

# 양성덕의 미분 기하 강의 1편

양성덕

2021년 9월 1일



---

## 머리글

이 강의록은 제가 2002년, 2003년, 2005년, 2006년, 2007년, 2009년, 2010년, 2011년, 2014년, 2015년, 2016년, 2018년에 고려대학교 수학과 3학년 및 4학년 학생들을 대상으로 강의한 내용을 기록한 것입니다. 이 과목은 현재 1년 과정으로 기획되어 있으며 이 강의록의 내용은 1년 과정을 담고 있습니다. 특히 1장부터 4장까지는 1학기 내용, 5장부터 8장까지는 2학기 내용입니다. 9장 이후의 내용은 강의는 하지 않았지만 이 강의가 추구하는 목표의 일부를 제시하는 읽을거리로 제공되었습니다.

고등학교까지의 공부와 그 이후의 공부는 강을 따라가는 것과 바다에서 항해하는 것에 비유할 수 있습니다. 정해진 물길을 따라 몸을 맡기고 흘러만 가면 되는 게 고등학교 공부라면 대학 공부는 망망대해에서 일단 어느 쪽으로 나아가야 할지, 무엇을 타고 가야 할지, 심지어는 어디로 가야 할지 까지도 정해져 있지 않은 상태에서 이루어집니다.

이 강의록에서 저는 곡률과 계량기를 통하여 미분 기하학에 접근하고자 하며 이 강의록을 통한 저의 최종 목표는 비-유클리드 평면, 더 나아가 휘어진 공간이란 무엇인지를 학생들에게 전달하는 것입니다만 아쉽게도 학부 과정에서 공간에 대한 이해까지 바라는 것은 쉽지 않은 일이기에 여러 가지 평면이 있다는 것을 이해하고 그 방법론을 익히며, 공간에 대한 공부는 대학원 과정으로 넘기는 것이 타당한 것 같습니다.

1학기에는 곡면과 곡선의 곡률을 어떻게 이해할 것인가에 대하여 공부합니다. 평면에 있는 곡선, 공간에 있는 곡선, 공간에 있는 곡면 등의 곡률에 대하여 공부하고, 더 나아가 곡면에 있는 곡선의 곡률을 곡면의 모양과 관련시켜 알아봅니다.

2학기에는 지도와 계량기로 수행할 수 있는 기하에 대하여 공부합니다. 특히 곡면의 모양을 보지 않고 그 지도와 계량기만 알고 있으면 두 점을 잇는 가장 짧은 선, 곡면의 (가우스) 곡률 등을 알 수 있다는 것을 보게 됩니다. 더 나아가 계량기가 주어진 지도로 휘어진 곡면을 이해합니다. 이로써 계량기가 주어진 3차원 지도로서 휘어진 공간의 개념을 이해하는 초석을 다집니다.

이 책의 내용을 공부하기 위해서는 다변수 미적분학 그리고 선형대수학의 내용을 먼저 알고 있어야 합니다.

이 강의록을 처음 작성함에 있어서 김영욱 교수님과 유재웅, 홍원택, 그리고 김주연의 도움의 무척 컸음을 이 자리에서 밝힙니다. 오래전부터 강의내용을 바탕으로 책을 만들어 보고자 하는 욕심은 있었지만 감히 엄두를 내지 못하고 있던 차에 2003년 봄 학기 강의를 홍원택이 필기를 아주 단정하게 한 것을 보고 난 후, 잘 하면 그 필기를 바탕으로 책을 만들 수 있지 않을까 하는 소박한 꿈을 가지게 되었습니다. 유재웅, 홍원택, 그리고 김주연은 2003년 여름 방학 내내 LATEX을 배워 가면서 강의록을 타자해 주었는데 이들이 선뜻 나서서 타자를 해 주겠다고 해 주지 않았으면 본인은 감히 손으로 어지러이 쓰여진 제 강의록을

---

활자화할 엄두를 내지 못하였을 것입니다. 특히 유재웅은 그 후로도 오랜 기간동안 여러 가지 프로그램들을 배워 가면서 여기에 들어가는 그림들을 그려 주었습니다. 나중에 손동현, 김정인도 타자에 도움을 주었습니다.

2학기 강의부분은 2003년 가을 학기 강의를 박규완이 아주 필기를 깨끗하게 해 주어서 그것을 바탕으로 2005년 초에 두 달 정도 제가 손으로 내용적으로 깔끔하게 정서를 하였고 2005년, 2006년 가을학기 강의를 하면서 수정을 하였습니다.

2005년 봄학기에 강의할 때는 진도가 빨라서 극소 곡면 부분을 더 했는데 이채연이 필기를 깨끗하게 해서 또 그 필기를 바탕으로 손으로 정서하여 일단 활자화된 앞부분의 뒤에 복사본으로 끼워넣었습니다. 그리고 박배준이 제 수업을 1년간 들으면서 풀고 제출했던 숙제 답안을 잘 정돈해서 제게 주었습니다만 이 강의록에 포함시키진 않았습니다.

2006년 겨울 방학 중에는 이태호가 “한글” 프로그램으로 2학기 강의록 본문을, 정창훈, 최재용, 유상현이 LATEX을 배워 가면서 2학기 강의록 전부와 1학기 강의록 중 극소 곡면에 관한 부분을 타자해 주었습니다.

2007년 여름방학 중에는 드디어 1학기 강의록과 2학기 강의록을 합칠수 있게 되었습니다. 그동안 강의록을 타자할 때 쓰던 LATEX프로그램에 한글을 쓰는 면에 있어서 큰 변화가 있었는데 김영욱 교수님이 그 시스템을 잘 이용하는

방법을 가르쳐 주셨고 또 2학기 부분을 타자한 *LATEX*부분을 많이 손 봐 주셨습니다. 또한 박형준이 1학기, 2학기 부분을 하나로 합하고, *Mathematica*®로 타자되어있던 특수 상대성 이론 부분을 *LATEX*으로 다시 치고, 연습 문제, 시험 문제 등을 정리하여 주었습니다.

2007년 가을과 2008년 봄에는 김영욱 교수님이 이 강의록을 가지고 고려대학교 학부생들을 대상으로 강의를 하시면서 많은 개선점들을 지적하여 주셨습니다. 현재 2학기 강의록은 김영욱 교수님의 제안을 많이 반영하여 수정하였습니다.

2008년 8월 말과 9월 초에는 다시 박형준이 도와 주어서 2학기 수업에 쓸 수 있도록 강의록을 많이 편집하며 여러 오타를 고치고 부족한 설명을 조금 첨가하였습니다.

또한 2008년 봄 1학기 수강생 중 이상규, 고재원이 수업을 받으면서 강의록을 꼼꼼히 읽고 여러군데 표시를 해 주었는데 이번에 반영하였습니다. 2010년 12월부터 두 달 동안 김소라, 안명환, 이다미, 이두영 그리고 이범영이 이 강의록에 들어가는 그림 대부분을 *Mathematica*®로 그리고 정리하여 주었습니다.

---

그리고 2014년 여름에는 문경환이 이 글을 읽으면서 계산을 점검하고 여러 오류를 지적하여 주었습니다. 그리고 겨울에는 이범영, 최준용, 이경화가 1장부터 4장까지 내용과 형식 등을 검토하여 주었고 조장환은 Mathematica로 그림들을 다시 그려 주었습니다.

위 모두에게 필자의 고마움을 표합니다.

오랜 시간에 걸쳐 작업을 해 나가면서 한 권의 책이 완성되려면 정말 많은 사람들의 노력이 합쳐져야 한다는 것을 깨닫게 되었습니다. “이제는 완성이다.” 라고 손을 놓을 수 있게 되기까지 앞으로도 얼마나 더 걸릴지 모르겠지만 2019년 2월 28일을 목표로 다시금 이 강의록을 정리할 생각입니다.

오타도 많고 내용이 부정확하게 전달될 수 있다는 여러 가지 걱정을 하면서도 이 강의록을 펴 내는 이유는 미분 기하학 수업을 수강하는 우리 학생들에게 조금이라도 더 도움을 주고자 하기 위합니다. 아무쪼록 여러분이 열심히 공부하여 미분 기하학이란 무엇을 어떻게 공부하는 과목인지 갈피를 잡을 수 있다면 정말 좋겠습니다.

끝으로, 이 강의록은 아직 완성된 형태가 아니며 앞으로도 많은 수정과 보완이 필요합니다. 많은 명저들을 참고하면서 강의를 했지만 부정확한 내용이 들어 있다면 그것은 전적으로 필자의 잘못입니다. 여러분들이 이 글을 읽어 나가면서

관찰하게 되는 여러 점들을 본인에게 가르쳐 주면 고맙겠습니다.

양성덕

아산 이학관에서

2021년 9월 1일

---

## 본문을 읽기 전에 알아둘 점

소리 내어 술술 읽을 수 있는 우리말 수학책을 쓴다는 것은 현재로서는 거의 불가능에 가까운 일인듯싶다. 사실 이는 수학책뿐만 아니라 거의 대부분의 이공계 도서에 적용되는 이야기일 텐데 이는 수학기호를 우리말로 읽는 법이 아직도 정립이 안 되어 있기 때문이다. 여기에는 다른 언어에서 생성된 수학기호를 써야 하는 근본적인 이유와 함께 다른 여러 가지 복합적 요인도 있다고 나는 생각한다. 우리말로 수식을 읽는 법은 수업 시간에 같이 확립하여 나가자. 참, 우리말로 수학을 공부하면 처음은 쉬울지 모르나, 후에 외국서적으로 공부를하게 된다면 여러 애로점에 맞닥뜨리게 될 것이다. 그러므로 중요한 수학적 개념 뒤에는 한자와 영어를 병기하여 나중 공부에 도움이 되도록 하고자 한다.

1. 대괄호 [...] 안에 있는 수는 책 맨 뒤에 나와있는 참고문헌을 나타낸다.
2. “곡선  $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}^2$ 에 대하여”는 “알의 부분집합 에이 비에서 평면으로 가는 함수  $\gamma$ 에 대하여”라고 읽을 수도 있지만, 본고에서는 간단하게 “곡선  $\gamma$ 에 대하여”라고 읽고 나머지는 마음속으로 읽는 것으로 한다.
3. 수식이 주어와 술어를 갖춘 경우 마침표를 찍었다.
4.  $a = b$ 는 “에이는 비와 같다”,  $a \equiv b$ 는 “에이는 비와 항상 같다”를 뜻한다.

5. 이 책에서는  $\frac{a}{b}$  를 ‘ $a$  밑에  $b$ ’로 읽기로 한다.
6. 이 책에서는  $a_1$  그리고  $a^1$  등을 ’에이일’로 읽기로 한다. 다시 말해 첨자는 한국어로 읽는다
7. 수학 용어는 한글 맞춤법 제5장 4절 50항 “전문 용어는 단어별로 띄어 쓴을 원칙으로 하되, 붙여 쓸 수 있다”의 단어 별로 띄어 쓴다는 원칙을 적용하여 표기했다.

## 이 책에서 사용된 기호들

특별한 언급이 없는 한 다음과 같이 기호를 사용한다.

(1) 평면 곡선은  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ 로 나타내고 구간  $(a, b)$ 에 있는 임의의 수를 나타내는 매개변수로는 보통  $t$ 를 사용한다. 만약  $\gamma$ 의 속력이 항상 1인 경우는 매개변수로 보통  $s$ 를 사용한다.

(2) 공간 곡선은  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$ 로 나타내고 구간  $(a, b)$ 에 있는 임의의 수를 나타내는 매개변수로는 보통  $t$ 를 사용한다. 만약  $\alpha$ 의 속력이 항상 1인 경우는 매개변수로 보통  $s$ 를 사용한다.

(3) 벡터를 사용할 때 그 시점을 분명히 하고자 할 때는  $v_P$ 와 같이 나타낸다. 예를 들어  $(a, b, c)_{(x,y,z)}$ 는 점  $(x, y, z)$ 에서 시작하여 점  $(x + a, y + b, z + c)$ 에서 끝나는 벡터를 의미한다.  $P$ 가 원점인 경우에는  $P$ 를 생략하여  $v$ 로 나타낸다.

(4)  $v$ 가 벡터면  $|v|$ 는  $v$ 의 길이를 나타낸다.  $A$ 가 정방행렬이면  $|A|$ 는  $A$ 의 행렬식, 즉  $\det A$ 를 나타낸다.

(5) 길이가 같은 두 벡터  $u, v$ 의 내적을  $u \cdot v$  또는  $\langle u, v \rangle$ 로 나타낸다.

(6) 일변수 함수에 대한 미분은 ' $\cdot$ ' 또는 ' $'$ 으로 나타낸다.

(7) 아인쉬타인의 합 기호법:  $\sum_{k=1}^n A^k B_k$  등과 같이 첨자가 위, 아래에 있

으면서 합이 이루어지고  $n$ 이 문맥상 분명한 경우  $\sum_{k=1}^n$  를 생략하여  $A^k B_k$  로 나타낸다. 사실 이 책의 5.10절을 제외한 나머지 절에서는 아인슈타인의 합 기호법이 사용된 대부분의 식을 행렬을 이용하여 해석할 수 있다. 예를 들어

$$v^i w^j g_{ij} = v^i g_{ij} w^j = \sum_{i,j=1}^2 v^i g_{ij} w^j = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

(8) 합성함수의 미분: 예를 들어 다음 두 사상을 생각하라.

$$\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t)),$$

$$\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{X}(u^1, u^2) = (X^1(u^1, u^2), X^2(u^1, u^2), X^3(u^1, u^2))$$

에 대하여  $\frac{d}{dt}(X \circ \gamma)(t)$  를 생각하면 그 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{X} \circ \gamma)(t) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^1}(\gamma^1(1), \gamma^2(t)) \frac{d}{dt}\gamma^1(t) + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^2}(\gamma^1(1), \gamma^2(t)) \frac{d}{dt}\gamma^2(t) \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^k}(\gamma^1(1), \gamma^2(t)) \frac{d}{dt}\gamma^k(t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^k}(\gamma^1(t), \gamma^2(t)) \frac{d}{dt}\gamma^k(t) \\ &= \mathbf{X}_{u^k}(\gamma(t))\dot{\gamma}^k(t) \\ &= (\mathbf{X}_{u^k} \circ \gamma)(t)\dot{\gamma}^k(t) \end{aligned}$$

세 번째 등호에서는 아인슈타인의 합 기호법을 사용하였다. 이를 간단히 쓰기 위하여 양변에 공통으로 들어있는  $(t)$ 를 생략하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\mathbf{X} \circ \gamma)' = (\mathbf{X}_{u^k} \circ \gamma)\dot{\gamma}^k.$$

이 책에서는 이를 조금 더 간단하게 쓰기 위하여 다음과 같이  $\tilde{\cdot}$  가 붙은 기호를 정의한다.

$$\tilde{\mathbf{X}}_{u^k}(t) := \mathbf{X}_{u^k} \circ \gamma(t).$$

그러면 위 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(\mathbf{X} \circ \gamma)^{\cdot} = \tilde{\mathbf{X}}_{u^k} \dot{\gamma}^k.$$

(9) 평면 영역  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 의 좌표를 나타내는데 보통  $u, v$ 를 쓰지만 위에 언급된 아인쉬타인의 합 기호법을 쓰기 위하여  $u^1, u^2$ 를 쓰기도 한다. 이 경우  $u^2$ 가  $u$ 의 제곱을 나타내는 것이 아님에 주의하라.

(9) 행렬을 나타낼 때는 대괄호를 사용한다.

(10) 벡터의 성분들을 가로로 늘어놓을 땐 소괄호와 쉼표를 사용하고 세로로 늘어놓을 땐 대괄호를 사용한다. 즉

$$\mathbf{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

# 차 례

머리글	iii
본문을 읽기 전에 알아둘 점	ix
기호	xi
머리글	xiv
차 례	xiv
제 1 장. 평면 곡선	1
1.1 평면 곡선의 곡률을 어떻게 정의할 것인가? . . . . .	2
1.2 일변수 함수의 그래프로 주어진 곡선의 곡률원 . . . . .	8

---

1.3 일변수 함수의 그래프로 주어진 곡선의 곡률 . . . . .	16
1.4 매개식의 상으로 주어진 곡선의 곡률원과 곡률의 식 . . . . .	19
1.5 단위속력곡선의 가속도와 곡률 . . . . .	27
1.6 곡률을 각의 변화율로 해석하기 . . . . .	35
1.7 평면 곡선론의 기본 정리 . . . . .	39
1.8 평면 곡선의 전 유향 곡률 . . . . .	43
1.9 갈아타는 길 . . . . .	47
1.10 연습 문제 . . . . .	49
<b>제 2 장. 공간 곡선</b>	53
2.1 공간 곡선의 곡률을 어떻게 생각할 것인가? . . . . .	54
2.2 단위속력 공간곡선의 접촉 원과 곡률 . . . . .	60
2.3 단위속력 공간곡선의 열률 . . . . .	75
2.4 접촉 구 . . . . .	83
2.5 접촉도와 접촉 구 . . . . .	91
2.6 공간 곡선론의 기본정리 . . . . .	102
2.7 임의속력 공간 곡선의 곡률과 열률 . . . . .	104
2.8 연습문제 . . . . .	109
<b>제 3 장. 곡면</b>	113
3.1 곡면의 곡률을 어떻게 생각할 것인가? . . . . .	114

---

3.2 함수를 이용하여 곡면을 나타내는 방법 . . . . .	122
3.3 평면 곡선의 곡률로 곡면의 곡률을 이해하는 법 . . . . .	131
3.4 모양 연산자 . . . . .	145
3.5 모양 연산자와 곡률 . . . . .	160
3.6 평균 곡률의 의미 . . . . .	168
3.7 회전 극소 곡면 . . . . .	175
3.8 셔억의 극소 곡면 . . . . .	184
3.9 가우스 곡률의 의미 . . . . .	188
3.10 회전 곡면중 항등 가우스 곡률을 가지는 곡면들 . . . . .	194
3.11 등위면의 곡률 식 . . . . .	197
3.12 연습 문제 . . . . .	210
<b>제 4 장. 곡면의 곡선</b> . . . . .	<b>217</b>
4.1 구면의 등각선 . . . . .	218
4.2 곡률선과 점근선 . . . . .	225
4.3 곧은 선 . . . . .	231
4.4 최단선 . . . . .	249
4.5 회전면의 곧은 선 . . . . .	258
4.6 가우스-보네 정리 . . . . .	268
4.7 연습 문제 . . . . .	287

---

<b>제 5 장. 곡면의 내재적 기하학</b>	<b>289</b>
5.1 무엇을 공부할 것인가? . . . . .	292
5.2 벡터 표기법 . . . . .	300
5.3 계량기 표기법 . . . . .	306
5.4 가우스 곡률의 내재성 . . . . .	312
5.5 측지곡률과 곧은선의 내재성 . . . . .	324
5.6 공변 미분과 접속 . . . . .	329
5.7 접속과 가우스 곡률 . . . . .	337
5.8 지도 변환과 불변성 . . . . .	343
5.9 지도 변환의 예 . . . . .	348
5.10 가우스 곡률의 불변성 . . . . .	351
5.11 연습문제 . . . . .	359
<b>제 6 장. 쌍곡 평면의 기하학</b>	<b>363</b>
6.1 쌍곡 평면의 정의 . . . . .	364
6.2 쌍곡 평면의 곧은선 . . . . .	367
6.3 쌍곡 평면에서 선분의 길이 및 두 점 사이의 거리 . . . . .	375
6.4 쌍곡 평면에서 각도 . . . . .	379
6.5 쌍곡 평면에서 삼각형의 넓이와 세 내각의 합 . . . . .	380
6.6 쌍곡 평면의 원 . . . . .	389
6.7 연역적 쌍곡 기하학, 합동, 강체운동 . . . . .	390

6.8 쌍곡 평면에서 피타고라스의 정리 . . . . .	393
6.9 쌍곡 평면에서 사인 법칙, 코사인 제2 법칙 . . . . .	396
6.10 연습문제 . . . . .	402
6.11 맷음말 . . . . .	405
<b>제 7 장. 쌍곡 평면의 강체 운동</b>	<b>407</b>
7.1 쌍곡 평면의 선대칭의 식 . . . . .	409
7.2 쌍곡평면의 선대칭은 왜 강체운동인가? . . . . .	418
7.3 선대칭들의 합성 . . . . .	421
7.4 쌍곡 평면의 강체 운동과 선형 분수 변환 . . . . .	423
7.5 쌍곡 평면의 원 . . . . .	434
7.6 임의의 직각 삼각형을 표준 위치로 옮기기 . . . . .	440
7.7 쌍곡 평면의 극한원과 초원 . . . . .	441
7.8 원, 극한원, 초원의 곡률 . . . . .	450
7.9 쌍곡 평면의 여러 모델들 . . . . .	455
7.10 연습 문제 . . . . .	464
<b>제 8 장. 로렌츠 평면의 기하와 특수 상대론</b>	<b>469</b>
8.1 로렌츠 평면 . . . . .	470
8.2 로렌츠 평면의 곧은 선과 두 점 사이의 거리 . . . . .	472
8.3 로렌츠 평면의 강체운동 . . . . .	474

---

8.4 시공간 평면과 로렌츠 평면 . . . . .	479
8.5 등속으로 멀어지는 관찰자의 시공간 좌표 . . . . .	482
8.6 특수 상대성 이론에서 말하는 여러 결과들 . . . . .	487
8.7 일반 상대론은 무엇인가? . . . . .	494
8.8 쌍곡 평면은 로렌츠 공간에 있는 어떤 곡면의 지도다. . . . .	496
8.9 연습 문제 . . . . .	507
<b>제 9 장. 리만 기하학</b>	<b>511</b>
9.1 리만 다양체를 향하여 . . . . .	512
9.2 3차원 지도와 계량기의 예 . . . . .	514
9.3 리만 다양체의 접속과 곡률 . . . . .	515
9.4 아인슈타인의 장 방정식 . . . . .	517
9.5 연습문제 . . . . .	519
<b>부록</b>	<b>521</b>
A 1-형식들의 텐서 곱, 대칭 곱, 째기 곱 . . . . .	522
B 미분형식 . . . . .	527
<b>참고문헌</b>	<b>534</b>
<b>인명 찾아보기</b>	<b>539</b>

## 용어 찾아보기

540

# 제 1 장

## 평면 곡선

## 1.1 평면 곡선의 곡률을 어떻게 정의할 것인가?

곡률은 이런 저런 곳에 응용된다. 예를 들어 두 고속도로가 수직으로 만날 때 한 고속도로에서 다른 고속도로로 갈아타는 휘어진 도로, 즉 고속도로 분기점을 어떤 모양으로 만드는지 생각해 보자.



〈그림 1.1〉 <http://blog.daum.net/seed/2050>에서 가져옴.

단순한 생각으로는 적당한 반지름의 원을 이용하면 될 것으로 보인다. 과연 그래도 되는지 생각해 보자.

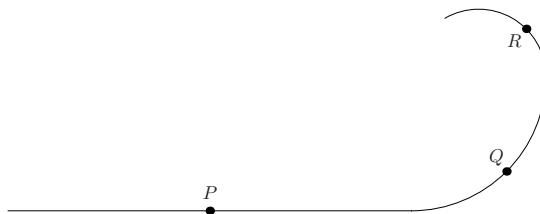
이런 길을 만들 때 무엇이 고려되어야 할까? 첫째, 운전자는 차의 속력을 일정하게 유지하고 싶어할 것이다. 둘째, 휘어진 길에서 차의 움직임은 부드럽게 이루어져야 할 것이다. 그런데 일정한 속력으로 움직이는 경우 가속도의 크기는 그 경로가 직선이면 0, 원이면 일정한 상수다. 따라서 고속도로가 직선에서 원으로 변하는 부분에서 차의 가속도의 크기가 불연속적으로 변하게 되어 그 움직임은 부드럽지 않다.

나중에 알게 되겠지만 속력이 항상 1이 되도록 매개된 곡선의 가속도의 크기는 그 곡선의 곡률과 같다. 1장 3절 참조할 것. 따라서 우리가 원하는 곡선은 곡률이 연속적으로 변하는 도로다. 주어진 문제에서와 같이 한 직선에서 그 직선에 수직인 직선으로 변하면서 곡률이 연속적으로 변하는 곡선이 우리가 원하는 곡선이다. 이런 곡선은 실제로 존재하는데 [19, 3장 7절]에 소개된 회선 곡선(回旋曲線 clothoid)을 참고하기 바란다.<sup>1)</sup> [36]에서 회선 곡선에 대한 내용을 볼 수 있다.

한 평면 곡선을 생각해 보자. 이 곡선이 얼마나 휘어졌는가는 어떻게 생각하면 될까? 우선 한 가지는 분명하다. 곡률은 곡선 전체가 아닌 각 점에 대하여 생각한다는 것이다. 이를 ‘곡률은 국소적 개념이다’라고 한다. 다음 곡선을 살펴 보자.

---

1) 여기서 [19, 3장 7절]은 이 책의 말미에 있는 참고문헌에서 [19]의 3장 7절을 가리킨다.



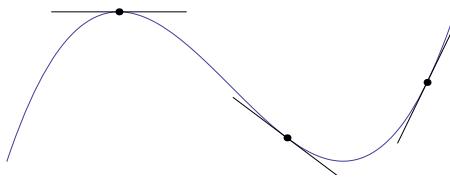
〈그림 1.2〉

주어진 곡선은 점  $P$ 에서는 휘지 않았고 점  $Q$ 에서는 조금 휘었으며 점  $R$ 에서는 많이 휘었다. 따라서 각 점에서의 곡률을 수치로 나타낸다면 점  $P$ 에서의 곡률은 0, 점  $Q$ 에서의 곡률은 작은 수, 점  $R$ 에서의 곡률은 큰 수가 되어야 할 것이다. 자, 이를 어떻게 구체적인 수치로 나타낼 수 있을까?

미적분학에서 공부한 선형 근사법에서와 같이 곡선의 한 점 근방을 직선으로 근사하면 곡선의 모든 점 주변이 모두 직선으로 근사되어 같아 보이므로 곡률의 관점에서 볼 때 이 방법은 재미가 없다.

오랜 세월에 걸쳐 사람들이 알아낸 것은, 곡률을 생각할 때는 먼저 곡선의 한 점을 고정한 후 그 점 근방의 곡선을 원으로 근사하고 그 원의 반지름의 길이의 역수를 곡률로 생각하면 된다는 것이다.

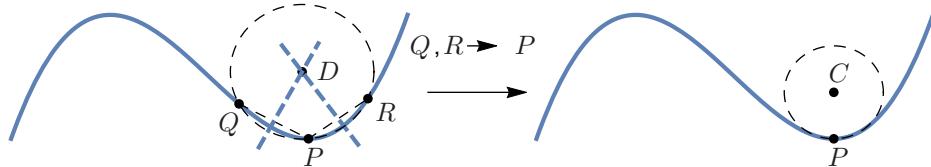
이 아이디어를 전개하는 데에 필요한 개념을 하나 알아보자.



〈그림 1.3〉

**정의 1.1.1.** 한 곡선  $\gamma$ 와 그 곡선의 한 점  $P \in \gamma$ 가 다음 성질을 만족시킨다고 하자:

$P$ 에 충분히 가까운 임의의 서로 다른 두 점  $Q, R \in \gamma \setminus \{P\}$ 에 대하여  $P, Q, R$ 을 모두 지나는 원이 있고  $Q, R \rightarrow P$  일 때 그 원의 중심  $D$ 가 어떤 한 점  $C$ 로 수렴한다.<sup>2)</sup>



〈그림 1.4〉

---

2) '충분히 가깝다'는 용어를 사용하지 말고 이 정의를 써 보아라.

이 때 점  $C$ 를 중심으로, 선분  $CP$ 를 반지름으로 갖는 원을 곡선  $\gamma$ 의 점  $P$ 에서의 곡률 원 (curvature circle)이라 한다.

위 성질을 만족시키지 않는 곡선과 점이 없지는 않다.

**질문 1.1.2.** 위 성질을 만족시키지 않는  $\gamma$ 와  $P \in \gamma$ 의 예를 두 개 이상 들어보아라.

그러나 대부분의 미적분학 책에서 볼 수 있는 대부분 곡선과 그 곡선의 대부분의 점은 위 성질을 만족시킨다. 다음 절을 참조하라.

**곡선을 나타내는 방법** 위 아이디어를 이용하여 곡선의 곡률을 구체적으로 계산하려면 먼저 곡선을 수식으로 나타내야 하는데 거기에는 크게 세 가지 방법이 있다:

1. 일변수 함수  $y = f(x)$ 의 그래프로 나타내는 방법,
2. 매개 변수 식  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ 로 나타내는 방법,
3. 음함수  $F(x, y) = 0$ 으로 나타내는 방법.

세 방법 모두 대부분의 미적분학 서적에 소개되어 있다.

참, 이 책에서는 매개 변수 식으로 평면 곡선을 나타낼 때 다음 수식에서와 같이 정의역은 실수에서의 구간  $(a, b)$ 로 하는데 치역은  $\mathbb{R}^2$ 가 아닌  $\mathbb{E}^2$ 로 나타낸다.

$$\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

평면을  $\mathbb{R}^2$ 가 아닌  $\mathbb{E}^2$ 로 나타내는 데는 이유가 있다. 평면에서 임의의 두 점 사이의 거리를 정의할 때는 여러 가지 식을 쓸 수 있는데 우리가 통상적으로 사용하는, 다음과 같은 방법으로 거리가 주어진 평면은 유클리드 평면이라 하며  $\mathbb{E}^2$ 로 나타낸다.

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

거리가 다음과 같이 주어진 평면은 로렌츠 평면이라 하며 통상적으로  $\mathbb{L}^2$ 로 나타낸다. 이 책의 8장을 참조하라.

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}.$$

갈릴레이 평면  $\mathbb{G}^2$ 에서는 두 점 사이의 거리가 다음과 같이 주어진다.

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

거리가 다음과 같이 주어진 평면은 택시 평면(taxicab plane)이라 한다.

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

평면에 거리를 나타내는 아무런 방법이 정해지지 않은 경우 이를  $\mathbb{R}^2$ 로 나타낸다.

유명한 미분기하 참고서적 [26]의 3판 서문을 보면 2판에서는 평면을 가리킬 때  $\mathbb{R}^2$ 를 사용하였으나 3판에서는  $\mathbb{E}^2$ 를 사용한다는 구절이 있다.

## 1.2 일변수 함수의 그래프로 주어진 곡선의 곡률원

일변수 함수  $y = f(x)$ 의 그래프로 주어진 곡선의 한 점  $P(a, f(a))$ 에서의 곡률원의 중심이 어떻게  $f$ 에 관한 식으로 쓰여지는지 생각해 보자. 시작하기 전에 먼저 곡률원이 과연 있기는 있는가, 있다면 하나만 있는가 하는 존재성, 유일성의 문제를 생각해 볼 수 있는데, 아래 제시하는 방법 2, 방법 3을 잘 들여다 보면  $f''(a) \neq 0$  일 때 곡률원이 유일하게 존재함을 알 수 있다. 따라서 아래 모든 방법에서  $f''(a) \neq 0$ 이라 하고 논의를 전개한다.

점  $P(a, f(a))$  근방에 두 점  $Q(b, f(b)), R(c, f(c))$ 를 택하고 세 점  $P, Q, R$ 을 모두 지나는 원의 중심을  $D(X, Y)$ 라 하자. 우리가 구하고자 하는 것은

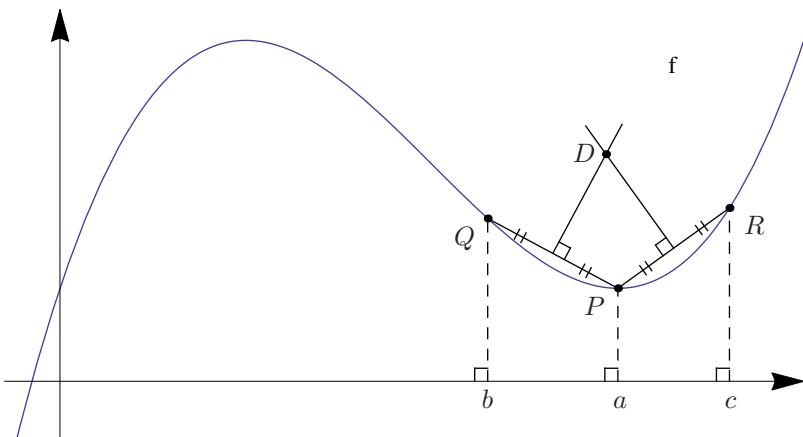
$$C := \lim_{b,c \rightarrow a} D = \lim_{b,c \rightarrow a} (X, Y)$$

다.  $D$ 는 선분  $PQ$ 의 수직 이등분선과 선분  $PR$ 의 수직 이등분선의 교점인데 두 직선의 방정식을 구하면 각각 다음과 같다:

$$-\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left( y - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right) = \left( x - \frac{a + b}{2} \right), \quad (1.1)$$

$$-\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \left( y - \frac{f(a) + f(c)}{2} \right) = \left( x - \frac{a + c}{2} \right). \quad (1.2)$$

위 두 식 (1.1)과 (1.2)의 공통근을 실제로 구하여  $D$ 를 구하는 것은 녹록지



〈그림 1.5〉

않다.<sup>3)</sup> 그래서 아이디어를 약간 변형한다.

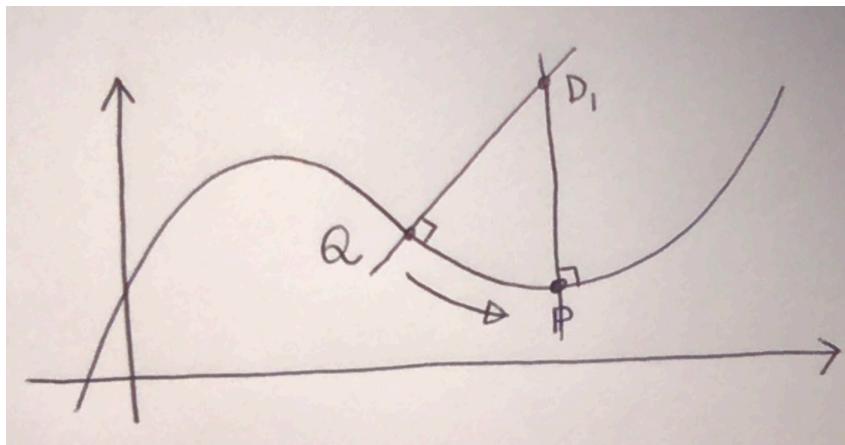
**방법 1** 점  $P$ 에서의 그래프의 법선과 점  $Q$ 에서의 그래프의 법선의 교점을  $D_1(X_1, Y_1)$ 이라 하고

$$C_1 := \lim_{b \rightarrow a} D_1$$

을 구해 보자.

---

3) 더 진행하기 전에  $(X, Y)$ 를 실제로 구하고 그 식으로부터  $C$ 를 구하려고 노력해 보기려 권한다.



〈그림 1.6〉

두 법선의 식은 각각 다음과 같다.

$$-f'(a)(y - f(a)) = x - a, \quad -f'(b)(y - f(b)) = x - b \quad (1.3)$$

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼서 정리하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} Y_1 - \frac{f(b)f'(b) - f(a)f'(a)}{b - a} = 1. \quad (1.4)$$

이제  $b \rightarrow a$  면 다음을 얻는다.

$$f''(a) \lim_{b \rightarrow a} Y_1 - (f'(a)^2 + f(a)f''(a)) = 1. \quad (1.5)$$

이를 정리하면

$$\lim_{b \rightarrow a} Y_1 = f(a) + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)}.$$

따라서 (1.3)으로부터

$$\lim_{b \rightarrow a} X_1 = a - f'(a) \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)}. \quad (1.6)$$

따라서

$$\lim_{b \rightarrow a} (X_1, Y_1) = (a, f(a)) + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)} (-f'(a), 1) \quad (1.7)$$

따라서  $C_1 := \lim_{b \rightarrow a} (X_1, Y_1)$ 은 존재하고 유일하며 그 식은 위와 같음을 알 수 있다.  $\square$

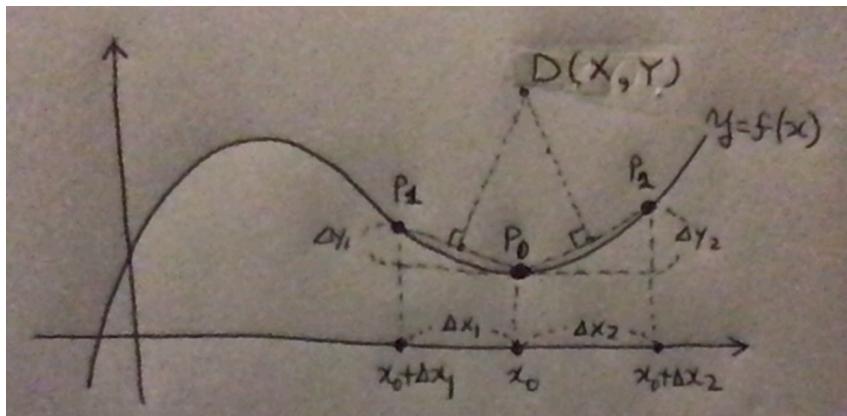
**질문 1.2.1.** 식 (1.4)로부터 식 (1.5)를 유도하여 보아라.

그런데 이렇게 구한  $C_1$ 은 과연 곡률원의 중심인가? 즉

$$C_1 = C?$$

위 방법 1은 간단한 계산에 의하여 곡률원의 중심이라고 생각되는 점의 좌표를 쉽게 구할 수 있게 해 주지만 그 점이 정말로 곡률원의 중심인가 하는 질문에 대해서는 명확한 답을 주지 않는다(고 나는 생각한다). 그래서 원 과정에 충실하면서  $C$ 를 구하는 논법을 다음 방법 2에서 제시한다.

**방법 2**  $P, Q, R$ 를 각각  $P_0, P_1, P_2$ 라 하고,  $a, b, c$ 를 각각  $x_0, x_0 + \Delta x_1, x_0 + \Delta x_2$ , 그리고 선분  $P_0P_1$ 의 수직이등분선과 선분  $P_0P_2$ 의 수직이등분선의 교점을  $D(X, Y)$ 라 하자.



〈그림 1.7〉

$\Delta y_i := f(x_0 + \Delta x_i) - f(x_0)$  일 때 선분  $P_0P_i$ 의 수직이등분선의 방정식은 다음과 같다:

$$-\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \left( y - (f(x_0) + \frac{1}{2}\Delta y_i) \right) = x - (x_0 + \frac{1}{2}\Delta x_i). \quad (K_i)$$

이제  $(K_1) - (K_2)$  를  $\Delta x_1 - \Delta x_2$  로 나눈 후 정리하여 다음을 얻는다.

$$Y = f(x_0) + \frac{1+B}{2A}, \quad A := \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}}{\Delta x_1 - \Delta x_2}, \quad B := \frac{\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)^2 \Delta x_1 - \left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\right)^2 \Delta x_2}{\Delta x_1 - \Delta x_2}$$

### 보조정리 1.2.2.

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0} A = \frac{1}{2} f''(x_0), \quad \lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0} B = (f'(x_0))^2.$$

**증명**  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 에 대하여

$$L(t) := \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}, \quad M(t) := t \left( \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \right)^2 = t L(t)^2$$

라 하고  $N(0) := f'(x_0)$ ,  $M(0) := 0$ 이라 하면

$$A = \frac{L(\Delta x_1) - L(\Delta x_2)}{\Delta x_1 - \Delta x_2}, \quad B = \frac{M(\Delta x_1) - M(\Delta x_2)}{\Delta x_1 - \Delta x_2}.$$

그러면 평균값의 정리에 의하여,  $\Delta x_1$ 과  $\Delta x_2$  사이에 있는 어떤  $t, u$ 에 대하여

$$A = L'(t), \quad B = M'(u).$$

이제 극한을 구해 보면 원하는 결론을 얻는다. ■

**질문 1.2.3.**  $\lim_{t \rightarrow 0} L'(t)$ ,  $\lim_{u \rightarrow 0} M'(u)$ 를 구하여 보아라.

**질문 1.2.4.**  $L(0)$ ,  $M(0)$ 을 정의하지 않으면 어떤 문제가 발생하는가?

그러므로

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0} Y = f(x_0) + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}.$$

이로부터 다음을 얻는다.

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0} X = x_0 - \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)} f'(x_0).$$

그러므로

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0} (X, Y) = (x_0, f(x_0)) + \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)} (-f'(x_0), 1). \quad (1.8)$$

따라서  $C := \lim_{\Delta x_1, \Delta x_2 \rightarrow 0} (X, Y)$  는 존재하고 유일하며 그 식은 위와 같음을 알 수 있다.  $\square$

다음은 [34, 2권 1장]에 나오는 논법을 개량한 것이며 매개식으로 주어진 평면곡선의 곡률원, 공간곡선의 접촉원, 접촉구 등의 중심을 구할 때에도 비슷한 논법이 사용된다. 식 (1.23), (2.6), (2.16), (2.27)을 보라.

**방법 3** 먼저  $P, Q, R$ 을 지나는 원의 중심을  $D(X, Y)$ 로 표기하자. 그리고 나서 다음 함수를 정의하자.

$$\begin{aligned} g(x) &:= \|(x, f(x)) - D\|^2 - \|P - D\|^2 \\ &= (x - X)^2 + (f(x) - Y)^2 - (a - X)^2 - (f(a) - Y)^2. \end{aligned}$$

이러면

$$g(a) = g(b) = g(c) = 0.$$

따라서 롤의 정리에 의하여  $a$ 와  $b$  사이에 어떤  $\xi_1$ ,  $a$ 와  $c$  사이에 어떤  $\xi_2$ 가 있어서  $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$ 이 성립한다. 그러면 다시 롤의 정리에 의하여  $\xi_1$ 과  $\xi_2$  사이에  $\eta$ 가 있어서  $g''(\eta) = 0$ 이 성립한다. 그런데

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(x - X) + 2(f(x) - Y)f'(x), \\ g''(x) &= 2 + 2f'(x)^2 + 2(f(x) - Y)f''(x) \end{aligned}$$

이므로  $g''(\eta) = 0$ 으로부터 다음이 따라 나온다.

$$Y = f(\eta) + \frac{1 + f'(\eta)^2}{f''(\eta)}.$$

한편 선분  $PQ$ 의 수직이등분선의 식 (1.1)에다가 위에서 구한  $Y$ 의 표현을 집어 넣으면 다음을 얻는다.

$$X = \frac{a+b}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \left( f(\eta) + \frac{1+f'(\eta)^2}{f''(\eta)} - \frac{f(b)+f(a)}{2} \right).$$

이제  $b$ 와  $c$ 가  $a$ 로 수렴할 때 극한을 구하면 다음이 얻어진다.

$$\lim_{b,c \rightarrow a} X = a - f'(a) \frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}, \quad \lim_{b,c \rightarrow a} Y = f(a) + \frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}.$$

즉,

$$\lim_{b,c \rightarrow a} (X, Y) = (a, f(a)) + \frac{1+f'(a)^2}{f''(a)} (-f'(a), 1).$$

따라서  $C := \lim_{b,c \rightarrow a} (X, Y)$ 는 존재하고 유일하며 그 식은 위와 같음을 알 수 있다.  $\square$

## 1.3 일변수 함수의 그래프로 주어진 곡선의 곡률

**곡률의 정의** 곡률은 곡률원의 반지름의 역수로 정의된다. 그런데 그러면 절댓값 부호가 등장하는데 이 절댓값 부호가 있는 것이 마음에 들지 않는다. 경험상 절댓값 부호가 들어 있는 함수는 다루기가 복잡한데 그중 무엇보다도 미분이 가능하지 않은 점이 존재할 수 있는 난점이 있다. 따라서 절댓값 부호를 어떻게 해야 할지 생각해 보자. 이 때  $f''(a)$ 의 부호는 곡선이 어느 쪽으로 휘었는가를 말해주므로 절대값 부호를 없앰으로써 ‘곡선이 어느 방향으로 휘었는가’까지도 말해주는 부호가 있는 곡률을 얻게 된다. 이 계산에 비추어 다음과 같이 곡률을 정의한다.<sup>4)</sup>

**정의 1.3.1.** 일변수 함수  $y = f(x)$ 에 대하여 다음과 같이 정의된 함수  $\kappa_2[f]$ 를  $f$ 의 유향 곡률 함수(signed curvature function)<sup>5)</sup>, 또는 간단히 유향 곡률(signed curvature)이라고 한다.

$$\kappa_2[f](x) := \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} \quad (1.9)$$

참, 여기서  $\kappa$ 는 영문자의 ‘케이’가 아니고 그리스 문자의 ‘카파’다. 최근 들어

4) 이걸 왜 정리가 아니고 정의라고 할까? 열심히 식을 유도해 놓고선…….

5) 대한수학회 용어집을 보면 ‘signed X’가 보통 ‘부호X’로 번역되어 있다. 이런 이유에서 이를 ‘부호곡률’이라 부르기도 한다.

드디어 한글이 수학 기호에 쓰인 경우가 발생하였는데 그이 한 수학 논문에 수학 기호로 사용되었음이 대한수학회 소식지 2004년 7월호에 소개되었다. 여기서, 유향 곡률의 기호가  $\kappa_2$ 임을 기억하라. 단독으로 쓰인  $\kappa$ 는 2장에서 공간 곡선의 곡률<sup>6)</sup>을 나타내는 데 사용될 것이다. 이렇게  $\kappa_2$ 와  $\kappa$ 를 구분하여 사용하는 것은 [19]의 방식을 따른 것이다.

$\kappa_2[f](x)$ 가 양인 것은  $f''(x)$ 가 양이기 위한 필요 충분 조건인데 이는 다시 곡선이 아래로 볼록인 것과 필요 충분 조건이다. 마찬가지로  $\kappa_2[f](x)$ 가 음인 것은 곡선이 위로 볼록인 것과 필요 충분 조건이다.

참고로 곡률원의 반지름은  $f''(a) = 0$ 인 점에서는 정의되지 않으나 곡률은 그런 점에서도 잘 정의되었다.

## 예 및 연습문제

예 1.3.2.  $p$ 가 0이 아닌 실수일 때, 포물선  $x^2 = 4py$ 의  $x = 0$ 에서의 유향 곡률과 곡률 원의 반지름의 길이를 구해보자.  $y' = \frac{1}{2p}x$ ,  $y'' = \frac{1}{2p}$ 이므로

$$\kappa_2[f](0) = \frac{1/2p}{(1 + (0/2p)^2)^{3/2}} = \frac{1}{2p}.$$

---

6) 이 곡률은 항상 비-음(非陰, non-negative)의 값만을 가진다.

그러므로  $x = 0$ 에서의 유향 곡률은  $\frac{1}{2p}$  며 곡률 원의 반지름의 길이는  $2|p|$ 다.<sup>7)</sup>

**예 1.3.3.**  $f(x) = x^3$ 에 대하여  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$ 이므로  $\kappa_2[f](0) = \frac{6 \cdot 0}{(1+0^2)^{3/2}} = 0$ 이다.

**질문 1.3.4.**  $f(x) = x^3$ 의  $x = 0$ 에서의 곡률 원의 반지름은 얼마인가?

**질문 1.3.5.** 위의 정의에 의하면 유향 곡률의 값은 음수가 될 수 있다. 유향 곡률이 음이라는 것은 무엇을 의미할까?

**질문 1.3.6.**  $y = f(x)$ 의 곡률 원의 반지름의 길이를 나타내는 식은 무엇인가? 곡률 원의 식은 무엇인가?

참,  $\kappa_2[f]$ 는  $f$ 의 이게 도함수가 존재하지 않는 점에서는 정의되지 않는다. 예를 들어 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{만약 } x < 0, \\ -x^2 & \text{만약 } x \geq 0 \end{cases}$$

에 대하여  $f''(0)$ 은 존재하지 않으며 따라서  $\kappa_2[f](0)$ 은 정의되지 않는다.

이 절의 내용에 대한 참고문헌 [1, 426–427쪽].

---

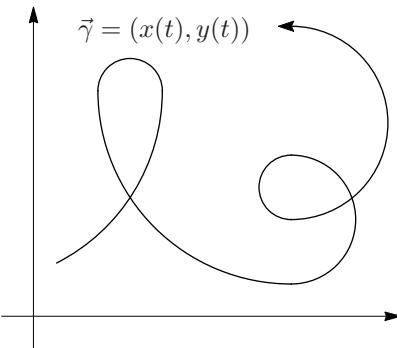
7) 2 곱하기  $p$ 의 절댓값.  $f''(x)$ 는  $f$  double prime of  $x$ ,  $(\ )^{3/2}$ 는  $(\ )$ 의 삼 밑에 이 제곱.

## 1.4 매개식의 상으로 주어진 곡선의 곡률원과 곡률의 식

매개식으로 주어진 곡선, 즉

$$\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

와 같은 식으로 주어진 곡선의 곡률은 어떻게 구할까?



〈그림 1.8〉 매개식으로 주어진 곡선

**방법 1** 함수  $y = f(x)$ 에 대한 곡률식 (1.9)와 여러 미분공식을 적용하여 원하는 식을 구할 수 있다. 먼저 한 점  $\gamma(t_0)$ 을 고정하자. 그러면, 필요한

경우 평행이동/회전이동을 적용하여,  $\gamma(t_0)$  근방에서 어떤 일변수 함수  $f$ 에 대하여  $y(t) = f(x(t))$ 라고 할 수 있다.<sup>8)</sup> 이 경우 식 (1.9)를 어떻게 바꾸면 될지 생각하면 되는데 이는 다음 관계식을 이용하여 얻을 수 있다.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad (1.10)$$

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{df'(x)/dt}{dx/dt} = \frac{(\dot{y}/\dot{x})'}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}. \quad (1.11)$$

이를 이용하면 곡률원의 중심  $C$ 와 곡률  $\kappa$ 에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다. 단  $\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (a, f(a))$ 라고 하자.

$$C = (a, f(a)) + \frac{1 + f'(a)^2}{f''(a)} (-f'(a), 1) \quad (1.12)$$

$$= (x(t_0), y(t_0)) + \frac{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0)}{-\dot{y}(t_0)\ddot{x}(t_0) + \dot{x}(t_0)\ddot{y}(0)} (-\dot{y}(t_0), \dot{x}(t_0)) \quad (1.13)$$

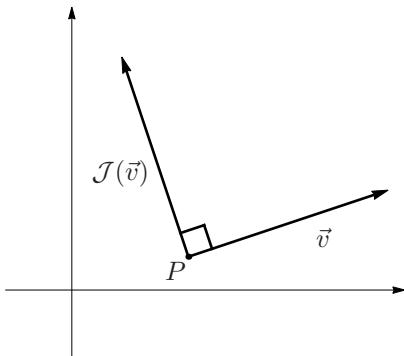
$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)^{3/2}}. \quad (1.14)$$

이에 근거하여 곡선  $\gamma$ 의 곡률원과 유향 곡률을 (1.13)와 (1.14)에 있는 식으로 정의하고 싶은데 그 식이 난삽하여 잠시 다음을 살펴보자.

먼저 위 식에서 나타나는  $(-\dot{y}, \dot{x})$ 는  $(\dot{x}, \dot{y})$ 를 반시계 방향으로  $90^\circ$  돌린 벡터다. 이를 위해  $\mathcal{J}$ 라는 연산자를 도입하기로 하자. 시점이  $P$ 인 벡터  $v$ 에 대하여

8) 왜 이렇게 할 수 있는지 생각해 보라.

$\mathcal{J}(\mathbf{v})$ 는  $P$ 를 중심으로 하여  $\mathbf{v}$ 를 반시계방향으로  $90^\circ$  돌린 벡터를 뜻한다.<sup>9)</sup>



〈그림 1.9〉

이왕 벡터에 작용하는 함수를 소개한 김에 벡터에 관한 기호를 하나 더 소개하기로 한다. 평면이나 공간에 있는 벡터를 나타낼 때는 원래 시점과 종점을 모두 지정해주어야 한다. 이때 시점이  $P(p_1, p_2)$ , 종점이  $Q(q_1, q_2)$ 인 벡터를 나타내는 방법으로 다음을 사용한다.

$$\mathbf{v}_P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)_{(p_1, p_2)} \quad \text{단 } \mathbf{v} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2).$$

예 1.4.1.  $\mathbf{v}_P = (1, 2)_{(3,4)}$ 는 시점이  $(3, 4)$ , 종점이  $(4, 6)$ 인 벡터를 나타낸다. 이 경우  $\mathbf{v} = (1, 2)$ 다.

---

9)  $\mathcal{J}$ 는 ‘제이’라고 읽는다.

정의 1.4.2. 벡터  $(v_1, v_2)_{(p_1, p_2)}$ 에 대하여  $(v_1, v_2)_{(0,0)}$ 을 할당하는 함수를 평행 이동이라 하고  $PT$ 로 나타낸다. 3차원 벡터에 대해서도 마찬가지로 정의한다. 즉,

$$PT((v_1, v_2)_{(p_1, p_2)}) = (v_1, v_2)_{(0,0)}.$$

이제  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  이므로

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))_{(x(t), y(t))}, \quad \ddot{\gamma}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))_{(x(t), y(t))}.$$

여기서  $\dot{\gamma}(t)$ 와  $\ddot{\gamma}(t)$  모두  $\gamma(t)$ 에 시점을 둔 벡터지만 필요에 따라서는 그것들의  $PT$ 에 의한 이미지로 생각하기도 한다. 즉

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \quad \ddot{\gamma}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)).$$

따라서 식 (1.13)과 (1.14)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\kappa = \frac{\mathcal{J}(\dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^3}, \quad (1.15)$$

$$C = \gamma + \frac{|\dot{\gamma}|^2}{\mathcal{J}(\dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}} \mathcal{J}(\dot{\gamma}) = \gamma + \frac{|\dot{\gamma}|^3}{\mathcal{J}(\dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma}} \frac{\mathcal{J}(\dot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|} = \gamma + \frac{1}{\kappa} \frac{\mathcal{J}(\dot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|}. \quad (1.16)$$

여기서  $\frac{\mathcal{J}(\dot{\gamma})}{|\dot{\gamma}|}$ 는 곡선에 수직이며 길이가 1인 벡터다.

**방법 2** 위의 유도 방법에 만족하지 않는 이들을 위하여 곡률원의 정의에 충실한 방법을 하나 소개한다. 이는 2절에 소개된 방법 1과 같다.  $i = 0, 1$ 에 대하여

$$\beta_i(u) := \gamma(t_i) + u \mathcal{J}(\dot{\gamma}(t_i)), \quad u \in \mathbb{R}$$

라 하면  $\beta_i$ 의 상은  $\gamma(t_i)$ 를 지나면서  $\gamma$ 에 수직인 직선이 된다. 이 때  $\beta_0$ 와  $\beta_1$ 의 교점을  $C_{0,1}$ 이라 하고  $t_1 \rightarrow t_0$  일 때  $C_{0,1}$ 의 극한을 알아보자.  $C_{0,1} = \beta_0(u_0)$ 이라 하면

$$0 = \langle \beta_0(u_0) - \gamma(t_1), \dot{\gamma}(t_1) \rangle = \langle \gamma(t_0) + u_0 \mathcal{J}\dot{\gamma}(t_0) - \gamma(t_1), \dot{\gamma}(t_1) \rangle.$$

따라서

$$u_0 = \frac{\langle \gamma(t_1) - \gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_1) \rangle}{\langle \mathcal{J}\dot{\gamma}(t_0), \dot{\gamma}(t_1) \rangle}.$$

이제  $t_1 \rightarrow t_0$  일 때  $u_0$ 의 극한을 구하기 위하여 다음을 살핀다.

$$u_0 = \frac{\langle \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}, \dot{\gamma}(t_1) \rangle}{\langle \mathcal{J}\dot{\gamma}(t_0), \frac{\dot{\gamma}(t_1) - \dot{\gamma}(t_0)}{t_1 - t_0} \rangle}.$$

그러므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} u_0 = \frac{\langle \dot{\gamma}(t_0), \dot{\gamma}(t_0) \rangle}{\langle \mathcal{J}\dot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0) \rangle} = \frac{|\dot{\gamma}(t_0)|^2}{\langle \mathcal{J}\dot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0) \rangle}.$$

따라서

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} C_{0,1} = \gamma(t_0) + \frac{|\dot{\gamma}(t_0)|^3}{\langle \mathcal{J}\dot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0) \rangle} \frac{\mathcal{J}\dot{\gamma}(t_0)}{|\mathcal{J}\dot{\gamma}(t_0)|}.$$

이제까지의 추론에 의거하여 다음을 정의한다.

**정의 1.4.3.** 평면 곡선  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ 에 대하여 다음과 같이 정의된 함수

$$\kappa 2[\gamma](t) := \frac{\mathcal{J}(\dot{\gamma}(t)) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^3} \quad (1.17)$$

를  $\gamma$ 의 유향 곡률 함수라 한다.<sup>10)</sup> 그리고 점

$$C(t) := \gamma(t) + \frac{1}{\kappa 2[\gamma](t)} \frac{\mathcal{J}(\dot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t)|} \quad (1.18)$$

에 중심을 두고  $\gamma(t)$ 를 지나는 원을  $\gamma$ 의  $\gamma(t)$ 에서의 곡률원이라 한다.

**질문 1.4.4.** 다음 평면 곡선의 유향 곡률 함수를 구하여라.

$$\gamma(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2)), \quad \gamma(t) = (\cos(-t^2), \sin(-t^2)).$$

**질문 1.4.5.**  $y = f(x)$ 의 그래프를 매개 변수식으로 나타내는 방법의 하나는  $\gamma(t) = (t, f(t))$ 다. 이 때 정의 1.4.3를 이용하여 계산한 유향 곡률  $\kappa 2[\gamma](t)$ 는 앞 절에서 정의한  $y = f(x)$ 의 유향 곡률  $\kappa 2[f]$ 의 식과 같은가?  $\delta(t) = (-t, f(-t))$  또한 같은 이미지(像 image)를 가진다. 그러면  $\kappa 2[\delta](t)$ 의 식은 앞에서 계산한  $y = f(x)$ 의 유향 곡률의 식과 같은가?

참, (1.17), (1.18)이 의미를 가지기 위해서는  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ , 즉 속력이 0이 아니어야 한다. 모든  $t$ 에 대하여  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ 인 곡선을 정칙 곡선(regular curve)이라 한다. 정칙 곡선이 아닌 예로는

$$\gamma_1(t) = (t^2, t^3), \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} (t^2, 0) & t < 0 \\ (0, t^2) & t \geq 0 \end{cases}$$

---

10)  $\ddot{y}$ 은 ‘와이 더블 닷’으로 읽는다.

등이 있다. 이 책에서 다루는 곡선은 특별한 언급이 없는 한 정직 곡선을 뜻한다. 곡률이 정의되지 않는 곡선에 대한 공부는 다른 서적을 참고하라.

(1.14)와 (1.17)에 나오는 두 식은 사실 같은 식이지만 관점에서 차이가 있다. (1.14)는 좌표에 의존하는 식이고(1.17)은 좌표에 의존하지 않는 식이다.

**나중을 위하여** 곡률에 관하여 더 깊이 생각하기 전에 다음을 살펴두자.

**정의 1.4.6.** 다음과 같이 정의된 두 벡터장  $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ 을 각각 평면곡선의 단위 접벡터장, 단위 법벡터장이라 한다.

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}, \quad \mathbf{N}(t) := \frac{\mathcal{J}\dot{\gamma}(t)}{|\mathcal{J}\dot{\gamma}(t)|}. \quad (1.19)$$

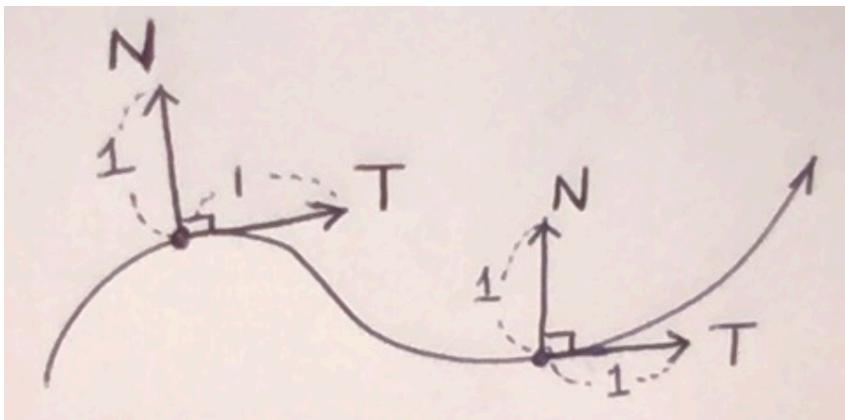
$\mathbf{T}$ 와  $\mathbf{N}$ 은 공간곡선에 대하여 프레네 틀장이라는 개념으로 확장된다. 프레네 틀에 대해서는 2장을 참조하라.

**정리 1.4.7.**

$$\kappa 2[\gamma](t) = -\frac{\dot{\mathbf{N}}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)}{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)}. \quad (1.20)$$

**증명** 먼저 다음을 살피라.

$$\kappa 2[\gamma](t) = \frac{\mathcal{J}\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|^3} = \frac{\frac{\mathcal{J}\dot{\gamma}(t)}{|\mathcal{J}\dot{\gamma}(t)|} \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)} = \frac{\mathbf{N}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)}{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)}.$$



〈그림 1.10〉

그런데 모든  $t$ 에 대하여  $\mathbf{N}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$  이므로  $\dot{\mathbf{N}}(t) \cdot \dot{\gamma} = -\mathbf{N}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t)$ . 따라서 결론이 성립한다. ■

식 (1.20)은 곡면의 곡률을 이해하는 데에 사용된다. 예를 들어 (3.11)을 보라.

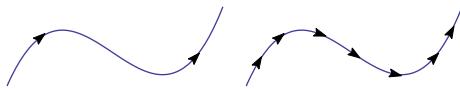
#### 예제 1.4.8. $\gamma$ 의 속력이 항상 1인 경우

$$\dot{\mathbf{N}}(t) = -\kappa 2[\gamma](t) \mathbf{T}(t)$$

임을 보여라.

## 1.5 단위속력곡선의 가속도와 곡률

단위속력곡선이란 속력이 항상 1인 곡선을 말한다. 어떤 정칙 곡선이든지 단위속력곡선으로 변환가능하다.



〈그림 1.11〉 이미지는 같지만 속력이 다른 두 곡선

구체적인 방법은 다음과 같다.

**임의의 정칙 곡선을 단위속력곡선으로 바꾸는 법** 정칙 곡선

$$\beta : (c, d) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad \beta = \beta(t)$$

의 속력이 항상 1인건 아니라고 하자. 이제 자취는  $\beta$ 와 같으면서 속력은 항상 1인 곡선을 만들고자 한다. 이를 위해 먼저 구간  $(c, d)$ 에 있는 수  $e$ 를 임의로 하나 정한 후 다음 함수를 생각해 보자.

$$s : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s(t) := \int_e^t |\beta'(\bar{t})| d\bar{t}.$$

함수  $s(t)$ 는  $\beta(e)$ 에서  $\beta(t)$ 까지의  $\beta$ 의 유향 길이를 나타낸다. 이때, 모든  $t$ 에 대해  $|\beta'(t)|$ 이 0보다 크므로  $s$ 는 단조 증가 함수이며 따라서 역함수가 존재한다. 즉, 어떤 함수

$$t : (s(c), s(d)) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t = t(s)$$

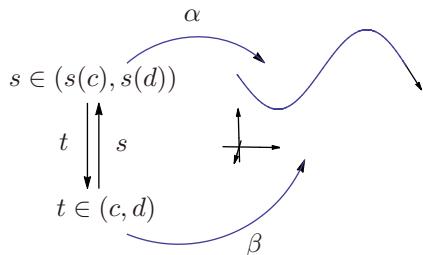
가 존재하여

$$t \circ s = id, \quad s \circ t = id$$

가 성립한다.

자, 이제 다음과 같이 곡선을 하나 정의하자.

$$\alpha : (s(c), s(d)) \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad \alpha(s) := \beta(t(s)).$$



〈그림 1.12〉

그러면  $\alpha$ 의 이미지는  $\beta$ 의 이미지와 같다. 그리고 다음이 성립한다.

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\beta}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

그런데,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_c^t |\beta'(\bar{t})| d\bar{t} = |\beta'(t)|$$

므로  $\alpha'(s) = \frac{1}{|\beta'(t)|} \beta'(t)$  고 따라서  $\alpha(s)$ 의 속력은 항상 1이다. 이때  $\alpha$ 는  $\beta$ 를 속력이 항상 1이 되도록 재매개하여 얻어진 곡선이라고 한다. 이제 모든 정칙 곡선은 단위속력곡선으로 재매개할 수 있음을 알았다.

단위속력곡선의 가속도벡터와 속도벡터는 서로 수직이다. 이제부터는 이 절에선 곡선  $\gamma$ 가 항상 단위속력을 가졌다고 가정한다. 이 경우 다음 논리에서 볼 수 있는 것처럼 속도와 가속도가 항상 수직이게 된다:

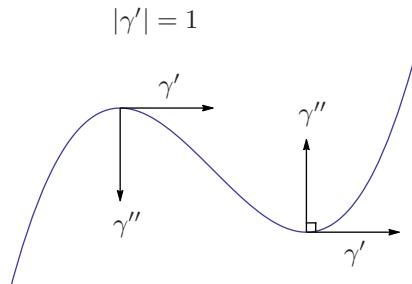
$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}(s)| = 1 \quad \forall s &\Leftrightarrow |\dot{\gamma}(s)|^2 = 1 \quad \forall s \\ &\Leftrightarrow \dot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = 1 \quad \forall s \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\dot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s)) = 0 \quad \forall s \\ &\Leftrightarrow 2\ddot{\gamma}(s) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0 \quad \forall s \\ &\Leftrightarrow \ddot{\gamma}(s) \perp \dot{\gamma}(s) \quad \forall s. \end{aligned}$$

이 경우 가속도  $\ddot{\gamma}(s)$ 와  $\mathcal{J}(\dot{\gamma}(s))$ 는 서로 평행하게 된다. 즉,

$$\mathcal{J}(\dot{\gamma}(s)) \parallel \ddot{\gamma}(s) \quad \forall s. \tag{1.21}$$

위 논리는 자주 쓰이므로 잘 기억하도록 하자. 미분 기하학에는 속력이 항상 1인 경우를 그렇지 않은 경우와 구분하여 나타내는 방법으로 매개 변수를 달리

쓰는 관례가 있다. 즉,  $\gamma(t)$ 는 임의의 속력을 가지는 곡선을 나타낼 때 쓰고  $\gamma(s)$ 는 속력이 항상 1인 곡선을 나타낼 때 쓴다.



〈그림 1.13〉

### 단위속력곡선의 곡률과 가속도 사이의 관계

**정리 1.5.1.** 곡선이 항상 단위 속력을 가지는 경우 유향 곡률과 가속도는 그 크기가 같다. 즉,

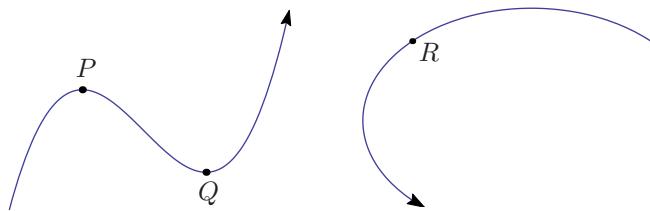
$$\kappa 2[\gamma](s) = \pm |\ddot{\gamma}(s)| \quad \forall s.$$

여기서 “+”는 가속도  $\ddot{\gamma}$ 과  $\mathcal{J}\dot{\gamma}$ 이 같은 방향을 가질 때고, “-”는 가속도  $\ddot{\gamma}$ 과  $\mathcal{J}\dot{\gamma}$ 이 반대 방향을 가질 때다.

**증명** 식 (1.17)과 (1.21)로부터 따라 나온다. ■

단위속력곡선의 경우 개형만으로도 가속도의 방향을 알 수 있으므로 곡선의 개형만으로도 유향 곡률의 부호를 결정할 수 있다.

**질문 1.5.2.** 그림 1.14에 주어진 곡선에서 점  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ 에서의 유향 곡률은 양인가, 음인가?



〈그림 1.14〉 질문 1.5.2의 그림

**질문 1.5.3.** 평면 곡선  $\gamma$ 의 속력이 항상 1인 경우

$$\ddot{\gamma}(s) = \kappa 2[\gamma](s) \mathcal{J}\dot{\gamma}(s) \quad (1.22)$$

임을 보여라.

쉬어가는 코너 정리 1.5.1을 좀 더 추상적인 방법으로 증명해 보자.

**방법 1** 단위 속력의 평면 곡선  $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$  과 한 수  $s_0 \in (a, b)$  를 고정하자. 이 때  $s_1 < s_0 < s_2$  가 성립하는  $s_0 \in (a, b)$  근방의 서로 다른 두 수  $s_1, s_2$  를 선택하자. 그리고 선분  $\overline{\gamma(s_0)\gamma(s_1)}$  과 선분  $\overline{\gamma(s_0)\gamma(s_2)}$  의 수직이등분선의 교점을  $D(s_1, s_2)$  라 하자. 이때  $s_1, s_2 \rightarrow s_0$  때  $D(s_1, s_2)$  는 어디로 수렴하는지 생각해 보자.

먼저 다음 함수를 생각하자:  $s \in (a, b)$  에 대하여

$$f(s) := \|D(s_1, s_2) - \gamma(s)\|^2 - \|D(s_1, s_2) - \gamma(s_0)\|^2. \quad (1.23)$$

그러면  $f(s_0) = 0$ . 또한  $D(s_1, s_2)$  의 정의에 의하여

$$f(s_1) = f(s_2) = 0. \quad (1.24)$$

따라서 롤의 정리에 의하여  $\xi_1 \in (s_1, s_0), \xi_2 \in (s_0, s_2)$  가 있어서

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0. \quad (1.25)$$

다시 롤의 정리에 의하여 다음을 만족시키는  $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$  가 있다.

$$f''(\eta) = 0. \quad (1.26)$$

그런데

$$f'(s) = -2\langle D(s_1, s_2) - \gamma(s), T(s) \rangle, \quad (1.27)$$

$$f''(s) = 2\langle T(s), T(s) \rangle - 2\langle D(s_1, s_2) - \gamma(s), T'(s) \rangle \quad (1.28)$$

이므로

$$0 = f'(\xi_i) = -2\langle D(s_1, s_2) - \gamma(\xi_i), T(\xi_i) \rangle, \quad i = 1, 2,$$

$$0 = f''(\eta) = 2 - 2\langle D(s_1, s_2) - \gamma(\eta), \gamma''(\eta) \rangle.$$

이제  $s_1, s_2 \rightarrow s_0$  를 통하여 다음을 얻는다.

$$0 = \left\langle \lim_{s_1, s_2 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2) - \gamma(s_0), \gamma'(s_0) \right\rangle,$$

$$1 = \left\langle \lim_{s_1, s_2 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2) - \gamma(s_0), \gamma''(s_0) \right\rangle.$$

따라서 다음을 얻는다.

$$\lim_{s_1, s_2 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2) = \gamma(s_0) + \frac{1}{|\gamma''(s_0)|} \frac{\gamma''(s_0)}{|\gamma''(s_0)|} \quad (1.29)$$

이것이 곡률원의 중심의 위치다.

**방법 2** 또는 다음과 같이 생각할 수도 있다.<sup>11)</sup> 주어진 단위 속력의 평면 곡선  $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ 에 대하여  $s_0 \in (a, b)$  를 고정하자. 그리고  $s_0$  근방의 임의의 수  $s_1$  을 생각하자. 이제 곡선  $\gamma$ 의  $\gamma(s_0)$  에서의 법선과  $\gamma(s_1)$  에서의 법선의 교점을  $D_1(s_1)$  이라 하자. 이때  $s_1 \rightarrow s_0$  때  $D(s_1)$  이 어디로 수렴하는지 생각해 보자.

먼저 다음 함수를 생각하자.

$$g(s) := \langle D_1(s_1) - \gamma(s), T(s) \rangle \quad (1.30)$$

그러면  $D_1(s_1)$ 의 정의에 의하여

$$g(s_0) = g(s_1) = 0$$

---

11) 이하 논리는 [34, 2권 1장]에 나오는 논법에 착안한 것이다.

따라서, 룰의 정리에 의하여, 어떤  $\xi \in (s_0, s_1)$ 에 대하여

$$g'(\xi) = 0.$$

그런데

$$g'(s) = -\langle T(s), T(s) \rangle + \langle D_1(s_1) - \gamma(s), \gamma''(s) \rangle$$

이므로

$$0 = -1 + \langle D_1(s_1) - \gamma(\xi), \gamma''(\xi) \rangle.$$

따라서

$$1 = \langle \lim_{s_1 \rightarrow s_0} D_1(s_1) - \gamma(s_0), \gamma''(s_0) \rangle.$$

그런데  $\lim_{s_1 \rightarrow s_0} D_1(s_1) - \gamma(s_0)$ 과  $\gamma''(s_0)$ 은 사실 평행하면서 같은 방향을 향하므로 위 식은 다음을 나타낸다.

$$\lim_{s_1 \rightarrow s_0} D_1(s_1) = \gamma(s_0) + \frac{1}{|\gamma''(s_0)|} \frac{\gamma''(s_0)}{|\gamma''(s_0)|}$$

이것 또한 곡률원의 중심의 위치다.

**참고 1.5.4.** 식 (1.30)의  $g$ 는 식 (1.27)의  $f'$ 에 매우 가까움에 주목하라.

**참고 1.5.5.**  $C$ 를 직접 구해보고자 하는 독자는 식 (1.30)의 변형인 다음 함수  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 를 가지고 위와 같이 진행하면 될 것이다.

$$f(s) := \begin{cases} \langle D(s_1, s_2) - \frac{\gamma(s) + \gamma(s_0)}{2}, \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} \rangle, & s \neq s_0, \\ \langle D(s_1, s_2) - \gamma(s_0), \gamma'(s_0) \rangle, & s = s_0. \end{cases} \quad (1.31)$$

이 경우에도  $f(s_1) = f(s_2) = 0$ 이 성립한다. 이 식과 식 (2.25)를 비교하라.

## 1.6 곡률을 각의 변화율로 해석하기

함수  $y = f(x)$ 의 한 점  $P(a, f(a))$ 에서의 곡률을 구하는 여러 방법 중 1장 2절의 방법 1을 다시 생각해 보자.  $P(a, f(a))$ 에서의 법선과  $Q(b, f(b))$ 에서의 법선<sup>12)</sup>을 생각한다. 일반적으로 두 법선은 한 점에서 만나는데 그 교점을  $D_1$ 이라 하자. 이제 곡선을 따라서  $Q$ 를  $P$ 로 보낼 때  $D_1$ 이 어떤 점  $C_1$ 로 수렴한다고 하자. 이때 중심이  $C_1$ 이면서  $P$ 를 지나는 원은 곡률 원이 된다.

이제 두 직선  $D_1P$ 와  $D_1Q$ 가 이루는 각의 크기를  $\Delta\theta$ 라 하자. 그리고 점  $D_1$ 에 중심이 있고  $P$ 를 지나며 중심각이  $\Delta\theta$ 인 원호의 길이를  $\Delta\ell$ , 이 원의 반지름의 길이를  $r$ 이라 하면  $r = \Delta\ell/\Delta\theta$ 이다. 이 때  $\Delta\ell$ 을 어떻게 나타낼 수 있는지 생각해 보면,  $P$ 와  $Q$  사이에 있는 그래프 일부의 길이를  $\Delta s$ 라 할 때  $\Delta\ell \sim \Delta s$ 라고 생각할 수 있다.<sup>13)</sup> 따라서 곡률을 다음과 같이 구할 수 있을 거라고 생각된다.

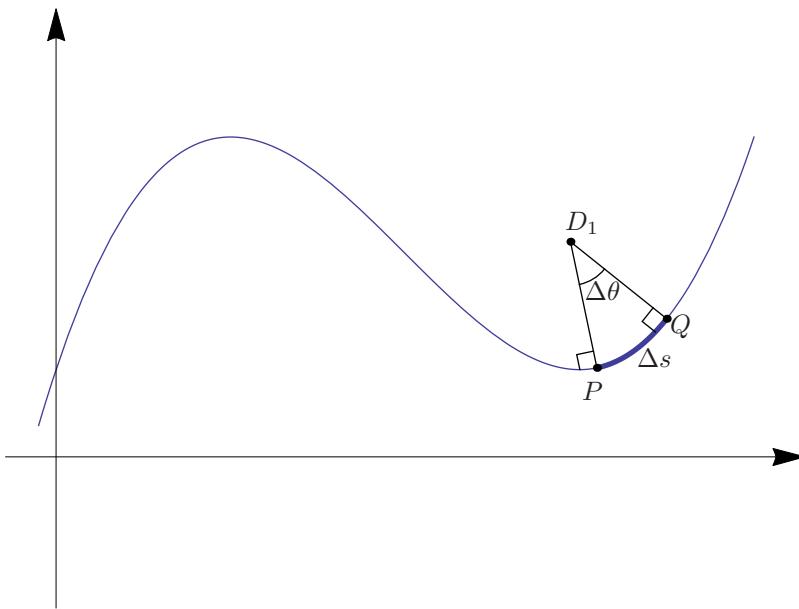
$$\text{곡률} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{1}{r} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

이제 실제로 이렇게 되는지 살펴 보자.

먼저 임의의  $x$ 에 대하여  $y = f(x)$ 의 점  $(x, f(x))$ 에서의 접선이  $x$ 축과 이루는

12) 법선(法線)을 왜 법선이라고 할까? 중국어로도 일본어로도 모두 법선이라 한다.

13) 과연 이렇게 해도 되는지 생각해 보라.



〈그림 1.15〉

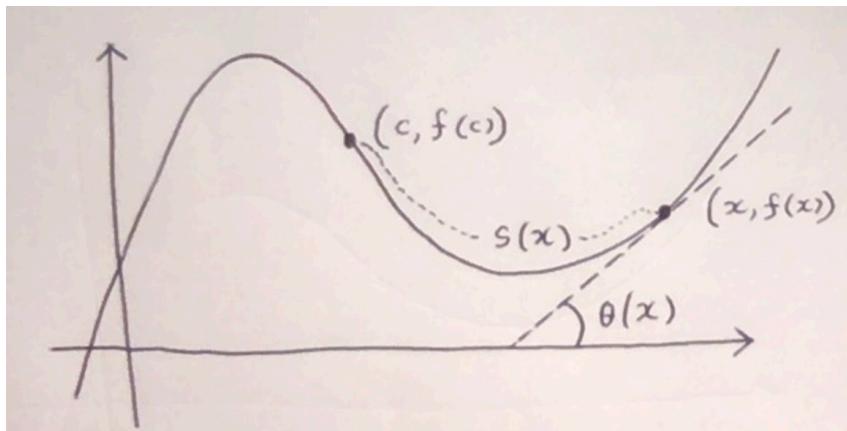
유향 각의 크기를  $\theta(x)$ 로 나타내자. 즉

$$\theta(x) = \tan^{-1}(f'(x)).$$

그러면 간단한 추론에 의하여

$$\Delta\theta = \theta(b) - \theta(a)$$

임을 알 수 있다.



〈그림 1.16〉

한편, 고정된  $c$ 와 임의의  $x$ 에 대하여 점  $(c, f(c))$ 에서부터 점  $(x, f(x))$ 까지의 곡선의 길이를 나타내는 함수를  $s(x)$ 라고 하자. 그러면 미적분학에서 다음이 성립함을 공부했다.

$$s(x) = \int_c^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt. \quad (1.32)$$

이러면  $\Delta s = s(b) - s(a)$  다. 따라서

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}(a) = \frac{\frac{d\theta}{dx}(a)}{\frac{ds}{dx}(a)}.$$

이 때,  $\tan \theta(x) = f'(x)$  이므로  $\sec^2 \theta(x) \frac{d\theta}{dx} = f''(x)$  이 되며 따라서 다음을

얻는다:

$$\frac{d\theta}{dx}(a) = \frac{f''(a)}{\sec^2 \theta(a)} = \frac{f''(a)}{1 + \tan^2 \theta(a)} = \frac{f''(a)}{1 + f'(a)^2}.$$

(1.32)에 의하여  $ds/dx = \sqrt{1 + f'(x)^2}$  이므로 이 둘을 결합하면

$$\frac{d\theta}{ds}(a) = \frac{f''(a)}{(1 + f'(a)^2)^{3/2}} = \kappa_2[f](a). \quad (1.33)$$

따라서, 부호가 있는 곡률은 곡선의 길이에 대한 각의 크기의 변화율이라는 해석을 얻을 수 있다. 여기서 말하는 각은 접선이  $x$  축과 이루는 각을 말하는데, 사실은  $x$  축이 아니라 임의의 한 직선과 이루는 각을 생각해도 된다. 중요한 것은 각의 크기가 아니라 각의 크기의 변화율이기 때문이다.

이 해석은 여러 유의미한 결과들을 유도하는 데에, 예를 들어 1.7절에서 곡률함수가 미리 주어진 곡선을 만들 때에, 1.8절에서 전 유향 곡률을 해석할 때에, 그리고 3장에서 곡면의 곡률을 정의할 때에, 유용하게 사용된다.

## 1.7 평면 곡선론의 기본 정리

주어진 함수를 유향 곡률 함수로 가지는 평면 곡선이 있는가? 있으면 몇 개나 있는가? 이 질문은, 유향 곡률이라고 하는 것이 얼마만큼 곡선을 결정하는가를 묻고 있다. 이 질문에 대한 답을 ‘평면 곡선론의 기본 정리’라고 하는데, 2장 4 절에 나오는 공간 곡선론의 기본정리, 3장 6절에 나오는 곡면론의 기본 정리 등등과 비교해 보기 바란다.

더 나아가기 전에 유일성에 대하여 짚고 넘어갈 부분이 있다. 한 곡선을 회전시키거나 평행 이동시켜도 유향 곡률이 변하지 않는다는 사실로부터 원하는 곡선은 무한히 많이 존재함을 알 수 있다. 그래서 유일한가 아닌가 하는 질문은 두 곡선의 유향 곡률이 같은 경우 반드시 두 곡선을 회전 또는 평행 이동으로 겹칠 수 있겠는가? 라는 질문과 같다.

이제 질문에 대한 답을 생각해 보자. 먼저, 주어진 함수  $\kappa_2 : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여  $\kappa_2[\beta](s) = \kappa_2(s)$ 를 만족시키는 단위속력곡선  $\beta : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ 가 있다고 가정하자. 앞 절의 내용에 의하면 속도벡터  $\beta'(s)$ 가 양의  $x$ 축과 이루는 유향각을  $\theta(s)$ 라 할 때 다음이 성립해야 한다.

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \kappa_2[\beta](s) = \kappa_2(s), \quad \beta'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)).$$

그런데 이 미분방정식계의 해는 다음과 같이 주어지며 역으로 다음과 같이

주어진 식은 위 미분방정식계를 만족시킨다는 것이 알려져 있다. <sup>14)</sup>

$$\theta(s) := \theta_0 + \int_a^s \kappa 2(\bar{s}) d\bar{s},$$

$$\beta(s) := (x_0, y_0) + \left( \int_a^s \cos[\theta(\tilde{s})] d\tilde{s}, \int_a^s \sin[\theta(\tilde{s})] d\tilde{s} \right).$$

여기서  $\theta_0$ 를 더하는 것은 원점에 대한 회전을,  $(x_0, y_0)$ 를 더하는 것은 평행이동을 나타낸다. 따라서 주어진 함수를 유향곡률함수로 가지는 곡선의 존재성과 (평행이동과 회전이동을 허용한) 유일성이 증명되었다.

**유일성의 증명 2** 임의의 두 곡선  $\gamma, \beta : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ 을 생각하자. 일반적으로 다음이 성립한다고 할 수 있다.

1. 모든  $s \in (a, b)$ 에 대하여  $|\gamma'(s)| = |\beta'(s)| = 1$ ,
2.  $\gamma(a) = \beta(a)$ ,
3.  $\gamma'(a) = \beta'(a)$ .

---

14)  $\kappa 2$ 와  $\beta$ 의 정의역이 양 끝점  $a$ 와  $b$ 를 포함하지 않아 여기에 있는 정적분의 정의가 무엇인지 불분명하다. 이 책에는 이와 같이 개구간  $(a, b)$ 에 정의된 함수를 폐구간  $[a, b]$ 에 정의된 것처럼 다루는 부분이 여러 군데 있는데 이 경우 암묵적으로 주어진 함수가 폐구간  $[a, b]$ 를 포함한 어떤 개구간에서 잘 정의되었다고 가정하여 이론을 전개한다는 것을 밝혀둔다.

첫 번째 조건은 두 곡선 모두 단위 속력을 가지고 있다는 것인데 이것은 매개 변수를 적절히 변환함으로써 가능하다. 두 번째 조건은 평행 이동에 의하여 가능하다. 세 번째 조건은 회전 이동에 의하여 가능하다. 이제 두 곡선의 유향 곡률이 같다는 말은 다음 식으로 표현된다.

- 모든  $s \in (a, b)$ 에 대하여  $\kappa^2[\gamma](s) = \kappa^2[\beta](s)$ .

이 때 함수  $f(s) := |\gamma'(s) - \beta'(s)|^2$ 라고 정의하자. 그러면

$$\begin{aligned} f'(s) &= ((\gamma' - \beta') \cdot (\gamma' - \beta'))' \\ &= 2(\gamma'' - \beta'') \cdot (\gamma' - \beta') \\ &= 2(\gamma'' \cdot \gamma' - \gamma'' \cdot \beta' - \beta'' \cdot \gamma' + \beta'' \cdot \beta') \\ &= -2(\gamma'' \cdot \beta' + \gamma' \cdot \beta''). \end{aligned}$$

이때  $\gamma'' = \kappa^2[\gamma]\mathcal{J}\gamma'$ ,  $\beta'' = \kappa^2[\beta]\mathcal{J}\beta'$ 이고 조건에 의하여  $\kappa^2[\gamma] = \kappa^2[\beta]$ 이기 때문에

$$f'(s) = -2\kappa^2[\gamma](\mathcal{J}\gamma' \cdot \beta' + \gamma' \cdot \mathcal{J}\beta').$$

그런데

$$\mathcal{J}\gamma' \cdot \beta' + \gamma' \cdot \mathcal{J}\beta' = \mathcal{J}\gamma' \cdot \beta' + \mathcal{J}\gamma' \cdot \mathcal{J}^2\beta' = \mathcal{J}\gamma' \cdot \beta' - \mathcal{J}\gamma' \cdot \beta' = 0$$

이므로 모든  $s$ 에 대하여  $f'(s) = 0$ 이고 따라서  $f(s) =$ 상수. 그런데  $f(a) = 0$ 이므로  $f(s) = 0$ . 따라서 모든  $s$ 에 대하여  $\gamma(s) = \beta(s)$ . 즉  $\gamma$ 와  $\beta$ 는 같은 곡선이다.

위 두 결과(존재성과 유일성)를 통칭하여 평면 곡선론의 기본 정리라 한다.

**정리 1.7.1.** (평면 곡선론의 기본 정리) 함수  $\kappa_2 : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 유향 곡률 함수로 가지는 곡선은, 평행 이동과 회전 이동을 허용하였을 때, 한 개 그리고 단 한 개 있다.

**참고 1.7.2.** 평행 이동, 회전 이동에 대해서는  $\kappa_2$ 가 변하지 않지만 선 대칭 이동에 대해서는  $\kappa_2$ 는  $-\kappa_2$ 가 된다. (점 대칭 이동은 180도 회전 이동이다.)

**질문 1.7.3.** 임의의 함수  $\kappa_2 : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음을 만족하는 함수  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가 항상 존재하는가?

$$\frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} = \kappa_2(x)$$

**질문 1.7.4.** 유향 곡선의 매개식을 달리 택하더라도 유향 곡률은 같음을 보여라. 즉 한 곡선의 매개식이  $\alpha$ 로도 쓰여질 수 있고  $\beta$ 로도 쓰여질 수 있을 때 해당하는 점에서의 유향 곡률은 같게 계산됨을 보여라. (단  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 진행 방향은 같다고 하자.)

## 1.8 평면 곡선의 전 유향 곡률

어떤 곡선에 대해서 유향 곡률의 총량을 어떻게 표현할 것인지 생각해 보자. 이는 적분의 기본 개념에 부합되는 생각인데, 부분 부분에서 일어나는 변화를 전부 고려하면 어떠한 값이 되겠는가 하는 것이다.<sup>15)</sup>

먼저 전 유향 곡률(全有向曲率, total signed curvature)의 식이 뭐가 돼야 하는지 생각해 보자. 평면 곡선  $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ 의 유향 곡률 함수  $\kappa_2[\gamma] : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 생각하라. 유향 곡률의 총량을 생각하는 것이므로  $\int_a^b \kappa_2[\gamma](t)dt$ 가 전 유향 곡률로 적당해 보인다. 하지만, 다음 예에서와 같이, 곡선의 매개 변수 방정식이 유일하지 않기 때문에  $\int_a^b \kappa_2[\gamma](t)dt$ 를 전 유향 곡률로 정의하기에는 문제가 있다.

**예 1.8.1.** 원에 대해  $\int_a^b \kappa_2[\gamma](t)dt$ 를 구해보자. 중심이 원점에 있고 반지름이  $a > 0$ 인 원은 여러 매개 변수 방정식으로 나타낼 수 있는데, 예를 들어 다음 두 가지가 있다:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &:= (a \cos t, a \sin t), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ \gamma_2(t) &:= (a \cos(2t), a \sin(2t)), & 0 \leq t \leq \pi.\end{aligned}$$

---

15) 이 개념은 곡면에 대해서는 가우스-보네 정리라는 것으로 일반화된다.

어떻게 식이 주어지든 간에 둘 다 반지름이  $a$  인 원이므로  $\kappa_2$ 는 항상  $\frac{1}{a}$ 다.  
하지만

$$\int_0^{2\pi} \kappa_2[\gamma_1](t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a} dt = \frac{2\pi}{a}, \quad \int_0^\pi \kappa_2[\gamma_2](t) dt = \int_0^\pi \frac{1}{a} dt = \frac{\pi}{a}.$$

똑같은 곡선에 대해서 서로 다른 값을 주므로  $\int_a^b \kappa_2[\gamma](t) dt$ 는 기하적 의미를 가지지 않는다. 의미가 있는 양이 되기 위해서는 어떻게 매개 변수 방정식이 주어지는 가와 무관해야 한다.

한 가지 해결책은 곡선이 모든 점에서 단위 속력을 가지도록 재매개한 후  $\kappa_2$ 를 적분하는 것이다. 그런데 조금만 생각해 보면 이는 다음 정의에서와 같이  $\kappa_2$ 에 곡선의 속력을 곱해서 적분하는 것과 같다.

**정의 1.8.2.** 다음과 같이 평면 곡선  $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ 의 전 유향 곡률을 정의한다.

$$TSC[\gamma] := \int_a^b \kappa_2[\gamma](t) |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

TSC는 Total Signed Curvature의 머리글자를 따서 만든 약어다.

**보조정리 1.8.3.** 위와 같이 정의된  $TSC[\gamma]$ 는 잘 정의되어 있다. 즉, 주어진 곡선의 매개변수 방정식을 어떻게 취하든지 같은 값이 된다.

단, 위 말의 뜻을 정확히 알아야 한다. 한 곡선의 매개 변수 방정식을 다시 취할 때 곡선의 방향을 거꾸로 하면 전 유향 곡률의 값은 원래 값의 반수(反數)<sup>16)</sup>가 된다.

**증명** [19, Lemma 7.1]을 참고하라. ■

**전 유향 곡률의 기하적 의미** 곡률에 관한 여러 가지 표현 중  $\kappa_2[\gamma](s) = d\theta/ds$ 로부터

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa_2[\gamma](s(t)) \frac{ds}{dt}$$

임을 알 수 있다. 이 때  $ds/dt = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = |\dot{\gamma}(t)|$  이므로

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa_2[\gamma](t) |\dot{\gamma}(t)|.$$

따라서,

$$\int_a^b \kappa_2[\gamma] |\gamma'| dt = \int_a^b \frac{d\theta}{dt} dt = \theta(b) - \theta(a).$$

이 식이 의미하는 바는, ‘전 유향 곡률은 각의 변화량이다’라는 것이다.

**질문 1.8.4.**  $a$ 가 양의 실수일 때, 평면 곡선

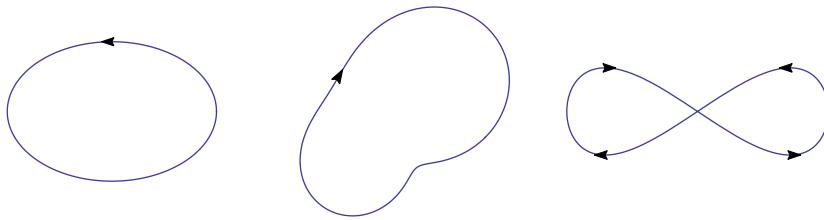
$$\gamma : [0, \pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad \gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$$

---

16) 덧셈에 대한 역원을 뜻하며 半數가 아니다.

의 전 유향 곡률이 얼마인지를 생각해 보자. 핵심은 적분을 행할 필요가 없다는 것이다.  $\theta[0] = \pi/2$  고  $\theta[\pi] = 3\pi/2$  이므로  $TSC[\gamma] = \pi$  다.

질문 1.8.5. 그림 1.17에 그려져 있는 폐곡선들의 전 유향 곡률은 얼마인가?



〈그림 1.17〉 전 유향 곡률 구하기

## 1.9 갈아타는 길

이제 1.1절에서 제기했던, 서로 수직으로 만나는 두 고속도로가 있을 때 한 고속도로에서 다른 고속도로로 갈아타는 길을 어떻게 만들면 되겠는가 하는 문제를 다시 들여다 보자. 편의상 두 길은  $x$  축,  $y$  축이고 만들고자 하는 길은 단위속력을 가지는 곡선  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{E}^2$ 로 주어진다고 할 때 우리는 다음이 성립하기를 원한다.

1.  $\gamma'(a) = (1, 0)$  그리고  $\gamma'(b) = (0, 1)$ , 즉  $\theta(a) = 0$  그리고  $\theta(b) = \frac{\pi}{2}$ .
2.  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 은 증가함수,
3.  $\kappa_2[\gamma](a) = \kappa_2[\gamma](b) = 0$ ,
4. 모든  $s \in (a, b)$ 에 대하여  $\kappa_2[\gamma](s) > 0$ .

