm{M}_1$ puis en $\mathrm{M}_2$ pour réaliser le transfert.
   (b) Déterminer la durée du transfert.

*Données* : $M_{\mathrm{T}} = 5,98.10^{24}$ kg ; $R_{\mathrm{T}} = 6,38.10^{6}$ m ; $m = 10^{3}$ kg ; $T = 86164$ s ; $r_{\mathrm{B}} = 7.10^{6}$ m ; $G = 6,67.10^{-11}$ kg$^{-1}$.m$^{3}$s$^{-2}$.

## Exercice n° 6 - Distance minimale d'approche



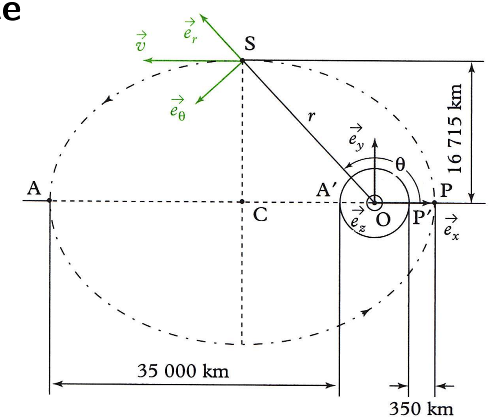

Un noyau d'hélium ou particule $\alpha$ de masse $m$ et de charge $q = 2e$, subit la force de répulsion électrostatique d'un noyau d'or quasiment immobile de masse $M$ et de charge $Q = Ze$.

La distance entre le support de la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ (loin du noyau d'or) et la droite passant par $O$ et parallèle à $\overrightarrow{v_0}$ est appelée paramètre d'impact et notée $b$.

On cherche à déterminer la distance minimale d'approche $r_m$ entre la particule $\alpha$ et le noyau d'or.

1. Quelle est la direction de la vitesse au point $I$ de la trajectoire de la particule $\alpha$ situé le plus près du noyau d'or ?
2. En utilisant la conservation du moment cinétique, déterminer une relation entre $b$, $v_0$, $r_m$ et $v(I)$.
3. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, en déduire l'expresion de $r_m$ en fonction de $Z$, $e$, $m$, $v_0$ et $b$.

## Exercice n° 7 - Trajectoire d'un satellite




Un satellite de masse $m = 1$ tonne, décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre.

Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ dirigée vers le centre O de la Terre. Le référentiel d'étude $R_g$ est supposé galiléen. A l'instant représenté (point S), la vitesse du satellite dans ce référentiel est $v_S = 14650$ km.h$^{-1}$.

*Donnée* : rayon de la Terre $R_T = 6400$ km.

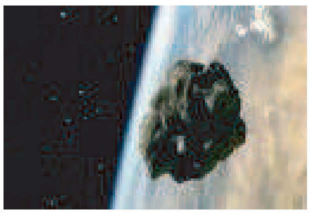
1. Calculer le moment cinétique du satellite en O dans $R_g$ en fonction de $m$, $r$, $v$ et $\sin(\vec{e}_r, \vec{v})$.
2. Montrer que le moment cinétique du satellite reste constant au cours du mouvement.
3. En déduire la valeur de la vitesse du satellite :
   (a) à son apogée A (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre).
   (b) à son périgée P (point de la trajectoire le plus près de la Terre).

## Exercice n° 8 - Frottement de l'atmosphère sur un satellite à basse altitude

Un satellite, de masse $m$, décrit une orbite circulaire à l'altitude $h$ autour de la Terre ($M_T$, $R_T$).

1. Calculer la norme $v$ de la vitesse en fonction des données, en négligeant les frottements.
2. Montrer qu'en l'absence de frottement, les énergies potentielle, cinétique et mécanique du satellite sont telles que : $E_m = -E_c = \frac{E_p}{2}$.
3. Le satellite subit en fait des frottements dus à la présence de l'atmosphère.
   (a) Que peut-on dire de l'énergie mécanique du satellite ? On admet cependant que les résultats précédents restent valables en première approximation.
   (b) Que peut-on alors dire de l'évolution de l'altitude du satellite ?
4. Soit $dh$ l'évolution de l'altitude du satellite à chaque rotation ( $|dh| \ll h$). Trouver la relation liant la variation de vitesse $dv$ à la variation d'altitude $dh$ à chaque tour. Commenter.
   *Données* : $dh = -1$ m ; $h = 500$ km ; $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg ; $R_T = 6.37 \times 10^3$ km.

## Exercice n° 9 - Trajectoire d'une météorite



Une météorite a, très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$, portée par une droite $\Delta$ située à la distance $b$ du centre de la Terre. On note $m$ la masse de la météorite, $M$ celle de la Terre, $R$ le rayon de la Terre et $G$ la constante de gravitation universelle.

1. De quel type de trajectoire s'agit-il ?
2. Déterminer la distance minimale Terre-météorite (notée $d$).
3. Déterminer la valeur minimale $b_{\min}$ de $b$ pour que la météorite ne rencontre pas la Terre.
   *Données* : $v_0 = 11$ km.s$^{-1}$, $M = 5,98.10^{24}$ kg, $G = 6,67.10^{-11}$ N.m$^2$.kg$^{-2}$ et $R = 6400$ km.