이를 위하여 1.7절에 등장하는 식을 사용할 수 있다. 먼저  $\kappa(s) := \sin^2(s)$ , 단  $0 \leq s \leq \pi$ 라고 하자. 그러면

$$\theta(s) := \int_0^s \kappa(\tilde{s}) d\tilde{s} = \int_0^s \sin^2 \tilde{s} d\tilde{s} = \frac{1}{2}(s - \sin s \cos s).$$

라 하면  $a = 0, b = \pi$  라 할 때  $\theta$ 는 위 조건 1, 2를 만족시킨다. 이제 이  $\theta$ 에 대하여

$$\gamma(s) := \left( \int_0^s \cos \theta(\tilde{s}) d\tilde{s}, \int_0^s \sin \theta(\tilde{s}) d\tilde{s} \right)$$

라 하면  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{E}^2$ 은 조건 1, 2, 3, 4를 만족시킨다. 이 식을 적절히 평행이동, 회전이동, 등비변환시키면 구하고자 하는 식이 얻어진다.

**질문 1.9.1.** 수학 소프트웨어를 활용하여 곡선  $\gamma$ 를 그려보자. 필요하다면 수치적분을 이용하라.

**질문 1.9.2.** 위 사고방식에 의거하여 두 길이 예각이나 둔각으로 만날 때 갈아타는 길의 식을 구하여 보아라.

## 1.10 연습 문제

**연습문제 1.10.1.**  $F(x, y) = 0$  으로 주어진 (등위) 곡선의 유향곡률의 식을 계산하여라<sup>17)</sup>.

**연습문제 1.10.2.** 다음 곡선을 생각하라.

$$\gamma(t) = (10e^{-t} \cos t, 10e^{-t} \sin t), \quad t \geq 0$$

이 곡선은 로그 나선이라고 부른다. 이 책의 5장 3절에 로그 나선에 관한 이론이 있다.

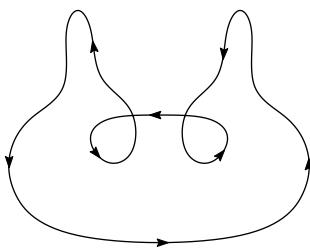
1.  $t$  가 0부터  $t_1$  까지 변할 때 곡선의 길이  $s$  는 얼마인가?
2.  $t_1$  이  $\infty$  이면  $\gamma$  의 길이는 얼마인가?
3. 속력이 항상 1이 되도록  $\gamma$  를 재매개한 식을 구하라.

**연습문제 1.10.3.** (참, 거짓 문제) 다음에 주어진 명제가 참이면 ‘참’ , 거짓이면 ‘거짓’ 이라고 쓰시오.

1. 다음 그림 1.18의 평면 곡선의 전 유향 곡률은  $4\pi$  다.

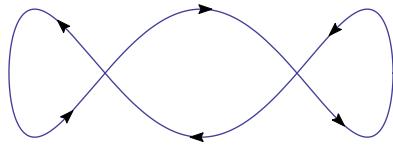
---

17) 답:  $\pm \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_xF_yF_{xy} + F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$



〈그림 1.18〉

2. 다음 그림 1.19의 곡선의 전 유향 곡률은  $2\pi$ 다.



〈그림 1.19〉

3. 평면 곡선의 유향 곡률은 음수가 될 수 있다.

**연습문제 1.10.4.** 평면 곡선  $\beta : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ 가 모든 점에서 단위 속력을 가질 때,  $\beta(s)$ 에서  $\beta$ 의 법선은  $\beta$ 의 축폐선  $\gamma$ 의  $\gamma(s)$ 에서 접선임을 보여라.

연습문제 1.10.5. 다음 식으로 주어진 타원을 생각하라 :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

1. 이 곡선이  $(0, 3)$ 에서 가지는 유향 곡률의 값을 구하여라.<sup>18)</sup>
2. 이 곡선이  $(0, 3)$ 에서 가지는 곡률 원의 중심을 구하여라.
3. 이 곡선의 전 유향 곡률은 얼마인가? 값을 제시하고 그 이유를 밝혀라.

---

18) 유향 곡률의 값은 곡선의 진행 방향에 의존함에 유의하라.



## 제 2 장

# 공간 곡선

## 2.1 공간 곡선의 곡률을 어떻게 생각할 것인가?

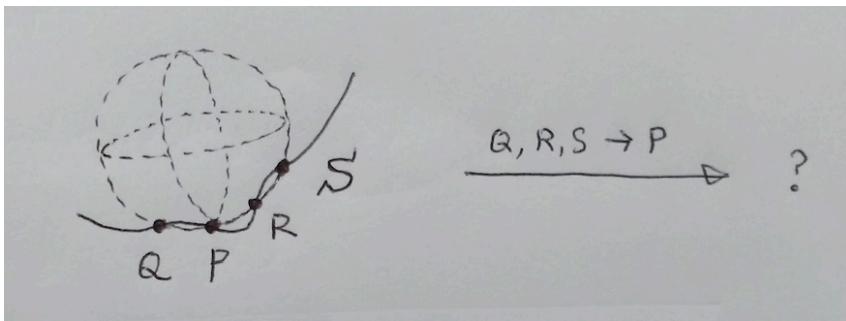
앞에서 평면 곡선의 곡률에 대해서 알아보았다. 이제 공간 곡선의 곡률에 대해서 알아보자. 무엇보다도 공간 곡선의 곡률은 어떻게 정의하면 좋을까?

공간 곡선의 곡률을 정의하기 위해 고려해야 할 사항이 무엇인가 생각해보자. 일단은 평면 곡선의 곡률을 일반화하는 방향으로 정의가 이루어져야 한다는 생각을 할 수 있다. 즉, 공간 곡선의 곡률을 정의했을 때 이 정의를 공간의 평면<sup>1)</sup>에 들어있는 공간 곡선에 대하여 적용하면 이 값이 그 곡선을 평면 곡선으로 보았을 때 주어지는 유형 곡률의 값과 다르지 않아야 한다는 것이다. 따라서 평면 곡선의 곡률의 정의를 확장하는 방법으로 공간 곡선의 곡률을 정의해야 할 것이다.

첫 번째 시도) 평면 곡선의 곡률은 원으로부터 나왔는데 공간 곡선에 대해서는 구를 생각해 볼 수 있다. 주어진 공간 곡선의 한 점  $P$ 를 고정하자. 그리고 곡선의 그 점 근방에 있는 서로 다른 세  $Q, R, S$ 를 취하면 공간에 서로 다른 네 점이 주어지는 셈인데 그러면 구 하나가 결정된다.

---

1) 예를 들어  $xy$ -평면



〈그림 2.1〉

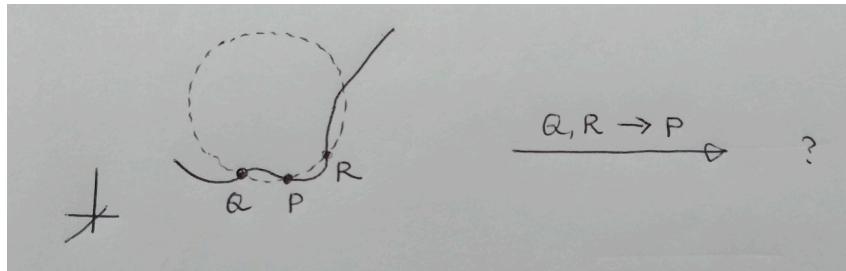
이제  $Q, R, S$ 를  $P$ 로 보냈을 때 그 구가 어떤 특정한 구로 수렴하면 (이를 접촉 구(osculating sphere)라 한다) 공간 곡선의 곡률을 접촉 구의 반지름의 역수로 정의할 수 있지 않을까 생각할 수 있는데, 이렇게도 안 된다. 예를 들어  $xy$ -평면에 있는 공간 곡선  $\alpha$ 를 생각하라. 그러면  $\alpha(0)$  근방의 서로 다른 세 점을 택하였을 때 그 네 점을 모두 지나는 구는 사실은  $xy$ -평면<sup>2)</sup>이고 이의 극한도 역시  $xy$ -평면이다. 따라서 접촉 구의 반지름의 역수는 0이다. 만약 접촉 구의 반지름의 역수를 곡률로 정하면 모든 평면 곡선의 모든 점에서의 곡률은 0이 되어 버리는데 이는 위에서 정한 방침에 어긋난다.

두 번째 시도) 이번에는 평면 곡선의 곡률을 정의한 방법을 그대로 공간

---

2) 평면을 구의 일종으로 보고 있다.

곡선에 적용하여 보자. 즉 공간 곡선의 한 점  $P$ 를 정한 후 그 점 근방에 곡선의 두 점  $Q$ 와  $R$ 을 택한다. 그러면 세 점  $P, Q, R$ 을 모두 지나는 공간의 원이 하나 생긴다. 이제  $Q$ 와  $R$ 을 곡선을 따라  $P$ 로 보내면 이 원이 어떤 원으로 수렴할 것인가 아닌가 생각할 수 있으며 만약 수렴한다면 그 원의 반지름의 역수를 곡률로 정의하면 될 것이다.



〈그림 2.2〉

여기서 평면의 경우와 다른 점은 일반적으로 이 원이 속하는 평면이 달라지므로, 즉 세 점  $P, Q, R$ 로 만들어지는 평면이 변하므로 그 극한에 대한 자유도가 평면의 경우보다 크다는 것이다. 따라서 그런 원이 수렴할 것인가 아닌가에 대해선 평면의 경우보다 더 깐깐하게 따져봐야 한다.<sup>3)</sup>

3) 여기서 고백할 점이 있다. 사실 나는 어떤 이유로 인하여 이 원의 극한이 존재하지 않는다고 생각했었고 몇 년 동안 고려대학교 학생들에게 그렇게 가르쳐왔다. 이 자리를 빌어 졸업생

이제 다음 절에서 곡률의 식을 구하고자 하는데 그 전에 먼저 공간곡선을 어떻게 나타낼 것인가에 대하여 생각해 보자. 평면곡선의 경우에는  $y = f(x)$ 로 곡선을 나타내는 것이 가장 쉬운 방법이었지만 공간곡선의 경우에는

$$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

의상으로 공간곡선을 나타내는 것이 제일 좋다. 우리는 이 곡선이 모든 점에서 속력이 0이 아니기를 원한다. 즉 정칙이기를 원한다. 그런데 평면곡선과 마찬가지로 모든 정칙공간곡선은 반드시 속력이 1인 곡선으로 재매개할 수 있다. 1.5절에 소개된, 평면 곡선을 단위 속력을 가지도록 바꾸는 방법은 사실 공간 곡선에 대해서도 그대로 유효하다.

다음 예를 보자.

**예 2.1.1.** 다음 곡선은 오른 나선(螺旋)<sup>4)</sup>이다.

$$\beta(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.1)$$

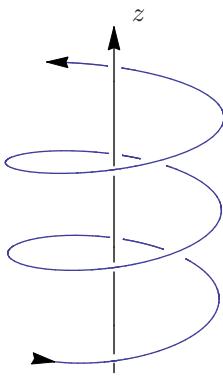
속력을 계산해 보면

$$\dot{\beta}(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

---

여러분들의 용서를 구한다. 그렇게 생각했었던 이유는 참고 2.2.3에 밝혀둔다.

4) 오른 나선과 왼 나선의 차이를 설명하여 보아라.



〈그림 2.3〉

따라서  $|\dot{\beta}(t)| = \sqrt{2}$ 이다. 속력을 1이 되게끔 곡선의 식을 바꿔보자. 이를 위해 곡선의 매개 변수  $t$ 를 바꾸어 보자. 먼저 다음 함수를 생각하자.

$$s(t) := \int_0^t |\dot{\beta}(u)| du = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t.$$

그러므로  $t = t(s) = s/\sqrt{2}$ 가 된다. 이제  $\alpha$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\alpha(s) := \beta(t(s)).$$

그러면

$$\alpha(s) = \left( \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right). \quad (2.2)$$

이  $\alpha$ 는 단위 속력을 갖고 있으며  $\alpha$ 의 상은  $\beta$ 의 상과 같다.

평면곡선의 경우와 마찬가지로 앞으로는 특별한 언급이 없는 한 공간곡선  $\alpha$ 의 매개변수로  $t$ 를 사용하는데  $\alpha$ 가 단위 속력을 가지고 있는 경우 그 매개변수를  $s$ 로 나타낸다.

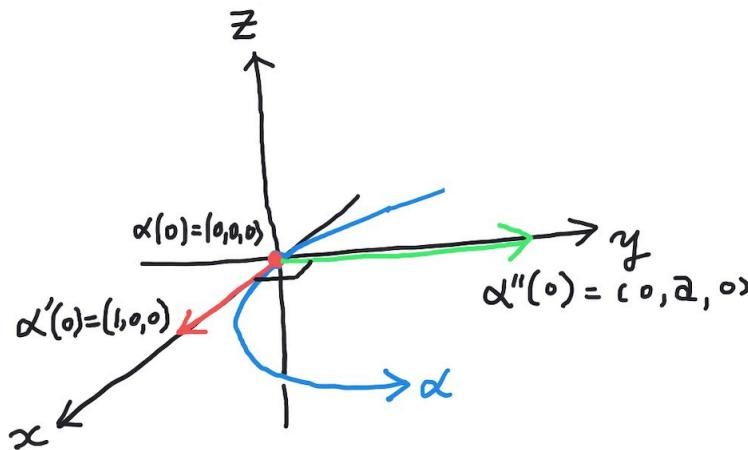
## 2.2 단위속력 공간곡선의 접촉 원과 곡률

단위속력 공간곡선  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$  과 그 곡선의 한 점  $\alpha(s_0) = P$ 에 대하여 앞 절의 두 번째 방법에서 다루어진 원에 대하여 알아보자. 편의상  $\ddot{\alpha}(s_0) \neq \vec{0}$ 이라 가정하자.

먼저  $s_0$  근방에 있는 서로 다른 세 수  $s_1, s_2, s_3$ 를 택하자. (단  $s_1 < s_2 < s_3$ .) 세 점  $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ 을 모두 지나는 원의 중심을  $D$ 라 할 때  $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$  일 때  $D$ 의 극한, 즉  $C := \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} D$ , 가 우리가 구하고자 하는 점이다. 이  $C$ 를 구하는 법을 알아 보자.

**방법 1** 테일러 전개식을 이용하여 다음과 같이 진행할 수 있다. 먼저 유클리드 공간의 강체운동을 적용하며 곡선  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{E}^3$ 이 다음을 만족시킨다고 가정할 수 있다.

$$\alpha(0) = (0, 0, 0), \quad \dot{\alpha}(0) = (1, 0, 0), \quad \ddot{\alpha}(0) = (0, a, 0) \quad (\text{단 } a > 0). \quad (2.3)$$



〈그림 2.4〉

이러면 곡선은 다음과 같은 테일러 전개식으로 표현된다. <sup>5)</sup> <sup>6)</sup>

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \alpha(0) + \dot{\alpha}(0)s + \frac{\ddot{\alpha}(0)}{2!}s^2 + \mathcal{O}(s^3) \\ &= (0, 0, 0) + (1, 0, 0)s + (0, a, 0)\frac{s^2}{2} + \mathcal{O}(s^3).\end{aligned}$$

5) 일변수 함수에 대하여 테일러 전개식이 성립하는 근본 이유는 평균값의 정리인데 벡터값을 가지는 함수에 대해서 평균값의 정리가 성립하지 않는다. 예를 들어 (2.1)로 주어진 곡선  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$  를 생각해 보라.  $\frac{\alpha(2\pi) - \alpha(0)}{2\pi - 0} = (0, 0, 1)$  인데 이는 어떤  $t \in (0, 2\pi)$  에 대해서도  $\dot{\alpha}(t)$  과 같지 않다. 그럼에도 불구하고 이 식이 참인 이유는 각 성분에 대하여 각각 생각할 수 있기 때문이다.

6) 여기서  $\mathcal{O}$  는 큰 오 기호(big O notation)다.

이제  $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ 를 지나는 원의 중심  $D$ 를 구하고 그의 극한을 구하면 다음을 얻을 수 있다.<sup>7)</sup>

$$C = \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} D = \left(0, \frac{1}{a}, 0\right) \quad (2.4)$$

여기에는 두 가지 불만족스러운 점이 최소 두 가지 있다. 첫째, 식 (2.3)을 만족시키지 않는 곡선에 대해선  $C$ 의 식이 무엇인가 하는 점이 불분명하다. 이론적으로는 분명히 임의의 곡선을 식 (2.3)을 만족시키지 않는 곡선으로 변환시킬 수 있지만 실제 계산에 있어서는 다른 아이디어가 필요하다. 둘째, 실질적으로 식 (2.4)의 마지막 부분의 계산을 수행하는 것이 쉽지 않다는 점이다. 그래서 다른 방법도 제시하고자 한다.

설명을 편하게 하기 위하여 다음을 정의한다.

**정의 2.2.1.** 공간의 세 점  $P, Q, R$ 가 한 직선에 있지 않을 때 이 세 점으로 결정되는 평면을  $\Pi(P, Q, R)$ , 선분  $PQ$ 의 수직이등분면을  $\Pi_{\perp}(P, Q)$ , 그리고 점  $P$ 를 포함하며 벡터  $v$ 에 수직인 평면을  $\Pi^{\perp}(P, v)$ 라 하자.

먼저 다음을 살피자.

$$D = \Pi(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)) \cap \Pi_{\perp}(\alpha(s_2), \alpha(s_3)) \cap \Pi_{\perp}(\alpha(s_1), \alpha(s_2)).$$

7) 이 계산을 반드시 해 보기 바란다. Mathematica나 Python 등의 수리 프로그램을 써도 좋다.

직관적으로  $i = 1, 2$ 에 대하여  $\Pi_{\perp}(\boldsymbol{\alpha}(s_i), \boldsymbol{\alpha}(s_{i+1}))$ 은  $\Pi^{\perp}(\boldsymbol{\alpha}(s_0), \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s_0))$ 으로 수렴한다고 말할 수 있다.  $\Pi(\boldsymbol{\alpha}(s_1), \boldsymbol{\alpha}(s_2), \boldsymbol{\alpha}(s_3))$ 에 대해선 다음을 말할 수 있다.

**보조정리 2.2.2.**  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \Pi(\boldsymbol{\alpha}(s_1), \boldsymbol{\alpha}(s_2), \boldsymbol{\alpha}(s_3))$ 은 존재하며  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s_0)$ 와  $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(s_0)$ 을 포함하는 평면이다.

**증명**  $\boldsymbol{\alpha}(s) = (\boldsymbol{\alpha}_1(s), \boldsymbol{\alpha}_2(s), \boldsymbol{\alpha}_3(s))$ 이라 하고  $i = 1, 2, 3$ 에 대하여 다음을 정의하자.

$$L_i(s) := \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\alpha}_i(s) - \boldsymbol{\alpha}_i(s_2)}{s - s_2}, & s \neq s_2, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(s_2), & s = s_2, \end{cases} \quad \mathbf{L}(s) := (L_1(s), L_2(s), L_3(s)).$$

그러면  $\mathbf{L}(s_1), \mathbf{L}(s_3)$ 은  $\Pi(\boldsymbol{\alpha}(s_1), \boldsymbol{\alpha}(s_2), \boldsymbol{\alpha}(s_3))$ 에 들어있다. 평균값의 정리<sup>8)</sup>에 의하여 어떤  $\xi_{i1} \in (s_1, s_2), \xi_{i3} \in (s_2, s_3)$ 에 대하여

$$L_i(s_j) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(\xi_{ij}) \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad j \in \{1, 3\}.$$

따라서

$$\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} L_i(s_j) = \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(\xi_{ij}) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i(s_0).$$

따라서 모든  $i \in \{1, 3\}$ 에 대하여

$$\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \mathbf{L}(s_j) = \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s_0).$$

---

8) 이제 1.2절의 방법2에서처럼 평균값의 정리를 적용하고 싶은데 벡터값을 가지는 함수에 대해선 일반적으로 평균값의 정리가 성립하지 않으므로 성분별로 진행한다.

따라서  $\dot{\alpha}(s_0)$ 가  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \Pi(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$ 에 들어있음을 알 수 있다.

한편  $\frac{L(s_1) - L(s_3)}{s_1 - s_3}$  또한  $\Pi(P, Q, R)$ 에 들어 있으며 따라서  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \frac{L(s_1) - L(s_3)}{s_1 - s_3}$  가  $\lim_{\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0}} \Pi(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$ 에 들어있음을 알 수 있다. 이제 모든  $i \in \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 어떤  $\eta_i \in (s_1, s_3)$ 에 대하여

$$\frac{L_i(s_1) - L_i(s_3)}{s_1 - s_3} = \dot{L}_i(\eta_i).$$

그러므로 모든  $i \in \{1, 2, 3\}$ 에 대하여

$$\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \frac{L_i(s_1) - L_i(s_3)}{s_1 - s_3} = \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \dot{L}_i(\eta_i) = \frac{1}{2} \ddot{\alpha}_i(s_0).$$

따라서

$$\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \frac{L(s_1) - L(s_3)}{s_1 - s_3} = \left( \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \frac{L_i(s_1) - L_i(s_3)}{s_1 - s_3} \right)_{i=1,2,3} = \frac{1}{2} \ddot{\alpha}(s_0).$$

그러므로  $\ddot{\alpha}(s_0)$ 도  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \Pi(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$ 에 들어있다. ■

**참고 2.2.3.** 내가 왜  $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ 을 지나는 원의 극한이 존재하지 않는다고 생각했었는지 적어둔다. 먼저 세 점  $A, B, C$ 를 지나는 원을  $Circle(A, B, C)$  라 하고  $P, Q, R, S$ 를 모두 지나는 구를  $Sphere(P, Q, R, S)$  라 하자. 그러면 다음 네 원

$$Circle(\alpha(s_0), \alpha(s_1), \alpha(s_2)),$$

$$Circle(\alpha(s_0), \alpha(s_2), \alpha(s_3)),$$

$$Circle(\alpha(s_0), \alpha(s_1), \alpha(s_3)),$$

$$Circle(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$$

은 모두  $Sphere(\alpha(s_0), \alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$ 에 들어 있다. 이제  $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$  일 때 이 원들은 모두  $Sphere(\alpha(s_0), \alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$ 의 극한에 들어 있는 원으로 수렴할 것이다. 그리고 그 원들이 달라야만

$$Sphere(\alpha(s_0), \alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$$

의 극한이 구가 될 것으로 생각했던 것이다.

다음 절에서 살펴 보겠지만  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} \Pi(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$ 을 접촉평면이라 한다. 보조정리 2.2.2위 결론은  $C$ 가 접촉평면에 들어 있다는 것이다.

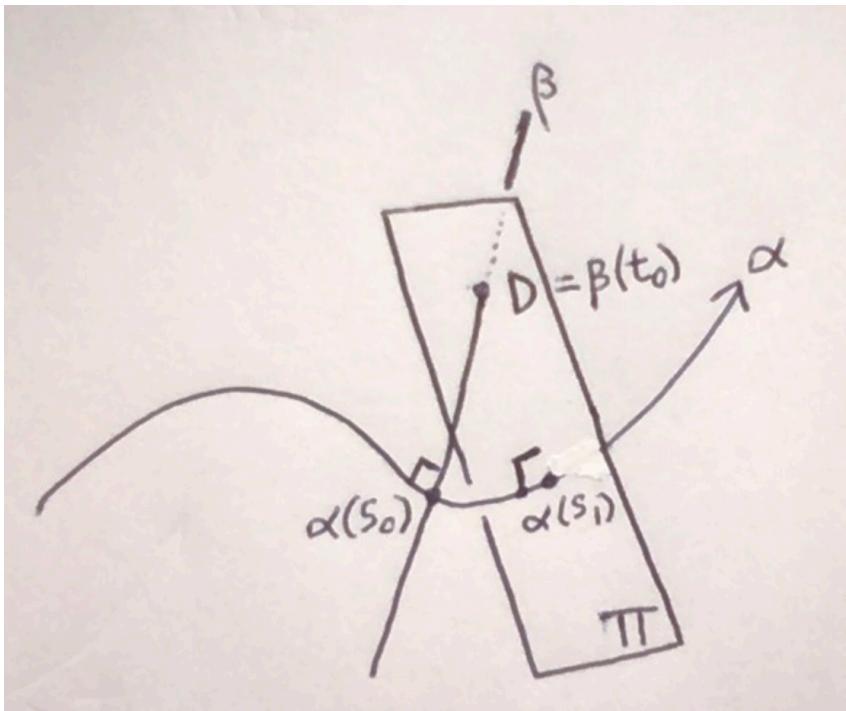
**방법 2** 여기서 다음에 확인한다.  $i = 1, 2$ 에 대하여  $\Pi_\perp(\alpha(s_i), \alpha(s_{i+1}))$ 는 모두  $\Pi^\perp(\alpha(s_0), \dot{\alpha}(s_0))$ 로 수렴함을 직관적으로 알 수 있다. 따라서  $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$  일 때

$$\Pi(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)) \cap \Pi_\perp(\alpha(s_2), \alpha(s_3))$$

은 접촉평면과  $\Pi^\perp(\alpha(s_0), \dot{\alpha}(s_0))$ 의 교선으로 수렴하는데 이 교선의 식은 다음과 같다.

$$\beta(t) := \alpha(s_0) + t\ddot{\alpha}(s_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

따라서 어떤  $t_1 \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $C = \alpha(s_0) + t_1\dot{\alpha}(s_0)$ 이라 할 수 있다. 이제 이  $t_1$ 의 값만 알면  $C$ 를 정할 수 있다. 한편  $s_2 \rightarrow s_1$  일 때  $\Pi_\perp(\alpha(s_1), \alpha(s_2))$ 는  $\Pi := \Pi^\perp(\alpha(s_1), \dot{\alpha}(s_1))$ 로 수렴한다. 따라서  $C$ 는  $\beta$ 의 상과  $\Pi$ 의 교점의 극한이라고 할 수 있다.



〈그림 2.5〉

이제  $\beta$ 의 상과  $\Pi$ 가 한 점에서 만난다고 하고 그 교점을  $\beta(t_0)$ 이라 하자.  
(여기서  $s_0 \neq s_1$ 이라는 여분의 조건을 더하자.) 그러면 다음이 성립한다.

$$0 = (\beta(t_0) - \alpha(s_1)) \cdot \dot{\alpha}(s_1) = (\alpha(s_0) + t_0 \ddot{\alpha}(s_0) - \alpha(s_1)) \cdot \dot{\alpha}(s_1).$$

이로부터 다음을 얻는다:

$$t_0 = \frac{(\alpha(s_1) - \alpha(s_0)) \cdot \dot{\alpha}(s_1)}{\ddot{\alpha}(s_0) \cdot \dot{\alpha}(s_1)}.$$

이제  $s_1 \rightarrow s_0$  일 때  $t_0$ 의 극한을 구하기 위하여 다음을 살핀다.

$$t_0 = \frac{(\alpha(s_1) - \alpha(s_0)) \cdot \dot{\alpha}(s_1)}{(\dot{\alpha}(s_1) - \dot{\alpha}(s_0)) \cdot \ddot{\alpha}(s_0)} = \frac{\frac{\alpha(s_1) - \alpha(s_0)}{s_1 - s_0} \cdot \dot{\alpha}(s_1)}{\frac{\dot{\alpha}(s_1) - \dot{\alpha}(s_0)}{s_1 - s_0} \cdot \ddot{\alpha}(s_0)}$$

그러므로

$$t_1 = \lim_{s_1 \rightarrow s_0} t_0 = \frac{\dot{\alpha}(s_0) \cdot \dot{\alpha}(s_0)}{\ddot{\alpha}(s_0) \cdot \ddot{\alpha}(s_0)} = \frac{1}{|\ddot{\alpha}(s_0)|^2}.$$

따라서

$$\beta(t_1) = \alpha(s_0) + \frac{1}{|\ddot{\alpha}(s_0)|} \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{|\ddot{\alpha}(s_0)|}. \quad (2.5)$$

□

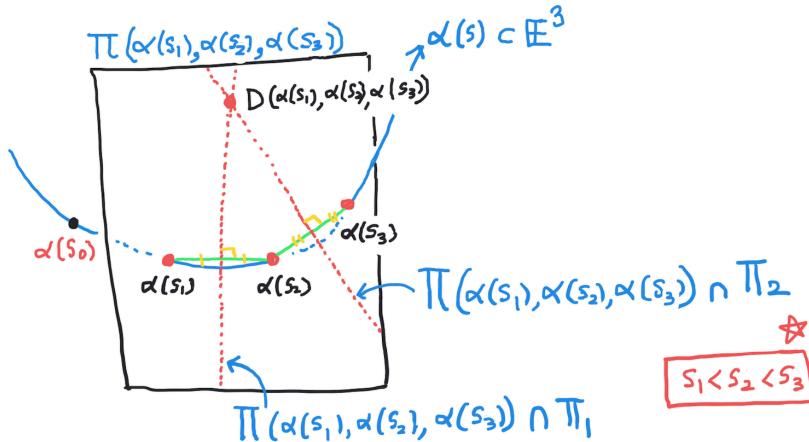
간단한 계산을 통하여 식 (2.4)은 이 식의 특별한 경우이며 또한 단위속력 평면곡선의 유향곡률의 식 (1.29)과 동일한 꼴임을 알 수 있다. 따라서 이 식은 제대로 된 답이라는 확신이 든다.

그러나, 이 방법의 문제점은, 위와 같은 방법으로 얻어진 점이 과연 접촉 원의 중심이냐 하는 질문에 대한 답을 주고 있는지 불분명하다는 점이다. 그렇다는 확신은 들지만 그것이 증명이 되지는 않는다. 까다로운 독자를 위하여 다음 증명을 제시해 둔다.

### 방법 3 9) 세 평면

$$\Pi_1 := \Pi_{\perp}(\alpha(s_1), \alpha(s_2)), \quad \Pi_2 := \Pi_{\perp}(\alpha(s_2), \alpha(s_3)), \quad \Pi(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$$

의 교점을  $D(s_1, s_2, s_3)$ 이라 하자.  $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$  일 때  $D(s_1, s_2, s_3)$ 은 어디로 수렴하는지 생각해 보자.<sup>10)</sup>



〈그림 2.6〉 모든  $i = 1, 2$ 에 대하여  $\Pi_i$ 와  $\Pi(\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3))$ 는 서로 수직이다.

9) 1장 5절의 방법 1을 계량한 것이다.

10) 이 문장에 대해서 잘 생각해 보면 일단 수렴한다는 것은 기정 사실로 받아들이고 그 극한의 위치만 찾겠다고 하고 있다. 과연 수렴하긴 하는 것인가?

$\mathbf{U} := \mathbf{L}(s_3)$ ,  $\mathbf{V} := \frac{\mathbf{L}(s_1) - \mathbf{L}(s_3)}{s_1 - s_3}$  라 하자. 그러면 (보조정리! 2.2.2의 증명에 의하여) 어떤  $a, b$ 에 대하여

$$D(s_1, s_2, s_3) = \boldsymbol{\alpha}(s_2) + a\mathbf{U} + b\mathbf{V}$$

임을 알 수 있다. 보조정리 2.2.2에 의하여  $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$  일 때  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 는  $\boldsymbol{\alpha}'(s_0)$ ,  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}''(s_0)$ 로 수렴함을 안다. 이제  $a, b$ 의 극한을 살펴보자.

먼저 다음 함수를 생각하자:  $s \in (a, b)$ 에 대하여

$$f(s) := |D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(s)|^2 - |D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(s_2)|^2 \quad (2.6)$$

그러면

$$f(s_1) = f(s_2) = f(s_3) = 0. \quad (2.7)$$

따라서 룰의 정리에 의하여  $\xi_1 \in (s_1, s_2)$ ,  $\xi_2 \in (s_2, s_3)$  가 있어서

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0. \quad (2.8)$$

다시 룰의 정리에 의하여 다음을 만족시키는  $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$  가 있다.

$$f''(\eta) = 0. \quad (2.9)$$

그런데

$$f'(s) = -2\langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(s), T(s) \rangle, \quad (2.10)$$

$$f''(s) = 2\langle T(s), T(s) \rangle - 2\langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(s), T'(s) \rangle \quad (2.11)$$

이므로

$$0 = f'(\xi_i) = -2\langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\xi_i), T(s) \rangle, \quad i = 1, 2,$$

$$0 = f''(\eta) = 2 - 2\langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\eta), \ddot{\boldsymbol{\alpha}}(\eta) \rangle.$$

이제  $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0$  를 통하여 다음을 얻는다.

$$0 = \left\langle \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2, s_3) - \alpha(s_0), \dot{\alpha}(s_0) \right\rangle = \left( \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} a \right) |\dot{\alpha}(s_0)|^2,$$

$$1 = \left\langle \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2, s_3) - \alpha(s_0), \ddot{\alpha}(s_0) \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} b \right) |\ddot{\alpha}(s_0)|^2.$$

따라서  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} a = 0$ ,  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} b = 2|\ddot{\alpha}(s_0)|^{-2}$ . 그러므로 극한 법칙 (Limit Laws)에 의하여  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2, s_3)$  는 존재하며 그 값은

$$\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2, s_3) = \alpha(s_0) + \frac{1}{|\ddot{\alpha}(s_0)|} \frac{\ddot{\alpha}(s_0)}{|\ddot{\alpha}(s_0)|}.$$

이것이 접촉 원의 중심의 위치다.  $\square$

**질문 2.2.4.** 단위속력 평면곡선  $\gamma$ 의 곡률원의 중심을 구할 때, 두 직선  $t \mapsto \gamma(s_0) + t\ddot{\gamma}(s_0)$  와  $u \mapsto \gamma(s_1) + u\ddot{\gamma}(s_1)$  의 교점을 구한 후 극한을 생각해도 된다. 그러나 단위속력 공간곡선  $\alpha$ 에 대해서는  $t \mapsto \alpha(s_0) + t\ddot{\alpha}(s_0)$  와  $u \mapsto \alpha(s_1) + u\ddot{\alpha}(s_1)$  의 접점을 구한 후 극한을 취하는 방식이 일반적으로 잘 되지 않는다. 왜 그럴까?

**질문 2.2.5.** 단위속력 공간곡선  $\alpha$ 에 대해서  $\alpha(s_0)$  를 지나며 곡선에 수직인 평면과  $\alpha(s_1)$  을 지나며 곡선에 수직인 평면의 교선의 극한은 앞에서 구한 접촉원의 중심을 지날까, 지나지 않을까?

이제까지의 추론과 평면 곡선의 곡률의 정의에 비추어 볼 때 다음과 같은 정리와 정의를 얻을 수 있다.

**보조정리 2.2.6.** 최소한 두 번 연속 미분 가능한<sup>11)</sup> 공간 곡선  $\alpha$ 의 한 점  $P = \alpha(s_0)$ 를 고정하라. 단  $\ddot{\alpha}(s_0) \neq 0$ . 그리고  $P$  근방에 있는 곡선의 두 점  $Q$ 와  $R$ 을 택하라.  $Q$ 와  $R$ 이 곡선을 따라서  $P$ 로 한없이 가까이 갈 때 세 점  $P, Q, R$ 로 정해지는 원의 극한은 존재하며 유일하다.

**정의 2.2.7.** 위에서 구한 원을 곡선의 점  $P$ 에서의 접촉 원(osculating circle)이라 한다. 이 접촉 원의 반지름의 길이의 역수를 이 곡선의 점  $P$ 에서의 곡률이라 하고  $\kappa$ 로 나타낸다.

곡률원의 중심과 곡률의 구체적인 식은 다음과 같다.

**보조정리 2.2.8.** 공간 곡선  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$ 가 단위 속력을 가지고 있을 때

$$\kappa[\alpha](s) = |\ddot{\alpha}(s)|, \quad (2.12)$$

$$\text{접촉 원의 중심} = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa[\alpha](s)} \frac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|}. \quad (2.13)$$

[34, 2권 1장]에서 위 계산과는 다른 논법에 의거한 설명을 찾아볼 수 있다.

여기서 왜 평면 곡선의 곡률을 나타낼 때는  $\kappa$ 라는 기호를 사용하였는데 공간 곡선의 곡률을 나타내는 데는  $\kappa$ 를 사용하는지에 대하여 생각해 보자. 평면 곡선의 곡률을 생각할 때는 반시계 방향으로의 회전을 생각할 수가 있었다. 즉

---

11) 이게 도함수까지 존재하고 그 이게 도함수가 연속이라는 뜻이다.

평면 벡터  $v$ 에 대해서는  $\mathcal{J}(v)$ 라는 것을 생각할 수가 있었다. 그러나 공간 벡터  $w$ 에 대해서는 동일한 개념을 생각할 수가 없다. 따라서 공간 곡선에 대해선 유향 곡률의 개념은 없다. 즉  $\kappa$ 는  $\kappa^2$ 와 달리 음의 값을 가지지 않는다.

공간 곡선의 곡률을 나타내는 식은 단위 속력을 가지는 곡선에 대해서만 적용되므로 단위 속력을 가지지 않는 곡선에 대해서는 어떻게 해야 하는가 생각해 보아야 한다.

곡률의 기하적 의미에 대하여 알아 보자.

**정리 2.2.9.** 모든  $s \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ 에 대하여  $\kappa[\alpha](s) = 0$ 인 것은  $\alpha$ 가 직선이기 위한 필요충분조건이다.

**증명**  $\kappa[\alpha](s) \equiv 0 \Leftrightarrow \ddot{\alpha}(s) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha(s) = rs + \delta \Leftrightarrow \alpha$ 는 직선.

단, 여기서  $r, \delta$ 는 상수 벡터를 나타낸다. ■

즉, 평면에서와 같이 곡률이 모든 점에서 0인 곡선은 직선이다. 이는 곡률이란 한 곡선이 직선과 얼마만큼 다른가를 나타내는 척도가 된다는 것을 말하고 있다.

**부록** 참고로 다음은 1.2절에 소개된,  $y = f(x)$ 의 그래프의 곡률을 구하는 방법 중 방법 3을 응용하여 보조정리 2.2.2를 증명하려고 시도해 본 것인데

이는 사실 잘못된 방법이다.

**잘못된 증명** 이 증명에서 모든 벡터는  $\alpha(s_0) = P$ 에서 뺀어나온다고 하자.  $\lim_{Q,R \rightarrow P} \Pi(P,Q,R)$ 을 편의상  $\Pi$ 로 나타내자.  $Q = \alpha(s_0 + h)$ ,  $R = \alpha(s_0 + k)$ 라고 가정하자. 그러면 다음 두 벡터

$$\overrightarrow{PQ} := \alpha(s_0 + h) - \alpha(s_0), \quad \overrightarrow{RP} := \alpha(s_0 + k) - \alpha(s_0)$$

는 모두  $\Pi(P,Q,R)$ 에 들어있다. 먼저

$$\frac{\alpha(s_0 + h) - \alpha(s_0)}{h}$$

도  $\Pi(P,Q,R)$ 에 들어있는데 이것의 극한은  $\dot{\alpha}(s_0)$ 이므로  $\dot{\alpha}(s_0)$ 은  $\Pi$ 에 들어 있음을 알 수 있다. 한편

$$L(t) := \begin{cases} \frac{\alpha(s_0 + t) - \alpha(s_0)}{t} & t \neq 0 \\ \dot{\alpha}(s_0) & t = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

라고 하면  $L(h)$ 와  $L(k)$  모두 이 평면에 들어 있다. 따라서

$$\frac{L(h) - L(k)}{h - k}$$

또한  $\Pi(P,Q,R)$ 에 들어 있다. 그런데 평균값의 정리에 의해  $h$ 와  $k$  사이에 있는 어떤  $\ell$ 에 대하여

$$\frac{L(h) - L(k)}{h - k} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=\ell} L(t) = \frac{\dot{\alpha}(s_0 + \ell)\ell - \alpha(s_0 + \ell) + \alpha(s_0)}{\ell^2}.$$

이 때  $h, k \rightarrow 0$  이면  $\ell \rightarrow 0$  이며,

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\dot{\alpha}(s_0 + \ell)\ell - \alpha(s_0 + \ell) + \alpha(s_0)}{\ell^2} = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}(s_0).$$

(로삐탈의 규칙을 생각하라.) 따라서  $\ddot{\alpha}(s_0)$  또한  $\Pi$ 에 들어 있다. ■

**질문 2.2.10.** 위 증명은 어디에서 잘못되었는가?

**예 2.2.11.** 식 (2.2)으로 주어진 나선은 단위 속력을 가지고 있으며 따라서 곡률

$$\kappa[\alpha](s) = |\ddot{\alpha}(s)| = \frac{1}{2}.$$

$$\beta(s) = \left(2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2}, 0\right)$$

으로 주어진 원을 생각하면 이 또한 단위 속력을 가지고 있으며 따라서  $\kappa[\beta](s) = |\ddot{\beta}(s)| = \frac{1}{2}$ .

**참고 2.2.12.** 위 예는 공간곡선의 곡률이 평면곡선의 곡률과는 근본적으로 다르다는 것을 이야기하고 있다. 두 평면 곡선의 곡률이 같으면 두 평면곡선은 사실 같은 곡선이다. 그러나 나선  $\alpha$ 의 곡률과 원  $\beta$ 의 곡률은 서로 같으나 두 곡선은 서로 합동이 아니다. 따라서 공간곡선에 대해선 곡률 외의 다른 양이 있을 것으로 생각되는데 그건 다음 절에서 열률이라는 이름으로 등장한다.

## 2.3 단위속력 공간곡선의 열률

공간 곡선  $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$  가 단위 속력을 가진다고 가정하자. 즉, 모든  $s \in (a, b)$ 에 대하여  $|\dot{\alpha}(s)| \equiv 1$ 이라고 가정하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$1 = |\dot{\alpha}(s)|^2 = \langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} \langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 2 \langle \ddot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle.$$

즉, 곡선이 단위 속력을 가지면 속도와 가속도는 서로 수직이게 된다.

**정의 2.3.1.**  $\alpha$ 가 단위 속력을 가지는 공간 곡선이라 하자. 이러면

$$\mathbf{T}(s) := \dot{\alpha}(s)$$

를 단위 접벡터(tangent vector)라 한다. 더군다나  $\ddot{\alpha}(s) \neq \mathbf{0}$ 이면

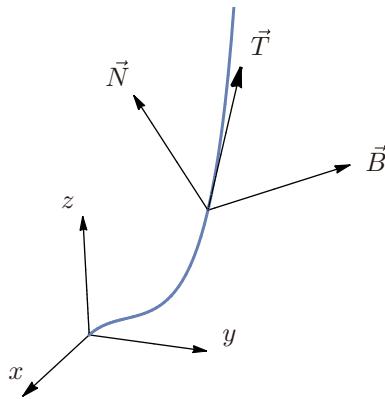
$$\mathbf{N}(s) := \frac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|}, \quad \mathbf{B}(s) := \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

를 각각 주 법(法)벡터(principal normal vector)<sup>12)</sup>, 이중 수직 벡터(binormal vector)<sup>13)</sup>라 한다.

$\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 를 프레네(Frenet 1816-1900) 틀(frame)이라 한다.

12) 왜 이런 이름으로 불리울까?

13) 2014년 4월 현재 대한수학회 홈페이지 수학용어 검색으로는 이 이름과 함께 종법선벡터라고도 한다고 한다.



〈그림 2.7〉 공간 곡선의 프레네 틀

$\mathbf{T}(s)$ ,  $\mathbf{N}(s)$ ,  $\mathbf{B}(s)$ 는 직교 단위 기저 (orthonormal basis)가 된다.  $\mathbf{T}(s_0)$  와  $\mathbf{N}(s_0)$ 으로 만들어지는 평면은 곡선의 속도벡터와 가속도 벡터를 포함하고 있으며  $s$ 가  $s_0$ 에 아주 가까우면  $\alpha(s)$ 는 이 평면에 들어 있다고 할 수 있다. 이런 이유로  $\mathbf{T}(s_0)$ 와  $\mathbf{N}(s_0)$ 을 포함하는 평면을 중요하게 생각하여 이름을 붙인다.

정의 2.3.2.  $\mathbf{T}(s_0)$ 와  $\mathbf{N}(s_0)$ 을 포함하는 평면을 접촉 평면( osculating plane)이라 한다. 한편  $\mathbf{N}(s_0)$ 과  $\mathbf{B}(s_0)$ 을 포함하는 평면을 법평면(normal plane),  $\mathbf{B}(s_0)$ 과  $\mathbf{T}(s_0)$ 을 포함하는 평면을 곧펴기 평면(rectifying plane)이라 한다.

질문 2.3.3.  $\mathbf{T}$ 가 일정하면 직선이고  $\mathbf{B}$ 가 일정하면 평면 곡선이다. 그렇다면

$\mathbf{N}$ 이 일정하면 무엇인가?

**질문 2.3.4.** 고차원 유클리드 공간  $\mathbb{E}^n$ 에 있는 곡선에 대하여 프레네 틀을 정의하고자 할 때 외적( $\times$ )을 쓸 수 없다. 그렇다면 어떻게 하는가? <sup>14)</sup>

**관찰**  $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 는 직교 기저를 구성하기 때문에 모든 벡터는 그들의 선형 결합으로 나타내어 질 수 있다. 예를 들어  $\frac{d\mathbf{T}}{ds}, \frac{d\mathbf{N}}{ds}, \frac{d\mathbf{B}}{ds}$  모두는  $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 의 선형 결합으로 표현되는데, 그 계수들을 구해 보자.

먼저  $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 에 대해서는 식 (2.12)와  $\kappa[\alpha]$ ,  $\mathbf{N}$ 의 정의로부터 쉽게 다음을 얻는다.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \ddot{\alpha}(s) = |\ddot{\alpha}(s)| \frac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|} = \kappa[\alpha](s) \mathbf{N}(s).$$

$\frac{d\mathbf{N}}{ds}$ 에 대해서는 다음과 같이 생각할 수 있다.  $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$  라고 하면,

$$a = \langle \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{N}}{ds} \rangle = -\left\langle \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{N} \right\rangle = -\langle \kappa[\alpha] \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = -\kappa[\alpha],$$

$$b = \langle \mathbf{N}, \frac{d\mathbf{N}}{ds} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 0,$$

$$c = \langle \mathbf{B}, \frac{d\mathbf{N}}{ds} \rangle.$$

이 때 다음을 정의하자.

---

14) 이론성의 질문

정의 2.3.5. 단위 속력을 가지는 공간 곡선  $\alpha$ 에 대하여  $\kappa[\alpha](s) > 0$ 인  $s$ 에서의 열률(捩率, torsion)<sup>15)</sup>  $\tau[\alpha](s)$ 를 다음과 같이 정의한다<sup>16)</sup>:

$$\tau[\alpha](s) := \langle \mathbf{B}(s), \frac{d\mathbf{N}}{ds} \rangle.$$

문맥상  $\alpha$ 가 어느 곡선을 가리키는지가 분명한 경우  $\kappa[\alpha](s)$ 와  $\tau[\alpha](s)$ 를 간단히  $\kappa$ 와  $\tau$ 로 쓴다.

$\langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 0$ 이기 때문에  $\tau = -\langle \frac{d\mathbf{B}}{ds}, \mathbf{N} \rangle$ 이기도 하다. 열률도 곡률과 같이 어떤 기하적 의미를 갖고 있다. 거기에 대해서는 나중에 공부하기로 하자. 이 개념을 이용하면  $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$ 다.

자, 이제  $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$ 라고 하면  $a$ 와  $c$ 는 다음과 같이 쉽게 구해 진다.

$$a = \langle \frac{d\mathbf{B}}{ds}, \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{B}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \rangle = -\langle \mathbf{B}, \kappa \mathbf{N} \rangle = 0,$$

$$c = \langle \mathbf{B}, \frac{d\mathbf{B}}{ds} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} 1 = 0.$$

그러므로  $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = b\mathbf{N}$ 이다. 이때,  $b = \langle \frac{d\mathbf{B}}{ds}, \mathbf{N} \rangle = -\tau$ 이다.

이 결과들을 종합하면 다음 식을 얻는다.

15) 挿 은 비틀 렬자다.

16)  $\kappa[\alpha](s) = 0$ 인 점에서는  $\tau[\alpha](s)$ 는 정의되지 않는다.

정의 2.3.6. 정칙 곡선  $\alpha$ 가 단위 속력을 가질 때,  $\alpha$ 의 프레네 틀  $T, N, B$ 는 다음 방정식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

이 식을 **프레네 방정식**이라 한다.

$T, N, B$ 는 직교 단위 기저가 되므로 어떤 벡터든지  $T, N, B$ 의 선형 결합으로 나타낼 수 있다. 예를 들어 프레네 방정식을 미분하여  $T'', N'', B''$ 을  $T, N, B$ 의 선형결합으로 나타내는 식을 얻을 수 있는데 이는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} T'' \\ N'' \\ B'' \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & \kappa' & 0 \\ -\kappa' & 0 & \tau' \\ 0 & -\tau' & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}^2 \right) \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

예 2.3.7. 나선 (2.2)의 프레네 틀과 열률을 구해 보자. (2.2)은 단위 속력을

가지고 있으므로 이 절의 식을 그대로 적용해도 된다. 간단한 계산에 의하여

$$\mathbf{T} = \dot{\alpha}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right),$$

$$\mathbf{N} = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|} = \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} & \cos \frac{s}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\cos \frac{s}{\sqrt{2}} & -\sin \frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 1 \right). \end{aligned}$$

따라서

$$\tau[\alpha](s) = \langle \mathbf{B}, \frac{d\mathbf{N}}{ds} \rangle = \frac{1}{2} \left( \cos^2 \frac{s}{\sqrt{2}} + \sin^2 \frac{s}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}.$$

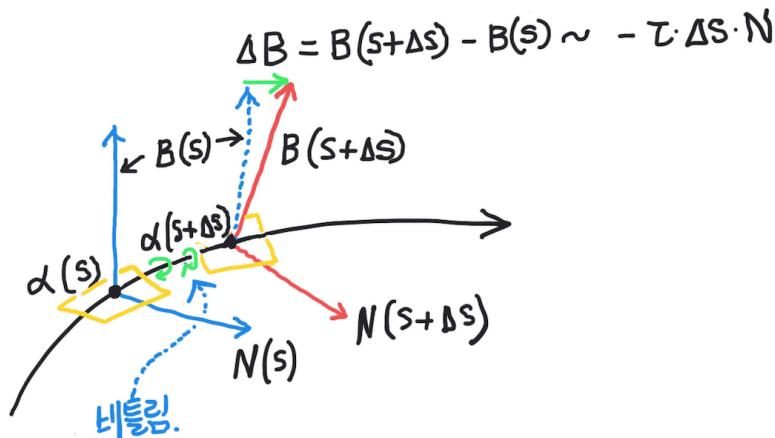
열률  $\tau$ 의 기하적 의미    프레네 방정식 (2.15)에 의하면  $\Delta s \sim 0$  일 때

$$\mathbf{B}(s + \Delta s) \sim \mathbf{B}(s) - \Delta s \tau N(s).$$

이는 곡선의 한 점이 곡선을 따라 조금 진행할 때  $\mathbf{B}$ 는  $\mathbf{N}$  방향으로 그 진행한 정도에 비례하여 비틀어지는 것으로, 그 비례정도가 열률<sup>17)</sup>인 것으로 해석할 수 있다.

---

17) 우리말로는 비틀림률이라고 한다.



〈그림 2.8〉

다음 정리도 살펴보자.

**정리 2.3.8.** 공간 곡선  $\alpha(s)$ 의 자취가 어떤 평면에 들어있는 것은  $\tau \equiv 0$ 이기 위한 필요충분조건이다.

**증명** ( $\Rightarrow$ ) 먼저  $\alpha$ 가 평면 곡선이라고 하자. 그러면,  $\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$ 이라고 할 수 있다. 이 때,

$$\mathbf{T} = \dot{\alpha}(s), \quad \mathbf{N} = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{\kappa}, \quad \mathbf{B} = (0, 0, \pm 1), \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{0}, \quad \therefore \tau \equiv 0.$$

( $\Leftarrow$ ) 자, 이제 반대의 경우, 즉  $\tau \equiv 0$ 인 경우를 생각하자.  $\tau \equiv 0$ 이므로  $\frac{dB}{ds} = 0$ . 그러므로  $B$ 는 상수 벡터이다. 이를  $\mathbf{q}$ 라고 하자.  $T, N$ 이  $\mathbf{q}$ 에 수직하므로  $\langle \dot{\alpha}(s), \mathbf{q} \rangle = 0$ 이다. 이때,  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ 라고 하고  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ 라고 하면

$$\text{모든 } s\text{에 대하여 } 0 = \langle \dot{\alpha}(s), \mathbf{q} \rangle = \dot{x}(s)q_1 + \dot{y}(s)q_2 + \dot{z}(s)q_3.$$

그러므로 어떤 상수  $c$ 가 있어서

$$\text{모든 } s\text{에 대하여 } c = x(s)q_1 + y(s)q_2 + z(s)q_3.$$

이때, 어떤  $(p_1, p_2, p_3)$ 가 있어서  $c = (q_1, q_2, q_3) \cdot (p_1, p_2, p_3)$ 라고 하면  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \alpha \cdot \mathbf{q}$ 가 되며 따라서  $\alpha - \mathbf{p}$ 와  $\mathbf{q}$ 는 서로 수직이게 된다. 그러므로  $\alpha$ 는  $\mathbf{p}$ 를 지나고  $\mathbf{q}$ 에 수직인 평면의 곡선이다. ■

위 정리는  $\tau$ 가 곡선이 접촉 평면에서 튀어나온 정도임을 말하고 있다.

## 2.4 접촉 구

앞에서 공간 곡선의 각 점마다 접촉 구라는 것이 존재한다고 하였다. 이제 접촉 구의 중심을 찾아보자.

주어진 단위 속력의 공간 곡선  $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ 의 한 점  $\alpha(s_0)$ 을 고정하자. 이제  $s_0$  근방의 서로 다른 네 수  $s_1, s_2, s_3, s_4$  (단  $s_1 < s_2 < s_3 < s_4$ )에 대하여 네 점  $\alpha(s_i), i = 1, 2, 3, 4$ 을 모두 지나는 구의 중심을  $D := D(s_1, s_2, s_3, s_4)$ 라 하자. 조금만 생각해 보면  $i = 1, 2, 3$ 에 대하여 선분  $\alpha(s_i)\alpha(s_{i+1})$ 의 수직이등분면을  $\Pi_i$ 라 할 때  $D(s_1, s_2, s_3, s_4) = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ 임을 알 수 있다.

이제 접촉구의 중심은, 존재한다면,

$$V := \lim_{s_1, s_2, s_3, s_4 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2, s_3, s_4)$$

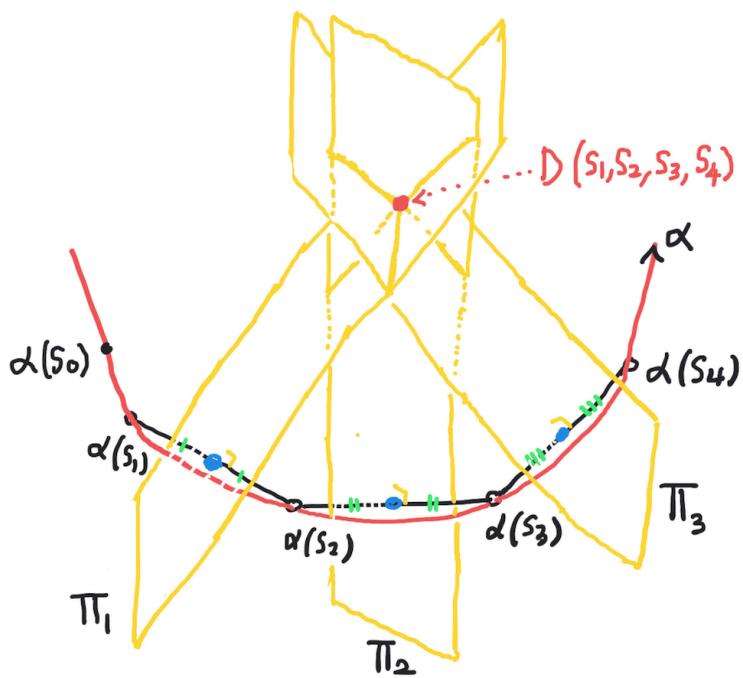
이다. 이제  $V$ 를 어떻게 구할 수 있는지 알아보자.

**방법 1** 1장 5절의 방법 1과 같이 진행한다. 다음 함수를 생각하자.  $s \in (a, b)$ 에 대하여

$$f(s) := |D(s_1, s_2, s_3, s_4) - \alpha(s)|^2 - |D(s_1, s_2, s_3, s_4) - \alpha(s_1)|^2. \quad (2.16)$$

이 함수와 (1.23)과의 유사성에 주목하라.  $f$ 의 정의의 의하여

$$f(s_1) = f(s_2) = f(s_3) = f(s_4) = 0.$$



〈그림 2.9〉

롤의 정리에 의하여  $i = 1, 2, 3$ 에 대하여

$$f'(\delta_1) = f'(\delta_2) = f'(\delta_3) = 0$$

인  $\delta_i \in (s_i, s_{i+1})$  가 있다. 다시 또 룰의 정리에 의하여  $j = 1, 2$ 에 대하여

$$f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$$

인  $\xi_j \in (\delta_j, \delta_{j+1})$  가 있다. 또 다시 룰의 정리에 의하여

$$f'''(\eta) = 0$$

인  $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$  가 있다. 이제 프레네 방정식에 의하여

$$\begin{aligned} f' &= -2\langle D - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{T} \rangle, \\ -\frac{1}{2}f'' &= -\langle \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \mathbf{T} \rangle + \langle D - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{T}' \rangle \\ &= -1 + \langle D - \boldsymbol{\alpha}, \kappa \mathbf{N} \rangle, \\ -\frac{1}{2}f''' &= -\langle \dot{\boldsymbol{\alpha}}, \kappa \mathbf{N} \rangle + \langle D - \boldsymbol{\alpha}, \kappa' \mathbf{N} + \kappa \mathbf{N}' \rangle \\ &= \kappa' \langle D - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N} \rangle + \kappa \langle D - \boldsymbol{\alpha}, -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \rangle \\ &= \kappa' \langle D - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N} \rangle - \kappa^2 \langle D - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{T} \rangle + \kappa \tau \langle D - \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{B} \rangle. \end{aligned}$$

따라서

$$\langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\delta_j), \mathbf{T}(\delta_j) \rangle = 0 \quad (\text{단 } j = 1, 2, 3)$$

$$\langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\xi_i), \mathbf{N}(\xi_i) \rangle = \frac{1}{\kappa(\xi_i)} \quad (\text{단 } i = 1, 2)$$

$$\begin{aligned} \langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\eta), \mathbf{B}(\eta) \rangle &= -\frac{\kappa'(\eta)}{\kappa(\eta)\tau(\eta)} \langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\eta), \mathbf{N}(\eta) \rangle \\ &\quad + \frac{\kappa(\eta)}{\tau(\eta)} \langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\eta), \mathbf{T}(\eta) \rangle \end{aligned}$$

따라서,  $s_1, s_2, s_3, s_4$  를  $s_0$  으로 보냄으로써, 다음을 얻는다.<sup>18)</sup>

$$\langle V - \alpha(s_0), \mathbf{T}(s_0) \rangle = 0, \quad (2.17)$$

$$\langle V - \alpha(s_0), \mathbf{N}(s_0) \rangle = \frac{1}{\kappa(s_0)}, \quad (2.18)$$

$$\langle V - \alpha(s_0), \mathbf{B}(s_0) \rangle = -\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)}. \quad (2.19)$$

따라서 다음을 얻는다.

$$V = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{N}(s_0) - \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)} \mathbf{B}(s_0). \quad (2.20)$$

**방법 2** 1장 5절의 방법 2와 같이 진행한다. 곡선  $\alpha$  의  $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \alpha(s_3)$ 에서의 세 법평면의 공통 부분을 생각하면 그건 일반적으로 한 점  $D_1(s_1, s_2, s_3)$  이 되며 다음이 성립한다.<sup>19)</sup>

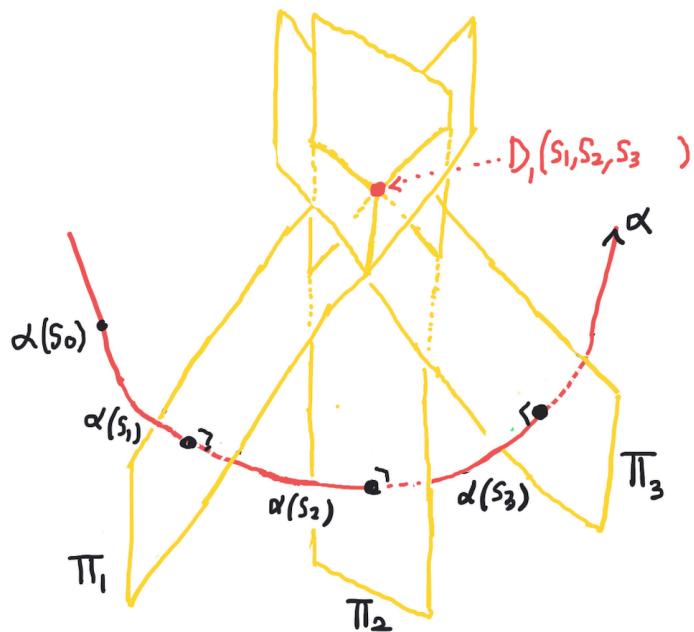
$$V_1 := \lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} D_1(s_1, s_2, s_3) = \lim_{s_1, s_2, s_3, s_4 \rightarrow s_0} D(s_1, s_2, s_3, s_4) = V.$$

이제  $V_1$  을 구해 보자.

---

18) 두 번째 식을 검토하라.

19) 이의 증명은 독자들에게 맡긴다.



〈그림 2.10〉

먼저,  $s_1, s_2, s_3$  고정된 상태에서, 다음 함수를 생각하자.<sup>20)</sup> <sup>21)</sup>

$$g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(s) := \langle D_1(s_1, s_2, s_3) - \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle.$$

20) 이하 논리는 Spivak, 2권 1장에 나오는 논법에 착안한 것이다.

21) 앞 방법에 나온  $f$ 와 여기의  $g$ 에 대하여  $g \sim -\frac{1}{2}f'$  임에 주목하라.

그러면  $D_1(s_1, s_2, s_3)$ 의 정의에 의하여

$$g(s_1) = g(s_2) = g(s_3) = 0.$$

따라서  $g$ 의 연속성에 의하여  $\lim_{s_1, s_2, s_3 \rightarrow s_0} g(s_0) = 0$ . 그러므로

$$\langle V_1 - \alpha(s_0), \mathbf{T}(s_0) \rangle = 0. \quad (2.21)$$

한편 룰의 정리에 의하여  $\xi_1 \in (s_1, s_2)$ ,  $\xi_2 \in (s_2, s_3)$  가 있어서

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0.$$

또 다시 룰의 정리에 의하여  $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$  인  $\eta$ 가 있어서

$$g''(\eta) = 0.$$

그런데, 프레네 방정식에 의하여

$$g' = -\langle \dot{\alpha}, \mathbf{T} \rangle + \langle D_1 - \alpha, \mathbf{T}' \rangle$$

$$= -1 + \langle D_1 - \alpha, \kappa \mathbf{N} \rangle,$$

$$g'' = -\langle \dot{\alpha}, \kappa \mathbf{N} \rangle + \langle D_1 - \alpha, \kappa' \mathbf{N} + \kappa \mathbf{N}' \rangle$$

$$= \kappa' \langle D_1 - \alpha, \mathbf{N} \rangle + \kappa \langle D_1 - \alpha, -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \rangle$$

$$= \kappa' \langle D_1 - \alpha, \mathbf{N} \rangle - \kappa^2 \langle D_1 - \alpha, \mathbf{T} \rangle + \kappa \tau \langle D_1 - \alpha, \mathbf{B} \rangle.$$

따라서

$$\langle D_1(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\xi_i), \mathbf{N}(\xi_i) \rangle = \frac{1}{\kappa(\xi_i)} \quad (\text{단 } i = 1, 2)$$

$$\begin{aligned} \langle D_1(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\eta), \mathbf{B}(\eta) \rangle &= -\frac{\kappa'(\eta)}{\kappa(\eta)\tau(\eta)} \langle D_1(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\eta), \mathbf{N}(\eta) \rangle \\ &\quad + \frac{\kappa(\eta)}{\tau(\eta)} \langle D_1(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(\eta), \mathbf{T}(\eta) \rangle \end{aligned}$$

따라서,  $s_1, s_2, s_3$  을  $s_0$  으로 보냄으로써, 다음을 얻는다.<sup>22)</sup>

$$\langle V_1 - \boldsymbol{\alpha}(s_0), \mathbf{N}(s_0) \rangle = \frac{1}{\kappa(s_0)} \quad (2.22)$$

$$\langle V_1 - \boldsymbol{\alpha}(s_0), \mathbf{B}(s_0) \rangle = -\frac{\kappa'(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)}. \quad (2.23)$$

따라서, (2.21), (2.22), (2.23)로부터, 다음을 얻는다.

$$V = V_1 = \boldsymbol{\alpha}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{N}(s_0) - \frac{\kappa'(s_0)}{\kappa^2(s_0)\tau(s_0)} \mathbf{B}(s_0). \quad (2.24)$$

**참고 2.4.1.** 다음 함수  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  를 가지고 위와 같이 진행해도 될 것이다.

$$f(s) := \begin{cases} \langle D(s_1, s_2, s_3) - \frac{\boldsymbol{\alpha}(s) + \boldsymbol{\alpha}(s_0)}{2}, \frac{\boldsymbol{\alpha}(s) - \boldsymbol{\alpha}(s_0)}{s - s_0} \rangle, & s \neq s_0, \\ \langle D(s_1, s_2, s_3) - \boldsymbol{\alpha}(s_0), \dot{\boldsymbol{\alpha}}(s_0) \rangle, & s = s_0. \end{cases} \quad (2.25)$$

이 경우에도  $f(s_1) = f(s_3) = f(s_3) = 0$  이 성립한다. 이 식과 식 (1.31) 을 비교하여 보아라.

---

22) 두 번째 식을 검토하라.

접촉원의 반지름을  $\rho$ 라 하면 식 (2.24)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V = \boldsymbol{\alpha}(s_0) + \rho(s_0)\mathbf{N}(s_0) + \frac{\rho'(s_0)}{\tau(s_0)}\mathbf{B}(s_0).$$

이제 접촉 구의 반지름을  $R$ 이라 하면 이 식으로부터  $R = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho'^2}{\tau^2}}$  임을 얻을 수 있고 따라서

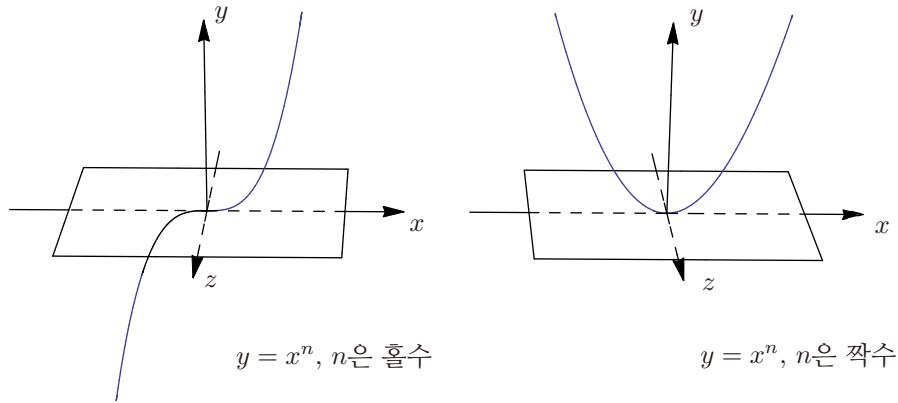
$$|\tau| = \frac{|\rho'|}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}. \quad (2.26)$$

**질문 2.4.2.** 식 (2.2)로 주어진 나선의 곡률과 열률은 모두  $\frac{1}{2}$ 다. 이는 위 식에 모순되지 않는가?

## 2.5 접촉도와 접촉 구

앞 절에서는 접촉 구의 정의를 따라 접촉 구의 중심을 찾았는데, 여기서는 한 공간 곡선과 곡면이 만날 때 그 만나는 정도를 수치로 나타내고 이를 이용하여 접촉 구를 구별해 내자.

관찰:  $n$ 이 0 또는 자연수일 때, 공간 곡선  $y = x^{n+1}$ ,  $z = 0$ 을 생각해 보자.



〈그림 2.11〉 그림에서 글을 조금 바꾸어야 한다.

이 곡선들은  $xz$ -평면과 원점에서 만나는데,  $n$ 이 커질 수록  $xz$ -평면에 접하는

정도가 더 증가한다고 이야기할 수 있다. 이렇게 접하는 정도를 수치로 나타낸 것이 접촉도다. 이를 수치적으로 나타내기 위하여  $xz$ -평면을 다음과 같이 생각하자. 먼저  $F : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  를  $F(x, y, z) = y$  라고 정의하자. 그러면  $xz$ -평면은 다음과 같다.

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

이때, 주어진 곡선은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha_n(t) = (t, t^{n+1}, 0), \quad -1 < t < 1.$$

이때, 함수  $g_n(t) := F \circ \alpha_n(t)$  를 정의하여 보면  $g_n(t) = t^{n+1}$  이며 수치적으로 다음과 같은 현상을 관찰할 수 있다.

$$\begin{aligned} g_0(0) &= 0, & g'_0(0) &\neq 0, \\ g_1(0) &= g'_1(0) = 0, & g''_1(0) &\neq 0, \\ g_2(0) &= g'_2(0) = g''_2(0) = 0, & g'''_2(0) &\neq 0, \\ g_n(0) &= g'_n(0) = g''_n(0) = \cdots = g_n^{(n)} = 0, & g_n^{(n+1)}(0) &\neq 0. \end{aligned}$$

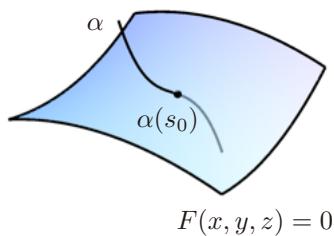
이에 착안하여 다음 정의에 도달할 수 있다.

### 정의 2.5.1. 정칙 곡선

$$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

와 곡면

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$$



〈그림 2.12〉

가 점  $\alpha(s_0)$ ,  $s_0 \in (a, b)$ 에서 만난다고 하자. (단 여기서  $\nabla F \neq 0$ 라고 하자.)

이 때,  $\alpha$ 와  $S$ 의  $\alpha(s_0)$ 에서의 접촉도(order of contact)는 다음의 식들이 만족되는 숫자, 음이 아닌 정수,  $n$ 이다.

$$(F \circ \alpha)(s_0) = (F \circ \alpha)'(s_0) = \cdots = (F \circ \alpha)^{(n)}(s_0) = 0, \quad (F \circ \alpha)^{(n+1)}(s_0) \neq 0.$$

만약, 모든  $n$ 에 대하여  $(F \circ \alpha)^{(n)} = 0$ 이면 접촉도는  $\infty$ 라고 정의된다.

**참고:**  $\alpha$ 의 이미지가 항상 곡면 속에 있다면 모든  $s \in (a, b)$ 와 모든  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ 에 대하여  $(F \circ \alpha)^{(n)}(s) \equiv 0$ 이다. 즉 접촉도는  $\infty$ 이다.

이제 접촉도를 이용하여 접촉 구를 다른 구로부터 구별해 내자. 보이고자 하는 건 다음 정리다.

**정리 2.5.2.** 공간 곡선  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$  와  $\alpha(s_0)$  에서 3 이상의 접촉도로  $\alpha$  와 만나는 구는  $\alpha$  와  $\alpha$  의  $\alpha(s_0)$  에서의 접촉구다. 공간 곡선  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$  와  $\alpha$  의  $\alpha(s_0)$  에서의 접촉구의  $\alpha(s_0)$  에서의 접촉도는 3 이상이다.

**증명** 첫 번째 사실을 증명하자. 두 번째 사실은 첫 번째 사실의 증명으로부터 자연스럽게 유도할 수 있다.

공간 곡선  $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$  의 한 점  $\alpha(s_0)$  를 지나고 중심이  $\mathbf{V} \in \mathbb{E}^3$  에 있는 구를 생각하라. 이 구는 함수  $F(\mathbf{P}) := |\mathbf{P} - \mathbf{V}|^2 - |\mathbf{V} - \alpha(s_0)|^2$  에 대하여

$$\{\mathbf{P} \in \mathbb{E}^3 \mid F(\mathbf{P}) = 0\}$$

으로 생각할 수 있다. 자, 이 구의 반지름과 중심이 접촉도에 따라 어떻게 결정되는가를 살펴보자.

먼저 다음을 명심하자:

$$(F \circ \alpha)(s) = |\alpha(s) - \mathbf{V}|^2 - |\mathbf{V} - \alpha(s_0)|^2. \quad (2.27)$$

일반적으로  $\alpha(s) - \mathbf{V} = a\mathbf{T} + b\mathbf{N} + c\mathbf{B}$  를 주어진다. 단,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . 이때 접촉도에 따라서  $a, b, c$  의 값이 아래와 같이 주어진다.

(1) 구와  $\alpha$  의  $s_0$  에서의 접촉도가 1과 같거나 1보다 클 경우 식 (2.27)로부터 다음이 성립한다:

$$(F \circ \alpha)'(s) = \langle \alpha(s) - \mathbf{V}, \alpha(s) - \mathbf{V} \rangle' = 2\langle \dot{\alpha}(s), \alpha(s) - \mathbf{V} \rangle. \quad (2.28)$$

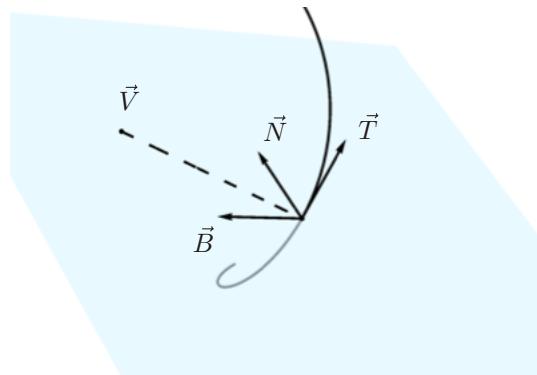
그러므로  $(F \circ \alpha)'(s_0) = 2\langle \mathbf{T}(s_0), \alpha(s_0) - \mathbf{V} \rangle = 0$  으로부터 다음이 성립하며

$$\mathbf{T}(s_0) \perp (\alpha(s_0) - \mathbf{V}),$$

따라서 다음 결론이 얻어진다:

$$\text{어떤 } b, c \in \mathbb{R} \text{에 대해서 } \alpha(s_0) - \mathbf{V} = b\mathbf{N}(s_0) + c\mathbf{B}(s_0). \quad (2.29)$$

이 식이 의미하는 바는 무엇일까? 그것은 구의 중심  $\mathbf{V}$ 는  $\alpha(s_0)$ 를 지나며  $\mathbf{N}(s_0)$ 와  $\mathbf{B}(s_0)$ 를 포함하는 평면에 있다는 것이다.



〈그림 2.13〉

(2) 구와  $\alpha$ 의  $s_0$ 에서의 접촉도가 2와 같거나 2보다 클 경우 이 경우 다음 식

$$(F \circ \alpha)''(s_0) = 2\langle \mathbf{T}'(s_0), \alpha(s_0) - \mathbf{V} \rangle + 2\langle \mathbf{T}(s_0), \mathbf{T}(s_0) \rangle = 0$$

을 얻으면 따라서 다음이 성립한다.

$$2\langle \kappa \mathbf{N}, \boldsymbol{\alpha}(s_0) - \mathbf{V} \rangle + 2 = 0.$$

즉,  $\langle \kappa(s_0) \mathbf{N}(s_0), \boldsymbol{\alpha}(s_0) - \mathbf{V} \rangle = -1$  이므로 식 (2.29)의  $b$ 를 구할 수 있다.

$$\langle \boldsymbol{\alpha}(s_0) - \mathbf{V}, \mathbf{N}(s_0) \rangle = b = -\frac{1}{\kappa}.$$

이 식으로부터 무엇을 얻을 수 있을까? 이 식은 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\alpha}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{N}(s_0) - c \mathbf{B}(s_0).$$

이 식으로부터 구의 중심  $\mathbf{V}$ 는 점  $\boldsymbol{\alpha}(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{N}(s_0)$ 를 지나고  $\mathbf{B}(s_0)$  방향으로 향하는 직선에 있음을 알 수 있다.

(3) 구와  $\alpha$  의  $s_0$ 에서의 접촉도가 3과 같거나 3보다 클 경우 이 경우

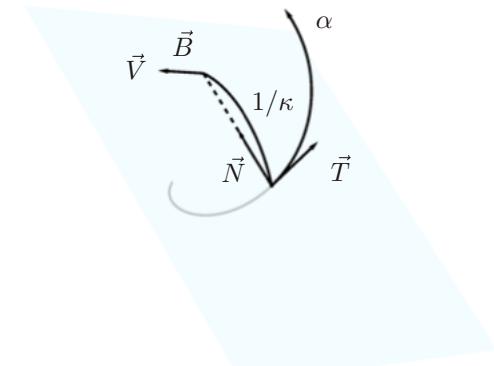
$$(F \circ \boldsymbol{\alpha})'''(s_0) = 2\langle \kappa' \mathbf{N} + \kappa \mathbf{N}', \boldsymbol{\alpha}(s_0) - \mathbf{V} \rangle + 2\langle \kappa \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle = 0$$

을 얻으면  $\langle \kappa \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle = 0$  이고  $\mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$ ,  $\kappa \mathbf{N}' = -\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa \tau \mathbf{B}$  이므로 다음이 성립한다.

$$\langle \kappa' \mathbf{N} + (-\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa \tau \mathbf{B}), \boldsymbol{\alpha}(s_0) - \mathbf{V} \rangle = 0.$$

이때,  $\boldsymbol{\alpha}(s_0) - \mathbf{V} = -\frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s_0) + c \mathbf{B}(s_0)$  를 위의 식에 대입하면  $-\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa \tau c = 0$  이 되고 따라서  $c = \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}$  이 되며 결론적으로 다음을 얻는다.

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\alpha}(s_0) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s_0) - \frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \mathbf{B}(s_0). \quad (2.30)$$

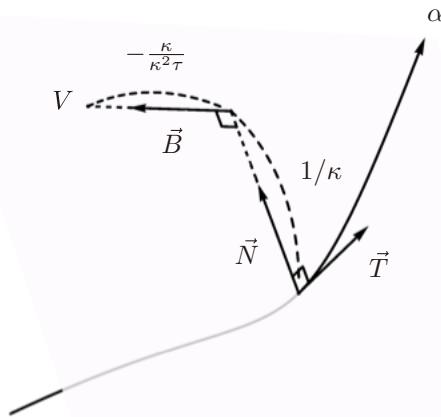


〈그림 2.14〉

이러면 구의 중심  $V$ 의 위치는 한 점으로 확정적으로 정해진다. 또한 이는 앞 절에서 얻은 접촉구의 중심 (2.24)과 일치한다.



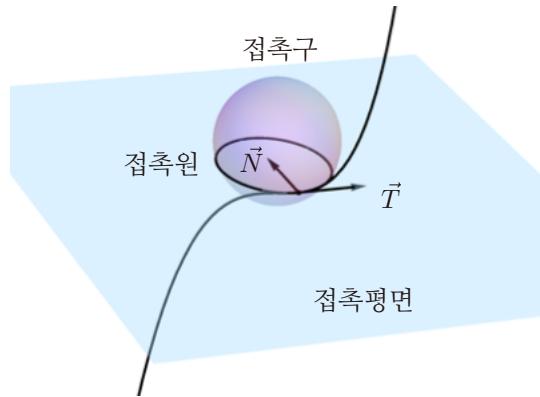
**해설:** 접촉도가 3과 같거나 3보다 크면 구는 유일하게 결정이 되어 버린다. 즉 공간 곡선의 한 점에서 “접촉 구”란 접촉도가 3 이상인 구라는 조건으로 유일하게 결정이 되어 버린다. 참, 지금까지는 접촉 구의 존재성에 관한 언급은 없었음을 주목하라.



〈그림 2.15〉 분자의  $\kappa$ 를  $\kappa'$ 으로.

**질문 2.5.3.** 식 (2.2)로 주어진 단위속력의 나선에 대하여 접촉 구의 중심들이 이루는 곡선의 방정식을 구하여라.

**생각할 점:** 위 계산에서  $\kappa$ 와  $\tau$ 는 모두 0이 아니라야 한다. 이제  $\kappa$ 와  $\tau$ 의 기하적 의미를 생각해 볼 수 있다.  $\kappa$ 는  $\alpha(s_0)$ 을 지나며  $T$ 와  $N$ 을 포함하는 평면과 접촉 구의 공통부분으로 이루어지는 원의 반지름의 길이가 된다.



〈그림 2.16〉

$\tau$ 에 대해서는  $\tau$ 의 값이 0에 가까워질 때 접촉 원이 어떻게 변하는가를 생각해 봄으로써  $\tau$ 의 기하적 의미에 대한 한 단상을 얻을 수 있다.

**결론** 한 직선과 구가 만난다고 하자. 이때 만나는 점에서의 접촉도에 따라 그 구의 중심이 어디에 위치하는가를 유추할 수 있다.

- 접촉도가 0인 구:  $\alpha(s_0)$ 만 지나고 중심은 아무 데나 있을 수 있음. 중심이 있을 수 있는 위치의 자유도는 3이다.
- 접촉도가 1인 구:  $\alpha(s_0)$ 를 지나고  $\dot{\alpha}(s_0)$ 에 수직한 평면에만 구의 중심이 있을 수 있음. 중심이 있을 수 있는 위치의 자유도는 2다.
- 접촉도가 2인 구: 중심이 있을 수 있는 위치의 자유도는 1이다.
- 접촉도가 3인 구: 중심이 있을 수 있는 위치의 자유도는 0이다.

즉, 접촉도가 증가할 수록 중심의 위치가 제한이 되다가 접촉도가 3이 되면 중심의 위치는 결정이 되어 버린다.

**질문 2.5.4.** 접촉 원(osculating circle)이라는 것도 있다. 이것은 무엇인지 조사하여라. osculating이라는 말의 원 뜻은 무엇인가?

**참고:** 평면 곡선의 곡률 원

**참고 2.5.5.** 사실 위의 개념은 평면 곡선의 곡률 원의 개념을 일반화한 것이다. 다음 현상을 살펴보라.

- 접촉도가 0인 원:  $\alpha(s_0)$ 만 지나면 됨

- 접촉도가 1인 원:  $\alpha(s_0)$ 를 지나면서  $\alpha(s_0)$ 의 접선에 접한다.
- 접촉도가 2인 원: 곡률 원이 됨.

이 절의 내용에 대한 참고문헌 [21, 178–182쪽], [19, 10장3절], [19, 225쪽].

## 2.6 공간 곡선론의 기본정리

평면 곡선론의 기본정리를 확장한 것으로 다음 정리가 있다.

**정리 2.6.1.** 구간  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 에서 정의된 두 함수  $\kappa$ 와  $\tau$ 가 모두 연속이고  $\kappa$ 의 값은 항상 양이라고 하자. 그러면 다음 조건

$$\text{모든 } s \in (a, b) \text{에 대하여 } \kappa[\alpha](s) = \kappa(s), \quad \tau[\alpha](s) = \tau(s)$$

을 만족하는 단위 속력의 공간 곡선  $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 하나, 그리고 평행 이동, 회전 이동을 허용하였을 때, 단 하나 있다:

이에 대한 증명은 인터넷에서 쉽게 구할 수 있다. google에서 "fundamental theorem for curves in space"로 검색해 보라.<sup>23)</sup>

참고로, 위 정리의 가정에  $\kappa$ 의 값이 모두 양이라는 게 있는데 그게 성립하지 않는 경우에는 어떤 문제가 있는가? 즉,  $\kappa(s) = 0$ 인  $s$ 가 존재하면 어떻게 되는가? 가장 간단하게 생각할 수 있는 문제는,  $\kappa[\alpha](s) = 0$ 이면  $\tau[\alpha](s)$ 는 정의조차 되지 않는다는 것이다. 그런데 조금 더 생각해 볼 만한 예가 있다. [19]를 보면 어떤 두 곡선의 쌍이 소개되어 있는데 두 곡선은 한 점에서만 곡률이

---

23) 예를 들어 '<http://www.imada.sdu.dk/Courses/MM08/fundamentalsaetning.pdf>' 가 있다.

0이다. 그런데 그 점을 제외한 모든 점에서 열률이 0이다. 따라서 (곡률이 0인) 그 점에서도 열률은 0이라고 정의하는 것이 타당하다. 그런데 그러면 두 곡선의 곡률과 열률이 각각 서로 같으면서도 평행이동, 대칭이동, 회전이동을 허용해도 겹치지 않는다.

## 2.7 임의속력 공간 곡선의 곡률과 열률

곡선이 단위 속력을 가지고 있지 않는 경우 그 곡선의 곡률과 열률을 구하려면 이제까지의 이론으로는 일단 그 곡선을 재매개하여 단위 속력을 가지도록 변환한 후에야 앞에서 정의한 곡률과 열률의 정의와 식을 적용할 수 있다. 그런데 일반적으로 곡선을 단위속력으로 재매개한 식을 명백히 얻을 수 있는 경우는 그리 많지 않다. 따라서 곡선을 재매개하지 않고 있는 그대로 곡률과 열률을 구할 수 있는지 궁금해지는데 사실 어렵지 않게 그 식을 얻을 수 있다.

주어진 곡선  $\beta$ 의 속력이 항상 1은 아닌 경우 곡률과 열률은 주어진 곡선의 매개식을 속력이 항상 1인 매개식으로 바꾸어 정의한다. 2장 1절에서 임의의 속력을 가진 정칙 곡선을 재매개하여 속력이 항상 1인 곡선으로 바꿀 수 있었다. 이렇게  $\beta$ 를 재매개한 곡선의 식을  $\alpha$ 라 하자. 이제  $\beta$ 의 곡률과 열률을  $\alpha$ 의 곡률과 열률로 정의하려고 한다. 말로는 간단한데 실제 이렇게 정의를 내리기 위해서는 계산이 어떻게 되는지 먼저 살펴봐야 한다. 이를 위해  $\alpha$ 의 곡률과 열률을  $\beta$ 를 이용하여 나타내어 보자.

**정리 2.7.1.** 정칙 곡선  $\beta : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ 에 대하여 어떤  $t$ 에 대해서도  $\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t) \neq 0$ 이라 하자. 개구간  $(a, b)$ 의 한 점  $c$ 를 고정하고

$$s(t) := \int_c^t |\dot{\beta}(\tilde{t})| d\tilde{t}, \quad \alpha(s) := \beta(t(s))$$

라 하면  $\alpha$ 는 단위 속력을 가지고

$$\kappa[\alpha](s(t)) = \frac{|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)|}{|\dot{\beta}(t)|^3}, \quad \tau[\alpha](s(t)) = \frac{(\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)) \cdot \ddot{\beta}'(t)}{|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)|^2}.$$

**증명** 먼저 아래에서  $T, N, B, \kappa, \tau$ 는 모두 곡선  $\alpha$ 에 대한 것들임을 선언한다. 따라서 이것들은 모두  $s$ 의 함수다.  $v$ 는  $\beta$ 의 속력을 나타내며  $t$ 의 함수다. 이때 다음이 성립한다.

$$\beta(t) = \alpha(s(t)), \quad v(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

이때  $t$ 에 대한 미분을 생각하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\beta(t) &= T(s(t))v(t), \\ \frac{d^2}{dt^2}\beta(t) &= \frac{d}{dt}(T(s(t))v(t)) = \frac{dT(s(t))}{dt}v(t) + T\frac{dv(t)}{dt}. \end{aligned}$$

여기서  $\frac{dT(s(t))}{dt}$ 는, 프레네 방정식에 의하여  $\kappa N$ 이 되는 게 아니라, 다음이 된다.

$$\frac{dT(s(t))}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa(s(t))N(s(t))v(t).$$

따라서,

$$\frac{d^2}{dt^2}\beta(t) = \kappa(s(t))v^2(t)N(s(t)) + T(s(t))\frac{dv(t)}{dt}.$$

이제  $\dot{\beta}(t)$ 와  $\ddot{\beta}(t)$ 의 식으로부터 다음 식을 얻는다. <sup>24) 25)</sup>

$$\dot{\beta} \times \ddot{\beta} = (v\mathbf{T}) \times (\dot{v}\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}) = v\mathbf{T} \times \kappa v^2 \mathbf{N} = \kappa v^3 (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = \kappa v^3 \mathbf{B}.$$

따라서  $|\dot{\beta} \times \ddot{\beta}| = \kappa v^3 = \kappa |\dot{\beta}|^3$ 이고 여기서  $\kappa$ 의 식을 구할 수 있다. 이제,

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} &= (\dot{v}\mathbf{T})' + (\kappa v^2 \mathbf{N})' \\ &= \ddot{v}\mathbf{T} + \dot{v}\dot{\mathbf{T}} + (\kappa v^2)' \mathbf{N} + (\kappa v^2) \dot{\mathbf{N}} \\ &= \ddot{v}\mathbf{T} + \dot{v}\kappa v \mathbf{N} + (\kappa v^2)' \mathbf{N} + (\kappa v^2) \dot{\mathbf{N}}.\end{aligned}$$

여기서

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = (-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) \cdot v = -\kappa v\mathbf{T} + \tau v\mathbf{B}.$$

따라서,

$$(\dot{\beta} \times \ddot{\beta}) \cdot \ddot{\beta} = \kappa v^3 \mathbf{B} \cdot \kappa v^2 \dot{\mathbf{N}} = \kappa^2 v^5 \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{N}} = \kappa^2 v^5 \mathbf{B}(-\kappa v\mathbf{T} + \tau v\mathbf{B}) = \kappa^2 \tau v^6.$$

그러므로

$$\tau = \frac{(\dot{\beta} \times \ddot{\beta}) \cdot \ddot{\beta}}{\kappa^2 v^6}.$$

이 식과  $\kappa$ 의 표현을 결합하여  $\tau$ 의 식을 얻는다. ■

이 정리에 근거하여 다음과 같이 정의한다.

24) 주어진 곡선이 단위속력을 가지지 않을 때는 먼저  $\mathbf{B} = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}$  으로 계산하고  $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$  로  $\mathbf{N}$ 을 나중에 계산하는 것이 좋다.

25) 식이 복잡해지므로  $\frac{d}{dt}$ 를 간단히 '으로 나타낸다.

**정의 2.7.2.** 임의의 속력을 가지는 정칙 곡선  $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{E}^3$ 에 대하여  $\beta$ 의  $t$ 에서의 곡률  $\kappa[\beta](t)$ 와 열률  $\tau[\beta](t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\kappa[\beta](t) := \frac{|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)|}{|\dot{\beta}(t)|^3}, \quad \tau[\beta](t) := \frac{(\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)) \cdot \ddot{\beta}'(t)}{|\dot{\beta}(t) \times \ddot{\beta}(t)|^2}.$$

**질문 2.7.3.** 꼬인 3차 곡선 (twisted cubic)  $\beta(t) = (t, t^2, t^3)$ 의 곡률과 열률을 계산하자.

**질문 2.7.4.** 두 곡선의 곡률도 서로 같고 열률도 서로 같으면 두 곡선은 같은 곡선인가? 아닌가? ([19, 220쪽] 참고.)

**질문 2.7.5.**  $\beta(t) = \alpha \circ \varphi(t)$  일 때

$$\kappa[\beta](t) = \kappa[\alpha](\varphi(t)), \quad \tau[\beta](t) = \tau[\alpha](\varphi(t))$$

임을 보여라. <sup>26)</sup>

**질문 2.7.6.**  $\tau(p) \neq 0$ 이면  $\kappa(p) \neq 0$ 임을 보여라. 그러나  $\kappa(p) = 0$ 이라고 해서 반드시  $\tau(p) = 0$ 이진 않음을 설명하여라. <sup>27)</sup>

26) ‘Villarceau 원들에 대해서 조사해 보아라.’, ‘두 반지름의 비가  $\sqrt{2} : 1$  이 아닌 원에 대해서도 Villarceau 원들이 생기나?’라는 문제가 여기 있었는데 자리가 안 맞다. 곡면 속의 곡선으로 돌리자.

27) 이론성의 지적

흥미있는 공간 곡선으로 나선(helix), 일반 나선(generalized helix), bertrand mate 등이 있다. 관련 문헌을 참고하기 바란다. ([16, 26쪽])

## 2.8 연습문제

**연습문제 2.8.1.** (참, 거짓 문제) 다음에 주어진 명제의 ‘참’, ‘거짓’을 밝혀라.

1. 공간 곡선의 곡률도 평면 곡선의 곡률처럼 음수가 되기도 한다.
2. 공간 곡선의 열률이 어디서나 0 이면 그 곡선은 사실은 평면 곡선이다.
3. 한 공간 곡선과 한 구가 만나는데 그 접촉도가 5면 그 구는 그 공간 곡선의 접촉구다.
4. 공간에서 어떤 점이 일정한 속력으로 움직일 때, 그 속력이 비록 1이 아니어도 속도와 가속도는 항상 수직이다.
5. 공간 곡선의 곡률도 평면 곡선의 유향 곡률처럼 주어진 점 근처에 두 점을 더 잡아 세 점을 지나는 원을 생각한 후 여분으로 잡은 두 점을 원래 점으로 보낼 때 생기는 원의 반지름의 역수로 정의된다.
6. 공간 곡선  $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ 의 한 점  $\alpha(t)$ 에서 곡률은  $|\ddot{\alpha}(t)|$ 이다.
7. 공간 곡선  $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ 가 단위 속력을 가지면 속도  $\dot{\alpha}(s)$ 와 가속도  $\ddot{\alpha}(s)$ 는 서로 수직이다.

**연습문제 2.8.2.** 어떤 공간 곡선이 있는데 곡률  $\kappa$  가 항상 0 이라고 한다. 그러면 이 곡선은 사실은 직선임을 보여라.

**연습문제 2.8.3.** 다음 공간 곡선

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$$

의 한 점  $(1, 0, 0)$ 에서의 곡률  $\kappa$  와 열률  $\tau$ 를 계산하여라.

**연습문제 2.8.4.** 다음에 주어진 곡선  $\alpha$ 는 단위 속력을 가지지 않는다.

$$\alpha(t) = \left( \frac{t^3 + \sin(t^3) \cos(t^3)}{2}, \frac{(\sin(t^3))^2}{2}, -\cos(t^3) \right).$$

이 곡선이 단위 속력을 가지도록 재매개하여라.

**연습문제 2.8.5.** 곡선  $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$  와 곡면  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$  이 한 점  $P$ 에서 만난다. 이때  $\alpha$ 와  $S$ 의  $P$ 에서의 접촉도란 무엇을 말하는가? 그 정의를 써라.

**연습문제 2.8.6.** 다음에 주어진 공간 곡선  $\beta$ 의  $t = 0$ 에서의 곡률  $\kappa$ 와 열률  $\tau$ 는 각각 얼마인가?

$$\beta(t) = (t \cos t, t \sin t, t).$$

**연습문제 2.8.7.** 곡률과 열률이 모든 점에서 모두 0이 아닌 공간 곡선  $\alpha$ 에 대하여 어떤 벡터  $u$ 가 있어서  $\alpha$ 의 접선들과  $u$ 가 일정한 각도를 이루면  $\alpha$ 를

일반 나선(generalized helix)이라 말한다.  $\alpha$ 의  $\frac{\kappa}{\tau}$ 가 항상 일정한 값을 가지는 것은  $\alpha$ 가 일반 나선이기 위한 필요 충분 조건임을 보여라.<sup>28)</sup>

---

28) Lancret의 정리



# 제 3 장

## 곡면

### 3.1 곡면의 곡률을 어떻게 생각할 것인가?

곡면이 휘어진 정도를 어떻게 정의할 것인가? 즉, 공간 곡면의 곡률을 어떻게 정의할 것인가? 일단 곡면의 곡률의 정의는 다음을 만족시켜야 할 것이다.

- 국지적이어야 한다.
- 평면의 곡률은 어느 점에서나 0이 되어야 한다.
- 구의 곡률은 어느 점에서나 0이 아닌 상수로 일정해야 한다.

이를 만족시키려면 곡률은 어떻게 정의되어야 할 것인가? 이를 위해 곡선의 곡률에 대한 여러 가지 해석이 곡면에 어떻게 적용될 수 있는지 살펴보자. 다음과 같은 세 가지를 생각해 볼 수 있다.

**첫 번째 시도** 곡선의 경우 곡률 원을 이용하여 곡률을 정의했는데 그렇다면 곡면에서는 곡률 구라는 것을 생각해 보자. 곡면의 한 점을 고정하고 그 점 주변에 곡면의 서로 다른 세 점을 택한다. 그러면 네 점이 주어졌으므로 일반적으로 구가 결정될 것이다. 이제 나중에 택한 세 점을 원래 고정된 점으로 보내면 네 점으로 결정된 구는 어떤 구 하나로 수렴할 것이다. 이 구를 곡률 구라 하고 이 곡률 구의 반지름 분의 일로 곡면의 곡률을 정의할 수 있는가 하는

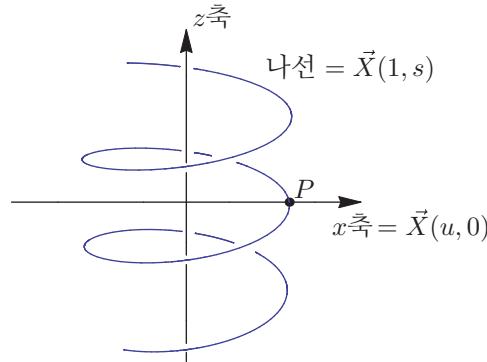
것이 첫 시도인 것이다. 이는 평면 곡선의 곡률이 곡률 원의 반지름 분의 일로 정의된 것을 일반화해보자는 것이다.

하지만 곡면의 한 점에서의 곡률 구라는 것은 일반적으로는 존재하지 않음을 다음 예를 통해서 알 수 있다.

**예 3.1.1.** 다음 식으로 주어진 곡면을 나선면(螺旋面,helicoid)이라 한다.

$$\mathbf{X}(u, v) = \left( u \cos \frac{v}{\sqrt{2}}, u \sin \frac{v}{\sqrt{2}}, \frac{v}{2} \right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

이는  $x$ -축을  $z$ -축을 따라 들어올리면서 동시에 돌리는 나선운동으로 얻어진다고 볼 수 있다.



〈그림 3.1〉

$P = \mathbf{X}(1, 0) = (1, 0, 0)$ 에서 이 곡면의 곡률 구가 어떻게 되야 하는지 생각해 보자. 이를 위해서 곡면의 서로 다른 세 점  $Q, R, S$ 를 택한 후  $P, Q, R, S$ 를 지나는 구를 구하고  $Q, R, S$ 를  $P$ 로 보낼 때 그 구가 어떻게 변하는지를 관찰할 것이다. 이를 두 가지로 나누어 생각해 보자. 첫째로는,  $\epsilon$ 이 0보다 조금 큰 양수라고 할 때,

$$Q = \mathbf{X}(1 - \epsilon, 0), \quad R = \mathbf{X}(1 + \epsilon, 0), \quad S = \mathbf{X}(1, \epsilon)$$

을 택한 후 그에 따른 구를 생각해 보자. 그러면 사실  $P, Q, R$ 은 일직선에 있고  $S$ 는 그 일직선에 있지 않다. 따라서  $P, Q, R, S$ 를 지나는 구는 평면이며  $\epsilon$ 을 0으로 보내면 이는 어떤 평면으로 수렴할 것이다.

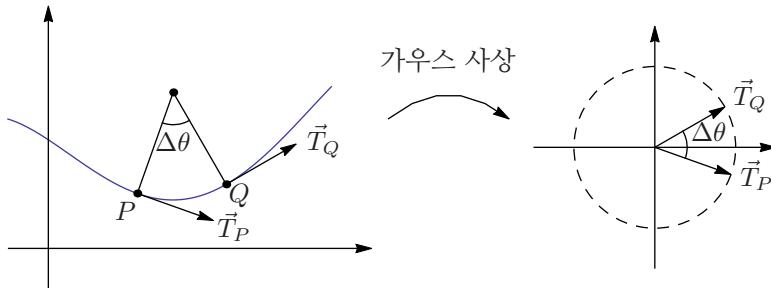
둘째로는 곡선  $\gamma(s) := \mathbf{X}(1, s)$ 에 있는 세 점  $Q, R, S$ 를 택하여 네 점  $P, Q, R, S$ 를 지나는 구를 생각한 후 이 구의 극한을 생각하는 것이다. 그런데 곡선  $\gamma$ 는 단위 속력을 가지는 오른나선이고 이의 곡률, 열률, 접촉 구는 앞 장에서 이미 알아본 바 있다. 그에 의하면 접촉 구는 반지름이 2인 구다.

위에서 살펴본 바와 같이 서로 다른 세 점을 어떻게 택하는가에 따라 구하는 구가 달라지므로 이 곡면의  $P$ 에서의 곡률 구라는 것은 없다.

## 두 번째 시도 평면 곡선의 유향 곡률

$$\kappa_2 = \frac{d\theta}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad (3.2)$$

임을 상기하자. 이 개념을 곡면으로 확장시킬 수 있을까? 를 염두에 두고  $\Delta\theta$  와  $\Delta s$ 를 곡면에 대하여 일반화시킬 수 있을지 생각해 보자. 이런 관점에서 다음을 생각할 수 있다: 주어진 평면 곡선  $\gamma$ 에 대하여  $\Delta\theta$ 는 단위 접벡터  $\vec{T}$ 가  $x$ 축과 이루는 각의 증분인데 이를 길이로 바꾸어 생각해 본다면  $\vec{T}$ 의 시점을 원점으로 옮겼을 때  $\vec{T}(s)$ 와  $\vec{T}(s + \Delta s)$ 가 이루는 원호의 길이다.

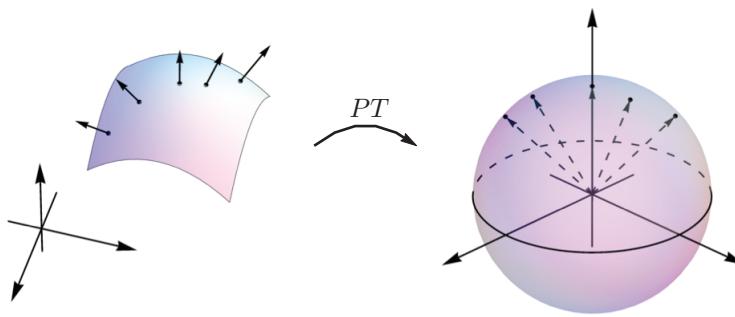


〈그림 3.2〉

즉,  $\kappa_2$ 는 원호의 길이와 원래 곡선의 길이의 비의 극한이라고 볼 수 있다.

이를 곡면에 대하여 일반화 시킬 수 있다. 곡면에 대해서는 단위 접벡터가 유일하게 주어지지 않으므로 단위 접벡터 대신 단위 수직 벡터  $\mathbf{N}$ 을 생각한다. 곡면의 한 점에 대하여 두 방향으로 수직 벡터가 주어지는데 그중 하나를 임의로 선택하고 이야기를 진행한다. 즉 곡면의 점  $P$ 에 대하여  $\mathbf{N}_P$ 는 시점이  $P$ 고 길이가 1이며 곡면에 수직인 벡터다. 1장 3절에 소개된 평행 이동 사상  $PT$ 를

이용하여 이 단위 수직 벡터의 시점을 원점으로 보내면, 즉  $PT \circ N$ 을 생각하면, 이는 곡면에서 단위구면으로 가는 사상이 된다. 이제 곡면의 한 점  $P$ 의 근방과  $PT \circ N$ 에 의한 그 근방의 이미지와의 넓이의 비의 극한을 보는 방법이 평면 곡선의 곡률  $\kappa_2$ 를 일반화한 것이라 할 수 있다. 이것이 과연 의미가 있을까? 즉



〈그림 3.3〉

$$\lim_{A \text{의 넓이} \rightarrow 0} \frac{A \text{의 } PT \circ N \text{에 의한 이미지의 넓이}}{\text{점 } P \text{의 근방 } A \text{의 넓이}}$$

를 곡면의 곡률로 정의해도 될 것인가?

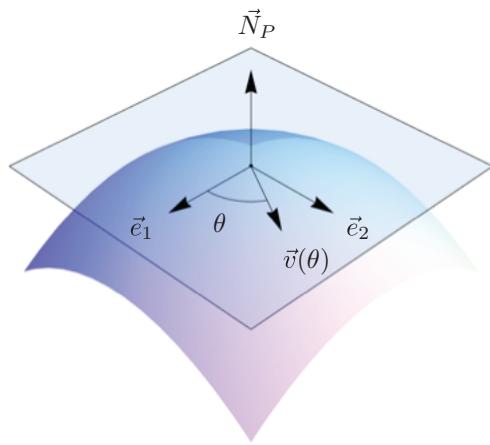
**세 번째 시도** 평면 곡선의 곡률의 개념을 일반화하려고 노력하는 대신에 평면 곡선의 곡률의 개념을 그대로 적용할 수 있는 방법도 있다.  $N_P$ 를 곡면  $S$ 에서의<sup>1)</sup>  $P$ 에서의 단위 수직 벡터라 하자. 이때  $N_P$ 를 포함하는 평면들로 곡면을 잘라서 얻어지는 평면 곡선들의 곡률의 평균값을 취하는 것을 생각할 수 있다.

평균을 취한다는 말의 기하적 의미를 좀 더 분명히 하여 보자. 먼저 곡면의 점  $P$ 에서의 한 단위 길이 접벡터  $e_1$ 을 택하고  $e_2 := N \times e_1$ 이라 하자. 그러면 임의의 단위길이 접벡터는  $v(\theta) := \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ 로 나타낼 수 있다.

이제  $v(\theta)$ 와  $N_P$ 를 포함하는 평면과 이 곡면의 공통 부분은 평면 곡선이라 할 수 있다. 따라서 평면 곡선으로서의 유향 곡률  $\kappa_2(\theta)$ 를 생각할 수 있다. (여기서 양의  $x$ 축 방향은  $v(\theta)$  방향, 양의  $y$ 축 방향은  $N_P$  방향이라 하자.) 이때 이 유향 곡률들의 평균은 여러 가지 방법으로 취할 수 있다. 먼저 미적분에서 배운 합수값의 평균을 생각하여  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta$ 를 생각 할 수 있다. 또는,  $\kappa(\theta)$ 의 가장 큰 값을  $\kappa_M$ 라 하고 가장 작은 값을  $\kappa_m$ 이라 할 때, 그 둘의 산술 평균  $(\kappa_M + \kappa_m)/2$ 이나 기하 평균  $\sqrt{\kappa_M \kappa_m}$ 을 생각할 수 있다. 그런데  $\kappa_M \kappa_m < 0$  일 수 있어 기하 평균을 취하는 것은 조금 생각해 보아야 한다. 그래서  $\sqrt{-}$ 을 생각하기 전인  $\kappa_M \kappa_m$ 을 고려한다.

---

1) Surface의 S다.



〈그림 3.4〉

예 3.1.2. 이제까지 고려한 곡률들의 개념을 평면과 반지름이  $r$ 인 구에 적용하여 우리가 생각했던 곡률의 전제 조건을 만족하는지 검토해 보자.

번호	곡률의 후보	평면	반지름이 $r$ 인 구
1	$\lim_{A \text{의 넓이} \rightarrow 0} \frac{(PT \circ N)[A] \text{의 넓이}}{A \text{의 넓이}}$	0	$\frac{1}{r^2}$
2	$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) d\theta$	0	$\frac{1}{r}$
3	$\frac{1}{2}(\kappa_M + \kappa_m)$	0	$\frac{1}{r}$
4	$\kappa_M \kappa_m$	0	$\frac{1}{r^2}$

1번과 4번의 값이 같고 2번과 3번의 값이 같은 것은 우연이 아니다. 나중에 공부할 것이지만 일반적으로 어떤 곡면에 대해서도 1번과 4번은 같게 되고, 2번과 3번도 같게 된다.

**결론** 우리는 위에 제시된 여러 가지 후보 중 곡면의 단위 수직 벡터를 포함하는 평면으로 곡면을 잘라서 나오는 단면 곡선들의 유향 곡률의 평균으로 곡면의 곡률을 이해하고자 한다. 여러 가지 평균이 있는 만큼 (산술 평균, 기하 평균, 조화 평균, ...) 곡면에 대해서는 여러 가지 곡률이 있다.

## 3.2 함수를 이용하여 곡면을 나타내는 방법

앞에서 추론한 내용을 구체적으로 공부하기 위해서는 먼저 곡면을 수식으로 나타내는 방법을 이해할 필요가 있다. 곡면을 수식으로 나타내는 방법에는 여러 가지가 있다.

- 이변수 함수  $z = f(x, y)$ 의 그래프로 나타내는 방법,
- 삼변수 함수  $w = F(x, y, z)$ 의 등위면으로 나타내는 방법,
- 평면 영역에서 공간으로 가는 이변수 벡터값 함수

$$\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3 \quad (3.3)$$

의 상으로 나타내는 방법

등이 있다. 이 중 세 번째 방법에 대해 좀 더 생각해 보자.

**예 3.2.1.**  $(u, v) \in \mathcal{U} := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ 에 대하여

$$\mathbf{X}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \quad (3.4)$$

의 상은 구  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 의 일부다. 이는 구면좌표계를 다시 활용한 것이며 위선과 경선을 나타내는데 편리하다.

예 3.2.2.  $(u, v) \in \mathcal{U} := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ 에 대하여

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u), \quad (3.5)$$

의 상은 일엽 쌍곡면  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 의 일부다. 나선과 마찬가지로 이것도 선직면이다.

예 3.2.3.  $(u, v) \in \mathcal{U} := (-\infty, \infty) \times (0, 2\pi)$ 에 대하여

$$\mathbf{X}(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u) \quad (3.6)$$

의 상은 이엽 쌍곡면  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 의 반이다. 원뿔을 잘랐을 때와 마찬가지로, 이 곡면을 자르면 타원, 포물선, 쌍곡선(의 반)이 모두 나타난다.

이와 같이 이변수 벡터값 함수로 곡면을 나타내는 방법의 가장 큰 문제점에는 다음 두 가지가 있다.

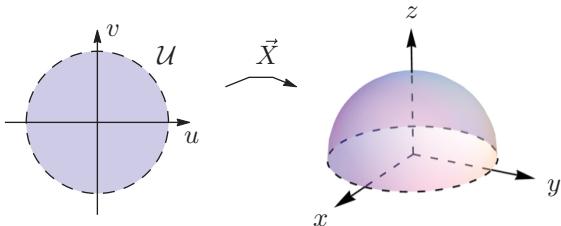
첫 번째 문제점은, 이와 같이 한 곡면을 나타내는 방법은 여러 가지가 있다는 것이다. 그 한 예는 지구를 나타내는 지도가 굉장히 여러 가지 종류가 있다는 사실로부터 알 수 있다. 여기서 파생되는 문제점은, 한 지도를 가지고 알아낸 사실이 다른 지도로 알아낸 사실과 다르면 어떻게 할 것인가 하는 것이다. 물론 이런 일은 당연히 생기지 않지만 의외로 식 (3.3)으로 주어진 곡면을 공부하다 보면 이런 질문에 대한 답을 명확히 하여야 할 때가 있다.

식 (3.4)가 이미 구면을 나타내지만 다음 두 예도 구면을 나타낸다.

예 3.2.4.  $(u, v) \in \mathcal{U} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ 에 대하여

$$\mathbf{X}(u, v) := (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \quad (3.7)$$

의 상은 상반구를 나타낸다. 이는 직사영으로 염어낸 것이다.



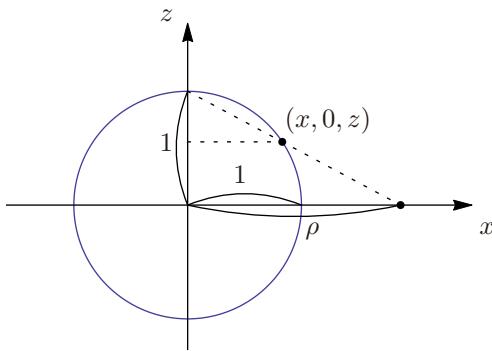
〈그림 3.5〉

예 3.2.5. (입체사영을 이용한 지도) 입체 사영을 이용하여 만든 지도는 실제로는 잘 쓰이지 않지만, 수학적으로는 매우 중요한 지도다. 만드는 방법은 다음과 같다. 북극점  $(0, 0, 1)$ 과  $x$ -축의 점  $(\rho, 0, 0)$ 을 연결한 직선이 구와 만나는 점을  $(x, 0, z)$ 라고 하자. 그러면 삼각형의 비례 관계로부터 다음을 얻는다.

$$\rho = \frac{x}{1 - z}.$$

또,  $x^2 + z^2 = 1$  이므로 이를 연립하면

$$x = \frac{2\rho}{\rho^2 + 1}, \quad z = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}.$$



즉 다음을 얻는다.

$$(\rho, 0, 0) \mapsto \left( \frac{2\rho}{\rho^2 + 1}, 0, \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \right).$$

자, 이제 이를  $\theta$  만큼  $z$  축 중심으로 회전한 것을 생각하면

$$(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0) \mapsto \left( \frac{2\rho}{\rho^2 + 1} \cos \theta, \frac{2\rho}{\rho^2 + 1} \sin \theta, \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \right).$$

이를 직교좌표로 나타내면 다음을 얻는다.  $(u, v) \in \mathcal{U} = \mathbb{R}^2$ 에 대하여

$$\mathbf{X}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right). \quad (3.8)$$

두 번째 문제점은, 일반적으로 곡면 전체를 이와 같은 방법으로 나타낼 수 없다는 것이다. 우리가 흔히 보는 세계전도는 마치 지도 하나로 지구 전체를

나타내는 것처럼 되어있는데 사실은 어떤 지도도 구면 전체를 일대일 대응의 방식으로 나타낼 수 없다.<sup>2)</sup>

이런 문제점들에도 불구하고 (3.3)과 같이 곡면을 나타내는 방법은 아주 강력한 방법이다. 이 방법의 가장 좋은 점은 곡면을 함수처럼 생각할 수 있어 함수에 대한 연산 특히 미적분을 곡면에 적용할 수가 있다는 것이다. 따라서 이 책에서는 식 (3.3)을 이용하여 곡면을 공부한다. 위에서 지적된 두 문제점 중 사실 두 번째 문제점에 대해서는 이 책에서는 그리 신경쓰지 않는다. 우리는 곡률의 관점에서 곡면을 공부하고자 하는데 우리가 공부하는 곡률은 근본적으로 국소적인 개념이기 때문에 곡면 전체의 모양을 생각할 필요는 없다. 하지만 첫 번째 문제점은 굉장히 신중하게 다루어야 하는 부분으로 그 문제점이 부각되는 때마다 설명을 제시하고자 한다.

다음 정의에서  $\mathbf{X}_u(p)$ 는  $u$ -변수에 대한 편미분,  $\mathbf{X}_v(p)$ 는  $v$ -변수에 대한 편미분을 나타내며  $\mathbf{X}(p)$ 에서 곡면에 접하는 벡터다.

**예 3.2.6.** 식 (3.4)로 주어진  $\mathbf{X}$ 에 대하여

$$\mathbf{X}_u(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)_{(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)},$$

$$\mathbf{X}_v(u, v) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)_{(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)}.$$

---

2) 이를 증명하여 보아라.

따라서

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_u\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}, \\ \mathbf{X}_v\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) &= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.\end{aligned}$$

기호가 너무 복잡해지므로 편의상 앞으로는 아랫첨자를 생략한다.

**정의 3.2.7.** (3.3)이  $p \in \mathcal{U}$ 에서 정칙이라 함은 두 벡터  $\mathbf{X}_u(p)$ 와  $\mathbf{X}_v(p)$ 가 서로 독립임을 뜻한다. 모든 점에서 정칙인  $\mathbf{X}$ 를 곡면 조각(surface patch)이라 한다.

**보조정리 3.2.8.** 다음 세 조건은 서로 동치다.

1.  $\mathbf{X}$ 가  $p$ 에서 정칙이다.
2.  $\mathbf{X}_u(p)$ 와  $\mathbf{X}_v(p)$ 를 변으로 가지는 평행사변형의 넓이가 0보다 크다.
3.  $|\mathbf{X}_u(p) \times \mathbf{X}_v(p)| > 0$ .

**증명** 독자에게 맡긴다. ■

우리가 관심을 두고 있는 곡면의 점  $P \in S \subset \mathbb{E}^3$ 가 지도의 점  $p \in \mathcal{U}$ 의 이미지로 주어진다고 하자. 즉  $\mathbf{X}(p) = P$ . 일반적으로  $\mathbf{X}$ 는 정의역과 치역 사이의 일대일 대응이 아니나 필요한 경우  $\mathcal{U}$ 를 줄여 잡으면  $\mathbf{X}$ 는  $\mathcal{U}$ 와  $\mathbf{X}(\mathcal{U})$  사이의 일대일 대응이 된다. 일반적으로 우리가 곡면이라고 생각하는 것을 다루기 위해서는 사실 여러 곡면 조각들을 잘 결합시켜 생각해야 하는데 우리는 이 책에서 국소적 이론만 다룰 것이며 편의상 일대일 대응인  $\mathbf{X}$ 를 곡면 조각이라 할 것이다.

위와 같이  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 로 곡면을 나타낼 때  $\mathbf{X}_u(u, v)$ 와  $\mathbf{X}_v(u, v)$ 는  $\mathbf{X}(u, v)$ 를 시점으로 하였을 때 곡면에 접하는 벡터가 되며,  $\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)$ 는  $\mathbf{X}(u, v)$ 를 시점으로 하였을 때 곡면에 수직인 벡터가 된다. 이때, 곡면의 단위 수직 벡터  $\mathbf{N}$ 은 다음과 같이 주어지는 것으로 한다:

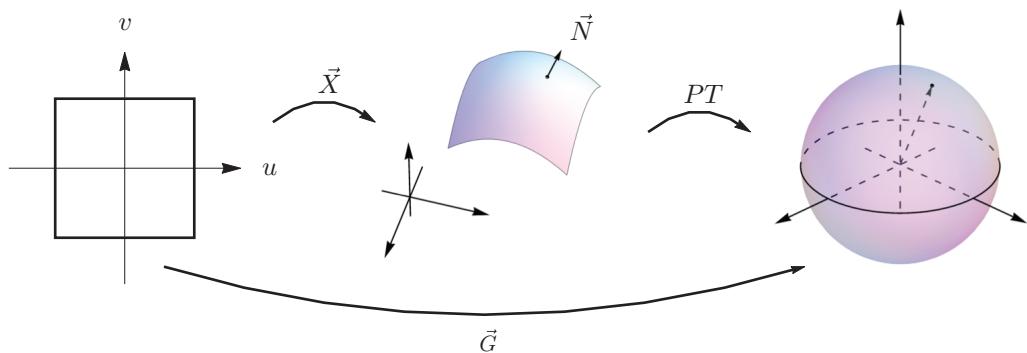
$$\mathbf{N}(\mathbf{X}(u, v)) = \frac{\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)}{|\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)|_{\mathbf{X}(u, v)}}.$$

여기서 아랫첨자로  $\mathbf{X}(u, v)$ 가 붙어 있는 것은 이 벡터의 시점이  $\mathbf{X}(u, v)$ 임을 의미한다. 편의상  $PT \circ \mathbf{N} \circ \mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 를  $\mathbf{G}$ 라 하자. 즉,

### 정의 3.2.9.

$$\mathbf{G} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1) \subset \mathbb{E}^3, \quad \mathbf{G}(u, v) = \frac{\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)}{|\mathbf{X}_u(u, v) \times \mathbf{X}_v(u, v)|}. \quad (3.9)$$

여기서  $\mathbb{S}^2(1)$ 은 중심이 원점에 있고 반지름이 1인 구를 가리킨다. 이 사상  $\mathbf{G}$ 를 가우스 사상이라 하는데 어떤 책은  $PT \circ \mathbf{N}$ 을 가우스 사상이라 하기도



〈그림 3.6〉

한다. 독자는 문맥을 통해 가우스 사상이  $\mathbf{G}$ 를 가리키는 것인지  $PT \circ N$ 을 가리키는 것인지 스스로 판단해야 한다.

### 보조정리 3.2.10.

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 &= -\mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_1 = |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2|, \\ \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_1 &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_2 = 0 \end{aligned}$$

**증명**  $\mathbf{G}$ 의 정의와 삼중적의 성질로부터 따라 나온다. ■

이 절에서 마지막으로 언급하고 싶은 내용은,  $\mathbf{X}$ 로부터 파생되는  $d\mathbf{X}$ 라는 사상이 있다는 것이다.  $d\mathbf{X}$ 는 지도의 벡터  $\mathbf{v}_P = (a, b)_p$ 를 공간의 벡터

$d\mathbf{X}(\mathbf{v}_P) = a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)$ 로 보내준다.  $d\mathbf{X}$ 는 굉장히 중요한 개념으로서 부록의 ‘해석학 복습’에 자세한 설명을 적어두었다.

### 3.3 평면 곡선의 곡률로 곡면의 곡률을 이해하는 법

앞 절에서 곡면의 한 점에서의 곡률을 생각하는 방법으로 세 가지 방법을 시도하였으며 그 중 첫 번째 방법은 적절하지 못함을 설명하였다. 두 번째 방법은 나중에 살펴 보기로 하고 여기서는 세 번째 방법을 어떻게 구현할 수 있는지 알아보자. 즉, 곡면  $S$ 의 한 점  $P$ 에 대하여 단위 수직 벡터  $\mathbf{N}_P := N(P)$ 를 포함하는 평면으로 자른 단면 곡선들의 곡률에 대한 평균을 살펴보자. 그럴려면 먼저 단면 평면 곡선의 곡률을 구할 수 있어야 한다.

그런데 이 방법의 문제점은 대부분의 경우 그런 단면 곡선들의 구체적인 식을 구하기가 어렵다는 것이다.

**예 3.3.1.** 곡면  $x^2 + y^4 + z^8 = 1$  과 점  $P(0, 0, 1)$ 에 대하여 위에서 말하는 단면 곡선들의 식을 구해 보라.

따라서 단위 수직 벡터  $\mathbf{N}_P$ 를 포함하는 평면으로 자른 단면 곡선의 유향 곡률을 단면 곡선의 식을 구체적으로 알지 못하더라도 계산할 수 있는 방법이 있는가 생각해 보지 않을 수 없다. 곡률을 구하고자 할 때 단면 평면 곡선의 식을 구체적으로 알지는 못할 때 어디까지 계산을 진행할 수 있는지 알아보자.

$\mathbf{N}_P$ 를 포함하는 평면을 좀 더 구체적으로 나타내기 위하여 점  $P$ 에서의 곡면의

단위 접벡터  $\mathbf{v}_P$ 를 하나 고정하자. 즉

$$\mathbf{v}_P \in T_P S, \quad \langle \mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P \rangle = 0, \quad |\mathbf{N}_P| = |\mathbf{v}_P| = 1$$

$\mathbf{N}_P$ 와  $\mathbf{v}_P$ 를 포함하는 평면을  $\Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P)$ 라 하자. 이제 곡면과  $\Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P)$ 의 교선을 단위속력으로 매개한 곡선을  $\alpha$ 라 하자. 즉 모든  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 에 대하여

$$\alpha(0) = P, \quad \dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}_P, \quad \alpha(s) \in S \cap \Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P), \quad |\dot{\alpha}(s)| \equiv 1.$$

그러면 구하고자 하는 평면 곡선의 곡률을  $\kappa$ 라 할 때 식 (1.20)로부터

$$\kappa_3[\alpha](0) = \langle \mathbf{N}_P, \ddot{\alpha}(0) \rangle.$$

여기서 (1.20)의  $\mathcal{J}\gamma'(0)$  대신에  $\mathbf{N}_P$ 를 썼고 따라서  $\kappa_2$  대신에  $\kappa_3$ 을 썼다.

**참고 3.3.2.** 여기서 왜  $\mathcal{J}\gamma'(0)$  대신에  $\mathbf{N}_P$ 를 썼는지 생각해 보라.  $\Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P)$ 에서 반시계 방향이 분명하지 않다는 것이 한 가지 이유가 될 수 있다. 현 설정에서는  $\mathcal{J}\dot{\alpha}(0) = +\mathbf{N}_P$  또는  $\mathcal{J}\dot{\alpha}(0) = -\mathbf{N}_P$  인데  $\mathbf{N}_P$ 를 일괄적으로 적용하였다.

자,  $\langle \mathbf{N}_P, \ddot{\alpha}(0) \rangle$ 을 어떻게 계산할 수 있을까? 앞에서 든 예를 통해 살펴 본 것처럼 일반적으로  $\alpha$ 의 구체적인 식을 구하는 것은 쉽지 않은 상황에서...

여기서 중요한 관찰은 우리가 알아야 할 것은  $\dot{\alpha}(0)$ 지,  $\alpha$  자체는 아니라는 점이다. 그렇다면 혹시  $\alpha(s)$ 의 식을 모르더라도  $\ddot{\alpha}(0)$ 을 구할 수 있는 방법이 있을까? 더 나아가  $\ddot{\alpha}(0)$ 을 모르더라도  $\kappa_3[\alpha](0)$ 을 구할 수 있는 방법이 있을까? 라는 생각을 해 볼 수 있다.

이를 알아보기 위해 위 식을 변형하여 보자. 먼저  $\mathbf{N}(s) := \mathbf{N} \circ \alpha(s)$ 를 정의하자. 이는 곡면의 단위 법벡터  $\mathbf{N}$ 을 곡선  $\alpha$ 에 국한시켜  $s$ 의 함수로 보자는 것이다. 그러면  $\mathbf{N}(0) = \mathbf{N}_P$ 이기 때문에

$$\kappa_3[\alpha](0) = \langle \mathbf{N}(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle|_{s=0}. \quad (3.10)$$

이 식은, 얼핏 보기엔 1장에서 보았던 식 (1.20)  $\kappa_2[\alpha](0) = \langle \mathcal{J}\dot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle|_{s=0}$ 과 매우 비슷하나 차이가 있다. 이를 알아보기 위하여  $\alpha(s)$ 를 포함하는 평면  $\Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P)$ 에서  $\alpha$ 에 수직인 법벡터를  $\tilde{\mathbf{N}}$ 이라 하자. 그러면 원래는

$$\kappa_3[\alpha](0) = \langle \tilde{\mathbf{N}}(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle|_{s=0}.$$

문제는  $\tilde{\mathbf{N}}$ 은 곡면의 단위법벡터인  $\mathbf{N}$ 과 한 점  $P$ 에서는 같지만  $P$ 가 아닌 다른 점에서는 일반적으로 다르다는 것이다. 즉,  $\tilde{\mathbf{N}}(0) = \mathbf{N} \circ \alpha(0) = \mathbf{N}_P$ 이지만 0이 아닌  $t$ 에 대해서는  $\tilde{\mathbf{N}}(t) \neq \mathbf{N} \circ \alpha(t)$ 일 수 있다는 것이다.

**예 3.3.3.**  $z = xy$ 의 그래프에서  $P = (0, 0, 0)$ 를 생각하라.  $\mathbf{N}_P = \pm(0, 0, 1)$ 인데 이 중  $\mathbf{N}_P = (0, 0, 1)$ 을 선택한다. 이제 단위 접벡터  $\mathbf{v}_P = (1, 0, 0)$ 을 생각하라. 그러면  $\mathbf{v}_P$ 와  $\mathbf{N}_P$ 를 포함하는 평면  $\Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P)$ 은  $xz$ -평면이 되며 따라서  $\tilde{\mathbf{N}}$ 은  $xz$ -평면에 들어 있다. 하지만 이 곡면의 단위법벡터  $\mathbf{N}$ 에 대하여 생각해 보면  $\mathbf{N}(x, y, z) = (-y, -x, 1)/\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ 이어  $\mathbf{N}(x, 0, z) = (0, -x, 1)/\sqrt{x^2 + 1}$ 이고 이는  $x \neq 0$ 인 경우  $xz$ -평면에 들어 있지 않다. 따라서  $x \neq 0$ 이면  $\mathbf{N}(x, 0, z) \neq \tilde{\mathbf{N}}(x, 0, z)$ 이다.

그럼에도 불구하고 (3.10)이 성립하는 이유는 우리가 관심을 두고 있는 점  $P$ 에서는  $\tilde{\mathbf{N}}(0) = \mathbf{N}_P = \mathbf{N}(0)$ 이기 때문이다.

이렇게 억지로  $\mathbf{N}(s)$ 를 도입하는 이유는 무엇일까? 모든  $s$ 에 대하여  $\langle \mathbf{N}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 0$ 이라는 사실로부터 다음이 성립하기 때문이다.

$$\kappa_3[\alpha](0) = -\langle \dot{\mathbf{N}}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle|_{s=0}. \quad (3.11)$$

이렇게 하면 도대체 어떤 이로움이 있을까? 여기서 곡면을 지도  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에서 공간  $\mathbb{E}^3$ 로 가는 정칙 함수  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 의 이미지로 보는 것이 얼마나 좋은 방법인지를 알게 된다. 곡면에서 생기는 현상을  $\mathbf{X}$ 를 이용하여  $\mathcal{U}$ 에서 발생하는 현상으로 이해해 보자.  $\mathbf{X}$ 를 통하여 곡선  $\alpha$ 는 지도  $\mathcal{U}$ 의 곡선  $\gamma$ 와 같다고 볼 수 있다. 즉

$$\text{어떤 곡선 } \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \text{에 대하여 } \alpha = \mathbf{X} \circ \gamma.$$

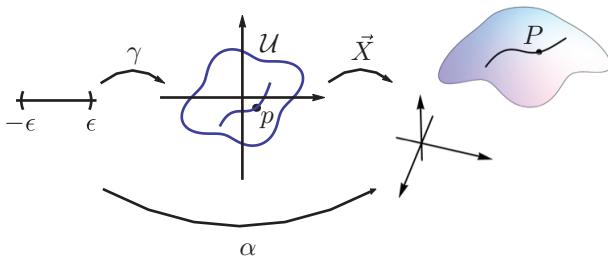
그러면  $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ ,  $\gamma(0) = p$ 라 할 때,  $P = \mathbf{X}(p)$  그리고

$$\dot{\mathbf{N}}(0) = (\mathbf{G} \circ \gamma)'(0) = \mathbf{G}_u(p)\dot{u}(0) + \mathbf{G}_v(p)\dot{v}(0).$$

그리고  $\dot{\alpha}(0)$ 에 대해서도 다음과 같이 마찬가지로 관찰을 할 수 있다.

$$\dot{\alpha}(0) = \mathbf{X}_u(p)\dot{u}(0) + \mathbf{X}_v(p)\dot{v}(0). \quad (3.12)$$

자, 이것이 (3.11)를 계산하는 데에 어떤 도움이 될까? 먼저  $\mathbf{X}$ 를 알고 있다면  $\mathbf{X}_u(p), \mathbf{X}_v(p), \mathbf{G}_u(p), \mathbf{G}_v(p)$ 는 그냥 계산할 수 있다. 그러면  $\dot{u}(0), \dot{v}(0)$ 만 알면



〈그림 3.7〉

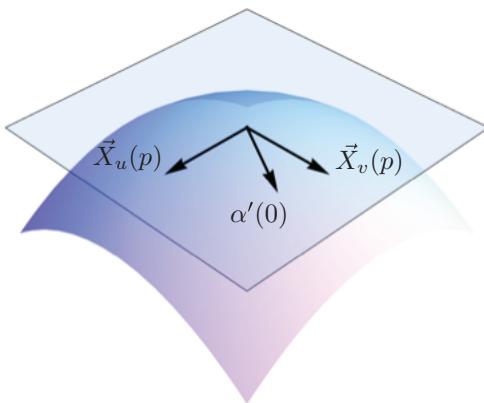
되는데,  $\alpha$ 의 식도 모르고 따라서  $\gamma$ 의 식도 모르는 상태에서 이걸 알아낼 수 있을까? 희한하게도 할 수 있다. 그 방법은 (3.12)과  $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}_P$ 라는 설정으로부터 나오는데,  $\dot{u}(0), \dot{v}(0)$ 는  $\mathbf{v}_P$ 를  $\mathbf{X}_u(p), \mathbf{X}_v(p)$ 의 선형결합으로 나타낸 계수인 것이다. 좀 더 자세히 말하자면 이렇다.  $\mathbf{X}_u(p)$ 와  $\mathbf{X}_v(p)$ 는 점  $P$ 에서의 곡면의 접평면  $T_P S$ 의 기저가 되므로 다음을 만족시키는 두 수  $a, b$ 의 쌍이 하나 그리고 단 하나 존재한다.

$$\dot{\alpha}(0) = a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p).$$

그러면 (3.12)에 의해  $\dot{u}(0) = a, \dot{v}(0) = b$ 인 것이다.

이제까지 논의한 바를 정리하면 다음과 같다. 어떤 두 수  $a, b$ 에 대하여  $\mathbf{v}_P := a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)$ 가 단위속력을 가지고 있으면

$$\Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P) \cap S \text{의 단면곡률} = -\langle a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p), a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p) \rangle.$$



〈그림 3.8〉

이 절에서 생각한  $S \cap \Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P)$ 의 곡률  $\kappa_3$ 은 나중에 곡면  $S$ 의  $\mathbf{v}_P$  방향으로의  $P$ 에서의 법곡률(法曲率 normal curvature)  $\kappa_n(\mathbf{v}_P)$ 이라는 것으로 정의 3.5.1에서 재정의된다.

**참고 3.3.4.** 그러면 왜 여기서 그냥 정의를 하지 않을까? 그것은, 위 계산이 특정한 함수  $\mathbf{X}$ 를 가지고 수행되기 때문이다. 즉, 우리가 관심을 두고 있는 곡면의 근방을 나타내는 지도는 유일하지 않다는 것이 문제다. 한 특정한 함수  $X$ 를 가지고 수행한 계산이 다른 지도 함수  $\mathbf{Y}$ 를 가지고 수행한 계산과 동일한 결과를 주는가를 먼저 확인해야 한다.

여기서부터는 곡면을 나타내는 함수  $\mathbf{X}$ 를 고정하고 논의를 전개한다. 앞 절에서 살펴본 바를 요약하면 다음과 같다: 어떤 두 수  $a, b$ 에 대하여 접벡터  $\mathbf{v}_P := a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)$ 가 단위속력을 가지고 있으면  $\Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P) \cap S$ 의 단면 곡률은

$$-\langle a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p), a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p) \rangle. \quad (3.13)$$

이다. 이를 곡면의  $\mathbf{v}_P = a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)$  방향으로의 법곡률이라고 하고  $\kappa_n(\mathbf{v}_P)$ 로 나타내며 다음 절에서 모양 연산자라는 것과 연계하여 다시 한번 더 심도있게 다룰 것인데, 여기서는 이 법곡률의 평균을 어떻게 구할 것인지 생각해 보자. 즉,  $a, b$ 를 변화시키면서  $\kappa_n(\mathbf{v}_P)$ 를 구해 보면 각 방향으로의 법곡률이 얻어지는데 이 때 이 곡률들의 평균을 어떻게 취할 것인지 생각해 보자는 것이다.

평균을 취하는 데는 여러 가지 방법이 있는데 여기서는 최댓값과 최솟값의 산술 평균을 구하는 걸 생각해 보자. 지금 곡면  $\mathbf{X}$ 와 점  $P = \mathbf{X}(p)$ 는 고정되어 있으며  $a, b$ 가 (방향에 따라) 변하고 있다. 따라서  $\kappa_n$ 을 두 수  $a, b$ 의 함수로 볼 수 있다. 편의상 두 벡터의 내적  $\langle , \rangle$ 을  $\cdot$ 으로 나타내어 위 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \kappa_n(a, b) &= -\mathbf{X}_u(p) \cdot \mathbf{G}_u(p)a^2 - \mathbf{X}_u(p) \cdot \mathbf{G}_v(p)ab \\ &\quad - \mathbf{X}_v(p) \cdot \mathbf{G}_u(p)ba - \mathbf{X}_v(p) \cdot \mathbf{G}_v(p)b^2 \end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{v}_P = a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)$ 의 길이가 1이라는 조건은 다음과 같이 쓸 수

있음에 주목하라.

$$1 = (\mathbf{X}_u(p) \cdot \mathbf{X}_u(p))a^2 + 2(\mathbf{X}_u(p) \cdot \mathbf{X}_v(p))ab + (\mathbf{X}_v(p) \cdot \mathbf{X}_v(p))b^2.$$

이 때 다음과 같이  $\mathbf{X}$ 의 정의역  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에 정의되었으며 실수를 값으로 가지는 여섯 함수  $E, F, G, L, M, N$ 을 정의하자: 편의상 이제부터는 문맥으로부터 분명히 알 수 있는 경우  $(p)$ 를 생략한다.

### 정의 3.3.5.

$$\begin{aligned} E &:= \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u, & F &:= \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v, & G &:= \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v, \\ L &:= -\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{G}_u, & M &:= -\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{G}_v, & N &:= -\mathbf{X}_v \cdot \mathbf{G}_v. \end{aligned}$$

참고로  $-\mathbf{X}_v \cdot \mathbf{G}_u$ 가 안 보이는데 사실 이는 다음에서 볼 수 있는 바와 같이  $M$ 과 같다.

$$-\mathbf{X}_v \cdot \mathbf{G}_u = \mathbf{X}_{vu} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{G} = -\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{G}_v = M.$$

이 여섯 함수는  $S(\mathbf{X}_u)$ 와  $S(\mathbf{X}_v)$ 를 계산하는 데 필수적으로 쓰이기도 하지만, 이 책의 후반부 내용을 보면 알 수 있듯이, 곡면을 연구하는 데 있어서 정말 중요한 함수들이며 결국 곡면 조각  $\mathbf{X}$ 의

제1 기본 형식(first fundamental form),

제2 기본 형식(second fundamental form)

이라는 너무나 중요한 개념으로 확장된다. <sup>3)</sup>

참고 3.3.6. 좀 더 정확히 말하자면, 제1 기본 형식은

$$I := Edu^2 + 2F dudv + G dv^2$$

이고 제2 기본 형식은

$$II := Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

이다. 미분 형식의 기호를 사용하면 다음 식과 같이 간단히 표현된다.

$$I = \langle d\mathbf{X}, d\mathbf{X} \rangle, \quad II = -\langle d\mathbf{X}, d\mathbf{G} \rangle.$$

여기서

$$d\mathbf{X} := \mathbf{X}_u du + \mathbf{X}_v dv, \quad d\mathbf{G} := \mathbf{G}_u du + \mathbf{G}_v dv.$$

우리는 당장은 대학 1학년 수준의 미적분만을 이용하고 있으므로 I, II보다는  $E, F, G, L, M, N$ 을 사용하여 이론을 전개할 것이나, 5장부터는  $E, F, G$ 보다 I를 사용한다.

---

3)  $L, M, N$ 을  $\ell, m, n$  또는  $e, f, g$ 로 표기하기도 한다. Spivak은  $\ell, m, n$ , O'Neill은  $L, M, N$ , Do Carmo는  $e, f, g$ 를 쓴다.

다음을 살피자.

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|^2 &= |\mathbf{X}_u|^2 |\mathbf{X}_v|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{X}_u|^2 |\mathbf{X}_v|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= |\mathbf{X}_u|^2 |\mathbf{X}_v|^2 - |\mathbf{X}_u|^2 |\mathbf{X}_v|^2 \cos^2 \theta \\
 &= (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u)(\mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v) - (\mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v)^2 \\
 &= EG - F^2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

이 식과 보조 정리 3.2.8에 의하여 다음이 성립한다.

**보조정리 3.3.7.** 모든  $(u, v) \in \mathcal{U}$ 에 대하여

$$E(u, v) > 0, \quad G(u, v) > 0, \quad E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 > 0. \tag{3.15}$$

이 기호를 사용하면  $\kappa_n(a, b)$ 의 최댓값  $\kappa_M$  와 최솟값  $\kappa_m$  은 두 수  $a, b$ 가

$$Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = 1 \tag{3.16}$$

을 만족시킬 때 다음 함수

$$\kappa_n(a, b) := La^2 + 2Mab + Nb^2 \tag{3.17}$$

의 최댓값, 최솟값과 같다.

**질문 3.3.8.** (3.16)을 만족시키는  $(a, b)$ 들의 집합은 타원이 됨을 보여라.

이 최댓값, 최솟값을 여러 각도로 구할 수 있으나 여기서는 미적분학에서 다루는 라그랑쥬 승수법을 이용해서 구해보도록 하자. 그 방법에 따라 다음

함수를 보자:

$$f(a, b) := La^2 + 2Mab + Nb^2 - \lambda(Ea^2 + 2Fab + Gb^2 - 1)$$

이제 식 (3.16)과 더불어

$$f_a(a, b, \lambda) = 0, \quad f_b(a, b, \lambda) = 0 \quad (3.18)$$

을 만족시키는  $a, b, \lambda$ 를 구하면 그  $a, b$ 에 대하여  $\kappa_n(a, b)$ 의 값이  $\kappa_M$  또는  $\kappa_m$ 이 될 것이다. 식 (3.18)을 정리하면

$$La + Mb - \lambda(Ea + Fb) = 0, \quad Ma + Nb - \lambda(Fa + Gb) = 0. \quad (3.19)$$

여기서 첫 번째 식에  $a$ 를 곱하고 두 번째 식에  $b$ 를 곱하여 더하면 다음이 얻어진다.

$$La^2 + 2Mab + Nb^2 = \lambda(Ea^2 + 2Fab + Gb^2) = \lambda.$$

이 관계식으로부터 사실은  $\lambda$ 가 우리가 구하고자 하는  $\kappa_M$  또는  $\kappa_m$ 과 같음을 알 수 있다. 따라서 문제는  $\lambda$ 를 구하는 것으로 귀결되었다. 이제 식 (3.19)는 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

이를 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

이 때 다음 두 행렬 (함수)를 정의한다.

## 정의 3.3.9.

$$g := \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

그러면 위 생각은 다음을 의미한다.

**보조정리 3.3.10.**  $\kappa_M$  또는  $\kappa_m$ 이 생기는 방향의 단위 벡터를  $a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)$ 라고 하자. 그러면  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 는 행렬  $g^{-1}A$ 의 고유벡터고  $\kappa_M$ 와  $\kappa_m$ 는 행렬  $g^{-1}A$ 의 고윳값이다.

$\lambda$ 를 구하기 위해 (3.20)을 사용하면 (즉 좌변의 행렬식이 0이라는 것을 이용하면) 다음을 얻는다.

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN - 2FM + GL)\lambda + LN - M^2 = 0. \quad (3.23)$$

이를 풀면  $\kappa_n$ 의 최댓값  $\kappa_M$ 과 최솟값  $\kappa_m$ 을 알 수 있다. 그런데 우리가 정말 관심있는 것은 그 둘의 평균인데 이차식의 두 근의 평균과 계수와의 관계로부터 쉽게 다음을 알 수 있다.

$$\frac{1}{2}(\kappa_M + \kappa_m) = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

따라서 곡면의 곡률은  $E, F, G, L, M, N$ 과 밀접한 관련이 있다. 이것은 도대체 어떤 기하적 의미를 가지고 있을까? 그걸 다음 절에서 알아보자. 참고로 두

근의 곱은 다음과 같다.

$$\kappa_M \kappa_m = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

이 식의 의미는 가우스 곡률로 해석되는데 나중에 공부할 것이다.

다음 절로 넘어가기 전에 한 마디만 더 한다면, 3.21에서 볼 수 있는 바와 같이  $\kappa_M \kappa_m$  와  $\kappa_M + \kappa_m$  은 각각 행렬  $g^{-1}A$ 의 행렬식, 대각합이다. 이것이 무엇을 의미하는가 하는 것은 나중에 모양 연산자의 공부와 연계하여 다루도록 하겠다.

앞에서  $\mathbf{v}_P = a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v$ 의 길이가 1이 아닌 경우에는 (3.16), (3.17)를 곧바로 적용할 수 없는데 이 경우는 어떻게 하면 되는지 알아보자. 먼저  $\mathbf{v}_P$  방향으로의 단위 벡터  $\tilde{\mathbf{v}}_P$ 를 구하여  $\kappa_n(\tilde{\mathbf{v}}_P)$ 의 식을 구하면 다음을 얻는다.

$$\tilde{\mathbf{v}}_P = \frac{\mathbf{v}_P}{|\mathbf{v}_P|} = \frac{a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v}{\sqrt{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}} = \tilde{a}\mathbf{X}_u + \tilde{b}\mathbf{X}_v.$$

단  $\tilde{a} := a/\sqrt{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$ ,  $\tilde{b} := b/\sqrt{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$ . 그러면

$$L\tilde{a}^2 + 2M\tilde{a}\tilde{b} + N\tilde{b}^2 = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}.$$

따라서 둘 다 0이지는 않은 임의의  $a, b$ 에 대하여  $a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v$  방향으로의 (법)

곡률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \kappa_n(a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v) &= \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} \quad (3.24) \\
 &= \frac{\mathbf{v}^T A \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T g \mathbf{v}} \quad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

## 3.4 모양 연산자

앞 절에서 곡면의 곡률의 정의와 그 계산법을 알아보았다. 이것만으로도 곡면의 곡률을 이해하는데 충분하나 나중을 위하여 (좀 더 자세히는 유클리드 공간이 아닌 다른 공간에 있는 곡면의 곡률을 다루기 위하여) 위에서 다룬 개념을 모양 연산자(模樣演算子 Shape Operator)<sup>4)</sup>라는 것을 통해서 다시 들여다 보자.

앞 절에서 주어진 단위 벡터  $\mathbf{v}_P := a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)$ 에 대하여  $\Pi(\mathbf{N}_P, \mathbf{v}_P) \cap M$ 의 곡률은

$$-\langle a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p), a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p) \rangle$$

로 주어짐을 살펴보았다. 그런데 이 식은  $\mathbf{v}_P$ 와  $-(a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p))$ 의 내적이다. 여기서  $-(a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p))$ 는 어떤 벡터일까? 당분간  $-$ 는 잊어버리고 생각하자. 먼저 다음을 알 수 있다.

**보조정리 3.4.1.**  $a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p)$ 는  $\mathbf{N}_P$ 에 수직이다.

**증명** 모든  $u, v$ 에 대하여  $\langle \mathbf{G}(u, v), \mathbf{G}(u, v) \rangle = 1$ 이다. 이를  $u$  또는  $v$ 에 대하여 편미분하면  $\langle \mathbf{G}(u, v)_u, \mathbf{G}(u, v) \rangle = 0$  또는  $\langle \mathbf{G}(u, v)_v, \mathbf{G}(u, v) \rangle = 0$ 이 얻어지는데

---

4) 어떤 책에서는 형 작용소라고 하더라. 그리고 모양 연산자도 곡면과 같이  $S$ 로 나타낸다.  $S$ 가 곡면을 뜻하는지 모양 연산자를 뜻하는지는  $S$ 가 나타나는 곳의 문맥을 통하여 이해할 것.

이로부터  $\mathbf{G}_u$ 와  $\mathbf{G}_v$  모두  $G$ 에 수직임을 알 수 있다.



따라서 시점을  $P$ 로 하면  $a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p)$ 는 곡면에 접하는 벡터다. 이 벡터는 곡면의 곡률을 계산하는 데에 중요한 역할을 하기 때문에 뭔가 이름을 붙이고자 하는데 그러기 전에 먼저 이것이 잘 정의된 것인지 살펴 보아야 한다. 이 질문의 뜻을 설명하기 위해 곡면  $S$ 를 나타내는 함수가  $\mathbf{X}$ 만이 아니라

$$\bar{\mathbf{X}} : \bar{\mathcal{U}} \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{\mathcal{U}}$$

그리고  $P = \bar{\mathbf{X}}(\bar{p})$ 로도 주어진 상황을 제시한다. 한 곡면에 대하여 지도는 여럿 있을 수 있다. 이 때  $\mathbf{v}_P = \bar{a}\bar{\mathbf{X}}_{\bar{u}}(\bar{p}) + \bar{b}\bar{\mathbf{X}}_{\bar{v}}(\bar{p})$ 라고 하면 우리가 고려해야 하는 벡터는  $\bar{a}(\bar{p})\bar{\mathbf{G}}_{\bar{u}}(\bar{p}) + \bar{b}(\bar{p})\bar{\mathbf{G}}_{\bar{v}}(\bar{p})$ 다. 이 때 과연

$$a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p) = \bar{a}(\bar{p})\bar{\mathbf{G}}_{\bar{u}}(\bar{p}) + \bar{b}(\bar{p})\bar{\mathbf{G}}_{\bar{v}}(\bar{p})$$

인가 하는 것이 여기서 내가 제기하는 문제다.

다음과 같이 생각하자.  $\mathbf{X}(\mathcal{U})$ 와  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathcal{U}})$ 는 같은 곡면을 나타내기 때문에  $\mathcal{U}$ 와  $\bar{\mathcal{U}}$  사이에는 일대일 대응이 있다고 할 수 있다.  $f : \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}, f(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$  가 그런 일대일대응이라고 하자. 그러면  $\bar{p} = f(p)$ .

**보조정리 3.4.2.**  $a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p) = \bar{a}\bar{\mathbf{X}}_{\bar{u}}(f(p)) + \bar{b}\bar{\mathbf{X}}_{\bar{v}}(f(p))$  이면 다음이 성립 한다.

$$a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p) = \bar{a}\bar{\mathbf{G}}_{\bar{u}}(f(p)) + \bar{b}\bar{\mathbf{G}}_{\bar{v}}(f(p)).$$

**증명**  $(\bar{u}, \bar{v}) = f(u, v) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$ 라고 하자. 그러면

$$\mathbf{X}(u, v) = \bar{\mathbf{X}}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)), \quad \mathbf{G}(u, v) = \bar{\mathbf{G}}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)).$$

따라서 미분의 연쇄법칙에 의하여

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_u & \bar{v}_u \\ \bar{u}_v & \bar{v}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_{\bar{u}} \circ f \\ \bar{\mathbf{X}}_{\bar{v}} \circ f \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ \mathbf{G}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_u & \bar{v}_u \\ \bar{u}_v & \bar{v}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_{\bar{u}} \circ f \\ \bar{\mathbf{G}}_{\bar{v}} \circ f \end{bmatrix}.$$

이제 첫 번째 식과 가정으로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_u(p) & \bar{v}_u(p) \\ \bar{u}_v(p) & \bar{v}_v(p) \end{bmatrix}$$

따라서 두 번째 식과 위 식을 이용하여 다음이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u(p) \\ \mathbf{G}_v(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_u(p) & \bar{v}_u(p) \\ \bar{u}_v(p) & \bar{v}_v(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_{\bar{u}}(\bar{p}) \\ \bar{\mathbf{G}}_{\bar{v}}(\bar{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_{\bar{u}}(\bar{p}) \\ \bar{\mathbf{G}}_{\bar{v}}(\bar{p}) \end{bmatrix}.$$

이 식으로부터 결론이 얻어진다. ■

이제 드디어 다음을 정의할 수 있다.

**정의 3.4.3.** 다음에 주어진  $S$ 를 모양 연산자(Shape Operator)라고 한다.

$$S : T_P S \rightarrow T_P S, \quad S(a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)) := -(a\mathbf{G}_u(p) + b\mathbf{G}_v(p))$$

이 정의에서  $a\mathbf{X}_u(p) + b\mathbf{X}_v(p)$ 는 단위벡터일 필요가 없다. 보조정리 3.4.2에 의하여 이는  $\mathbf{X}$ 를 달리 취하더라도 상관없이 잘 정의된다.

**예제 3.4.4.** 이변수 함수  $f(x, y) = x^2 - y^2$ 의 그래프로 주어진 곡면을 생각하라.  $P = (0, 0, 0)$ 에 대하여  $\mathbf{v}_P = (a, b, 0)_{(0,0,0)}$ 은 점  $P$ 에서 곡면에 접하는 벡터가 된다. 이때  $S(\mathbf{v}_P)$ 를 구하여라.

**풀이** 곡면을 다음 함수의 이미지로 생각한다.

$$\mathbf{X}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2).$$

그러면  $P = \mathbf{X}(0, 0)$ 이고

$$\mathbf{X}_u(0, 0) = (1, 0, 0)_P, \quad \mathbf{X}_v(0, 0) = (0, 1, 0)_P.$$

따라서  $\mathbf{v}_P = a\mathbf{X}_u(0, 0) + b\mathbf{X}_v(0, 0)$ . 이제 간단한 계산에 의하여

$$\mathbf{G}(u, v) = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \frac{(-2u, 2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

그러므로

$$\mathbf{G}_u(0, 0) = (-2, 0, 0), \quad \mathbf{G}_v(0, 0) = (0, 2, 0)$$

따라서

$$\begin{aligned} S((a, b, 0)_{0,0,0}) &= S(a\mathbf{X}_u(0, 0) + b\mathbf{X}_v(0, 0)) \\ &= -(a\mathbf{G}_u(0, 0) + b\mathbf{G}_v(0, 0)) = (2a, -2b, 0). \end{aligned}$$



$S(\mathbf{v}_P)$ 의 기하적 의미는 무엇일까? 다음과 같이 알아보자. 곡면  $M$ 과 한 점  $P$ , 한 접벡터  $\mathbf{v}_P$ 를 고정하라. 이 때 곡면에 있으면서 다음을 만족시키는 곡선

$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  을 생각하라.

$$\alpha(0) = P, \quad \dot{\alpha}(0) = v_P.$$

질문 3.4.5. 존재성을 어떻게 보일 수 있는가? 존재한다면 유일한가?

이러면  $PT \circ N \circ \alpha$ 는 단위구에 있는 곡선이다. 이 곡선의 속도벡터와  $S(v_P)$  사이에 어떤 관계가 있는데 이를 알아보기 위하여 곡면 함수  $X : U \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$  을 하나 선택하라. 그러면 다음과 같은 곡선  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ 가 있다.

$$\alpha = X \circ \gamma.$$

이러면

$$(PT \circ N \circ \alpha)(t) = (PT \circ N \circ X \circ \gamma)(t) = G \circ \gamma(t).$$

따라서,  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  라고 하면  $v_P = X_u \dot{u}(0) + X_v \dot{v}(0)$  이므로

$$S(v_P) = -(G_u \dot{u}(0) + G_v \dot{v}(0)) = -(\mathbf{G} \circ \gamma)'(0) \quad (3.25)$$

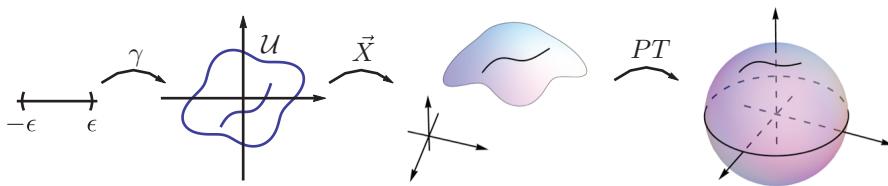
즉  $S(v_P)$ 는  $v_P$ 와 연관된 어떤 구면 곡선의 속도벡터의 음이다.

보조정리 3.4.6.

$$S(v_P) = -(\mathbf{G} \circ \gamma)'(0).$$

이제  $S$ 의 매우 중요한 다음 성질을 알아보자.

정리 3.4.7. 모양 연산자  $S$ 는 다음을 만족한다.



〈그림 3.9〉

- (1) \$S(\mathbf{v}\_P) \in T\_P S\$.
- (2) \$S\$는 선형 사상이다.
- (3) \$\langle S(\mathbf{v}\_P), \mathbf{w}\_P \rangle = \langle \mathbf{v}\_P, S(\mathbf{w}\_P) \rangle\$. 즉, \$S\$는 대칭이다.

**증명** (1)은 이미 앞 절에서 \$S\$의 치역과 관련하여 설명되었다. 이제 (2)와 (3)을 증명하자. 먼저 \$p = (p\_1, p\_2) \in \mathcal{U}\$가 \$\mathbf{X}(p) = P\$를 만족시킨다고 하자. 이제 임의의 두 접벡터 \$\mathbf{v}\_P = a\mathbf{X}\_u + b\mathbf{X}\_v, \mathbf{w}\_P = c\mathbf{X}\_u + d\mathbf{X}\_v\$에 대하여

$$\begin{aligned}\gamma(t) &:= (p_1 + a t, p_2 + b t), \\ \delta(t) &:= (p_1 + c t, p_2 + d t), \\ \mu(t) &:= (p_1, p_2) + t(k(a, b) + \ell(c, d))\end{aligned}$$

라고 하면

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \circ \boldsymbol{\gamma}(0) &= P, & (\mathbf{X} \circ \boldsymbol{\gamma})'(0) &= \mathbf{v}_P, \\ \mathbf{X} \circ \boldsymbol{\delta}(0) &= P, & (\mathbf{X} \circ \boldsymbol{\delta})'(0) &= \mathbf{w}_P, \\ \mathbf{X} \circ \boldsymbol{\mu}(0) &= P, & (\mathbf{X} \circ \boldsymbol{\mu})'(0) &= k \mathbf{v}_P + \ell \mathbf{w}_P. \end{aligned}$$

따라서, (3.25)에 의하여<sup>5)</sup>,

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}_P) &= -(\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\gamma})'(0), & S(\mathbf{w}_P) &= -(\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\delta})'(0), \\ S(k \mathbf{v}_P + \ell \mathbf{w}_P) &= -(\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\mu})'(0). \end{aligned}$$

이제 연쇄 법칙에 의하여

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\gamma})'(0) &= \mathbf{G}_u(p) a + \mathbf{G}_v(p) b, \\ (\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\delta})'(0) &= \mathbf{G}_u(p) c + \mathbf{G}_v(p) d, \\ (\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\mu})'(0) &= \mathbf{G}_u(p)(k a + \ell c) + \mathbf{G}_v(p)(k b + \ell d). \end{aligned}$$

따라서

$$(\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\mu})'(0) = k (\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\gamma})'(0) + \ell (\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\delta})'(0)$$

이 성립하는데 이로부터 다음이 따라 나온다.

$$S(k \mathbf{v}_P + \ell \mathbf{w}_P) = k S(\mathbf{v}_P) + \ell S(\mathbf{w}_P).$$

따라서  $S$ 가 선형 사상임이 증명되었다.

5) 여기서  $\gamma, \delta, \mu$  등의 모양은 잘 알 수 있지만  $X \circ \gamma, X \circ \delta, X \circ \mu$  등은 잘 모른다는 점을 강조하고 싶다.

이제  $0 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_u$ 로부터

$$-\mathbf{G}_v \cdot \mathbf{X}_u = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{uv} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{vu}.$$

$0 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_v$ 로부터

$$-\mathbf{G}_u \cdot \mathbf{X}_v = \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}_{vu}.$$

따라서

$$\langle S(\mathbf{X}_u), \mathbf{X}_v \rangle = \langle \mathbf{X}_u, S(\mathbf{X}_v) \rangle.$$

즉 (3)의 특수한 경우가 증명되었다. 일반적인 경우는  $S$ 가 선형이기 때문에 성립한다. ■

이제 임의의 벡터  $\mathbf{v}_P$ 에 대하여  $S(\mathbf{v}_P)$ 를 계산하는 것은  $S(\mathbf{X}_u)$ 와  $S(\mathbf{X}_v)$ 를 계산하는 것으로 귀결된다. 선형성이 다음을 의미하기 때문이다.

$$S(a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v) = aS(\mathbf{X}_u) + bS(\mathbf{X}_v)$$

$S(\mathbf{X}_u)$ 와  $S(\mathbf{X}_v)$ 를  $\mathbf{X}_u$ 와  $\mathbf{X}_v$ 의 선형결합으로 표현할 수 있는데 이 때 그 계수들을 알아보자.

정리 3.4.8.  $S(\mathbf{X}_u), S(\mathbf{X}_v)$ 는 다음과 같이 계산된다.<sup>6) 7) 8)</sup>

$$\begin{bmatrix} S(\mathbf{X}_u) \\ S(\mathbf{X}_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

**증명**  $S(\mathbf{X}_u)$ 와  $S(\mathbf{X}_v)$ 는 곡면에 접하므로 모두  $\mathbf{X}_u$ 와  $\mathbf{X}_v$ 의 선형 결합으로 쓰여 질 수 있다. 즉, 어떤  $a_{ij}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} S(\mathbf{X}_u) &= a_{11}\mathbf{X}_u + a_{12}\mathbf{X}_v, \\ S(\mathbf{X}_v) &= a_{21}\mathbf{X}_u + a_{22}\mathbf{X}_v. \end{aligned} \quad (3.28)$$

---

6) 아래 표현에서  $2 \times 1$  행렬의 모든 원소는 벡터 함수임에 유의하라.

7) 행렬이  $A \cdot g^{-1}$ 의 꼴임에 주의하라. 앞절에서는  $g^{-1} \cdot A$ 를 다루었었다. 두 행렬의 고유값은 같되 고유벡터는 다르다.  $A \cdot g^{-1}$ 의 고유벡터의 의미는 무엇일까?

8) 아래 식은 다음과 같은데 이를 바인가르텐 방정식이라 한다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ \mathbf{G}_v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

이를  $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$  와 내적하여 다음을 얻는다. <sup>9)</sup>

$$\langle S(\mathbf{X}_u), \mathbf{X}_u \rangle = a_{11} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + a_{12} \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{11}E + a_{12}F, \quad (3.29)$$

$$\langle S(\mathbf{X}_v), \mathbf{X}_u \rangle = a_{21} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle + a_{22} \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle = a_{21}E + a_{22}F, \quad (3.30)$$

$$\langle S(\mathbf{X}_u), \mathbf{X}_v \rangle = a_{11} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + a_{12} \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{11}F + a_{12}G, \quad (3.31)$$

$$\langle S(\mathbf{X}_v), \mathbf{X}_v \rangle = a_{21} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle + a_{22} \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = a_{21}F + a_{22}G. \quad (3.32)$$

그런데 정의에서 쉽게 살펴볼 수 있는 바와 같으

$$S(\mathbf{X}_u(p)) = -\mathbf{G}_u(p), \quad S(\mathbf{X}_v(p)) = -\mathbf{G}_v(p) \quad (3.33)$$

이므로  $\langle S(\mathbf{X}_u), \mathbf{X}_u \rangle$  등은 다음과 같이 얻어지기도 한다:

$$\langle S(\mathbf{X}_u), \mathbf{X}_u \rangle = \langle -\mathbf{G}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{G}, \mathbf{X}_{uu} \rangle = L, \quad (3.34)$$

$$\langle S(\mathbf{X}_v), \mathbf{X}_u \rangle = \langle -\mathbf{G}_v, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{G}, \mathbf{X}_{uv} \rangle = M, \quad (3.35)$$

$$\langle S(\mathbf{X}_u), \mathbf{X}_v \rangle = \langle -\mathbf{G}_u, \mathbf{X}_v \rangle = \langle \mathbf{G}, \mathbf{X}_{vu} \rangle = M, \quad (3.36)$$

$$\langle S(\mathbf{X}_v), \mathbf{X}_v \rangle = \langle -\mathbf{G}_v, \mathbf{X}_v \rangle = \langle \mathbf{G}, \mathbf{X}_{vv} \rangle = N. \quad (3.37)$$

(3.29)과 (3.34), (3.30)과 (3.35), (3.31)과 (3.36), (3.32)과 (3.37)은 같은

---

9) 나의  $a_{ij}$  는 [16]의  $-a_{ji}$ . do Carmo는 왜 그렇게  $a_{ij}$ 를 정의했을까?

식이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{array}{ll} a_{11}E + a_{12}F = L, & a_{11}F + a_{12}G = M, \\ a_{21}E + a_{22}F = M, & a_{21}F + a_{22}G = N. \end{array}$$

즉,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

여기서  $a_{ij}$ 를 얻을 수 있으며, 따라서 다음과 같이 증명이 끝난다.

$$\begin{bmatrix} S(\mathbf{X}_u) \\ S(\mathbf{X}_v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix}.$$



**예제 3.4.9.** 나선면  $\mathbf{X}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ 에 대하여  $S(a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v)$ 를 계산하라.

**풀이** 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u &= (\cos v, \sin v, 0), & \mathbf{X}_v &= (-u \sin v, u \cos v, 1), \\ \mathbf{X}_{uu} &= (0, 0, 0), & \mathbf{X}_{vv} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0), \\ \mathbf{X}_{uv} &= \mathbf{X}_{vu} = (-\sin v, \cos v, 0). \end{aligned}$$

따라서

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \frac{(\sin v, -\cos v, u)}{\sqrt{1+u^2}}.$$

그러므로

$$\begin{aligned} E &= 1, & F &= 0, & G &= 1 + u^2, \\ L &= 0, & M &= \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}}, & N &= 0. \end{aligned}$$

이리면

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S(\mathbf{X}_u) \\ S(\mathbf{X}_v) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1+u^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

즉

$$S(\mathbf{X}_u) = \frac{-1}{(1+u^2)^{3/2}} \mathbf{X}_v, \quad S(\mathbf{X}_v) = \frac{-1}{(1+u^2)^{1/2}} \mathbf{X}_u.$$

이제  $S$ 의 선형성에 의하여

$$S(a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v) = \frac{-b}{(1+u^2)^{1/2}} \mathbf{X}_u + \frac{-a}{(1+u^2)^{3/2}} \mathbf{X}_v.$$



**예 3.4.10.** 예제 3.4.9에서, 지도의 점  $(2, \pi)$ 는  $\mathbf{X}$ 에 의해 나선 면의 점  $P(-2, 0, \pi)$ 로 간다.  $\mathbf{X}_u(2, \pi) = (-1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{X}_v(2, \pi) = (0, -2, 1)$ 으로  $P$ 에서 곡면의 임의의 접벡터  $\mathbf{v}_P$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{v}_P = a(-1, 0, 0) + b(0, -2, 1) = (-a, -2b, b).$$

이제

$$\begin{aligned} S(-a, -2b, b) &= S(a(-1, 0, 0) + b(0, -2, 1)) \\ &= S(a \mathbf{X}_u(2, \pi) + b \mathbf{X}_v(2, \pi)) \\ &= \left( \frac{b}{\sqrt{5}}, \frac{2a}{5\sqrt{5}}, -\frac{a}{5\sqrt{5}} \right). \end{aligned}$$

**질문 3.4.11.**  $z = x^2 - y^2$ 의 점  $P(1, 1, 0)$ 에서  $\mathbf{v}_P = (1, 2, -2)$ 는 이 곡면에 접함을 보여라. 모양 연산자에 의한  $\mathbf{v}_P$ 의 이미지는 무엇인가?

이제까지의 추론을 행렬을 써서 생각해 보자. 모양 연산자  $S$ 는 행렬이 아니지만, 벡터 공간  $T_P S$ 의 기저가 정해지면  $S$ 는 행렬로 나타내어진다.

**보조정리 3.4.12.** 주어진 곡면의 기저가  $\mathcal{B} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 라고 하자. 그러면 모양 연산자  $S$ 의  $\mathcal{B}$ 에 대한 행렬은 다음과 같다.

$$[S]_{\mathcal{B}} = g_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{B}}, \quad g_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \quad A_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} S(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 & S(\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1 \\ S(\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 & S(\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}.$$

**증명**  $[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$  라 하고

$$S\mathbf{v}_1 = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2, \quad S\mathbf{v}_2 = \ell_1 \mathbf{v}_1 + \ell_2 \mathbf{v}_2 \quad (3.38)$$

라 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix}.$$

따라서  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{bmatrix}$ . 한편 식 (3.38)을  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  와 내적하여 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} S\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & S\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \\ S\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & S\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & \ell_1 \\ k_2 & \ell_2 \end{bmatrix}$$

따라서 결론이 성립한다. ■

이제 기저가  $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$  인 경우는 다음과 같다.

**보조정리 3.4.13.** 접평면의 기저  $\mathcal{B} := \{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$  에 대한  $S$ 의 행렬  $[S]_{\mathcal{B}}$  는 다음과 같다.

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = g^{-1} A. \quad (3.39)$$

**증명** 위 보조정리로부터 따라 나온다. ■

**참고 3.4.14.**  $S$ 는 대칭연산자지만 행렬  $[S]_{\mathcal{B}}$ 은 일반적으로 대칭행렬이 아님에 유의하라. 또한 이 행렬은 정리 3.4.8에 등장하는 행렬 그 자체가 아니라 그 행렬의 전치임에도 유의하라.

이 절의 내용에 대한 참고문헌 [19, 360 쪽], [26, 5 장].

### 3.5 모양 연산자와 곡률

이제 드디어 모양 연산자를 이용하여 곡면의 곡률을 공부할 때가 되었다. 먼저 법곡률에 대하여 알아보자.

**정의 3.5.1.**  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여 곡면의 점  $P$ 에서 비영 접벡터  $\mathbf{v}_P$  방향으로의 곡면의 법곡률  $\kappa_n$ 을 다음과 같이 정의한다. <sup>10)</sup>

$$\kappa_n(\mathbf{v}_P) := \frac{\langle \mathbf{v}_P, S(\mathbf{v}_P) \rangle}{\langle \mathbf{v}_P, \mathbf{v}_P \rangle}. \quad (3.40)$$

이 정의에서  $\mathbf{v}_P$ 는 단위벡터일 필요가 없다. <sup>11)</sup>

**정리 3.5.2.** 점  $P$ 에서의 비영 접벡터  $\mathbf{v}_P$ 와 모든  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 에 대해서 법곡률  $\kappa_n$ 은 다음을 만족한다.

$$\kappa_n(a\mathbf{v}_P) = \kappa_n(\mathbf{v}_P).$$

$a$ 가 음인 것도 허용됨에 주목하라.

10) 위 식이 임의의 속력을 가진 평면곡선의 곡률 식과 어떻게 직접적으로 연관되는지 알아보자. 식 (1.20)를 보라.

11) 이를 식 (3.24)과 비교하여 보아라.

**증명**  $S$ 가 선형 사상임을 떠올리면 다음 계산이 성립함을 쉽게 알 수 있을 것이다.

$$\kappa_n(a\mathbf{v}_P) = \frac{\langle S(a\mathbf{v}_P), a\mathbf{v}_P \rangle}{\langle a\mathbf{v}_P, a\mathbf{v}_P \rangle} = \frac{a^2 \langle S(\mathbf{v}_P), \mathbf{v}_P \rangle}{a^2 \langle \mathbf{v}_P, \mathbf{v}_P \rangle} = \frac{\langle S(\mathbf{v}_P), \mathbf{v}_P \rangle}{\langle \mathbf{v}_P, \mathbf{v}_P \rangle} = \kappa_n(\mathbf{v}_P).$$



**정리 3.5.3.**  $\kappa_n(\mathbf{v}_P)$ 는  $N_P$ 와  $\mathbf{v}_P$ 를 포함하는 평면으로 곡면을 잘랐을 때 나오는 단면 평면 곡선의 평면 곡선으로서의 유향 곡률, 또는 그것의 음이다.

**증명** 위 정리에 의해서  $\kappa_n(\mathbf{v}_P)$ 를 계산할 때  $|\mathbf{v}_P| = 1$ 로 생각해도 무관하다. 이때  $N_P$ 와  $\mathbf{v}_P$ 를 포함하는 평면으로 곡면을 잘랐을 때 나오는 단면 평면 곡선은  $\alpha(0) = P$ ,  $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}_P$ , 그리고 모든  $s$ 에 대하여  $|\dot{\alpha}(s)| \equiv 1$ 을 만족하는 곡선  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ 의 이미지로 주어진다고 할 수 있다. 이제  $\gamma$ 는  $\mathbf{X} \circ \gamma = \alpha$ 를 만족시키는 곡선이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\kappa_n(\mathbf{v}_P) &= \langle S(\mathbf{v}_P), \mathbf{v}_P \rangle \\ &= \langle S(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0) \rangle \\ &= \langle -(\mathbf{G} \circ \gamma)'(0), \dot{\alpha}(0) \rangle \\ &= \langle (\mathbf{G} \circ \gamma)(0), \ddot{\alpha}(0) \rangle \\ &= \langle N_P, \ddot{\alpha}(0) \rangle.\end{aligned}$$

$\mathbf{N}_P$ 의 길이가 1이기 때문에  $\langle \mathbf{N}_P, \ddot{\alpha}(0) \rangle$ 는 가속도  $\ddot{\alpha}(0)$ 의  $\mathbf{N}_P$  방향으로의 정사영의 크기다. 평면 곡선의 곡률의 의미를 생각해보면 원하는 결론이 얻어진다.



**질문 3.5.4.** 두 양수  $r, \rho$  (단  $r > \rho$ )에 대하여 원환면

$$\mathbf{X}(\theta, \phi) = ((r + \rho \cos \phi) \cos \theta, (r + \rho \cos \phi) \sin \theta, \rho \sin \phi)$$

의 모양 연산자를 계산하라. 즉  $S(a\mathbf{X}_\theta + b\mathbf{X}_\phi)$ 를 계산하라.

**질문 3.5.5.** 위에 주어진 원환면의 각 점에서의 법 곡률을 계산하라. 즉  $\kappa_n(a\mathbf{X}_\theta + b\mathbf{X}_\phi)$ 를 계산하라. <sup>12)</sup>

이제  $\kappa_n$ 의 최댓값을  $\kappa_M$ , 최솟값을  $\kappa_m$ 이라 하자.<sup>13)</sup> 이 장의 1절에서 예견한 바와 같이 곡면에 대한 곡률을 다음과 같이 정의한다.

**정의 3.5.6.**  $\kappa_M \cdot \kappa_m$ 을 가우스 곡률이라 하고  $K$ 로 나타낸다.  $\frac{1}{2}(\kappa_M + \kappa_m)$ 을 평균 곡률이라 하고  $H$ 로 나타낸다.

이제 이 곡률에 대하여 자세히 알아보자. 무엇보다도 주어진  $\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ 로부터  $\kappa_M$  와  $\kappa_m$ 을 알아내기는 쉽지 않아 보인다. 그

12) 과연 어떻게 풀 수 있을까?

13) 그런데  $\kappa_n$ 의 최댓값, 최솟값이 존재하기는 하는 건가? 다음 정리 3.5.7의 증명을 참조하라.

렇다면 가우스 곡률과 평균 곡률을 어떻게 계산할 수 있을까? 이를 위해 먼저 다음을 살핀다.

**정리 3.5.7.**  $\kappa_M$  와  $\kappa_m$  은  $S$ 의 고윳값이다.

**증명** 먼저  $\kappa_M$ ,  $\kappa_m$  이 존재함을 보이자. 0이 아닌 모든  $a$ 에 대하여  $\kappa_n(\mathbf{v}_P) = \kappa_n(a\mathbf{v}_P)$  이므로 일반성을 잃지 않고  $|\mathbf{v}_P| = 1$ 로 생각한다.  $P$ 점에서  $|\mathbf{v}_P| = 1$ 인 점들을 모두 모으면 원이 된다. 원은 옹골찬 집합<sup>14)</sup>이고, 옹골찬 집합에서의 연속함수의 이미지는 최댓값과 최솟값을 가진다.<sup>15)</sup> 그러므로  $\kappa_M$  와  $\kappa_m$  은 존재한다.

자, 이제  $e_1 \in T_P S$ 를  $\kappa_M$  가 생기는 방향의 단위 벡터라고 하자. 즉,  $\kappa_M = \kappa_n(e_1)$ ,  $|e_1| = 1$ . 그리고,  $e_2 \in T_P S$ 를  $e_1$ 에 수직인 두 단위 접벡터 중에서  $\{e_1, e_2, \mathbf{N}_P\}$ 가 양의 향을 가지게 되는 단위 벡터라 하자. 그러면 임의의 단위 접벡터  $\mathbf{v}_P$  는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{v}_P = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

---

14) compact set을 번역한 말임.

15) [24, 4장 4절] 참,  $\kappa_M$  와  $\kappa_m$  이 연속임을 언급하자.

그러므로

$$\begin{aligned}
 \kappa_n(\mathbf{v}_P) &= \langle S(\mathbf{v}_P), \mathbf{v}_P \rangle \\
 &= \langle S(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2), \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \rangle \\
 &= \langle \cos \theta S(\mathbf{e}_1) + \sin \theta S(\mathbf{e}_2), \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \rangle \\
 &= \cos^2 \theta \kappa_M + \sin \theta \cos \theta \langle S(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 \rangle \\
 &\quad + \sin \theta \cos \theta \langle S(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_1 \rangle + \sin^2 \theta \langle S(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 \rangle.
 \end{aligned}$$

이를  $\theta$ 의 함수로 보았을 때,  $\mathbf{e}_1$ 의 정의에 의해서,  $\theta = 0$  일 때 최댓값을 가진다.  
이때,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\theta} \kappa_n(\theta) &= -\sin 2\theta \kappa_M + \cos 2\theta (\langle S(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 \rangle \\
 &\quad + \langle S(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_1 \rangle) + \sin 2\theta \langle S(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 \rangle
 \end{aligned}$$

이므로

$$0 = \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \kappa_n(\theta) = \langle S(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 \rangle + \langle S(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_1 \rangle = 2 \langle S(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 \rangle.$$

따라서  $S(\mathbf{e}_1) \perp \mathbf{e}_2$  이므로,  $S(\mathbf{e}_1)$ 은  $\mathbf{e}_1$ 에 비례한다. 즉, 어떤  $k \in \mathbb{R}$ 에 대해  $S(\mathbf{e}_1) = k\mathbf{e}_1$ 이며  $\mathbf{e}_1$ 은  $S$ 의 고유 벡터다. 이 때,

$$\kappa_M = \langle S(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 \rangle = \langle k\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = k.$$

그러므로  $\kappa_M$ 는  $S$ 의 고윳값이다. 비슷한 방법으로  $\kappa_m$ 도  $S$ 의 고윳값이 됨을 증명할 수 있다. ■

**정리 3.5.8.**  $\kappa_M$  와  $\kappa_m$  이 다르다고 하자.  $e_1$  을  $\kappa_M$  가 생기는 방향,  $e_2$  를  $\kappa_m$  이 생기는 방향이라고 하면,  $e_1$  과  $e_2$  는 서로 수직이다.

**증명** 먼저  $\langle S(\mathbf{v}_P), \mathbf{w}_P \rangle = \langle \mathbf{v}_P, S(\mathbf{w}_P) \rangle$  임을 상기하라. 이제 다음을 살피자:

$$\langle S(e_1), e_2 \rangle = \langle e_1, S(e_2) \rangle = \langle e_1, \kappa_m e_2 \rangle = \kappa_m \langle e_1, e_2 \rangle,$$

$$\langle S(e_1), e_2 \rangle = \langle \kappa_M e_1, e_2 \rangle = \kappa_M \langle e_1, e_2 \rangle.$$

따라서  $(\kappa_M - \kappa_m) \langle e_1, e_2 \rangle = 0$ .  $\kappa_M \neq \kappa_m$  이므로  $e_1 \perp e_2$ . ■

만약  $\kappa_M = \kappa_m$  이면 모든 방향으로의 곡률이 같으며 따라서 이 경우에는  $e_1$  과  $e_2$  를 임의의 수직인 두 벡터로 잡으면 된다. 특별한 언급이 없는 경우  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $N$  이 양의 향을 가지게  $e_1$ ,  $e_2$  를 선택한다.

**따름정리 3.5.9.** 임의의 단위 벡터  $\mathbf{v}_P = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$  에 대하여

$$\kappa_n(\mathbf{v}_P) = \kappa_M \cos^2 \theta + \kappa_m \sin^2 \theta.$$

**증명** 임의의 단위 벡터  $\mathbf{v}_P = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$  에 대해

$$\begin{aligned} \kappa_n(\mathbf{v}_P) &= \cos^2 \theta \kappa_M + \cos \theta \sin \theta \langle S(e_1), e_2 \rangle \\ &\quad + \sin \theta \cos \theta \langle S(e_2), e_1 \rangle + \sin^2 \theta \kappa_m \end{aligned}$$

인데 여기에  $\langle S(e_1), e_2 \rangle = \langle S(e_2), e_1 \rangle$ ,  $S(e_1) \perp e_2$  를 적용하면 준식을 얻는다. ■

**보조정리 3.5.10.**  $\mathcal{B} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  를  $T_P S$  의 기저로 택하면  $S$  를 나타내는 행렬  $[S]_{\mathcal{B}}$  는 다음과 같다.

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \kappa_M & 0 \\ 0 & \kappa_m \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

**증명**  $S(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = aS(\mathbf{e}_1) + bS(\mathbf{e}_2) = a\kappa_M \mathbf{e}_1 + b\kappa_m \mathbf{e}_2$  로부터 따라 나온다. ■

이제 식 (3.39)와 더불어  $S$  를 나타내는 행렬 두 가지를 알아 보았다. 따라서 다음이 성립한다.

**정리 3.5.11.**

$$\kappa_M \cdot \kappa_m = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad \kappa_M + \kappa_m = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

**증명** 선형 사상의 행렬식과 대각합은 불변량이라는 사실과 식 (3.39), (3.41) 으로부터 따라 나온다. ■

이제 곡률을 생각할 때  $\kappa_M$  와  $\kappa_m$  의 평균을 생각하면서 기하 평균인  $\sqrt{\kappa_M \kappa_m}$  대신  $\kappa_M \kappa_m$  를 생각하는 이유를 말할 수 있다. 벡터 공간  $V$  에서  $V$  로 가는 선형 사상은  $V$  의 기저를 고정했을 때 행렬로 나타난다. 이때 기저를 바꾸면

행렬은 변해도 그 행렬식과 대각합은 변하지 않는다. 즉 가우스 곡률  $K = \kappa_M \kappa_m$ 는 모양 연산자의 불변량이다.

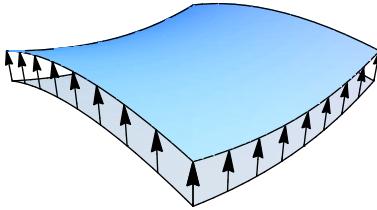
**예 3.5.12.** 어떤 곡면  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 에 대해  $H$ 와  $K$ 를 계산했는데  $H = 0, K = 1$ 이 나왔다면 이는 잘못된 계산이다. 왜냐하면  $H = 0$ 으로부터  $\kappa_1 = -\kappa_2$ 가 되어  $K = -\kappa_1 \kappa_2 = -\kappa_1^2 \leq 0$ 기 때문이다.

### 3.6 평균 곡률의 의미

이 절에서는 평균 곡률의 기하적 의미에 대하여 알아보고자 하는데 먼저 약간의 새로운 개념과 계산을 도입할 필요가 있다. 먼저 곡면 조각  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$  와 함수  $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ 를 고정한다. 이때

$$\mathbf{X}^\cdot(\cdot, \cdot) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad \mathbf{X}^t(u, v) := \mathbf{X}(u, v) + t \cdot \varphi(u, v) \cdot \mathbf{G}(u, v)$$

를  $\mathbf{X}$ 의 수직 변형(normal variation)이라 부른다.  $\varepsilon$ 이 충분히 작은 경우  $t$  를 특정한 값으로 고정하면  $\mathbf{X}^t$ 는  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에서  $\mathbb{E}^3$ 로 가는 곡면 조각이 된다.



〈그림 3.10〉

특별히  $\varphi(u, v) \equiv 1$ 인 경우  $\mathbf{X}^t$ 를  $\mathbf{X}$ 에 평행한 곡면이라 한다.

$\mathbf{X}^t$ 의 넓이를  $A(t)$ 라 하자. 다음이 성립한다.

## 보조정리 3.6.1.

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) = -2 \iint_{\mathcal{U}} \varphi(u, v) H(u, v) \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F^2(u, v)} dudv.$$

여기서  $E, F, G$ 는 정의 3.3.5에 정의된 그  $E, F, G$ 다.

**증명** 편의상  $(u, v)$ 를 생략하겠다. 먼저 다음을 살피자.

$$A(t) = \iint_{\mathcal{U}} |\mathbf{X}_u^t \times \mathbf{X}_v^t| dudv, \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A(t) = \iint_{\mathcal{U}} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} |\mathbf{X}_u^t \times \mathbf{X}_v^t| dudv.$$

식 (3.28)과 (3.33)을 이용하면

$$\mathbf{X}_u^t = \mathbf{X}_u + t\varphi \mathbf{G}_u + t\varphi_u \mathbf{G} = a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v + c\mathbf{G},$$

$$\mathbf{X}_v^t = \mathbf{X}_v + t\varphi \mathbf{G}_v + t\varphi_v \mathbf{G} = d\mathbf{X}_u + e\mathbf{X}_v + f\mathbf{G}.$$

단

$$a := 1 - t\varphi a_{11}, \quad b := -t\varphi a_{12}, \quad c := t\varphi_u,$$

$$d := -t\varphi a_{21}, \quad e := 1 - t\varphi a_{22}, \quad f := t\varphi_v.$$

따라서

$$\mathbf{X}_u^t \times \mathbf{X}_v^t = \mathcal{A}(t) \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v + \mathcal{B}(t) \mathbf{G} \times \mathbf{X}_u + \mathcal{C}(t) \mathbf{G} \times \mathbf{X}_v.$$

단

$$\mathcal{A}(t) := \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \quad \mathcal{B}(t) := - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \quad \mathcal{C}(t) := - \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}.$$

그러므로

$$\begin{aligned}
 |\boldsymbol{X}_u^t \times \boldsymbol{X}_v^t|^2 &= |\mathcal{A}(\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v)|^2 + |\mathcal{B}\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{X}_u + \mathcal{C}\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{X}_v|^2 \\
 &= \mathcal{A}^2|\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v|^2 + \mathcal{B}^2|\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{X}_u|^2 \\
 &\quad + 2\mathcal{BC}(\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{X}_u) \cdot (\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{X}_v) + \mathcal{C}^2|\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{X}_v|^2 \\
 &= \mathcal{A}^2(EG - F^2) + \mathcal{B}^2E + 2\mathcal{BC}F + \mathcal{C}^2G.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

첫 번째 등호가 성립하는 이유는  $\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v$ 는 곡면에 수직이고  $\mathcal{B}\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{X}_u + \mathcal{C}\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{X}_v$ 는 곡면에 접하여 서로 수직이기 때문이다. 이제 (3.42)를  $t$ 에 대하여 편미분한 후  $t = 0$ 에서의 값을 취하고자 한다. 간단한 계산에 의하여

$$\mathcal{A}(t) = 1 - t\varphi(a_{11} + a_{22}) + t^2\varphi^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 1 - 2t\varphi H + t^2\varphi^2K$$

이므로

$$\mathcal{A}(0) = 1, \quad \mathcal{A}'(0) = -2\varphi H, \quad \mathcal{A}''(0) = 2\varphi^2K.$$

그리고 정의에 의하여  $\mathcal{B}(0) = \mathcal{C}(0) = 0$ . 따라서 (3.42)를 미분하면

$$2|\boldsymbol{X}_u^0 \times \boldsymbol{X}_v^0| \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} |\boldsymbol{X}_u^t \times \boldsymbol{X}_v^t| = -4\varphi H(EG - F^2).$$

이로부터 결론이 성립함을 알 수 있다. ■

이제 위 수직 변형이 조금 특수한 경우, 즉 모든  $t$ 에 대하여 이 곡면 조각  $\boldsymbol{X}^t$ 의 둘레가 원 곡면 조각  $\boldsymbol{X}$ 의 둘레와 같은 경우를 생각하자. 이는 함수  $\varphi$ 가 다음과 같은 제약 조건을 만족시킨다는 것으로 대신할 수 있다.

$$\text{모든 } (u, v) \in \partial\mathcal{U} \text{에 대해서 } \varphi(u, v) = 0. \tag{3.43}$$

이런 변형은 철사를 적당한 폐곡선으로 말아서 비눗물에 집어넣었다 빼 비눗막을 만든 살며시 후 하고 숨을 불어 비누막을 아주 조금 변형시켜보는 놀이에서 찾아볼 수 있다.<sup>16)</sup>

이제 다음을 살펴보자.

**정리 3.6.2.** 만약  $\mathbf{X}$ 의 이미지의 넓이가 임의의  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 와 (3.43)를 만족시키는 모든  $\varphi$ 에 대하여  $\mathbf{X}^t$ 의 이미지의 넓이보다 항상 작거나 같으면  $\mathbf{X}$ 의 평균 곡률은 어디에서나 0이다.

우리가 어렸을 적 가지고 놀던 비누막은 이 정리의 가정을 만족시킨다. 따라서 비누막의 평균 곡률은 어느 점에서나 0이다.

**증명** 보조정리 3.6.1에 의하면 조건을 만족하는 모든  $\varphi$ 에 대하여

$$\iint_U \varphi(u, v) H(u, v) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} dudv = 0 \quad (3.44)$$

이어야 한다.

---

16) 숨을 세게 불어넣으면 비눗방울이 만들어지는데 이에 대한 수학적 분석은 이 절의 내용과 비슷하지만 조금은 다르다.

결론의 주장과는 달리 어떤 한 점  $(u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ 에서 평균 곡률이 양수라고 하자. 즉,  $H(u_0, v_0) > 0$ 고 하자. 그러면, 함수

$$(u, v) \mapsto H(u, v) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}$$

이 연속이기 때문에, 다음과 같은 성질을 만족하는 두 양수  $\epsilon$ 과  $\delta$ 가 존재한다:  $B_\epsilon(u_0, v_0)$ 은 중심이  $(u_0, v_0)$ 이고 반지름이  $\epsilon$ 인 원반이라 할 때,  $B_\epsilon(u_0, v_0) \subset \mathcal{U}$ 이고

$$(u, v) \in B_\epsilon(u_0, v_0) \text{이면 } H(u, v) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} > \delta.$$

이때 다음과 같은 함수  $\varphi$ 를 찾을 수 있다.

$$\begin{aligned} B_{\epsilon/2}(u_0, v_0) \text{에서는} & \quad \varphi = 1, \\ B_\epsilon(u_0, v_0) \setminus B_{\epsilon/2}(u_0, v_0) \text{에서는} & \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \\ \mathcal{U} \setminus B_\epsilon(u_0, v_0) \text{에서는} & \quad \varphi = 0. \end{aligned}$$

그러면

$$\begin{aligned} A &:= \iint_{B_{\epsilon/2}(u_0, v_0)} \varphi H \sqrt{EG - F^2} dudv, \\ B &:= \iint_{B_\epsilon(u_0, v_0) \setminus B_{\epsilon/2}(u_0, v_0)} \varphi H \sqrt{EG - F^2} dudv, \\ C &:= \iint_{\mathcal{U} \setminus B_\epsilon(u_0, v_0)} \varphi H \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

라 하면

$$C = 0, \quad B \geq 0, \quad A \geq \frac{1}{2}\pi\delta\epsilon^2 > 0.$$

따라서

$$\iint_U \varphi H \sqrt{EG - F^2} dudv = A + B + C > 0.$$

이는 (3.44)에 모순되므로  $H(u_0, v_0)$ 는 양수가 될 수 없다. 마찬가지로 음수도 될 수 없다. 따라서 0이어야 한다. ■

이 정리의 내용에 착안한 다음 정의를 먼저 알아보자.

**정의 3.6.3.** 평균 곡률이 모든 점에서 0인 곡면을 극소 곡면(極小曲面 minimal surface)이라 한다.

**질문 3.6.4.** 평균 곡률이 모든 점에서 0인 곡면을 최소 곡면(最小曲面)이라 하지 않고 극소 곡면이라 한 까닭에 대해 생각해 보라.

**극소 곡면의 예:** 자, 이제 어떠한 극소 곡면이 있는지 살펴보자. 예를 들어,

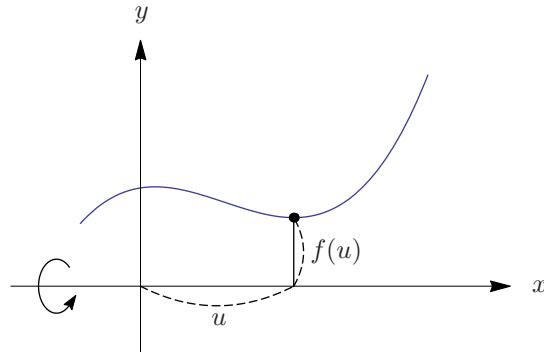
$$\mathbf{X}(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - vu^2, u^2 - v^2 \right) \quad (3.45)$$

은 엔네퍼 (Alfred Enneper 1830 - 1885)의 곡면이라 불리는 극소 곡면이며 1864년에 발견되었다. 이것이 극소 곡면임을 보이는 것은 어렵지 않다. 그러나 우리가 진지하게 생각해 보아야 할 질문은 ‘엔네퍼는 어떻게 해서 이 곡면을 발견하게 되었을까?’ 하는 것이다. 모든 학문에 대하여 마찬가지이겠지만 수학에서도 아이디어의 역사적 흐름을 아는 것은 중요한 일이다. 세상에 아

무런 선행 결과 없이 하늘에서 뚝 떨어지듯 나타나는 이론은 없는 것이다. 이 곡면의 모양과 발견과정에 대한 자세한 소개는 ‘양성덕의 미분기하강의 3편’에서 다루도록 하겠다.

## 3.7 회전 극소 곡면

이 절에서는 회전 곡면이면서 극소 곡면인 곡면에 대해서 알아 보자.<sup>17)</sup>



〈그림 3.11〉

$xz$ -평면에 있는  $x = f(z)$ 의 그래프를  $z$ 축에 대하여 회전시키면 곡면 조각

$$\mathbf{X}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u) \quad (3.46)$$

가 얻어진다. 일반적으로 모든 회전 곡면은 극소적으로 이렇게 쓸 수 있다.<sup>18)</sup>  
이 곡면이 극소 곡면이 되기 위한 조건이 무엇인지 구해 보도록 하자.

17) 그림을 바꿔야 한다.  $x, y, z$ 를  $z, x, y$ 로 바꾼 탓이다.

18) 이렇게 쓸 수 없는 회전 곡면은 무엇인가?

$f$ 가 만족시키는 미분 방정식 유도 1    그러기 위해선 이 곡면의 평균 곡률이  $f$ 에 관하여 어떻게 표현되는지 알아야 하는데 간단한 계산에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_u &= (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, 1), \\ \mathbf{X}_v &= (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \\ \mathbf{X}_{uu} &= (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, 0), \\ \mathbf{X}_{uv} &= (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0), \\ \mathbf{X}_{vv} &= (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, 0).\end{aligned}$$

이로부터 제2 기본 형식은 다음과 같음을 얻는다.

$$E = 1 + (f'(u))^2, \quad F = 0, \quad G = f^2(u). \quad (3.47)$$

이제  $f(u) > 0$ 을 가정하면<sup>19), 20)</sup>

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v &= (-\cos v \cdot f(u), -\sin v \cdot f(u), f(u)f'(u)), \\ |\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v| &= \sqrt{(f(u)(f'(u))^2 + f^2(u))} = |f(u)|\sqrt{1 + (f'(u))^2}, \\ \mathbf{G} &= \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \left( \frac{-\cos v}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}, \frac{-\sin v}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}, \frac{f'(u)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}} \right).\end{aligned}$$

이로부터 제2 기본 형식을 구하면

$$L = \frac{-f''(u)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f(u)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}. \quad (3.48)$$

19) 아래도 되는 이유는?

20) 아래 계산된  $\mathbf{G}$ 는 이 회전곡면의 안쪽을 향하는가, 바깥쪽을 향하는가?

위에서 구한 제1, 2 기본 형식을 이용하여

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = 0$$

을 정리해 보면

$$1 + f'(u)^2 = f(u)f''(u) \quad (3.49)$$

을 얻게 된다.

$f$ 가 만족시키는 미분 방정식 유도 2 앞에서와 같이 단순한 계산에 의해서 가 아니라 기하적 아이디어를 이용하여 식 (3.49)을 유도할 수도 있다. 회전축, 즉  $z$ 축, 을 포함하는 평면  $\Pi$ 로 회전 곡면을 잘랐을 때 생기는 곡선이  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{E}^3$ 로 매개된다 하자. 일반성을 잃지 않고  $\Pi$ 는  $xz$ -평면,  $\alpha(t) = (f(t), 0, t)$ 으로 생각해도 된다. 그러면 정의에 의하여

$$S(\dot{\alpha}(0)) = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N \circ \alpha$$

그런데  $N \circ \alpha$ 는  $\Pi$ 에 있는 곡선이므로  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} N \circ \alpha$  또한 이 평면  $\Pi$ 에 있다. 따라서  $S(\dot{\alpha}(0))$ 은 평면  $\Pi$ 에 있다. 그런데  $S(\dot{\alpha}(0))$ 은 접평면에도 들어 있으므로  $S(\dot{\alpha}(0))$ 는  $\dot{\alpha}(0)$ 에 평행하다. 따라서 어떤 상수  $\kappa$ 에 대하여  $S(\dot{\alpha}(0)) = \kappa \cdot \dot{\alpha}(0)$ . 즉  $\dot{\alpha}(0)$ 은  $S$ 의 고유 벡터이며  $\kappa$ 는  $S$ 의 고윳값이다. 따라서  $\kappa$ 는  $\kappa_M$  또는  $\kappa_m$ 이다. 이제 평면 곡선의 유향 곡률의 식을 이용하면  $\kappa_m = +\frac{f''}{(1+(f')^2)^{\frac{3}{2}}}$  또는  $\kappa_m = -\frac{f''}{(1+(f')^2)^{\frac{3}{2}}}$ 임을 알 수 있다. 이때  $N$ 이 이 회전 곡면의 내부로 향하는

것을 감안하여 부호를 정하면

$$\kappa_m = -\frac{f''}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

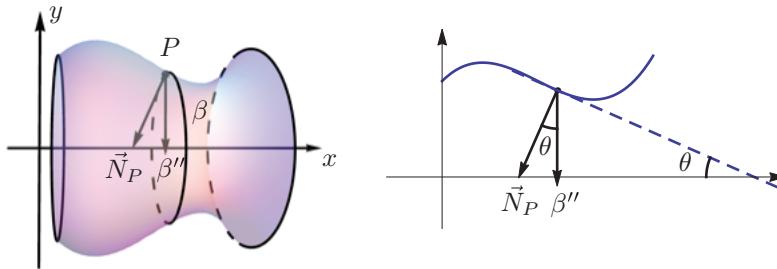
임을 알 수 있다.

이제  $\alpha(0)$ 을 지나며 회전축에 수직인 평면으로 곡면을 자르면 원이 얻어진다. 이 원을 이미지로 가지는 단위 속력 곡선을  $\beta$ 라 하자. 단  $\beta(0) = \alpha(0)$ . 그러면

$$\kappa_M = \langle S(\beta'(0)), \beta'(0) \rangle.$$

이제  $\beta''(0)$ 과  $N_P$  사이의 각을  $\theta$ 라 할 때

$$\kappa_M = \langle N_P, \beta''(0) \rangle = |\beta''(0)| \cos \theta. \quad (3.50)$$



〈그림 3.12〉

한편  $\theta$ 는 곡선의 접선이 양의  $z$ 축과 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\tan \theta = f'(z)$$

이 되고 따라서

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}}.$$

또한  $|\beta''(0)| = \frac{1}{f(z)}$  이므로 결국

$$\kappa_M = \frac{1}{f(z)} \frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}}.$$

따라서

$$H = \frac{\kappa_m + \kappa_M}{2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{f''}{(1 + (f')^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{(1 + (f')^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

그러므로  $H \equiv 0$  이면 위에서 구한 식 (3.49)을 얻게 된다.

**미분 방정식의 풀이** 이제 미분 방정식 (3.49)를 풀어 보자. 먼저 (3.49)로부터 다음이 성립함은 쉽게 알 수 있다.

$$\frac{1}{2} \int \frac{2(f') \cdot (f'')}{1 + (f')^2} dz = \int \frac{f'}{f} dz.$$

우리는  $f$ 가 양임을 가정하고 있으므로  $|f| = f$ . 따라서 어떤 양의 상수  $c$ 에 대하여

$$\frac{1}{2} \ln(1 + (f')^2) = \ln(cf),$$

$$1 + (f')^2 = c^2 f^2,$$

$$(f')^2 = c^2 f^2 - 1,$$

$$f' = \pm \sqrt{c^2 f^2 - 1}.$$

이 된다. 특별히  $f$  가 증가하는 부분에서는 ( $f' > 0$ )  $\frac{df}{dz} = \sqrt{c^2 f^2 - 1}$  이므로 변수 분리해서 미분 방정식을 풀 수 있다. <sup>21)</sup>

$$\int \frac{df}{\sqrt{c^2 f^2 - 1}} = \int dz$$

이를 적분하기 위해서  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} u$  을 이용하자.  $u = cf$  인 경우이므로 이를 계산하면

$$\frac{1}{c} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = z + D$$

$$\frac{1}{c} \cosh^{-1} cf = z + D$$

$$\cosh^{-1} cf = cz + D'$$

$$cf(z) = \cosh(cz + D')$$

을 얻는다. 이는 현수선(懸垂線 catenary)의 식이다. 따라서 위에서 구한 곡면을 현수면(懸垂面 catenoid)이라 부른다.

여기서  $x$  축에 따라 움직이는 평행 이동을 통하여  $D'$  을 0 으로 해도 된다. 그러면 우리가 구한 곡면의 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{X}(u, v) = \left( cf \left( \frac{u}{c} \right) \cos v, cf \left( \frac{u}{c} \right) \sin v, u \right), \quad f(z) := \cosh z.$$

여기서  $c = 1$  로 생각해도 되는데 그 이유는 다음 정리 덕분이다.

21)  $f' < 0$  면 어떻게 되는가?

정리 3.7.1. 극소 곡면을 등비 변환에 의해 변화시켜도 여전히 극소 곡면이다.

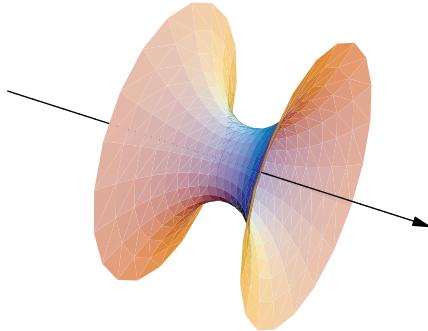
여기서  $(0, 0, 0)$ 에 대한 등비 변환이란 공간의 임의의 점  $(x, y, z)$ 를  $(dx, dy, dz)$ 로 보내는 변환을 말한다. 단  $d$ 는 임의의 양의 상수다.

**증명** 독자에게 맡긴다. ■

정리 3.7.2. 회전극소곡면은 평면이나 현수면

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \quad (3.51)$$

을 평행이동, 회전이동, 대칭이동, 그리고 등비변환으로 변환시킨 곡면이다.

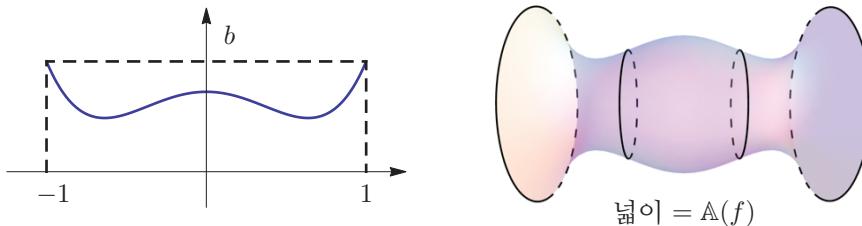


〈그림 3.13〉

참고 3.7.3. 임의의 현수선을 회전시켰을 때 반드시 극소 곡면이 되는 것은 아니다. 현수선 중에 위 식처럼 생긴 식을 만족시키는 현수선을 회전시켰을 때 현수면이 된다. 회전면 중에서 극소 곡면이 되는 것은 현수면과 평면 밖에는 없다.

질문 3.7.4. 구간  $[-1, 1]$ 에서 정의되고 1에서의 함숫값이  $b$ ,  $-1$ 에서의 함숫값이  $b$ 인, 그리고 2번 미분 가능하고 그 이계 도함수가 연속인 함수들의 집합을  $\mathbb{F}$ 라 하자. 즉,

$$\mathbb{F} = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(-1) = f(1) = b\}. \quad \text{단 } b > 0.$$



〈그림 3.14〉

$\mathbb{F}$ 의 한 원소  $f$ 의 그래프를  $x$ 축 주위로 회전시켜 얻어진 회전 곡면의 넓이를  $A(f)$ 라고 하면  $A$ 는  $\mathbb{F}$ 에서  $\mathbb{R}$ 로 가는 함수가 된다. 이때, 어떤  $g \in \mathbb{F}$ 가 있어서 다른 어떤  $f \in \mathbb{F}$ 에 대해서도  $A(g) \leq A(f)$  이면  $g$ 는 현수면의 일부임을 보여라.

질문 3.7.5. (3.1)로 주어진 나선면도 극소 곡면임을 보여라.

질문 3.7.6. 현수선이란 이름의 뜻을 조사하여라.

질문 3.7.7. 0이 아닌 상수  $H$ 에 대하여 모든 점에서 평균 곡률이  $H$ 인 회전 곡면은 어떤 것들이 있을까? 일단 구와 실린더를 생각할 수 있는데 이것 말고도 어떤 것들이 있을까?<sup>22)</sup>

---

22) 답 : unduloid, nodoid. 이 곡면들의 모선은 undulary, nodary라고 불리는데 타원이나 쌍곡선을 굴렸을 때 한 초점의 자취가 그리는 곡선이다.

## 3.8 셔역의 극소 곡면

이 절에서는  $z = f(x) + g(y)$  꼴 함수의 그래프로 주어지는 극소 곡면에 대해 알아보자. 이런 극소 곡면은 셔역(Heinrich Ferdinand Scherk, 1798 - 1885)이라는 사람이 1834년에 처음으로 다루었다.

먼저 다음 정리를 살펴보자.

**정리 3.8.1.** 이변수 함수  $z = h(x, y)$ 의 그래프로 주어지는 곡면의 평균 곡률  $H$ 는 다음과 같다.

$$H = \frac{h_{xx}(1+h_y^2) - 2h_xh_yh_{xy} + h_{yy}(1+h_x^2)}{2(\sqrt{1+h_x^2+h_y^2})^3}.$$

**증명**  $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, h(u, v))$  라 놓고 부지런히 계산하면 된다. ■

위와 같이 주어진 곡면의 가우스 곡률의 식은 어떻게 되는지 계산하여 보아라. 위와 같이 함수의 그래프로 곡면이 주어질 때  $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, h(u, v))$ 를 동주(Gaspard Monge, 1746 - 1818) 조각이라 한다.

위의 정리를 받아 들인 후  $z = f(x) + g(y)$  꼴의 극소 곡면을 구해 보자.  $f$  와

$g$ 가 만족시켜야 하는 식은

$$\begin{aligned} 0 &= h_{xx}(1 + h_y^2) - 2h_x h_y h_{xy} + h_{yy}(1 + h_x^2) \\ &= f''(1 + (g')^2) - 2f' \cdot g' \cdot 0 + g''(1 + (f')^2) \\ &= f''(1 + (g')^2) + g''(1 + (f')^2) \end{aligned}$$

이다. 변수 분리법을 이용하면

$$-\frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} = \frac{g''(y)}{1 + g'(y)^2} = C \quad (\text{단, } C \text{는 임의의 상수}),$$

즉

$$\frac{g''(y)}{1 + g'(y)^2} = C, \tag{3.52}$$

$$\frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} = -C \tag{3.53}$$

가 얻어진다.  $C = 0$ 이면  $f$ 와  $g$ 는 아핀 함수<sup>23)</sup>가 되며 따라서  $f(x) + g(y)$ 의 그래프는 평면이다.

$C \neq 0$ 이라고 하자. 식 (3.52)를 적분하면 다음이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(g'(y)) &= Cy + D, \\ g'(y) &= \tan(Cy + D), \\ g(y) &= -\frac{1}{C} \ln [\cos(Cy + D)] + E. \end{aligned}$$

---

23) 선형 함수가 아니다.

단,  $D$ 와  $E$ 는 임의의 상수다.

$f(x)$ 는  $C$  대신에  $-C$ 를 쓰는 것이므로

$$f(x) = \frac{1}{C} \ln [\cos(-Cx + F)] + G \quad (\text{단, } F, G \text{는 임의의 상수}).$$

따라서

$$h(x, y) = f(x) + g(y) = \frac{1}{C} \ln \frac{\cos(-Cx + F)}{\cos(Cy + D)} + E + G.$$

평행 이동을 이용하여  $D = E = F = G = 0$ 이라 할 수 있는데 그러면 곡면의 식은  $Cz = \ln(\frac{\cos Cx}{\cos Cy})$ 가 된다. 이제 정리 3.7.1에 의하여  $C = 1$ 이라 할 수 있으므로

$$z = \ln \frac{\cos x}{\cos y} \tag{3.54}$$

를 얻는다. 그런데  $\ln$  함수는 양수에 대해서만 정의되므로 이 함수가 정의되는  $xy$ -평면의 영역은  $\frac{\cos x}{\cos y} > 0$ 인 영역이다.

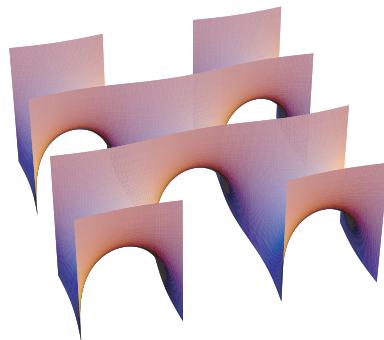
**질문 3.8.2.**  $\frac{\cos x}{\cos y} > 0$ 인 영역을 나타내 보아라.

**질문 3.8.3.** 식

$$z = \ln \cos x - \ln \cos y \tag{3.55}$$

의 그래프와 식 (3.54)의 그래프는 같은가, 다른가?

**질문 3.8.4.** 정확히 말하자면 식 (3.54)는  $z = f(x) + g(y)$  꼴의 함수가 아니다. 그럼에도 불구하고 (3.55)이 아닌 식 (3.54)으로 답이 주어진 이유가 무엇인가?



〈그림 3.15〉

식 (3.54)의 그래프를 직접 그려보면 한가지 재미있는 현상을 발견하게 된다. 예를 들어  $(x, y) = (\pi/2, \pi/2)$  근처에서 그래프가 어떻게 생겼는지 생각해 보자. 특히  $(x, y) \rightarrow (\pi/2+, \pi/2+)$  면  $z$ 의 값이 어떻게 되는지 생각해 보면  $(x, y)$  가 어떻게  $(\pi/2, \pi/2)$ 에 접근하는가에 따라 그 극한이 달라짐을 알 수 있다. 그래프를 잘 분석해 보면  $z$ 축 전체가 곡면에 포함되어 있음을 알 수 있다. 그런데  $z$  축은 함수의 그래프에는 포함되지 않으므로 사실 식 (3.54)의 그래프는 우리가 보고 있는 곡면의 일부만을 나타내고 있음을 알 수 있다. 곡면 전체를 나타내는 식을 알려면 (3.61)을 참조하라. 엔네퍼-바이어슈트라스 표현 공식이라는 것을 이용하면 이 곡면에 대하여 많은 흥미로운 사실들을 알 수 있게 되는데 거기에 대해선 양성덕의 미분기하강의 3편에서 다룰 예정이다.

### 3.9 가우스 곡률의 의미

이 절에서는 가우스 곡률  $K$ 의 기하적 의미에 대하여 알아보자. 먼저 두 조그만 양수  $\Delta u$ 와  $\Delta v$ 에 대하여  $\mathcal{U}$ 에 있는 직사각형

$$\square := [u, u + \Delta u] \times [v, v + \Delta v]$$

를 생각하라. 그러면 선형 근사에 의하여

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &:= \mathbf{X}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{X}(u_0, v_0) \simeq \mathbf{X}_v(u_0, v_0)\Delta v, \\ \overrightarrow{OB} &:= \mathbf{X}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{X}(u_0, v_0) \simeq \mathbf{X}_u(u_0, v_0)\Delta u.\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathbf{X}[\square]\text{의 넓이} &\simeq |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| \\ &\simeq |\mathbf{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{X}_v(u_0, v_0)|\Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

비슷한 추론을 통하여<sup>24)</sup>

$$\mathbf{G}[\square]\text{의 넓이} \simeq |\mathbf{G}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{G}_v(u_0, v_0)|\Delta u\Delta v.$$

여기서 다음을 떠올리자.

$$\mathbf{G}_u = -S(\mathbf{X}_u), \quad \mathbf{G}_v = -S(\mathbf{X}_v).$$

---

24)  $\mathbf{G}$ 는 일반적으로는 곡면 조각이 아니지만 아래 추론은 여전히 유효하다.

따라서,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_u \\ \mathbf{G}_v \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} S(\mathbf{X}_u) \\ S(\mathbf{X}_v) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} LG - MF & -LF + ME \\ MG - NF & -MF + NE \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_u \times \mathbf{G}_v &= \frac{LNEG + M^2F^2 - NLF^2 - M^2EG}{(EG - F^2)^2} \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v. \end{aligned}$$

이것으로부터 다음을 얻는다.

**보조정리 3.9.1.**

$$\mathbf{G}_u \times \mathbf{G}_v = K \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v. \quad (3.56)$$

**따름정리 3.9.2.**  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in M_p$  가 양의 향을 가지는 임의의 기저면

$$K = \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}_u \times \mathbf{G}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \frac{\mathbf{G} \cdot S(\mathbf{v}_1) \times S(\mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}.$$

**증명** 첫 번째 등호가 성립함은 (3.56)에  $\mathbf{G}$ 를 내적함으로써 알 수 있다. 이제  $S\mathbf{X}_i = -\mathbf{G}_i$  이므로

$$K = \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}_u \times \mathbf{G}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \frac{\mathbf{G} \cdot S(\mathbf{X}_u) \times S(\mathbf{X}_v)}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}.$$

이제 다음을 만족시키는  $a_{ij}$  가 존재한다.

$$\mathbf{X}_u = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{X}_v = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2.$$

그러면

$$\begin{aligned} S(\mathbf{X}_u) \times S(\mathbf{X}_v) &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})S(\mathbf{v}_1) \times S(\mathbf{v}_2), \\ \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

그런데  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  가  $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$  와 같은 향을 가지므로  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ . 따라서 두 번째 등호도 성립한다. ■

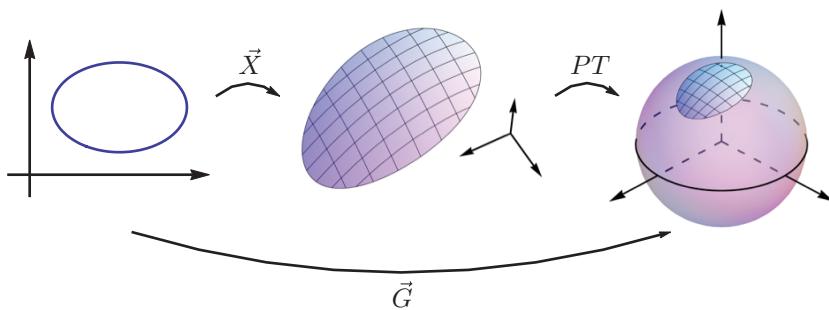
이로부터 다음을 얻는다.

$$\lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ \Delta v \rightarrow 0}} \frac{\mathbf{G}[\square] \text{의 넓이}}{\mathbf{X}[\square] \text{의 넓이}} = \frac{|\mathbf{G}_u(p) \times \mathbf{G}_v(p)|}{|\mathbf{X}_u(p) \times \mathbf{X}_v(p)|} = |K(P)|.$$

이 식이 말하는 바는, 한 곡면 조각의 가우스 사상에 의한 이미지  $\mathbf{G}[\square]$ 의 넓이와 곡면 조각  $\mathbf{X}[\square]$ 의 넓이의 비의 극한이 가우스 곡률의 절댓값이라는 것이다.

그럼  $K(P)$ 의 부호는 무엇을 말하는가? 예를 들어  $K(P)$ 의 부호가 +면,  $K(P) = \kappa_M \kappa_m$  이므로,  $\kappa_M$  와  $\kappa_m$  은 같은 부호를 가지며 따라서 곡면은 어느  $\mathbf{v}_P \in T_P S$  를 따라가도  $\mathbf{N}_P$  에 대해 같은 방향으로 휘어있다. 즉, 국소적으로 곡면은 점  $P$ 에서의 접평면의 한 쪽에 있다는 것이다.

이와 같이 가우스 곡률의 부호를 이용하여 곡면의 점을 다음과 같이 분류할 수 있다.



〈그림 3.16〉

- 타원점(elliptic point) : 이는  $K(P) > 0$ 인 점  $P$ 를 말한다.
- 쌍곡점(hyperbolic point) : 이는  $K(P) < 0$ 인 점  $P$ 를 말한다.
- 포물점(parabolic point) : 이는  $K(P) = 0$ 이지만  $\kappa_M(P)$ 와  $\kappa_m(P)$  중 하나는 0이 아닌 점  $P$ 를 말한다.
- 평면점(planar point) : 이는  $K(P) = 0$ 이고  $\kappa_M(P) = \kappa_m(P) = 0$ 인 점  $P$ 를 말한다.

**예 3.9.3.** 반지름이  $a$ 인 구는 모든 점에서  $K(P) = \frac{1}{a^2} > 0$ . 이 계산을 할 때 수직 벡터를  $\mathbf{N}_P$  혹은  $-\mathbf{N}_P$ 으로 잡아도 무방함을 이해하라. 따라서 구의 모든 점은 타원점이다.

**예 3.9.4.** 곡면  $z = xy$ 의  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 에서  $K$ 는 음수다. 이때 수직벡터는 위로 향하는 것을 취하든 아래로 향하는 것을 취하든 상관없다. 따라서  $(0, 0, 0)$ 은 이 곡면의 쌍곡점이다.

위 분류와는 조금 다른 관점에서 바라보는 다음과 같은 분류도 있다.

- $\kappa_M(P) = \kappa_m(P)$ 인 점  $P$ 를 배꼽점(umbilical point)이라 한다.

평면이나 구면의 모든 점은 배꼽점이다. 그런데 그 역도 성립한다.

**정리 3.9.5.** 어떤 연결된 곡면의 모든 점이 배꼽점이면 그 곡면은 평면의 일부거나 구면의 일부다.

증명은 인터넷이나 여러 교재, 예를 들어 [14, 명제 6.5]에서 찾아볼 수 있다. 이 정리를 이용하여 ‘닫혀있는 항등 평균 곡률 곡면은 구 뿐’(호프 정리 Hopf Theorem)임을 보일 수 있다.

**질문 3.9.6.** 평면과 실린더의 가우스 곡률이 0임을 이 절의 내용을 가지고 설명해 보아라.

**질문 3.9.7.** 가우스 곡률이 모든 점에서  $-1$ 인 곡면이 있는가? 이 곡면과 단위 구의 기하적 성질에는 어떤 차이점이 있는가?

질문 3.9.8. 정리 3.9.5의 증명을 스스로 만들어 보아라.

### 3.10 회전 곡면중 항등 가우스 곡률을 가지는 곡면들

유사 구면은 다음 식의 이미지로 주어지는 회전 곡면이다.

$$\mathbf{X}(u, v) = r(\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v + \log(\tan \frac{v}{2})). \quad (3.57)$$

이 곡면의 가우스 곡률은 모든 점에서  $-\frac{1}{r^2}$  이다. 이 곡면에 대하여 모선

$$v \mapsto \mathbf{X}(0, v) = r(\sin v, 0, \cos v + \log(\tan \frac{v}{2})) \quad (3.58)$$

은 견인선 (tractrix)이라고 불리며 재미있는 의미를 가지고 있다. 이 식이 어떻게 얻어지는지 살펴보자.

구면이 무엇을 가리키는 지는 누구나 알 것이다. 그러면 단위 유사 구면은 무엇을 가리키는 것일까? 이는 구면의 특성 중 한 가지를 일반화하고자 할 때 얻어지는 곡면이다.

앞에서 가우스 곡률의 정의와 의미에 대하여 알아보았는데 이제 가우스 곡률이 항상 일정한 값을 가지는 곡면에 대하여 알아보자. 이는 우리에게 가장 친숙한 곡면인 평면과 구면의 가우스 곡률이 일정하기 때문에 그와 비슷한 곡면을 생각해 보는 것이다.

먼저 가우스 곡률이 항상 0인 곡면은 평면뿐인가라는 질문에 대해 생각해

보면 금방 그렇지 않다는 것을 알 수 있다.<sup>25)</sup> 원기둥 또한 가우스 곡률이 모든 점에서 0이다.

가우스 곡률이 항상 양의 값을 가지는 곡면은 구면뿐인가? 위 답에 비추어 그러지 않은 것이라는 짐작을 할 수 있을텐데 이를 어떻게 확인할 수 있을까? 가장 간단한 방법은 회전 곡면 중에서 항등 가우스 곡률을 가지는 곡면을 생각해 보는 것이다. [19, 21장 2절]에 보면 이 질문에 대한 답이 나와 있는데 구면 말고도 많은 답이 있다.

가우스 곡률이 항상 음의 값을 가지는 곡면은, 음, 어떤 것이 있을까? 위에서는 존재성은 이미 알고 있는 거고 유일성에 대하여 생각해 본 것인데 여기서는 존재성부터 생각해 보아야 한다. [19, 21장 3절]에 답이 나와 있는데 많은 회전 곡면이 음의 상수를 가우스 곡률로 가지고 있으며 유사 구면은 그런 곡면 중의 하나다.

### 정의 3.10.1. 유사 구면은

$$(\varphi(v), \psi(v)) = \begin{cases} (a e^{-v/a}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{-2t/a}} dt) & (\text{단 } 0 \leq v < \infty) \\ (a e^{v/a}, \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t/a}} dt) & (\text{단 } -\infty < v \leq 0) \end{cases} \quad (3.59)$$

---

25) 여기서 한 가지 짚고 넘어갈 점이 있다. 수학을 길게 공부하고자 하는 사람은 어떤 명제를 접했을 때 그 명제의 역 또한 성립하는가 하는 질문에 대해 생각해 보는 것을 습관으로 삼으면 좋다.

일 때 다음 곡면을 가리킨다.

$$\mathbf{X}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)). \quad (3.60)$$

### 3.11 등위면의 곡률 식

앞에서 주어진 셔억의 극소 곡면은 사실 다음 삼변수 함수

$$F(x, y, z) := e^z \cos y - \cos x \quad (3.61)$$

의 값이 0인 점  $(x, y, z)$ 들로 이루어진 등위면으로 보는 것이 좋을 때가 있다.

**질문 3.11.1.**  $\{(x, y, z) | e^z \cos y - \cos x = 0\}$  이 셔억의 극소곡면임을 보여라.

예를 들어 임의의  $m, n \in \mathbb{Z}$ 에 대하여  $\{(x, y, z) : x = (m + \frac{1}{2})\pi, y = (n + \frac{1}{2})\pi\}$ 와 같은 수직선들이 셔억의 극소 곡면에 포함되어 있는 것은 식 (3.54)로부터는 잘 알 수가 없으나 식 (3.61)을 이용하면 금방 알 수 있다.

이와 같이  $F(x, y, z) = 0$ 으로 주어진 곡면의 평균곡률을 어떻게  $F$ 로부터 계산할 수 있을까?

**질문 3.11.2.** 셔억의 다섯 번째 극소곡면은 함수  $F(x, y, z) := \sin z - \sinh x \sinh y$ 의 값이 0일 때의 등위곡면으로 주어진다. 이 곡면이 극소곡면임을 보여라.<sup>26)</sup>

26)  $z = f(x, y) := \sin^{-1}(\sinh x \sinh y)$ 의 평균곡률을 계산하여 0이 됨을 보인다.  $\sin^{-1}$ 을 미분하기 싫으면  $x, y$ 를 독립변수로,  $z$ 를 종속변수로 보고 식  $\sin z = \sinh x \sinh y$ 를 그대로 미분하여  $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ 를 구하고 그로부터 평균곡률을 계산하는 방법도 있다.

그런데  $F(x, y, z) = 0$ 으로 주어진 곡면의 평균곡률과 가우스 곡률을 계산하는 다음과 같은 식이 있다.

**정리 3.11.3.** 공간의 열린집합  $\Omega$ 와 어떤 3변수 함수  $F : \Omega \subset \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , 그리고 어떤 실수  $c \in \mathbb{R}$ 에 대하여  $M_c := \{(x, y, z) \in \Omega : F(x, y, z) = c\}$  가  $c$  와  $c$  근방에 있는 모든 실수  $\tilde{c}$ 에 대하여 정칙곡면이 된다 하자. 그러면  $M_c$ 의  $(x, y, z) \in M_c$ 에서의 평균 곡률과 가우스 곡률은 다음과 같다.<sup>27)</sup>

$$H = -\frac{1}{2} \left( \nabla \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right), \quad K = -\frac{\begin{vmatrix} \nabla^2 F & \nabla F \\ (\nabla F)^T & 0 \end{vmatrix}}{|\nabla F|^4}. \quad (3.62)$$

여기서  $A$ 가 벡터면  $|A| := \sqrt{A \cdot A}$ 고  $A$ 가 정방행렬이면  $|A| := \det A$ 다.

27) 참고로 이 식은 오래 전부터 잘 알려져 있었으나 그 증명은 문헌에 잘 나타나지 않는다. 예를 들어 2005년에 발간된 [18]을 보면 그 현황을 알 수 있으며 [18]은 그 자세한 증명을 제시하고 있다.

그런데 나는 [18]에 나온 증명에 불만족한다. 이유는, 먼저 매개식으로 주어진 곡면의  $H$ 를 변형한 후 이것이 식 (3.62)의 우변과 같음을 보이는 식으로 증명하고 있는데, 그렇다면 매개식으로 주어진 곡면의 곡률식을 이미 알고 있지 못하면 이 식을 유도할 수 없다는 것이 아닌가? 더군다나 가우스 사상의 발산은 뭔가 특별한 의미를 가질 것 같은데 그렇다면 직접 유도되어야 하지 않겠는가? 그래서 다음과 같이 내 나름의 증명을 유도하여 보았다. 이 증명을 보기 전에 먼저 벡터 미적분을 잘 이해하면 좋다.

그리고

$$\nabla := \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 := \nabla \nabla^T = \begin{bmatrix} \partial_x \partial_x & \partial_x \partial_y & \partial_x \partial_z \\ \partial_y \partial_x & \partial_y \partial_y & \partial_y \partial_z \\ \partial_z \partial_x & \partial_z \partial_y & \partial_z \partial_z \end{bmatrix}.$$

$K$ 의 우변에 있는 표현을 좀더 정확하게 이해하고 싶으면 (3.68)을 보라.  $\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ 는  $M$ 에 국한되었을 때 곡면  $M$ 의 가우스 사상임에 주목하라. 이는 평균곡률은 가우스 사상의 발산의  $-\frac{1}{2}$ 배라는 것이다.

**예 3.11.4.**  $F(x, y, z) := e^z \cos y - \cos x$  라 하면

$$\nabla F = (\sin x, -e^z \sin y, e^z \cos y)^T,$$

$$\nabla \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{e^{2z}(\cos x - e^z \cos y)}{(e^{2z} + \sin^2 x)^{3/2}}.$$

따라서 셔억의 극소곡면  $M := \{(x, y, z) : F(x, y, z) = 0\}$ 의 평균곡률은 모든 점에서 0이다.

**질문 3.11.5.** 식 (3.62)를 이용하여 셔억의 다섯 번째 극소곡면의 평균곡률이 모든 점에서 0임을 보여라.

**질문 3.11.6.** 이변수 함수  $z = f(x, y)$ 가 주어졌을 때 삼변수 함수  $F(x, y, z) := z - f(x, y)$ 를 생각하자. 이  $F$ 에 대하여 식 (3.62)에 있는 표현을 계산하면 그것이  $z = f(x, y)$ 의 평균곡률, 가우스 곡률과 일치함을 보여라.

아래 나와있는 식 (3.62)에 대한 유도과정을 이해하려면 선형대수학을 잘 이해해야 한다. 이 절에서는 벡터를 행렬로 나타낼 때  $3 \times 1$  행렬을 사용한다. 따라서 두 벡터  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 에 대하여

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{w}.$$

그리고

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### 평균 곡률식의 유도 편의상

$$\mathbf{N} : \Omega \subset \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad \mathbf{N}(x, y, z) := \frac{\nabla F(x, y, z)}{|\nabla F(x, y, z)|} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^1(x, y, z) \\ \mathbf{N}^2(x, y, z) \\ \mathbf{N}^3(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

라 하자. 그러면 각  $M_c$ 에 대하여  $\mathbf{N}$ 은 단위법벡터가 된다. 평균곡률이 모양 연산자  $S$ 의 대각합의  $\frac{1}{2}$ 라는 식  $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S$  으로부터 출발하자. 이를 이용하기 위해선  $S$ 의 정의를 좀더 잘 이해할 필요가 있다. 곡면의 접벡터  $\mathbf{v}_P$ 에 대하여 식 (3.25)을 떠올리자.

$$S(\mathbf{v}_P) = -(\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\gamma})'(0) = -(\mathbf{N} \circ \boldsymbol{\alpha})'(0) \quad (3.64)$$

여기서  $\boldsymbol{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$  는  $\boldsymbol{\alpha}(0) = P, \dot{\boldsymbol{\alpha}}(0) = \mathbf{v}$  을 만족시키는 곡선이다. 식 (3.64)의 마지막 표현에서 미분의 연쇄법칙을 적용하고자 하는데 식 (3.25)가

주어진 상황에서는 연쇄법칙을 적용할 수가 없다. 식 (3.25)의  $\mathbf{N}$ 은 곡면에만 정의되어 있고 곡면을 둘러싼 공간에는 정의가 되어있지 않기 때문이다. 식 (3.25)의  $\mathbf{N}$ 에 대해선  $N_x, N_y, N_z$ 가 무의미한 표현이 된다. 그러나, 위 식 (3.63)의  $\mathbf{N}$ 에 대해서는 이런 문제가 없다. 이  $\mathbf{N}$ 은 곡면에 대해서만이 아니라 곡면을 둘러싼 공간에도 정의가 된 덕분이다. 또한  $M_c$ 에서는 식 (3.25)의  $\mathbf{N}$ 과 식 (3.63)의  $\mathbf{N}$ 이 같으므로 (3.64)에서 (3.63)의  $\mathbf{N}$ 을 써도 된다. 그러면

$$(\mathbf{N} \circ \alpha)'(0) = \begin{bmatrix} (\mathbf{N}^1 \circ \alpha)'(0) \\ (\mathbf{N}^2 \circ \alpha)'(0) \\ (\mathbf{N}^3 \circ \alpha)'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x^1 & \mathbf{N}_y^1 & \mathbf{N}_z^1 \\ \mathbf{N}_x^2 & \mathbf{N}_y^2 & \mathbf{N}_z^2 \\ \mathbf{N}_x^3 & \mathbf{N}_y^3 & \mathbf{N}_z^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = (\nabla \mathbf{N}^T)^T \mathbf{v}.$$

$\mathcal{Z} := (\nabla \mathbf{N}^T)^T$  라 하자. 그러면<sup>28)</sup>

$$\text{Tr } \mathcal{Z} = \mathbf{N}_x^1 + \mathbf{N}_y^2 + \mathbf{N}_z^3 = \nabla \cdot \mathbf{N}, \quad S(\mathbf{v}_P) = -\mathcal{Z}\mathbf{v}_P.$$

이제  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 가  $T_p M$ 의 양의 향을 가진 단위직교기저라 하자. 여기서 양의 향을 가졌다 함은  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{N} > 0$ 을 의미한다. 그러면

$$\text{tr } S = \sum_{i=1}^2 \langle \mathbf{v}_i, S(\mathbf{v}_i) \rangle = - \sum_{i=1}^2 \langle \mathbf{v}_i, \mathcal{Z}\mathbf{v}_i \rangle = - \sum_{i=1}^2 \mathbf{v}_i^T \mathcal{Z} \mathbf{v}_i$$

한편  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{N}$ 가 단위직교기저이므로

$$\text{Tr } \mathcal{Z} = \mathbf{v}_1^T \mathcal{Z} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathcal{Z} \mathbf{v}_2 + \mathbf{N}^T \mathcal{Z} \mathbf{N} = -\text{tr } S + \mathbf{N}^T \mathcal{Z} \mathbf{N}.$$

---

28)  $\text{tr}$ 은 선형연산자에 대하여 정의된 것이고  $\text{Tr}$ 은 정방행렬에 대하여 정의된 것이다.

그런데 (곡면에 접하지 않을 수도 있는) 임의의 벡터  $\mathbf{v}$ 에 대하여

$$\langle \mathbf{N}, \mathcal{Z}\mathbf{v} \rangle = \mathbf{N}^T(\mathcal{Z}\mathbf{v}) = (\mathbf{N}^T\mathcal{Z})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0$$

이므로  $\mathcal{Z}\mathbf{v}$ 는 곡면에 접한다. (여기서 세 번째 등호는  $(\mathbf{N}^1)^2 + (\mathbf{N}^2)^2 + (\mathbf{N}^3)^2 = 1$ 을  $x, y, z$  각각에 대하여 미분한 결과로부터 알 수 있다.) 그래서  $\mathbf{N}^T\mathcal{Z}\mathbf{N} = 0$ . 그러므로  $\text{tr } S = -\text{Tr } \mathcal{Z} = -\nabla \cdot \mathbf{N}$ . 이로부터 평균곡률의 식을 알 수 있다.

## 가우스 곡률식의 유도 1

**보조정리 3.11.7.**  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 가 양의 향을 가지는  $T_p M$ 의 기저면

$$K(p) = \frac{\nabla F(p) \cdot \nabla^2 F(p) \mathbf{v}_1 \times \nabla^2 F(p) \mathbf{v}_2}{|\nabla F(p)|^3 |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}. \quad (3.65)$$

**증명** 보조정리 3.9.2에 나와있는 식  $K = \mathbf{G} \cdot S(\mathbf{v}_1) \times S(\mathbf{v}_2) / |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$ 을 이용하자. 임의의 접벡터  $\mathbf{v}_p$ 에 대하여  $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = \mathbf{v}_p$ 인 곡면의 곡선  $\alpha$ 를 생각하자. 그러면

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}_p) &= -(\mathbf{G} \circ \alpha)'(0) = -\left(\frac{\nabla F \circ \alpha}{|\nabla F \circ \alpha|}\right)'_{t=0} \\ &= -\frac{(\nabla F \circ \alpha)'(0)}{|\nabla F \circ \alpha|} - \nabla F(p) \left(\frac{1}{|\nabla F \circ \alpha|}\right)'_{t=0} \\ &= -\frac{\nabla^2 F(p) \mathbf{v}}{|\nabla F(p)|} - \nabla F(p) \left(\frac{1}{|\nabla F \circ \alpha|}\right)'_{t=0} \end{aligned} \quad (3.66)$$

여기서 세 번째 등식은 다음 덕분에 성립한다.

$$(\nabla F \circ \alpha)'(0) = \begin{bmatrix} (F_x \circ \alpha)'(0) \\ (F_y \circ \alpha)'(0) \\ (F_z \circ \alpha)'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(0) \\ y'(0) \\ z'(0) \end{bmatrix} = \nabla^2 F \mathbf{v}.$$

따라서

$$S(\mathbf{v}_1) \times S(\mathbf{v}_2) = \frac{\nabla^2 F(p) \mathbf{v}_1 \times \nabla^2 F(p) \mathbf{v}_2}{|\nabla F(p)|^2} + \nabla F(p) \text{에 수직인 벡터.}$$

$\mathbf{G} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$  이므로 결론이 성립한다. ■

자, 이제 다음 특정 기저를 생각해 보자.

$$\mathbf{v}_1 := \begin{bmatrix} F_z \\ 0 \\ -F_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ F_z \\ -F_y \end{bmatrix},$$

그러면  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = F_z |\nabla F|$ . 따라서  $F_z > 0$  이면  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$  은 양의 향을 가진다. 이제부터는  $F_z > 0$  이라 하자. ( $F_z < 0$  인 경우는 독자에게 맡긴다.) 그러면

$$|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| = F_z |\nabla F(p)|. \tag{3.67}$$

그리고

$$\begin{aligned}
 & \nabla F \cdot \nabla^2 F \mathbf{v}_1 \times \nabla^2 F \mathbf{v}_2 \\
 &= (\nabla^2 F(F_z \mathbf{e}_1 - F_x \mathbf{e}_3) \times \nabla^2 F(F_z \mathbf{e}_2 - F_y \mathbf{e}_3)) \cdot \nabla F \\
 &= F_z^2 \nabla^2 F \mathbf{e}_1 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_2 \cdot \nabla F - F_z F_y \nabla^2 F \mathbf{e}_1 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_3 \cdot \nabla F \\
 &\quad - F_x F_z \nabla^2 F \mathbf{e}_3 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_2 \cdot \nabla F + F_x F_y \nabla^2 F \mathbf{e}_3 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_3 \cdot \nabla F \\
 &= F_z \left( F_x \nabla^2 F \mathbf{e}_2 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_3 \cdot \nabla F - F_y \nabla^2 F \mathbf{e}_1 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_3 \cdot \nabla F \right. \\
 &\quad \left. + F_z \nabla^2 F \mathbf{e}_1 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_2 \cdot \nabla F \right)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\nabla^2 F \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xx} \\ F_{yx} \\ F_{zx} \end{bmatrix}.$$

마찬가지로

$$\nabla^2 F \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} F_{xy} \\ F_{yy} \\ F_{zy} \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 F \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} F_{xz} \\ F_{yz} \\ F_{zz} \end{bmatrix}.$$

따라서

$$\begin{aligned}\nabla^2 F \mathbf{e}_2 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_3 \cdot \nabla F &= \begin{vmatrix} F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zy} & F_{zz} & F_z \end{vmatrix}, \\ \nabla^2 F \mathbf{e}_1 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_3 \cdot \nabla F &= \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zz} & F_z \end{vmatrix}, \\ \nabla^2 F \mathbf{e}_1 \times \nabla^2 F \mathbf{e}_2 \cdot \nabla F &= \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}& \nabla F \cdot \nabla^2 F \mathbf{v}_1 \times \nabla^2 F \mathbf{v}_2 \\&= F_z \left( F_x \begin{vmatrix} F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zy} & F_{zz} & F_z \end{vmatrix} - F_y \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zz} & F_z \end{vmatrix} + F_z \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_z \end{vmatrix} \right) \quad (3.68)\end{aligned}$$

$$= -F_z \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix} = -F_z \begin{vmatrix} \nabla^2 F & \nabla F \\ (\nabla F)^T & 0 \end{vmatrix}.$$

따라서 (3.65), (3.67), (3.68)로부터 (3.62)에 있는  $K$ 의 표현을 얻을 수 있다.

가우스 곡률식의 유도 2 선형연산자  $S$ 의 행렬식을 계산하여  $K$ 를 구해보자. 등위면에 대하여 다음 두 벡터를 정의하자.

$$\mathbf{v}_1 := \begin{bmatrix} F_z \\ 0 \\ -F_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ F_z \\ -F_y \end{bmatrix}.$$

그러면 ( $F_3 \neq 0$  일 때)  $\mathcal{B} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  는 접평면의 기저가 된다. 이제 이 기저에 대하여 보조정리 3.4.12를 이용하여  $[S]_{\mathcal{B}} = I^{-1}II$ 를 계산하여 행렬식과 대각합  $\div 2$ 를 계산하면 가우스 곡률과 평균 곡률이 얻어진다.

$K$ 에 대한 식을 구체적으로 구해보자. 먼저 곡면의 두 접벡터  $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p$ 에 대하여 (3.66)에 의하여 다음이 성립함을 살피자.

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{w}_p &= -\frac{\mathbf{w}_p^T \nabla^2 F(p) \mathbf{v}_p}{|\nabla F(p)|} \\ &= -\frac{\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

이제 직접적 계산에 의하여

$$I = \begin{bmatrix} F_z^2 + F_x^2 & F_x F_y \\ F_y F_x & F_z^2 + F_y^2 \end{bmatrix}, \quad II = -\frac{1}{|\nabla F|} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \nabla^2 F \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^T \nabla^2 F \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_1^T \nabla^2 F \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2^T \nabla^2 F \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}.$$

따라서

$$\det I = F_z^2 |\nabla F|^2, \quad \det II = \frac{1}{|\nabla F|^2} \mathbf{v}_1^T \nabla^2 F (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1^T) \nabla^2 F \mathbf{v}_2.$$

직접 계산에 의하여

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^T - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1^T = F_z \begin{bmatrix} 0 & F_z & -F_y \\ -F_z & 0 & F_x \\ F_y & -F_x & 0 \end{bmatrix}.$$

따라서

$$K = \frac{\begin{bmatrix} F_z & 0 & -F_x \end{bmatrix} \nabla^2 F \begin{bmatrix} 0 & F_z & -F_y \\ -F_z & 0 & F_x \\ F_y & -F_x & 0 \end{bmatrix} \nabla^2 F \begin{bmatrix} 0 \\ F_z \\ -F_y \end{bmatrix}}{F_z |\nabla F|^4} \quad (3.70)$$

여기서 분모에  $F_z$ 가 있음에 주목하라.

자 이제 식 (3.70)과 (3.62)은 서로 같음을 보이자.<sup>29)</sup> 기호를 간단히 쓰기 위하여  $F_x = F_1$ ,  $F_{yz} = F_{23}$  등과 같이  $F$  밑에 첨자로 쓰인  $x, y, z$ 를 각각 1, 2, 3으로 나타내자. 식 (3.70)의 문자를  $Nu$ 라 하면

$$\begin{aligned} Nu &= (F_3 \mathbf{e}_1^T - F_1 \mathbf{e}_3^T) \nabla^2 F (F_1 M_1 - F_2 M_2 + F_3 M_3) \nabla^2 F (F_3 \mathbf{e}_2 - F_2 \mathbf{e}_3) \\ &= F_1 A_1 - F_2 A_2 + F_3 A_3. \end{aligned}$$

---

29) 나는 일단 Mathematica를 이용하여 두 식이 같음을 확인하였다.

단 여기서

$$M_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_j := (F_3 \mathbf{e}_1^T - F_1 \mathbf{e}_3^T) \nabla^2 F M_j (\nabla^2 F)^T (F_3 \mathbf{e}_2 - F_2 \mathbf{e}_3).$$

여기서 다음을 주목한다:

1. 임의의 3행3열 행렬  $B$ 에 대하여  $BM_jB^T = \begin{bmatrix} 0 & M_{3j} & M_{2j} \\ -M_{3j} & 0 & M_{1j} \\ -M_{2j} & -M_{1j} & 0 \end{bmatrix}$ . 단,  
 $M_{ij}$ 는  $B$ 의  $(i, j)$  minor다.

2.  $e_i^T C e_j = C_{ij} = C$ 의  $i$ 행  $j$  열에 있는 원소

이 두 성질을 이용하여 다음을 알 수 있다. 단  $\tilde{M}_{ij}$ 는  $\nabla^2 F$ 의  $(i, j)$  minor다.

$$A_j = F_3(F_1 \tilde{M}_{1j} - F_2 \tilde{M}_{2j} + F_3 \tilde{M}_{3j}).$$

따라서

$$A_1 = F_3 \begin{vmatrix} F_1 & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}, \quad A_2 = F_3 \begin{vmatrix} F_1 & F_{11} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{23} \\ F_3 & F_{33} & F_{33} \end{vmatrix}, \quad A_3 = F_3 \begin{vmatrix} F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} \\ F_3 & F_{33} & F_{32} \end{vmatrix}.$$

이로부터

$$Nu = F_3 \begin{vmatrix} F_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \\ 0 & F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = F_z \begin{vmatrix} \nabla F & \nabla^2 F \\ 0 & (\nabla F)^T \end{vmatrix}, \quad K = \frac{\begin{vmatrix} \nabla F & \nabla^2 F \\ 0 & (\nabla F)^T \end{vmatrix}}{|\nabla F|^4}$$

임을 알 수 있다. 이로부터 결론이 따라 나온다.

**질문 3.11.8.** 위와 마찬가지로  $[S]_B$ 의 대각합  $\div 2$ 을 구한 후 그것이 식 (3.62)에 있는 평균곡률  $H$ 의 표현과 같은지 확인하여라.

**질문 3.11.9.** 주어진 곡면  $M$ 을 등위면으로 가지는 함수는 유일하지 않을 수 있다. 그러나 어느 함수로 계산하더라도 평균곡률의 값은 잘 계산됨을 보여라.

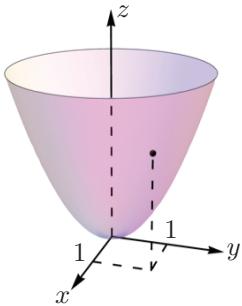
**질문 3.11.10.**  $F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - r^2$  일 때 등위면의 가우스 곡률과 평균 곡률을 계산하여라.

## 3.12 연습 문제

연습문제 3.12.1. 다음의 명제가 참인지 거짓인지 판별하여라.

1. 회전 극소 곡면은 현수면뿐이다.
2. 극소 곡면의 가우스 곡률은 항상 0이거나 음이다.
3.  $\kappa_M$  가 생기는 방향과  $\kappa_m$  이 생기는 방향은 서로 수직이다.

연습문제 3.12.2. 함수  $z = x^2 + y^2$ 의 그래프로 주어지는 곡면에 대하여 다음을 풀어라.



〈그림 3.17〉

1. 점  $(1, 1, 2)$ 에서 시작하는 벡터  $(1, 2, 6)$ 이 이 곡면에 접함을 보여라.
2.  $S(1, 2, 6)$ 을 구하여라.
3. 점  $(1, 1, 2)$ 에서  $(1, 2, 6)$  방향으로 법곡률은 얼마인가?
4. 점  $(1, 1, 2)$ 에서 가우스 곡률은 얼마인가?
5. 점  $(1, 1, 2)$ 에서 평균 곡률은 얼마인가?

**연습문제 3.12.3.** 서로 다르게 보이는 두 식  $\mathbf{X}$  와  $\vec{Y}$ 가 사실은 같은 곡면을 나타낼 때 두 식으로 계산하는 곡률이 같은가?

**연습문제 3.12.4.** 나선면  $\mathbf{X}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ 의 가우스 곡률을 계산하여라.

**연습문제 3.12.5.** 나선면의 주곡률 (=법곡률 중 최댓값이나 최솟값)을 구하여라.

**연습문제 3.12.6.** 임의의 곡면 조각  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$  가 주어졌을 때,  $\kappa_n(\theta)$ 를  $\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$  방향의 법곡률이라 하면 다음이 성립함을 보여라.

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_n(\theta) d\theta.$$

(단,  $\mathbf{e}_1$ 과  $\mathbf{e}_2$ 는 법곡률이 각각 최대, 최소가 되는 방향이다.)

**연습문제 3.12.7.** 타원면

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

의  $(a, 0, 0)$ 에서 가우스 곡률을 구하여라.

**연습문제 3.12.8.** 법곡률의 최댓값은  $H + \sqrt{H^2 - K}$ , 법곡률의 최솟값은  $H - \sqrt{H^2 - K}$ 임을 보여라.

**연습문제 3.12.9.** 어떤 극소 곡면도 결코 타원점을 가지지 않음을 증명하여라.

**연습문제 3.12.10.**  $z = x^2 - y^2$ 의 그래프를 생각하라.

1. 점  $(1, 1, 0)$ 에서  $\mathbf{v}_P = (1, 2, -2)$ 가 접벡터임을 보여라.

2.  $S(\mathbf{v}_P)$ 를 구하여라.

**연습문제 3.12.11.** 플라토의 문제란 어떤 문제인지 조사하고 그에 대한 더글라스의 답이란 무엇인지 또한 조사하여라.

**연습문제 3.12.12.**  $F(x, y, z) = 0$ 으로 주어진 곡면에 대하여  $S(\mathbf{v}_P)$ 를 어떻게 계산하는지 조사하여라.

**연습문제 3.12.13.**  $z = f(x, y)$ 로 주어진 곡면에 대하여  $S(\mathbf{v}_P)$ 를 어떻게 계산하는지 조사하여라.

**연습문제 3.12.14.**  $z = f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 +$  더 고차항들로 주어지는 곡면의 점  $(0, 0, 0)$ 에서의 모양 연산자를 구하여라.

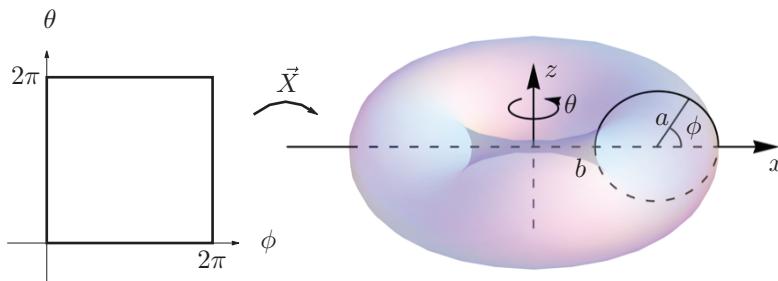
**연습문제 3.12.15.** 주어진 실수  $r > 0$ 에 대하여 가우스 곡률이 항상  $-r^2$ 인 곡면에 대해 조사하여라. Hilbert's theorem (differential geometry)도 조사해 보고 두 내용이 서로 상충되지 않음을 설명하여라.

**연습문제 3.12.16.** 두 공간 벡터  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 가 서로 독립일 때 다음이 항상 성립함을 증명하여라. (코시-슈바르츠 부등식)

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle > 0$$

**연습문제 3.12.17.** 위 그림에 주어진 원을  $z$  축을 중심으로 회전한 원환면의 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{X}(\phi, \theta) = ((b + a \cos \phi) \cos \theta, (b + a \cos \phi) \sin \theta, a \sin \phi).$$



〈그림 3.18〉

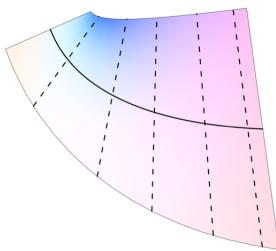
이 원환면을 가로가  $2\pi$ , 세로가  $2\pi$ 인 지도로 나타낼 수 있다. 자, 이 지도에 있는 “임의”의 두 곡선 사이의 각과 실제 원환면 위의 두 곡선 사이의 각은 항상 같을까? 아니면 다를 수도 있을까?

**연습문제 3.12.18.** 위 그림과 같이 공간곡선  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$  와 벡터장  $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$  가 있을 때 다음과 같은 식으로 주어지는 곡면을 선직면(線織面 ruled surface)이라 한다.

$$\mathbf{X}(u, v) := \alpha(u) + v\mathbf{w}(u).$$

선직면의 가우스 곡률은 어느 점에서도 0이거나 0보다 작음을 보여라.

**연습문제 3.12.19.** 쌍곡 포물면  $z = xy$ 는 선직면임을 보여라.



〈그림 3.19〉

**연습문제 3.12.20.**  $a$ 가 임의의 양수일 때, 현수면

$$\vec{X}(u, v) = (a \cdot \cosh v \cdot \cos u, a \cdot \cosh v \cdot \sin u, a \cdot v)$$

와 나선면

$$\vec{Y}(u, v) = (a \cdot \sinh v \cdot \cos u, a \cdot \sinh v \cdot \sin u, a \cdot u)$$

(단  $0 < u < 2\pi$ ,  $-\infty < v < \infty$ )에 대하여

1. 두 곡면의 모양을 그려보라.
2. 두 곡면의 제1, 2 기본 형식을 계산하여라.
3. 두 곡면의 수직 벡터를 계산하라.

**연습문제 3.12.21.** tractrix와 현수선은 어떤 관계에 있다. 그 관계가 어떻게 되는지 조사하여라.<sup>30)</sup>

---

30) 답: tractrix의 곡률선은 현수선이 된다.

## 제 4 장

# 곡면의 곡선

## 4.1 구면의 등각선

북극해에서 어떤 배가 정북향과 일정한 각도  $\delta \in (0, \pi/2)$ 를 이루며 일전한 속력으로 나아간다면 이 배는 북극에 도달할 수 있을까? 도착할 수 있다면 얼마만큼 시간이 걸릴까?<sup>1)</sup>  $\delta = 0$ 이면 배가 정북향으로 진행하는 셈이므로 당연히 북극점에 도달할 것이고  $\delta = \pi/2$ 면 배는 결국 제 자리로 돌아오며 북극점에 도달하지 못할 것이다.

논의를 전개하기 쉽게 하기 위하여 편의상 지구를 반지름이 1인 구로 생각하고 예 3.2.5에서 공부한 입체사영으로 만든 지도를 이용하여 알아보는 방법을 소개한다. 입체사영은 재미있는 성질이 많은데 그 중 다음 성질을 보자.

**정리 4.1.1.** 구면에서 임의의 두 곡선이 만나 이루는 각의 크기와 그 두 곡선이 입체사영으로 보내져 생기는 평면의 두 곡선이 이루는 각의 크기는 서로 같다.

입체사영의 이 성질에 대한 증명은 굉장히 많다. 독자 여러분도 직접 증명을 시도해 보기 바란다. 우리는 미분기하학의 입장에서 다음 증명을 소개한다.

---

1) 남극에는 대륙이 있기 때문에 배가 아니라 썰매를 이용하는 상황을 생각해야 할 것이다.

**증명** 식 (3.8)로 주어진 입체사영 식에 대한 계량기를 계산해 보면

$$E(u, v) = G(u, v) = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad F(u, v) = 0. \quad (4.1)$$

따라서 다음 보조정리에 의하여 결론이 성립한다. ■

**보조정리 4.1.2.** 곡면  $\mathbf{X}$ 에 대하여

$$E(u, v) = G(u, v), \quad F(u, v) = 0 \quad (4.2)$$

이면 곡면에서 두 곡선이 만나는 각도와 지도에서 해당곡선이 만나는 각도는 서로 같다.

**증명** 지도에 있는 두 곡선

$$\gamma, \delta : (a, b) \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (a(t), b(t)), \quad \delta(t) = (c(t), d(t))$$

가  $\gamma(t_1) = \delta(t_2)$ 에서 만날 때  $\mathbf{X} \circ \gamma$ 와  $\mathbf{X} \circ \delta$ 가 만나는 각도를  $\theta$ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle (\mathbf{X} \circ \gamma)'(t_1), (\mathbf{X} \circ \delta)'(t_2) \rangle}{|(\mathbf{X} \circ \gamma)'(t_1)| |(\mathbf{X} \circ \delta)'(t_2)|} \\ &= \frac{\langle \mathbf{X}_u \dot{a} + \mathbf{X}_v \dot{b}, \mathbf{X}_u \dot{c} + \mathbf{X}_v \dot{d} \rangle}{|\mathbf{X}_u \dot{a} + \mathbf{X}_v \dot{b}| |\mathbf{X}_u \dot{c} + \mathbf{X}_v \dot{d}|} \\ &= \frac{E \dot{a} \dot{c} + F \dot{a} \dot{d} + F \dot{b} \dot{c} + G \dot{b} \dot{d}}{\sqrt{E \dot{a}^2 + 2F \dot{a} \dot{b} + G \dot{b}^2} \sqrt{E \dot{c}^2 + 2F \dot{c} \dot{d} + G \dot{d}^2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

이 때 주어진 조건에 의하면

$$\cos \theta = \frac{\dot{a} \dot{c} + \dot{b} \dot{d}}{\sqrt{\dot{a}^2 + \dot{b}^2} \sqrt{\dot{c}^2 + \dot{d}^2}} = \frac{|\dot{\gamma}(t_1)| |\dot{\delta}(t_2)|}{|\dot{\gamma}(t_1)| |\dot{\delta}(t_2)|} = \cos \bar{\theta}.$$

단 여기서  $\bar{\theta}$ 는 지도에서 두 곡선  $\gamma$ 와  $\delta$ 가 만나는 각도다. 따라서  $\theta = \bar{\theta}$ . ■

조건 (4.2)는 모든 점에서  $X_u$ 와  $X_v$ 가 서로 크기가 같으며 직교한다는 뜻이며 이 조건을 만족시키는  $X$ 를 공형좌표계(conformal coordinates), 등온좌표계(isothermal coordinates) 등으로 부른다. 곡면에 대한 지도를 무작정 만들면 공형좌표계가 아닌 경우가 대부분일텐데 잘 만들면 반드시 공형좌표계가 되게끔 지도를 만들 수 있다는 것이 알려져 있다.

**질문 4.1.3.** 공형인  $X$ 의 예를 두 개 더 들어 보아라.

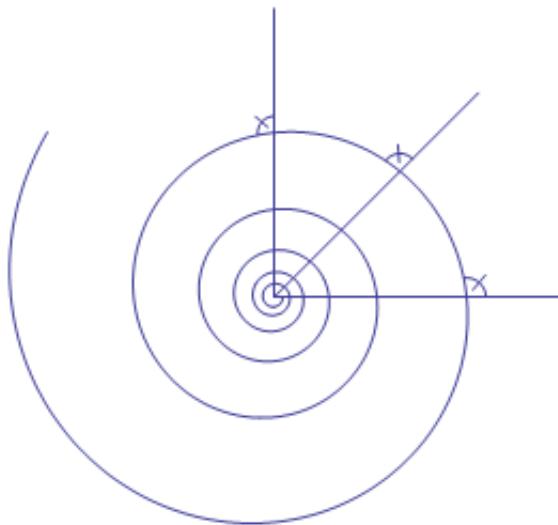
**질문 4.1.4.** 입체사영은 구면의 원(대원 또는 소원)을 지도의 원이나 직선으로 보낸다. 이를 증명하여 보아라.

구면에서 경선과 일정한 각  $\delta$ 를 이루며 북으로 향하는 곡선을 입체사영으로 만들어진 지도에서 살펴보면 다음 그림과 같이 나타난다.

그러므로 원하는 바를 달성하기 위해서는 원점을 지나는 직선들과 일정한 각<sup>2)</sup>  $\delta$ 를 갖는 (평면)곡선을 찾으면 된다. 이런 곡선을 등각선(等角線, loxodrome)이라 한다. 지도에서 이 곡선의 매개 변수 방정식을 찾는 목적으로는 직교좌표계보다 극좌표계를 쓰는 것이 좋다.

---

2) 여기서 주의해야 할 점이 있다. 원래는 찾고 있는 곡선과 경선 사이의 각도에 대해 생각해야 하나 입체사영의 성질에 의하여 이를 지도에서의 각도로 대체하여 생각하고 있다.



평면 곡선을  $\gamma(t) := (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$  라 하자.  $\gamma$  와  $\dot{\gamma}$ 의 항상 일정한 각  $(\pi - \delta)$ 를 이루는 것에 착안하여 찾는다.  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$  일 때

$$\cos(\pi - \delta) = \frac{\langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle}{|\gamma| |\dot{\gamma}|} < 0$$

이 때  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}, \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta})$  이므로

$$\begin{aligned}\langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle &= r \cos \theta (\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta}) + r \sin \theta (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta}) \\ &= r \dot{r} \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta} + r \dot{r} \sin^2 \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ &= r \dot{r} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r \dot{r}.\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \delta) &= \frac{r \dot{r}}{r[(\dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \dot{\theta})^2 + (\dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \dot{\theta})^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}}.\end{aligned}$$

이 식을 제곱하여

$$\cos^2(\pi - \delta) = \frac{1}{1 + (\frac{r}{\dot{r}})^2 (\dot{\theta})^2}.$$

이 식을  $(\dot{\theta})^2$ 에 대해서 정리하면

$$(\dot{\theta})^2 = (\sec^2(\pi - \delta) - 1)(\frac{\dot{r}}{r})^2.$$

이 식을 정리하면,

$$\dot{\theta} = |\tan(\pi - \delta)| \frac{|\dot{r}|}{r} = \tan(\pi - \delta) \frac{\dot{r}}{r} > 0.$$

이때,  $\tan(\pi - \delta) < 0$ ,  $\dot{r} < 0$ 이기 때문에  $\dot{\theta}$ 은 양의 값을 가진다. 여기서, 다시 양변에 적분을 이용하여 정리하면

$$\theta(t) = \tan(\pi - \delta) \ln r(t) - c$$

가 된다. 자, 이제 지금부터 이 식을  $r$ 에 대한 식으로 정리해보자. 우선  $r$ 이 있는 항을 좌변으로, 나머지를 우변으로 이항하면

$$\ln r = \frac{\theta + c}{\tan(\pi - \delta)}$$

으로 정리되고, 이 식에서 로그를 없앤 후 정리하면,

$$r(\theta) = \exp\left(\frac{\theta + c}{\tan(\pi - \delta)}\right) = \exp\left(\frac{-c}{\tan \delta}\right) \exp\left(\frac{-\theta}{\tan(\delta)}\right).$$

즉 이것이 원하는 곡선의 방정식이다. 이 곡선을 로그 나선(log spiral)이라고도 한다.

이제 우리가 원래 생각했던 문제는 다음에서 세 번째 문제가 된다.

**연습문제 4.1.5.** 다음 문제를 풀어 보자.

- 지도를 그리는 다른 방법에는 어떤 것이 있으며, 각각의 장단점은 무엇인가? <sup>3)</sup>
- 로그 나선이 나타내는 실제 곡선의 길이가 유한함을 지도의 계량기를 이용하여 보여라.
- 본문에 주어진 상황에서 배는 북극점에 도달할 수 있는가?

---

3) 예: 메르카토르 도법

두 번째 문제의 답으로부터 세 번째 문제의 결론이 얻어짐을 조금만 생각해 보면 알 수 있다.

## 4.2 곡률선과 점근선

앞에서 곡면의 접벡터  $v_p$ 가 주어지면 그 방향으로의 법곡률을 정의하였고 점  $p$ 가 고정되면 최댓값  $\kappa_M$ , 최솟값  $\kappa_m$ 이 생기는 걸 알아보았다.  $\kappa_M$  와  $\kappa_m$  이 같은 경우도 있다. 구가 그런 곡면이다. 이 경우 모든 방향으로의 법곡률은 서로 같다. 이런 점을 배꼽점(umbilic point)이라 한다. 즉 구면의 모든 점은 배꼽점이다. 곡면의 한 점이 배꼽점이 아닌 경우 법곡률이 최대인 방향, 또는 최소인 방향을 주방향이라 한다.

곡선에 어떤 곡선이 있는데 그 곡선의 모든 속도벡터가 주방향을 가리키면 그 곡선을 곡률선(principal curvature line)이라 한다. 곡률선은 곡면을 들여다 볼 때 가장 먼저 관심을 가지고 봐야 할 곡선이다.

어떤 곡면을 그릴 때 곡면에 아무 곡선도 그리지 않아도 되지만 적당한 곡선들을 그려 그 곡면의 특성을 나타내면 더 좋을 수 있다. 그 예 중의 하나는 동대문 디자인 플라자다. 곡면을 그릴 때 가장 자연스러운 곡선으로 생각할 수 있는 게 곡률선이다. 곡률선이란 곡선의 모든 속도 벡터가 그 점에서의 주방향을 나타내는 매끄러운 곡선이다. 배꼽점이 아닌 경우 곡률선은 직각으로 만나며 곡면의 자연스러운 휘어짐을 나타낸다.

점근선은 가우스 곡률이 양인 부분에서는 나타나지 않는다. 극소곡면은

모든 점에서의 가우스 곡률이 비양(non-positive)인데 따라서 대부분의 경우 점근선을 가지고 있다.

다음과 같이  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ 에 정의된 현수면  $\mathbf{X}$ 와 나선면  $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{X}(u, v) := (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Y}(u, v) := (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, -v). \quad (4.5)$$

의 곡률선과 점근선에 대하여 알아보자.

**질문 4.2.1.** 현수면의 식은 이미 앞에서 주어졌다. (3.51)의 이미지와 (4.4)의 이미지를 비교하여 보아라.

나선면의 식은 이미 앞에서 식이 주어졌다. (3.1)을 참조하라. 식 (3.1)과 식 (4.5)의 상(image)을 비교하여 보아라.

먼저 임의의  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여 다음 네 곡선을 정의한다.

$$\gamma_1(s) := (s + u_0, v_0), \quad \gamma_2(t) := (u_0, t + v_0),$$

$$\delta_1(s) := (s + u_0, s + v_0), \quad \delta_2(t) := (t + u_0, -t + v_0).$$

$\mathbf{X}$ 의 모양 연산자 행렬은 다음과 같다.

$$[S]_{\mathbf{X}} = g_{\mathbf{X}}^{-1} A_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{sech}^2 u \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

그러므로  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  와  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  은 고유벡터이며 따라서 주 곡률 방향이다. 따라서  $\mathbf{X} \circ \gamma_1$

과  $\mathbf{X} \circ \gamma_2$  는 모두 곡률선이다. 한편  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ .

따라서  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  와  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  는 모두 점근방향이다. 따라서  $\mathbf{X} \circ \delta_1$  과  $\mathbf{X} \circ \delta_2$  는 모두 점근선이다.

$\mathbf{Y}$ 의 모양 연산자 행렬은 다음과 같다.

$$[S]_{\mathbf{Y}} = g_{\mathbf{Y}}^{-1} A_{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{sech}^2 u \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

그러므로  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  와  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  은 고유벡터이며 따라서 주곡률 방향이다. 따라서  $\mathbf{Y} \circ \delta_1$

과  $\mathbf{Y} \circ \delta_2$  는 모두 곡률선이다. 한편  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ . 따라서

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  와  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  는 모두 점근방향이다. 따라서 모든  $\mathbf{Y} \circ \gamma_1$  과  $\mathbf{Y} \circ \gamma_2$  는 점근선이다.

**참고 4.2.2.** 나선면의 모양연산자 행렬은 이미 예제 3.4.9에서 계산한 바 있다. 나선면의 식이 다르기 때문에 행렬도 다르지만 모양연산자 자체는 본질적으 같다.

참고 4.2.3. 이 두 사상  $\mathbf{X}$  와  $\mathbf{Y}$  사이의 모양연산자  $S_{\mathbf{X}}$  와  $S_{\mathbf{Y}}$  사이에는 매우 재미있는 관계가 있다. 이를 살펴보기 위해 먼저 간단한 계산에 의해 다음을 살피자.

$$\mathbf{Y}_u(u, v) = \mathbf{X}_v(u, v), \quad \mathbf{Y}_v(u, v) = -\mathbf{X}_u(u, v). \quad (4.6)$$

그리고 사실  $\mathbf{X}_u(u, v)$  와  $\mathbf{X}_v(u, v)$  는 서로 수직이며 그 길이는 같다. 그러므로  $\{\mathbf{Y}_u, \mathbf{Y}_v\}$  는  $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$  를  $\mathbf{G}$  를 축으로 하여 오른손 법칙을 따라  $90^\circ$  돌린 것이다. 이것이 의미하는 것 하나는

$$\mathbf{G}_{\mathbf{X}}(u, v) = \mathbf{G}_{\mathbf{Y}}(u, v)$$

이라는 것이다. 따라서  $T_{\mathbf{X}(u_0, v_0)}\mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$  와  $T_{\mathbf{Y}(u_0, v_0)}\mathbf{Y}(\mathbb{R}^2)$  는 같은 것으로 볼 수 있다.

이제  $S_{\mathbf{X}}$  와  $S_{\mathbf{Y}}$  의 관계를 보자. 먼저  $\mathbf{v}_P := a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v$  라고 하면 사실 (4.6)에 의해  $\mathbf{v}_P = b\mathbf{Y}_u - a\mathbf{Y}_v$  이기도 하다. 이제 다음을 살피자.

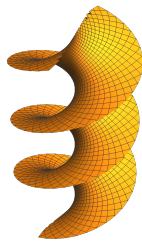
$$S_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}_P) = S_{\mathbf{X}}(a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v) = \operatorname{sech}^2 u (-a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v)$$

$$S_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v}_P) = S_{\mathbf{Y}}(b\mathbf{Y}_u - a\mathbf{Y}_v) = \operatorname{sech}^2 u (-a\mathbf{Y}_u + b\mathbf{Y}_v).$$

그런데  $S_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}_P) = \operatorname{sech}^2 u (b\mathbf{Y}_u + a\mathbf{Y}_v)$  이기도 하다. 따라서

$$S_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v}_P) = \mathcal{J} \circ S_{\mathbf{X}}(\mathbf{v}_P).$$

단 여기서  $\mathcal{J}$  는  $G_{\mathbf{X}}(u, v) = G_{\mathbf{Y}}(u, v)$  를 축으로 하여 오른손 법칙을 따라  $90^\circ$  돌리는 회전이다.



〈그림 4.1〉

연습문제 4.2.4. 다음 문제를 풀어 보자.

1. 상수  $\theta$ 에 대하여 곡면

$$\mathbf{Z}(u, v) := \cos \theta \mathbf{X}(u, v) + \sin \theta \mathbf{Y}(u, v)$$

의 가우스 사상  $\mathbf{G}_Z$ 을 계산하고 그것을  $\mathbf{G}_X = \mathbf{G}_Y$ 와 비교하여라.

2.  $\mathbf{Z}$ 의 모양 연산자  $S_Z$ 에 대하여  $S_Z(\mathbf{v}_P)$ 를  $S_X(\mathbf{v}_P)$ 와  $S_Y(\mathbf{v}_P)$ 의 선형결합으로 나타내어라.
3.  $S_Z$ 의 고유값과 고유벡터를 구하여라.
4. 임의의 점에서  $S_Z$ 의 점근방향은 주 방향을 이등분함을 보여라.

**질문 4.2.5.** 나선면의 매개식이 (3.1)와 같이 주어진 경우 곡률선, 점근선을 구하여 보아라.

**질문 4.2.6.** 식 (3.45)로 주어진 엔네퍼 곡면의 곡률선과 점근선을 그려보아라.

## 4.3 곧은 선

평면에서 직선은 여러 가지 특징을 가지고 있다. 두 점 사이를 잇는 모든 곡선 중 가장 길이가 짧은 곡선이라는 특징도 있고 모든 점에서 곡률이 0인 곡선이라는 특징도 있다. 이 절에서는 평면의 직선은 곡률이 모든 점에서 0인 곡선이라는 특징을 이용하여 곡면의 곧은 선의 개념을 생각해 보자. 이러기 위해서 새로운 종류의 곡률을 도입하고 그 곡률이 모든 점에서 0이 되는 곡선을 생각해 보자.

먼저 곡면에 있는 곡선의 곡률을 어떻게 생각해야 할 것인가를 생각해 보자. 곡선에 대해서는 이미 여러 가지 곡률을 살펴보았는데 이 장에서 새롭게 살펴보고자 하는 곡률은 측지 곡률이라는 것이다.

먼저 평면 곡선의 유향 곡률은, 곡선이 단위 속력을 가졌을 때 가속도의 유향 크기임을 떠올리자. 곡면  $S$ 의 곡선  $\alpha$ 에 대해서도  $\alpha$ 가 단위 속력을 가지고 움직일 때 그 가속도  $\ddot{\alpha}$ 의 유향 크기로 곡률을 생각해 보고 싶다. 하지만  $|\ddot{\alpha}|$ 은 이미 공간 곡선의 곡률  $\kappa$ 로 우리가 공부한 바 있다.

곡률  $\kappa$ 는 그 곡선이 들어 있는 곡면의 기하를 전혀 반영하고 있지 않다. 예를 들어 구면  $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 과 원기둥  $S_2 : x^2 + y^2 = 1$ 에 공통으로 들어 있는 곡선  $\alpha(s) = (\cos s, \sin s, 1)$ 을 생각해 보자.  $\alpha$ 는  $\alpha(0)$ 과  $\alpha(\pi)$ 를 잇는 최단 곡선인가?라는 질문에 대한 답은  $\alpha$ 가 어디에 있는 곡선인가?에 대한 답이

선행되지 않고선 답이 불가능하다.  $\alpha$ 를  $\mathbb{E}^3$ 에 있는 곡선으로 보면 아니오가 답이고 구면  $S_1$ 에 있는 곡선으로 보아도 아니오가 답이다. 그러나 원기둥  $S_2$ 에 있는 곡선으로 보면 예가 답이다.

이를 곡률의 입장에서 생각해 보자. 우리가 이제 정의하고자 하는 곡률은,  $\alpha$ 를 구면  $S_1$ 에 있는 곡면으로 볼 때는  $\alpha$ 의 곡률이 모든 점에서 0이 아닌 일정한 상수고  $\alpha$ 를 원기둥  $S_2$ 에 있는 곡선으로 볼 때는  $\alpha$ 의 곡률이 모든 점에서 0이었으면 한다.

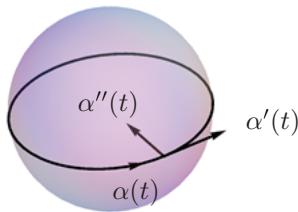
따라서  $\kappa = |\ddot{\alpha}|$ 은 곡면의 곧은 선을 들여다 보고자 할 때 적합한 개념이 아니다. 사실은,  $\ddot{\alpha}$ 이라는 것 자체에 대하여 재고해 보아야 한다.  $\ddot{\alpha}$ 은 곡면의 기하를 전혀 반영하고 있지 않기 때문이다. 그렇다면 곡면의 기하를 반영하여 곡선의 가속도를 생각하고자 한다면 어떻게 하면 될까?

이를 위해 곧은 선이 어떤 곡선이 되어야 하는지 알고 있는 곡면의 경우에 대하여 생각해 보자. 평면이 아닌 곡면 중에서 가장 간단한 곡면은 구면이라고 할 수 있는데 구면에서는 한 점에 말뚝을 박고 줄의 한끝을 매어 팽하게 당기면 이는 대원(大圓 great circle), 즉 구의 중심을 지나는 평면과 구의 공통부분,의 일부가 된다. 따라서 구면의 곧은선은 대원이 되어야 할 것이라고 생각할 수 있다. 자, 이제 대원의 가속도 벡터가 가지는 특징을 알아보자.

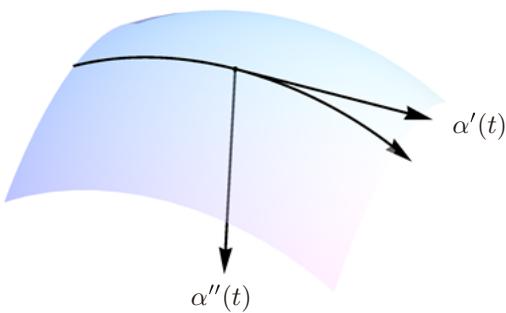
예 4.3.1. 중심이 원점에 있고 반지름이 1인 구를  $S$ 라 하자. 그리고,

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

이라 하자.  $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 는  $S$ 의 곡선이다. 속도 벡터  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ 는  $S$ 에 접하고 가속도 벡터  $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$ 은  $S$ 에 수직이며  $S$ 에 접하지 않는다.



곡면  $S \subset \mathbb{E}^3$ 에 곡선  $\boldsymbol{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{E}^3$ 가 있다고 하자. 이때 속도  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ 는 항상 곡면에 접하나, 가속도  $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ 는  $S$ 에 접할 이유가 없으며 사실 일반적으로  $\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ 는  $S$ 에 접하지 않는다:



가속도  $\ddot{\alpha}$ 으로부터 곡면의 기하를 반영한 정보를 끌어내기 위해  $\ddot{\alpha}$ 을 곡면(의 접평면)으로 사영한 성분과 곡면의 수직 방향으로 사영한 성분을 생각해보자.

$N$ 을 곡면에 수직인 단위 벡터라고 하자. 그러면  $\langle N, \ddot{\alpha} \rangle$ 은  $\ddot{\alpha}$ 의  $N$  방향으로의 크기가 된다. 이때 다음을 정의하자.

$$\ddot{\alpha}^N := \langle \ddot{\alpha}, N \rangle N, \quad \ddot{\alpha}^T := \ddot{\alpha} - \ddot{\alpha}^N$$

$\ddot{\alpha}^T$ 는  $\ddot{\alpha}$ 의 접성분,  $\ddot{\alpha}^N$ 는  $\ddot{\alpha}$ 의 법성분이다.

앞으로는  $\alpha$  가 단위 속력을 갖고 있다고 하자.<sup>4)</sup> 그러면  $\ddot{\alpha}$ 은  $\dot{\alpha}$ 과 수직인데, 이는  $\ddot{\alpha}^T$ 도  $\dot{\alpha}$ 에 수직하게 됨을 의미한다. 따라서  $\ddot{\alpha}^T$ 와  $N \times \dot{\alpha}$ 은 서로 평행하

---

4)  $\alpha$ 가 단위 속력을 갖고 있다는 것은 어디까지 필요한 이야기인가?

다. 결론적으로, 어떤 함수  $\kappa_g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대해<sup>5)</sup>

$$\ddot{\alpha}^T = \kappa_g \mathbf{N} \times \dot{\alpha}. \quad (4.7)$$

**정의 4.3.2.**  $\kappa_g$ 를  $\alpha$ 의  $S$ 에서의 측지 곡률(測地曲率, geodesic curvature)이라고 한다. 곡면에 있는 곡선의 측지 곡률이 모든 점에서 0이면 그 곡선을 그 곡면의 측지 선(測地線, geodesic) 또는 곧은 선이라 한다.

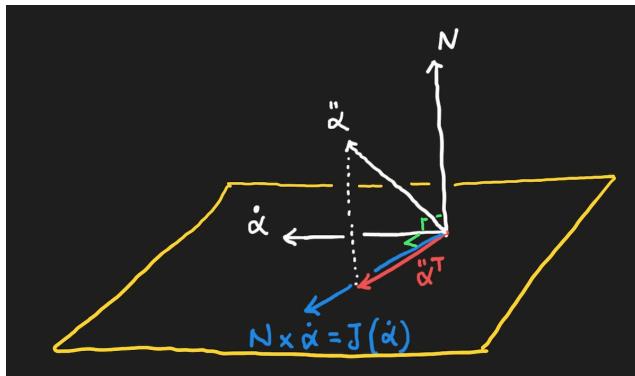
측지 곡률을 평면 곡선의 유향 곡률을 일반화한 개념이다. 이를 더 자세히 보기 위하여 다음 함수  $\mathcal{J}$ 를 정의한다.

**정의 4.3.3.**

$$\mathcal{J} : TM \rightarrow TM, \quad \mathcal{J}(\mathbf{v}_p) := \mathbf{N}_p \times \mathbf{v}_p \quad (4.8)$$

---

5) 여기서  $\mathbf{N} \times \dot{\alpha}$ 이 아닌  $\dot{\alpha} \times \mathbf{N}$ 을 택하면 부호가 어떻게 되는지 생각해 보아라.



그러면  $\mathcal{J}(v_p)$ 는 접평면에서  $v$ 를 양의 방향으로  $90^\circ$  돌린 것이다. 그러면 식 (4.7)은 다음과 같다.

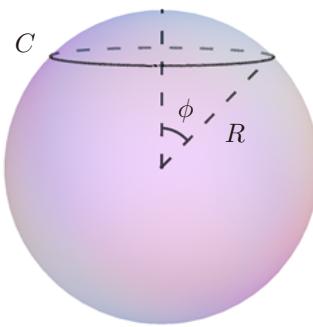
$$\ddot{\alpha}^T = \kappa_g \mathcal{J}(\dot{\alpha}). \quad (4.9)$$

이는 평면곡선의 유향곡률  $\kappa_2$ 의 성질에 관한 식 (1.22)을 일반화한 것이다.

$N \times \dot{\alpha}$ 의 길이가 1이기 때문에  $|\kappa_g|$ 는  $\ddot{\alpha}^T$ 의 길이를 나타낸다.  $\kappa_g$ 의 부호는 곡선이 어느 방향으로 휘는가 하는 것을 나타낸다. 또한 다음이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\kappa_g = \ddot{\alpha}^T \cdot N \times \dot{\alpha} = \ddot{\alpha} \cdot N \times \dot{\alpha} = N \cdot \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}. \quad (4.10)$$

예 4.3.4. [16, 249쪽] (측지 곡률의 계산)



반지름이  $R$ 인 구에서 여위도(餘緯度 colatitude)  $\phi$ 가 상수인 원  $C$ 를 생각하자.  $C$ 의 반지름은  $R \sin \phi$ 이므로 공간 곡선으로서의 곡률은  $\frac{1}{R \sin \phi}$ 이다. 따라서  $C$ 를 단위 속력으로 매개화한 식을  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{E}^3$ 라 하면

$$|\ddot{\alpha}(s)| = |\text{곡률}| = \frac{1}{R \sin \phi}.$$

이때,  $\ddot{\alpha}(s)$ 의 접평면으로의 성분의 크기는

$$|\ddot{\alpha}^T(s)| = |\ddot{\alpha}(s)| \cos \phi = \frac{1}{R} \cot \phi.$$

즉, 여위도의 값이  $\phi$ 인 점들로 이루어진 원의 측지 곡률은 모든 점에서  $\frac{1}{R} \cot \phi$ 이다.

이를 매개 변수식을 이용하여 다시 한번 더, 이번에는 기계적으로, 계산하면 다음과 같다. 일단 우리가 생각하고 있는 원은 다음과 같은 매개식으로 나타낼

수 있다.

$$\alpha(s) = R \left( \sin \phi \cos \left( \frac{s}{R \sin \phi} \right), \sin \phi \sin \left( \frac{s}{R \sin \phi} \right), \cos \phi \right) \quad (R, \phi \text{는 상수.})$$

이렇게 식이 주어지는 이유를 잠시 생각해 보아라. 자, 이제

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(s) &= \left( -\sin \left( \frac{s}{R \sin \phi} \right), \cos \left( \frac{s}{R \sin \phi} \right), 0 \right), \\ \ddot{\alpha}(s) &= \frac{-1}{R \sin \phi} \left( \cos \left( \frac{s}{R \sin \phi} \right), \sin \left( \frac{s}{R \sin \phi} \right), 0 \right).\end{aligned}$$

구면의 수직 벡터는  $\mathbf{N}(s) = \frac{1}{R} \alpha(s)$  이므로<sup>6)</sup>

$$\ddot{\alpha}^N(s) = \langle \ddot{\alpha}(s), \mathbf{N}(s) \rangle \mathbf{N}(s) = \frac{1}{R^2} \langle \ddot{\alpha}(s), \alpha(s) \rangle \alpha(s) = -\frac{\alpha(s)}{R^2}.$$

따라서

$$|\ddot{\alpha}^T(s)|^2 = |\ddot{\alpha}(s)|^2 - |\ddot{\alpha}^N(s)|^2 = \frac{1}{R^2 \sin^2 \phi} - \frac{1}{R^2} = \frac{\cot^2 \phi}{R^2}.$$

따라서

$$|\kappa_g| = |\ddot{\alpha}^T(s)| = \frac{|\cot \phi|}{R}.$$

여기서 측지 곡률의 부호를 어떻게 결정하면 좋을지 생각해 보아라.

6) 이렇게 수직 벡터를 취하면 구면의 평균 곡률은 음이다. 구면의 평균 곡률이 양이 되도록 하려면 구의 안으로 향하는 수직 벡터를 택해야 한다. 3장8절에서 회전 곡면의 수직 벡터를 택할 때 안으로 향하는 벡터를 취했었다.

이제 임의의 속력을 가진 곡선의 측지곡률은 어떻게 계산하는지 알아보자.  $\beta : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset \mathbb{E}^3$ 가 임의의 속력을 가진 정칙 곡선이라 하자. 이제 임의의  $c \in (a, b)$ 를 고정하고  $s(t) := \int_c^t |\beta'(\tilde{t})| d\tilde{t}$ 라 하면  $s$ 는 역함수를 가진다. 이의 역함수를  $t = t(s)$ 라 하면  $\alpha(s) := \beta \circ t(s)$ 는 단위속력을 가진다. 따라서 앞에서 만든 식을 적용하여 측지곡률을 계산할 수 있다. 이에 의하면

$$\dot{\alpha} = \beta' \dot{t}, \quad \ddot{\alpha} = \beta'' \dot{t}^2 + \beta' \ddot{t}, \quad \dot{t}(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\beta'(t)|},$$

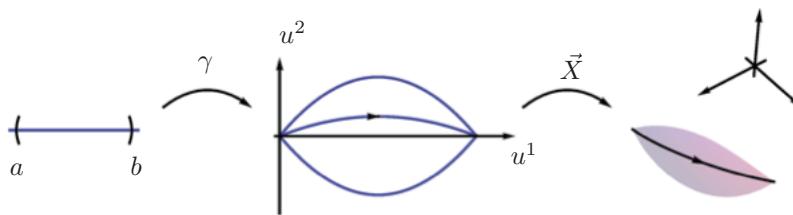
$$\kappa_g = \mathbf{N} \cdot \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} = \mathbf{N} \cdot \beta' \dot{t} \times (\beta'' \dot{t}^2 + \beta' \ddot{t}) = \dot{t}^3 \mathbf{N} \cdot \beta' \times \beta''$$

따라서 다음이 성립한다.

**보조정리 4.3.5.** 곡면의 임의속력곡선  $\beta$ 의 측지곡률은 다음과 같다.

$$\kappa_g[\beta](t) = \frac{\mathbf{N} \cdot \beta' \times \beta''}{|\beta'|^3}.$$

이제 곡면의 지도  $\mathcal{U}$ 에 있는 곡선  $\gamma$ 에 대하여  $\alpha = \mathbf{X} \circ \gamma$ 라 하자. 그러면  $\ddot{\alpha}^T$  을  $\mathbf{X}$ 와  $\gamma$ 로 표현할 수 있을까?



이를 위해서  $\mathbf{X}$ 의 이계 미분을 잘 알 필요가 있다. 계산을 간단하게 쓰기 위하여 먼저

$$u^1 := u, \quad u^2 := v, \quad \mathbf{X}_k := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^k}, \quad \mathbf{X}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial u^j \partial u^i}$$

라 하자. 이제 식 (3.22)에 정의된  $g_{ij}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g_{ij} = \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle, \quad A_{ij} = -\langle \mathbf{G}_i, \mathbf{X}_j \rangle. \quad (4.11)$$

<sup>7)</sup> 이 때 다음과 같이  $g^{ij}$ 를 정의하자.

#### 정의 4.3.6.

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = g^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

---

7)  $g_{ij}$ 는  $\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^i}$ 가 아니다.

임의의  $(u, v) \in \mathcal{U}$ 에 대하여  $\mathbf{X}_1(u, v)$ ,  $\mathbf{X}_2(u, v)$ ,  $\mathbf{G}(u, v)$ 은 벡터 공간  $\mathbb{E}^3$ 의 기저를 이룬다. 따라서 모든 벡터는  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{G}$ 의 선형 결합으로 나타낼 수 있는데 이는 특히  $\mathbf{X}_{ij}$ 에 대해서도 사실이다. 이 때 그 계수를 표현하기 위하여 다음 기호를 도입한다.

참 여기서부터는 기호를 간단하게 나타내기 위하여 아인슈타인의 합 표기법을 적용하여 식을 쓴다.

**정의 4.3.7.**  $i, j, k \in \{1, 2\}$ 에 대하여  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에 정의된 다음 함수를 각각 첫째 크리스토펠 기호, 둘째 크리스토펠 기호라 한다.

$$[ij, k] := \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik}), \quad \Gamma_{ij}^k := g^{km}[ij, m] \quad (4.13)$$

**질문 4.3.8.**  $[ij, k] = [ji, k]$ ,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ 임을 증명하여라.

한편  $\ell_{11} = L$ ,  $\ell_{12} = \ell_{21} = M$ ,  $\ell_{22} = N$ 으로 정의하자. 그러면 다음이 성립한다.

**보조정리 4.3.9.**

$$\mathbf{X}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k + \ell_{ij} \mathbf{G}, \quad \{i, j\} \subset \{1, 2\}. \quad (4.14)$$

**증명** 일단 다음을 만족시키는  $\mathring{\Gamma}_{ij}^k$ ,  $\mathring{\ell}_{ij}$  가 유일하게 존재함은 자명하다.

$$\mathbf{X}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \mathring{\Gamma}_{ij}^k \mathbf{X}_k + \mathring{\ell}_{ij} \mathbf{G}, \quad \{i, j\} \subset \{1, 2\}. \quad (4.15)$$

이 때  $\mathring{\ell}_{ij} = \ell_{ij}$  은 쉽게 알 수 있다. 이제 (4.15)와  $\mathbf{X}_m$ 의 내적을 생각하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_m = \mathring{\Gamma}_{ij}^k \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_m = \mathring{\Gamma}_{ij}^k g_{km} \quad m \in \{1, 2\}.$$

이를 행렬을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{\Gamma}_{ij}^1 \\ \mathring{\Gamma}_{ij}^2 \end{bmatrix}$$

따라서

$$\begin{bmatrix} \mathring{\Gamma}_{ij}^1 \\ \mathring{\Gamma}_{ij}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{21} \\ g^{12} & g^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

이를 다시 아인슈타인의 합 기호법을 써서 나타내면

$$\mathring{\Gamma}_{ij}^k = g^{mk} \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_m. \quad (4.17)$$

이미 이 식으로  $\mathring{\Gamma}_{ij}^k$  를 계산하는데 문제가 없지만 나중을 위하여 조금 더 나아가자. 다음을 살피자.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_m &= \partial_i(\mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_m) - \mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_{mi} \\ &= \partial_i(\mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_m) - \partial_m(\mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_i) + \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_{jm} \\ &= \partial_i(\mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_m) - \partial_m(\mathbf{X}_j \cdot \mathbf{X}_i) + \partial_j(\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_m) - \mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_m. \end{aligned}$$

그러므로

$$\mathbf{X}_{ij} \cdot \mathbf{X}_m = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jm} - \partial_m g_{ij} + \partial_j g_{im}) = [ij, m]. \quad (4.18)$$

따라서 (4.17), (4.18)에 의하여  $\mathring{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ . ■

크리스토펠 기호는 미분기하를 깊게 공부할 때 매우 중요하며 우리는 5장에서 이 기호를 매우 자주 사용할 것이다.

편의상 임의의  $A$ 에 대하여  $\tilde{A}(t) := A \circ \boldsymbol{\gamma}(t)$  라 하자. 그러면<sup>8) 9)</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{X} \circ \boldsymbol{\gamma}) = \tilde{\mathbf{X}}_1 \dot{\gamma}^1 + \tilde{\mathbf{X}}_2 \dot{\gamma}^2 = \tilde{\mathbf{X}}_k \dot{\gamma}^k, \\ \ddot{\alpha} &= \dot{\tilde{\mathbf{X}}}_k \dot{\gamma}^k + \tilde{\mathbf{X}}_k \ddot{\gamma}^k = \tilde{\mathbf{X}}_{kl} \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \tilde{\mathbf{X}}_k \ddot{\gamma}^k \\ &= (\tilde{\Gamma}_{kl}^m \tilde{\mathbf{X}}_m + \tilde{\ell}_{kl} \tilde{\mathbf{G}}) \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \tilde{\mathbf{X}}_k \ddot{\gamma}^k \\ &= (\tilde{\Gamma}_{kl}^m \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^m) \tilde{\mathbf{X}}_m + (\tilde{\ell}_{kl} \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k) \tilde{\mathbf{G}}, \\ \ddot{\alpha}^T &= (\tilde{\Gamma}_{kl}^m \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^m) \tilde{\mathbf{X}}_m. \end{aligned} \quad (4.19)$$

위 식에 착안하여 다음을 정의한다.

8) 마지막 항에서 아인슈타인의 합 표기법을 사용하였다.

9) 기호가 ...

정의 4.3.10. 다음을 곡면  $X$ 의 곧은 선 연립 방정식 또는 간단히 곧은 선 방정식이라 한다.

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma^1(t), \gamma^2(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) = 0 \quad k \in \{1, 2\} \quad (4.20)$$

이로부터 다음이 따라 나온다.

보조정리 4.3.11. 곡면의 곡선  $\alpha$ 가 단위속력을 가지고 있고 지도의 곡선  $\gamma$ 에 대하여  $\alpha = X \circ \gamma$ 라 하자. 이 때 다음 네 조건은 서로 필요충분조건이다.

- (1)  $\alpha$ 는 곧은선이다.
- (2)  $\alpha$ 의 측지곡률은 모든 점에서 0이다. 즉  $\kappa_g[\alpha](t) = 0$ .
- (3)  $\alpha$ 의 가속도의 접성분은  $\mathbf{0}$ 이다. 즉  $\ddot{\alpha}^T(t) = \mathbf{0}$ .
- (4)  $\gamma$ 가 곧은선 방정식 (4.20)을 만족시킨다.

**증명** 정의 4.3.2와 식 (4.9), (4.19)로부터 따라나온다. ■

위 내용에서  $\alpha$ 가 단위속력을 가짐을 가정하고 이론을 전개하였다. 그런데 사실은 다음이 성립한다.

정리 4.3.12.  $\gamma$ 가 곧은 선 방정식을 만족시키면  $X \circ \gamma$ 는 항상 일정한 속력을 가진다.

증명은 여러분에게 남긴다.

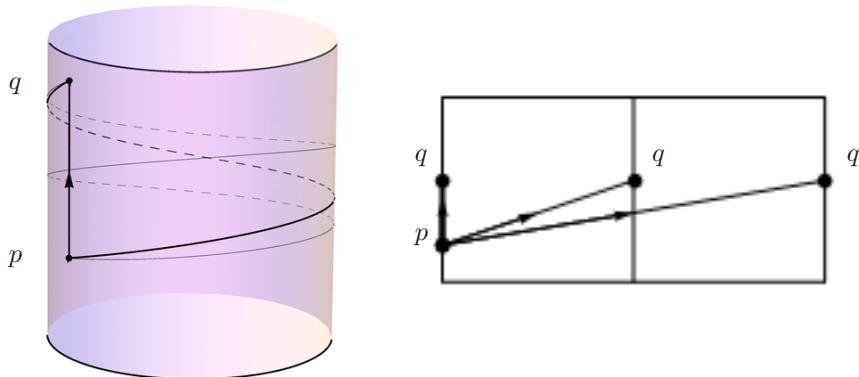
**예 4.3.13.** 구 위의 곧은 선 :  $S$ 가  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 로 주어졌을 때 대원  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ 이 곧은 선임을 이미 알고 있다.  $\ddot{\alpha}(t)$ 는  $\mathbf{0}$ 이 아니지만  $\ddot{\alpha}(t)^T = \mathbf{0}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

**질문 4.3.14.** 구면에서 대원이 아닌 곡선 중 곧은 선인 것이 있을까? 없을까?

두 점은 잇는 곧은 선은 존재하지 않을 수도 있고 유일하지 않을 수도 있다.

**예 4.3.15.** 곡면  $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : z = 0, x^2 + y^2 > 1\}$ 에 대하여  $(2, 0, 0)$ 과  $(-2, 0, 0)$ 을 잇는 곧은선은 없다.

**예 4.3.16.** 원주면의 두 점  $p$ 와  $q$ 를 잇는 원주면의 곧은선을 생각할 때 원주면을 펼쳐서 만든 지도에서 생각하면 편리하다. 그림에서 보이는 것과 같이  $p$ 와  $q$ 를 잇는 곧은선은 무수히 많다.



곧은 선에 대하여 다음이 성립한다.

**정리 4.3.17.** 곡선  $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ , 곡면  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 에 대하여  
 $\alpha := \mathbf{X} \circ \gamma$ 가 단위속력을 가진 곧은 선이라고 한다. 그러면

- $\ddot{\alpha}$ 은 곡면에 수직이다.
- $\kappa[\alpha] = |\ddot{\alpha}| = \pm \langle \ddot{\alpha}, \mathbf{N} \circ \alpha \rangle$

**증명** 정의로부터 당연하다. ■

**정리 4.3.18.**  $\alpha$ 가 단위 속력을 가진 곧은 선이면

$$\tau[\alpha] = -\langle S\dot{\alpha}, \mathcal{J}\dot{\alpha} \rangle.$$

**증명**  $\alpha$ 의 프레네 틀을  $T, N, B$ 라 하고 곡면의 단위 수직 벡터를  $N$ 이라 하면  $\alpha$ 가 곧은 선이라는 사실로부터  $N(t) = G \circ X \circ \gamma(t)$ . 따라서<sup>10)</sup>

$$\tau := \langle B, \dot{N} \rangle = \langle \mathcal{J}T, \dot{G} \rangle = -\langle \mathcal{J}\dot{\alpha}, S(\dot{\alpha}) \rangle.$$



$\mathcal{J}$  연산자는 다음과 같이 표현할 수 있다.

**보조정리 4.3.19.** 곡면  $X$ 의 접벡터  $a^i X_i$ 에 대하여  $\mathcal{J}(a^i X_i) = b^k X_k$  라 하면

$$\begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \sqrt{\det g} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{21} \\ g^{12} & g^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a^2 \\ a^1 \end{bmatrix}$$

**증명**  $\mathcal{J}(a^i X_i) = G \times (a^i X_i) = b^k X_k$  라 하자. 따라서

$$\langle b^k X_k, X_l \rangle = \langle G \times (a^i X_i), X_l \rangle = a^i \langle G, X_i \times X_l \rangle.$$

그런데  $a^i \langle G, X_i \times X_1 \rangle = -a^2 \sqrt{\det g}$ ,  $a^i \langle G, X_i \times X_2 \rangle = a^1 \sqrt{\det g}$  이므로 위 식은 다음을 의미한다.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \sqrt{\det g} \begin{bmatrix} -a^2 \\ a^1 \end{bmatrix}$$

---

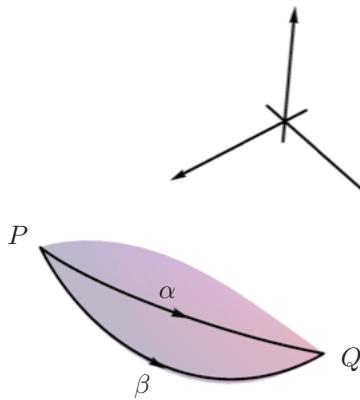
10) 증명이 조금 이상하다.

따라서 결론이 성립한다.



## 4.4 최단선

앞 절에서는 곡면의 곧은 선에 대하여 알아보았는데 이 절에서는 곡면의 두 점 사이를 잇는 곡선들 중에서 가장 짧은 곡선에 대하여 알아보자.



**정의 4.4.1.** 곡면의 서로 다른 두 점  $P$ 와  $Q$ 를 잇는 한 곡선  $\alpha$ 에 대하여 다음 조건이 성립하면  $\alpha$ 를 곡면의  $P$ 와  $Q$  사이의 최단선이라 한다.

$P$ 와  $Q$ 를 잇는 곡면의 임의의 곡선  $\tilde{\alpha}$ 에 대하여  $\alpha$ 의 길이  $\leq \tilde{\alpha}$ 의 길이.

(4.21)

이 조건이 주어지면  $\alpha$ 를 어떻게 결정할 수 있을까? 이에 대한 해법은, 주어진 둘레를 가지는 곡면 중에서 가장 작은 넓이를 가지는 곡면의 평균 곡률이 어떠한 점에서도 모두 0이 됨을 보였던 것과 비슷한 과정을 따라 얻어진다. 이에 대하여 자세히 알아보자.

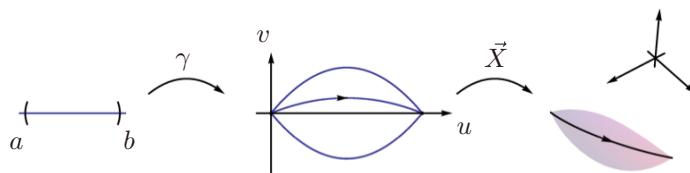
이를 위하여 곡면이 아닌 곡면의 지도에서 주어진 상황을 생각하도록 하자. 지도에서 문제를 해결하는 것은 직접 곡면에서 문제를 해결하는 것보다 계산이 쉽다. 다음과 같이 생각하자. 곡면  $S$ 는  $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 의 이미지로 주어졌다고 하고 곡선  $\alpha$ 는 다음과 같은 지도의 곡선

$$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$$

에 대하여

$$\alpha = X \circ \gamma$$

로 주어진다고 하자. 이제 우리의 질문은,  $\alpha$ 가 최단곡선일 때  $\gamma$ 의 성분함수인  $\gamma^1(t)$ 와  $\gamma^2(t)$ 가 만족하는 식이 있는가? 있다면 어떤 식인가? 하는 것이다. 여기서  $\gamma^i$ 는 정의역이  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , 공변역이  $\mathbb{R}$ 인 함수임을 기억하자.



자, 이제 곡면의 두 점  $P$ 와  $Q$ 를 지나는 임의의 곡선  $\tilde{\alpha}$ 를 어떻게 나타낼까 생각해 보자. 이를 위하여 다음과 같이 지도에서  $\gamma(a)$ 와  $\gamma(b)$ 를 잇는 곡선들을 생각하자.

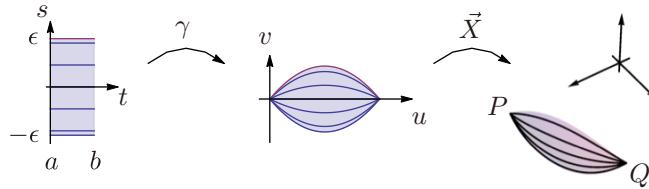
**정의 4.4.2.** 곡선  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 의 변형(變形, variation)이란, 다음 성질을 만족하는 함수  $\Gamma$ 를 말한다.<sup>11)</sup>

$$\Gamma : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$\text{모든 } t \in [a, b] \text{에 대하여 } \Gamma(t, 0) = \gamma(t),$$

$$\text{모든 } s \in (-\epsilon, \epsilon) \text{에 대하여 } \Gamma(a, s) = \gamma(a), \quad \Gamma(b, s) = \gamma(b).$$

$\Gamma$ 의 정의역과 치역은 다음과 같이 그려진다.



고정된 값  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ 에 대하여

$$t \in [a, b] \mapsto \Gamma(t, s)$$

---

11) 이  $\Gamma$ 와 크리스토펠 부호를 나타내는  $\Gamma_{ij}^k$ 는 서로 다르다.

는  $\gamma(a)$  와  $\gamma(b)$  를 잇는 지도의 곡선이 되고

$$t \in [a, b] \mapsto \mathbf{X} \circ \Gamma(t, s)$$

는  $P$  와  $Q$  를 잇는 곡면의 곡선이 된다.

자, 이제  $(-\epsilon, \epsilon)$  에 정의된 함수  $l$  을 생각하자:

$$l : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad l(s) := \mathbf{X} \circ \Gamma(\cdot, s) \text{의 길이}.$$

이 함수는 조건 (4.21) 때문에  $s = 0$  에서 최솟값을 가진다. 즉,

$$\text{모든 } s \in (-\epsilon, \epsilon) \text{ 에 대하여 } l(0) \leq l(s).$$

이것이  $\alpha$  가 최단 곡선이라는 말을 수식으로 표현한 것이다. 자, 이 조건이  $\gamma^i$  에 대하여 어떤 식을 주는지 알아보자.

미적분학에 등장하는 최대, 최소의 정리에 의해서

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} l(s) = 0. \tag{4.22}$$

이 식이 주어진 함수  $\gamma^1(t)$  과  $\gamma^2(t)$  에 대하여 무엇을 말할 수 있는지 살펴보자.

이제  $l(s)$  가  $s$  에 대해 어떤 식으로 표현되는지를 살펴보자. 여기서부터는 기호가 또다시 복잡해진다. 여러 함수의 합성이 나타나기 때문에 주어진 표현식이 함수라면 그 정의역, 공변역이 무엇인지 명확하게 하는 것이 중요하다.

이제 위 식 (4.22)를 분석하려고 하는데 편의상  $\Gamma(t, s)$  의 성분을  $u^1(t, s)$  와  $u^2(t, s)$  로 나타내자. 즉,

$$\Gamma(t, s) = (u^1(t, s), u^2(t, s)).$$

$l(s)$ 는 다음 식과 같이 주어짐을 이해하자<sup>12)</sup>:

$$\begin{aligned} l(s) &= \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{X} \circ \Gamma(t, s)) \right| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(g_{ij} \circ \Gamma)(t, s) \frac{\partial u^i}{\partial t}(t, s) \frac{\partial u^j}{\partial t}(t, s)} dt. \end{aligned}$$

여기서 이 식이  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에 정의된 식만 이용하고 있음에 주목하라. 복잡한 기호가 나타나는 것을 줄이기 위하여 앞으로는  $\frac{\partial}{\partial t}$ 를  $\cdot$ 로 나타내기로 한다. 그리고 혼돈의 염려가 없는 경우  $(t, s)$ 를 쓰는 것은 생략하기로 한다. 그리고  $g_{ij} \circ \Gamma$ 는  $\bar{g}_{ij}$ 로,  $\Gamma_{ij}^k \circ \Gamma$ 는  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ 로 나타내기로 한다. 그러면

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} l(s) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \sqrt{\bar{g}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt = \int_a^b \frac{\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\bar{g}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j)}{2 \sqrt{\bar{g}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} dt.$$

이제 피적분함수를 좀 더 자세히 들여다 보고 싶은데 지금으로선 식이 참으로 복잡하여 무엇을 어떻게 하여야 할지 난감하다. 그런데 한 가지 가정을 함으로써 피적분함수를 간단하게 만들 수 있다. 착안점은, 모든 정칙 곡선은 속도를 조절하여 항상 속력이 1이 되도록 할 수 있다는 것이다. 즉, 주어진 곡선  $\gamma$ 에 대하여  $|(\mathbf{X} \circ \gamma)'(t)| \equiv 1$ 이라 할 수 있는데, 이는 다음 조건과 동치다.

$$\text{모든 } t \text{에 대하여 } \sqrt{\bar{g}_{ij}(t, 0) \dot{u}^i(t, 0) \dot{u}^j(t, 0)} = 1.$$

---

12) 아인슈타인의 합 표기법을 이용하였음.

우리가 다루는 곡선은 재매개를 통해서 이런 조건을 만족하도록 변화시킬 수 있으므로 애초에 이러한 식이 성립한다 하여도 된다. 따라서

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} l(s) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\bar{g}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j) dt. \quad (4.23)$$

이제 피적분함수를 분석하자. 먼저 다음을 알 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \bar{g}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \right) = \left( \frac{\partial}{\partial s} \bar{g}_{ij} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j + \bar{g}_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial s} \dot{u}^i \right) \dot{u}^j + \bar{g}_{ij} \dot{u}^i \left( \frac{\partial}{\partial s} \dot{u}^j \right)$$

이때  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} := g_{ij,k}$ ,  $\bar{g}_{ij,k} := g_{ij,k} \circ \Gamma$ 라 하면

$$\frac{\partial}{\partial s} \bar{g}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \circ \Gamma \right) \frac{\partial u^k}{\partial s} = \bar{g}_{ij,k} \frac{\partial u^k}{\partial s}, \quad \bar{g}_{ij} \dot{u}^i \left( \frac{\partial}{\partial s} \dot{u}^j \right) = \bar{g}_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial s} \dot{u}^i \right) \dot{u}^j.$$

위에서 두 번째 식은  $g_{ij} = g_{ji}$ 여서 성립한다. 따라서,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \bar{g}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \right) &= \bar{g}_{ij,k} \frac{\partial u^k}{\partial s} \dot{u}^i \dot{u}^j + 2\bar{g}_{ij} \dot{u}^j \left( \frac{\partial}{\partial s} \dot{u}^i \right) \\ &= \bar{g}_{ij,k} \frac{\partial u^k}{\partial s} \dot{u}^i \dot{u}^j + \frac{\partial}{\partial t} \left[ 2\bar{g}_{ij} \dot{u}^j \frac{\partial}{\partial s} u^i \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( 2\bar{g}_{ij} \dot{u}^j \right) \frac{\partial}{\partial s} u^i. \end{aligned}$$

두 번째 등호는  $\frac{\partial}{\partial s} \dot{u}^i = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} u^i = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} u^i$  를 이용하면 얻어진다. 그런데  $\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left[ 2\bar{g}_{ij} \dot{u}^j \frac{\partial}{\partial s} u^i \right] dt \Big|_{s=0} = 0$  이다.<sup>13)</sup> 따라서 (4.22), (4.23)로부터 다음이 따라 나온다.

$$0 = \int_a^b \left[ \bar{g}_{ij,k} \dot{u}^i \dot{u}^j - 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{g}_{kj} \dot{u}^j \right) \right]_{s=0} \frac{\partial}{\partial s} u^k dt. \quad (4.24)$$

---

13)  $u_s^i(a, s) = u_s^i(b, s) = 0, \forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$  이기 때문에 그렇다.

이로부터 유도될 수 있는 미분방정식이 무엇인지 생각해 보자. 이제  $\gamma$ 의 변형  $\Gamma$ 를 조금 특수한 형태로 고른다. 즉,  $k = 1$  또는  $2$ 에 대하여 구간  $[a, b]$ 에서 정의된 두 함수  $h^k : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ 가  $h^k(a) = h^k(b) = 0$ 를 만족할 때,

$$\mathbf{h}(t) := (h^1(t), h^2(t)), \quad \Gamma(t, s) := \gamma(t) + s \mathbf{h}(t)$$

라고 정의하자. 그러면 이  $\Gamma$ 는 이제까지 사용된 변형의 조건을 만족하는 잘 정의된 변형이다. 이러면

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} u^k(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\gamma^k(t) + s h^k(t)) = h^k(t)$$

가 되며 식 (4.24)는 다음과 같다.

$$0 = \int_a^b \left[ \bar{g}_{ij,k} \dot{u}^i \dot{u}^j - 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{g}_{kj} \dot{u}^j \right) \right]_{s=0} h^k(t) dt \quad (4.25)$$

이것이 끝점조건을 만족하는 임의의 함수  $\mathbf{h} = (h^1, h^2)$ 에 대하여 성립하므로  $k = 1, 2$ 에 대하여 다음 식이 얻어진다. <sup>14)</sup>

$$\bar{g}_{ij,k}(t, 0) \dot{u}^i(t, 0) \dot{u}^j(t, 0) - 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{g}_{kj}(t, 0) \dot{u}^j(t, 0) \right) = 0. \quad (4.26)$$

이 식은 다음과 같다.

$$g_{ij,k}(\gamma^1(t), \gamma^2(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) - 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( g_{kj}(\gamma^1(t), \gamma^2(t)) \dot{\gamma}^j(t) \right) = 0. \quad (4.27)$$

---

14) 3.6절의 내용과 비교해 볼 것. 식 (4.26)이 (4.25)로부터 유도되는 과정을 자세히 설명하여라.

기호를 간단하게 하기 위하여  $\tilde{g}_{ij,k}(t) := g_{ij,k}(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ , 라 하자. 위 식을 정리하면<sup>15)</sup>

$$0 = \tilde{g}_{ik}\ddot{\gamma}^i + \frac{1}{2}(\tilde{g}_{ik,j} + \tilde{g}_{jk,i} - \tilde{g}_{ij,k})\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = \tilde{g}_{ik}\ddot{\gamma}^i + [ij, k]\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j. \quad (4.28)$$

이때  $\tilde{g}^{km}$  을 다음 식에 의해 정의하자.

$$\tilde{g}^{km}(t) := g^{km} \circ \gamma(t). \quad (4.29)$$

이 기호를 이용하면 (4.28)은 다음 식과 같다.  $k \in \{1, 2\}$  에 대하여

$$0 = \ddot{\gamma}^k + \tilde{g}^{km}[ij, m]\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = \ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k(\gamma^1, \gamma^2)\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j. \quad (4.30)$$

이는 정의 4.3.10에 나와 있는 곧은 선 방정식이다. 그러므로 다음이 성립한다.

**정리 4.4.3.** 최단 선은 곧은 선이다.

정리 4.4.3의 역은 성립하지 않는다. 즉 곧은 선은 최단 선이 아닐 수도 있다. 이는, 미적분에서, 함수  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  가  $x_0$  에서 최솟값을 가지면 일반적으로  $f'(x_0) = 0$  이나 거꾸로  $f'(x_0) = 0$  이라고 해서  $f$  가  $x_0$  에서 최솟값을 가지는 건 아니라는 것과 일맥상통한다.

**예 4.4.4.** 원기둥  $\mathbf{X}(u, v) := (\cos \frac{u}{\sqrt{2}}, \sin \frac{u}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}})$  에서  $\gamma(s) = (s, s)$  (단  $0 \leq t \leq 2\sqrt{2}\pi$ ) 를 생각하라. 그러면  $\mathbf{X} \circ \gamma$  는  $P(1, 0, 0)$  과  $Q(1, 0, 2\pi)$  을 잇는 곧은 선이나 최단 선은 아니다.

---

15) 반드시 실제로 해 볼 것.

하지만  $f'(x_0) = 0$ 이 되는 점  $x_0$ 들 중에서  $f$ 가 최솟값을 갖는 점이 얻어지기 때문에  $f'(x) = 0$ 이라는 미분방정식을 중요하게 생각한다. 곡면의 최단 선을 찾을 때도 위와 같은 이유로 일단 미분 연립 방정식 (4.20)을 만족하는 곡선을 찾는다.

**쉬어가는 코너** : 수학에 변분법(變分法 Calculus of Variation)이라는 분야가 있는데 이는, 간단히 말하여, 어떤 함수들의 집합  $A$ 에 정의된  $\mathcal{L} : A \mapsto \mathbb{R}$ 가  $f \in A$ 에서 최솟값이나 최댓값을 가지면  $f$ 가 어떤 미분방정식을 만족하게 된다는 것을 보이고 그를 이용하여 주어진 문제를 해결하고자 하는 분야다. 많은 재미있는 미분방정식들이 변분법을 통하여 얻어진다. 극소 곡면 방정식이나 곧은선 방정식이 우리가 이제까지 다룬 예다.

## 4.5 회전면의 곧은 선

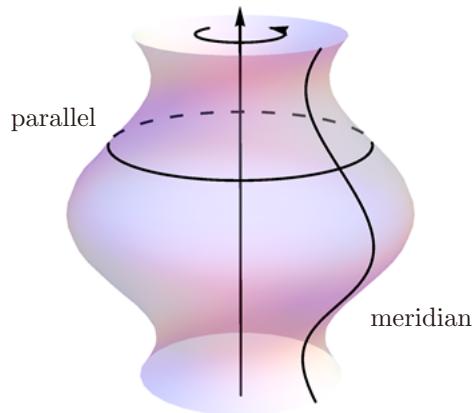
<sup>16)</sup> 앞에서 구한 곧은 선 방정식은 임의의 곡면에 대해 얻어진 것이다. 자, 곡면이 특별히 회전면이라면 곧은선 방정식은 어떠한 형태를 띘까? 회전면의 어떤 곡선이 곧은선이 될까?

이를 알아보기 위하여 회전면의 식을 다음과 같이 생각하자. 먼저  $xz$ -평면에 있는 곡선  $u \mapsto (f(u), 0, g(u))$ 를 생각하고 이를  $z$ -축에 대하여 회전시킨다. 돌아가는 각도를  $v$ 라 하면 회전곡면은 다음 함수의 이미지로 주어진다.

$$\mathbf{X}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)). \quad (4.31)$$

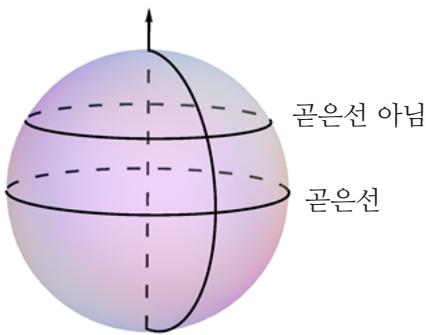
---

16) 이 절의 그림들을 바꿔야 한다.  $u, v$ 를 바꾼 탓이다.



식 (4.31)에 대하여  $u =$  상수인 직선의 이미지를 회전면의 위선(緯線 parallel),  $v =$  상수인 직선의 이미지를 회전면의 경선(經線 meridian)이라고 한다.

회전면의 많은 곡선 중 경선과 위선에 대해서만 곧은선인지 아닌지 판별해 보기로 하자. 먼저 결과에 대한 직관을 얻기 위하여 회전면의 일종인 구에 대해서 살펴보자. 예 4.3.1의 결과를 해석하면 구의 모든 경선은 다 곧은선이나 모든 위선이 다 곧은선이 되는 것은 아님을 알 수 있다. 따라서 다음을 예상할 수 있다: 회전면의 모든 경선은 곧은선이나 위선 중에서 어떤 건 곧은선이고 어떤 건 곧은선이 아니다.



이를 두 가지 방법으로 알아보자. 한 문제를 여러 방법으로 풀어 보는 것은 다양한 시각을 키워 주어 나중에 이 이론을 일반화할 때 도움이 될 수 있다. 물론 여러 가지 방법으로 풀 수 있다는 것 자체도 재미있는 일이고.

첫 번째는 4장 1절에서 다룬, 곧은 선 방정식이 유도된 과정을 따라가는 것이다. 먼저 경선에 대해 생각해 보자. 임의의 경선은  $s \mapsto \mathbf{X}(u(s), v_0)$ 로 나타낼 수 있다. 여기서 단순히 매개변수  $s$ 가 아닌 매개변수의 함수  $u(s)$ 를 쓴 이유는 이 경선이 단위속력을 가지도록 매개하기 위함이다. 그러면 이 경선의 가속도 벡터는 곡면에 수직임을 쉽게 알 수 있다. 따라서 가속도의 접성분은 **0**이며 따라서 경선은 곧은선이다.

이제 위선에 대해 생각해 보자. 임의의 위선은 원인데 이 원의 가속도 벡터는 원의 중심을 향한다. 이 가속도 벡터의 접성분이 **0**이기 위한 필요충분조건은

곡면의 수직벡터가 회전축에 수직인 것이다. 따라서  $f'(u_0) = 0$ 인  $u_0$ 에 대해서만  $s \mapsto \mathbf{X}(u_0, v(s))$  가 곧은선이다.

이제 두 번째 방법으로 알아보자. 두 번째 방법은 직접 곧은선 방정식을 풀어 위 질문에 대한 답을 알아내는 것이다. 자, 이제 (4.31)에 대해 계산을 시작하자. 이제부터 '은  $u$ 에 대한 미분을 나타낸다.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), \\ \mathbf{X}_2(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0).\end{aligned}$$

이를 이용하면 쉽게 다음을 얻는다.

$$g_{11} = f'^2 + g'^2, \quad g_{22} = f^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

그러므로,

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f'^2 + g'^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} \end{bmatrix}.$$

자, 이제 정의에 따라 둘째 크리스토텔 부호  $\Gamma_{ij}^k$  를 계산하자. 정의를 예를 들어  $\Gamma_{11}^1$  의 정의는 다음과 같다.<sup>17)</sup>

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right).$$

---

17) 이 경우에는 보조정리 4.14를 이용하여 계산하는 게 편할 수도 있다. 즉  $\mathbf{X}$ 의 이계도미분을 구한 후 그것의  $\mathbf{X}_k$  방향으로의 성분을 구하다 보면 원하는 바가 비교적 나온다. 이는  $g_{12} = 0$ 이기 때문이다.

총 8개가 있는데 다음과 같다.

$$\Gamma_{11}^2(u, v) = \Gamma_{21}^1(u, v) = \Gamma_{12}^1(u, v) = \Gamma_{22}^2(u, v) = 0$$

$$\Gamma_{21}^2(u, v) = \Gamma_{12}^2(u, v) = \frac{f'(u)}{f(u)}$$

$$\Gamma_{22}^1(u, v) = \frac{-f(u)f'(u)}{f'(u)^2 + g'(u)^2}$$

$$\Gamma_{11}^1(u, v) = \frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{f'(u)^2 + g'(u)^2}.$$

따라서 곧은선 연립 방정식은 다음과 같다:

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{u}(t) + \frac{-f(u(t))f'(u(t))}{f'(u(t))^2 + g'(u(t))^2}\dot{v}(t)^2 \\ &\quad + \frac{f'(u(t))f''(u(t)) + g'(u(t))g''(u(t))}{f'(u(t))^2 + g'(u(t))^2}\dot{u}(t)^2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$0 = \ddot{v}(t) + 2\frac{f'(u(t))}{f(u(t))}\dot{v}(t)\dot{u}(t), \quad (4.33)$$

$$1 = \sqrt{f(u(t))^2\dot{v}(t)^2 + (f'(u(t))^2 + g'(u(t))^2)\dot{u}(t)^2}. \quad (4.34)$$

즉,  $\gamma(t) = (v(t), u(t))$  가 (4.33), (4.32), (4.34)를 만족시키면  $X \circ \gamma$ 는 회전 곡면의 곧은선이다.

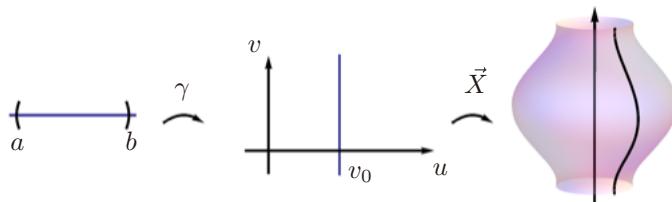
**주의:** 여기서  $\dot{u}, \dot{v}$  등은  $u(t), v(t)$  의  $t$ 에 대한 미분이고  $f', g'$  등은  $f(u), g(u)$  의  $u$ 에 대한 미분이다.

자, (4.33), (4.32), (4.34)을 동시에 만족하는  $u(t), v(t)$ 는 무엇일까? 이것이 곧  $\mathbf{X}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ 로 주어지는 회전면의 곧은선이 어찌 생겼는가를 알아내는 것이다. (4.33), (4.32), (4.34)을 만족하는 모든  $v(t), u(t)$ 의 명시적 식을 찾아내는 것은 일반적으로 가능하지 않다. 따라서, 우리는 어떤 경선이나 위선이 곧은선 방정식들 (4.33), (4.32), (4.34)을 만족시키는지 알아보는 데에 그치고자 한다.

**경선의 경우** 임의의 경선은 다음과 같이 나타내어진다:

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) = (u(t), v_0) \quad (\text{단 } v_0 \text{은 상수}). \quad (4.35)$$

$u(t)$ 는  $\gamma(t)$ 가 곧은선 방정식을 만족하도록 정한 것이다.



이때,  $\dot{u}(t)$ 는 항상 양수라고 가정할 수 있다. 그러면 (4.34)는 다음 식

$$\dot{u}(t) = \left( (f'(u(t)))^2 + (g'(u(t)))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.36)$$

과 동치가 된다. 이 미분방정식은 원래 곡선의 속력을 항상 1로 할 수 있다는 가정을 표현한 것이므로 사실 직관적으로 그 해는 존재한다는 것을 알 수 있다. 좀더 이론적으로 접근하자면, 이는  $\dot{u}(t) = F(u(t))$  형태의 미분 방정식인데 이 형태의 미분 방정식은  $F$ 가 적당히 좋기만 하면 항상 유일한 해를 가지고 있다는 것이 알려져 있다.<sup>18)</sup> 지금 우리의 경우  $F(x) = \left(f'(x)^2 + g'(x)^2\right)^{-1/2}$ 이다. 이제까지는  $u(t)$ 에 아무런 조건도 주지 않았었는데 지금부터는  $u(t)$ 는 (4.36)를 만족시킨다고 하자. 이제 (4.36)를 제곱하여  $t$ 에 대해 미분하면 다음 식들이 얻어진다.

$$\dot{u}^2 = \frac{1}{f'^2 + g'^2}, \quad 2\dot{u}\ddot{u} = \frac{2f'f'' + 2g'g''}{-(f'^2 + g'^2)^2}\dot{u}, \quad \ddot{u} + \frac{f'f'' + g'g''}{(f'^2 + g'^2)^2} = 0.$$

여기서  $f, g$ 는 이미 주어진 것이고, 우리가 찾고자 하는 것은  $u = u(t), v = v(t)$ 다. 즉, 이 식은  $v(t), u(t)$ 에 대한 미분방정식이다. 이는, (4.36)에 의하여, 곧은선 방정식 (4.32)와 같다. (4.33)은 당연히 만족된다. 즉, (4.34)을 만족하는  $u$ 의 존재성은 상미분의 기본정리에 의해 보장되고, 그  $u$ 는 자동적으로 (4.33)과 (4.32)를 만족한다.

이제까지 경선에 대해 행한 계산과 추론들을 종합하면 다음과 같다 : 임의의 경선은 (4.35)과 같은 꼴로 나타내어 질 수 있다. 단 (4.35)에서  $v_0$ 는 임의의 상수고,  $u(t)$ 는 (4.36)를 만족하는 함수다. 그러면 (4.35)는 곧은선 방정식을 만족한다. 즉 임의의 경선은 곧은선이다. 여기서 주의해야 할 점이 있다.

---

18) [33]을 참고하라.

$\tilde{\gamma}(t) = (t, v_0)$ 라고 하면  $\mathbf{X} \circ \gamma(t)$ 와  $\mathbf{X} \circ \tilde{\gamma}(t)$ 는 회전면에서 같은 경선을 나타낸다. 하지만  $\tilde{\gamma}(t)$ 는 곧은선 방정식을 만족시키지 않는다.

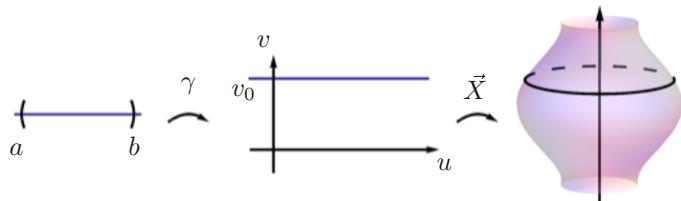
**질문 4.5.1.**  $\tilde{\gamma}(t) := (t, v_0)$ 는 곧은선 방정식을 만족시키지 않음을 실제로 보여라.

즉, 곡면의 어떤 곡선이 곧은선이냐 아니냐를 따질 때, 그 곡선의 매개 방정식을 어떻게 택하느냐에 따라 곧은선 방정식이 만족되는지 아닌지 달라지므로 신중해야 한다.

**위선의 경우** 임의의 위선은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\gamma(t) = (u_0, v(t)). \quad (4.37)$$

단, 여기서  $u_0$ 는 상수고  $v(t)$ 는 적당한 함수다.



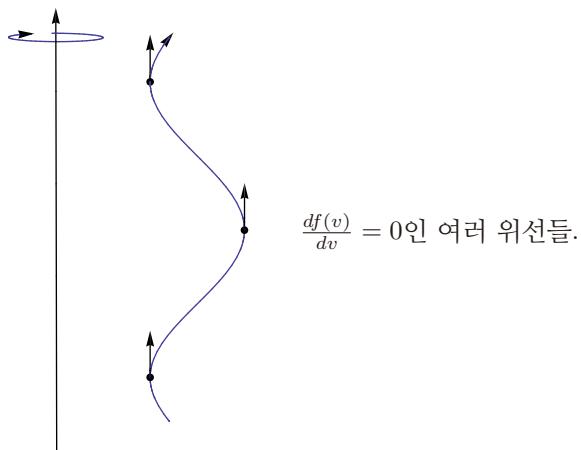
우리가 알고 싶은 것은, 어떤  $u_0$ 와  $v(t)$ 에 대해서  $\mathbf{X} \circ \gamma$  가 곧은선이 될 것인가 하는 것이다.

자,  $u = u_0$ ,  $v = v(t)$ 에 대하여 (4.33)은  $\ddot{v}(t) = 0$ 이 되는데, 이를 만족하는  $v(t)$ 는  $a t + b$ 다. 자, 이제부터  $v(t) = a t + b$ 라 하자. 단  $a \neq 0$ . 이제 (4.32)는

$$0 = -\frac{ff'}{f'^2 + g'^2}\dot{v}^2$$

이 되는데,  $\dot{v}$ 과  $f$ 는 모두 0이 아니므로  $f' = 0$ , 즉  $\frac{df}{du}(u_0) = 0$ 을 얻는다. 다시 말하여  $\frac{df}{du}(u_0) = 0$ 인  $u_0$ 에 대해서는 식 (4.33)이 성립한다. 이때  $a = \frac{1}{f(u_0)}$  라 하면 식 (4.34)도 만족된다.

결론은,  $\frac{df}{du}(u_0) = 0$ 을 만족하는  $u_0$ 에 대해서는  $\mathbf{X}(u_0, \frac{1}{f(u_0)} t)$  가 곧은선이 되는 반면  $\frac{df}{du}(u_0) \neq 0 \cup u_0$ 에 대해서는  $v(t)$ 를 어떻게 선택하더라도  $\mathbf{X}(u_0, v(t))$  는 곧은선이 아니라는 것이다.



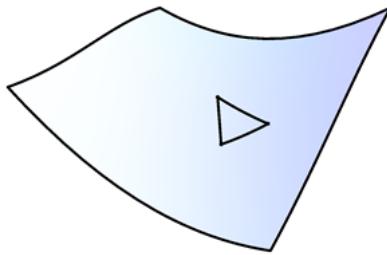
$\frac{df}{du}(u_0) = 0$  은 곡선  $u \mapsto (f(u), 0, g(u))$ 의 접선이  $u = u_0$  일 때 축에 평행함을,  
 $\frac{df}{du}(u_0) \neq 0$  은 곡선  $u \mapsto (f(u), 0, g(u))$ 의 접선이  $u = u_0$  일 때 축에 평행하지  
 않음을 의미한다.

**질문 4.5.2.** 위 아이디어를 적용하여 현수면 (3.51)의 곧은 선들을 찾아보아라.

**질문 4.5.3.** 위선과 경선에 대해서만 살펴 보았는데, 위선도 경선도 아닌 곡선  
 중에 곧은선이 있을까? 없을까? 있다면 구체적인 예를 들고 없다면 이유를  
 밝혀라.

## 4.6 가우스-보네 정리

이제 곡면의 곧은선이 무엇인지 알았으니 곡면의 삼각형을 정의할 수 있겠다. 직관적으로 말하자면 곡면의 삼각형이란 세 곧은선이 이루는 도형이라고 할 수 있겠는데 정확한 정의는 여러분이 직접 만들어 보기 바란다.<sup>19)</sup> 곡면의 삼각형을 곧은선 삼각형(geodesic triangle) 또는 간단히 삼각형이라고 하자.



삼각형이 정의되었으니 이제 삼각형의 성질에 대하여 생각해 보자. 제일 먼저 생각해 보고 싶은 성질은 삼각형의 세 내각의 합은 얼마나 될까?라는 것이다. 일단 그것은 일반적으로  $180^\circ$ 는 아니다. 구면의 삼각형을 생각해보면 알 수

---

19) 정확한 정의를 제시한다는 게 쉽지 않음을 강조하기 위하여 이런 요구를 해 본다.

있다.<sup>20)</sup> 가우스는 이미 이 질문에 대한 답을 알고 있었다.

### 정리 4.6.1.

$$\text{곡면에 있는 곧은선 삼각형의 세 내각의 크기의 합} = \pi + \iint_{\Delta} K dA.$$

**예 4.6.2.** 평면의 곡률  $K$ 는 어느 점에서나 0이다. 따라서, 가우스의 발견은 평면의 삼각형의 세 내각의 합은 180도라고 주장하는 것인데, 이는 사실과 부합한다.

**예 4.6.3.** 단위구의 곡률  $K$ 는 어느 점에서나 1이다. 따라서, 가우스의 발견은, 단위구의 삼각형의 내각의 합은 180도 + 삼각형의 넓이이라는 것인데 곧 살펴보겠지만 이 또한 사실과 부합한다.

**예 4.6.4.** 단위 유사구면의 곡률  $K$ 는 어느 점에서나 -1이다. 따라서, 가우스의 발견은, 단위 유사구면의 삼각형의 내각의 합은 180도 - 삼각형의 넓이라고 주장하는 것이다. 이 또한 사실과 부합한다는 것은 쌍곡 평면의 기하학에 관한 6장에서 다시 한 번 더 살펴볼 것이다.

---

20) 비유클리드 기하학을 창안한 세 사람 중의 한 사람인 가우스는 실제 측량을 통하여 지도를 만드는 일을 하기도 했는데, 이를 통하여 구면 기하학을 깊이있게 생각하고 더 나아가 비유클리드 기하학을 창안하게 되었을 것이다.

정리 4.6.1의 증명을 생각하기 전에 먼저 단순한 경우에 대한 증명을 생각해 보자.

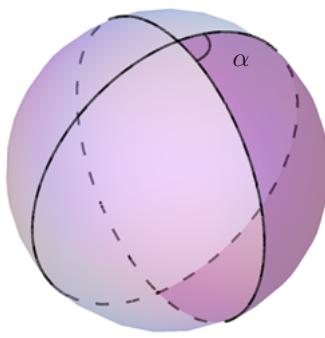
### 단위 구의 삼각형에 대한 가우스-보네 정리 [35, 64쪽]

구에서 서로 다른 두 곧은선은 구를 네 조각으로 나눈다. 각 조각은 각 두 개를 가지고 있으므로 이를 이각형 (digon)<sup>21)</sup>이라 부르도록 하겠다. 한 이각형을 선택하고 이각형의 한 각의 크기를  $\alpha$ 라고 하면 다음이 성립함은 당연하다.

$$\text{이각형의 넓이} = 4\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = 2\alpha. \quad (4.38)$$

---

21) lune이라고도 한다.

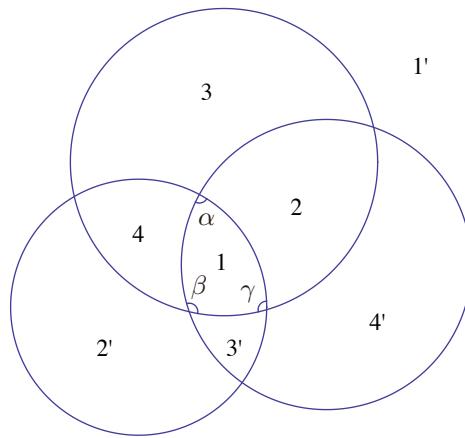


반지름이 1인 구

자, 이제 이각형을 자르는 곧은선 하나를 더 생각하자. 그러면 구면 삼각형이 얻어진다. 이런 구면 삼각형의 내각의 합을 생각해보기 위하여 그림을 그려보고 싶은데 직접 단위구면에 그리는 것보다 오히려 단위구면을 입체사영을 이용하여 평면으로 보내 평면에서 생각하는 것이 나을 수 있다.

아래 그림은 단위구에 있는 세 개의 곧은선(=대원)을 북극점으로부터의 입체사영을 이용하여 평면의 원들로 나타낸 것이다. 편의상 어느 대원도 북극 점을 지나지 않는 경우를 생각한다. 세 곧은선은 단위구를 모두 여덟 조각으로 나누는데 어느 조각이든지 다른 어떤 한 조각과 합동이다. 그림에서는 1과 1',

2와  $2'$ , 3과  $3'$ , 4와  $4'$ 이 각각 서로 합동이다.<sup>22)</sup>



삼각형 1의 세 내각을 그림과 같이 각각  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 라 하자. 그러면 삼각형 i의

---

22) 입체 사영은 두 곡선 사이의 각의 크기를 보존하며 또한 구면의 북극점을 지나지 않는 원을 평면의 원으로 보낸다. 정리 4.1.1, 질문 4.1.4를 참조하라.

넓이를  $\Delta_i$  라 할 때 (4.38)에 의하여

$$\Delta_1 + \Delta_3 = 2\alpha,$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 2\gamma,$$

$$\Delta_1 + \Delta_4 = 2\beta,$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 2\pi.$$

이를 모두 더하면

$$2\Delta_1 + 2(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4) = 2\pi + 2(\alpha + \beta + \gamma).$$

그런데  $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 2\pi$  이므로

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \Delta_1.$$

이로써 단위구의 삼각형에 대한 가우스-보네 정리가 증명되었다.

이제 위에 제시된 정리 4.6.1를 증명하기보다는 보다 더 일반적인 다음 정리를 증명한다.

**정리 4.6.5 (극소적 가우스-보네 정리).** 일반적인 정칙 곡면에 있는, 곧은선이 아닐 수도 있는 세 곡선으로 이루어진  $\Delta$ <sup>23)</sup>에 대해서 다음이 성립한다.

$\Delta$ 의 내각의 합 =  $\pi + \Delta$ 의 총 가우스 곡률 +  $\Delta$  둘레의 총 측지곡률,

---

23) 여기서  $\Delta$ 은 내부가 차 있는 도형인가? 아닌가?

즉

$$i_1 + i_2 + i_3 = \pi + \iint_{\Delta} K dA + \oint_{\Delta} \kappa_g ds. \quad (4.39)$$

부연 설명이 조금 필요하다. 각이라고 하는 것은 어느 방향으로 재는가에 따라 그 값이 달라질 수 있다. 따라서 각을 재기 전에 미리 방향을 정해 두어야 한다. 통상적으로 곡면의 수직 벡터를  $\mathbf{N}$ 이라 할 때 삼각형의 세 변을 따라 돌다보면 오른손 법칙이 성립하도록 각 곡선의 방향을 주는데 우리도 그 관례를 따라 각 변의 방향을 정하자. 또한  $\oint \kappa_g ds$  은 선적분인데 그 때 곡선의 방향성이 의미를 가진다.

이 정리의 증명은 간단하지 않다. 이를 증명하기 전에 여러 가지 보조정리를 먼저 다루자.

**보조정리 4.6.6.** 곡면의 임의의 점  $P$ 에 대하여  $P$  근방을 나타내는 지도  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{E}^3$  가 다음을 만족하도록 그릴 수 있다.

모든  $u, v \in \mathcal{U}$ 에 대하여  $F(u, v) = 0$ .

이 조건을 만족하는 지도(좌표계)를 직교좌표계라고 한다. 일반적으로 어떤 곡면에 대한 지도를 만들 때 곡면의 어떠한 점에 대해서도 그 점의 적당한

주변을 나타내는 지도가 직교좌표계가 되도록 지도를 그릴 수 있다는 사실이 알려져 있다. 증명은 [16, 183쪽]을 참조하기 바란다.

따라서 우리는 주어진 지도가 직교좌표계라고 가정한다. 직교좌표계는 여러 가지로 유용한데 그 중 한 가지는 다음과 같이 가우스 곡률의 식이 간단하게 표현된다는 것이다.

**보조정리 4.6.7.** 직교좌표계에서

$$K = \frac{-1}{\sqrt{EG}} \left( \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right). \quad (4.40)$$

**증명** <sup>24)</sup> 우선 다음 기호를 정의한다.

$$\mathbf{e}_1(u, v) := \frac{\mathbf{X}_u(u, v)}{\sqrt{E(u, v)}}, \quad \mathbf{e}_2(u, v) := \frac{\mathbf{X}_v(u, v)}{\sqrt{G(u, v)}}. \quad (4.41)$$

식 (4.40)을 위의 기호들을 사용하여 다음과 같이 바꾼다.

$$K = \frac{\langle (\mathbf{e}_1)_u, (\mathbf{e}_2)_v \rangle - \langle (\mathbf{e}_1)_v, (\mathbf{e}_2)_u \rangle}{\sqrt{EG}} \quad (4.42)$$

이 식이 직교좌표계에서의 가우스 곡률

$$K = \frac{LN - M^2}{EG}. \quad (4.43)$$

---

24) 좀 더 간단한 증명이 있을 것 같은데...

과 동일함을 보일 것이다.

위에서 정의한  $e_1(u, v)$  과  $e_2(u, v)$  는 곡면의 점  $\mathbf{X}(u, v)$  에서 곡면에 접하고 길이가 각각 1이며 서로 수직인 벡터가 된다. 그리고 다음이 성립한다.<sup>25)</sup>

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{e}_1)_u, \mathbf{e}_2 \rangle &= \left\langle \left( \frac{\mathbf{X}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\mathbf{X}_{uu} \sqrt{E} - \mathbf{X}_u (\sqrt{E})_u}{E}, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle \\ &= \frac{\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle}{\sqrt{EG}}\end{aligned}\tag{4.44}$$

여기서  $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$  이 용하면  $\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle = -\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vu} \rangle$  과 같다. 결과적으로

$$\langle (\mathbf{e}_1)_u, \mathbf{e}_2 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}.\tag{4.45}$$

비슷한 원리로 다음 식도 얻을 수 있다.

$$\langle (\mathbf{e}_1)_v, \mathbf{e}_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}.\tag{4.46}$$

위에서 얻어낸 결과물과 연쇄 법칙을 이용하면 (4.40)은 (4.42)와 동일함을 알 수 있다.

---

25) 편의상  $(u, v)$  는 생략한다.

이제 (4.42)와 (4.43)이 서로 같은 식임을 밝히자. 우선,  $e_1$ 은 정의상 그 크기가 1이고 따라서  $\langle e_{1u}, e_1 \rangle = 0$ , 즉  $e_{1u}$ 는  $e_1$ 과 수직이므로 어떤  $k_1, k_2$ 에 대하여

$$e_{1u} = k_1 e_2 + k_2 N$$

이라고 할 수 있다. 비슷한 논리로 다음을 얻는다.

$$e_{1v} = k_3 e_2 + k_4 N, \quad e_{2u} = k_5 e_1 + k_6 N, \quad e_{2v} = k_7 e_1 + k_8 N.$$

그러면 (4.42)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K = \frac{k_2 k_8 - k_4 k_6}{\sqrt{EG}}. \quad (4.47)$$

그런데  $k_2 = \langle e_{1u}, N \rangle$ 이다. 또한

$$e_{1u} = \frac{\mathbf{X}_{uu}\sqrt{E} - \mathbf{X}_u(\sqrt{E})_u}{E} = \frac{1}{\sqrt{E}}\mathbf{X}_{uu} - \frac{(\sqrt{E})_u}{E}\mathbf{X}_u$$

이므로

$$k_2 = \frac{L}{\sqrt{E}}.$$

이제  $k_4, k_6, k_8$ 에도 비슷한 작업을 수행하여 정리하면

$$k_4 = \frac{M}{\sqrt{E}}, \quad k_6 = \frac{M}{\sqrt{G}}, \quad k_8 = \frac{N}{\sqrt{G}}.$$

따라서 (4.47)은 (4.43)이 됨을 알 수 있다. ■

하지만 직교좌표계의 진짜 필요성은 곡면에서 곡선들 사이의 각을 생각할 때 있다 하겠다. 계속 전진하여 이론이 어떻게 전개되는지 보자.

다음 보조정리를 설명하기 전에 먼저 약간의 정의가 필요하다. 곡면에 한 곡선

$$\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$$

가 주어져 있다고 하자. 이 곡선과  $u$ -매개곡선

$$u \mapsto X(u, v) \quad (\text{여기서 } v \text{는 상수로 간주됨})$$

사이의 유향각을 값으로 가지는 함수를 정의하고자 한다. 좀 더 정확한 정의를 위해서

$$X \circ \gamma = \alpha$$

가 되는 지도의 곡선

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma(s) = (u(s), v(s)),$$

를 생각하고  $\varphi$ 를 다음과 같이 정의한다.<sup>26)</sup>

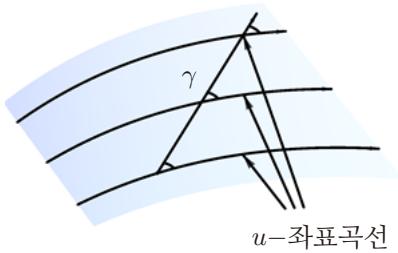
#### 정의 4.6.8.

$$\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(s) := \angle(X_u(\gamma(s)), (X \circ \gamma)'(s)).$$

단,  $N, X_u, N \times X_u$ 가 양의 향을 가지는 것으로 한다.

---

26) 그림에서  $\gamma$ 는  $\alpha$ 여야 한다.



그러면 다음이 성립한다.

#### 보조정리 4.6.9.

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = \kappa_g(s) - \frac{1}{2} \frac{G_u(\gamma(s)) \frac{dv(s)}{ds} - E_v(\gamma(s)) \frac{du(s)}{ds}}{\sqrt{E(\gamma(s))G(\gamma(s))}}. \quad (4.48)$$

**증명** 먼저 다음을 증명하자.

$$\kappa_g(s) := \langle \ddot{\alpha}(s), (\mathbf{N} \circ \alpha)(s) \times \dot{\alpha}(s) \rangle.$$

이제 다음을 보자. 여기서  $e_1, e_2$ 는 (4.41)에 정의되어 있다.

$$\dot{\alpha}(s) = \cos \varphi(s) e_1 \circ \gamma(s) + \sin \varphi(s) e_2 \circ \gamma(s), \quad (4.49)$$

$$(\mathbf{N} \circ \alpha)(s) \times \dot{\alpha}(s) = -\sin \varphi(s) e_1 \circ \gamma(s) + \cos \varphi(s) e_2 \circ \gamma(s). \quad (4.50)$$

(4.49)를 미분하면

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}(s) &= -\sin \varphi(s) \dot{\varphi}(s) \mathbf{e}_1 \circ \gamma(s) + \cos \varphi(s) (\mathbf{e}_1 \circ \gamma(s)) \cdot \\ &\quad + \cos \varphi(s) \dot{\varphi}(s) \mathbf{e}_2 \circ \gamma(s) + \sin \varphi(s) (\mathbf{e}_2 \circ \gamma(s)) \cdot\end{aligned}$$

따라서<sup>27)</sup>

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \langle \ddot{\alpha}, (\mathbf{N} \circ \alpha) \times \dot{\alpha} \rangle \\ &= \dot{\varphi} + \cos^2 \varphi \langle (\mathbf{e}_1 \circ \gamma) \cdot, \mathbf{e}_2 \circ \gamma \rangle - \sin^2 \varphi \langle \mathbf{e}_1 \circ \gamma, (\mathbf{e}_2 \circ \gamma) \cdot \rangle \\ &= \dot{\varphi} + \langle (\mathbf{e}_1 \circ \gamma) \cdot, \mathbf{e}_2 \rangle\end{aligned}\tag{4.51}$$

$$= \dot{\varphi} + \langle (\mathbf{e}_1)_u, \mathbf{e}_2 \rangle \dot{u} + \langle (\mathbf{e}_1)_v, \mathbf{e}_2 \rangle \dot{v}.\tag{4.52}$$

이때,

$$\langle (\mathbf{e}_1)_u, \mathbf{e}_2 \rangle = \left\langle \left( \frac{\mathbf{X}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\mathbf{X}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle}{\sqrt{EG}} = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}.\tag{4.53}$$

비슷하게

$$\langle (\mathbf{e}_1)_v, \mathbf{e}_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}.\tag{4.54}$$

(4.52), (4.53), (4.54)를 결합하여 (4.48)이 얻어진다. ■

자, 이제 정리 4.6.5를 증명하자.

27) 여기서부터는  $(s)$ 를 타자하지 않겠다. 타자도 힘들지만 타자해 봐야 눈만 아지럽다.

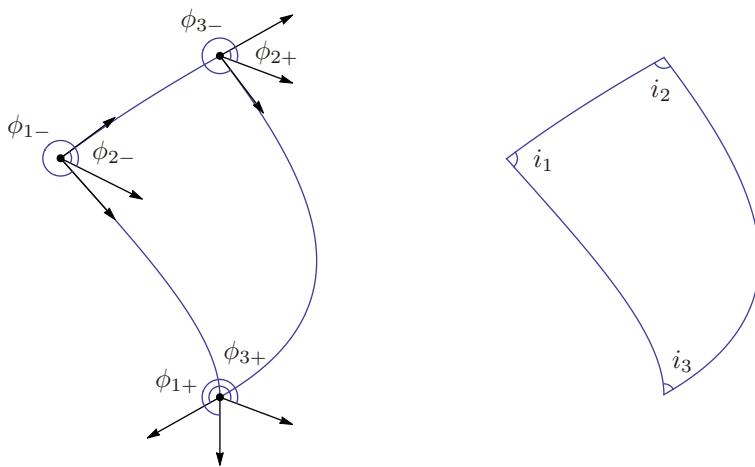
**정리 4.6.5의 증명** 먼저 생각하고 있는 삼각형이 한 직교 좌표계에 들어가는 경우를 생각하자. 이는 한 직교 좌표계가 곡면 전체를 덮지 못할 수도 있기 때문이며 따라서 조그만 삼각형만을 고려한다고 생각하면 된다.

주어진 세 곡선  $\alpha_i : [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ , 단  $i = 1, 2, 3$ , 은 단위 속력을 가지고 있다고 가정해도 된다. 그렇게 가정하자. 이때 지도  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 의 세 곡선  $\gamma_i : [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ 를 생각하라. 단,  $\alpha_i = \mathbf{X} \circ \gamma_i$ 가 되게끔.

자, 이제  $\varphi_i$  와  $i_1 + i_2 + i_3$  사이의 관계를 알아보자. 아래 그림을 잘 해석하면 다음을 얻을 수 있다:

$$i_1 + i_2 + i_3 = \pi + \sum_{i=1}^3 \Delta\varphi_i. \quad (4.55)$$

단, 여기서  $\Delta\varphi_i := \varphi_i(b_i) - \varphi_i(a_i) = \varphi_{i+} - \varphi_{i-}$ .



자, 이제 다음 식을 살펴보자.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 \Delta \varphi_i &= \sum_{i=1}^3 \int \frac{d\varphi}{ds} ds \\
 &= \oint_{\Delta} \kappa_g(s) ds + \oint_{\Delta} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (E_v u' - G_u v') ds \\
 &= \oint_{\Delta} \kappa_g(s) ds + \oint_{\Delta} \frac{1}{2\sqrt{EG}} E_v du + \left( \frac{-1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) dv \\
 &= \oint_{\Delta} \kappa_g(s) ds + \iint_{\Delta} \left( -\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u - \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v dudv \\
 &= \oint_{\Delta} \kappa_g(s) ds + \iint_{\Delta} K dA.
 \end{aligned}$$

여기서 두 번째 등호는 (4.48)로부터, 네 번째 등호는 그린의 정리로부터, 마지막 등호는 식 (4.40)로부터 따라나온다. 마지막 식에서  $dudv$  대신  $dA$ 가 등장함에 주의하라. 이제 이를 (4.55)와 합치면 원하는 결과를 얻는다.

이제 삼각형이 한 직교 좌표계에 들어가지 않는 경우를 생각하자. 그런데 이것은 삼각형을 조그만 삼각형들로 분할하여 생각한 후 그것들을 합하면 된다.

**정리 4.6.1의 증명** (곧은 선) 삼각형의 둘레는  $\kappa_g \equiv 0$ 을 만족시키므로 증명은 정리 4.6.5로부터 따라 나온다.

**질문 4.6.10.** 어떤 곡면이든지 국소적으로 직교 좌표계로 된 지도, 즉  $F = 0$ 인 지도로 나타낼 수 있음을 보여라.

**질문 4.6.11.** 직교 좌표계에서 가우스 곡률의 식이 (4.40)과 같음을 본문과는 다른 방법으로 보여라.<sup>28)</sup>

위 정리는 들여다 보고 있는 곧은선 삼각형이 한 자 안에 있을 때 성립하며 곧은선 삼각형이 여러 곡면 조각에 걸쳐 있을 때는 과연 그렇게 되는지 생각해보아야 한다. 곡면 전체에 대해서도 위 질문을 생각해 볼 수 있는데 그 결과를 대역적 가우스-보네 정리라고 한다.

**정리 4.6.12 (대역적 가우스-보네 정리).**  $S$ 가 가향이고 옹골찬 곡면이라 하고 그것의 오일러 특성수를  $\chi(S)$ 라 하면

$$\iint_S K \, dA = 2\pi\chi(S).$$

(여기서 오일러 특성수란,  $S$ 를 삼각형들로 분할하였을 때 그 삼각형 분할의 꼭지점, 변, 면의 개수를 각각  $v, e, f$ 라 할 때  $v - e + f$ 다. 이 값은 어떤 삼각형 분할에 대해서도 똑같다는 것이 알려져 있다.)

여기서 ‘옹골차다’는 말은 영어의 compact를 번역한 것인데 대한수학회 용어집 2판에는 ‘꽉찬’으로 번역되어 있다.

---

28) 예를 들어 [26, 285쪽, 324쪽]을 보라.

**증명**  $S$  의 한 삼각형 분할을 생각하라. 각 삼각형  $\triangle$ 에 대해

$$\sum_{k=1}^3 i_k = \pi + \iint K dA + \int \kappa_g ds.$$

이를 모든  $\triangle$ 에 대해 합한 것을 생각할 때,

$$\sum_{\triangle} \left( \sum_{k=1}^3 i_k \right) = 2\pi v, \quad \sum_{\triangle} \oint \kappa_g ds = 0,$$

$$2\pi v = \pi f + \iint_S K dA,$$

$$\iint_S K dA = \pi(2v - f) = 2\pi(v - \frac{3}{2}f + f).$$

이때,  $3f = 2e$  이므로 결론이 얻어진다. (각  $\triangle$ 에 3개의 변이 있어서 변의 총 개수는  $3 \times$  면의 개수로 생각하기 쉽다. 즉  $e = 3f$ 로 생각하기 쉽다. 그런데, 사실은 모든 변을 두 번씩 센 것이므로  $2e = 3f$  다.) ■

대역적 가우스-보네 정리는 기하와 위상을 연결 짓는, 굉장히 신기한 식이다. 예를 들면, 완전히 둥그런 구나 찌그러진 구나 그 오일러 특성수는 2다. 따라서 그 전곡률은  $2\pi \cdot 2 = 4\pi$ 다.



의 가우스 전 곡률 =



의 전곡률 =  $4\pi$

그리고, 이 식을 평면 곡선의 전곡률에 대한 식과 비교하여 보아라. 평면 곡선에 대한 식을 일반화 한 것이 가우스 곡률에 관한 식임을 알 수 있다. 자, 다시 가우스-보네 식을 일반화하자면 ‘무엇’에 대한 어떤 식이 될까? 이에 대한 한가지 답으로 “천싱센(陳省身)<sup>29)</sup>”이라는 수학자가 내 놓은 가우스-보네-천 항등식이라는 것이 있는데 관심 있는 독자는 [34, 다섯 번째 권]을 참고하기 바란다.

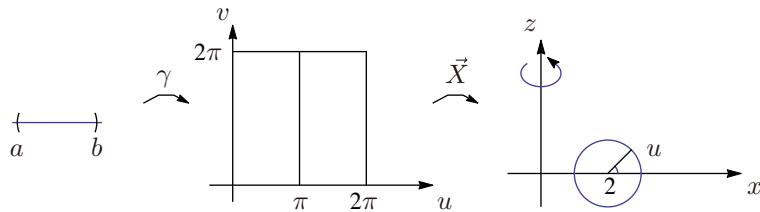
---

29) 현대 기하학의 거두. 저자의 4대조 스승.

## 4.7 연습 문제

**연습문제 4.7.1.** 다음에 주어진 원환면의 곡선  $\mathbf{X} \circ \gamma(t)$ 의  $(0, -1, 0)$ 에서 측지 곡률은 얼마인가?

$$\gamma(t) = (\pi, t), \quad \mathbf{X}(u, v) = ((2 + \cos u) \sin v, (2 + \cos u) \cos v, \sin u)$$



**연습문제 4.7.2.** 반지름이  $R$ 인 구면에 있는 곧은선 삼각형의 내각합은 얼마인가?

**연습문제 4.7.3.** (곡면 속 곡선론의 기본정리) 평면 곡선, 공간 곡선에 대하여 기본정리라는 것이 있었다. 그리고 다음 장에서 보겠지만 곡면에 대해서도 기본정리라는 것이 있다. 그것들은 모두 각 대상의 존재성과 유일성에 관련된 것이다. 곡면의 곡선에 대하여 같은 맥락의 정리가 있을까? 있다면 아마 다음과 같은 형태를 띸 것이다.

주어진 곡면  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$  와 함수  $\kappa_g : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여  
 $\kappa_g$  를 측지곡률로 가지는 곡선이 곡면  $\mathbf{X}$  에 단 하나 존재한다.

과연 이런 정리가 성립할 지 생각해 보아라.

**연습문제 4.7.4.** (곧은선의 존재성과 유일성) 임의의 곡면  $S$ 에서 임의의 점  $P$  와 임의의 접벡터  $\vec{v} \in T_P(S) \setminus \{0\}$ 에 대하여 어떤 양의 실수  $\epsilon$ 이 있어서

$$\alpha(0) = P, \quad \dot{\alpha}(0) = \vec{v}_P$$

인 곧은선  $\alpha$  가 구간  $(-\epsilon, \epsilon)$ 에 단 하나 존재한다. 이를 증명하여라.

## 제 5 장

# 곡면의 내재적 기하학

## 시작하는 말

곡면  $S \subset \mathbb{E}^3$ 를 다음과 같이 어떤 지도  $\mathcal{U}$ 의 상으로 생각하자:

$$\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{E}^3.$$

여기서  $\mathcal{U}$ 와  $S$ 를

$$\mathcal{U} = \text{그림자}, \quad S = \text{실체}$$

와 같이 플라톤의 국가론에 등장하는 ‘동굴의 비유’의 그림자와 실체로 생각해 볼 수 있다. 이 장에서 우리가 추구하고자 하는 것은 곡면을 이해함에 있어서  $S$ 가 아닌  $\mathcal{U}$ 를 보겠다는 것이다. 즉, 그림자를 통해서 실체를 이해해 보겠다는 것이다.

사실 이 생각은 이미 우리의 일상에서 흔히 구현되고 있는 일인데, 지도를 통해 어떤 지역의 모습을 이해하는 것이 한 가지 예가 될 것이다. 그런데 지도를 통해 세상을 이해하고자 할 때 발생하는 여러 가지 문제점들이 당연히 있다. 예를 들어 한 지점에서 다른 지점으로 가는 가장 짧은 경로를 어떻게 결정할 수 있는지, 지도에 나타난 어떤 영역의 실제 넓이를 어떻게 계산할 수 있는지 등등이 그것이다.

한 지도를 가지고 원래 모습을 완벽하게 이해할 수 있다면 얼마나 좋을까? 그것이 가능하다면 왜 이렇게 많은 종류의 지도를 만들어 낸 것일까? 각 지도가 가지는 장단점은 무엇일까? 이 장의 내용을 이해함에 있어 여러 가지 도법을

---

이해하고 각 지도의 특성이 수학적으로 왜 그렇게 되는지 이해하도록 노력하는 것이 큰 도움이 될 수 있을 것이다.

그런데 이처럼 지도를 가지고 곡면의 원래 모습을 이해하려고 하는 노력은 우리에게 익숙한 유클리드 공간이 아닌 다른 공간을 이해할 수 있게 하게 하는 단서를 제공한다. 그 와중에 가장 중요한 역할을 하는 것은 계량기다. ‘계량기를 갖춘 지도’의 개념을 염두에 두고 이 장의 본문을 읽기 바란다.

## 5.1 무엇을 공부할 것인가?

곡면  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{E}^3$  가 주어져 있다고 하자. 곡면  $S$  의 기하를 지도  $\mathcal{U}$ 에서 수행할 수 있게 되기 위해서는 길이, 넓이, 각도 등을 재는 방법을  $\mathcal{U}$ 에서 수행할 수 있어야 한다. 이를 위해서 곡면에서 길이, 넓이, 각도 등을 재는 방법을 다시 살펴보자.

**길이** 먼저 곡선의 길이를 재는 방법을 살펴보자. 곡선  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \circ \gamma \text{의 길이} &= \int_a^b |(\mathbf{X} \circ \gamma)'(t)| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle (\mathbf{X} \circ \gamma)'(t), (\mathbf{X} \circ \gamma)'(t) \rangle} dt\end{aligned}$$

이때,  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  라 하면

$$(\mathbf{X} \circ \gamma)'(t) = \mathbf{X}_u \dot{u} + \mathbf{X}_v \dot{v}.$$

따라서

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{X} \circ \gamma)'(t), (\mathbf{X} \circ \gamma)'(t) \rangle &= \langle \mathbf{X}_u \dot{u} + \mathbf{X}_v \dot{v}, \mathbf{X}_u \dot{u} + \mathbf{X}_v \dot{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle \dot{u}^2 + 2\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle \dot{u} \dot{v} + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \dot{v}^2 \\ &= E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2.\end{aligned}$$

그러므로

$$\mathbf{X} \circ \gamma \text{의 길이} = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt. \quad (5.1)$$

여기서  $E, F, G$ 는 모두 지도( $\mathcal{U}$ )에서 실수의 집합으로 가는 함수임을 상기하라.  $u, v$  또한 지도에서 정의된 함수다. 따라서 이 식은 지도에서 생각할 수 있는 식이다.

**넓이** 이제 넓이를 재는 방법을 살펴보자. 이미 알고 있는 바와 같이

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathcal{U}) \text{의 넓이} &= \iint_{\mathcal{U}} |\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v| dudv \\ &= \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle - \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle^2} dudv \\ &= \iint_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2} dudv. \end{aligned} \quad (5.2)$$

이 식 또한 지도에서 생각할 수 있는 식이다.

**각도** 마지막으로 각도를 재는 방법을 살펴보자. 이미 식 (4.3)에서 살펴보았지만, 두 곡선

$$\gamma, \delta : (a, b) \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (a(t), b(t)), \quad \delta(t) = (c(t), d(t))$$

가  $\gamma(t_1) = \delta(t_2)$ 에서 만날 때  $\mathbf{X} \circ \gamma$ 와  $\mathbf{X} \circ \delta$ 가 만나는 각도를  $\theta$ 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle (\mathbf{X} \circ \gamma) \cdot (t_1), (\mathbf{X} \circ \delta) \cdot (t_2) \rangle}{|(\mathbf{X} \circ \gamma) \cdot (t_1)| |(\mathbf{X} \circ \delta) \cdot (t_2)|} \\ &= \frac{\langle \mathbf{X}_u \dot{a} + \mathbf{X}_v \dot{b}, \mathbf{X}_u \dot{c} + \mathbf{X}_v \dot{d} \rangle}{|\mathbf{X}_u \dot{a} + \mathbf{X}_v \dot{b}| |\mathbf{X}_u \dot{c} + \mathbf{X}_v \dot{d}|} \\ &= \frac{E \dot{a} \dot{c} + F \dot{a} \dot{d} + F \dot{b} \dot{c} + G \dot{b} \dot{d}}{\sqrt{E \dot{a}^2 + 2F \dot{a} \dot{b} + G \dot{b}^2} \sqrt{E \dot{c}^2 + 2F \dot{c} \dot{d} + G \dot{d}^2}}\end{aligned}\tag{5.3}$$

이 식 또한 지도에서 생각할 수 있는 식이다.

위 모든 식들을 자세히 살펴보면 다음과 같이 지도에 있는 것들로만 식을 표현하고 있음을 알 수 있다. 기호의 편의상 다음을 정의하자.

**정의 5.1.1.** 임의의 점  $p \in \mathcal{U}$ 에 대하여

$$(v_1, v_2)_p \circ (w_1, w_2)_p := \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},\tag{5.4}$$

이제 식 (5.1), (5.2), (5.3)의 마지막 항은 다음과 같이 쓸 수 있다. 단  $e_1 :=$

$(1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 := (0, 1)$ .

$$\int_a^b \sqrt{\dot{\gamma} \circ \dot{\gamma}} dt, \quad (5.5)$$

$$\iint_{\mathcal{U}} \sqrt{(\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_2) - (\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2)^2} dudv, . \quad (5.6)$$

$$\frac{\dot{\gamma} \circ \dot{\delta}}{|\dot{\gamma}| |\dot{\delta}|}, \quad (5.7)$$

위 식들을 잘 보면 모두 지도에 들어 있는 식으로만 계산이 이루어지고 있음을 알 수 있다. 그런데 이제 이 식의 해석을 다음과 같이 바꾸자.

$\mathbf{X} \circ \gamma$ 의 길이  $\Rightarrow \gamma$ 의 지도에서의 길이,

$\mathbf{X}(\mathcal{U})$ 의 넓이  $\Rightarrow \mathcal{U}$ 의 지도에서의 넓이,

$\mathbf{X} \circ \gamma$ 와  $\mathbf{X} \circ \delta$  사이의 각도  $\Rightarrow \gamma$ 와  $\delta$  사이의 지도에서의 각도.

(지도에 정의된) 세 함수  $E, F, G$ 만 있으면 지도에서 곡선의 길이, 영역의 넓이, 두 곡선 사이의 각도를 쟈낼 수 있다는 것을 알 수 있다. 즉  $\mathbf{X}$ 의 구체적 식이나  $L, M, N$ 은 몰라도 된다. 길이, 넓이, 각도는 기하를 구성하는 가장 기본적인 양이므로 이것이  $F, F, G$ 만으로 계산된다고 하는 것은 굉장히 흥미롭다. ○에 대하여 좀더 알아보자.

보조정리 5.1.2. ○은 다음 성질을 만족시킨다.

$$(1) (a\mathbf{v}_p + \tilde{a}\tilde{\mathbf{v}}_p) \circ \mathbf{w}_p = a\mathbf{v}_p \circ \mathbf{w} + \tilde{a}\tilde{\mathbf{v}}_p \circ \mathbf{w}_p,$$

$$(2) \quad \mathbf{v}_p \circ \mathbf{w}_p = \mathbf{w}_p \circ \mathbf{v}_p,$$

$$(3) \quad \mathbf{v}_p \circ \mathbf{v}_p \geq 0. \text{ 그리고 } \mathbf{v}_p \circ \mathbf{v}_p = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

마지막 성질은 positive definiteness라고 한다.

**질문 5.1.3.** 위 성질을 증명하여 보아라.

위 보조정리는  $\circ$ 가 지도의 각 점에 대한 접평면에 내적을 주고 있음을 말한다.

**보조정리 5.1.4.** 곡면  $\mathbf{X}$ 로부터 유도된 세 함수  $E, F, G : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 는 다음을 만족시킨다.

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 > 0 \quad (5.8)$$

역으로, 위 성질을 만족시키는  $E, F, G$ 에 대하여  $\circ$ 를 (5.4)와 같이 정의하면  $\circ$ 는 보조정리 5.1.2의 성질 (1),(2),(3)을 모두 만족시킨다.

**증명**  $\mathbf{X}$ 가 정칙이라는 조건을 상기하자.  $E$ 는  $\mathbf{X}_u$ 의 길이의 제곱,  $G$ 는  $\mathbf{X}_v$ 의 길이의 제곱,  $EG - F^2$ 은  $\mathbf{X}_u$ 와  $\mathbf{X}_v$ 로 만들어지는 평행사변형의 넓이를 나타내므로 첫 번째 조건은 당연하다. 역을 증명하자. 성질 (1), (2)는 행렬의 성질로부터 자연스럽게 따라 나온다. 이제 성질 (3)을 증명하자. 임의의 벡터

$v$ 는  $v_1 e_1 + v_2 e_2$ 로 나타낼 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned} v \circ v &= v_1^2 e_1 \circ e_1 + 2v_1 v_2 e_1 \circ e_2 + v_2^2 e_2 \circ e_2 \\ &= Ev_1^2 + 2Fv_1 v_2 + Gv_2^2 \end{aligned}$$

이제 이차함수  $f(t) = Et^2 + 2Ft + G$ 의 그래프의 모양을 생각하면 위 결론이 성립함을 알 수 있다. ■

이제까지는 곡면  $\mathbf{X}$ 로부터 주어진  $E, F, G$ 를 사용하여  $\circ$ 을 정의하였는데 사실은 꼭 그런  $E, F, G$ 를 사용해야만 할 필요는 없다. 앞으로는  $E, F, G$ 가 위 성질 (5.8)을 만족시키는 함수라고만 하고 이론을 전개한다.

앞의 관찰과 위 정의에 의하여 길이, 넓이, 각도는 내재적 양이다. 그럼 또 다른 내재적 양에는 어떤 것들이 있을까? 외재적 양에는 무엇이 있을까? 이 질문이 무슨 의미가 있는가 하겠지만 사실 이 질문에 대한 답을 추구하는 과정에서 비-유클리드 기하가 등장하게 된다.

**불변성** 지도를 바꾸었을 때 차이가 무엇인가? 변하지 않는 건 무엇인가? 이를 불변성이라 한다. 변하지 않는 양은 불변량이라 한다.

서로 다른 곡면에 대하여 계량기를 계산해 보았을 때 그것들이 같아 보이는 경우가 있다.

예 5.1.5 (평면과 원주면의 지도와 계량기).

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(u, v) &= (u, 0, v), & \mathbf{Y}(u, v) &= (\cos u, \sin u, v), \\ ds_{\mathbf{X}}^2 &= du^2 + dv^2, & ds_{\mathbf{Y}}^2 &= du^2 + dv^2.\end{aligned}$$

예 5.1.6 (부채꼴과 원뿔). 부채꼴과 원뿔의 식은 다음과 같이 주어진다:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\rho, \theta) &= (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0), 0 < \rho < \rho_0, 0 < \theta < 2\pi \sin \alpha, \\ \mathbf{Y}(\rho, \theta) &= (\rho \sin \alpha \cos \frac{\theta}{\sin \alpha}, \rho \sin \alpha \sin \frac{\theta}{\sin \alpha}, \rho \cos \alpha).\end{aligned}$$

이때, 쉽게 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}E_{\mathbf{X}} &= \langle \mathbf{X}_\rho, \mathbf{X}_\rho \rangle = 1, & F_{\mathbf{X}} &= \langle \mathbf{X}_\rho, \mathbf{X}_\theta \rangle = 0, & G_{\mathbf{X}} &= \langle \mathbf{X}_\theta, \mathbf{X}_\theta \rangle = \rho^2, \\ E_{\mathbf{Y}} &= 1, & F_{\mathbf{Y}} &= 0, & G_{\mathbf{Y}} &= \rho^2.\end{aligned}$$

그러므로  $ds_{\mathbf{X}}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$ ,  $ds_{\mathbf{Y}}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$ .

위 두 예에서 서로 다른 곡면에 대한 계량기가 같아 보이는 현상을 관찰하였다. 계량기가 같아 보이는 것이 무엇을 의미하는가? 길이, 넓이, 각도를 재는 데 있어서 계량기가 같다면 그 값도 같아야 한다. 개미가 원뿔을 한 바퀴 감아돌 때 가장 짧은 길의 길이가 얼마나가를 묻는 문제가 있는데 이를 원뿔의 전개도에서 생각할 수 있는 이유가 여기에 있다.

다음은 굉장히 비전문적으로 서술한 「등장적」의 정의다.

정의 5.1.7. 두 곡면이 있을 때 계량기의 표현이 같도록 각각의 지도를 그릴 수 있다면 「두 곡면이 (국소적으로) 서로 등장적(等長的 isometric)이다」라고 한다.

예 5.1.8. 식 (4.4)로 주어진 현수면과 식 (4.5)로 주어진 나선면의 계량기를 비교하여 보아라.

앞에서 살펴 본 여러 예들의 계산은 평면과 원주면, 부채꼴과 원뿔, 현수면과 나선면 등이 서로 등장적임을 말해준다. 두 곡면이 등장적이면 최소한 국지적으로 두 곡면의 내재적 기하는 서로 같다고 할 수 있다.

## 5.2 벡터 표기법

앞 절에서 지도에서의 길이, 넓이, 각도를 표현하는 식에는 두 지도의 벡터의 내적이 들어있음을 살펴보았다. 직관적으로 지도의 벡터들을 모두 모아놓은 집합  $T\mathcal{U}$ 는 일단  $\{(p, \mathbf{v}) : p \in \mathcal{U}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2\}$ . 과 일대일 대응관계에 있다고 할 수 있다.  $(p, \mathbf{v})$ 에 해당하는 지도의 벡터를  $\mathbf{v}_p$ 로 나타내자. 그런데 지도의 벡터를 나타내는 방법에는 이 방법만 있는 것이 아니며 미적분학이나 선형대수학에서 벡터를 나타내는 방법과는 조금 다른 방법이 있다.

어떤 곡면의 지도  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{E}^3$ 가 주어져 있을 때  $\mathbf{X}$ 는, 지도의 점, 곡선, 영역과 곡면의 점, 곡선, 영역 사이에는 일대일 대응이 된다. 그럼  $\mathbf{X}$ 는 지도의 벡터와 곡면의 벡터 사이에 어떤 관계를 주는가?

지도의 벡터  $(a, b)_{u_0, v_0}$ 에 대하여 다음을 만족시키는 지도의 곡선  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ 를 생각하라:

$$\gamma(0) = (u_0, v_0), \quad \dot{\gamma}(0) = (a, b)_{(u_0, v_0)}. \quad (5.9)$$

예를 들어

$$\gamma(t) := (u_0, v_0) + t(a, b) = (u_0 + ta, v_0 + tb)$$

를 생각할 수 있지만 꼭 이 곡선을 생각하라는 것은 아니다. 이제 이 곡선에 대하여  $\alpha := \mathbf{X} \circ \gamma$ 를 생각하면

$$\dot{\alpha}(0) = a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$$

가 됨을 알 수 있다.

**정의 5.2.1.** 지도의 벡터에 곡면의 접벡터를 대응시키는 다음 관계  $\mathbf{X}_\star$ 를  $\mathbf{X}$ 의 밀어넣기<sup>1)</sup>라고 한다.

$$\mathbf{X}_\star((a, b)_{(u_0, v_0)}) = a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$$

역으로 곡면의 임의의 접벡터  $\mathbf{w} \in T_{X(p)}S$ 를 생각하라. 그러면,  $\mathbf{X}_u(p), \mathbf{X}_v(p)$ 가  $T_{X(p)}S$ 의 기저이기 때문에 어떤  $(u_0, v_0)$ ,  $a, b$ 가 있어서  $\mathbf{w} = a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$ 가 된다. 이제 지도의 벡터  $(a, b)_{(u_0, v_0)}$ 를 이  $\mathbf{w}$ 에 대응시킨다.

이상을 정리하면 다음과 같다:

**보조정리 5.2.2.** 지도의 임의의 점  $p$ 에 대하여  $\mathbf{X}_\star$ 는  $T_p\mathcal{U}$ 와  $T_{X(p)}S$  사이의 일대일 대응이 된다.

**질문 5.2.3.** 지도의 벡터  $(1, 0)_{(u, v)}$ 와  $(0, 1)_{(u, v)}$ 에 해당하는 곡면의 벡터는 각각  $\mathbf{X}_u(u, v), \mathbf{X}_v(u, v)$ 임을 보여라.

**질문 5.2.4.**  $(u_0, v_0) \neq (u_1, v_1)$  일 때 지도의 벡터  $(a, b)_{(u_0, v_0)}$ 와  $(a, b)_{(u_1, v_1)}$ 은 같은 벡터인가 아닌가?

---

1) 영어로 push-forward 라고 하는 개념을 나는 이렇게 쓰겠다.

**참고 5.2.5.** 두 지도 벡터  $(a, b)_{(u_0, v_0)}$  와  $(a, b)_{(u_1, v_1)}$  의  $X_*$ 에 의한 이미지는 일반적으로 같지 않다. 그러므로  $(a, b)_{(u_0, v_0)}$  와  $(a, b)_{(u_1, v_1)}$  도 일반적으로 같지 않다고 생각한다.  $\mathbb{R}^2$ 에 있는 평행 이동이란 개념이 지도에는 없다.

**지도의 벡터를 나타내는 새로운 방법** 한 벡터  $v_p = (a, b)_{(u_0, v_0)}$  를 고정하라. 아 때  $p$  근방에 정의된 임의의 함수  $f$ 에 대하여  $v_p$ 가  $f$ 에 작용하여 한 실수를 주는 관계를 생각할 수 있다.

$$v_p(f) := (f \circ \gamma)'(0).$$

여기서  $\gamma$ 는  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$  를 만족시키는 지도의 곡선이다. 그런데 이 식의 우변을 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) &= f_u(\gamma(0))\dot{\gamma}^1(0) + f_v(\gamma(0))\dot{\gamma}^2(0) \\ &= f_u(p)v^1 + f_v(p)v^2 \\ &= (v^1\partial_u + v^2\partial_v)f. \end{aligned}$$

따라서 다음이 성립한다고 할 수 있다.

$$v_p(f) = (v^1\partial_u|_p + v^2\partial_v|_p)f.$$

이제 양변에서  $f$  를 떼 내서 다음 표현을 얻는다.

$$v_p = v^1\partial_u|_p + v^2\partial_v|_p.$$

이와 같이 벡터를 다음과 같이 편미분 연산자를 사용하여 나타내기도 한다.

$$(a, b)_{(u_0, v_0)} \iff a\partial_u|_{(u_0, v_0)} + b\partial_v|_{(u_0, v_0)}$$

**지도 변환에 따른 벡터 변환** 위와 같이 벡터를 미분연산자로 나타내면 따라 나오는 잇점들이 있다. 그 중 하나는 한 지도를 다른 지도로 바꾸었을 때 벡터가 어떻게 변환되는지 아는 게 편리할 수 있다.

$uv$ -지도가 나타내는 곡면의 식을  $\mathbf{X}$ ,  $\bar{u}\bar{v}$ -지도가 나타내는 곡면의 식을  $\bar{\mathbf{X}}$ 라 하면 다음 관계가 성립한다:

$$\mathbf{X}(u, v) = \bar{\mathbf{X}}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)).$$

따라서

$$\mathbf{X}_u(u, v) = \bar{\mathbf{X}}_{\bar{u}}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))\bar{u}_u(u, v) + \bar{\mathbf{X}}_{\bar{v}}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))\bar{v}_u(u, v),$$

$$\mathbf{X}_v(u, v) = \bar{\mathbf{X}}_{\bar{u}}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))\bar{u}_v(u, v) + \bar{\mathbf{X}}_{\bar{v}}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))\bar{v}_v(u, v).$$

따라서

$$a\mathbf{X}_u + b\mathbf{X}_v = (a\bar{u}_u + b\bar{u}_v)\bar{\mathbf{X}}_{\bar{u}} + (a\bar{v}_u + b\bar{v}_v)\bar{\mathbf{X}}_{\bar{v}}.$$

이를 이에 대응하는 지도의 벡터에 관한 식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v} = \left(a\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + b\frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \left(a\frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + b\frac{\partial \bar{v}}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{v}}. \quad (5.10)$$

즉  $\bar{u}\bar{v}$ -지도의 벡터  $(a\bar{u}_u(u, v) + b\bar{u}_v(u, v), a\bar{v}_u(u, v) + b\bar{v}_v(u, v))_{(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))}$  가  $uv$ -지도의 벡터  $(a, b)_{(u, v)}$  와 같다는 것이다.

그런데 미분의 연쇄 법칙을 이용하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \left( a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v} \right) f &= a \frac{\partial f}{\partial u} + b \frac{\partial f}{\partial v} \\
 &= a \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \right) + b \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} \right) \\
 &= \left( a \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + b \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \left( a \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + b \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}. \\
 &= \left( \left( a \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + b \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + \left( a \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} + b \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \right) f.
 \end{aligned}$$

이 식의 첫 항과 마지막 항에서  $f$ 를 지우면 (5.10)이 얻어진다. 즉, 벡터를 미분연산자로 나타냈을 시 연쇄법칙을 적용하여 표현을 변환시키면 그 벡터를 다른 좌표계로 나타낸 표현이 얻어진다. 이와 같이 편미분 연산자로 벡터를 표현하면 지도 변환시 벡터가 변화되는 관계를 미분의 연쇄법칙을 이용하여 쉽게 기억할 수 있다.

**참고 5.2.6.** 곡선을 이용하여 벡터를 생각할 수 있는 방법도 있다. 어떤 벡터가 주어져 있으면 그 벡터를 속도 벡터로 가지는 곡선을 생각할 수 있다. 역으로 어떤 곡선이 있으면 그 곡선의 속도 벡터를 생각할 수 있다. 그래서 벡터와 곡선을 같은 것으로 볼 수 있는가 하고 생각할 수 있는데, 여기서 걸림돌이 되는 것은 주어진 곡선에 대한 속도 벡터는 유일하지만 주어진 벡터를 속도벡터로 가지는 곡선은 유일하지 않아서 주어진 벡터에 대해 어떤 곡선을 대응시켜야 할지가 분명하지 않다는 것이다. 그런데 이럴 때 쓰는 기법이 있다. 그것은 같은

속도 벡터를 가지는 곡선들은(벡터의 관점에서 보자면) 모두 같은 곡선으로 보자는 것이다. 즉,

$$\alpha(0) = \beta(0), \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0)$$

면  $\alpha \equiv \beta$ 라고 하자는 것이다. 이렇게 만들어진 같은 곡선들의 집합을 동류라고 한다. 이렇게 하면 곡선의 동류들의 집합과 벡터들의 집합 사이에는 일대일 대응이 있다. 왜 이렇게 벡터를 보는가 하는 것은 곡면을 추상적으로 정의한 후에 가능하며 이 책에서 이야기하기는 힘들다.

## 5.3 계량기 표기법

5.1 절에 정의된 ○를 미분기하적으로는 다음과 같이 나타낸다.

**정의 5.3.1.** 곡면의 계량기(計量器 metric)란 곡면을 나타내는 지도의 좌표가  $u, v$ 로 주어졌을 때

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dv^2 + G(u, v)dv^2 \quad (5.11)$$

으로 표현되는 것을 말한다. 곡면의 내재적 양(intrinsic quantity)이란 계량기만으로 채울 수 있는 양을 말한다. 곡면의 양 중에서 내재적 양이 아닌 것을 외재적 양(extrinsic quantity)라고 한다.

○을 왜 이렇게 표현하는가 하는 것은 앞 절에 소개된 벡터 표기법과 연관시켜 생각하면 알 수 있다. 139쪽에서는  $Edu^2 + 2Fdv^2 + Gdv^2$ 을 첫째 기본 형식이라 부르고  $I$ 로 나타냈는데 여기서는 계량기라 부르고  $ds^2$ 으로 나타내고 있음에 주목하라. 여기서는 이것만 다루기 때문에 첫째라는 이름과 첫째를 나타내는  $I$ 를 피하고자 하기 때문에 이렇게 부른다.

곡면에 매끈하면서 매우 짧은 곡선이 있을 때 이 곡선의 길이를  $ds$ 라 하면 피타고拉斯의 정리에 의하여  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ 이다. 이로부터 다음 식이

얻어진다.

$$ds^2 = \langle (dx, dy, dz), (dx, dy, dz) \rangle = \langle d\mathbf{X}, d\mathbf{X} \rangle \quad (5.12)$$

$$= \langle \mathbf{X}_u du + \mathbf{X}_v dv, \mathbf{X}_u du + \mathbf{X}_v dv \rangle \quad (5.13)$$

$$= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle du^2 + 2\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle du dv + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle dv^2 \quad (5.14)$$

$$= E(u, v)du^2 + 2F(u, v)du dv + G(u, v)dv^2. \quad (5.15)$$

이제  $E, F, G$ 가 자연스럽게 등장함을 볼 수 있다. 이와 같이  $E, F, G$ 는  $ds^2$  을 어떤 특정한 지도에서 생각했을 때 나타나는 어떤 표현식의 계수다.

**지도 변환에 따른 계량기 변환** 계량기를 식 (5.11)와 같이 나타내는 이유를 다음과 같이 생각해 볼 수도 있다. 한 곡면  $S \subset \mathbb{E}^3$ 를 나타내는 지도가 두 개 있다고 하자:

$$\mathbf{X} : (u^1, u^2) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{E}^3, \quad \bar{\mathbf{X}} : (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{E}^3.$$

각 지도에서의 계량기의 표현은 각각  $\langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle du^i du^j$ ,  $\langle \bar{\mathbf{X}}_k, \bar{\mathbf{X}}_l \rangle d\bar{u}^k d\bar{u}^l$  이다.<sup>2)</sup> 사실 이 둘은 다음 변환관계

$$\bar{\mathbf{X}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \mathbf{X}(u^1, u^2), \quad \bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2), \quad \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2))$$

---

2) 여기서 아인슈타인의 기호법이 사용되었다. 즉  $\langle \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{u}^k}, \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{u}^l} \rangle d\bar{u}^k d\bar{u}^l$  는 사실  $\sum_{k,l=1}^2 \langle \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{u}^k}, \frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial \bar{u}^l} \rangle du^k du^l$  를 의미한다.

를 통하여 같은 것이어야 한다. 과연 실제로 그런지 살펴보자. 위 관계식과 미분의 연쇄법칙으로부터 다음이 성립함을 알 수 있다:

$$d\bar{u}^k = \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i} du^i, \quad d\bar{u}^l = \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial u^j} du^j, \quad \mathbf{X}_i = \bar{\mathbf{X}}_k \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i}, \quad \mathbf{X}_j = \bar{\mathbf{X}}_l \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial u^j}.$$

이로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{X}}_k, \bar{\mathbf{X}}_l \rangle d\bar{u}^k d\bar{u}^l &= \langle \bar{\mathbf{X}}_k, \bar{\mathbf{X}}_l \rangle \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial u^j} du^i du^j \\ &= \langle \bar{\mathbf{X}}_k \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i}, \bar{\mathbf{X}}_l \frac{\partial \bar{u}^l}{\partial u^j} \rangle du^i du^j \\ &= \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle du^i du^j. \end{aligned} \tag{5.16}$$

즉, 각각의 좌표에서 계량기를 표현한 식은 좌표의 변환관계를 통하여 서로 같다.

여기서 다음을 정리해둔다. 편의상  $f := \mathbf{X}^{-1} \circ \mathbf{X}$  라고 하자.

- $u^1 u^2$ -지도의 임의의 곡선  $\gamma$ 의 길이를  $ds_{u^1, u^2}^2$ 로 재는 것은  $f \circ \gamma$ 의 길이를  $ds_{\bar{u}^1, \bar{u}^2}^2$ 로 재는 것과 같다.
- $u^1 u^2$ -지도의 임의의 영역  $\mathcal{U}$ 의 넓이를  $ds_{u^1, u^2}^2$ 로 재는 것은  $f(\mathcal{U})$ 의 넓이를  $ds_{\bar{u}^1, \bar{u}^2}^2$ 로 재는 것과 같다.
- 교차하는 두 임의의 곡선  $\gamma$ 와  $\delta$  사이의 각도를  $ds_{u^1, u^2}^2$ 로 재는 것은 두 곡선  $f \circ \gamma$ 와  $f \circ \delta$  사이의 각도를  $ds_{\bar{u}^1, \bar{u}^2}^2$ 로 재는 것과 같다.

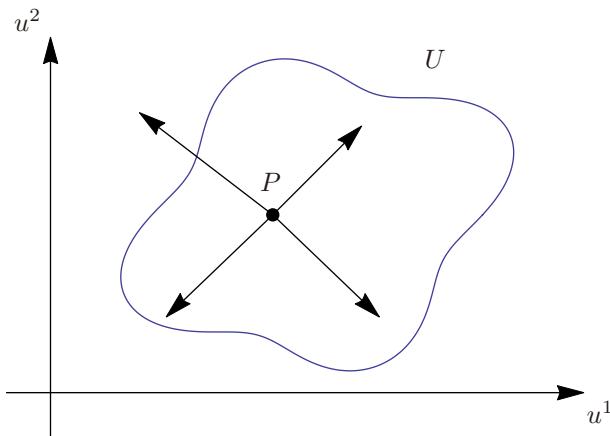
질문 5.3.2. 위 세 주장이 왜 사실인지 서술해 보아라.

텐서 이제 지도에서 계량기와 벡터가 어떻게 표현되는지 알아보았다. 그런데 왜 벡터는  $\frac{\partial}{\partial u^i}$ 에 대한 ‘일차’ 결합이고 계량기는  $du^i$ 에 대한 ‘이차’ 결합일까?  $\frac{\partial}{\partial u^i}$ 에 대한 ‘이차’ 결합은 없는가?  $du^i$ 에 대한 일차결합은 없는가? 사실 벡터나 계량기를 일반화한 개념이 있는데 텐서라는 것이다. 텐서에 대한 소개는 ‘양성덕의 미분기하 강의 2편’에서 다루도록 한다.<sup>3)</sup>

계량기(計量器 metric)를 좀 더 추상적인 수준에서 생각해 보기

---

3) 참고로 2018년 현재 유행하고 있는 구글의 텐서프로우의 텐서는 여기서 말하는 텐서와 같은 개념에 바탕을 두고 있다고 알고 있다.



계량기가 정확히 어떻게 수학적으로 형식화 되는가는를 이해하려면 먼저 미분 형식(微分形式, differential form)이라는 것을 살펴보아야 한다. 이는 여러 책에 자세히 기술되어 있으므로 이 강의록에서는 따로 설명하지 않으나 여러분의 편의를 위해 부록 B에 간단하게 적어 두었으며 이를 이용하여 아래와 같은 논의를 전개한다.

자,  $du_p$  과  $dv_p$  가  $T_p U$ 에 정의된 일-형식<sup>4)</sup>이므로, 우리는 여기에 연관된 내

---

4) 부록 B 참고

적을 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned}\langle , \rangle_p &:= E(p) du_p \odot du_p + 2F(p)du_p \odot dv_p + G(p)dv_p \odot dv_p \\ &= E(p)du_p^2 + 2F(p)du_p dv_p + G(p)dv_p^2.\end{aligned}\tag{5.17}$$

이는  $uv$ -평면 각 점마다 내적이 있는 것이다. 원래 내적이란 벡터 공간에 주어지는 것인데, 현재 관점은 평면 영역  $U$ 의 각 점마다 2차원 벡터 공간이 할당되어 있다고 보고 매 점마다 내적을 할당한 것이다. 여기서  $p \in U$ 에 내적  $\langle , \rangle_p$ 을 할당하는 사상이 ‘계량기’며, 간단히  $\langle , \rangle$ 로 나타낸다. 정의 5.3.1과 비교해 보기 바란다.

**참고 5.3.3.** 1. 여기서 계량기  $\langle , \rangle$ 는 완전히  $u, v$ 만으로 표현됨을 주목하라. 즉,  $\mathbb{E}^3$  속의 곡면을 공부하는데, 그 계산에 있어서는 사실  $u$ 와  $v$ 의 식으로 표현을 하고 있는 것이다.

2. 위에서 좌표함수  $u, v$ 를  $U \subset \mathbb{R}^2$ 에서  $\mathbb{R}$ 로 가는 함수로 보고 있음.

$$u, v : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$du_p : T_p U \cong \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{u(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

## 5.4 가우스 곡률의 내재성

이 절의 학습 목표 가우스의 곡률 또한 내재적 양임을 알아보자.

**정리 5.4.1.** 가우스의<sup>5)</sup> 위대한 정리 (Theorema Egregium<sup>6)</sup>) :  $K$ 는 내재적 양이다.

가우스 곡률  $K$ 의 식은 다음과 같이 제1 기본 형식의 계수와 제2 기본 형식의 계수를 모두 사용하여 나타내어졌다.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

가우스의 위대한 정리는 위 표현이 사실은  $L, M, N$  없이  $E, F, G$  만으로 표현될 수 있음을 의미한다.

5) ‘가우스의’ 를 영어로 하면 Gauss’s 일까? Gauss’ 일까?

6) 라틴어이다. 또한 이는 가우스 자신이 이 정리에 붙인 이름인데 과연 가우스 자신이 ‘가우스의 위대한’ 이란 표현을 썼을까 하는 의심이 들지 않는가? 사실 영어로는 Remarkable Theorem이며 이는 놀라운 정리라고 번역하는게 더 타당하며 실제로 놀라운 정리라고 번역하신 분도 많다. 그럼에도 불구하고 놀라운 정리라고 번역하신 분도 많으며 나는... 음 위대한 정리라는 번역을 따른다. 가우스의 위대한 통찰력을 볼 수 있는 정리라는 뜻에서... 즉 ‘놀라운’은 정리 자체에 대한 형용사며 ‘위대한’은 가우스의 통찰력에 대한 수식어다. 최소한 나는 이렇게 생각한다.

**증명** 4장 1절에 소개된  $\mathbf{X}_k$ ,  $\mathbf{X}_{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $\ell_{ij}$  등의 기호와 다음 식을 떠 올리자.

$$\mathbf{X}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k + \ell_{ij} \mathbf{G}, \quad i, j \in \{1, 2\} \quad (5.18)$$

이제 다음 식을 관찰하자.

$$\mathbf{X}_{112} = \mathbf{X}_{121}, \quad \text{즉} \quad \mathbf{X}_{uuv} = \mathbf{X}_{uvu}. \quad (5.19)$$

이는 Clairaut의 정리에 의해 항상 성립하는 항등식이다.

이때,  $\mathbf{X}_{112}$ 와  $\mathbf{X}_{121}$  모두는  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{G}$ 의 선형 결합으로 쓰여지는데,  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{G}$ 가  $\mathbb{E}^3$ 의 기저를 이루므로 각 계수들이 서로 같아야 한다. 이제 다음을 살피자.

$$\mathbf{X}_{112} = (\Gamma_{11}^1)_2 \mathbf{X}_1 + (\Gamma_{11}^1) \mathbf{X}_{12} + (\Gamma_{11}^2)_2 \mathbf{X}_2 + (\Gamma_{11}^2) \mathbf{X}_{22} + L_2 \mathbf{G} + L \mathbf{G}_2.$$

여기서  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ 는  $\mathbf{G}$ 와 수직이기 때문에 네 합수  $b_{ij}$ 가 있어서

$$\mathbf{G}_1 = b_{11} \mathbf{X}_1 + b_{12} \mathbf{X}_2,$$

$$\mathbf{G}_2 = b_{21} \mathbf{X}_1 + b_{22} \mathbf{X}_2.$$

이)  $b_{ij}$ 의 식은 모양 연산자를 계산하는 과정에서 유도하였다.<sup>7)</sup>

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}. \quad (5.20)$$

이제  $\mathbf{X}_{112}$ 에서  $\mathbf{X}_2$ 의 계수를 구하면,

$$(\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L b_{22}. \quad (5.21)$$

---

7) 정리 3.4.8의 증명 참조. 여기서  $-$  부호의 등장은  $S(\mathbf{X}_i) = -G_i$ 이기 때문이다.

마찬가지로  $\mathbf{X}_{121}$ 에서  $\mathbf{X}_2$ 의 계수를 구하면

$$(\Gamma_{12}^2)_1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + Mb_{12}. \quad (5.22)$$

(5.21)=(5.22)이므로

$$Lb_{22} - Mb_{12} = (\Gamma_{12}^2)_1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - (\Gamma_{11}^2)_2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2.$$

한편 (5.20)로부터

$$b_{22} = \frac{FM - EN}{EG - F^2}, \quad b_{12} = \frac{FL - EM}{EG - F^2}$$

이므로

$$\begin{aligned} Lb_{22} - Mb_{12} &= \frac{LFM - LEN - MFL + MEM}{EG - F^2} \\ &= -\frac{E(LN - M^2)}{EG - F^2} \\ &= -EK. \end{aligned}$$

그러므로

$$K = -\frac{1}{E}((\Gamma_{12}^2)_1 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - (\Gamma_{11}^2)_2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2). \quad (5.23)$$

이 식을 통하여 가우스 곡률  $K$ 가 제1 기본 형식만으로, 즉 제2 기본 형식은 없이, 계산될 수 있음을 알 수 있다. ■

위 식 (5.23)을 가우스의 식(Gauss formula [16, 234쪽] 또는 Gauss equation [16, 236쪽])이라고 한다.

식 (5.23)에 조금 불만족스러운 부분이 있다. 왜 분모에  $E$ 만 있는가 하는 것이다.  $u$  좌표와  $v$  좌표는 그 어느 것이 다른 것에 비하여 우월하다고 할 수 없기 때문에 최소한  $E$ 와  $G$ 는 골고루 나타나야 할 것으로 기대되지 않는가? 사실은  $E$ 와  $G$ 가 골고루 나타나도록 식 (5.23)을 정리할 수 있는데 그 과정과 결과는 정리 5.10.4의 증명에 나와 있다.

선형대수를 잘 알고 있다면 다음 증명 방법도 재미있게 따라가 볼 수 있을 텐데 그 결과 또한  $E$ 와  $G$ 가 골고루 등장하는 식이 된다.

**다른 증명** 8) 먼저  $L, M, N$ 을 다음과 같이 표현하자.

$$L = \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{G} = \frac{\mathbf{X}_{uu} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \frac{\mathbf{X}_{uu} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$M = \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{G} = \frac{\mathbf{X}_{uv} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \frac{\mathbf{X}_{uv} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$N = \mathbf{X}_{vv} \cdot \mathbf{G} = \frac{\mathbf{X}_{vv} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \frac{\mathbf{X}_{vv} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

이제 가우스 곡률  $K$ 를 계산하는 식은 위의  $L, M, N$ 에 대한 표현에 의해 다음과

---

8) 여기 내용은 2011년 봄 학기 수업을 들은 이 준성 군이 숙제 답안으로 타자한 것을 편집한 것이다.

같다.

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{(\mathbf{X}_{uu} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v))(\mathbf{X}_{vv} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)) - (\mathbf{X}_{uv} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v))^2}{(EG - F^2)^2} \end{aligned}$$

이제 이 식의 분자의 각 항들을 선형대수에서 배운 행렬식의 성질들

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^T| = |A|, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |[\mathbf{a}:\mathbf{b}:\mathbf{c}]|$$

등을 사용해 계산하자. 여기서  $[\mathbf{a}:\mathbf{b}:\mathbf{c}]$ 은 첫 번째 열이  $\mathbf{a}$ , 두 번째 열이  $\mathbf{b}$ , 세 번째 열이  $\mathbf{c}$ 인  $3 \times 3$  행렬이다.

먼저, 첫 번째 항을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{X}_{uu} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)) (\mathbf{X}_{vv} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)) \\
 &= |[\mathbf{X}_{uu} : \mathbf{X}_u : \mathbf{X}_v]| |[\mathbf{X}_{vv} : \mathbf{X}_u : \mathbf{X}_v]| \\
 &= |[\mathbf{X}_{uu} : \mathbf{X}_u : \mathbf{X}_v]^T| |[\mathbf{X}_{vv} : \mathbf{X}_u : \mathbf{X}_v]| \\
 &= |[\mathbf{X}_{uu} : \mathbf{X}_u \mathbf{X}_v]^T [\mathbf{X}_{vv} : \mathbf{X}_u : \mathbf{X}_v]| \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uu} \cdot \mathbf{X}_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

마찬가지로 두 번째 항을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{X}_{uv} \cdot (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v))^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_u & \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uv} \cdot \mathbf{X}_{uv} & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

따라서<sup>9)</sup>

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}. \quad (5.24)$$

이로써 증명이 완결되었다. ■

**연습문제 5.4.2.** 다음 문제를 풀어 보자.

1. 위 증명에서 계산이 확실하지 않은 부분을 확실하게 정리하여라.
2. 식 (5.23)과 식 (5.24)가 같은 식이라는 것을 확인하여 보아라.
3. 직교좌표계에서 가우스 곡률의 식이 어떻게 되는지 가우스-보네 정리를 증명하면서 유도해 본 적이 있는데 위 결과를 이용하여 직교좌표계에서의 가우스 곡률의 식을 유도하여 보아라.
4. 평균 곡률  $H$ 는 내재적 양일까? 아닐까? (힌트) 평면과 실린더의  $ds^2$  과  $H$ 를 계산하여 보아라.

---

9) 음, 여기서 내용의 비약이 있다. 반드시 직접 해 보기 바란다.

5. 6장 2절에서 구의 계량기  $ds_I^2, ds_{II}^2, ds_{III}^2$  을 계산하였다. 이 때, 각각의 계량기에 대하여  $K$ 를 계산하여 보아라.

**연습문제 5.4.3.** 만약  $E = G = \rho^2(u, v), F = 0$ 인 경우  $K = -\rho^{-2}\Delta \log \rho$ 임을 보여라. (여기서  $\Delta := \partial_{uu} + \partial_{vv}$ .)

**제1, 2 기본 형식 사이에 성립하는 식** 가우스의 식은 어떤 곡면의 제1, 2 기본 형식 사이에 성립하는 식으로 볼 수 있다. 그렇다면 가우스의 식 외에 제1, 2 기본 형식 사이에 성립하는 또 다른 식이 있을까? 가우스의 식은 (5.19)에서  $\mathbf{X}_2$ 의 계수를 비교함으로써 얻어졌다. 그렇다면 (5.19)에서  $\mathbf{X}_1$ 의 계수들을 비교하면 어떤 식이 얻어질까? 또  $G$ 의 계수들을 비교하면 어떤 식이 얻어질까? 이 식들은 앞에서 구한 가우스의 식과 같은 식일까, 다른 식일까?

결론만 간단히 이야기하면 (5.19)에서  $\mathbf{X}_1$ 의 계수들을 비교하여 얻어지는 식은 가우스의 식과 표현은 다르나 동일한 식이다. 그러나  $\mathbf{G}$ 의 계수들을 비교하여 얻어지는 식은 가우스의 식과는 다른 식이다.<sup>10)</sup>

또한 가우스의 식은  $\mathbf{X}_{112} = \mathbf{X}_{121}$ 에서  $\mathbf{X}_2$ 의 계수들을 비교하여 얻어졌는데

---

10) 어떻게 다른가? 구체적으로 쓸 것.

$\mathbf{X}_{112} = \mathbf{X}_{121}$  말고도 다른 항등식을 생각할 수 있다. 예를 들어

$$\mathbf{X}_{221} = \mathbf{X}_{212}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{G}_{12} = \mathbf{G}_{21} \quad (5.26)$$

등도 항등적으로 성립하는데, 이것으로부터는 제 1, 2 기본 형식에 관한 어떤 항등식이 얻어질지 생각해 볼 수 있다.

곡면이 있을 경우 제 1, 2 기본 형식 사이에 성립하는 또 다른 관계에 코다치-마이나르디 식 (Mainardi-Codazzi equation)이라는 것이 있다.

코다치-마이나르디 식  $\mathbf{G}_{uv} = \mathbf{G}_{12}$  를 계산해 보면 어떤  $A_1, A_2, A_3$  이 있어서  
11)

$$\mathbf{G}_{uv} = (b_{11}\mathbf{X}_u + b_{21}\mathbf{X}_v)_v = A_1\mathbf{X}_u + A_2\mathbf{X}_v + A_3\mathbf{G}.$$

$\mathbf{G}_{vu} = \mathbf{G}_{21}$  에 대해서도 똑같이 어떤  $B_1, B_2, B_3$  이 있어서

$$\mathbf{G}_{vu} = (b_{12}\mathbf{X}_u + b_{22}\mathbf{X}_v)_u = B_1\mathbf{X}_u + B_2\mathbf{X}_v + B_3\mathbf{G}.$$

$\mathbf{G}_{uv} = \mathbf{G}_{vu}$  이어야 하므로  $A_i = B_i$ . 이제  $A_1 = B_1$ 로부터

$$L_v - M_u = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 \quad (5.27)$$

$A_2 = B_2$  로부터

$$M_v - N_u = L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2 \quad (5.28)$$

11) 첫 번째 등호의 우변이 105쪽식에 위배됨

$A_3 = B_3$ 는 항상 성립한다. (5.27), (5.28)를 코다치-마이나르디 식<sup>12)</sup> 이라 한다. <sup>13)</sup> 위에서 언급한 방법으로 나오는 식들을 보면 결국 가우스의 식, 코다치-마이나르디 식이 된다. 그러면 제1, 2 기본 형식 사이에 성립하는 식은 가우스의 식, 코다치-마이나르디 식 뿐인가? 이에 대한 답은 직접적으로 할 수 없고 다음 질문을 통한 답으로 할 수 있다.

**질문:** 평면 영역  $\mathcal{U} \subset \mathbb{E}^3$ 에 정의된 여섯 개 함수  $E, F, G$ 와  $L, M, N$ 를 제1 기본 형식과 제2 기본 형식으로 가지는 곡면이 있을까? 없을까?

그런 곡면이 있다고 하면 일단은 가우스의 식과 코다치-마이나르디 식이 성립해야 한다. 즉, 제1, 2 기본 형식을 모두 써서 나타내어진 가우스 곡률의 식과 제1 기본 형식만으로 나타내어진 가우스 곡률의 표현이 같아야 한다.

<sup>14)</sup> 가우스의 식은 평면 영역에 주어진 함수  $E, F, G$ 와  $L, M, N$ 이 그 평면

12) 마이나르디-코다치 식이라고 하는 우리말 문헌이 많은데 많은 영문 문헌에서는 코다치-마이나르디 식이라고 한다. 위키백과에 보면 마이나르디(Mainardi)는 1856년에, 코다치(Codazzi)는 1868-1869년에 해당 결과를 출판한 것으로 인용하고 있다.

13) 이는 다음과 같이 쓸 수도 있다. 그런데 이게 도움이 되나?

$$\begin{bmatrix} \partial_v & -\partial_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

14) 아, 이 설명이 더 잘 되어야 하는구나.

영역에서 공간으로 가는 어떤 곡면의 제1, 그리고 제2 기본 형식이 될 수 있는 필요 조건으로 생각할 수도 있는 것이다.

**정리 5.4.4.** 곡면론의 기본정리(Fundamental Theorem of Surface Theory): 단순 연결된 평면 영역  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에 정의된 여섯 함수  $E, F, G, L, M, N$ 이 다음을 만족하면  $E, F, G$ 를 제1 기본 형식으로  $L, M, N$ 를 제2 기본 형식으로 가지는 곡면  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 가 있다. 그리고 그 곡면은 평행 이동, 회전 이동을 허용하면 유일하다.

1.  $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$
2. 가우스의 식 (5.23).
3. 코다치-마이나르디의 식 (5.27), (5.27).

위 정리에 비추어 가우스 식과 코다치-마이나르디 식은 어울림 조건(compatibility conditions)라는 이름으로 알려져 있다. 여기서 가우스의 식, 코다치-마이나르디 식은 미분을 할 때 순서를 바꾸어도 된다는 정리로부터 따라 나오는데, 이렇게 미분의 순서를 바꾸어 그 둘 사이의 관계를 들여다봄으로써 중요한 결과들이 많이 얻어진다.

**참고문헌 5.4.1.** 이 절의 내용을 좀 더 공부하고 싶으면 다음을 참고하시오.

1. 곡면론의 기본 정리에 대해서는 [16, 4장]를 참조하라.

**연습문제 5.4.5.** 다음 문제를 풀어 보자.

1. 위의 계산을 자세히 보여라.

## 5.5 측지곡률과 곧은선의 내재성

**이 절의 학습 목표** 측지곡률과 곧은선을 지도에서만 생각할 수 있는지 알아본다.

아무 지도나 펴 놓고 어떤 두 지점을 연결하는 곡선을 생각하자. 이 곡선이 곧은선인지 아닌지 지도만 가지고 결정할 수 있는가? 이는 곧 측지 곡률은 내재적 양인가? 하는 질문과 연결된다.

이 질문이 무엇을 의미하는지 조금 더 생각해 보자. 이는 계량기가 갖추어진 어떤 지도에 곡선  $\gamma$ 가 주어져 있으면 그 곡선이 실제로 나타내는 곡면 위의 곡선의 측지 곡률을 이 계량기와  $\gamma$ 의 식만 가지고 (즉,  $X$ 는 몰라도) 계산할 수 있겠는가 하는 것이다. 이는 측지 곡률을 계산하는 여러 과정을 살펴봄으로써 알 수 있다. 측지곡률이 내재적 양임을 이해한다면 곧은선을 지도에서 결정함을 알 수 있다.

**정리 5.5.1.** 곡면  $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{E}^3$ 의 곡선  $\alpha = X \circ \gamma$ 가 단위 속력을 가지고 있을 때  $\alpha$ 의 측지 곡률  $\kappa_g$ 는 다음과 같다:

$$\kappa_g[\alpha] = \sqrt{|g(\gamma^1, \gamma^2)|} \begin{vmatrix} \dot{\gamma}^1 & \ddot{\gamma}^1 + \Gamma_{kl}^1(\gamma^1, \gamma^2)\dot{\gamma}^k\dot{\gamma}^l \\ \dot{\gamma}^2 & \ddot{\gamma}^2 + \Gamma_{kl}^2(\gamma^1, \gamma^2)\dot{\gamma}^k\dot{\gamma}^l \end{vmatrix}. \quad (5.29)$$

위 식은 측지 곡률이 내재적 양임을 보여준다. 등호의 우변에 있는 모든 표현이 지도에 표현되는 계량기와  $\gamma$ 의 표현만으로 계산될 수 있기 때문이다. 참 여기서  $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ . 식 (3.22)를 참고하라.

**증명** 편의상 이 증명에서 임의의  $A$ 에 대하여  $\tilde{A}(t) := A \circ \gamma(t)$ 라 하자. 그러면  $\ddot{\alpha}^T = (\Gamma_{kl}^m \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^m) \mathbf{X}_m$  이므로

$$\kappa_g[\alpha] = \tilde{\mathbf{G}} \cdot \dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}^T = \dot{\gamma}^\ell (\tilde{\Gamma}_{kl}^m \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^m) \tilde{\mathbf{G}} \cdot \tilde{\mathbf{X}}_\ell \times \tilde{\mathbf{X}}_m. \quad (5.30)$$

그러므로 보조정리 3.2.10와 (3.14)로부터 결론이 성립한다. ■

하지만 위 식은 뒤에 숨겨져 있는 이론을 알아보기 힘들게 한다. 사실은 좀더 근본적으로 내재적 양을 생각할 수 있다. 먼저 다음과 같이, 보조정리 4.3.19에 착안하여,  $\mathcal{J}$  연산자를 정의한다.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(a^1 \partial_1 + a^2 \partial_2) &:= b^1 \partial_1 + b^2 \partial_2, \\ \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} &:= \sqrt{|g|} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a^2 \\ a^1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

이러면 다음이 성립한다.

$$\langle a^i \partial_i, b^j \partial_j \rangle = 0, \quad \langle a^i \partial_i, a^i \partial_i \rangle = \langle b^j \partial_j, b^j \partial_j \rangle, \quad \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} > 0.$$

이를 두고  $\mathcal{J}(a^1 \partial_1 + a^2 \partial_2)$ 는  $a^1 \partial_1 + a^2 \partial_2$ 를 반시계 방향으로  $90^\circ$  돌린 것이라고 표현한다.

이제 주어진 곡선  $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ 에 대하여 다음이 성립한다.

### 보조정리 5.5.2.

$$(\tilde{\Gamma}_{kl}^m \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^m) \partial_m = \kappa_g \mathcal{J}(\dot{\gamma}^\ell \partial_\ell). \quad (5.32)$$

이 방정식은 식 (4.9)  $\ddot{\alpha}^T = \kappa_g \mathcal{J}(\dot{\alpha})$ 의 내재적 버전이다.

**따름정리 5.5.3.** 위 보조정리로부터 식 (5.29)가 따라나온다.

**증명** 식을 간단히 쓰기 위하여  $A^m := \tilde{\Gamma}_{kl}^m \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^m$ 라고 하자. 식 (5.31)과 식 (5.32)에서 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} = \kappa_g \sqrt{|g|} \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\gamma}^2 \\ \dot{\gamma}^1 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

그러므로

$$\begin{bmatrix} -\dot{\gamma}^2 & \dot{\gamma}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} = \kappa_g \frac{1}{\sqrt{|g|}} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}^1 & \dot{\gamma}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}^1 \\ \dot{\gamma}^2 \end{bmatrix}.$$

$\dot{\gamma}^i g_{ij} \dot{\gamma}^j = 1$ 이기 때문에<sup>15)</sup> 이로부터 결론이 나온다. ■

다음은 보조정리 4.3.19의 내재적 버전이다. 따라서 증명도 내재적으로 증명하고자 한다.

---

15) 이유는?

정리 5.5.4.  $\kappa_g[\gamma](t) = 0$ 인 것은

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma^1(t), \gamma^2(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) = 0 \quad k \in \{1, 2\} \quad (5.34)$$

이기 위한 필요 충분 조건이다.

**증명** 식 (5.33)로부터 다음이 따라 나온다.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} = \kappa \sqrt{|g|} \begin{bmatrix} -\dot{\gamma}^2 \\ \dot{\gamma}^1 \end{bmatrix}.$$

그러므로

$$\begin{bmatrix} A^1 & A^2 \\ g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} = \kappa \sqrt{|g|} \begin{bmatrix} A^1 & A^2 \\ -\dot{\gamma}^2 \\ \dot{\gamma}^1 \end{bmatrix} = \kappa^2. \quad (5.35)$$

따라서,  $A_1 = A_2 = 0$ 이면 당연히  $\kappa = 0$ 이다. 이제  $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}$ 의 positive definiteness에 의하여  $\kappa = 0$ 이면  $A_1 = A_2 = 0$ 임이 따라 나온다. ■

식 (5.32)의 의미를 생각할 때 이 식의 우변에 있는 표현을  $\gamma$ 의 가속도라고 생각해야 할 것 같은데 왜 단순히  $\ddot{\gamma}^m \partial_m$ 가 아닌지 굉장히 궁금하지 않을 수 없다. 이에 대한 답은 다음 장의 마지막 절의 마지막 정리에 주어져 있으며 사실  $(\tilde{\Gamma}_{kl}^m \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^m) \partial_m$ 은  $\gamma$ 의 가속도다. 식 (5.35)의 좌변은 사실

$A^m \partial_m = (\tilde{\Gamma}_{kl}^m \dot{\gamma}^l \dot{\gamma}^k + \ddot{\gamma}^m) \partial_m$  의 크기의 제곱이다.<sup>16)</sup> 따라서 식 (5.35)은 곡률의 크기는 가속도의 크기와 같다는 것을 이야기하고 있다.

---

16) 이유는?

## 5.6 공변 미분과 접속

**이 절의 학습 목표** 곡면  $S \in \mathbb{E}^3$ 에 있는 곡선의 측지 곡률을 생각할 때 ‘곡면에서 바라본 곡선의 가속도’라는 개념을 사용하였는데 ‘곡면에서 바라본 곡선의 가속도’는 내재적 양일까, 아닐까? 가속도는 속도를 미분하여 얻어지는데, 사실은 「곡면에서 바라본 미분하는 과정」 자체가 내재적임을 이 절에서 알아본다.

곡면이  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ 로 주어졌다고 하자. 이제 구간  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 에서  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 로 들어가는 곡선

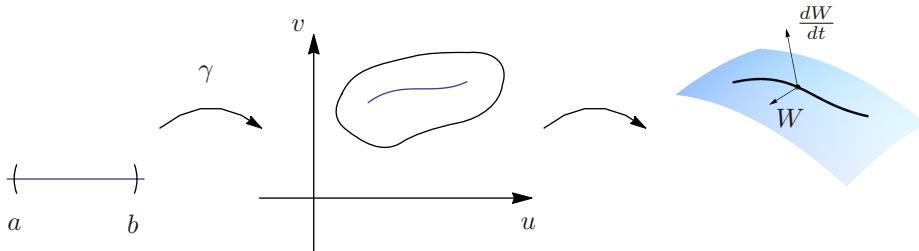
$$\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t))$$

를 생각하자.  $\gamma$ 의 가속도 벡터장은 속도 벡터장을 매개 변수에 대하여 미분하여 얻어진다. 그런데 사실 속도 벡터장 만이 아니라 임의의 접벡터장을 미분할 수 있다. 그래서 곡면의 입장에서 임의의 접벡터장을 미분하는 걸 생각해 보자. 임의의 접벡터장을 미분하여 다시 곡면의 접벡터장이 되게 하자. 그래야 나중에 지도의 접벡터장을 얻어낼 수 있기 때문이다.

모든  $t$ 에 대하여  $T_{\mathbf{X} \circ \gamma(t)} S$ 의 원소가 주어진다고 하자. 이 대응관계를  $\mathbf{W}$ 라고 하자. 즉, 그러면  $(a, b)$ 에 정의된 두 함수 어떤 두 함수  $a^1, a^2$ 에 대하여 다음과

같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{W}(t) := a^1(t)\mathbf{X}_1 \circ \gamma(t) + a^2(t)\mathbf{X}_2 \circ \gamma(t)$$



이러면  $\mathbf{W}$ 는  $(a, b)$ 에서  $\mathbb{E}^3$ 로 가는 벡터 함수로 볼 수 있다. 즉,

$$\mathbf{W}(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)).$$

그러면 대학 미적분학에서 배운 미분을 생각하여  $\frac{d}{dt}\mathbf{W}$ 를 생각할 수 있다. 즉

$$\frac{d}{dt}\mathbf{W}(t) = (\dot{w}_1(t), \dot{w}_2(t), \dot{w}_3(t)).$$

우리는 현재 이를  $T_{X \circ \gamma(t)}\mathbb{E}^3$ 의 원소로 보는데 이것이  $T_{X \circ \gamma(t)}S$ 의 원소일 이유는 없다. 즉  $\frac{d}{dt}\mathbf{W}$ 는 곡면에 접할 필요는 없다. 우리는 곡면에 접하는 공간의 벡터만을 인정하고 있으므로 ‘ $\frac{d\mathbf{W}}{dt}$ 의 접성분’이 곧 우리가 생각하고 싶은 양이다. 이것이 어떻게 계산이 되는지를 먼저 살펴보도록 하자.

먼저 다음을 보자.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathbf{W} &= \dot{a}^k (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma}) + a^k (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma}) \cdot \\
 &= \dot{a}^k (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma}) + a^k (\mathbf{X}_{k\ell} \circ \boldsymbol{\gamma}) \dot{u}^\ell \\
 &= \dot{a}^k (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma}) + a^k ((\Gamma_{k\ell}^m \circ \boldsymbol{\gamma})(\mathbf{X}_m \circ \boldsymbol{\gamma}) + (\ell_{k\ell} \circ \boldsymbol{\gamma})(\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\gamma})) \dot{u}^\ell \\
 &= \dot{a}^k (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma}) + a^k (\Gamma_{k\ell}^m \circ \boldsymbol{\gamma}) \dot{u}^\ell (\mathbf{X}_m \circ \boldsymbol{\gamma}) + a^k (\ell_{k\ell} \circ \boldsymbol{\gamma}) \dot{u}^\ell (\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\gamma}).
 \end{aligned}$$

여기서 두 번째 항  $a^k (\Gamma_{k\ell}^m \circ \boldsymbol{\gamma}) \dot{u}^\ell (\mathbf{X}_m \circ \boldsymbol{\gamma})$  을  $a^i (\Gamma_{ij}^k \circ \boldsymbol{\gamma}) \dot{u}^j (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma})$  로 쓰면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathbf{W} &= (\dot{a}^k + a^i (\Gamma_{ij}^k \circ \boldsymbol{\gamma}) \dot{u}^j) (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma}) + a^k (\ell_{k\ell} \circ \boldsymbol{\gamma}) \dot{u}^\ell (\mathbf{G} \circ \boldsymbol{\gamma}), \\
 \left( \frac{d}{dt} \mathbf{W} \right)^T &= (\dot{a}^k + a^i (\Gamma_{ij}^k \circ \boldsymbol{\gamma}) \dot{u}^j) (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma}).
 \end{aligned}$$

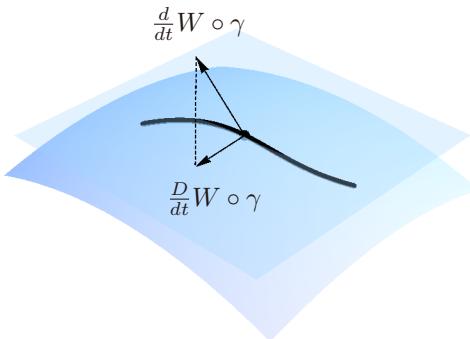
즉,

$$\left( \frac{d}{dt} \mathbf{W} \right)^T = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{d}{dt} a^k + \sum_{i,j=1}^2 a^i (\Gamma_{ij}^k \circ \boldsymbol{\gamma}) \frac{du^j}{dt} \right) (\mathbf{X}_k \circ \boldsymbol{\gamma}). \quad (5.36)$$

**정의 5.6.1.**  $\left[ \frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) \right]^T$  를 벡터장  $\mathbf{W}$  의  $\frac{d}{dt} (X \circ \boldsymbol{\gamma})$  에 대한 공변 미분(共變微分, covariant derivative)이라고 하며 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{D}{dt} \mathbf{W}(t). \quad (5.37)$$

**연습문제 5.6.2.** 다음 문제를 풀어 보자.



다음과 같이 세 함수가 주어져 있다.

$$\begin{aligned}\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, & \quad \gamma(t) = (u(t), v(t)) = (t, t^2), \\ \mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3, & \quad \mathbf{X}(u, v) = (u + v, u - v, uv), \\ \mathbf{W} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T\mathbb{E}^3, & \quad \mathbf{W}(t) = (2, 0, u(t) + v(t))_{\mathbf{X} \circ \gamma(t)}.\end{aligned}$$

1.  $\mathbf{W}$ 는 곡면  $\mathbf{X}$ 에 접함을 보여라.

2.  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{W}(t)$  와  $\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{W}(t)$ 를 구하여라.

자, 이제 이 절의 질문을 정확히 이야기할 수 있게 되었다. ‘이 공변 미분을 계량기만 갖추어진 지도에서 벌어지는 현상으로 볼 수 있겠는가?’ 하는 것이

‘이 공변 미분이라고 하는 것이 내재적인가?’ 하는 질문과 같은 것이다. 이를 위해서 (5.36)에 등장하는 모든 것을 실제 곡면은 상관없이 지도만으로 볼 수 있는지 생각해 보자. 그런데 (5.36)를 잘 들여다 보면 이는 결국 곡면의 접벡터를 지도의 벡터로 볼 수 있겠는가 하는 문제와 같아진다. 이 문제는 이미 여러 번 다루어졌으며 부록 B에서도 상세하게 다루어져 있다. 요약하자면 다음과 같이 곡면의 접벡터장  $\mathbf{W}$ 를 지도의 벡터장  $\mathcal{W}$ 로 볼 수 있다.

$$\mathbf{W}(t) = \sum_{k=1}^2 a^k(t)(\mathbf{X}_k \circ \gamma)(t) \Leftrightarrow \mathcal{W}(t) = \sum_{k=1}^2 a^k(t) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_{\gamma(t)}.$$

이러면 식 (5.36)과 (5.37)는 다음과 같이 해석될 수 있다:

$$\frac{D}{dt} \mathcal{W}(t) = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{da^k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^2 (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)(t) a^i(t) \frac{du^j}{dt}(t) \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_{\gamma(t)}. \quad (5.38)$$

이것은 완전히 지도에서만 벌어지고 있는 현상이다. 즉 내재적 식이다. 이를 좀더 분석하여 수학자들은 다음과 같은 개념을 만들어내었다:

**정의 5.6.3.** 계량기가 정해진 지도  $\mathcal{U}$ 에서 한 점  $p$ , 한 벡터  $\mathbf{V}_p$ , 그리고 벡터장  $q \in \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U}(q) \in T_q S$ 를 생각하라. 이 때 다음과 같은 곡선을 생각하라.

$$\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t_0) = p, \quad \dot{\gamma}(t_0) = \mathbf{V}_p.$$

그러면  $t \mapsto (\mathcal{U} \circ \gamma)(t)$ 는 곡선  $\gamma$ 를 따라서 정의된 벡터장이 되는데 이 때 식 다음을 정의한다.

$$\nabla_{\mathbf{V}_p} \mathcal{U} := \frac{D}{dt} \Big|_{t=t_0} (\mathcal{U} \circ \gamma)(t). \quad (5.39)$$

그런데  $\mathbf{V}_p$ 에 대하여 위 성질을 만족시키는  $\gamma$ 는 유일하지 않다. 그럼에도 불구하고  $\nabla_{\mathbf{V}_p} \mathcal{U}$ 는 잘 정의되었음을 다음과 같이 보일 수 있다.

$\mathbf{V}_p = \sum_{k=1}^2 V^k \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p$ ,  $\mathcal{U}(q) = b^k(q) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_q$  라고 하자. 그러면  $\mathcal{U} \circ \gamma(t) = \sum_{k=1}^2 (b^k \circ \gamma)(t) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_{\gamma(t)}$  가 된다. 그러면 식 (5.38)는 다음을 준다.

$$\frac{D}{dt} \Big|_{t=t_0} (\mathcal{U} \circ \gamma)(t) = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{d(b^k \circ \gamma)}{dt}(0) + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(p) (b^i \circ \gamma)(0) V^j \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p. \quad (5.40)$$

여기서

$$(b^i \circ \gamma)(t_0) = b^i(p), \quad \frac{d(b^k \circ \gamma)}{dt}(t_0) = \frac{\partial b^k}{\partial u^i}(\gamma(t_0)) \dot{\gamma}^i(t_0) = \frac{\partial b^k}{\partial u^i}(p) V^i$$

인 데 둘 다 실제  $\gamma$ 의 식이 무엇인지에는 상관이 없다. 따라서  $\nabla_{\mathbf{V}_p} \mathcal{U}$ 는 잘 정의되었다.

$\nabla$ 는 ‘접속(connection)’이라고 불리는, 현대 미분기하학의 아주 중요한 개념이며 이에 대한 자세한 공부는 대학원 수준의 미분기하학에서 이루어진다. 이를 이용하면 5.10절의 내용을 상대적으로 매우 간단하게 표현할 수 있다.

$\nabla$ 의 가장 중요한 응용은 곧은선 방정식을 이를 이용해서 쓸 수 있다는 것이다. 이를 위해 먼저 주어진 곡선  $\gamma$ 와  $\gamma$ 를 따라서만 정의된 벡터장  $\mathbf{W}$ 에 대하여

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}$$

를 생각해 보자. 이 기호는 아직 의미가 없다. 현재로서는  $\mathbf{W}$ 는  $\gamma(t_0)$ 의 열린 근방에 정의되어 있지 않으며 따라서  $\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}$ 는 의미가 없다. 이 기호에 의미를 주기 위하여  $t_0 \in (a, b)$ 를 고정하자. 이제  $\mathbf{W}$ 를  $\gamma$ 의 주변으로 확장한 벡터장을  $\mathcal{U}$ 라고 하자. 즉,  $\mathcal{U}(\gamma(t)) = \mathbf{W}(t)$ . 이제 다음과 같이  $\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}$ 를 정의하자.

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{W})(t_0) := \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} \mathcal{U} \in T_{\gamma(t_0)} S.$$

이 식의 우변은 정의 5.6.3에 따른 것이다. 그런데 이 정의에는 문제가 있다.  $\mathcal{U}$ 가 유일하지 않다는 것이다. 따라서 다른  $\mathcal{U}$ 를 택하더라도 위 정의가 문제없음을 따져야 한다.  $\tilde{\mathcal{U}}$  또한  $\mathbf{W}$ 를 확장한 벡터장이라고 하자. 편의상

$$\mathcal{U}(q) = b^k(q) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_q, \quad \tilde{\mathcal{U}}(q) = \tilde{b}^k(q) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_q$$

라 하자. 그러면 모든  $t$ 에 대하여

$$b^i \circ \gamma(t) = \tilde{b}^i \circ \gamma(t).$$

따라서 (5.40)를 살펴보았을 때

$$\frac{D}{dt} \Big|_{t=t_0} (\mathcal{U} \circ \gamma)(t) = \frac{D}{dt} \Big|_{t=t_0} (\tilde{\mathcal{U}} \circ \gamma)(t).$$

그러므로 (5.39)에 의하여  $\nabla_{\gamma(t_0)} \mathcal{U} = \nabla_{\gamma(t_0)} \tilde{\mathcal{U}}$ . 이제 드디어  $\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{W}$ 가 제대로 정의되었다고 할 수 있다.

다음 정리의 증명은 단순히 정의를 잘 적용함으로써 얻어진다.

#### 정리 5.6.4.

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = (\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{i,j}^k (\gamma^1, \gamma^2) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j) \frac{\partial}{\partial u_k} \Big|_{\gamma}. \quad (5.41)$$

위 식의 우변에 있는 표현은 원래  $\alpha$ 의 가속도의 접성분  $\ddot{\alpha}^T$ 의 표현에서 얻어진 것이며 따라서 이를 이용하여 지도에 있는 곡선  $\gamma$ 의 가속도는 다음과 같이 정의한다.

정의 5.6.5. 지도의 곡선  $\gamma$ 의 가속도는  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ 이다.

가속도를 위치함수의 이계미분으로 생각하는 것이 아니라 속도벡터장의 미분으로 보고 있는 점이 흥미롭다. 이를 이용하면 곧은선 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathbf{0}.$$

## 5.7 접속과 가우스 곡률

$f$ 는 함수,  $\mathbf{V}$ 와  $\mathbf{W}$ 는 벡터장이라 하자. 이 때  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{V}(p)$ 인 곡선  $\gamma$ 에 대하여

$$\mathbf{V}(f)(p) := (f \circ \gamma)'(0)$$

라고 하면  $\mathbf{V}(f)$ 는 새로운 함수가 된다. 또한 임의의 함수  $g$ 에 대하여  $\mathcal{Z}(g) = \mathbf{V}(\mathbf{W}(g)) - \mathbf{W}(\mathbf{V}(g))$ 가 성립하는 벡터장  $\mathcal{Z}$ 가 유일하게 존재하는데 그걸  $[\mathbf{V}, \mathbf{W}]$ 라고 하자. 따라서

$$[\mathbf{V}, \mathbf{W}](g) = \mathbf{V}(\mathbf{W}(g)) - \mathbf{W}(\mathbf{V}(g)).$$

이제 다음에 정의된 연산자는 리만곡률텐서라고 불리는 아주 중요한 것인데 근본적으로 미분의 순서를 바꾸었을 때 그 차이가 얼마나 되는가를 말해주는 것이다. 이미 앞에서 그런 아이디어를 살펴 보았었다. 가우스의식을 유도할 때 출발점으로 삼았던 (5.19), 코다치-마이나르디 방정식을 유도할 때 출발점으로 삼았던 (5.25), (5.26)는 모두 다음 식

$$(\mathbf{X}_1)_{12} - (\mathbf{X}_1)_{21}, \quad (\mathbf{X}_2)_{12} - (\mathbf{X}_2)_{21}, \quad \mathbf{G}_{12} - \mathbf{G}_{21}$$

을 자세히 분석하고 있는 것이다.  $R$ 은 그걸 내재적으로 수행한다고 볼 수 있다.

**정의 5.7.1.** 세 벡터장  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ 에 대하여 다음과 같이 새로운 벡터장을 정의하자.

$$R(\mathbf{U}, \mathbf{V})\mathbf{W} := \nabla_{\mathbf{U}}(\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}) - \nabla_{\mathbf{W}}(\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{W}) - \nabla_{[\mathbf{U}, \mathbf{V}]}\mathbf{W}.$$

$R$  을 리만곡률텐서라 한다.

위 리만곡률텐서를 이용하여 가우스 곡률  $K$  를 계산할 수 있다. 다음 보조정리에 기술된  $\nabla$  의 성질들이 위 사실의 증명에 핵심적인 역할을 한다. 아래에서  $f\mathbf{V}$  는  $p$  를  $f(p)\mathbf{V}(p)$  로 보내는 벡터장이며  $\mathbf{V}(f)$  와는 전혀 다르다.  $f\mathbf{V}$  는 벡터장이고  $\mathbf{V}(f)$  는 함수다.

보조정리 5.7.2. 다음이 성립한다.

$$\nabla_{\mathbf{V}}(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}_1 + \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}_2, \quad (5.42)$$

$$\nabla_{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2}\mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{V}_1}\mathbf{W} + \nabla_{\mathbf{V}_2}\mathbf{W}, \quad (5.43)$$

$$\nabla_{f\mathbf{V}}\mathbf{W} = f\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}, \quad (5.44)$$

$$\nabla_{\mathbf{V}}(f\mathbf{W}) = \mathbf{V}(f)\mathbf{W} + f\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}, \quad (5.45)$$

$$\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W} - \nabla_{\mathbf{W}}\mathbf{V} - [\mathbf{V}, \mathbf{W}] = \mathbf{0}, \quad (5.46)$$

$$\nabla_{\mathbf{V}}\langle \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2 \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2 \rangle + \langle \mathbf{W}_1, \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{W}_2 \rangle. \quad (5.47)$$

**증명** 독자들에게 맡긴다. ■

사실 접속에는 여러가지가 있는데 성질 (5.42)~(5.45)는 모든 접속이 만족시키는 기본 성질이다. 성질 (5.46)를 꼬임없음(torsion free) 조건, 성질 (5.47)를 계량기 어울림(metric comparibility) 조건이라고 한다.

이제 이 성질들을 가지고 원하는 바를 얻어낼 건데 준비운동으로 몇 가지를 먼저 살피자. 먼저 임의의 함수  $g$ 에 대하여

$$[\partial_i, \partial_j](g) = \partial_i(\partial_j g) - \partial_j(\partial_i g) = 0$$

이므로  $[\partial_i, \partial_j] = \mathbf{0}$ 이다. 이제 (5.46)에 의하면

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] = \nabla_{\partial_j} \partial_i.$$

이제 본격적으로 어떤 일이 생기는지 알아보자.

### 보조정리 5.7.3.

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

**증명**  $\{\partial_1, \partial_2\}$ 는 기저고  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ 는 벡터장이므로 어떤  $\mathring{\Gamma}_{ij}^k$ 에 대하여

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \mathring{\Gamma}_{ij}^k \partial_k.$$

먼저  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i$ 이므로  $\mathring{\Gamma}_{ij}^k = \mathring{\Gamma}_{ji}^k$ 임을 밝힌다. 이제 다음을 살펴보자.

$$\begin{aligned}\partial_k g_{ij} &= \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \langle \nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j \rangle \\ &= \langle \mathring{\Gamma}_{ki}^\ell \partial_\ell, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \mathring{\Gamma}_{kj}^\ell \partial_\ell \rangle = \mathring{\Gamma}_{ki}^\ell g_{\ell j} + \mathring{\Gamma}_{kj}^\ell g_{i\ell}.\end{aligned}$$

이제 첨자를 잘 조정하면 다음이 얻어진다.

$$\partial_j g_{ik} = \mathring{\Gamma}_{ji}^\ell g_{\ell k} + \mathring{\Gamma}_{jk}^\ell g_{i\ell},$$

$$\partial_i g_{kj} = \mathring{\Gamma}_{ik}^\ell g_{\ell j} + \mathring{\Gamma}_{ij}^\ell g_{k\ell},$$

$$\partial_k g_{ij} = \mathring{\Gamma}_{ki}^\ell g_{\ell j} + \mathring{\Gamma}_{kj}^\ell g_{i\ell}.$$

따라서  $g_{ij} = g_{ji}$ ,  $\mathring{\Gamma}_{ij}^k = \mathring{\Gamma}_{ji}^k$  를 잘 이용하면

$$[ij, k] = \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij} = \mathring{\Gamma}_{ji}^\ell g_{\ell k} + \mathring{\Gamma}_{ij}^\ell g_{k\ell} = 2\mathring{\Gamma}_{ij}^\ell g_{k\ell}.$$

따라서  $\mathring{\Gamma}_{ij}^\ell = g^{k\ell}[ij, k] = \Gamma_{ij}^\ell$ . 그러므로 결론이 성립한다. ■

$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$  는 벡터장이기 때문에  $\partial_1, \partial_2$  의 선형결합으로 표현된다. 그 계수를  $R_{ijk}^s$  라 하자. 즉  $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^s \partial_s$  라 하자. 그러면

#### 보조정리 5.7.4.

$$R_{ijk}^s = \partial_i(\Gamma_{jk}^s) + \Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{i\ell}^s - \partial_j(\Gamma_{ik}^s) - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s. \quad (5.48)$$

**증명** 다음과 같이 하면 된다.

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}(\nabla_{\partial_j}\partial_k) - \nabla_{\partial_j}(\nabla_{\partial_i}\partial_k) \\ &= \nabla_{\partial_i}(\Gamma_{jk}^\ell \partial_\ell) - \nabla_{\partial_j}(\Gamma_{ik}^m \partial_m) \\ &= \partial_i(\Gamma_{jk}^\ell) \partial_\ell + \Gamma_{jk}^\ell (\nabla_{\partial_i} \partial_\ell) - \partial_j(\Gamma_{ik}^m) \partial_m - \Gamma_{ik}^m (\nabla_{\partial_j} \partial_m) \\ &= \partial_i(\Gamma_{jk}^\ell) \partial_\ell + \Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{i\ell}^n \partial_n - \partial_j(\Gamma_{ik}^m) \partial_m - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^o \partial_o \\ &= (\partial_i(\Gamma_{jk}^s) + \Gamma_{jk}^\ell \Gamma_{i\ell}^s - \partial_j(\Gamma_{ik}^s) - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s) \partial_s. \end{aligned}$$

이로부터 결론이 성립한다. ■

다음 기호를 정의하자.

$$R_{ijkl} := \langle R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l \rangle.$$

**보조정리 5.7.5.** 다음이 성립한다.

$$R_{ijkl} = R_{ijk}^s g_{sl},$$

$$R_{jkl}^i = g^{i\alpha} R_{\alpha jkl},$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl} = R_{klij},$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0. \quad (\text{비양키의 첫째 항등식})$$

**증명** 위에서 첨자들을 잘 바꾸면서 관찰하면 된다. 참고로  $R_{jlk}^\gamma = -R_{jkl}^\gamma$ ,  $R_{jkl}^i + R_{kjl}^i + R_{ljk}^i = 0$ 이나  $R_{jlk}^\gamma \neq -R_{\gamma lk}^j$ ,  $R_{jlk}^\gamma \neq -R_{k\gamma j}^l$  다. ■

**따름정리 5.7.6.** 가우스 곡률  $K$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$K = \frac{R_{1212}}{|g|} = \frac{\langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle}{|g|}. \quad \text{단 } |g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}. \quad (5.49)$$

**증명** 가우스의 위대한 정리에 등장하는 가우스 곡률  $K$ 의 식 (5.23)을 잘 보면 사실 그 식은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$K = -\frac{R_{112}^2}{g_{11}}.$$

그러면 보조정리 5.7.5에 의하여

$$K = -\frac{g^{2\mu} R_{\mu 112}}{g_{11}} = -\frac{g^{21} R_{1112} + g^{22} R_{2112}}{g_{11}}. \quad (5.50)$$

그런데  $R_{ijkl}$ 의 대칭성 때문에  $R_{1112} = -R_{1112} = 0$ 이고 또한  $g^{22} = g_{11}/|g|$ 이다. 따라서 결론이 성립한다. ■

접속  $\nabla$ 와 리만곡률텐서  $R$ 은 2차원 지도의 기하를 들여다보고자 할 때는 필요성이 느껴지지 않는다. 리만곡률텐서의 유용성은 3차원 이상의 리만 다양체의 곡률을 이해하고자 할 때 비로소 와 닳는다.

## 5.8 지도 변환과 불변성

**지도 및 계량기의 변환** 좌표가  $(u^1, u^2)$  고 계량기가  $g_{ij}(u^1, u^2)du^i du^j$  인 지도  $\mathcal{U}$ 에 대하여 일대일대응  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = f(u^1, u^2)$  으로 새 지도  $\bar{\mathcal{U}}$ 가 만들어진다고 하자.

$$f : \mathcal{U} \ni (u^1, u^2) \mapsto (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \bar{\mathcal{U}}, \quad \bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2), \quad \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2),$$

새 지도  $\bar{\mathcal{U}}$ 에는 아직 계량기가 없다. 계량기가 없으면 길이, 넓이, 각도를 재는 도구가 없는 셈이므로 미분기하를 전개할 수 없다. 그래서  $\bar{\mathcal{U}}$ 에 계량기를 주어야 하는데 (5.16)에 착안하여 다음과 같이 새 계량기  $d\bar{s}^2$  을 준다:  $f$ 의 역함수  $f^{-1}$  을 다음과 같이 쓰자.

$$f^{-1} : \bar{\mathcal{U}} \ni (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \mapsto (u^1, u^2) \in \mathcal{U}, \quad u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \quad u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2).$$

그러면, 형식적으로

$$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k} d\bar{u}^k, \quad du^j = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l} d\bar{u}^l$$

이 고  $g_{ij}(u^1, u^2)du^i du^j$  은

$$g_{ij}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^\beta} d\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta. \quad (5.51)$$

이다. 즉

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) := g_{ij}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^\alpha}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^\beta}(\bar{u}^1, \bar{u}^2). \quad (5.52)$$

또는 간단히

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{ij}(u^1, u^2) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^\beta}$$

라 정의하고 계량

$$d\bar{s}^2 := \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) d\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta \quad (5.53)$$

를 생각한다.

**정의 5.8.1.** (5.53)으로 정의된  $d\bar{s}^2$  을  $ds^2 = g_{ij}(u^1, u^2) du^i du^j$  의  $f^{-1}$ 에 의한  
당겨오기(pull back)라 하고  $(f^{-1})^*(ds^2)$  으로 나타낸다.

$f : \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}$ 가 주어졌을 때  $\mathcal{U}$ 의 벡터를 다음과 같이  $\bar{\mathcal{U}}$ 의 벡터로 변환시킬  
수 있다.  $\mathcal{U}$ 의 벡터  $v_p$ 에 대하여  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ 를 만족시키는 어떤 곡선  
 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ 를 생각할 수 있는데 이 때  $(f \circ \gamma)'(0)$ 를  $v_p$ 의 이미지로 생각한  
다. 이를  $v_p$ 의  $f$ 에 의한 밀어넣기(push forward)라 하고  $f_*(v_p)$ 로 나타낸다.

계량기의 변환은 사실  $f : \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}$ 에 대하여 생각하는 것이 아니라  $f^{-1} : \bar{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ 에 대하여  $\mathcal{U}$ 의 계량기를  $\bar{\mathcal{U}}$ 의 계량기로 당겨오는 것이다.

**연습문제 5.8.2.** 2절에서 직교좌표, 직사영, 입체사영을 이용하여 구면의  
지도를 세 가지 구하였다. 이것들에 대하여 계량기의 변환과 벡터의 변환을  
확인하여 보아라. ( 구면으로 옮겨가서 생각하지 말고 지도에서 지도로 옮겨  
다니면서 생각할 것.)

**불변량** 한 지도를 다른 지도로 바꿀 때 바뀌는 것들이 있고 바뀌지 않는 것들이 있다. 이 중 바뀌지 않는 것들을 불변량(invariant)이라 한다. 이 절에서는 불변량에 어떤 것들이 있는지 알아보자.

**정리 5.8.3.**  $\mathcal{U}$ 의 임의의 두 벡터  $\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p$ 에 대하여

$$(f^{-1})^*(ds^2)(f_*(\mathbf{v}_p), f_*(\mathbf{w}_p)) = ds^2(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p). \quad (5.54)$$

이는 매우 중요한 성질이며 내적이 보존된다고 한다.

**증명**  $(f^{-1})^*(ds^2)$  을  $d\bar{s}^2$  이라고 하자.  $\mathbf{v}_p = v^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ ,  $\mathbf{w}_p = w^j \frac{\partial}{\partial u^j}$  라고 하자. 그러면

$$f_*(\mathbf{v}_p) = v^i \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}, \quad f_*(\mathbf{w}_p) = w^j \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta}.$$

따라서

$$\begin{aligned} & d\bar{s}^2(f_*(\mathbf{v}_p), f_*(\mathbf{w}_p)) \\ &= g_{ij}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^\alpha} \Big|_{(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^\beta} \Big|_{(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} v^i \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i} w^j \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^j}. \end{aligned}$$

그런데

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^\alpha} \Big|_{(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i} = 1, \quad \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^\beta} \Big|_{(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^j} = 1$$

이므로 위 식은 다음을 준다.

$$d\bar{s}^2(f_*(\mathbf{v}_p), f_*(\mathbf{w}_p)) = g_{ij}(p) v^i w^j = ds^2(\mathbf{v}_p, \mathbf{w}_p).$$

그러므로 결론이 성립한다.

이 정리로부터 즉각적으로 따라나오는 결과는 다음과 같다.

**따름정리 5.8.4.** 다음이 성립한다.

- $ds^2$ 으로 잰 곡선  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{U}$ 의 길이와  $d\bar{s}^2$ 으로 잰 곡선  $f \circ \gamma : [a, b] \mapsto \mathcal{U}$ 의 길이는 서로 같다.
- $ds^2$ 으로 잰  $\mathcal{U}$ 의 넓이와  $d\bar{s}^2$ 으로 잰  $\bar{\mathcal{U}}$ 의 넓이는 서로 같다.
- $ds^2$ 으로 잰 두 벡터  $v_p$ 와  $w_p$ 가 만나는 각도와  $d\bar{s}^2$ 으로 잰 두 벡터  $f_*(v_p)$ 와  $f_*(w_p)$ 가 만나는 각도는 서로 같다.

**정의 5.8.5.** 지도와 계량기를 바꾸어도 변하지 않는 양을 불변량(不變量 invariant)이라 한다.

위 결과들에 따르면 한 곡선의 길이, 한 점에서 만나는 두 곡선이 이루는 각의 크기, 영역의 넓이 등은 불변량이다.

**연습문제 5.8.6.** 위 정리와 따름정리를 증명하여라.

지도를 바꾸어도 어떤 양이 변하지 않는다는 것은 그것이 그 지도가 나타내는 원 곡면의 본질적인 성질을 드러내는 양이라고 생각할 수 있다. 이 아이디어는

굉장히 중요한 개념이며 현대 기하학에서 가장 중요한 대상 중 하나인 다양체 (Manifold)를 이끌어내는 핵심적 개념이다.

## 5.9 지도 변환의 예

**이 절의 학습 목표** 어떤 곡면의 식이 주어졌을 때 그 곡면의 계량기를 계량기를 계산하는 것은 매우 중요하다. 그게 있어야만 길이, 넓이, 각도를 쟈 수 있기 때문이다. 이 절에서는 여러 곡면에 대해서 구체적으로 지도와 계량기를 구해보고 계량기에 관하여 여러 사항을 알아보자.

**예 5.9.1.** 가장 간단한 곡면인 평면, 예를 들어  $xy$ -평면,의 계량기에 대하여 생각해 보자. 간단한 계산에 의하여  $\mathbf{X}(u, v) := (u, v, 0)$ 으로 생각하면 계량기는  $du^2 + dv^2$  이 됨을 알 수 있다. 그런데,  $a, b$ 가 0이 아닌 실수일 때  $\bar{\mathbf{X}}(\bar{u}, \bar{v}) := (a\bar{u}, b\bar{v}, 0)$ 이라 하면 계량기는  $a^2 d\bar{u}^2 + b^2 d\bar{v}^2$  이 된다. 만약  $\tilde{\mathbf{X}}(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ 이라 하면 계량기는  $dr^2 + r^2 d\theta^2$  이다.

이 때  $uv$ -지도,  $\bar{u}\bar{v}$ -지도,  $r\theta$ -지도의 변환관계를 직접 이용하여 계량기를 변환시켜 보자. 변환관계는 다음으로부터 나온다.

$$(x, y, 0) = (u, v) = (a\bar{u}, b\bar{v}) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

이제  $f(\bar{u}, \bar{v}) := (a\bar{u}, b\bar{v})$  는  $\bar{u}\bar{v}$ -지도를  $uv$ -지도로 변환시켜주고,  $g(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$  는  $(\bar{u}, \bar{v})$ -지도를  $uv$ -지도로 변환시켜준다. 이제 다음을 알 수

있다.

$$\begin{aligned} f^*(du^2 + dv^2) &= d(a\bar{u})^2 + d(b\bar{v})^2 = a^2 d\bar{u}^2 + b^2 d\bar{v}^2, \\ g^*(du^2 + dv^2) &= d(r \cos \theta)^2 + d(r \sin \theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

**예 5.9.2.** 이번에는 중심이 원점에 있고 반지름이 1인 단위구면을 나타내는 여러 지도와 그 변환관계에 대하여 알아보자. 상반구면의 한 점을  $(x, y, z)$ 라하면 다음과 같이 여러 방법으로 점을 나타낼 수 있다. (3.2.1), (3.7), (3.8)을 참조하라.

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ &= (\tilde{u}, \tilde{v}, \sqrt{1 - \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2}) \\ &= \left( \frac{2\bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 1}, \frac{2\bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 1}, \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 1}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

계산의 편의를 위하여 다음과 같은 극좌표를 도입하자.

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{r} \cos \tilde{\theta}, \tilde{r} \sin \tilde{\theta}), \quad (\bar{u}, \bar{v}) = (\rho \cos \bar{\theta}, \rho \sin \bar{\theta}).$$

그러면  $\tilde{r}\tilde{\theta}$ -지도의 계량기는 다음과 같다.

$$ds_{\tilde{r}, \tilde{\theta}}^2 = \frac{1}{1 - \tilde{r}^2} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\theta}^2 \tag{5.55}$$

이제

$$f(\phi, \theta) := (\sin \phi, \theta), \quad g(\bar{\rho}, \bar{\theta}) := \left( \frac{2\bar{\rho}}{\bar{\rho}^2 + 1}, \bar{\theta} \right)$$

라 하면 다음과 같이 지도 사이의 변환관계가 성립한다.

$$(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = f(\phi, \theta) = g(\bar{\rho}, \bar{\theta}).$$

이제 계량기 (5.55)과 위 변환관계로부터  $ds_{\phi,\theta}^2$ ,  $ds_{\bar{\rho},\bar{\theta}}^2$  을 유도해 보면 다음과 같다.

$$ds_{\phi,\theta}^2 = d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2, \quad ds_{\bar{\rho},\bar{\theta}}^2 = \frac{4(d\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^2 d\bar{\theta}^2)}{(\bar{\rho}^2 + 1)^2}. \quad (5.56)$$

**예제 5.9.3.** 곡면의 식으로부터  $ds_{\phi,\theta}^2$ ,  $ds_{\bar{\rho},\bar{\theta}}^2$  을 직접 유도해 보고 위 식과 비교하여 보아라.

**참고문헌 5.9.1.** 이 절의 내용을 좀 더 공부하고 싶으면 다음을 참고하시오.

1. [6, 7장 12절]

## 5.10 가우스 곡률의 불변성

내재적 양 중에서 길이, 넓이, 각도 외에 또 다른 불변량이 있을까? 우리가 앞에서 살펴본 내재적 양에는 가우스 곡률이 있었다. 그러면 가우스 곡률은 불변량일까, 아닐까? [34, 1권 9장 문제 23]을 보면 지도를 바꾸었을 때 계량기 성분  $g_{ij}$ 의 미분과  $\Gamma_{ij}^k$ 가 어떻게 바뀌는지 식이 나와 있다. 이제 (이것을 이용하여) 리만 곡률 텐서의 성분  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ 가 어떻게 변화하는지 그 식이 [34, 2권 190쪽]에 나와 있다. 이를 가우스 곡률의 식과 결합시키면  $K$ 는 변하지 않음을 알 수 있는데 이 절에서는 그 과정을 상세히 설명하고자 한다.

$K$ 가 불변량이라는 것의 증명을 설명하기 전에 분명히 하고 싶은 점이 하나 있다.  $K$ 가 불변량이라는 것은  $E^3$ 에 있는 한 곡면을 나타내는 두 지도에 대하여 각각의 지도를 가지고 가우스 곡률을 계산했을 때 그 값이 같다는 것을 증명하라는 것이 아니라는 점이다. 주어진 지도가 실제로  $E^3$ 의 곡면을 나타내는 지도인 경우 지도에서 계량기를 가지고 계산하는 모든 양은 사실 곡면에 대한 양이기 때문에 그 값이 변하지 않을 것은 거의 당연하다. 물론 계산으로 보여야 하긴 하겠지만 그 결과는 거의 당연히 그럴 것이라는 것이다. 이 절에서 주장하는 것은,  $E^3$ 의 곡면을 나타내는 지도가 아닐 수도 있는 그냥 지도를 다른 지도로 변환하였을 때 예를 들어  $(u^1, u^2)$  지도를  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  지도로  $\bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2)$ ,  $\bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2)$ 라는 관계식을 이용하여 변환하였을 때 식

(5.23)을 가지고 각각의 지도에서 계산한 가우스 곡률이 서로 같다는 것이다.

먼저 좌표를 변환시켰을 때 각종 식들이 어떻게 변환되는지 알아보자. 이 절에서는 모든 표현을 아인슈타인의 합 표기법을 적용하여 해석해야 한다. 다음은  $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}d\alpha d\beta$ 로 만들어지는 첫째, 둘째 크리스토펠 심볼과 리만곡률텐서의 성분들이 원래 계량기  $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ 로 만들어지는 첫째, 둘째 크리스토펠 심볼과 리만곡률텐서의 성분들과 어떻게 연관되는가를 나타내는 식이다. 기호를 잘 이해할 수 있도록 첨자가 그리스 문자  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, 2\}$ 로 붙어있는 것들은 모두  $\bar{\mathcal{U}}$ 에 정의된 함수들이고 첨자가 로마 문자  $i, j, k, l$ 로 붙은 것들은 모두  $\mathcal{U}$ 에 정의된 함수들이다.

**보조정리 5.10.1.** 5.8절의 상황에서 다음이 성립한다.

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{ij}u^i_{,\alpha}u^j_{,\beta} \quad (5.57)$$

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{ij}\bar{u}^\alpha_i \bar{u}^\beta_j \quad (5.58)$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta,\gamma} = g_{ij,k}u^i_{,\alpha}u^j_{,\beta}u^k_{,\gamma} + g_{ij}u^i_{,\alpha\gamma}u^j_{,\beta} + g_{ij}u^i_{,\alpha}u^j_{,\beta\gamma} \quad (5.59)$$

$$[\alpha\beta, \gamma] = [ij, k]u^i_{,\alpha}u^j_{,\beta}u^k_{,\gamma} + g_{st}u^s_{,\alpha\beta}u^t_{,\gamma} \quad (5.60)$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{ij}^k u^i_{,\alpha}u^j_{,\beta}\bar{u}^\gamma_k + u^\ell_{,\alpha\beta}\bar{u}^\gamma_\ell \quad (5.61)$$

$$\bar{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{jk\ell}^i \bar{u}^\alpha_i u^j_{,\beta} u^k_{,\gamma} u^\ell_{,\delta} \quad (5.62)$$

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{ijk\ell} u^i_{,\alpha} u^j_{,\beta} u^k_{,\gamma} u^\ell_{,\delta} \quad (5.63)$$

좌변에 있는 것들의 의미는 분명하다. 그것들은 모두  $\bar{\mathcal{U}}$ 에 정의된 함수들

이다.  $d\bar{s}^2$ 이라는 계량기에서 출발하여 ?? 절에 있는 과정을 따라 차근차근 정의해나간 것들이다. 다시 한번 더 강조하지만 그것들은 모두  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \bar{\mathcal{U}}$ 의 함수들이다.

우변에 있는 있는 것들은 그 해석이 조금 복잡하다. 권두에 있는 이 책에 사용된 기호 표기법을 잘 숙지하는 것이 필요하다. 일단 표면적으로는 우변은

$$u_{,\alpha}^i, u_{,\alpha\beta}^j, \bar{u}_{,i}^\alpha, \bar{u}_{,ij}^\alpha, g_{ij}, g^{ij}, [ij, k], \Gamma_{ij}^k, R_{ijk}^i$$

등의 적당한 곱과 합으로 이루어져 있는데 여기서  $u_{,\alpha}^i, u_{,\alpha\beta}^j$  등은  $\bar{\mathcal{U}}$ 에 정의된 함수  $u^i, u^j$  등에 대한 편미분이다. 즉

$$u_{,\alpha}^i := \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^\alpha}, \quad u_{,\alpha\beta}^j := \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^\beta \partial \bar{u}^\alpha}.$$

나머지 항들은 해석이 조금 복잡한데 일단 그것들은  $\mathcal{U}$ 에 정의된 함수들처럼 보이지만 사실 다음을 가리킨다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_{,i}^\alpha \circ f^{-1}, \bar{u}_{,ij}^\alpha \circ f^{-1}, g_{ij} \circ f^{-1}, g^{ij} \circ f^{-1}, \\ [ij, k] \circ f^{-1}, \Gamma_{ij}^k \circ f^{-1}, R_{ijk}^i \circ f^{-1} \end{aligned}$$

여기서 명심해야 할 점은 그것들이  $\mathcal{U}$ 가 아니라  $\bar{\mathcal{U}}$ 에 정의된 함수라는 것이다. 권두에 사용된 기호 표기법을 염격하게 적용하자면  $\tilde{u}_i, \tilde{u}_{ij}, \tilde{g}_{ij}, \tilde{g}^{ij}, \widetilde{[ij, k]}, \widetilde{\Gamma}_{ij}^k, \widetilde{R}_{ijk}^i$  등과 같이 각 기호 위에 물결기호를 올려야 할 것이나 보기가 너무 복잡해져 이 절에서는 생략하였다.  $\bar{u}_{,i}^\alpha \circ f^{-1}$ 의  $\bar{u}_{,i}^\alpha$ 는  $\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i}$  며  $\bar{u}_{,ij}^\alpha \circ f^{-1}$ 의  $\bar{u}_{,ij}^\alpha$ 는  $\frac{\partial^2 \bar{u}^\alpha}{\partial u^j \partial u^i}$  다. 변수에 대한 미분을 나타낼 때, 뒤에 그 변수에 해당하는 첨자를 쓴 것 또한 복잡한 계산과정을 간단하게 나타내게 해 주는 텐서 계산의 한 표현기법이다.

위 첨자는 그 변수의 순서를 나타낸다. 즉  $u^i$ 는  $i$  번 째  $u$  변수를 나타낸다. 밑 첨자가 , 뒤에 쓰여져 있으면 그건 그 첨자가 나타내는 변수에 대한 편미분을 나타낸다. 이는 텐서 계산을 할 때 쓰는 일반적인 방법이다.

식 (5.62)의 우변을 온전히 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \sum_{i,j,k,\ell=1}^2 (R_{jkl}^i \circ f^{-1}) \left( \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i} \circ f^{-1} \right) \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial u^\ell}{\partial \bar{u}^\delta}.$$

노파심에서 조금만 더 설명한다.  $\sum_{i,j,k,\ell=1}^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2$ 이며 16 항의 합이다. 그리고  $\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i} \circ f^{-1}$ 의 밑에 있는  $u^i$ 와  $\frac{\partial u^\ell}{\partial \bar{u}^\delta}$  위에 있는  $u^\ell$ 은 완전히 다른 것이다. 밑에 있는  $u^i$ 는 변수를 의미하고 위에 있는  $u^\ell$ 은 함수를 의미한다. 마찬가지로 밑에 있는  $\bar{u}^\delta$ 는 변수를 의미하고 위에 있는  $\bar{u}^\alpha$ 는 함수를 의미한다.

**질문 5.10.2.** 식 (5.57)~(5.61)을 위와 같이 자세히 풀어써 보아라.

이제 식 (5.57)~(5.62)이 왜 참인지 알아보자. 먼저 (5.57)은 단순히  $\bar{g}_{\alpha\beta}$ 의 정의다. (5.58)는 다음 식으로부터 따라나온다.<sup>17)</sup>

$$\begin{aligned} (\bar{g}_{\alpha\beta})(g^{ij}\bar{u}_{,i}^\beta\bar{u}_{,j}^\gamma) &= g_{k\ell}u_{,\alpha}^k u_{,\beta}^\ell g^{ij}\bar{u}_{,i}^\beta\bar{u}_{,j}^\gamma = g_{k\ell}g^{ij}u_{,\alpha}^k(\bar{u}_{,i}^\beta u_{,\beta}^\ell)\bar{u}_{,j}^\gamma \\ &= g_{k\ell}g^{ij}u_{,\alpha}^k\delta_i^\ell\bar{u}_{,j}^\gamma = g_{k\ell}g^{\ell j}u_{,\alpha}^k\bar{u}_{,j}^\gamma = \delta_k^j u_{,\alpha}^k\bar{u}_{,j}^\gamma = u_{,\alpha}^k\bar{u}_{,k}^\gamma = \delta_\alpha^\gamma. \end{aligned}$$

**질문 5.10.3.** 위 계산을 자세히 써 보아라.

---

17)  $\delta_\#^*$ 은 크로넥커 델타다.

(5.59)는 (5.57)을 미분함으로써 따라 나온다. 여기서 주의해야 할 것은  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{u}^\gamma}$ 의 해석과 계산인데 분자에 있는  $g_{ij}$ 는 사실

$$(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \mapsto g_{ij} \circ f^{-1}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = g_{ij}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$$

다. 따라서

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \bar{u}^\gamma}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^\gamma}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = g_{ij,k} u^k_{,\gamma}(\bar{u}^1, \bar{u}^2).$$

(5.60)의 증명은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2\overline{[\alpha\beta, \gamma]} &= \bar{g}_{\gamma\beta,\alpha} + \bar{g}_{\alpha\gamma,\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta,\gamma} \\ &= g_{ij,k} u^k_{,\alpha} u^i_{,\gamma} u^j_{,\beta} + g_{ij} u^i_{,\gamma\alpha} u^j_{,\beta} + g_{ij} u^i_{,\gamma} u^j_{,\beta\alpha} \\ &\quad + g_{ij,k} u^k_{,\beta} u^i_{,\alpha} u^j_{,\gamma} + g_{ij} u^i_{,\alpha\beta} u^j_{,\gamma} + g_{ij} u^i_{,\alpha} u^j_{,\gamma\beta} \\ &\quad - g_{ij,k} u^k_{,\gamma} u^i_{,\alpha} u^j_{,\beta} - g_{ij} u^i_{,\alpha\gamma} u^j_{,\beta} - g_{ij} u^i_{,\alpha} u^j_{,\beta\gamma} \\ &= g_{ij,k} u^k_{,\alpha} u^j_{,\beta} u^i_{,\gamma} + g_{ij} u^i_{,\gamma} u^j_{,\beta\alpha} \\ &\quad + g_{ij,k} u^i_{,\alpha} u^k_{,\beta} u^j_{,\gamma} + g_{ij} u^i_{,\alpha\beta} u^j_{,\gamma} \\ &\quad - g_{ij,k} u^i_{,\alpha} u^j_{,\beta} u^k_{,\gamma} \\ &= g_{kj,i} u^i_{,\alpha} u^j_{,\beta} u^k_{,\gamma} + g_{ij} u^i_{,\gamma} u^j_{,\beta\alpha} \\ &\quad + g_{ik,j} u^i_{,\alpha} u^j_{,\beta} u^k_{,\gamma} + g_{ij} u^i_{,\alpha\beta} u^j_{,\gamma} \\ &\quad - g_{ij,k} u^i_{,\alpha} u^j_{,\beta} u^k_{,\gamma} \\ &= 2[ij, k] u^i_{,\alpha} u^j_{,\beta} u^k_{,\gamma} + 2g_{ij} u^i_{,\alpha\beta} u^j_{,\gamma}. \end{aligned}$$

(5.61)의 증명은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \bar{g}^{\gamma\delta}[\alpha\beta,\delta] \\
 &= g^{st}\bar{u}_{,s}^{\gamma}\bar{u}_{,t}^{\delta}([ij,k]u_{,\alpha}^iu_{,\beta}^ju_{,\delta}^k + g_{ij}u_{,\alpha\beta}^iu_{,\delta}^j) \\
 &= g^{st}[ij,k]\bar{u}_{,s}^{\gamma}u_{,\alpha}^iu_{,\beta}^j(\bar{u}_{,t}^{\delta}u_{,\delta}^k) + g^{st}\bar{u}_{,s}^{\gamma}g_{ij}u_{,\alpha\beta}^i(\bar{u}_{,t}^{\delta}u_{,\delta}^j) \\
 &= g^{sk}[ij,k]\bar{u}_{,s}^{\gamma}u_{,\alpha}^iu_{,\beta}^j + (g^{sj}g_{ij})\bar{u}_{,s}^{\gamma}u_{,\alpha\beta}^i \\
 &= \Gamma_{ij}^s\bar{u}_{,s}^{\gamma}u_{,\alpha}^iu_{,\beta}^j + \bar{u}_{,i}^{\gamma}u_{,\alpha\beta}^i.
 \end{aligned}$$

(5.62)의 증명은 독자의 뜻으로 남긴다. 이는  $R$ 이 텐서라는 것을 증명하는 셈이 된다. (5.63)의 증명은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \bar{g}_{\alpha\mu}\bar{R}_{\beta\gamma\delta}^{\mu} = g_{is}u_{,\alpha}^iu_{,\mu}^sR_{jk\ell}^m\bar{u}_{,m}^{\mu}u_{,\beta}^ku_{,\gamma}^lu_{,\delta}^{\ell} \\
 &= g_{is}(u_{,\mu}^s\bar{u}_{,m}^{\mu})R_{jk\ell}^mu_{,\alpha}^iu_{,\beta}^ju_{,\gamma}^ku_{,\delta}^{\ell} = R_{ijk\ell}u_{,\alpha}^iu_{,\beta}^ju_{,\gamma}^ku_{,\delta}^{\ell}.
 \end{aligned}$$

이제 다음을 증명할 수 있다.

**정리 5.10.4.** 가우스 곡률은 불변량이다.

**증명** (5.49)에 주어져 있는 좌표계  $u$ 에서의 가우스 곡률 식을 생각하라. 새로운 좌표계  $\bar{u}$ 에서의 가우스 곡률은 비슷하게 얻을 수 있다.

$$\bar{K} = \frac{\bar{R}_{1212}}{|\bar{g}|}, \quad |\bar{g}| = \bar{g}_{11}\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}. \quad (5.64)$$

이제 (5.49)과 (5.64) 이 동일함을 보이면 된다. 먼저 다음을 살피자.

$$\bar{R}_{1212} = R_{ijk\ell}u_{,1}^iu_{,2}^ju_{,1}^ku_{,2}^{\ell}.$$

$i, j, k, \ell \in \{1, 2\}$  이므로 우변은 16개 항의 합인데 이 때 대칭성으로부터  $R_{1212}, R_{1221}, R_{2112}, R_{2121}$  빼고는 다 0이며 또한

$$R_{1221} = -R_{1212}, \quad R_{2112} = -R_{1212}, \quad R_{2121} = R_{1212}.$$

따라서

$$\begin{aligned}\bar{R}_{1212} &= R_{1212}u_{,1}^1 u_{,2}^2 u_{,1}^1 u_{,2}^2 + R_{1221}u_{,1}^1 u_{,2}^2 u_{,1}^2 u_{,2}^1 + R_{2112}u_{,1}^2 u_{,2}^1 u_{,1}^1 u_{,2}^2 + R_{2121}u_{,1}^2 u_{,2}^1 u_{,1}^1 u_{,2}^2 \\ &= R_{1212}u_{,1}^1 u_{,2}^2 u_{,1}^1 u_{,2}^2 - R_{1212}u_{,1}^1 u_{,2}^2 u_{,1}^2 u_{,2}^1 - R_{1212}u_{,1}^2 u_{,2}^1 u_{,1}^1 u_{,2}^2 + R_{1212}u_{,1}^2 u_{,2}^1 u_{,1}^1 u_{,2}^2 \\ &= R_{1212}(u_{,1}^1 u_{,2}^2 - u_{,2}^1 u_{,1}^2)^2.\end{aligned}$$

한편 (5.57)를 행렬을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,1}^1 & u_{,1}^2 \\ u_{,2}^1 & u_{,2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,1}^1 & u_{,2}^1 \\ u_{,1}^2 & u_{,2}^2 \end{bmatrix}.$$

이로부터  $|\bar{g}| = |g|(u_{,1}^1 u_{,2}^2 - u_{,2}^1 u_{,1}^2)^2$ 임을 알 수 있으며 따라서

$$\bar{K} = \frac{\bar{R}_{1212}}{|\bar{g}|} = \frac{R_{1212}}{|g|} = K$$

임을 알 수 있다. ■

지도를 바꾸어도 변하지 않는 것, 즉 불변량은 현대 미분기하에서 그리고 현대 물리학에서 굉장히 중요한 개념이다. 어떤 현상을 설명할 때 좌표계를 어떻게 택하느냐에 따라 달라지는 값은 물리적으로 진정한 의미가 있다고 하기 어렵다.

예를 들어 두 점이 있을 때 두 점 각자의 좌표값은 좌표를 어떻게 정하는가에 따라 그 값이 달라진다. 하지만 두 점 사이의 거리는 좌표를 어떻게 정하더라도 변하지 않을 것이다. 따라서 좌표는 불변량이 아니고 거리는 불변량이다.

## 5.11 연습문제

**연습문제 5.11.1.**  $uv$ -평면에 다음과 같은 계량기가 주어져 있다.

$$ds^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} du^2 + \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} dv^2.$$

이때,  $uv$ -평면에 있는 곡선  $\gamma(t) = (t, 0)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ 의 길이는 얼마인가?

**연습문제 5.11.2.** 어떤 곡면을 나타내는  $uv$ -지도에서 계량기가 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$ds^2 = (1+9u^4)du \odot du - 18u^2v^2du \odot dv + (1+9v^4)dv \odot dv$$

이때, 두 벡터  $v_p = (1, 2)_{(1,1)}$  와  $w_p = (3, 1)_{(1,1)}$  가 주어져 있으면,

1.  $ds^2(v_p, w_p)$  는 얼마인가?

2. 위 계산 결과에 의하면  $v_p$  와  $w_p$  는 서로 수직인가? 아닌가?

**연습문제 5.11.3.** 위 문제에서 주어진 지도를 가지고 다음을 계산하라.

1.  $(0, 0)$  과  $(1, 0)$  을 잇는 선분의 길이를 나타내는 식.

2.  $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$  을 꼭지점으로 가지는 정사각형의 넓이를 나타내는 식.

3.  $(0, 0)$ 에서 가우스 곡률. (숫자로 답하시오.)

**연습문제 5.11.4.** 나선면과 현수면의 가우스 곡률을 계산해 보아라.

## 맺음말

지도에 계량기가 적혀있으면 다음과 같은 것들을 알아낼 수 있다.

- 지도에 있는 곡선의 길이
- 지도에 있는 영역의 넓이
- 지도에 있는 두 곡선 사이의 각도
- 지도에 있는 곡선의 (측지)곡률
- 지도의 가우스 곡률
- 지도에 있는 벡터장의 한 벡터 방향으로의 공변미분
- 지도에 있는 곡선의 가속도
- 지도에 있는 곧은선

이 모든 것에 대하여 구체적으로 계산을 수행할 수 있다면 이 절의 내용을 제대로 이해한 것이다. 못 한다고 해도 크게 염려할 것은 없다. 결국은 다음 두 장에서 이를 수행하게 될 것이다.



## 제 6 장

# 쌍곡 평면의 기하학

## 6.1 쌍곡 평면의 정의

5장에서는 곡면에 관련된 것들 중에서 지도와 계량기만으로 알아낼 수 있는 것들에 대해 알아 보았다. 즉 내재적 기하를 공부하였다. 이에는 곡선의 길이, 두 곡선 사이의 각도, 도형의 넓이, 측지 곡률, 곧은선, 가우스 곡률, 공변 미분 등이 포함되었다.

이 절에서는 곡면에 대한 정보는 전혀 주어지지 않은 채, 계량기와 함께 지도만 주어진다면 얼마나 기하학을 할 수 있을지를 구체적 예를 통해 알아본다. 여기서 다루고자 하는 예는

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (6.1)$$

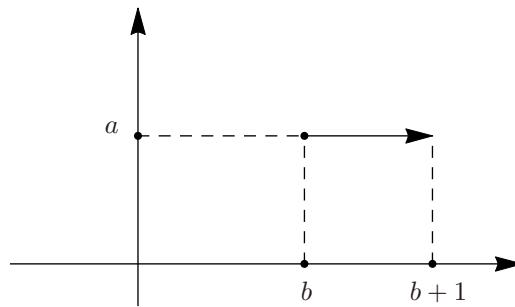
이다.<sup>1)</sup> 이렇게 계량기가 주어진 반평면을 쌍곡 평면(의 상반평면모델)이라고 보통  $\mathbb{H}^2(-1)$  또는 간단히  $\mathbb{H}^2$ 으로 나타낸다.

여기서 어떤 일이 벌어질까? 먼저 다음 질문을 생각해 보자.

**예제 6.1.1.** 다음에 주어진 곡선의 길이는  $a, b$ 에 어떻게 의존할까?

---

1) 즉  $E(x, y) = G(x, y) = \frac{1}{y^2}$ ,  $F(x, y) = 0$ .



**풀이**  $\gamma(t) = (t + b, a)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . 그러므로

$$|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{E \cdot 1^2 + 2F \cdot 1 \cdot 0 + G \cdot 0^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}.$$

따라서,

$$\gamma \text{의 길이} = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt = \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}.$$

그러므로  $\gamma$ 의 길이는  $b$ 와 상관없다. ■

위에서  $a$ 가 변하면  $\gamma$ 는 위아래로,  $b$ 가 변하면  $\gamma$ 는 좌우로 움직인다. 따라서 좌우로 움직일 때 길이는 변하지 않음을 살펴본 것이다. 그런데 유클리드 평면에서 평행이동은 사실 평행한 두 직선에 대한 대칭이동의 합성으로 주어지며 직선에 대한 대칭이동은 강체운동이다. 쌍곡 평면에서도 비슷한 내용이 성립한다.

보조정리 6.1.2. 임의의 실수  $x_0$ 에 대하여 다음 변환

$$f(x, y) := (2x_0 - x, y) \quad (6.2)$$

은 곡선의 길이를 변화시키지 않는다.

**증명** 곡선의 식을  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ 라고 하자. 그러면

$$\gamma\text{의 길이} = \int_a^b \sqrt{E\dot{x}^2 + 2F\dot{x}\dot{y} + G\dot{y}^2} dt = \int_a^b \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}} dt$$

이제  $f \circ \gamma(t) = (2x_0 - x(t), y(t))$ 이므로

$$f \circ \gamma\text{의 길이} = \int_a^b \sqrt{\frac{((2x_0 - x)\cdot)^2 + y^2}{y^2}} dt$$

그러므로

$$\gamma\text{의 길이} = f \circ \gamma\text{의 길이}.$$



$f$ 는, 유클리드 시각으로 말하자면 직선  $x = x_0$ 에 대한 대칭이동이다. 그러나, 상하로 움직이는 경우에는 곡선의 길이가 변한다는 것을 명심하라.

**참고 6.1.3.**  $f$ 는 길이만이 아니라 넓이, 각도 등도 변화시키지 않는다.

## 6.2 쌍곡 평면의 곧은선

기하학을 전개하기 위해 가장 먼저 정의되어야 할 대상 중의 하나는 곧은선이다. 현재 우리가 아는 사실은 곧은선이란 곧은선의 방정식을 만족하는 곡선이라는 것이다. 그래서 곧은선 방정식을 쓴 후 이 방정식을 풀어 곧은선이 어떻게 생겼는지 알아보자. 4.3절과 5.6절에서 살펴본 바와 같이 곧은선 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 1 &= g_{ij}(u^1(t), u^2(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t), \\ 0 &= \ddot{u}^1(t) + \Gamma_{ij}^1(u^1(t), u^2(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t), \\ 0 &= \ddot{u}^2(t) + \Gamma_{ij}^2(u^1(t), u^2(t))\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t). \end{aligned}$$

첫 번째 식은 주어진 곡선이 단위속력을 가진다는 것이다. 주어진 쌍곡 평면의 계량기에 의하면

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{(u^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

이므로 첫 번째 식이 어떻게 생겼는지를 알 수 있다. 나머지 두 식을 해석하기 위하여 먼저 크리스토펠 기호  $\Gamma_{ij}^k$ 를 계산하자. 정의 4.3.6과 정의 4.3.7를

이용하여 다음을 얻는다.

$$g^{11} = g^{22} = (u^2)^2, \quad g^{12} = g^{21} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = (u^2)^{-1},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -(u^2)^{-1}.$$

곧은선 방정식의 두 번째, 세 번째 식에 위 식을 적용시키면

$$0 = \ddot{u}^1(t) - 2(u^2(t))^{-1}\dot{u}^1(t)\dot{u}^2(t),$$

$$0 = \ddot{u}^2(t) + (u^2(t))^{-1}\{(\dot{u}^1(t))^2 - (\dot{u}^2(t))^2\}.$$

$x(t) := u^1(t)$ ,  $y(t) := u^2(t)$  라 하면 곧은선 방정식의 세 식은 다음과 같다.

$$y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \tag{6.3}$$

$$0 = \ddot{x} - 2y^{-1}\dot{x}\dot{y}, \tag{6.4}$$

$$0 = \ddot{y} + y^{-1}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2). \tag{6.5}$$

이를 어떻게 풀 것인가? 먼저 (6.3)를 이용하면 (6.5)는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$0 = \ddot{y} - 2y^{-1}\dot{y}^2 + y.$$

이제 양변을  $y^2$ 으로 나누어 정리하면

$$0 = \frac{\dot{y}y^2 - \dot{y} \cdot 2y\dot{y}}{y^4} + \frac{1}{y} = \left(\frac{\dot{y}}{y^2}\right)' + \frac{1}{y}. \tag{6.6}$$

$z(t) := 1/y(t)$ 라고 하면<sup>2)</sup> 이 식은  $-\ddot{z} + z = 0$ 와 같다. 따라서  $z(t) = Ae^t + Be^{-t}$ 이고 (단  $A, B$ 는 최소한 하나는 0이 아닌 상수)  $y(t) = 1/(Ae^t + Be^{-t})$ 이다.  $A, B$  둘 중 하나가 0이면 (6.3)로부터  $x(t)$ 는 상수임이 얻어진다.

이제  $A, B$  모두 0이 아니라 하자. 그러면 (6.4)으로부터 다음이 얻어진다.

$$0 = \frac{y^2}{y^4} (\ddot{x} - 2y^{-1}\dot{x}\dot{y}) = \frac{\ddot{x}y^2 - \dot{x}(y^2)}{(y^2)^2} = \left(\frac{\dot{x}}{y^2}\right)'.$$

따라서  $\dot{x}(t) = Cy^2 = C/(Ae^t + Be^{-t})^2$ . 여기서  $C = 0$ 이면  $x$ 는 상수고  $C \neq 0$ 면  $x = \int C/(Ae^t + Be^{-t})^2 dt = \frac{-C}{2A}(Ae^{2t} + B)^{-1} + D$ . 이 경우 (6.3)로부터  $C^2 = 4AB$ . 이를 이용하면  $(x - (D - 1/C))^2 + y^2 = 1/C^2$ 이 얻어진다.

**보조정리 6.2.1.** 쌍곡 평면의 곧은선은 다음과 같이 생겼으며 역으로 다음과 같이 생긴 곡선은 모두 곧은선이다. (단  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$ )

$$\gamma_1 : x = x_0, y > 0 \quad (6.7)$$

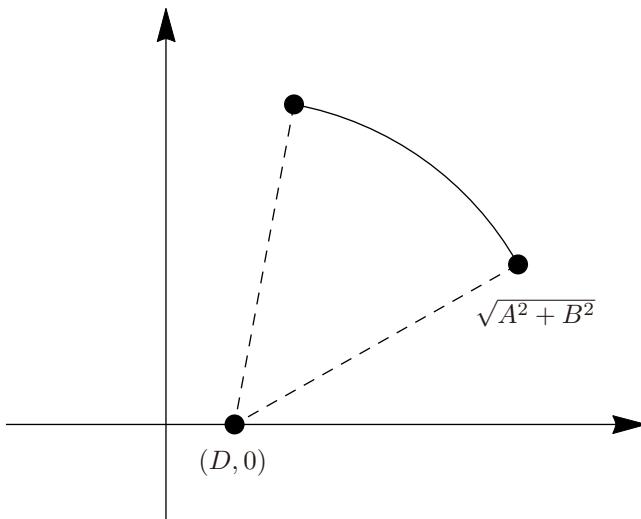
또는

$$\gamma_2 : (x - x_1)^2 + y^2 = r^2, y > 0. \quad (6.8)$$

**증명** 역을 증명하는 것은 독자에게 남긴다. (사실은  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 에 대한 단위속력 매개식이 필요한데 이는 다음 절에 유도되어 있다.)<sup>3)</sup>

2)  $y > 0$ 이므로 이렇게 해도 된다.

3) 그림의 기호가 본문과 맞지 않다.



연습문제 6.2.2. 다음 문제를 풀어 보자.

1. (6.3), (6.4), (6.5)를 푸는 다른 알고리즘을 생각해 보아라.
2. 임의의 두 점을 잇는 곧은선은 반드시 존재하는가? 반드시 1개인가? 평면, 구면과 비교하여 보라.
3. 한 곧은선이 있고 그 위에 있지 않은 한 점이 있을 때 그 점을 지나고 그 직선과 만나지 않는 곧은선을 작도하여 보아라.

편의상 이후부터는 쌍곡 평면의 좌표를  $xy$ 가 아닌  $uv$ 라 하자. 지금 쌍곡 평면에는 두 종류의 곧은선( $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ )이 있음을 알아 보았다. 그 중  $x = 0$  일 때의  $\tilde{\gamma}_1$ 을  $\gamma_1$ ,  $x_1 = 1, r = 1$  일 때의  $\tilde{\gamma}_2$ 를  $\gamma_2$ 라 하자. 즉

$$\gamma_1 : u = 0, \quad \gamma_2 : u^2 + v^2 = 1. \quad (\text{단 } v > 0).$$

유클리드 평면에서는 임의의 두 직선은 서로 합동이다. 즉, 유클리드 평면의 강체운동이 있어 한 직선을 다른 직선으로 포갤 수 있다.

**정의 6.2.3.** 유클리드 평면이나 쌍곡 평면에서 강체 운동(rigid motion)이란 그 평면에서 그 평면으로 가는 일대일대응 중에서 임의의 두 점 사이의 거리를 변화시키지 않는 것을 말한다.

그렇다면 쌍곡 평면에서도 이 두 직선  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 가 서로 합동일까? 만약 합동이라면 어떻게 보일까?

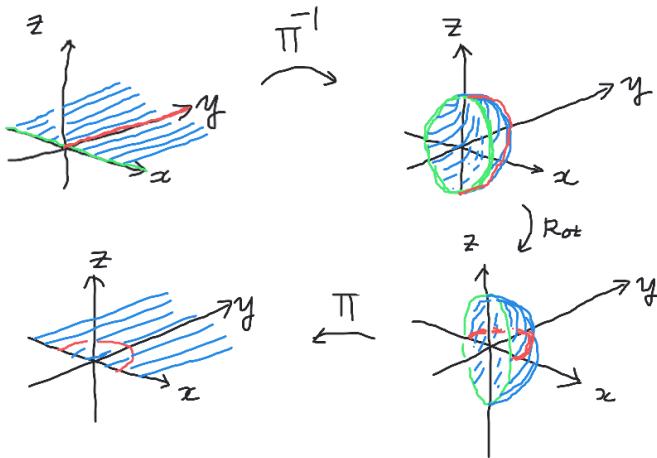
먼저  $\gamma_1$ 을  $\gamma_2$ 로 변환시키는 방법엔 다음과 같은 것이 있다.  $\Pi$ 을 북극점  $N = (0, 0, 1)$ 을 이용한 입체사영,  $Rot$ 를  $y$ 축에 대한  $-90^\circ$  회전이라고 하자. 즉

$$\Pi(x, y, z) = \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \quad Rot(x, y, z) = (-z, y, x).$$

그러면  $(\alpha, \beta) := \Pi \circ Rot \circ \Pi^{-1}(u, v)$ 라 하였을 때 다음을 알 수 있다.

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{1-u^2-v^2}{(u-1)^2+v^2}, \frac{2v}{(u-1)^2+v^2} \right). \quad (6.9)$$

간단한 추론에 의하여<sup>4)</sup> 이 사상은 상반평면에서 상반평면으로 가는 일대일대응이며  $\gamma_1$ 을  $\gamma_2$ 로,  $\gamma_2$ 를  $\gamma_1$ 로 보냄을 알 수 있다.



문제는 이 사상이 강체운동이냐 하는 것인데 이를 위해 계량기가  $\alpha, \beta$  좌표로는 어떻게 쓰여지는지 알아보자. 이를 위해선  $u, v$ 를  $\alpha, \beta$ 로 나타내는 것이 필요

4) 계산할 필요 없다. 그림을 잘 보면 알 수 있다.

한데 위 식을 가지고 열심히 계산할 수도 있지만  $(u, v) = \Pi \circ \text{Rot}^{-1} \circ \Pi^{-1}(\alpha, \beta)$  임을 이용하면 쉽게

$$(u, v) = \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \beta^2}, \frac{2\beta}{(\alpha + 1)^2 + \beta^2} \right) \quad (6.10)$$

임을 알 수 있다. 이제 이로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{\beta^2}$$

이로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

**보조정리 6.2.4.** (6.9)의 함수  $\Pi \circ \text{Rot} \circ \Pi^{-1}$ 는 쌍곡 평면을 쌍곡 평면으로 일대일대응시키는 강체운동이다.

그래서 쌍곡 평면의 두 곧은선  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 는 이 강체운동에 의하여 서로 합동이다.  $\gamma_1$ 은 비교적 이해하기 쉬운데  $\gamma_2$ 가  $\gamma_1$ 과 합동이라는 사실은  $\gamma_2$ 의 성질을 공부함에 있어서 매우 유용하게 쓰인다. 실제로 이 아이디어를 활용하기 전에 먼저 다음을 살펴보자.

**참고 6.2.5.** 식 (6.9)에 관하여 흥미롭게도 다음 관계가 성립한다:

$$\frac{1 - u^2 - v^2}{(u - 1)^2 + v^2} + i \frac{2v}{(u - 1)^2 + v^2} = \frac{1 + (u + iv)}{1 - (u + iv)}$$

따라서 (6.9), (6.10)는,  $u + iv := z$ ,  $\alpha + i\beta := w$ 라 하면 다음과 같다:

$$w = f(z) := \frac{1 + z}{1 - z}, \quad z = f^{-1}(w) = \frac{w - 1}{w + 1}. \quad (6.11)$$

이렇게 복소평면의 변환을 복소평면의 선현분수변환(뫼비우스 변환)을 이용하여 분석하는 것은 매우 흥미로운 작업인데 다음 장에서 자세히 다룬다.)

**연습문제 6.2.6.** 임의의 양의 실수  $R$ 에 대하여, 쌍곡 평면에서

$$f(x, y) := (Rx, Ry) \quad (\text{복소수를 이용한 표현은 } f(z) := Rz) \quad (6.12)$$

도 강체운동임을 보여라.

## 6.3 쌍곡 평면에서 선분의 길이 및 두 점 사이의 거리

선분은 두 점을 지나는 곧은선에서 두 점과 그 두 점 사이에 있는 점들의 집합으로 정의된다.<sup>5)</sup>이 장에서는 선분의 길이를 구해보자.

먼저  $\gamma_1$ 로 만들어지는 선분의 길이를 생각하자. 이는 다음과 같이 매개될 수 있다.

$$\gamma_1 : x(t) = x_0, \quad y(t) = t, \quad a \leq t \leq b.$$

이러면  $\gamma_1(a)$ 부터  $\gamma_1(t)$ 까지  $\gamma_1$ 의 길이를  $s(t)$ 라 할 때

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}} d\tilde{t} = \int_a^t \frac{1}{\tilde{t}} d\tilde{t} = \ln \frac{t}{a}.$$

이를 이용하여  $\gamma_1$ 의 속력이 항상 1이 되도록 곡선을 매개할 수 있다. 위에서  $t = e^{s+\log a}$ . 따라서  $\gamma_1$ 을 다음과 같이 재매개할 수 있다.

$$\gamma_1 : x(s) = x_0, \quad y(s) = e^{s+\log a}, \quad 0 \leq s \leq \log b - \log a.$$

여기서  $s + \log a$ 를 다시  $s$ 라 하면  $\gamma_1$ 은 다음과 같이 매개된다.

$$\gamma_1 : x(s) = x_0, \quad y(s) = e^s, \quad \log a =: s_1 \leq s \leq s_2 := \log b. \quad (6.13)$$

이러면 쉽게  $\sqrt{\langle \dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_1(s) \rangle} \equiv 1$ 임을 알 수 있는데 이는 예상했던 바다. 따라서

$$\gamma_1 \text{의 총 길이} = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\langle \dot{\gamma}_1(s), \dot{\gamma}_1(s) \rangle} ds = \int_{s_1}^{s_2} 1 ds = s_2 - s_1.$$

---

5) 여기서 '사이'의 의미를 분명히 하여라. 이는 힐베르트의 공리군 중 순서공리군을 쌍곡 평면에서 확인하는 데에 필요하다.

이제 단위속력을 가지도록  $\gamma_2$ 를 재매개해 보자. 앞에서  $x_0 = 0$ ,  $r = 1$ 인 경우  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$ 는 사실 서로 합동임을 알아보았다. 그렇다면 그 합동관계를 이용하여  $\gamma_2$ 를 단위속력을 매개할 수 있을 것이다. 이를 자세히 알아보자. 점  $(u, v)$ 를 복소수  $u + iv$ 와 대응시키자. 그러면  $\gamma_1(s) = (0, e^s) = ie^s$ . 이제, (6.11)에 주어진  $f$ 를 이용하면

$$\begin{aligned} f \circ \gamma_1(s) &= \frac{1 + ie^s}{1 - ie^s} = \tanh(-s) + i \operatorname{sech}(-s) \\ &= (\tanh(-s), \operatorname{sech}(-s)) \end{aligned}$$

여기서 잠깐 쌍곡삼각함수의 식을 떠올리자면 임의의 실수  $\phi$ 에 대하여  $\tanh^2 \phi + \operatorname{sech}^2 \phi = 1$ 이다. 따라서 위 식은  $\gamma_2$ 의 매개식이 맞다. 원의 매개방정식과는 달리 상반원의 매개방정식은 쌍곡함수로도 나타낼 수 있는 것이다. 이를 이용하면  $\gamma_2$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

$$\gamma_2 : x(t) = x_0 + r \tanh s, \quad y(t) = r \operatorname{sech} s, \quad s_1 < s < s_2. \quad (6.14)$$

흥미롭게도 이 매개식은  $x_0$ 만이 아니라  $r$ 에도 상관없이 단위속력을 가지고 있다. 즉  $\langle \dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_2(s) \rangle \equiv 1$ . 이 매개식을 이용하면  $\gamma_2$ 의 길이는 다음과 같다.

$$\gamma_2 \text{의 총 길이} = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\langle \dot{\gamma}_2(s), \dot{\gamma}_2(s) \rangle} ds = \int_{s_1}^{s_2} 1 ds = s_2 - s_1.$$

여기서 당장 내릴 수 있는 결론 중의 하나는, 임의의 반곧은선, 임의의 곧은선의 길이는 모두 무한하다는 것이다.

**두 점 사이의 거리** 서로 다른 두 점  $A_1(x_1, y_1)$ 과  $A_2(x_2, y_2)$  사이의 거리는 두 점으로 결정되는 선분의 길이로 정의된다. 그 길이를  $\overline{A_1 A_2}$  라 하자.

이를 구하기 위해 두 점을 지나는 곧은선의 단위속력매개식을 생각하자. 편의상  $x_1 \neq x_2$  인 경우를 먼저 생각하자. 이 경우 단위속력매개식은 다음과 같다고 할 수 있다.

$$\gamma(s) := (x_0, 0) + (r \tanh s, r \operatorname{sech} s), \quad \gamma(s_i) = (x_i, y_i) \quad i = 1, 2. \quad (6.15)$$

$\gamma$ 가 단위속력을 가진 곧은선이므로  $\overline{A_1 A_2} = \gamma$ 의 길이  $= |s_2 - s_1|$ . 따라서

$$\begin{aligned} \cosh \overline{A_1 A_2} &= \cosh(s_1 - s_2) \\ &= \cosh s_1 \cosh s_2 - \sinh s_1 \sinh s_2 \\ &= \cosh s_1 \cosh s_2 (1 - \tanh s_1 \tanh s_2). \end{aligned} \quad (6.16)$$

이 때 식 (6.15)로부터 다음 네 방정식

$$x_0 + r \tanh s_i = x_i, \quad r \operatorname{sech} s_i = y_i \quad i = 1, 2$$

이 얻어지는데 이로부터

$$\tanh s_i = \frac{x_i - x_0}{r}, \quad \cosh s_i = \frac{r}{y_i}.$$

이를 식 (6.16)에 대입하면

$$\begin{aligned} \cosh \overline{A_1 A_2} &= \frac{r^2}{y_1 y_2} \left( 1 - \frac{x_1 - x_0}{r} \frac{x_2 - x_0}{r} \right) \\ &= \frac{1}{y_1 y_2} (r^2 - x_0^2 - x_1 x_2 + x_0(x_1 + x_2)) \end{aligned} \quad (6.17)$$

이 때 유클리드 피타고라스의 정리로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$r^2 = (x_i - x_0)^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2.$$

따라서

$$r^2 - x_0^2 + x_0(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2).$$

이를 (6.17)에 대입하면 드디어 다음 식이 얻어진다.

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1 y_2} \right). \quad (6.18)$$

이 때 양변에  $x_1 = x_2 = x_3$  을 대입하면 이 식은

$$d((x_3, y_1), (x_3, y_2)) = \cosh^{-1} \left( \frac{y_1^2 + y_2^2}{2y_1 y_2} \right) = \left| \log \frac{y_1}{y_2} \right|$$

가 되는데 이는 참이다. 따라서 (6.18)는 항상 참이다.

**연습문제 6.3.1.** 다음이 성립함을 보여라.

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2 \sinh^{-1} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{y_1 y_2}} \right). \quad (6.19)$$

**참고문헌 6.3.1.** 이 절의 내용을 좀 더 공부하고 싶으면 다음을 참고하시오.

- [29]

## 6.4 쌍곡 평면에서 각도

계량기가 주어진 일반적 지도에서 각도를 계산하는 법을 (5.3)에서 알아보았다. 이를 쌍곡 평면에 적용시켜 보자.

계량기가  $\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ 로 주어졌다는 것은 사실 내적이 다음과 같이 주어졌음을 뜻한다.  $(a, b) \in \mathbb{H}^2(-1)$ 에 시점을 둔 두 벡터  $\vec{v} = (v_1, v_2)_{(a,b)}$ ,  $\vec{w} = (w_1, w_2)_{(a,b)}$ 를 생각하라. 그러면,

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_{\mathbb{H}^2(-1)} := \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{b^2}.$$

자, 이제  $\vec{v}$ 와  $\vec{w}$  사이의 각  $\theta$ 를 구해보자. (5.3)에 주어진 각의 정의에 의하여

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{\frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{b^2}}{\sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{b^2}} \sqrt{\frac{w_1^2 + w_2^2}{b^2}}} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \right)$$

이는 사실 유클리드 평면에서 잰 각과 같다. 즉 다음이 성립한다.

**정리 6.4.1.** 쌍곡 평면에서 잰 각 = 유클리드 평면에서 잰 각.

## 6.5 쌍곡 평면에서 삼각형의 넓이와 세 내각의 합

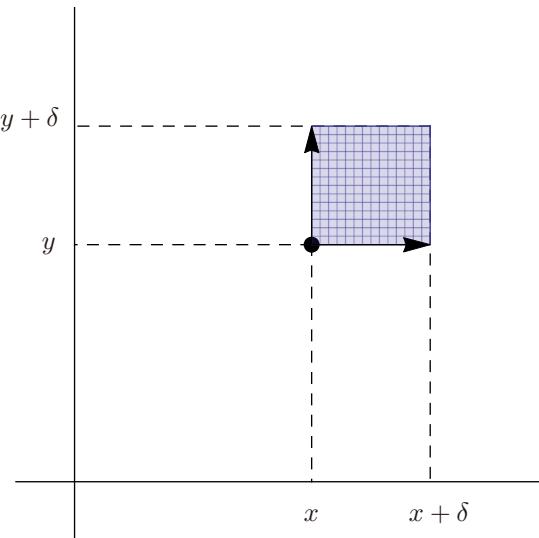
자, 쌍곡 평면에 있는 도형의 넓이에 대해서 생각해 보자. 넓이를 생각할 수 있는 가장 간단한 도형은 무엇인가? 유클리드 기하학에서는 정사각형이 넓이에 관한 한 가장 기본이 되는 도형이다. 쌍곡 평면에는 정사각형이 어떻게 생겼을까? 그것이 넓이를 구하는 데 기본이 되는가? 그런데, 이 절의 내용을 공부한 후 조금 더 생각해 보면 쌍곡 평면에는 네 각이 모두 직각인 사각형은 없다는 것을 알게 된다.

사실은 쌍곡 평면의 임의의 도형  $S \subset \mathbb{H}^2(-1)$ 에 대해서 넓이를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{정의 6.5.1. } S \text{의 넓이} = \iint_S \sqrt{EG - F^2} dx dy = \iint_S \frac{1}{y^2} dx dy$$

이 식은 3차원 유클리드 공간에 있는 곡면의 넓이가  $\iint_U \sqrt{EG - F^2} dA$ 라는 정의를 쌍곡 평면의 영역에 대하여 적용한 것이다. 다변수 미적분학을 참고 하라.

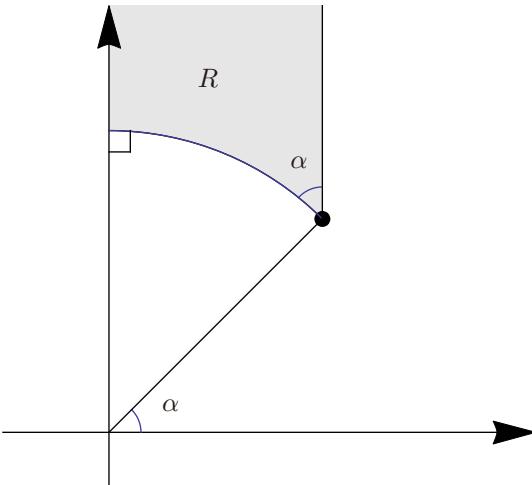
**참고 6.5.2.** 이 식을 다음과 같이 얻을 수도 있다.  $\mathbb{H}^2(-1)$ 에 다음과 같은 조그만 사각형을 생각해 보라.



이 사각형 밑변의 길이는  $\frac{\Delta x}{y}$ 이고, 높이는  $\frac{\Delta y}{y}$ 이다. 따라서 넓이는  $\frac{\Delta x \Delta y}{y^2}$ 이다. 도형의 넓이는 이러한 사각형들의 넓이의 합의 극한으로 정의되므로 위의 식을 얻는다.

이제 위 넓이의 정의를 이용하여 삼각형의 넓이에 관한 식을 얻어보자.

**보조정리 6.5.3.** 다음 영역  $R$ 의 넓이는  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ .

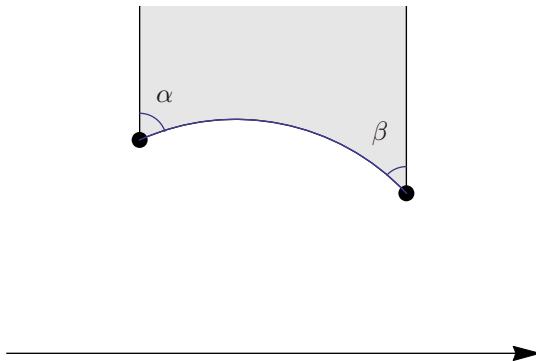


## 증명

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \iint_R \frac{1}{y^2} dx dy = \int_0^{r \cos \alpha} \left( \int_{\sqrt{r^2 - x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_0^{r \cos \alpha} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \int_0^{\sin^{-1}(\cos \alpha)} 1 dt = \sin^{-1}(\cos \alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha.
 \end{aligned}$$

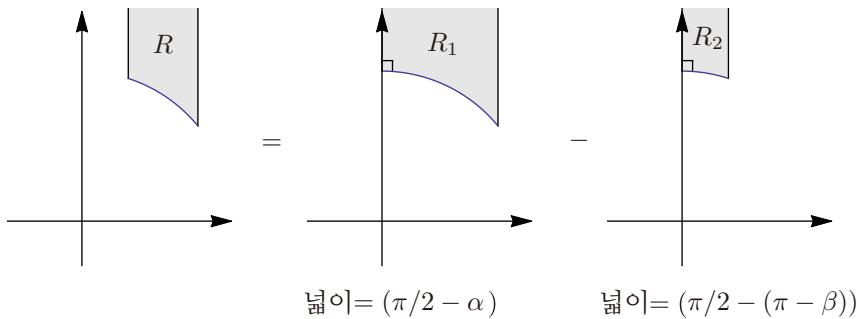


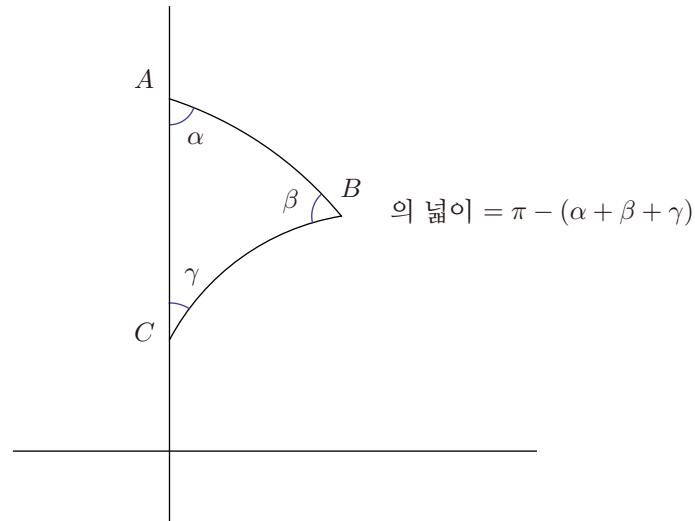
**따름정리 6.5.4.** 다음 영역  $R$ 의 넓이는  $\pi - \alpha - \beta$ .



**증명** 경우1 :  $\alpha < \frac{\pi}{2} < \beta$  인 경우 원호의 중심을 지나는 반 수직선을 그어,  $R$  를 2개의 영역으로 분할한 다음 위의 보조정리를 적용한다.

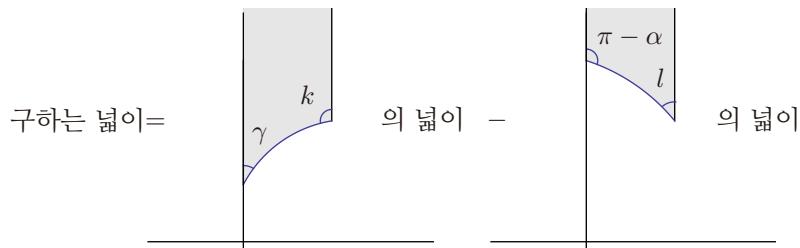
경우2 :  $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  인 경우





보조정리 6.5.5.

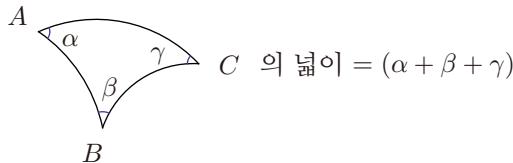
**증명**  $B$ 를 지나는 수직선을 생각하면



$$\begin{aligned}
 &= (\pi - \gamma - k) - (\pi - (\pi - \alpha) - l) \\
 &= \pi - \alpha - \gamma - (k - l) \\
 &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma).
 \end{aligned}$$



쌍곡 평면에서 삼각형의 넓이는 세 내각의 크기에 의하여 정해진다.



### 정리 6.5.6.

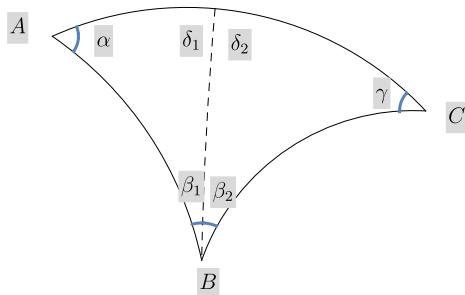
6)

$$\text{주어진 삼각형의 넓이} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

**증명**  $B$ 를 지나는  $x = x_0$  꼴의 곧은선을 그어  $\triangle ABC$ 를 두 개로 쪼갠다. <sup>7)</sup>

6) 앗, 이 그림의 내용이 잘못되었다. 다음과 같이 수정되어야 한다.

7) 그림이 잘못되었다. 점선이 훑어져 보인다. 다시 그리자.



$$\begin{aligned}
 \text{총 넓이} &= \text{넓이}1 + \text{넓이}2 \\
 &= \pi - (\alpha + \beta_1 + \delta_1) + \pi - (\gamma + \delta_2 + \beta_2) \\
 &= 2\pi - (\alpha + \gamma) - (\beta_1 + \beta_2) - (\delta_1 + \delta_2).
 \end{aligned}$$

이때  $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ ,  $\delta_1 + \delta_2 = \pi$  이므로 결론이 성립한다.

**참고 6.5.7.** ①  $\triangle$ 의 넓이는  $\pi$ 보다 항상 작다! 유클리드 평면의  $\triangle$ 의 넓이와 비교하여 보아라.

- ②  $\triangle$ 의 내각의 합이  $\pi$ 보다 항상 작다! 유클리드 평면과 또 다른 면이다.
- ③ 가우스-보네 정리와 비교해 보아라.

## 6.6 쌍곡 평면의 원

유클리드 평면에서 원은 한 점으로부터의 거리가 같은 점들의 집합으로 정의된다. 이 정의를 그대로 쌍곡 평면에 적용시키면 어떤 도형이 얻어질까?

이를 위하여 임의의 점 하나를 고정하고 이름을  $P$ 라 하자. 그리고 그 점에서 뻗어나오는 모든 반직선을 그려 보아라. 이제 임의의 양의 실수  $r > 0$ 을 고정하고 각 반직선마다  $P$ 로부터의 거리가  $r$ 인 점을 그려보아라. 가능한가? 가능하다. 그래서 다음과 같이 원을 정의한다.

**정의 6.6.1.** 쌍곡 평면에서도 원은 한 점으로부터의 거리가 같은 점들의 집합으로 정의한다.

이 정의는 제대로 된 정의인가? 무슨 말인가 하면, 쌍곡 평면의 곧은선은 곧은선 방정식이라는 걸 통하여 정의되었는데 원은 매우 단순하게 정의되었고 이게 괜찮을까 하는 것이다. 음, 이에 대한 답은, 앞으로 이 정의들을 적용한 여러 명제들을 만들어 나가면서 보게 될 것이다.

이제 쌍곡 평면에서 원과 직선이 정의되었고 길이, 넓이, 각도 등도 정의되었으니 유클리드 평면과 같이 기하를 할 수 있다. 그럼 어떤 명제가 참일까?

## 6.7 연역적 쌍곡 기하학, 합동, 강체운동

쌍곡 기하가 처음 발견된 건 사실 연역적 추론에 의해서였다. 즉, 유클리드 기하를 구성하는 공리들 중에서 평행 공리를 부정한 것을 공리로 채택한 후 논리를 전개해 보면서 발견<sup>8)</sup> 한 기하다.

힐베르트는 유클리드 공리계를 I 결합공리군, II 순서공리군, III 합동공리군, IV 평행공리, V 연속공리군으로 구분하여 이들의 독립성과 완비성을 증명하였다. 이들 공리에 대하여 이제까지 우리가 공부한 쌍곡 평면에서의 참 거짓 여부를 따진다면 대부분의 공리에 대하여 참 거짓 여부를 따질 수가 있는데 그 중 합동 공리들에 대해서만큼은 아직 참 거짓 여부를 따질 수가 없다. 그것은, 유클리드 평면의 평행이동, 회전이동, 대칭이동에 해당하는 강체운동이 아직 쌍곡 평면에 주어지지 않았기 때문이다. 쌍곡 평면의 강체운동을 분석하는 것은 많은 노력이 필요한 부분인만큼 따로 장을 만들어 다루도록 한다. 이는 다음 장에서 이루어질 것이며 강체운동에 대한 완벽한 이해가 없으면 쌍곡 평면을 제대로 이해했다고 할 수 없다.

---

8) 최소한 이는 보요이, 로바체프스키에 대해선 참이다. 그러나 가우스도 이렇게 쌍곡 기하를 발견했는지에 대해선 나는 모른다. 참고로, 가우스는 이 위대한 발견은 공표하지 않고 사망했다. 한국수학사학회 회장이신 김영욱 교수님의 말씀에 의하면 발표하기가 무서워서라고 하는데, 무엇이 무서워서인지 궁금하지 않은가?

연역적 쌍곡 기하는 다음 공리군으로 이루어진다.

- I 결합공리군
- II 순서공리군
- III 합동공리군
- IV 쌍곡평행공리
- V 연속공리군

쌍곡 평면의 상반평면모델은 비유클리드 기하학에 대한 관심이 고조되던 1800년대 후반 프랑스의 수학자 포앙카레(Poincaré, 1854 ~ 1912)에 의해 발견되었다. 쌍곡 기하의 여러 모델이 발견됨으로써 비유클리드 기하학이 참인지 거짓인지에 대한 의심이 사라지게 되었으며 우리가 몸담고 있는 이 공간이 과연 유클리드 공간인가 아닌가에 대한 논의가 본격적으로 이루어지게 되었다.

**연습문제 6.7.1.** ‘雙曲’ 이란 이름의 유래를 조사해 볼 것.

**쌍곡 평면의 강체운동에 관하여** 이제까지 세 가지 종류의 강체운동이 있음을 알아보았다. 그건 (6.2), (6.9), (6.12)다. 여기서 이를 언급하는 이유는, 첫째

쌍곡 평면에서 합동공리군의 진위를 따질 때에 강체운동이 필요하기 때문이고 둘째 다음 두 절에서 제시된 증명이 완벽해지려면 강체운동이 필요하기 때문이다. 강체운동의 완벽한 이해는 다음 절에서 이루어지지만 이 정도만이라도 일단 언급한다.

다음 질문에 답할 수 있으면 일단은 연역적 쌍곡 기하를 전개하는데, 그리고 다음 두 절을 이해하는 데에 있어서 강체운동에 관한 한은 문제가 없을 것이다.

**연습문제 6.7.2.** 쌍곡 평면에서도 강체운동으로 임의의 한 점을 임의의 한 점으로 옮길 수 있음을 보여라.

**연습문제 6.7.3.** 쌍곡 평면의 모든 곧은선들은 서로 합동임을 보여라.

**연습문제 6.7.4.** 두 선분의 길이가 같으면 두 선분은 서로 합동임을 보여라.

**연습문제 6.7.5.** 두 각의 크기가 같으면 두 각은 서로 합동임을 보여라.

**연습문제 6.7.6.** 임의의 곧은선에 대한 대칭이동의 식을 어떻게 구할 수 있는지 설명하여라.

**연습문제 6.7.7.** (6.12)의 강체운동은 사실 (6.2), (6.9)의 강체운동을 유한 번 합성하여 얻어짐을 설명하여라.<sup>9)</sup>

---

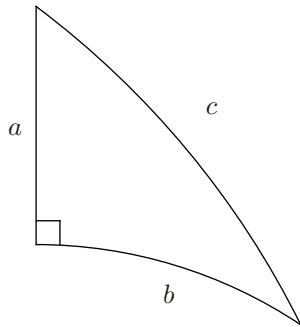
9) 힌트: 입체사영은 구면의 원을 평면의 원이나 직선으로 보내고 또한 각을 보존한다.

## 6.8 쌍곡 평면에서 피타고라스의 정리

**이 절의 학습 목표** 기왕  $\triangle$ 의 내각의 합에 대해서 생각해 보았으므로 쌍곡 평면의 삼각법에 대해 좀 더 알아보자.

**정리 6.8.1.** (쌍곡 평면에서 피타고라스의 정리) 쌍곡 평면의 직각 삼각형에 대하여 빗변의 길이를  $c$ , 나머지 두 변의 길이를  $a$ 와  $b$ 라고 하면

$$\cosh a \cdot \cosh b = \cosh c.$$



증명을 하기 전에 이게 왜 피타고라스의 정리라고 불리는지 들여다 보자.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$  이므로  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ . 따라서,  $x$  가 0에 아주 가까우면  $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$ .

따라서  $a, b, c$ 가 아주 작으면 위의 식은 다음과 같이 변한다.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{c^2}{2} &\approx \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) \\ &= 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{4} \\ &\approx 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

즉,  $c^2 \approx a^2 + b^2$ . 다시 말해서 아주 작은 삼각형에 대해서 쌍곡 평면의 피타고라스의 정리는 유클리드 평면에서 피타고라스의 정리와 같은 형태를 띤다.

여기서 잠깐,  $\sin x, \cos x$ 의 정의를 상기할 필요가 있다. 이 책에서는

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (6.20)$$

즉,  $\sin x$  와  $\cos x$ 의 정의는 산술적으로 주어지며, 유클리드 기하에서

$$\sin x = \frac{x}{r}, \quad \cos x = \frac{y}{r} \quad (6.21)$$

라고 하는 것은 정의가 아닌 『정리』가 된다.

**증명** 먼저 주어진 직각삼각형의 세 꼭지점  $A, B, C$ 가 다음과 같이 표준적으로

위치해 있다고 가정해도 된다. (단  $s_1, s_2 > 0$ )<sup>10)</sup>

$$A = (0, e^{s_1}), \quad B = (\tanh s_2, \operatorname{sech} s_2), \quad C = (0, 1). \quad (6.22)$$

$B$ 는 중심이 원점에 있는 유클리드 단위원에 있다. 그러면<sup>11)</sup>

$$\overline{AC} = s_1, \quad \overline{BC} = s_2.$$

이제  $\overline{AB}$ 를 구하기 위하여 식 (6.18)를 이용하면

$$\cosh \overline{AB} = 1 + \frac{(\tanh s_2 - 0)^2 + (\operatorname{sech} s_2 - e^{s_1})^2}{2e^{s_1} \operatorname{sech} s_2} = \cosh s_1 \cosh s_2$$

이로부터 결과가 따라 나온다. ■

이 절을 마치기 전에 한 마디만 적는다. 원래 피타고라스의 정리는 여러 정사각형의 넓이에 관한 것인데 우연히 그걸 변의 길이에 대한 관계로 해석을 할 수 있다. 지금 위에서 제시한 쌍곡 피타고라스 정리는 변의 길이에 대한 관계다. 그렇다면 정사각형의 넓이에 대한 관계도 있는가 하는 질문을 생각해 볼 수 있다. 그런데, 쌍곡 평면에는 네 각이 모두 직각인 사각형은 없다. 그러므로 넓이의 관계를 나타내는 관점에서의 쌍곡 피타고라스 정리는 과연 무엇인지 궁금하지 않을 수 없다.

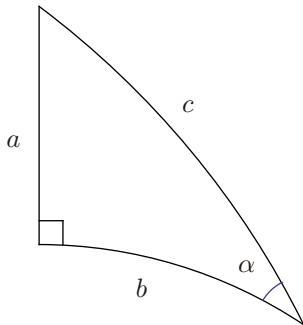
10) 왜 이렇게 가정해도 되는지는 다음 장에서 다룬다. 그건 그렇고 그림을 넣자.

11) 선분  $CA$ 를 나타내는 단위속력곧은선은  $s \mapsto (0, e^s)$ ,  $0 \leq s \leq s_1$ , 선분  $CB$ 를 나타내는 단위속력곧은선은  $s \mapsto (\tanh s, \operatorname{sech} s)$ ,  $0 \leq s \leq s_2$ 이기 때문이다.

## 6.9 쌍곡 평면에서 사인 법칙, 코사인 제2 법칙

정리 6.9.1. 쌍곡 평면의 직각 삼각형에 대하여 빗변의 길이를  $c$ , 나머지 두 변의 길이를  $a$ 와  $b$ 라고 하고 길이가  $a$ 인 변의 대각의 크기를  $\alpha$ 라 하면

$$\sin \alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c} \quad (6.23)$$



참고 6.9.2.  $\sinh x$ 의 테일러 전개식은  $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$  이다. 따라서  $x$ 가 0에 가까울 때  $\sinh x \approx x$ . 그러므로,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 가 0에 가까울 때 식 (6.23)은 유클리드 경우의 식  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$  와 비슷하다.

**증명** 주어진 직각 삼각형이 피타고라스 정리의 증명에서와 같이 위치해 있다고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\sinh^2 c &= \cosh^2 c - 1 = \cosh^2 a \cosh^2 b - 1 \\ &= (1 + \sinh^2 a)(1 + \sinh^2 b) - 1 = \sinh^2 a + \cosh^2 a \sinh^2 b.\end{aligned}$$

이 때 유클리드 피타고라스의 정리로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}r^2 &= x_0^2 + e^{2s_1}, \\ r^2 &= (-x_0 + \tanh s_2)^2 + \operatorname{sech}^2 s_2 = x_0^2 - 2x_0 \tanh s_2 + 1,\end{aligned}\tag{6.24}$$

이로부터 다음이 성립함을 주목한다.

$$\begin{aligned}-x_0 \tanh s_2 &= (r^2 - x_0^2 - 1)/2 = (e^{2s_1} - 1)/2 = e^{s_1} \sinh s_1, \\ \sinh b = \sinh s_1 &= \frac{-x_0}{e^{s_1}} \tanh s_2 = \cot \alpha \tanh s_2 = \cot \alpha \tanh a.\end{aligned}$$

이를 위에서 얻은 식에 대입하면

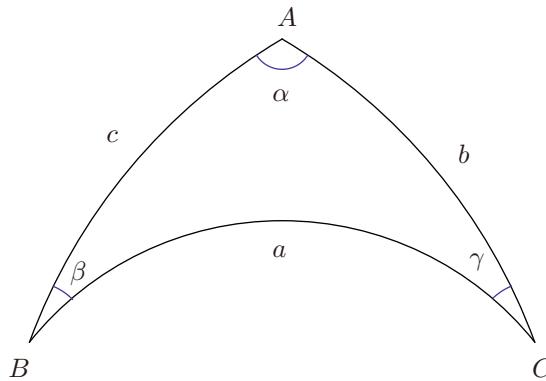
$$\sinh^2 c = \sinh^2 a \csc^2 \alpha.$$

이로부터 결론이 나온다. ■

**연습문제 6.9.3.** 정리 6.9.1에서 다루어진 직각 삼각형에 대하여 다음을 증명하여라.

$$\cos \alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c}.$$

**정리 6.9.4.** 쌍곡 평면의 모든 삼각형에 대하여 다음이 성립한다:



$$\textcircled{1} \quad \cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}, \quad (\text{코사인 제2 법칙})$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}. \quad (\text{사인 법칙})$$

참고 6.9.5.  $a, b, c$ 가 아주 작으면

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{의 우변} &\approx \frac{(1 + \frac{b^2}{2})(1 + \frac{c^2}{2}) - (1 + \frac{a^2}{2})}{bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2 + \frac{b^2 c^2}{2}}{2bc} \\ &\approx \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}. \end{aligned}$$

따라서 ①은 유클리드 평면에서 코사인 제2 법칙을 나타내는 식이다. 또한  $\sinh a \sim a$ ,  $\sinh b \sim b$ ,  $\sinh c \sim c$  이므로 ②는 유클리드 평면의 사인 법칙을 나타낸다. <sup>12)</sup>

**증명** ①의 증명: 먼저 코사인 제2 법칙을 증명하자. 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고 선분 AH의 길이를 d, 각 HAC의 크기를  $\alpha_1$ , 각 HAB의 크기를  $\alpha_2$ 라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\&= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\&= \frac{\tanh d}{\tanh b} \frac{\tanh d}{\tanh c} - \frac{\sinh a_1}{\sinh b} \frac{\sinh a_2}{\sinh c} \\&= \frac{\tanh^2 d}{\frac{\sinh c}{\cosh c} \frac{\sinh b}{\cosh b}} - \frac{\sinh a_1 \sinh a_2}{\sinh c \sinh b} \\&= \frac{\cosh c \cosh b \tanh^2 d - \sinh a_1 \sinh a_2}{\sinh b \sinh c}.\end{aligned}$$

마지막 표현에서

$$\begin{aligned}\text{분자} &= \cosh b \cosh c (1 - \operatorname{sech}^2 d) - \sinh a_1 \sinh a_2 \\&= \cosh b \cosh c - \cosh b \cosh c \operatorname{sech}^2 d - \sinh a_1 \sinh a_2.\end{aligned}$$

---

12) 생각할 점 : 왜  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$ 는  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  등으로 근사하지 않는가?

따라서 다음이 성립함을 보이기만 하면 증명이 완결된다.

$$\cosh b \cosh c \operatorname{sech}^2 d + \sinh a_1 \sinh a_2 = \cosh a. \quad (6.25)$$

이를 보이기 위해 먼저 다음을 살펴 보자.

$$\begin{aligned}\cosh a &= \cosh(a_1 + a_2) \\ &= \cosh a_1 \cosh a_2 + \sinh a_1 \sinh a_2.\end{aligned}$$

피타고拉斯 정리에 의해

$$\cosh a_2 = \frac{\cosh c}{\cosh d}, \quad \cosh a_1 = \frac{\cosh b}{\cosh d}$$

이므로 (6.25)가 성립함을 알 수 있다.

②의 증명 : 자, 이제 사인 법칙을 증명하자. 먼저 다음을 살펴 보자.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin \alpha}{\sinh a}\right)^2 &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sinh^2 a} = \frac{1 - \frac{(\cosh b \cosh c - \cosh a)^2}{\sinh^2 b \sinh^2 c}}{\sinh^2 a} \\ &= \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c - \cosh^2 b \cosh^2 c + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - \cosh^2 a}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}.\end{aligned}$$

여기에서  $\sinh^2 b = \cosh^2 b - 1$ ,  $\sinh^2 c = \cosh^2 c - 1$  을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\left(\frac{\sin \alpha}{\sinh a}\right)^2 = \frac{-\cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 1 + 2 \cosh a \cosh b \cosh c}{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c} \quad (6.26)$$

비슷한 과정으로  $\left(\frac{\sin \beta}{\sinh b}\right)^2$  과  $\left(\frac{\sin \gamma}{\sinh c}\right)^2$  을 구해보면  $a, b, c$ 가 순환된 식이 나오는데, (6.26)의 우변은 변하지 않으므로 결론이 나온다. ■

연습문제 6.9.6. 다음 문제를 풀어 보자.

1. 다음을 증명하시오 :

$$\cosh a = \frac{\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} .$$

이는 유클리드 삼각법에서 어느 식에 해당하는가? <sup>13)</sup> 위에서 증명한 식과의 관계가 보이는가?

2. 식 (6.26)에 해당하는 유클리드 평면 기하의 식은 다음이 될 것이다.

$$\left( \frac{a}{\sin \alpha} \right)^2 = 4R^2 = 4 \frac{a^2 b^2 c^2}{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2b^2 c^2 + 2c^2 a^2} .$$

왜 이 식이 해당식이 될까?<sup>14)</sup>

---

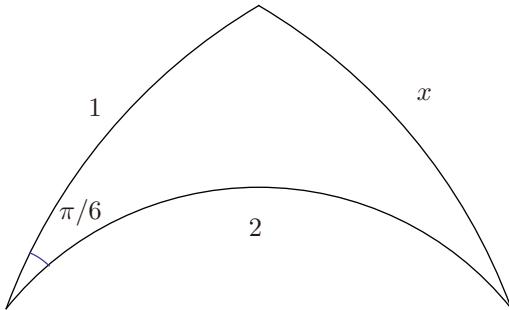
13) [29, 125쪽] 보시오.

14) 식 (6.26)의 항들을 4차 항까지 테일러 전개한 식을 살펴보면 알 수 있다.

## 6.10 연습문제

**연습문제 6.10.1.** 유클리드 평면에서는 정다각형 중에서 정삼각형, 정사각형, 정육각형만이 평면을 덮을 수 있다. 쌍곡 평면에서는 어떤 정다각형이 쌍곡 평면을 덮을 수 있는가?<sup>15)</sup>

**연습문제 6.10.2.** 쌍곡 평면의 다음 쌍곡 삼각형에서  $x$ 는 얼마인가? 그리고, 이 삼각형의 넓이를 구할 수 있겠는가? 구할 수 있다면 넓이를 구해 보고 구할 수 없다면 이유를 밝혀라.



---

15) 이 문제는 7장 끝에 넣자.

**연습문제 6.10.3.** 쌍곡 평면에는 대응되는 각의 크기는 같지만 합동이 아닌 삼각형들이 있을까 없을까? 이유를 밝혀라.

**연습문제 6.10.4.** 쌍곡 평면 속에 한 직선  $l$ 이 있고, 그 위에 있지 않은 한 점  $p$ 가 있을 때,  $p$ 를 지나며  $l$ 에 수직한 직선이 딱 하나 존재함을 보여라.

**연습문제 6.10.5.** 상반평면에서 빗변의 길이가  $c$ 이고 다른 두 변의 길이가  $a, b$ 인 직각 삼각형의 넓이  $A_H$ 는 다음 식을 만족한다:

$$\sin A_H = \frac{\sinh a \sinh b}{1 + \cosh a \cosh b}. \quad (6.27)$$

반면, 유클리드 평면에서 빗변의 길이가  $c$ 이고, 다른 두 변의 길이가  $a, b$ 인 직각 삼각형의 넓이  $A_E$ 는 다음 식을 만족한다:

$$A_E = \frac{ab}{2}. \quad (6.28)$$

① 이때 식 (6.27)과 (6.28)사이의 관계를 설명하여라.

② 그리고, 식 (6.27)을 유도하여라.

**연습문제 6.10.6.** 유클리드 평면에서 메넬라우스 정리는 다음을 말한다: 세 점  $A, B, C$  가 삼각형을 이루고 세 점  $P, Q, R$ 이 각각 세 직선  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  위의 점이라 하자. 이 때 다음 두 명제는 서로 동치이다.

(가)  $P, Q, R$  은 일직선 위에 있다.

$$(나) \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

단, 여기서  $U, V, W$ 가 일직선 상의 점일 때  $\frac{UV}{VW}$ 는  $V$ 가 선분  $UW$  안에 있으면 +부호, 바깥에 있으면 -부호를 가진다고 한다. 이제 다음 문제를 풀어보아라.

- ① 쌍곡 평면의 메넬라우스 정리를 예상하여 보아라. <sup>16)</sup>
- ② 본인의 예상을 증명하여 보아라.

**연습문제 6.10.7.** “쌍곡”의 유래를 조사하여라.

**연습문제 6.10.8.**  $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$  로 주어진 공간에서 가우스 곡률  $K$ 를 계산하여라.

**연습문제 6.10.9.** 유클리드 기하의 공리를 조사하고,  $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$  인 공간에서 성립하지 않는 것은 어떤 것인지 조사하여라.

**연습문제 6.10.10.** 쌍곡 평면의 상반 평면 모델에 두 점  $(a, b), (c, d)$ 가 있다. 이 때 두 점 사이의 쌍곡 거리를  $a, b, c, d$ 의 식으로 표현하여라.

**연습문제 6.10.11.** 쌍곡 평면의 가우스 곡률  $K$ 는 얼마인가?

---

16) 힌트 : 인터넷에서 hyperbolic menelaus theorem을 찾아 볼 것.

## 6.11 맷음말

유클리드 평면처럼 쌍곡 평면에도 직각 삼각형이 있는데, 이 직각 삼각형에 대한 피타고拉斯의 정리는 유클리드 평면의 피타고拉斯 정리와는 다른 모습을 띤다. 이 쯤 되면 ‘우리가 살고 있는 우주에서는 어느 기하가 성립하는 것일까?’라는 질문을 생각하지 않을 수 없다. 이 질문에 대한 대답을 생각하기 전에 분명히 해 두어야 할 점은, 지금 우리가 전개해 나가고 있는 『쌍곡 평면의 기하학』이 과연 맞긴 맞는가 하는 점이다. 이를 분명히 해야만 쌍곡 기하학이 실제 우주 모델에 적용이 될까를 생각해 볼 수 있다.

이 장에서 쌍곡 평면의 삼각법에 대해 약간 알아 보았는데 유클리드 평면의 삼각법에 등장하는 식들이 약간 변형된 모습으로 나타났다.

자, 이제 ‘유클리드 평면에서는 참인데 과연 쌍곡 평면에서도 참일까?’ 하는 질문으로 어떤 게 있을까? 나는 학생들에게, 쌍곡 평면에서도 과연 각의 3등분이 자와 컴퍼스만으로 불가능한지 생각해보라고 권하고 싶다. 일이 년 전<sup>17)</sup>에 고려대학교 수학과 홈페이지에 어떤 사람이 『각의 3등분이 가능함』이라는 글을 올렸던 적이 있다. 그리고 많은 수학과 학생들이 그를 비웃는 듯한 답글을 올려 놓았었다. 하지만, 각의 3등분은 불가능하다고 답글을 올린 사람들은

---

17) 이 부분을 쓸 때가 언제였는지. 아마 2005년 이후, 2010년 이전이라고 생각한다.

정말로 그걸 이해해서 그 소리를 하고 있을까? 참고로 눈금있는 자와 컴퍼스를 사용하면 임의의 각을 삼등분할 수 있다.<sup>18)</sup> 쌍곡 평면, 타원 평면에서도 과연 각의 3등분은 불가능한 것인가? 수학은, 어느 공리계를 선택하느냐에 따라 답이 달라질 수 있기 때문에 대답에 신중을 기해야 한다.

이 장에서 쌍곡 평면의 기하를 간단히 살펴 보았다. 그러나 여전히 더 탐구할 것이 많다. 초등 유클리드 기하에서 다루었던 내용과 비교해 보면 무엇보다도 원에 관한 내용이 아직 없는데 원과 다각형만으로도 엄청난 양의 기하가 이루 어진다는 것을 생각한다면 아직까지 쌍곡원이 다루어지지 않았음은 아직도 쌍곡 기하의 많은 내용이 다루어지지 않았음을 알 수 있다.

또한 지금까지 전혀 다루어지지 않은 내용이 있는데 그건 강체운동에 관한 것이다. 유클리드 평면에서 평행이동, 회전이동, 직선에 대한 대칭이동은 너무나 자연스러워 따로 공부할 필요를 느끼지 않았는데 쌍곡 평면에서는 강체 운동이 아직은 자연스럽지 않다. 그래서 다음 장에서 쌍곡 평면의 강체운동을 집중적으로 다룰 것이다.

---

18) [22, Proposition 30.1]. 문제 39.15 도 참고할 것.

## 제 7 장

# 쌍곡 평면의 강체 운동

쌍곡 평면의 강체운동은 선형 분수 변환이란 것과 밀접한 관련이 있어 먼저 그 정의와 기호 하나를 설명한다.

**정의 7.0.1.** 선형 분수 변환이란 다음 형식의 사상을 뜻한다.

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{단, } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0.$$

선형 분수 변환을 뮤비우스 변환이라고도 한다. 다음 기호는 여러 선형 분수 변환의 합성을 계산할 때 편리하게 사용할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \star z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

다음이 성립함을 증명하는 것은 독자에게 맡긴다.

**보조정리 7.0.2.** (가) 임의의 수  $a \neq 0$ 와 행렬  $M$ 에 대하여  $(aM) \star z = M \star z$ .

(나)  $f_i(z) := M_i \star z$ 라 하면  $f_2 \circ f_1(z) = (M_2 M_1) \star z$ .

(다)  $f(z) := M \star z$ 라 하면  $f^{-1}(z) = M^{-1} \star z$ .

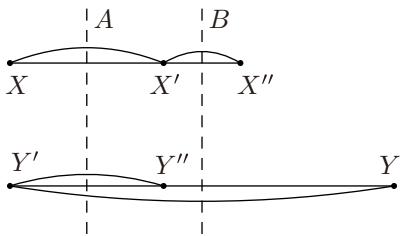
(라) 일반적으로  $(aM) \star z \neq a(M \star z)$ .

## 7.1 쌍곡 평면의 선대칭의 식

이제까지 쌍곡 평면에서 생기는 몇 가지 현상에 대해서 살펴 보았다. 특히 피타고라스의 정리, 사인 정리, 코사인 정리 등 삼각형에 관한 정리들을 살펴보았다. 이 과정에서 삼각형의 표준 위치라는 개념을 사용하였는데(피타고라스의 정리 증명 참조), 어떤 삼각형도 길이, 각도를 변화시키지 않고 표준 위치에 가져다 놓을 수 있다는 것을 제대로 이해하기 위해서는 쌍곡 평면의 강체 운동을 알아야 한다.

**유클리드 평면의 강체 운동** 먼저 유클리드 평면에서 강체 운동에 대해 복습을 해 보자. 길이와 각을 보존하는 운동으로서 평행 이동, 회전 이동, 선대칭 등이 있는데, 이 중에서 선대칭이 제일 근본이라고 할 수 있다. 왜냐하면 평행 이동, 회전 이동, 모두 다음과 같이 두 선대칭을 합성한 것으로 이해할 수 있기 때문이다.

**보조정리 7.1.1.** 유클리드 평면에서 평행한 두 직선에 대한 반사의 합성은 평행 이동이다.

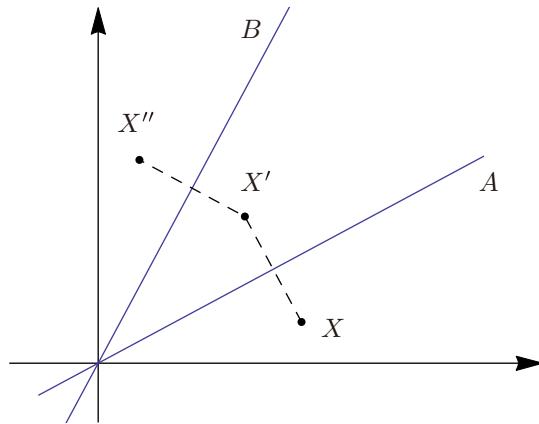


**증명** 직선  $A$ 가  $x = a$ , 직선  $B$ 가  $x = b$ 라고 주어졌다 하면  $X = (x, y)$ 라 하면

$$X' = (2a - x, y), \quad X'' = (2b - (2a - x), y) = (x + 2(b - a), y). \quad (7.1)$$

이는  $x$ 축으로  $2(b - a)$ 만큼 평행 이동하는 것이다. ■

**보조정리 7.1.2.** 유클리드 평면에서 평행하지 않은 두 직선에 대한 선대칭의 합성은 회전 이동이다.



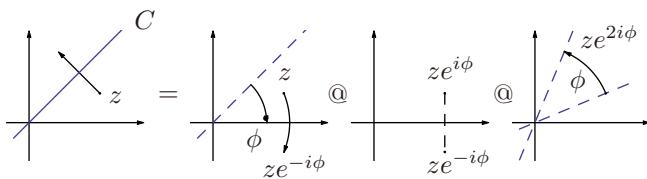
이 보조정리의 증명은 복소수를 이용하여 평면의 점과 여러 가지 계산을 나타내는 게 편리하다. 점  $(x, y)$ 를 복소수  $x + yi$ 와 대응시키고 이를  $z$ 로 나타낸다. 먼저 다음을 보자.

**보조정리 7.1.3.**  $\phi$ 가 상수일 때 직선  $C : y = (\tan \phi) x$ 에 대한 선대칭은

$$z \mapsto \bar{z}e^{2\phi i}$$

로 주어진다.(단,  $z = x + iy$ )

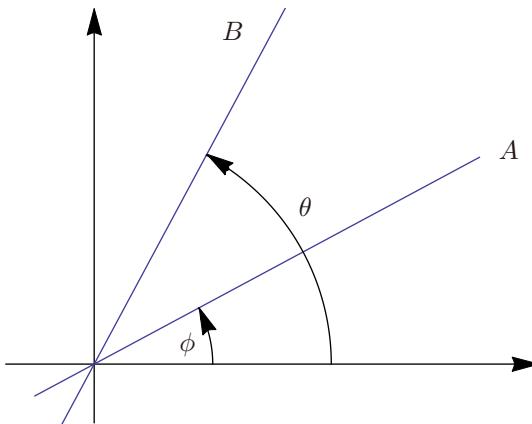
**증명** 아래 그림을 잘 보면 된다. 그런데 세 번째 그림에서  $ze^{i\phi}$ 는  $\bar{z}e^{i\phi}$ 로, 네 번째 그림에서  $ze^{2i\phi}$ 는  $\bar{z}e^{2i\phi}$ 가 되야 한다.



자, 이제 보조정리 7.1.2를 증명할 수 있다.

### 증명

$$z \mapsto \bar{z}e^{2i\phi} \mapsto (ze^{-2i\phi})e^{2i\theta} = ze^{2i(\theta-\phi)}$$





위 두 보조정리 7.1.1, 7.1.2의 역

1. 모든 평행 이동은 서로 다른 평행한 두 직선 각각에 대한 선대칭의 합성,
2. 모든 회전 이동은 한 점에서 만나는 두 직선 각각에 대한 선대칭의 합성

이 참이라는 것도 쉽게 유추할 수 있다. 사실 유클리드 평면의 강체 운동은 모두 선대칭의 유한 번 합성이 되는데 자세한 건 문헌을 참고하라.

**쌍곡 평면의 선대칭** 쌍곡 평면에서도 선대칭을 이해하는 것이 쌍곡 평면의 강체 운동을 이해하는 데 중요할 것이라고 믿고 이제부터 쌍곡 평면에서 선대칭이 어떻게 표현이 되는가를 알아보자. 먼저 쌍곡 평면에서 곧은선은 다음과 같이 생겼음을 떠올려라.<sup>1)</sup>

$$\tilde{\gamma}_\ell : x = x_1 \quad \text{단 } y > 0, \quad (7.2)$$

$$\tilde{\gamma}_c : (x - x_2)^2 + y^2 = r^2 \quad \text{단 } y > 0. \quad (7.3)$$

---

1) line과 circle의 두문자라는 이유로  $\ell$ 과  $c$ 를 선택하였다.

이제  $x_1$ 을 고정하자. 곧은선  $\tilde{\gamma}_\ell : x = x_1$ 에 대한 선대칭  $\rho_\ell : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ 은<sup>2)</sup> 어떻게 생겼을까? 이를 위해  $\tilde{\gamma}_\ell$ 에 수직인 곧은선들을 생각해 보면 사실은  $x_2 = x_1$ 인  $\tilde{\gamma}_c$ 가 그런 곧은선임을 알 수 있다. 6장 2절에서 살펴보았듯이  $\tilde{\gamma}_c$ 에 대한 단위속력의 매개식은

$$\tilde{\gamma}_c(s) := (x_1 + r \tanh s, r \operatorname{sech} s) = x_1 + r \tanh s + ir \operatorname{sech} s$$

이다. 따라서  $\gamma_c(s)$ 와  $\gamma_c(-s)$ 는  $\gamma_c(0)$ 으로부터 같은 거리만큼 떨어져 있다. 그러므로  $\gamma_c(-s) = \rho_\ell(\gamma_c(s))$ 인데 사실  $\gamma_c(-s) = 2x_1 - \overline{\gamma_c(s)}$ 이고 이것이 모든  $r$ 와  $s$ 에 대하여 성립하므로

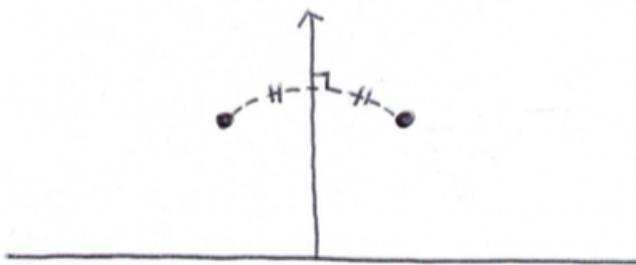
$$\rho_\ell(z) = 2x_1 - \bar{z} = R(x_1) \star \bar{z}, \quad R(x_1) := \begin{bmatrix} -1 & 2x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

임을 알 수 있다. 우연하게도 이것은 유클리드 시각으로 보았을 때도 선대칭이지만 쌍곡 평면에서 이 함수를 얻어낸 방법은 이것과는 상관없다.

이제 (7.3)로 주어진 임의의  $\tilde{\gamma}_c$ 에 대한 선대칭  $\rho_c$ 에 대하여 알아보자. 앞에서 처럼  $\tilde{\gamma}_c$ 에 수직인 곧은선들을 찾아서 해결할 수도 있긴 하지만 수식으로 다루기엔 복잡해 보인다. 그런데  $\tilde{\gamma}_c$ 는  $\tilde{\gamma}_\ell$ 과 합동임을 알고 있으므로 (6장 2절 참조)  $\tilde{\gamma}_c$ 를  $\tilde{\gamma}_\ell$ 로 변환시킨 후  $\tilde{\gamma}_\ell$ 에 대한 선대칭을 적용하고 다시  $\tilde{\gamma}_c$ 로 변환시키는

---

2)  $\rho$ 는 reflection의 두문자  $r$ 에 해당하는 그리스 문자라서 택하였다.



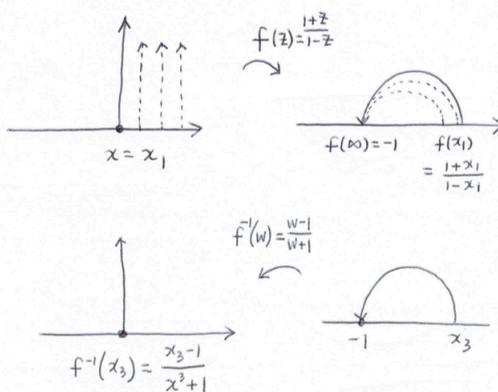
〈그림 7.1〉  $\tilde{\gamma}_\ell$ 에 대한 선대칭

것이 답이 될 수 있다. 이를 위해 6장 2절에서 다룬

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} = M * z, \quad M := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

를 좀더 자세히 살펴보자. 임의의  $\tilde{\gamma}_\ell$ 에 대하여  $f(\tilde{\gamma}_\ell)$ 의 이미지를 조사해 보면  $f(x_1) = \frac{1+x_1}{1-x_1}$ ,  $f(i) = i$ ,  $f(\infty) = -1$ 이므로  $f(\tilde{\gamma}_\ell)$ 는 언제나  $z = -1$ 을 지나는  $\tilde{\gamma}_c$  꼴의 곧은선임을 알 수 있다. 역으로  $z = -1$ 과  $z = x_3$  (단  $x_3 \neq -1$ )을 지나는  $\tilde{\gamma}_c$  꼴의 곧은선의  $f^{-1}$ 에 의한상을 구해보면  $\tilde{\gamma}_\ell : x = \frac{x_3-1}{x_3+1}$  꼴의 곧은선이 됨을 알 수 있다.

임의의  $\tilde{\gamma}_c$ 는 일반적으로  $z = -1$ 을 지나지 않는다. 그래서 이것이 일단  $z = -1$ 을 지나도록 다음과 같이 변환시킨다. (쌍곡) 곧은선  $x = \frac{x_2+r-1}{2}$ 에 대한



〈그림 7.2〉  $\tilde{\gamma}_\ell$  과  $\tilde{\gamma}_c$  사이의 변환

(쌍곡) 선대칭을  $\rho_1$ 이라 하면

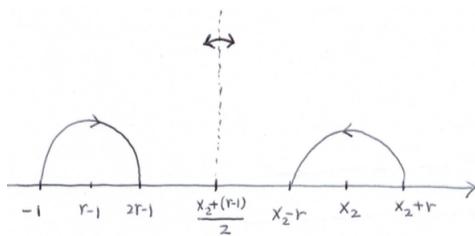
$$\rho_1(z) = 2\frac{x_2+r-1}{2} - \bar{z} = R\left(\frac{x_2+r-1}{2}\right) \star \bar{z}$$

이므로  $\rho_1(x_2 + r) = -1$ 이고 따라서  $\rho_1 \circ \tilde{\gamma}_c$ 는 위에서 다룬 꼴의 곧은선이다. 그래서  $x_3 := \rho_1(x_2 - r) = 2r - 1$ 이라 하고 곧은선  $x = \frac{x_3-1}{x_3+1} = 1 - r^{-1}$ 에 대한 선대칭을  $\rho_2$ 라 하면

$$\rho_2(z) = 2(1 - r^{-1}) - \bar{z} = R(1 - r^{-1}) \star \bar{z}$$

이 고

$$\rho_c(z) := \rho_1^{-1} \circ f \circ \rho_2 \circ f^{-1} \circ \rho_1(z)$$



〈그림 7.3〉  $\rho_1$ :  $\tilde{\gamma}_c$ 를  $\tilde{\gamma}_\ell$ 에 대한 선대칭으로 변환시켜  $z = -1$ 를 지나게 만들기

이 구하는 선대칭이 된다. 이 때

$$R\left(\frac{x_2+r-1}{2}\right)^{-1} M R(1-r^{-1}) M^{-1} R\left(\frac{x_2+r-1}{2}\right) = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} x_2 & r^2 - x_2^2 \\ 1 & -x_2 \end{bmatrix}$$

이 성립하며 이로부터 다음 결과가 따라 나온다.

$$\rho_c(z) = \begin{bmatrix} x_2 & r^2 - x_2^2 \\ 1 & -x_2 \end{bmatrix} \star \bar{z} = \frac{r^2}{\bar{z} - x_2} + x_2. \quad (7.5)$$

드디어 임의의 곧은선에 대한 선대칭의 식을 찾아냈다.

**보조정리 7.1.4.** 쌍곡 평면의 선대칭은 (7.4), (7.5)에 등장하는  $\rho_\ell$ 이나  $\rho_c$ 의 꼴로 쓰여진다.

## 7.2 쌍곡평면의 선대칭은 왜 강체운동인가?

자, 이제 선대칭  $\rho_\ell, \rho_c$  가 정말로 강체운동인지 생각해 보자. 강체운동은 임의의 두 점 사이의 거리를 보존하는 사상이지만 유클리드 강체운동은 넓이, 각도도 보존하므로  $\rho_\ell, \rho_c$  가 정말로 길이, 각도, 넓이를 보존하는지 생각해 보자. 편의상  $\rho_\ell$ 에 대해서만 생각한다.

주어진 질문에 대한 답은 여러 가지 방법이 있겠는데 선대칭을 한 평면 안에서의 변환으로 생각지 않고 한 평면에서 다른 평면으로 가는 사상으로 간주하면 이해하기가 조금 쉬워질 수 있다.<sup>3)</sup> 편의상 다음 기호들을 도입하자.

$$\mathcal{U}_1 := \{z = x + iy | y > 0\}, \quad ds_1^2 := \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad (7.6)$$

$$\mathcal{U}_2 := \{w = \alpha + i\beta | \beta > 0\}. \quad (7.7)$$

계량기가  $ds_1^2$ 으로 주어진  $\mathcal{U}_1$ 을  $(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 으로 표현하자. 이는 쌍곡평면이다. 현재  $\mathcal{U}_2$ 에는 아무런 계량기도 주어져 있지 않다.

이제  $\rho_\ell$ 를 다음과 같은 사상으로 생각하자:

$$\rho_\ell : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_2, \quad z \mapsto w = 2x_1 - \bar{z}.$$

이제  $\mathcal{U}_2$ 에서 곡선  $\gamma$ 의 길이, 영역  $D$ 의 넓이, 두 곡선  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$  사이의 각도

3) 다음 아이디어는 이미 5정 8절에서 다룬 바 있지만 다시 한번 더 설명한다.

등을 어떻게 쟈 수 있는지 생각해 보자. 한 가지 방법은 다음과 같이 정의하는 것이다:

$\mathcal{U}_2$ 에서 곡선  $\gamma$ 의 길이 :=  $(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(\gamma)$ 의 길이,

$\mathcal{U}_2$ 에서 영역  $D$ 의 넓이 :=  $(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(D)$ 의 넓이,

$\mathcal{U}_2$ 에서 두 곡선  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$  사이의 각도 :=

$(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(\gamma_1)$ 과  $\rho_\ell^{-1}(\gamma_2)$  사이의 각도.

이렇게 해서  $\mathcal{U}_2$ 에서의 길이, 넓이, 각도를 쟈 수 있다. 그런데 이렇게 하는 것은  $(\mathcal{U}_2, (\rho_\ell^{-1})^*(ds_1^2))$ 에서 원래 도형의 길이, 넓이, 각도를 재는 것과 같다는 것이 알려져 있다. 여기서  $(\rho_\ell^{-1})^*(ds_1^2)$ 의 의미에 대해서는 5장 8절의 정의 5.8.1을 참조하라.

**연습문제 7.2.1.** 위 사실을 증명하시오.

이제  $(\rho_\ell^{-1})^*(ds_1^2)$ 의 모양을 살펴보자.  $w = \alpha + i\beta$ 라 하면  $(\alpha, \beta) = (2x_1 - x, y)$  가 된다. 그러면  $(x, y) = (2x_1 - \alpha, \beta)$ . 따라서  $dx = d\alpha$ ,  $dy = d\beta$ ,  $y = \beta$ 이므로

$$(\rho_\ell^{-1})^*(ds_1^2) = (f^{-1})^*\left(\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\right) = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{\beta^2}.$$

이 식은 우리가 원래 생각했던 질문에 대한 답을 준다. 편의상  $ds_2^2 := \frac{d\alpha^2 + d\beta^2}{\beta^2}$  라고 하자. 그러면 다음을 얻을 수 있다.

$(\mathcal{U}_2, ds_2^2)$ 에서 곡선  $\gamma$ 의 길이 :=  $(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(\gamma)$ 의 길이,

$(\mathcal{U}_2, ds_2^2)$ 에서 영역  $D$ 의 넓이 :=  $(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(D)$ 의 넓이,

$(\mathcal{U}_2, ds_2^2)$ 에서 두 곡선  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$  사이의 각도 :=

$(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(\gamma_1)$ 과  $\rho_\ell^{-1}(\gamma_2)$  사이의 각도.

그런데 실질적으로  $(\mathcal{U}_2, ds_2^2)$ 는  $(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 과 같으므로 다음이 얻어진다.

$(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서 곡선  $\gamma$ 의 길이 :=  $(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(\gamma)$ 의 길이,

$(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서 영역  $D$ 의 넓이 :=  $(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(D)$ 의 넓이,

$(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서 두 곡선  $\gamma_1$ 과  $\gamma_2$  사이의 각도 :=

$(\mathcal{U}_1, ds_1^2)$ 에서  $\rho_\ell^{-1}(\gamma_1)$ 과  $\rho_\ell^{-1}(\gamma_2)$  사이의 각도.

이는  $\rho_\ell^{-1}$ 이 길이, 넓이, 각도를 보존함을 보여주며 따라서  $\rho_\ell$ 도 길이, 넓이, 각도를 보존한다.

**연습문제 7.2.2.**  $f_3$ 도 길이, 넓이, 각도를 보존함을 보여라.

## 7.3 선대칭들의 합성

자, 이제 쌍곡평면에서 선대칭들을 합성하면 어찌 되는지를 생각해 보자.

**정리 7.3.1.**  $\mathbb{H}^2$ 의 선대칭들을 합성하면 다음과 같은 꼴이 된다.

$$\text{짝수 개 합성시: } f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0, \quad (7.8)$$

$$\text{홀수 개 합성시: } f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc < 0. \quad (7.9)$$

**증명** 식 (7.4), (7.5)에서 볼 수 있는 바와 같이  $\mathbb{H}^2$ 의 선대칭은 다음 꼴로 쓰여 진다.

$$g_i(z) = \frac{\alpha_i \bar{z} + \beta_i}{\gamma_i \bar{z} + \delta_i}, \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R} \quad \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i < 0.$$

이때, 다음 식

$$g_j \circ g_i(z) = \frac{\alpha_j \left( \frac{\alpha_i \bar{z} + \beta_i}{\gamma_i \bar{z} + \delta_i} \right) + \beta_j}{\gamma_j \left( \frac{\alpha_i \bar{z} + \beta_i}{\gamma_i \bar{z} + \delta_i} \right) + \delta_j} = \frac{(\alpha_j \alpha_i + \beta_j \gamma_i)z + (\alpha_j \beta_i + \beta_j \delta_i)}{(\gamma_j \alpha_i + \delta_j \gamma_i)z + (\gamma_j \beta_i + \delta_j \delta_i)}$$

이 얻어지는데

$$a := \alpha_j \alpha_i + \beta_j \gamma_i, \quad b := \alpha_j \beta_i + \beta_j \delta_i, \quad c := \gamma_j \alpha_i + \delta_j \gamma_i, \quad d := \gamma_j \beta_i + \delta_j \delta_i$$

라 하면

$$g_j \circ g_i(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{bmatrix}.$$

한번 더 하면 다음을 얻는다.

$$g_k \circ g_j \circ g_i(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{bmatrix}.$$

이로부터 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} g_{2n} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1(z) &= \frac{az + b}{cz + d}, & ad - bc > 0, \\ g_{2n-1} \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1(z) &= \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, & ad - bc < 0. \end{aligned}$$



이쯤에서 우리는  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  보다는  $g(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  가 더 중요하다는 사실을 알 수 있다. 왜냐하면 임의의  $f$ 는 항상 적당한 2개의  $g$ 의 합성으로 표현될 수 있으나, 어떤  $g$ 는 유한 개의  $f$ 의 합성으로는 나타낼 수가 없기 때문이다. 즉  $g$ 를 알면  $f$ 를 알 수 있지만  $f$ 를 있다고 해서  $g$ 를 있다고는 볼 수 없다. 이는 반사를 알면 사실은 반사, 이동, 회전을 모두 아는 것이지만 회전과 평행 이동을 아무리 합성해도 반사는 나오지 않는다는 사실을 수학적으로 표현한 것이다. 곧은선에 대한 반사보다 훨씬 더 일반적인 식에 대해 증명했음에 주목하라.

**연습문제 7.3.2.** 아무리  $f$ 를 합성해도  $g$ 가 나오지 않음을 증명하여라.

## 7.4 쌍곡 평면의 강체 운동과 선형 분수 변환

복소평면의 강체 운동을 이해하기 위해선 먼저 선대칭을 잘 이해해야 함을 앞에서 설명하였다. 임의의 선대칭은  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , 단  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc < 0$ , 의 꼴로 쓰여지는데, 이런 꼴의 함수에 대하여 공부하기보다는 선형 분수 변환에 대하여 공부하자. 그 이유는 첫째, 변수가  $\bar{z}$ 인 것 보다는  $z$ 인 것이 쓰기가 편하기 때문이고 둘째, 복소 함수론에서  $\bar{z}$ 가 들어간 함수보다는  $z$ 만 들어간 함수, 특히 해석적 함수(analytic function),를 다루는 것이 보통이며,셋째,  $h(z) := -\bar{z}$ ,  $f(z) := -\frac{az+b}{cz+d}$ 라고 하면

$$g(z) = h \circ f(z), \quad f(z) = h \circ g(z)$$

여서 선형 분수 변환을 잘 이해하면 선대칭의 모든 유한 번 합성을 잘 이해할 수 있기 때문이다.

**정리 7.4.1.** 선형 분수 변환의 성질.

$$f \text{의 정의역} = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{d}{c}\} & \text{if } c \neq 0, \\ \mathbb{C} & \text{if } c = 0. \end{cases}$$

$$f \text{의 치역} = \begin{cases} \{w \in \mathbb{C} : w \neq \frac{a}{c}\} & \text{if } c \neq 0, \\ \mathbb{C} & \text{if } c = 0. \end{cases}$$

자, 이제  $f$ 는 일대일 대응인가? 먼저  $f$ 가 전사 함수인지 알아보자. 즉, 임의의 복소수  $w \in \mathbb{C}$ 에 대해  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  인  $z$ 가 있나? 만약에 있다고 가정하면,

$$wcz + wd = az + b,$$

$$(wc - a)z = b - wd.$$

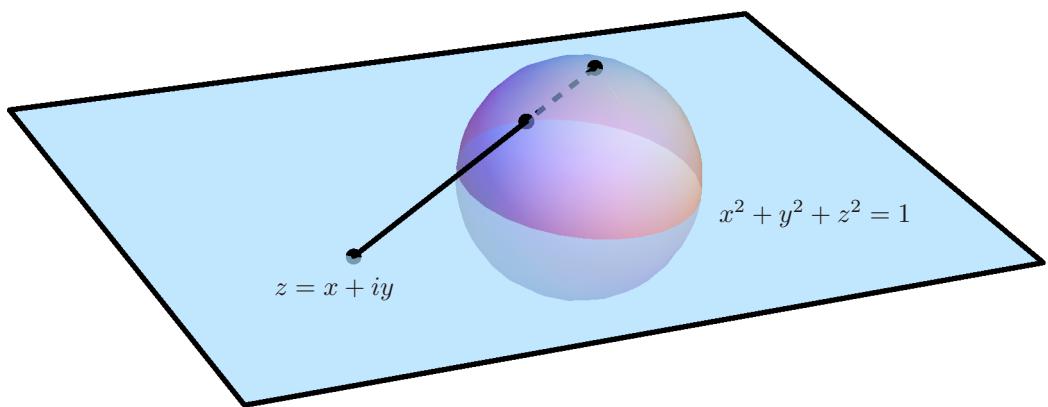
따라서  $z = \frac{dw - b}{-cw + a}$ . 따라서  $c$ 가 0이 아니고  $w$ 가  $\frac{a}{c}$ 가 아니면,  $z = \frac{dw - b}{-cw + a}$ 인  $z$ 가 반드시 있고 또 딱 하나 있다.

$c$ 가 0이 아니라는 조건,  $w$ 가  $\frac{a}{c}$ 가 아니라는 조건은 거추장스럽다. 저런 조건이 왜 생기는 것일까? 이를 극복하는 한 가지 방법으로서 수학자들은 복소 평면  $\mathbb{C}$ 에다가 무한점 ( $\infty$ )을 첨가한  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 을 선형 분수 변환의 정의역과 치역으로 본다. 그러면  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 는  $\widehat{\mathbb{C}}$ 의 모든 점에서 정의가 되며<sup>4)</sup>, 또한  $\widehat{\mathbb{C}}$ 에서  $\widehat{\mathbb{C}}$ 로 가는 일대일 대응이 된다.<sup>5)</sup>

$\widehat{\mathbb{C}}$ 을 리만 구라고 한다.  $\widehat{\mathbb{C}}$ 은 구와 일대일 대응되는데 그 방법은 여러 가지가 있지만 가장 보편적인 방법은 다음의 입체 사영이다.

4)  $f(-\frac{d}{c}) = \infty, f(\infty) = \frac{a}{c}$

5)  $\widehat{\mathbb{C}}$ 을 영어로는 "시 햇"이라고 읽는다.



**정리 7.4.2.** 선형 분수 변환  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 는  $\mathbb{C}$ 의 직선이나 원을  $\mathbb{C}$ 의 직선이나 원으로 보낸다.

이 사실의 증명은 웬만한 복소 해석학 교재에는 다 나와 있는데 한번 살펴보기로 하자. 먼저 다음 보조정리로부터 출발하자.

**보조정리 7.4.3.**  $f(z) = \frac{1}{z}$  일 때, {직선, 원}  $\rightarrow$  {직선, 원}.

**증명**  $z$ 를  $x+iy$ 라 하면 임의의 직선은  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ , 임의의 원은  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \gamma^2$  꼴로 쓰여지는데 이들을 종합하면  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$  꼴이 된다. 즉, 직선이나 원은 반드시  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$  꼴의

식으로 표현되며, 거꾸로 이런 꼴의 식은 직선이나 원을 나타낸다. 이제  $\frac{1}{z}$  을  $w$  라 하고  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  라 하면  $x = \frac{u}{u^2+v^2}$ ,  $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$  임을 쉽게 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned} A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 &\stackrel{f}{\implies} \\ A\left(\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2\right) + B\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right) + C\left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right) + D = 0 \end{aligned}$$

이를 정리하면,

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$$

이 식은 직선 아니면 원을 나타낸다. ■

**증명** (정리 7.4.2의 증명) 편의상  $c \neq 0$  이라 하자.

$$\begin{aligned} g_1(z) &:= z + \frac{d}{c}, & g_2(z) &:= -\frac{1}{z}, \\ g_3(z) &:= \frac{ad - bc}{c^2}z, & g_4(z) &:= z + \frac{a}{c} \end{aligned} \tag{7.10}$$

라고 하고

$$\begin{aligned} M_1 &:= \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & M_2 &:= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ M_3 &:= \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}, & M_4 &:= \begin{bmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.11}$$

라 하면  $M_4M_3M_2M_1 = c\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 여서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * z = M_4M_3M_2M_1 * z \\ &= g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1(z). \end{aligned} \quad (7.12)$$

이 때 각각의  $g_j, j = 1, 2, 3, 4$ , 가 직선이나 원을 직선이나 원으로 보내는 것은 자명하므로 이들의 합성인  $f$  또한 직선이나 원을 직선이나 원으로 보냄을 알 수 있다.

$c = 0$ 인 경우에 대하여 생각하는 것은 독자의 몫으로 남긴다. ■

**선형 분수 변환과 쌍곡 평면의 강체 운동** 자, 이제 어떤 선형 분수 변환이 쌍곡 평면의 강체 운동이 되는지 생각해 보자. 무엇보다도 모든 선형 분수 변환이 상반 평면을 상반 평면으로 보내는 것은 아니다. 예를 들어  $f(z) = -z$ 는 상반 평면을 하반 평면으로 보낸다. 그런데 조금만 생각해 보면 선형 분수 변환  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 가 상반 평면을 상반 평면으로 보내기 위해서는  $a, b, c, d$ 가 실수고  $ad - bc > 0$ 이여야 함은 쉽게 따질 수 있다. 이제 그 역을 생각하자.

**정리 7.4.4.** 일반적인 선형 분수 변환  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 가 상반 평면에서 상반 평면으로 가는 일대일대응이 되기 위한 필요충분조건은

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0. \quad (7.13)$$

**증명** 충분조건만 증명하고 필요조건은 독자에게 남긴다. 선형 분수 변환의 일반적인 성질에 의하여  $f$ 에 의한 상반 평면의 이미지는 상반 평면 아니면 하반 평면이다. 이 때,  $f(i)$ 를 살펴보면  $f(i) = \frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+i}{c^2+d^2}$  인데,  $f(i)$ 의 허수부가 0보다 크므로  $f(i)$ 는 상반 평면에 속한다. 따라서 결론이 성립한다. ■

앞으로 특별한 언급이 없는 한 선형 분수 변환  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 에 대하여 (1)  $a, b, c, d$ 가 실수이고 (2)  $ad - bc > 0$ 임을 가정하고자 한다. 그런데 사실  $ad - bc = 1$ 이라 가정해도 된다.

**정의 7.4.5.**  $2 \times 2$  행렬 중 모든 원소가 실수며 행렬식이 1인 모든 행렬들의 집합을  $SL(2, R)$ 이라 한다. 여기서  $SL$ 은 Special Linear Group에서 나왔다.

**보조정리 7.4.6.** 임의의  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, R)$ 에 대하여  $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ 는 짹수 개의 선대칭의 합성으로 쓰여진다.

**증명** (7.10), (7.12)을 떠 올리라. 이 때  $g_1, g_i, g_3, g_4$ 가 짹수 개의 선대칭의 합성으로 쓸 수 있음은 당연하다. 따라서 결론이 성립한다. ■

자, 이제  $SL(2, R)$ 의 원소가 가지는 성질 중 우리 관점에서 가장 중요한 면을 살펴 보자.

**정리 7.4.7.** 임의의  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, R)$ 에 대하여  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ 는 쌍곡 계량 기를 보존한다.

**증명** 두 복소 변수  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ 에 대하여  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  라 하자.

이러면  $z = \frac{dw + (-b)}{(-c)w + a}$ . 따라서,  $\frac{dz}{dw} = \frac{ad - bc}{(-cw + a)^2}$ . 그러므로

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dz \cdot d\bar{z}}{\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2} = \frac{\frac{ad - bc}{(-cw + a)^2} dw \cdot \frac{ad - bc}{(-c\bar{w} + a)^2} d\bar{w}}{\left(\frac{dw - b}{-cw + a} - \frac{d\bar{w} - b}{-c\bar{w} + a}\right)^2}.$$

이를 정리하면

$$ds^2 = \frac{dw \cdot d\bar{w}}{\left(\frac{w - \bar{w}}{2i}\right)^2} = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

$ds^2$ 을  $w$ 로 표현해도  $z$ 로 표현한 것과 같으므로 계량기는 보존된다. ■

계량기를 보존하면 길이, 넓이, 각도가 보존된다. 따라서  $f$ 가 다음과 같이 주어지면,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ 또는 } -\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, R) \quad (7.14)$$

$f$ 는  $\mathbb{H}^2(-1)$ 에서  $\mathbb{H}^2(-1)$ 로 가는 강체운동이라는 결론을 내릴 수 있다. 여기서  $h(z) := -\bar{z}$  또한 강체운동임을 이용하였다.

**예제 7.4.8.**  $f(z) := \frac{z-1}{z+1}$  은 회전인가? 평행 이동인가? 선대칭인가?

이 문제에 대해 답을 하려면 먼저 회전, 평행 이동, 반사가 무엇인지 알아야 한다. 아니, 회전, 평행 이동, 반사가 무엇인지 정해야 한다. 유클리드 평면기하의 경우를 바탕으로 하여 우리는  $f$ 의 고정점이 1개 있으면 회전, 없으면 평행 이동, 무한히 많으면 반사라고 정의하고 싶은데, 그러려면 먼저  $f$ 의 고정점의 개수가 0개, 1개, 무한개 뿐임을 확인해야 하는데 과연 그려함을 알 수 있다.

**정의 7.4.9.** 임의의  $f \in SL(2, R)$ 에 대하여  $f$ 의 고정점이 1개 있으면 회전, 없으면 평행 이동, 무한히 많으면 반사라고 정의한다.

**풀이** [예제의 풀이]  $f$ 의 고정점을 살펴보자.  $f(z) = z$ 라 하면,

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= z \\ z - 1 &= z^2 + z \\ z^2 &= -1 \\ z = i &\quad \text{또는} \quad z = -i \end{aligned}$$

이때,  $-i$ 는 상반 평면에 있지 않으므로  $z = i$ 다. 따라서,  $f$ 는  $i$ 를 중심으로 하는 회전이다. ■

이제 모든 강체운동은 반드시 (7.14)의 꼴로 쓰여진다는 것을 알아보자.

**정리 7.4.10.** ([29, 정리 5.6]) 쌍곡 평면의 모든 강체 운동은 반드시 (7.14)의 꼴로 쓰여진다.

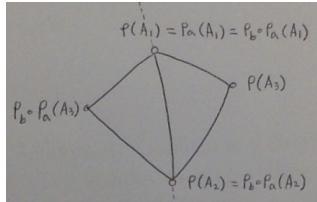
이 정리의 증명은 다음 정리를 이용하여 쉽게 할 수 있다.

**정리 7.4.11.** ([29, 정리 2.3])  $A_1, A_2, A_3$ 가 한 직선에 있지 않은 세 점이라 하자. 두 강체운동  $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ 가  $\rho_1(A_i) = \rho_2(A_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ 을 만족시키면 임의의 점  $A \in \mathbb{H}^2$ 에 대해서  $\rho_1(A) = \rho_2(A)$ 다.

위 정리의 뜻은, 두 삼각형이 합동일 때 한 삼각형을 다른 삼각형으로 옮기는 강체운동은 단 하나 뿐이라는 것이다. 이는 유클리드 평면과 쌍곡 평면 모두에서 참이다. 자세한 증명은 [29]을 참조하라.

**증명** (정리 7.4.10의 증명) 이제 임의의 강체운동  $\rho : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  와 한 직선에 있지 않은 세 점  $A_1, A_2, A_3$ 을 선택하라. 그러면  $\rho(A_1), \rho(A_2), \rho(A_3)$  또한 한 직선에 있지 않다.  $\rho$ 가 강체운동이므로 삼각형  $A_1A_2A_3$ 과 삼각형  $\rho(A_1)\rho(A_2)\rho(A_3)$ 은 합동이다. 이제 조금만 생각해 보면 많아야 세 번의 선대칭으로 삼각형  $A_1A_2A_3$ 를 삼각형  $\rho(A_1)\rho(A_2)\rho(A_3)$ 로 옮길 수 있다는 것을 알 수 있다. 예를 들어 다음과 같이 하면 된다. 선분  $A_1\rho(A_1)$ 의 수직이등분선에 대한 선대칭을

$\rho_a$  라 하고,  $\rho(A_2)$  와  $\rho_a(A_2)$  의 수직이등분선<sup>6)</sup>에 대한 선대칭을  $\rho_b$  라 하며, 직선  $\rho(A_1)\rho(A_2)$  에 대한 선대칭을  $\rho_c$  라 하면  $\rho_c \circ \rho_b \circ \rho_a$  는 삼각형  $A_1A_2A_3$  를 삼각형  $\rho(A_1)\rho(A_2)\rho(A_3)$  로 옮긴다. 위 정리에 의하여  $\rho_c \circ \rho_b \circ \rho_a = \rho$  다. 즉  $\rho$  는 세 선대칭의 합성이다. ■



〈그림 7.4〉  $\rho_a$  와  $\rho_b$  를 적용한 후,  $\rho_c$  를 적용하기 전, 점들 사이의 관계

**연습문제 7.4.12.** (7.8)과 (7.9)의 식으로 주어진 변환의 어떤 반사의 합성이 되는가?

**연습문제 7.4.13.** 쌍곡 평면에서 『회전』, 『평행 이동』 모두를 정의해 보고 구체적인 식을 하나씩 구하여 보아라.

---

6) 이는  $\rho(A_1)$  을 지난다.

**연습문제 7.4.14.** 주어진  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, R)$ 에 대하여  $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \in SL(2, R)$ 는 같은 강체사상이 된다. 같은 강체사상이 되는 다른 행렬이 또 있는가?

쌍곡 평면의 향 보존 강체사상들의 집합은  $PSL(2, R)$ 과 일대일대응된다.

## 7.5 쌍곡 평면의 원

자, 이제 쌍곡 평면에서 점  $i$ 를 중심으로 하는 원은 어떻게 생겼는지 쌍곡 회전을 이용하여 알아보자. 이를 위해서  $i$ 를 중심으로 하는 회전 이동이 어떻게 표현되는지 알아보자.<sup>7)</sup>

**보조정리 7.5.1.**  $M \in SL(2, R)$ 에 대하여

$$M = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

인 것은  $f(z) := M \star z$  가  $i$ 를 중심으로 하는 회전이기 위한 필요충분조건이다.

**증명** ( $\Rightarrow$ )  $f$ 는  $i$ 를 고정시켜야 하므로  $i = f(i) = \frac{ai+b}{ci+d}$ . 따라서  $-c+di = ai+b$ ,  $a, b, c, d$ 는 실수이므로  $d = a$ ,  $b = -c$ . 그러면

$$f(z) = \frac{az+b}{-bz+a} = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}z + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}z + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

이제 다음을 만족하는  $\theta$ 가 존재한다.

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

---

7) 여기서는 원을 한 점으로부터 거리가 같은 점들의 집합으로 보는 것이 아니라 한 점을 중심으로 다른 한 점을 회전시켜 얻은 도형의 자취로 보고 있다.

그러므로

$$f(z) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cdot z + \sin \frac{\theta}{2}}{-\sin \frac{\theta}{2} \cdot z + \cos \frac{\theta}{2}}.$$

( $\Leftarrow$ ) 어떤  $\theta$ 에 대해서도

$$f(i) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cdot i + \sin \frac{\theta}{2}}{-\sin \frac{\theta}{2} \cdot i + \cos \frac{\theta}{2}} = i.$$

그러므로  $\Leftarrow$ 는 참이다. ■

이때,

$$f_\theta(z) := \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cdot z + \sin \frac{\theta}{2}}{-\sin \frac{\theta}{2} \cdot z + \cos \frac{\theta}{2}}$$

라 하면, 어떠한  $\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ 에 대해서도  $f_\theta(z) = f_{\theta+2\pi}(z)$ .

자, 이제 양의  $y$ -축의 임의의 점  $\alpha i$  (단  $\alpha$ 는 임의의 양의 실수)의  $f_\theta$ 에 대한 이미지에 대해 생각해 보자.

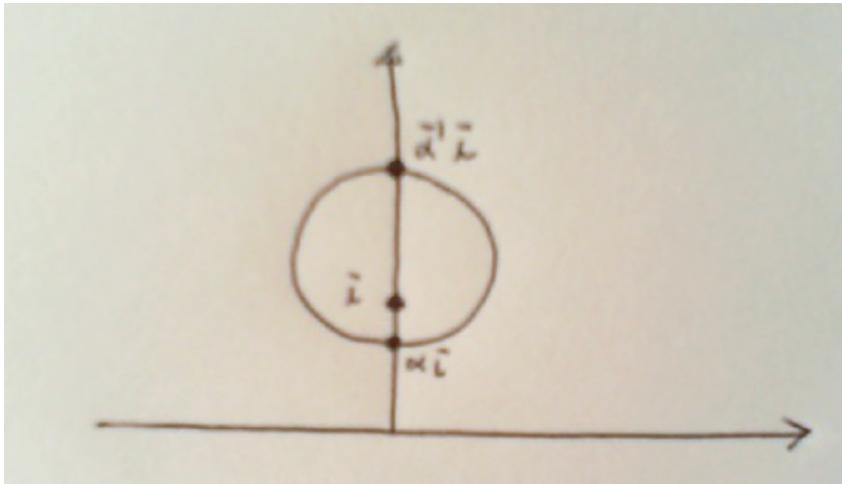
$$f_\theta(\alpha i) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \alpha i + \sin \frac{\theta}{2}}{-\sin \frac{\theta}{2} \alpha i + \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}(1 - \alpha^2) + i\alpha}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \alpha^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

( $\theta$ 를 0에서  $2\pi$ 까지 변화시키며) 컴퓨터로 이 곡선의 그래프를 그려보면 이는 유클리드의 시각에서 보았을 때 원이 된다. 이것이 실제로 원임을 다음과 같이 살펴 보자.

이것이  $y$ -축과 만나는 점은 순허수며 이미  $\alpha i$ 가 그러한 점이다. 다른 점은  $\theta$ 가 다음 식을 만족할 때,

$$\cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

즉,  $\theta = n\pi$  일 때이다. (단,  $n \in \mathbb{Z}$ .) 따라서  $y$ -축과 만나는 다른 한 점은  $f_\pi(\alpha i) = \alpha^{-1}i$ . 그러면 유클리드적 중심은  $\frac{\alpha i + \alpha^{-1}i}{2} = \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}i$ , 유클리드적 반지름은  $\frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2}$  가 될 것이다.



o] 제

$$u_\theta(\alpha i) := \operatorname{Re} f_\theta(\alpha i), \quad v_\theta(\alpha i) := \operatorname{Im} f_\theta(\alpha i)$$

라 하자. 그러면

$$u_\theta(\alpha i) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} (1 - \alpha^2)}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \alpha^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad v_\theta(\alpha i) = \frac{\alpha}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \alpha^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

이고 다음이 계산된다.

$$(u_\theta(\alpha i))^2 + \left( v_\theta(\alpha i) - \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} \right)^2 = \left( \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} \right)^2$$

그러므로, 점  $\alpha i$ 를 점  $i$ 에 대하여 (쌍곡평면의 회전으로) 돌리면 유클리드 기하 입장에서 보더라도 원이 된다.<sup>8)</sup>

여기서 잠깐, 왜  $f(z)$ 를  $\frac{\cos \theta \cdot z + \sin \theta}{-\sin \theta \cdot z + \cos \theta}$  라 하지 않고  $f(z) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cdot z + \sin \frac{\theta}{2}}{-\sin \frac{\theta}{2} \cdot z + \cos \frac{\theta}{2}}$  라 했는지 알아보자. 곡선  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,  $\gamma(0) = i$ 에 대하여 벡터  $(f \circ \gamma)'(0)$ 은 벡터  $\gamma'(0)$ 의 상이다. 이 때<sup>9)</sup>

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = f'(i)\dot{\gamma}(0) = e^{i\theta}\dot{\gamma}(0).$$

즉  $(f \circ \gamma)'(0)$ 은  $\dot{\gamma}(0)$ 을  $i$ 를 중심으로 (유클리드 적으로)  $\theta$  만큼 돌리고 늘린 것이다. 이것이  $\theta$ 가 아닌  $\frac{\theta}{2}$ 를 쓴 이유다.

자, 이제 쌍곡평면의 원에 대한 표준 매개식을 알아보자. 즉 유클리드 평면에서 원의 매개식이라 하면  $\gamma(t) = (r \cos \theta - a, r \sin \theta - b)$  인데 이에 상응하는

8) 예 정확히 말하자면 지금까지 보인 것은  $\theta \mapsto f_\theta(\alpha i)$ 의 이미지는 원의 일부가 된다는 것이지 원 전체가 된다는 것은 아니다. 정말로 원처럼 생겼다는 것을 보이기 위해선 좀더 따져야 한다.

9) 뭔가 이상하다. 무얼 증명한 거지?

쌍곡원의 매개식이 무엇이냐 하는 것이다. 6장 2절의 내용에 의하면  $i$ 와  $e^s i$  (단  $s \in \mathbb{R}$ ) 사이의 거리는  $|s|$ 다. 그러므로  $i$ 를 중심으로  $e^s i$ 를 회전시키는 다음 방정식

$$\gamma(\theta) := f_\theta(e^s i) = i \frac{1 + e^{i\theta} \tanh \frac{s}{2}}{1 - e^{i\theta} \tanh \frac{s}{2}} = \begin{bmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \star e^{i\theta} \tanh \frac{s}{2}. \quad (7.15)$$

은 중심이  $i$ 고 반지름이  $|s|$ 인 원의 방정식이다.

**연습문제 7.5.2.** 이 곡선의 속력은,  $\theta$ 에 따라 변하지 않고, 일정함을 보여라.

여기서 미래를 위하여 한 마디만 적자면  $g(z) := \frac{z-i}{z+i} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \star z$ 라 할 때 (식 (7.26) 참조)

$$\begin{aligned} g \circ \gamma(\theta) &= \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \star e^{i\theta} \tanh \frac{s}{2} = e^{i\theta} \tanh \frac{s}{2} \\ &= (\tanh \frac{s}{2} \cos \theta, \tanh \frac{s}{2} \sin \theta). \end{aligned} \quad (7.16)$$

라는 것이다.  $g$ 는 상반평면을 원반으로 바꾸어 주며, 위 계산의 뜻은, 상반평면에서 식 (7.15)로 주어진 원은 원반에서는 식 (7.16)으로 주어진 원이 된다는 것인데 이는 쌍곡평면의 원반모델에서 중심이 원점이고 반지름이  $|s|$ 인 원이다.

**연습문제 7.5.3.** 다음 문제를 풀어 보자.

1.  $\mathbb{H}^2(-1)$ 의 모든 향보존 강체 운동은 반드시 식 (7.13)의  $f$ 와 같이 쓰여짐을 보여라. <sup>10)</sup>
2. 유클리드 평면  $\mathbb{E}^2$ 의 모든 강체 운동은 어찌 쓰여지는가? (힌트 [26])
3. 유클리드 공간  $\mathbb{E}^3$ 의 강체 운동은 어떻게 쓰여지는가? (힌트 [26])
4. 유클리드 공간에서 원점을 중심으로 하는 원을 반지름을 점점 크게 만들면 유클리드 평면을 다 채우듯이 쌍곡 공간에서도 동심원들은 쌍곡 평면을 다 채울 수 있다. 자, 이 사실을 한 점을 중심으로 하는 동심원들을 작도함으로써 확인해 보아라.

---

10) 정답은 [15, Theorem 3.12]에 나와 있다.

## 7.6 임의의 직각 삼각형을 표준 위치로 옮기기

자, 이제 임의의 직각 삼각형을 표준 위치로 옮길 준비가 완료되었다. 각  $C$ 가 직각인 삼각형  $ABC$ 를 생각하자. 그러면 점  $C$ 의 좌표가 무엇이든지 간에  $C$ 를  $(0, 1)$ 로 옮기는 강체 운동은 반드시 있다.<sup>11)</sup> 따라서 점  $C$ 는  $(0, 1)$ 이라고 할 수 있다. 그리고 나서 점  $i = (0, 1)$ 을 중심으로 하는 회전을 적용하면 점  $A$ 를  $(0, k) = ki$  (단  $k > 1$ )에 가져다 놓을 수 있다. 즉  $A = (0, k)$ ,  $C = (0, 1)$ 이라고 할 수 있다. 이제 직선  $BC$ 는  $y$ -축에 수직이므로  $s^2 + t^2 = 1$ 을 만족하는 점  $(s, t)$ 로 이루어져 있다. 따라서 점  $B$ 의 좌표는  $(s, t)$ ,  $s^2 + t^2 = 1$ 이라고 할 수 있다. 이때  $s > 0$ 이면 상향 끝인데  $s < 0$ 면  $y$ -축에 대한 반사를 적용하여 원하는 결론에 도달할 수 있다.

---

11) 이를 증명하여라.

## 7.7 쌍곡 평면의 극한원과 초원

이제 쌍곡 평면에서 곧은선, 삼각형, 원이 어떻게 생겼는지를 알았다. 그러면 이제 삼각형과 원이 얕힌 명제에 대한 진위 여부를 생각할 수 있다.

**연습문제 7.7.1.** 임의의 삼각형에 대하여, 외접원이 유일하게 존재하는가? 내접원이 유일하게 존재하는가? 방접원이 존재하는가?

그런데 아주 당연할 것 같은 외접원의 존재성에 대해서조차도 유클리드 기하와는 다른 점이 있음을 관찰할 수 있다. 예를 들어, 세 점  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(2, 1)$ 을 생각해 보자. 이 세 점으로 이루어진 쌍곡 삼각형의 쌍곡 외접원이 있다면 그건 정의상 이 세 점을 모두 지나는 쌍곡 원일텐데 그런 쌍곡 원이 있다면 그건 유클리드적으로도 원이어야 한다. 그러나 이 세 점은  $y = 1$ 을 만족시켜 한 유클리드적 직선에 있으며 어떠한 원에 있지 않다. 결론적으로 이 세 점을 모두 지나는 쌍곡 곧은선도 쌍곡 원도 없다.

**보조정리 7.7.2.** 쌍곡 평면에 임의의 서로 다른 세 점이 주어져 있을 때 그 세 점을 지나는 쌍곡 직선이나 쌍곡 원이 반드시 존재하는 것은 아니다.

이는 유클리드 평면 기하의 개념들을 쌍곡 평면의 기하로 옮겨오는 데에 있어서 심각한 문제를 야기한다. 예를 들어, 유클리드 평면에서는 곡선의

곡률을 정의할 때 접촉원을 이용하였는데 이는 세 점을 지나는 원이 유일하게 존재한다는 사실에 바탕을 두고 있었다. 그런데 쌍곡평면에서는 이런 사실이 참이 아니므로 곡률을 생각하는 기본 개념 자체에 문제가 발생해 버렸다.

그렇다면 쌍곡 평면에서 임의의 세 점을 지나는 근본적인 곡선은 무엇일까? 그런 것이 존재하기는 하는 것일까?

이 질문에 대하여 다음과 같이 생각해 보자. 일단은 상반 평면에 서로 다른 임의의 세 점이 주어졌을 때 그 세 점을 유클리드 평면에 있는 세 점으로 생각하면 세 점을 모두 지나는 유클리드 원이나 유클리드 직선이 반드시 단 하나 있다. 그걸 상반 평면에 국한시킨 곡선을 편의상  $\gamma$ 라 하자. 그러면  $\gamma$ 는 쌍곡 직선이나 쌍곡 원도 되기도 하지만 그렇지 않은 경우도 있으며 바로 이 경우가 우리가 알고 싶은 경우다. 이 모든 경우를 어떻게 분류할 수 있는지 생각해 보자. 편의상  $\gamma$ 가 유클리드 원일 때를 생각하자. 이 때  $\gamma$ 는 다음 세 경우 중 한 가지를 반드시 만족시킨다.<sup>12)</sup>

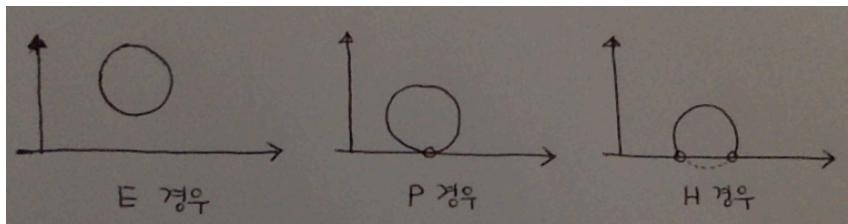
(E)  $\gamma$ 는  $y$ -축과 만나지 않는다.

(P)  $\gamma$ 는  $y$ -축과 한 점에서 만난다.

(H)  $\gamma$ 는  $y$ -축과 두 점에서 만난다.

---

12) Elliptic, Parabolic, Hyperbolic의 두문자를 써서 E, P, H로 나타내었다.



경우 (E)는 이미 앞에서 다룬 경우며  $\gamma$ 는 쌍곡 평면의 원이다.

경우 (P)는 경우 (E)의 극한으로 얻어질 수 있다. 중심이  $i$ 고 반지름의 길이가  $s > 0$ 인 쌍곡원은  $e^{s/2}i$ 와  $e^{-s/2}i$ 를 지난다. 이 원에 등장사상  $f(z) := e^{-s}z = R \star z$  (단  $R := \begin{bmatrix} e^{-s/2} & 0 \\ 0 & e^{s/2} \end{bmatrix}$ )를 적용시키면 중심이  $e^{-s}i$ 고 반지름이  $s$ 인 원이 되는데 이 원은  $i$ 와  $e^{-2s}i$ 를 지나며  $y$ 축에 대칭이다. 이제  $s$ 를  $\infty$ 로 보낸 극한이 경우 (P)가 된다.

그렇다면 경우 (H)는 어떻게 얻어질까? 이를 위해 경우 (E)에서 경우 (P)가 얻어질 때 무엇이 달라지는지를 생각해 보자. 7.5 절에서 살펴본 바와 같이 경우 (E)의 원은 다음의 등장사상과 밀접하게 관련되어 있다.

$$E(\theta) := \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi) = \mathbb{R}/2\pi. \quad (7.17)$$

중심이  $e^{-s}i$ 고  $i$ 를 지난 원은  $\theta \mapsto (RE(\theta)R^{-1}) * i$ 의 이미지가 되는데 이 때 중심  $e^{-s}i$ 는  $RE(\theta)R^{-1}$ 의 고정점이다. 그런데 사실  $RE(\theta)R^{-1}$ 는 고정점을

하나 더 가지고 있다. 그건  $-e^{-s}i$ 다. 이제  $s \rightarrow \infty$  일 때 이 두 고정점은 하나로, 즉 0으로, 합쳐진다. 따라서 경우 (P)의 원은 어떤 점에 고정점이 1개인 등장사상들을 적용시켜 얻어낸 것이 아닌가 하는 생각을 할 수 있다.

이 아이디어를 발전시키기 위해 일반적인  $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, R)$ 의 고정점에 대하여 생각해 보자. 명심해야 할 것은  $M$ 의 정의역과 치역은  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 라는 것이다. 즉  $\infty$ 가 고정점이 되는 경우도 생각해야 하는 것이라는 점이다. 예를 들어  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 에 대하여  $M := \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 고정점은  $\infty$  뿐이다.

**경우 1)** 먼저  $\infty$ 는 고정점이 아닌 경우를 생각하자.  $\infty$ 가 고정점인 경우는 조금 뒤에 다룰 것이다. 한 고정점을  $z$ 라 하면  $\frac{az+b}{cz+d} = z$ 로부터  $\bar{z}$ 도 고정점이 될 수 있음을 알 수 있으며 또한 고정점은 많아야 2개임을 알 수 있다. 따라서  $M$ 의 고정점에 대해서 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

가)  $z_0, \bar{z}_0$  (단  $Imz_0 > 0$ ),

나)  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

다)  $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ .

경우 가)는 경우 (E)에 해당한다. 이제 경우 나)를 생각해 보자.  $M \in SL(2, R)$  이  $z = 0$  하나만을 고정한다고 하자. 그러면 간단한 추론을 통하여<sup>13)</sup>  $M$ 은 다음과 같은 꼴의 행렬임을 알 수 있다.

$$P(s) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (7.18)$$

더군다나 임의의 점을 이 행렬들로 돌리면  $(0, 0)$ 에서  $y$ -축에 접하는 유클리드 원이 나온다는 것을 알 수 있다. 이는 경우 (P)의 곡선들을 준다.

이제 경우 다)를 생각해 보자.  $M \in SL(2, R)$ 이  $(1, 0)$ 과  $(-1, 0)$ 만을 고정한다고 하자. 그러면 간단한 추론을 통하여<sup>14)</sup>  $M$ 은 다음과 같은 꼴의 행렬임을 알 수 있다.

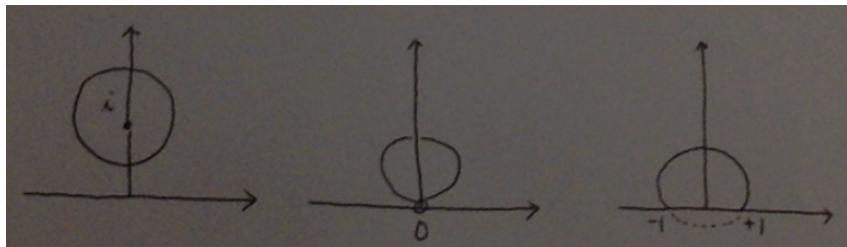
$$H(\phi) := \begin{bmatrix} \cosh \frac{\phi}{2} & \sinh \frac{\phi}{2} \\ \sinh \frac{\phi}{2} & \cosh \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (7.19)$$

더군다나 임의의 점을 이 행렬들로 돌리면  $(1, 0), (-1, 0)$ 을 지나는 유클리드

13) 만약  $d = 0$ 이면  $ad - bc = 1$ 에서  $b \neq 0, c = -1/b \neq 0$ . 따라서  $f(0) = b \neq 0$ . 이는 0이 고정점이라는 데에 모순이다. 따라서  $d \neq 0$ . 이제  $f(0) = b/d = 0$ 으로부터  $b = 0$ . 이제 만약  $c = 0$ 이면  $\infty$ 도 고정점이 되어 버려 0만 고정점이라는 데에 모순이므로  $c \neq 0$ . 이제  $a \neq d$ 면  $z = (a - d)/c \neq 0$ 도 고정점이 되어 버려 모순. 따라서 결론을 얻는다.

14)  $\frac{a+d}{c+d} = 1, \frac{-a+d}{c+d} = -1, ad - bc = 1$  을 이용하면  $M = H(\phi)$  또는  $M = \begin{bmatrix} -\cosh \frac{\phi}{2} & \sinh \frac{\phi}{2} \\ \sinh \frac{\phi}{2} & -\cosh \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$ 임을 얻는다. 그런데 이는  $-H(-\phi)$ 와 같고 이는 연습문제 7.4.14에 의해서  $H(-\phi)$ 와 같다.

원이 나온다는 것을 알 수 있다.



식 (7.17), 식 (7.18), 식 (7.19) 각각에 대하여 그식을 만족시키는 행렬들의 집합에 항등행렬을 첨가한 집합을  $\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{H}$ 라고 하자. 그러면  $\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{H}$ 는  $SL(2, R)$ 의 1-매개수 부분군<sup>15)</sup>이 된다.

**보조정리 7.7.3.** 쌍곡 평면의 임의의 점  $z$ 에 대하여

$$\gamma_E(\theta) := E(\theta) \star z, \quad \gamma_P(s) := P(s) \star z, \quad \gamma_H(\phi) := H(\phi) \star z$$

는 각각 경우 (E), (P), (H)의 곡선이 된다. 더군다나 이것들은 모두 일정한 쌍곡 속력을 가졌다.

**경우 2)** 이제  $\infty$ 가 고정점인 경우를 생각하자. 이 때 두 가지 경우가 생긴다.

---

15) 1-parameter subgroup

라)  $\infty$ 만 고정점이 되는 경우. (다른 고정점은 없다)

마)  $\infty$ 와  $x$ -축의 점  $x_0$ 만이 고정점이 되는 경우

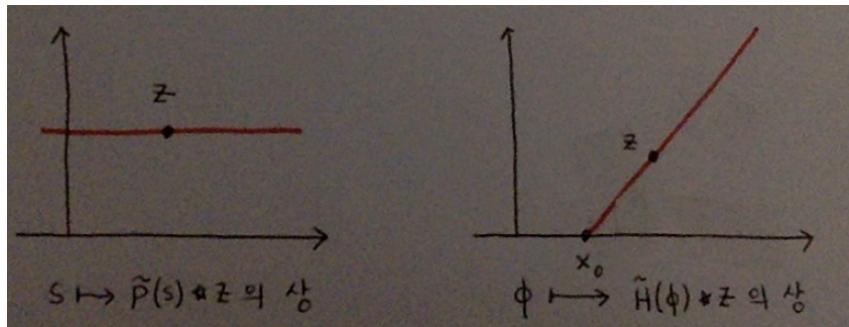
각 경우 간단한 추론에 의하여<sup>16)</sup> 행렬  $M$ 은 다음과 같음이 얻어진다.

$$\tilde{P}(s) := \begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}(\phi) := \begin{bmatrix} e^\phi & -2x_0 \sinh \phi \\ 0 & e^{-\phi} \end{bmatrix} \quad s, \phi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (7.20)$$

**보조정리 7.7.4.** 쌍곡 평면의 임의의 점  $z$ 에 대하여

$$\gamma_{\tilde{P}}(s) := \tilde{P}(s) \star z = z + \frac{s}{2}, \quad \gamma_{\tilde{H}}(\phi) := \tilde{H}(\phi) \star z = e^{2\phi}(z - x_0) + x_0$$

는 유클리드 직선이다.



16) 간단하긴 하지만 막상 해 보려 하면 여기저기서 막힐 수 있다. 꼭 직접 해 보기리를 권한다.

또한 모든 유클리드적 직선이 이렇게 얹어질 수 있다. 더군다나 이것들은 모두 일정한 쌍곡 속력을 가졌다.

나중에 보게 되겠지만  $\gamma_{\tilde{P}}$ 는 적당한  $\gamma_P$ 와 서로 합동이며  $\gamma_{\tilde{H}}$ 는 적당한  $\gamma_H$ 와 서로 합동이다.

**정의 7.7.5.**  $\gamma_E$ 의상을 원(circle),  $\gamma_P$  또는  $\gamma_{\tilde{P}}$ 의상을 극한원(極限圓 horo-cycle)<sup>17)</sup>,  $\gamma_H$  또는  $\gamma_{\tilde{H}}$ 의상을 초원(超圓 hypercycle)<sup>18)</sup>이라 한다.

따라서 유클리드적 수평선은 극한원이고 유클리드적 비수평선은 초원이다. 이 정의에 의하면 곧은선은 초원의 일종이다.

**연습문제 7.7.6.** 곧은선을 나타내는 행렬은 곧은선이 아닌 초원을 나타내는 행렬과 어떻게 다른지 설명하여라.

이제 보조정리 7.7.2에 관련된 다음 정리를 얻을 수 있다.

**보조정리 7.7.7.** 쌍곡평면의 서로 다른 세 점은 한 원 또는 한 극한원 또는 한 초원에 있다. 그런 원, 극한원, 초원은 유일하다.

---

17) horocycle은 border+cycle이라는 어원을 가지고 있다. 아직 우리말 번역이 없어 (중국) 신영문수학사전에서 사용하고 있는 용어를 차용하였다.

18) 이는 내가 고안한 용어인데 아마도 중국수학, 일본수학에서도 이렇게 부르지 않을까 한다.

**연습문제 7.7.8.** 극한원, 초원에는 중심이 없음을 설명하여라.

이제 쌍곡 평면의 강체 운동이 평행 이동과 회전 운동만 있겠는가? 하는 의구심을 가지게 된다. 왜냐하면 한 점이 평행 이동하면 직선을, 회전 이동하면 원을 만들어내게 되는데, 그렇게는 만들어내지 못하는 새로운 곡선들이 있다는 점은 강체 운동이 평행 이동과 회전 이동뿐일 것이라는 생각에 조금 의심이 들게 한다. 이는 강체 운동의 집합과 매우 밀접한 관련이 있는  $SL(2, R)$ 이<sup>19)</sup> 어떻게 생겼는가, 그 집합을 어떻게 나눌 수 있겠는가 하는 문제로 바꾸어 생각 할 수 있다.  $SL(2, R)$ 은 어떻게 생겼는가 하는 주제에 대한 글을 내 홈페이지에 올려두었으니 관심있는 독자는 참고하기 바란다.

---

19) 강체운동과 일대일대응이 되는 집합은  $SL(2, R)$ 이 아닌  $PSL(2, R)$ 이다.

## 7.8 원, 극한원, 초원의 곡률

쌍곡 평면에 있는 임의의 부드러운 곡선의 곡률은 어떻게 정의할 수 있을까?  
이 강의록의 가장 첫 번째 주제가 바로

평면 곡선의 곡률을 어떻게 생각할 수 있는가?

였는데 오랜 공부 끝에 다시 이 질문으로 돌아왔다. 단지 평면이 유클리드 평면에서 쌍곡 평면으로 바뀌었다는 것이 차이다. 이제 드디어 쌍곡 평면에서의 미분기하에 대한 첫 걸음을 내딛게 된 것이다.

쌍곡 평면의 곡선의 곡률을 생각해 봄에 있어서 유클리드 평면에서 어떻게 했었는지 복습하고 그 과정을 쌍곡 평면의 곡선에 그대로 적용하면 어떻게 되는지 생각해보자. 곡선의 주어진 점  $P$  근방에 두 점  $Q, R$ 을 선택한다. 그러면 세 점을 모두 지나는 쌍곡원을 생각할 수 있을 것이다.<sup>20)</sup> 이 쌍곡원의 쌍곡 반지름의 극한의 역수(에 부호를 적당히 붙인 값)를 곡률로 생각해도 될 것인가? 하는 것이 유클리드 평면 곡선에 대한 곡률의 정의를 쌍곡 평면의 곡선로 일반화시키려는 시도가 될 것이다. 그런데 앞절에서 살펴본 바와 같이 한 곧은선에 있지 않은 세 점이라고 해서 반드시 그 세 점을 지나는 쌍곡원이

---

20) 이 원을 실제로 그려보아라.

존재하는 것은 아니다. 따라서 이와 같이 곡선의 곡률을 정의하려는 시도는 적절히 수정되어야 한다.

다행히 쌍곡 평면의 곡선의 곡률을 생각하는 또 다른 방법이 있다. 원래 쌍곡 곧은선을 유도한 방법 자체가 측지 곡률이 0인 곡선을 구한 것이었다. 그 때 사용했던 측지곡률을 그대로 적용하여 쌍곡 평면의 곡선의 곡률이라고 정의하여도 될 것이다.

일반적인 지도에서 곡선  $\gamma(s) = (\gamma^1(s), \gamma^2(s)) = (x(s), y(s))$  가 단위 속력을 가질 때  $\gamma$ 의 측지곡률  $\kappa_g[\gamma](s)$  은 식 (5.29)로 주어지는데 쌍곡평면의 경우 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\kappa_g[\gamma](s) &= \sqrt{|g|} \left| \begin{array}{l} \dot{\gamma}^1 \quad (6.4) \text{의 우변} \\ \dot{\gamma}^2 \quad (6.5) \text{의 우변} \end{array} \right| \\ &= \left( (\ddot{x} - 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{y})(-\dot{x}) + \left(\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2 - \dot{y}^2}{y}\right)\dot{x} \right) y^{-2}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

그래서 일단 원, 극한원, 초원의 단위속력매개식을 구하고 그것의 측지곡률을 구해보자.

**원의 측지곡률** 먼저 원의 측지곡률을 구해보자. 중심이  $i$ 고  $z_0 = ie^{s_0}$ 를 지나는 원의 방정식은 다음과 같다:

$$\begin{aligned}\gamma_E(\theta) &:= \begin{bmatrix} \cos(a\theta) & -\sin(a\theta) \\ \sin(a\theta) & \cos(a\theta) \end{bmatrix} \star ie^{s_0} \\ &= \frac{(e^{2s_0} - 1) \sin(a\theta) \cos(a\theta) + ie^{s_0}}{\cos^2(a\theta) + e^{2s_0} \sin^2(a\theta)}.\end{aligned}\tag{7.22}$$

이것의 속력은  $2a \sinh s_0$ 다.  $a = \frac{1}{2} \operatorname{csch} s_0$ 라고 하여 이 곡선이 단위속력을 가지게 하자. 이제 이 곡선의 측지곡률을 계산해 보면

$$\kappa_g[\gamma_E](\theta) = -\coth s_0.$$

이 값은  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 에 있다.

**극한원의 측지곡률** 이제 쌍곡 평면의 한 점  $z_0 = ie^{s_0} = (0, e^{s_0})$ 를 지나며  $y$ -축에 대칭인 극한원의 측지곡률을 계산해 보자. 가장 먼저 해야 할 일은 단위속력매개식을 구하는 것인데 그건 다음과 같다:

$$\gamma_P(s) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ as & 1 \end{bmatrix} \star ie^{s_0} = \frac{ase^{2s_0} + ie^{s_0}}{1 + a^2 s^2 e^{2s_0}}.\tag{7.23}$$

이 극한원의 속력은  $|ae^{s_0}|$ 다. 그래서  $a = \pm e^{-s_0}$ 라고 하여 이 곡선이 단위속력을 가지게 하여 측지곡률을 구하면

$$\kappa_g[\gamma_P](s) = \mp 1.$$

**연습문제 7.8.1.** 쌍곡 평면의 한 점  $z_0 = iy_0 = (0, y_0)$  를 지나는 극한원  $y = y_0$  의 단위속력매개식을 구하여라. 그리고 극한원의 측지곡률을 구하여라.

**초원의 측지곡률** 이제 쌍곡 평면의 한 점  $(0, e^{s_0}) = ie^{s_0}$  를 지나는 초원의 측지곡률을 계산해 보자. 가장 먼저 해야 할 일은 단위속력매개식을 구하는 것인데 그건 다음과 같이 한다:

$$\begin{aligned}\gamma_H(\phi) &:= \begin{bmatrix} \cosh a\phi & \sinh a\phi \\ \sinh a\phi & \cosh a\phi \end{bmatrix} * ie^{s_0} \\ &= \frac{2 \cosh(s_0) \tanh(a\phi) + (1 - \tanh^2(a\phi))i}{2 \cosh(s_0) - e^{s_0} \operatorname{sech}^2(a\phi)}.\end{aligned}\tag{7.24}$$

이 것의 속력은  $2|a|\cosh(s_0)$  이다.  $a = \frac{1}{2}\operatorname{sech}(s_0)$  라고 하여 이 곡선이 단위 속력을 가지게 하자. 이제 이 곡선의 측지곡률을 계산해 보면:

$$\kappa_g[\gamma_H](\phi) = -\tanh(s_0).$$

이 값은 개구간  $(-1, 1)$  에 있다.

**연습문제 7.8.2.** 유클리드 관점에서 보았을 때  $x$ -축의 점  $x_0$  과 상반평면의 점  $z$  를 지나는 직선처럼 보이는 초원((7.7.4) 참조)의 단위속력매개식과 곡률식을 구하여라.

**질문 7.8.3.** 위에서 말하는 계산 결과들을 확인하여 보아라.

**질문 7.8.4.** 쌍곡평면의 나머지 원, 극한원, 초원의 측지곡률에 대하여 무엇을 말할 수 있겠는가?

이제 드디어 쌍곡 평면에는 직선보다는 더 굽고 원보다는 덜 굽은 곡선들이 존재한다는 것을 알게 되었다. 쌍곡 평면의 곡선  $\gamma$ 에 대하여 다음이 성립한다.

1.  $\gamma$ 의 측지곡률은 일정하며  $(-1, 1)$ 에 있다.  $\Leftrightarrow \gamma$ 는 초원이다.
2.  $\gamma$ 의 측지곡률은 일정하며 1 또는  $-1$ 이다.  $\Leftrightarrow \gamma$ 는 극한원이다.
3.  $\gamma$ 의 측지곡률은 일정하며  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 에 있다.  $\Leftrightarrow \gamma$ 는 원이다.

다시 한번 더 강조하지만 곧은선은 초원의 일종이며, 유클리드 평면과는 달리 쌍곡 평면에선 원의 극한으로 곧은선을 얻어낼 수는 없다.

이제 드디어 임의의 두번연속미분가능한 쌍곡 평면 곡선의 곡률을 정의할 준비가 되었다. 임의의 쌍곡 평면 곡선  $\gamma$ 와  $\gamma$ 에 있는 한 점  $P$ 를 생각하라. 이제  $P$  근방에 있는  $\gamma$ 의 두 점  $Q$ 와  $R$ 을 선택하라. 그러면  $P, Q, R$ 을 지나는 원, 극한원, 또는 쌍곡원이 반드시 단 하나 존재한다. 그것의 측지곡률을  $\kappa_g$ 라 하자. 그러면

$$\lim_{Q, R \in \gamma, Q, R \rightarrow P} \kappa_g$$

를 곡선  $\gamma$ 의  $P$ 에서의 곡률로 정의하면 될 것이다.

## 7.9 쌍곡 평면의 여러 모델들

쌍곡 평면은  $\mathbb{E}^3$ 에 있는 곡면의 지도로서는 얻어지지 않는다는 것이 알려져 있다.

정리 7.9.1. 쌍곡 평면은  $\mathbb{E}^3$ 에 들어있는 어떠한 곡면의 지도도 아니다.

**증명** 이는 [16, 5장11절]에 있는 힐베르트의 정리로부터 따라나온다. 증명은 그 책을 보라. ■

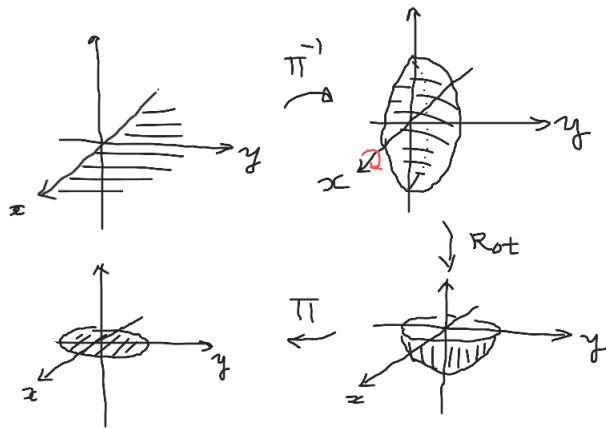
그럼 쌍곡 평면의 여러 모델들은 어떻게 만들어진 것일까? 19세기 중반에 쌍곡 기하가 받아들여지면서 이에 대한 여러 가지 모델이 출현하였는데, 그들 간의 상관관계는 정확히 알기가 조금 어렵다. Greenberg[20, 186쪽]에 의하면 Beltrami-Klein 원반 모델의 출현 이후 Poincaré가 쌍곡 기하에 대한 원반 모델을 고안해 내었다고 나와 있는데 상반 평면 모델이 Poincaré half plane으로 불리는 것으로 보아, 상반 평면 역시 Poincaré에 의해 고안되었으며 아마 원반 모델 후에 나오지 않았는가라고 생각했었는데 영문 위키백과[37]에 의하면 포앵카레 반평면이라고 이름이 붙기는 했지만 사실은 벨트라미가 처음 고안했다고 한다. Poincaré disk model (due to Riemann)이란 구절이 있는 것으로 보아 원반 모델도 포앵카레가 아니라 리만이 고안한 듯 한데 정확한 역사를 위해선 좀더 세세한 문헌 조사가 필요하다.

**원반 모델** 이미 기하학 개론 등을 통하여 쌍곡 기하를 배운 사람들은 상반평면 모델보다는 원반 모델을 접하지 않았는가 싶다. 유클리드 평면의 곡선을 공부할 때 직교 좌표계를 사용하느냐, 극좌표계를 사용하느냐에 따라서 계산이 어렵게 되거나 쉬워질 수 있는데 쌍곡 기하를 공부할 때도 상반 평면 모델을 쓰느냐, 원반 모델을 쓰느냐에 따라 계산이라든가 이해가 쉽게 느껴지기도 하고 어렵게 느껴지기도 한다.

이 절에서는 이제까지 공부하였던 상반 평면 모델이 어떻게 단위 원반 모델과 연관이 되는지 설명하고 계량기를 비롯하여 여러 대상들이 어떻게 단위 원반으로 옮아가는지 살펴보기로 한다.

**입체사영을 이용한 변환** 북극점  $(0, 0, 1)$ 을 이용한 입체사영  $\Pi$ 를 생각하라. 그러면  $\Pi^{-1}$ 은 상반평면을 반구  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$ 로 보낸다. 이제  $x$ -축에 대하여  $-90^\circ$  돌리는 회전변환  $Rot_x(x, y, z) := (x, z, -y)$ 를 이 반구에 적용시키면 그 상은 남반구가 되며 거기에 입체사영  $\Pi$ 를 적용시키면 그 상은 단위원반이 된다. 즉 상반평면에  $\Pi \circ Rot_x \circ \Pi^{-1}$ 을 적용시키면 단위원반이 된다. 이를 수식으로 나타내면 다음이 얻어진다.

$$\Pi \circ Rot_x \circ \Pi^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + (v+1)^2}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + (v+1)^2} \right). \quad (7.25)$$



여기서  $Rot_x \circ \Pi^{-1}$ 로 얻어진 반구를 단위원반으로 보낼 때 입체사영을 사용하였는데, 입체사영이 아닌 직사영  $((x, y, z) \mapsto (x, y))$ 로 보낸 것을 쌍곡 평면의 클라인 모델이라고 한다. 클라인 모델에서는 곧은선이 현(弦 chord)으로 나타난다. 아, 참고로 반구 모델( $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0$ )에서는 곧은선이  $xy$ -평면에 수직인 평면과의 교선으로 나타난다.

정리 7.9.1에서 쌍곡 평면은 3차원 유클리드 공간의 곡면을 나타내는 지

도로서는 얻어질 수 없지만 사실은 다른 공간에 있는 어떤 곡면을 나타내는 지도로서는 얻어질 수 있다. 그중 하나는 3차원 로렌츠 공간에 있는 쌍곡면인데 이를 **쌍곡면 모델**이라 하며 다음 장의 후반부에서 다룬다.

그런데 재미있게도  $z := u + iv$  라 하면 (7.25)는 다음 함수와 같다.

$$\tilde{f}(z) = i \frac{z - i}{z + i}.$$

이것은 선형분수변환이며 이로부터 많은 정보를 얻을 수 있다. 일반적으로는 여기에  $-i$ 를 곱한 함수를 생각한다.

### 상반 평면을 원반으로 변환시키는 통상적 변환 방법 선형 분수 변환

$$f(z) := \frac{z - i}{z + i} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \star z \quad (7.26)$$

에 대하여 생각해 보자. 이는  $a, b, c, d$ 가 실수인 경우가 아니다. 실수축의 이미지를 생각해 보자.  $0, 1, \infty$ 가 실수축 위에 있는데 세 점의 이미지  $f(0) = -1, f(1) = -i, f(\infty) = 1$ 는 중심이 원점에 있고 반지름이 1인 원 위에 있다. 그리고  $f(i) = 0$ 이므로  $f$ 는 상반 평면을 단위 원반으로 보낸다.

자, 상반 평면을 단위 원반으로 옮겼을 때 곧은선이 어떻게 옮겨 가는지에 대해서 생각해 보자. 일단  $f : \text{상반 평면} \rightarrow \text{단위 원반}$ 은 선형 분수 변환이므로 직선이나 원을 직선이나 원으로 보낸다. 따라서 쌍곡 평면의 상반 평면 모델에

서의 직선을  $\ell$ 이라 하면  $f(\ell)$ 은 원반모델에서 원이나 직선이 된다. 그런데 다음 보조정리에 의하여  $f(\ell)$ 은 단위 원에 수직으로 만난다. 즉  $f(\ell)$ 은 단위원에 수직으로 만나는 선분이나 원호다.

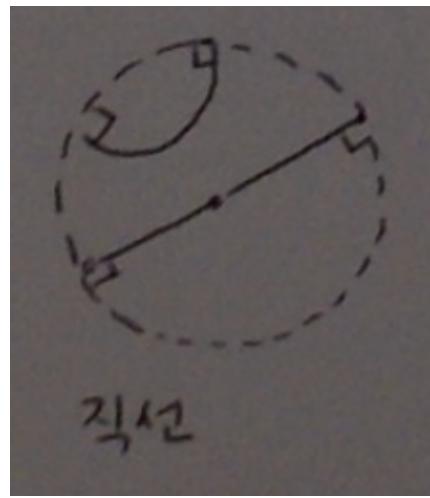
**보조정리 7.9.2.**  $f$  를  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  으로 가는 사상으로 보자. 이 때, 두 곡선  $\gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  가  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  이면  $\gamma_1$  과  $\gamma_2$  가  $t = 0$  에서 만나는 각도는  $f \circ \gamma_1$  과  $f \circ \gamma_2$  가  $t = 0$  에서 만나는 각도와 같다.

**증명** 쉬움. 증명은 복소해석학 교재에서 'conformal property of holomorphic functions'를 찾아 보라. ■

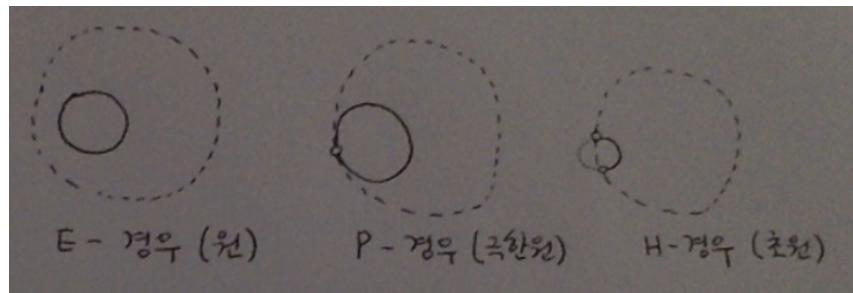
**연습문제 7.9.3.** 쌍곡평면의 원반모델에서 곧은선을 여러 개 그려 보아라.

**연습문제 7.9.4.** 다음 문제를 풀어 보자.

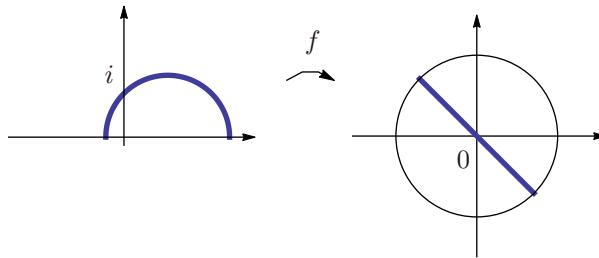
1. 상반 평면에서 어떤 곡선이 있는데 이를 단위 원반으로 보냈다. 이때, 단위 원반에 길이를 재는 방법을 도입하여 이 방법으로 잰 길이가 상반 평면에서 잰 길이와 같도록 하려면 단위 원반의 길이를 재는 방법을 어떻게 주어야 하는가?
2. 단위 원반 모델에서는 곧은선들이 어떻게 생겼을까?



3. 단위 원반 모델에서는 원, 극한원, 초원이 어떻게 생겼을까?



4. 쌍곡 평면에서  $i$ 를 지나는 곧은선은  $f$ 로 옮겨진 후에 단위 원에서 중심을 지나는 곧은선이 됨을 보여라.



**연습문제 7.9.5.** 단위원과  $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = r^2$  이 수직으로 만나는 필요 충분조건은  $u_0^2 + v_0^2 = r^2 + 1$  임을 보여라.

**연습문제 7.9.6.** 원  $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = r^2$  이 단위 원반과 적어도 두 점에서 만난다고 하자. 이 원이 단위원과 만나지 않거나 한점에서 만나거나 서로 다른 두 점에서 만나는 필요충분조건, 즉, 이 원이 원, 극한원, 초원일 필요충분조건, 은  $\sqrt{u_0^2 + v_0^2} + r$  이 1보다 작거나, 1과 같거나, 1보다 큼을 보여라.

$z$ -평면의 계량기

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dz \cdot d\bar{z}}{\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2}.$$

을  $w$ -평면으로 가져가 보자.

자, 이제  $w = \frac{z-i}{z+i}$ 에서  $z = (-i)\frac{w+1}{w-1}$ 이다. 그러므로  $\frac{dz}{dw} = \frac{2i}{(w-1)^2}$ 이고 따라서,  $w = u + iv$ 라고 하면

$$ds^2 = \frac{\frac{2i}{(w-1)^2} dw \cdot \frac{-2i}{(\bar{w}-1)^2} d\bar{w}}{\left( \frac{(-i)\frac{w+1}{w-1} - (i)\frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1}}{2i} \right)^2} = 4 \frac{dw d\bar{w}}{|1 - w\bar{w}|^2} = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - (u^2 + v^2))^2}.$$

이것이 단위 원반 모델의 계량기다.

#### 예 7.9.7. 상반 평면에서 다음 곡선

$$\gamma(t) = (0, e^t) = e^t i, \quad 0 \leq t \leq s.$$

는 단위속력을 가지고 있으며 길이는  $s$ 임을 알고 있다. 자, 이제 이 곧은선을 단위 원반으로 옮겨 보자. 간단한 계산에 의하여

$$\delta(t) := f \circ \gamma(t) = \tanh \frac{t}{2} = \tanh \frac{t}{2} + 0i, \quad 0 \leq t \leq s$$

임을 알 수 있다. (여기서  $f$ 는 (7.26)에 등장하는 그  $f$ 다.) 이 때,  $\delta'(t) = (\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2}, 0)$ 이므로

$$|\delta'(t)| = \sqrt{\frac{4((\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(\frac{t}{2}))^2 + 0^2)}{(1 - (\tanh^2 \frac{t}{2} + 0^2))^2}} = 1.$$

따라서  $\delta$ 의 속력은  $\gamma$ 의 속력과 같다. 이는 사실 일반적인 사실로서 임의의 곡선  $\gamma$ 에 대해서도  $\gamma$ 의 속력과  $f \circ \gamma$ 의 속력은 같을 수 밖에 없다. 따라서  $\delta$ 의 길이도  $s - 0 = s$ 며 이는 당연히  $\gamma$ 의 길이와 같다.

이제 쌍곡 평면이 뭐냐 하는 문제를 다시 생각해 보자.  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  이 주어진 상반 평면과  $ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2}$  이 주어진 상반 평면은 우리가 다루는 기하의 관점에서는 사실 같은 것이다. 쌍곡 평면이라는 어떤 평면이 있는데 그걸 상반 평면 지도로 나타냈는가, 원반 지도로 나타냈는가 하는 것일 뿐이다. 따라서 정확하게는 ‘쌍곡 평면에 대한 상반 평면 지도’, ‘쌍곡 평면에 대한 단위 원반 지도’라고 이야기해야 할 것인데 편의상 그 둘을 모두 쌍곡 평면이라 하고 그 해석은 각자의 판단에 맡긴다.

**왜 원반 모델을 쓰지 않고 상반 평면 모델을 사용했는가?** 원반모델은 상반 평면 모델에 비하여 여러 이점이 있다. 유한한 부분에 모든 걸 다 나타낼 수 있다는 것이 그 첫 번째요, 곧은선들이 모두 똑같아 보인다는 것이 두 번째다. 그럼에도 불구하고 쌍곡 평면의 모델로 상반 평면 모델을 사용한 것은 강체운동의 서술이 상대적으로 쉽기 때문이다. 그건  $SL(2, \mathbb{R})$ 과 밀접한 관련이 있다. 관심있는 독자는 쌍곡 평면의 강체운동이 원반모델에서는 어떻게 서술되는지 살펴보기 바란다.

## 7.10 연습 문제

**연습문제 7.10.1.** 쌍곡평면을 점  $1 + 4i$  를 중심으로  $\frac{\pi}{4}$  만큼 회전시키는 선형  
분수 변환의 식을 구하여라.

**연습문제 7.10.2.** 다음 변환

$$f(z) := \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma < 0$$

는  $\alpha = \delta$  이면 상반 평면의 어떤 곧은선에 대한 반사다. 그 곧은선의 식을  
구하라

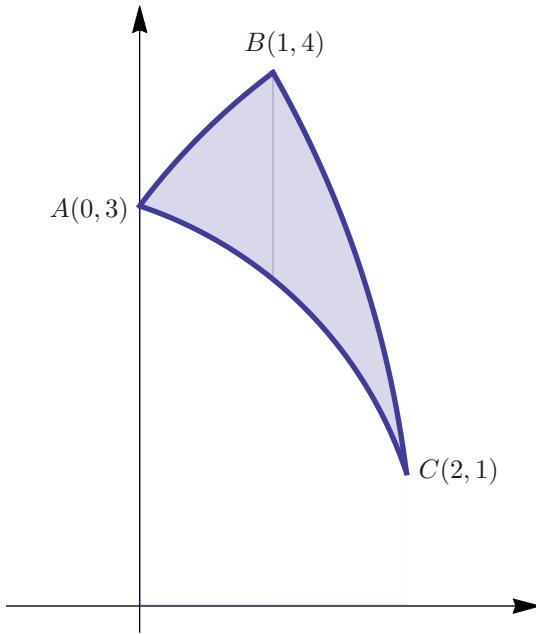
**연습문제 7.10.3.** 상반 평면에서는 쌍곡 각과 유클리드 각이 같다. 원반 모델  
에서는 어떻게 되는가? 본인의 결론에 대한 논거를 분명히 밝혀라.

**연습문제 7.10.4.** 유클리드 평면을 똑같은 무늬를 강체 운동하여 가득 채우는  
것을 쪽매맞추기 (Tessellation)라 한다. 원반 모델을 가득 채우는 쪽매맞춤을  
소재로 한 에서의 목판화 [원의 극한 IV-천사와 악마]가 한동안 고려대학교  
수학과 복도에 전시되어 있었다.<sup>21)</sup> 이 외에 어떤 쪽 맞추기가 있는지 조사하여  
보아라.

---

21) 적어도 이 문제를 만들던 2008년 8월 당시에는 있었다. 그런데 복도를 재단장하던 2017  
년 여름에 수학과 행정실과 인부와의 의사소통의 문제로 버려져 버렸다.

연습문제 7.10.5. 다음 세 점을 지나는 쌍곡 삼각형의 넓이의 근삿값을 소수점 이하 두 자리까지 구하여라



연습문제 7.10.6.

- 위 세 점을 모두 지나는 쌍곡원은 있는가?
- 있다면 몇 개 있는가?
- 쌍곡 중심의 좌표를 소수점 이하 두 자리까지 구하여라.

- 쌍곡 반지름의 길이를 소숫점 이하 두 자리까지 구하여라.
- 위 쌍곡 원을 유클리드 원으로 보았을 때 그 중심의 좌표를 소숫점 이하 두 자리까지 구하여라.
- 위 쌍곡 원을 유클리드 원으로 보았을 때 그 반지름의 길이를 소숫점 이하 두 자리까지 구하여라.

**연습문제 7.10.7.** 임의의 세 점을 모두 지나는 쌍곡원은 있는가? 있다면 몇 개 있는가? 쌍곡 중심은 어디에 있으며 쌍곡 반지름은 얼마인가? 원의 식은?

**연습문제 7.10.8.** 쌍곡 평면 모델에는 벨트라미-클라인 모델(Beltrami-Klein model)이라는 것이 있다. 그 모델이 무엇인지, 원반 모델과는 어떤 관계가 있는지 조사하여라.(힌트 : [20]에 있음.)

**연습문제 7.10.9.** 유클리드 평면에서 점 대칭은 서로 수직인 두 직선에 대한 선 대칭의 합성과 같다. 이를 이용하여 쌍곡 평면의 점 대칭을 정의하고 그 성질을 조사하여라.

**연습문제 7.10.10.** 유클리드 평면에서는 정다각형 중에서 정삼각형, 정사각형, 정육각형만이 평면을 덮을 수 있다. 쌍곡 평면에서는 어떤 정다각형이 쌍곡 평면을 덮을 수 있는가?

**연습문제 7.10.11.** 쌍곡 평면에는 세 각이 같지만 합동이 아닌 삼각형들이 있을까 없을까?

**연습문제 7.10.12.** 쌍곡 평면 속에 한 직선  $l$ 이 있고, 그 위에 있지 않은 한 점  $p$ 가 있을 때,  $p$ 를 지나며  $l$ 에 수직인 직선이 딱 하나 존재함을 보여라.

**연습문제 7.10.13.** 쌍곡 평면의 원반 모델에 극좌표  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$ 를 도입하면 계량기  $ds^2 = 4(du^2 + dv^2)/(1 - (u^2 + v^2))^2$ 은 다음과 같이 쓸 수 있음을 보여라:  $ds^2 = 4(dr^2 + r^2 d\theta^2)/(1 - r^2)^2$ . 여기서  $x := \int_0^r 2/(1 - \rho^2) d\rho$ ,  $0 \leq r < 0$ 라고 하면 간단한 적분에 의하여  $x = \ln \frac{1+r}{1-r}$ . 따라서  $r = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ . 이러면  $ds^2 = dx^2 + \sinh^2 x d\theta^2$ . 이를 5장 2절 (I)에서 계산한 구의 계량기와 비교하여 보아라.

**연습문제 7.10.14.** 유클리드 평면 기하의 공리 중 어떤 것이 쌍곡 평면에서도 성립하고 어떤 것이 쌍곡 평면에서는 성립하지 않는지 조사하여라.

**연습문제 7.10.15.** 유클리드 평면에서,  $\gamma(\theta) := (R \cos \theta, R \sin \theta)$ 에 대하여  $\gamma(\theta_0)$ 에서  $\gamma$ 와 수직으로 만나며 중심이  $x$ -축에 있는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하여라.<sup>22)</sup>

**연습문제 7.10.16.** (앞 문제의 계속)

$$\delta(\phi) := (R \tan \theta_0 \cos \phi - R \sec \theta_0, R \tan \theta_0 \sin \phi)$$

에 대하여  $\delta(\phi_0)$ 를  $\gamma$ 에 대하여 (쌍곡) 대칭이동시킨 점의 좌표를 구하여라.

22) 답은  $(R/\cos \theta, 0)$ 과  $R|\tan \theta|$ 다.

연습문제 7.10.17. (앞 문제의 계속) 위 답은  $\gamma$ 에 대한 반전과 같음을 보여라.

## 제 8 장

# 로렌츠 평면의 기하와 특수 상대론

## 8.1 로렌츠 평면

많은 시간을 쌍곡 평면의 기하를 들여다 보는데 소비하였는데, 쌍곡 평면은 우리에게 친숙한 유클리드 평면과 비교했을 때 단순히 계량기만 조금 다른 평면이지만 결과적인 기하는 상당히 다르다.

유클리드 평면과 쌍곡 평면 외에 어떠한 평면이 있을까? 평면에 어떻게 계량기를 주었을 때 의미가 있는 평면이 될까?

이제 학부 미분 기하를 가르치면서 거의 마지막 주제로 로렌츠 평면을 다루고자 한다.

### 정의 8.1.1. 계량기가

$$dx^2 - dt^2 \quad (8.1)$$

으로 주어진  $xt$ -평면을 로렌츠-밍코프스키 평면, 또는 간단히 로렌츠 평면 또는 링코프스키 평면이라 하고  $\mathbb{L}^2$  또는  $\mathbb{M}^2$ 로 나타낸다.

$$\text{로렌츠 평면} = \mathbb{L}^2 = \mathbb{M}^2 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : ds^2 = dx^2 - dt^2\}.$$

로렌츠 평면은 아인슈타인의 특수 상대성 이론을 기하적으로 이해할 수 있게 해 주는 중요한 개념이다. 참고 자료는 [4], [30], [31], [32]이다.

계량기  $dx^2 - dt^2$ 의 특징은, 이제까지 공부했던 계량기의 경우와는 달리, 벡터  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ 에 대하여  $ds^2(v, v)$ 가 양이 아니라 음의 값을 가질 수도 있다는 것이다. 예를 들어  $\vec{v} = (0, 1)$ 이면

$$ds^2(v, v) = (0)^2 - (1)^2 = -1.$$

Jennings[30]는 고등학교 수준의 수학만으로도 특수 상대성 이론을 이해할 수 있다고 써 놓았는데, 내 느낌으로도 그렇다. 여러분이 조금만 노력하면 다음에 펼쳐지는 이야기는 큰 무리 없이 따라갈 수 있을 것으로 본다. 중요한 것은 여러분이 차근차근 하나하나 따져 나가는 것이다. 특수 상대성 이론은 몇 가지 정의와 공리에서 출발하여 연역적으로 이론을 이끌어나간다는 점에서 수학을 공부하는 학생들에게는 굉장히 이해하기가 쉽다. 어려운 점은, 수식이 의미하는 바를 시간이 늦어진다느니, 길이가 짧아진다느니 하는, 상식적으로는 받아들이기 어려운 의미로 해석하는 데에 있다.

앞 두 장에서 우리는 평면에 계량기가 우리가 알고 있는 통상적인 유클리드 평면의 계량기와는 다르게 주어졌을 때 기하가 어떻게 변하는지 살펴보았다. 그렇다면 로렌츠 평면에서처럼 계량기가 주어졌을 때는 기하가 어떻게 될까? 로렌츠 평면의 기하를 수학적으로 다룬 가장 간단한 문헌은 [5]일 것이다. 그 외에 [8], [10], [11]도 참고할 만하다.

## 8.2 로렌츠 평면의 곧은 선과 두 점 사이의 거리

쌍곡 평면의 기하를 생각할 때 가장 먼저 생각해 본 것 중의 하나가 곧은 선이 어떻게 생겼는가 하는 것이다. 곧은선이 결정되어야 선분, 다각형, 심지어는 원 등을 생각할 수 있기 때문이었다. 로렌츠 평면에서 곧은 선은 어떻게 생겼을까? 곧은 선 방정식을 유도할 때 최소 길이를 가진 곡선의 개념을 사용하였다. 그때 계량기는 positive definite 였다. 하지만 위에 주어진 계량기는 semi definite여서 최소 길이의 개념이 성립하지 않는다. 하지만 4.3절과 5.6절에서 살펴본 곧은 선 방정식 자체는 semi-definite 계량기에도 그대로 적용할 수 있다. 그런데 로렌츠 계량기에 대해서는  $x = u^1, t = u^2$  라 할 때  $g_{11} = -g_{22} = 1, g_{12} = g_{21} = 0$  이므로 모든  $i, j, k$ 에 대해  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(x, t) = 0, \Gamma_{ij}^k(x, t) = 0$  이다. 그러므로 곧은선 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x}(s)^2 - \dot{t}(s)^2 = 1, \quad \ddot{x}(s) = 0, \quad \ddot{t}(s) = 0.$$

여기서 두 번째와 세 번째 식을 풀면

$$x = as + b, \quad t = cs + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a^2 + c^2 \neq 0.$$

이제 첫 번째 식을 고려해야 하는데 사실은 로렌츠 기하의 특수성<sup>1)</sup> 때문에

$$\dot{x}(s)^2 - \dot{t}(s)^2 = 1 \text{ 또는 } \dot{x}(s)^2 - \dot{t}(s)^2 = 0 \text{ 또는 } \dot{x}(s)^2 - \dot{t}(s)^2 = -1$$

1) 이에 대해선 로렌츠 평면 벡터의 분류를 다룬 후에 좀더 이야기 할 수 있다.

을 고려해야 한다. 각각의 경우

$$a^2 - c^2 = 1 \quad \text{또는} \quad a^2 - c^2 = 0 \quad \text{또는} \quad a^2 - c^2 = -1$$

이 된다. 따라서 로렌츠 직선의 식은 다음과 같다:

$$\gamma(s) := \mathbf{v}s + \mathbf{w}, \quad \text{단 } \mathbf{v} \circ \mathbf{v} = 1 \text{ 또는 } 0 \text{ 또는 } -1.$$

각 경우를 공간적 직선, 광적 직선, 시간적 직선이라 하며 유클리드 시각으로 보았을 때 직선으로 보인다.

이제 선분  $\gamma(s) := (as + b, cs + d)$ ,  $s_1 \leq s \leq s_2$ , 의 길이를 재 보면

$$\ell(\gamma) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\dot{\gamma}(\tilde{s}) \circ \dot{\gamma}(\tilde{s})} d\tilde{s} = \sqrt{a^2 - c^2}(s_2 - s_1)$$

이를 이용하여 다음을 얻을 수 있다. 자세한 증명은 직접 해 보기 바란다.

**보조정리 8.2.1.** 로렌츠 공간의 두 점  $(x_1, t_1)$ ,  $(x_2, t_2)$  사이의 거리는 다음과 같다:

$$d((x_1, t_1), (x_2, t_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (t_2 - t_1)^2}. \quad (8.2)$$

로렌츠 거리는 두 점이 서로 달라도 0이 될 수도 있으며 또한 양의 실수  $r$ 에 대하여  $ir$ 의 꼴이 될 수도 있다.

### 8.3 로렌츠 평면의 강체운동

유클리드 평면의 강체 운동을 나타낼 때 다음 집합이 쓰인다.

$$O(2) = \{M \in M(2, \mathbb{R}) : MM^T = I\},$$

$$SO(2) = \{M \in M(2, \mathbb{R}) : MM^T = I, \det M = 1\}.$$

이를 직교군, 특수 직교군이라 한다. 여기서  $M(2, \mathbb{R})$ 은 모든 2행 2열의 실 원소 행렬들로 이루어진 집합이다. 이제 로렌츠 평면의 강체 운동을 나타낼 때는 다음 집합이 필수적으로 쓰인다. 여기서  $\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  이다.

$$O(1, 1) = \{M \in M(2, \mathbb{R}) : M\epsilon M^T = \epsilon\},$$

$$SO(1, 1) = \{M \in M(2, \mathbb{R}) : M\epsilon M^T = \epsilon, \det M = 1\},$$

$$SO(1, 1)^+ = \{M \in M(2, \mathbb{R}) : M\epsilon M^T = \epsilon, \det M = 1, \operatorname{tr} M > 0\}.$$

$O(1, 1)$ 를 로렌츠 군,  $SO(1, 1)^+$  특수 로렌츠 군이라 하고 로렌츠 군의 원소를 로렌츠 변환, 특수 로렌츠 군의 원소를 특수 로렌츠 변환이라 한다.

**보조정리 8.3.1.** 일반적 로렌츠 변환은 다음과 같이 생겼다:

$$\begin{bmatrix} \alpha \cosh \phi & \alpha \sinh \phi \\ \beta \sinh \phi & \beta \cosh \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

단  $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$  그리고  $\phi \in \mathbb{R}$ . 만약  $\alpha = \beta = 1$ 이면 이는 특수 로렌츠 변환이다.

$\phi$ 를  $-\phi$ 로 바꾸면 일반적인 로렌츠 변환은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \alpha \cosh \phi & -\alpha \sinh \phi \\ -\beta \sinh \phi & \beta \cosh \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

다음과 같이  $x, t$ 를  $x', t'$ 으로 변환시키는 사상을 푸앵카레 변환이라 한다.

$$\begin{bmatrix} x' \\ t' \end{bmatrix} := M \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ t_0 \end{bmatrix}, \quad \text{단 } M \in O(1, 1). \quad (8.5)$$

푸앵카레 변환의 중요성은 다음 두 정리에서 나온다.

**정리 8.3.2.** 푸앵카레 변환은 로렌츠 계량기의 표현을 보존한다.

**증명**  $M$ 이 (8.4)처럼 생겼다고 하자. 그러면 식 (8.5)에서 다음이 성립한다:

$$\begin{bmatrix} dx' \\ dt' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cosh \phi & -\alpha \sinh \phi \\ -\beta \sinh \phi & \beta \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dt \end{bmatrix}.$$

따라서

$$\begin{bmatrix} dx \\ dt \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\beta} \begin{bmatrix} \beta \cosh \phi & \alpha \sinh \phi \\ \beta \sinh \phi & \alpha \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx' \\ dt' \end{bmatrix}.$$

그러므로

$$dx^2 - dt^2 = [dx \ dt] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dt \end{bmatrix} = [dx' \ dt'] A \begin{bmatrix} dx' \\ dt' \end{bmatrix}$$

여기서

$$A := \begin{bmatrix} \beta \cosh \phi & \beta \sinh \phi \\ \alpha \sinh \phi & \alpha \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \cosh \phi & \alpha \sinh \phi \\ \beta \sinh \phi & \alpha \cosh \phi \end{bmatrix}$$

그런데  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  이므로 결론이 성립한다. ■

**정리 8.3.3.** 함수  $f : \chi\tau$  평면  $\rightarrow xt$  평면이 연속인 이계 도함수를 가지며 로렌쓰  
계량기를 보존하면  $f$ 는 푸앵카레 변환이다.<sup>2)</sup>

**증명**  $x = x(\chi, \tau), t = t(\chi, \tau)$  라고 놓으면

$$\begin{aligned} dx^2 - dt^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau \right)^2 - \left( \frac{\partial t}{\partial \chi} d\chi + \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \right)^2 \\ &= \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^2 - \left( \frac{\partial t}{\partial \chi} \right)^2 \right) d\chi^2 + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial x}{\partial \tau} - \frac{\partial t}{\partial \chi} \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) d\chi d\tau \\ &\quad - \left( \left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 - \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 \right) d\tau^2. \end{aligned}$$

이것이  $d\chi^2 - d\tau^2$ 이 되기를 바라므로 다음 식을 얻는다.

$$\left( \frac{\partial x}{\partial \chi} \right)^2 - \left( \frac{\partial t}{\partial \chi} \right)^2 = 1, \quad \left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 - \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \chi} \frac{\partial t}{\partial \tau}.$$

2)  $\chi$ 는 카이,  $\tau$ 는 타우.

첫 번째, 두 번째 식으로부터 다음이 얻어진다. 두 수  $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$  와 두 함수  $\phi = \phi(\chi, \tau)$ ,  $\theta = \theta(\chi, \tau)$  가 있어서

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \chi} \\ \frac{\partial t}{\partial \chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cosh(\phi(\chi, \tau)) \\ \sinh(\phi(\chi, \tau)) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh(\theta(\chi, \tau)) \\ \beta \cosh(\theta(\chi, \tau)) \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

그러면, 세 번째 식에서

$$\alpha \cosh(\phi(\chi, \tau)) \sinh(\theta(\chi, \tau)) = \beta \sinh(\phi(\chi, \tau)) \cosh(\theta(\chi, \tau)).$$

이제 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

경우 1 :  $\alpha = \beta$ . 이 때는 위 식에서  $\phi(\chi, \tau) = \theta(\chi, \tau)$  를 얻는다. 자 이제

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \chi} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \alpha \cosh(\phi(\chi, \tau)) \\ \sinh(\phi(\chi, \tau)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \sinh(\phi(\chi, \tau)) \\ \cosh(\phi(\chi, \tau)) \end{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} &= \frac{\partial}{\partial \chi} \begin{bmatrix} \sinh(\theta(\chi, \tau)) \\ \beta \cosh(\theta(\chi, \tau)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\theta(\chi, \tau)) \\ \beta \sinh(\theta(\chi, \tau)) \end{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \chi}. \end{aligned}$$

그런데  $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \chi} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial t}{\partial \chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{bmatrix}$  이므로  $\frac{\partial \phi}{\partial \chi} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0$ .

**연습문제 8.3.4.** 위 사실의 이유를 정확히 밝혀라.

따라서,  $\phi$  는 상수이고, (8.6)로 부터

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \beta \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ t_0 \end{bmatrix}.$$

이때,  $\varphi := -\alpha\phi$ 라고 하면,

$$\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cosh \varphi & -\alpha \sinh \varphi \\ -\beta \sinh \varphi & \beta \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ t_0 \end{bmatrix}.$$

경우 2 :  $\alpha = -\beta$ . 이 경우에는  $\phi(\chi, \tau) = -\theta(\chi, \tau)$  가 얻어지는데 비슷한 과정을 거쳐 주어진 식이 얻어진다. 정확한 유도 과정은 숙제. ■

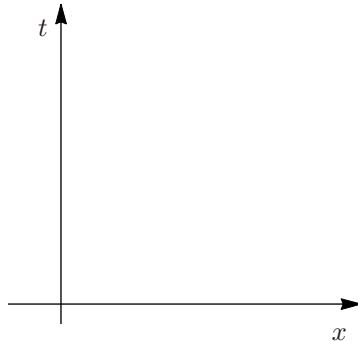
푸앵카레 변환이나 로렌츠 변환을 이용하면 특수 상대성 이론의 많은 이론들을 이끌어 낼 수 있다.

**연습문제 8.3.5.** 유클리드 평면을 나타내는 지도  $xy$  평면이 있고, 거기서 계량기는  $dx^2 + dy^2$  으로 표현된다고 하자. 이때  $xy$  평면에서  $uv$  평면으로 가는 함수  $f$  가 있어서 계량기를  $du^2 + dv^2$  으로 보낸다고 하자. 그러면  $f$  는 어떻게 생긴 함수인가? 단,  $f$  는 연속인 이게 도함수를 가진다.

**연습문제 8.3.6.** 위 정리와 연습문제에서  $f$  가 이계 도함수가 아니면 어떤 문제가 발생하는가?

## 8.4 시공간 평면과 로렌츠 평면

일직선에서 좌우로만 움직일 수 있는 입자가 언제, 어디에 있느냐를 나타내고자 할 때 다음과 같은 좌표 평면을 쓰면 편리하다.



이 때  $xt$  좌표 평면은 ‘시공간 평면’에 대한 지도가 된다.

정의 8.4.1. ‘사건’이란 시공간 평면의 점을 말하며, 사건  $p$ 가 언제 어디서 발생했느냐 하는 것은  $t(p), x(p)$ 가 얼마나 하는 것과 같다.

두 사건  $p$ 와  $q$ 가 동시에 발생했느냐 아니냐 하는 것은  $t(p)$ 는  $t(q)$ 인가 아닌가 하는 것과 같다.  $p$ 가  $q$ 보다 먼저 발생했다 하는 것은  $t(p) < t(q)$ 와 같다.

이제 생각하고자 하는 질문은, 시공간 평면에는 어떤 계량기가 있는가 하는 것이다. 이는 두 점  $(x_1, t_1)$  과  $(x_2, t_2)$  사이의 거리를 어떻게 생각하면 되는가 질문과 같은 질문이다. 이 질문의 포인트는, 공간( $x$ 축)과 시간( $t$ 축)을 따로 생각하는 게 아니라 둘을 동시에 생각한다는 데 있다.

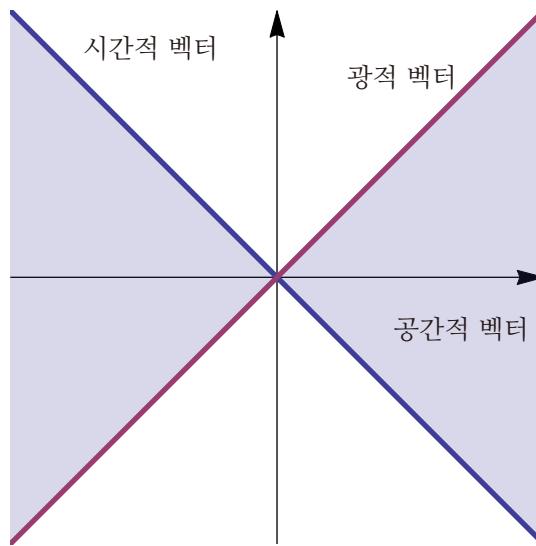
아인슈타인의 특수 상대성 이론은 1905년에 발표되었는데 1907년에 링코프스키는  $xt$  시공간 평면에서 두 점 사이의 거리가 (8.2)과 같다고 가정하면, 즉

시공간 평면이 (유클리드 평면이 아니라) 로렌츠 평면이라고 가정

하면 특수 상대성 원리를 설명할 수 있음을 알아내었다. 링코프스키는 왜 저렇게 생각했을까? 위키백과에서 한번 찾아보기 바란다. 이제부터는 시공간 평면에 로렌츠 계량기가 갖추어진 것으로 이론을 전개한다.

계량기  $ds^2 = dx^2 - dt^2$ 에 의하면 모든 벡터는 세 가지로 나뉜다:

**정의 8.4.2.** 벡터  $\vec{v}$ 를  $ds^2(v, v) > 0$ 이면 공간적 벡터,  $ds^2(v, v) = 0$ 이면 광(光)적 벡터,  $ds^2(v, v) < 0$ 이면 시간적 벡터라고 부른다. 단 영벡터는 예외적으로 시간적 벡터이기도 하고, 공간적 벡터이기도 하고 광적 벡터이기도 한 것으로 정한다.

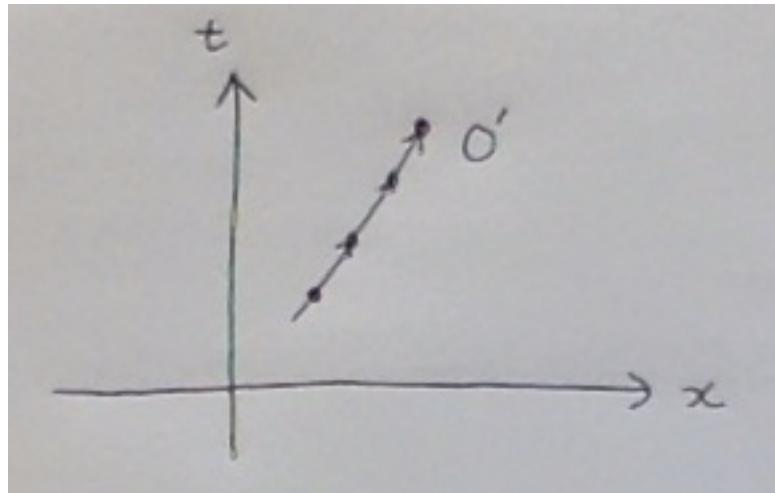


이의 도입은 빛보다 빠른 것은 없다는 아인슈타인의 생각을 다음과 같이 표현한다: 빛이 움직일 때 그 속도 벡터는 광적 벡터이며 속도 벡터가 공간적 벡터가 되는 움직임은 없다.

특수 상대성 이론에 등장하는 용어에는 시간 원추, 미래를 향하는, 과거를 향하는, material particle, proper time, lightlike particle, world line, 사건 (event), 사건  $p$ 의 미래, 사건  $p$ 의 과거 등등이 있다. 입자를 수학적으로는 실 구간  $(a, b)$ 에서 시공간 평면으로 가는 함수로 본다. 자세한 설명은 참고문헌을 살펴보기 바란다.

## 8.5 등속으로 멀어지는 관찰자의 시공간 좌표

한 관찰자  $O$ 가 있는데 임의의 사건  $p$ 에 대하여 이 관찰자가 관찰하는 위치와 시각을 각각  $x(p)$ 와  $t(p)$ 라고 하자. 이 때  $O$ 가 관찰하기에  $O$ 로부터 일정한 속력  $v$ 로 멀어져 가고 있는 다른 관찰자  $\bar{O}$ 이 있으며 ‘관찰자  $\bar{O}$ 이 관측하는  $p$ 의 위치와 시각’이라고 ‘ $O$ 가 생각하는 값’을 각각  $\bar{x}(p)$ 와  $\bar{t}(p)$ 라고 하자.



3) 이 때,  $\bar{x}(p)$ ,  $\bar{t}(p)$  와  $x(p)$ ,  $t(p)$  사이에는 어떤 관계가 있을까?

이 간단한 질문에 대한 답이 빠르게 움직이는 물체에 대하여 시간은 느려지며 길이는 늘어난다고 하는 그 유명한 특수 상대성 이론의 핵심이다. 이에 대한 답을 물리적으로도 얻을 수 있고 수학적으로 얻을 수 있는데 우리는 물리적인 풀이가 수학적으로는 무엇을 의미하는지 고찰하는 것으로부터 논의를 시작하고자 한다.

아인슈타인은 위 질문에 대한 답을 얻기 위해선 다음과 같은 원리가 존중되어야 한다고 가정했다:

가정 1 : 모든 관성계는 동등하다.

가정 2 : 빛의 속력은 어느 관성계에서나 일정하다.

가정 1을 수학적으로 표현하면 다음과 같다:  $O$ 가 만든  $xt$  지도에서 계량기 표현식과  $\bar{O}$ 가 만든  $\bar{x}\bar{t}$  지도에서 계량기 표현식이 서로 같아야 한다. 즉, 계량기가  $xt$  지도에서

$$E(x, t)dx^2 + 2F(x, t)dxdt + G(x, t)dt^2$$

---

3) 여기서  $\bar{x}(p), \bar{t}(p)$ 의 의미에 관하여 분명히 해야 할 점이 있다.  $\bar{x}(p), \bar{t}(p)$ 는 사건  $p$ 에 대하여 관찰자  $\bar{O}$ 가 관측하는 좌표가 아니다. 이는, ‘관찰자  $\bar{O}$ 가 관측하는 좌표’라고 ‘ $O$ 가 생각하는 값’이다.

로 표현되면  $\bar{x}\bar{t}$ 지도에서는

$$E(\bar{x}, \bar{t})d\bar{x}^2 + 2F(\bar{x}, \bar{t})d\bar{x}d\bar{t} + G(\bar{x}, \bar{t})d\bar{t}^2$$

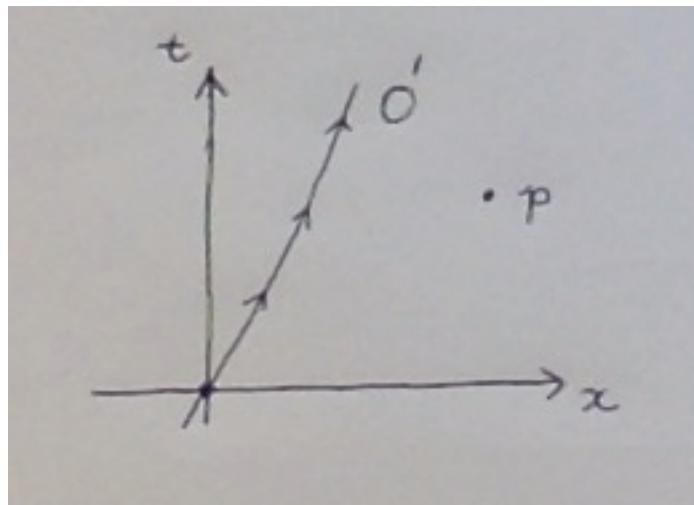
로 표현되어야 한다. 이는  $xt$ 지도를  $\bar{x}\bar{t}$ 지도로 바꾸는 변환식이 사실은 시공간 평면의 등장 사상이라는 것이다. 물리적으로 말하면  $xt$ 지도와  $\bar{x}\bar{t}$ 지도는 서로 구별할 수 없다는 뜻이다.

자, 위에서 우리는 이미  $xt$ 지도에서는 계량기가  $dx^2 - dt^2$ 으로 표현된다고 받아들였다. 따라서  $\bar{x}\bar{t}$ 지도에서는 계량기가  $d\bar{x}^2 - d\bar{t}^2$ 으로 표현되어야 한다. 이는  $x, t$ 에서  $\bar{x}, \bar{t}$ 을 얻어내는 변환이 포앵카레 변환임을 의미한다. 이제 드디어 로렌츠 평면의 기하와 특수 상대성 이론의 관계를 들여다 보게 된다.

일반적이긴 하지만 곁으로 보기엔 특수한 경우를 살펴보자.  $\alpha = \beta = 1$ 인 특수 로렌츠 변환

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(p) \\ \bar{t}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(p) \\ t(p) \end{bmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}. \quad (8.7)$$

으로 변환되는 지도를 갖게 되는 두 관찰자  $O$ 와  $\bar{O}$ 사이에는 어떤 관계가 있을까? 먼저  $xt$ 지도에서  $O$ 의 궤적은  $x = 0$ 으로 주어지고,  $\bar{x}\bar{t}$ 지도에서  $\bar{O}$ 의 궤적은  $\bar{x} = 0$ 으로 주어짐을 떠올리자.



$\bar{O}$ 의 궤적을  $s$ 를 매개 변수로 하는 곡선으로 나타내면 다음과 같다:  $\bar{x}(s) = 0, \bar{t}(s) = s$ . 자, 이제 이에 해당하는  $x$  와  $t$ 를 구해보자: 위의 관계식을 이용하면

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ t(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(s) \\ \bar{t}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}$$

따라서

$$x(s) = \sinh \phi \cdot s, \quad t(s) = \cosh \phi \cdot s.$$

이는  $xt$  평면에서 원점을 지나는 직선을 나타낸다. 거기다가,

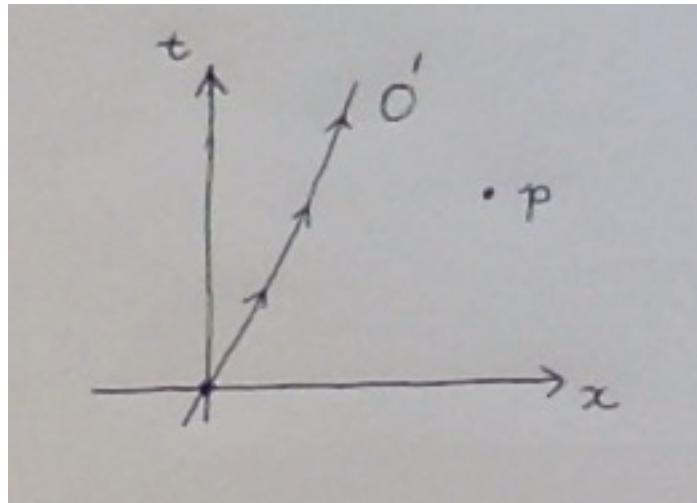
$$v := O\text{가 관찰하는 } \bar{O}\text{의 속력} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx/ds}{dt/ds} = \tanh \phi$$

이므로 이는  $\bar{O}$ 이  $O$ 로부터 등속  $v = \tanh \phi$ 로 움직이고 있음을 나타낸다.

역으로 사건  $p$ 가 있을 때 등속  $v$ 로 움직이고 있는 관찰자  $\bar{O}$ 이 관찰하는 위치와 시각  $\bar{x}(p), \bar{t}(p)$ 는  $x(p), t(p)$ 에 대하여 식 (8.5)로 주어지는 관계를 가진다 (단 이 때  $\alpha = \beta = 1$  또는  $\alpha = \beta = -1$ .)

## 8.6 특수 상대성 이론에서 말하는 여러 결과들

먼저 다음 상황임을 주지한다.



**정리 8.6.1.** 모든 입자의 속력은 1보다 작다. 즉, 모든 입자는 빛보다 느리게 움직인다.

**증명** 이는  $\tanh \phi$ 의 절댓값이 1보다 작기 때문이다. ■

자, 이제  $v$  를 이용하여  $x, t$  와  $\bar{x}, \bar{t}$  사이의 관계를 구해 보자. 이를 위해 먼저  $v = \tanh \phi$  에서 다음을 얻는다:

$$\cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \sinh \phi = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (8.8)$$

**정리 8.6.2.** 어떤 사건  $p$ 에 대하여 한 관찰자  $O$ 가 보기에 등속  $v$ 로 움직이고 있는 관찰자  $\bar{O}$ 이 측정하는 시간  $t(p)$ 과 공간  $x(p)$ 은  $O$ 가 측정하는 시간  $t(p)$ 과 공간  $x(p)$ 에 대해 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\begin{aligned}\bar{x}(p) &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}x(p) - \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}t(p) = \frac{x(p) - v t(p)}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \bar{t}(p) &= \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}}x(p) + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}t(p) = \frac{t(p) - v x(p)}{\sqrt{1 - v^2}}.\end{aligned}$$

**증명** 식 (8.7)을 식 (8.8)에다 집어 넣는다. ■

이것이 말하는 것은, 어떤 사건  $p$ 에 대해  $\bar{O}$ 이 측정한  $\bar{x}(p)$ 와  $\bar{t}(p)$ 는 똑같은 사건  $p$ 에 대해  $O$ 가 측정한  $x(p)$ 와  $t(p)$ 에 대하여 위에 주어진 관계를 만족시킨다는 것이다. 이 식은 특수 상대성이론의 거의 모든 것을 설명해 주는 핵심이기 때문에 잘 이해해 두라.

**정리 8.6.3.** 동시성이 깨진다. 즉,  $O$ 가 관찰하기에는 동시에 발생하는 두 사건이  $\bar{O}$ 가 관찰하기에는 동시에 발생하지 않는다고  $O$ 는 관찰하게 된다.

**증명**  $O$ 가 관찰하기에 동시에 발생하는 두 사건을  $p$ 와  $q$ 라 하자. 그러면  $t(p) = t(q)$ 이고  $x(p) \neq x(q)$ 이다. 만약  $x(p) < x(q)$ 면

$$\begin{aligned}\bar{t}(p) - \bar{t}(q) &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-vx(p) + t(p)) - \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(-vx(q) + t(q)) \\ &= \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}(x(p) - x(q)) \\ &> 0.\end{aligned}$$

따라서,  $\bar{O}$ 이 관찰하기로는  $q$ 가  $p$ 보다 먼저 발생한다. 만약  $x(p) > x(q)$ 면  $\bar{t}(p) - \bar{t}(q) < 0$ 이며  $p$ 가  $q$ 보다 먼저 발생한다. ■

**정리 8.6.4.**  $O$ 가 관찰하기에, 같은 장소에서 시차를 두고 발생한 두 사건에 대하여  $\bar{O}$ 이 느끼는 시간은  $O$ 가 느끼는 시간보다 길고  $O'$ 이 보기에 발생한 장소도 같지 않다.

**증명**  $x(p) = x(q)$ ,  $t(p) > t(q)$ 인 서로 다른 두 사건  $p, q$ 를 생각하라. 이러면

$$\bar{t}(p) - \bar{t}(q) = \frac{t(p)}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{t(q)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{t(p)-t(q)}{\sqrt{1-v^2}} > t(p)-t(q).$$

이 때  $\bar{x}(p) - \bar{x}(q) = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}(t(q)-t(p)) < 0$ . 즉  $O$ 가 관찰하기로는 같은 장소에서 발생한 두 사건이  $\bar{O}$ 가 관찰하기로는 다른 장소에서 발생한다. ■

**정리 8.6.5.** 길이가 줄어든다. 좀 더 자세하게는, 어떤 막대가 있어서  $O$ 가 관찰한 길이가  $\ell$ 이면  $\bar{O}$ 이 관찰한 길이는  $\sqrt{1-v^2}\ell$ 이다.

**증명** 이 정리의 증명은 ‘막대의 길이’에 대한 정의를 분명히 하는 것을 필요로 한다. 아니, 먼저 막대란 무엇인가부터 정의해야 한다.

**정의**: 서로 다른 두 사건  $p, q$ 에 대하여  $t(p) = t(q)$  일 때 그 두 사건 사이의 사건들로 이루어진 사건들의 집합을 막대라 한다. 즉,  $t(p) = t(q), x(p) < x(r) < x(q)$  일 때

$$\text{막대} := \{r \in \mathbb{L}^2 : t(r) = t(p), \quad x(p) < x(r) < x(q)\}.$$

그리고

$$\text{막대의 길이} := x(q) - x(p).$$

이제 서로 등속으로 움직이는 두 관찰자가 한 막대의 길이를 측정하고자 할 때 발생하는 문제점이 드러난다.  $O$ 가 관찰하는 막대가  $\bar{O}$ 이 관찰하기에는 막대가 아닌 것이다.  $\bar{t}(p) \neq \bar{t}(q)$  기 때문에.

이 문제는 다음과 같이 어느 한 순간에서만의 막대가 아니라 모든 시간에서의 막대를 한꺼번에 생각함으로써 해결된다.  $O$ 가 관찰하는 막대의 두 끝이 나타내는 ‘세계선(world line)’을 생각하자:

$$\gamma_1(s) = (x_1, t_1) = (a, s), \quad \gamma_2(s) = (x_2, t_2) = (b, s). \quad (\text{단 } a < b.)$$

이때

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}t_1 - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}a, \quad \bar{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}t_2 - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}b. \quad (8.9)$$

이제 이것로부터  $\bar{O}$ 가 관찰하는 막대를 추출할 수 있다. 우리는

$$\bar{t}_1(p) = \bar{t}_2(q) \quad (8.10)$$

인 두 사건  $p$ 와  $q$ 를 원한다. 즉  $\bar{O}$ 이 보았을 때 시각이 같은 사건  $p$ 와  $q$ 를 찾아서  $|\bar{x}(p) - \bar{x}(q)|$ 로  $\bar{O}$ 가 관찰하는 막대의 길이를 구한다.

이제 (8.9), (8.10)로부터  $t_2 = t_1 + v(b-a)$ . 즉  $\bar{O}$ 가 이 막대의 길이를 재기 위해서는  $t_2 = t_1$ 인 두 사건이 아니라  $t_2 = t_1 + v(b-a)$ 인 두 사건을 보고 그 두 사건의  $\bar{x}$  좌표의 차로 막대의 길이를 구한다. 구체적 계산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 &= \left( \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}t_2 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}b \right) - \left( \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}t_1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}a \right) \\ &= \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}(t_2 - t_1) + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(b-a) \\ &= \sqrt{1-v^2}(b-a) \end{aligned}$$

즉,  $O$ 가 관찰하기에 길이가  $b-a$ 인 막대가  $\bar{O}$ 에게는 길이가  $\sqrt{1-v^2}(b-a)$ 로 짧아 보인다고  $O$ 는 생각하게 되는 것이다. ■

**정리 8.6.6.** (속도 변환의 법칙)  $O$ 에 대하여  $\bar{O}$ 이 속력  $v$ 로 움직이고 있다고 하자. 움직이는 입자에 대하여  $O$ 가 관찰한 속력이  $\frac{dx}{dt}$ 면,  $O$ 가 생각하기에  $\bar{O}$

이 관찰한 속력  $\frac{d\bar{x}}{dt}$  은 다음과 같다.

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - v \frac{dx}{dt}}.$$

**증명**  $O$ 가 측정하는 입자의 궤적을  $x(s), t(s)$ ,  $\bar{O}$ 가 측정하는 입자의 궤적을  $\bar{x}(s), \bar{t}(s)$  라 하면

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{x}/ds}{d\bar{t}/ds} = \frac{\frac{d}{ds} \left( \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \right)}{\frac{d}{ds} \left( \frac{-vx+t}{\sqrt{1-v^2}} \right)} = \frac{\frac{dx}{ds} - v \frac{dt}{ds}}{-v \frac{dx}{ds} + \frac{dt}{ds}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - v \frac{dx}{dt}}.$$



**정리 8.6.7.** (속력의 덧셈)  $\bar{O}$ 가 관찰하기에  $\bar{v}$ 의 속도로 움직이는 입자는  $O$ 가 관찰하기에는  $\frac{v+\bar{v}}{1+v\bar{v}}$  이다.

**증명** 위의 식  $\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - v \frac{dx}{dt}}$  으로부터 다음이 얻어진다.  $\frac{dx}{dt} = \frac{v + \frac{d\bar{x}}{dt}}{1 + v \frac{d\bar{x}}{dt}}$ . 따라서 구하는 결론이 얻어진다.



**따름정리 8.6.8.** 빛의 속도는 어느 관찰자에게도 1이다.

**증명**  $\frac{dx}{dt} = 1$  이면  $\frac{d\bar{x}}{dt} = 1$  이기 때문에 그렇다.



이상의 결과는 단순히 시간과 공간만을 가지고 따져본 특수 상대성 이론이다.

상술한 이야기들은 좌표만 가지고 설명이 가능하였다. 그러나 시간과 공간 외의 개념에 대한 특수 상대론의 설명을 이해하기 위해서는 더 많은 물리적 개념을 요구한다. 예를 들어  $O$ 가 관찰하는 질량이  $\bar{O}$ 이 관찰하기에는 얼마가 될까 하는 질문을 생각해 보면 먼저 질량은 좌표만으로 나타낼 수 없기 때문에 새로운 개념이 도입이 되었다는 것을 알 수 있다. 특수 상대론이 내놓은 유명한 결과 중에서,

$$E = mc^2$$

으로 널리 알려진, 에너지와 질량은 같다는 명제가 있는데 이를 이해하기 위해서는 운동량, 질량, 에너지 등등이 무엇인지를 이해해야 하는데, 그는 이 강의의 범위를 벗어나므로 그냥 넘어 가기로 한다. 이 명제는 이제 누구나 다 들어본 상식 수준의 지식이 되어 버렸으나, 정작 왜 그러냐 하는 것에 대해서는 잘 생각해 보지 않는데 물리학이 왜 그런 결론을 주느냐 하는 추론 과정을 따라가 보면 의외로 그렇게 복잡하지 않게 그 과정을 이해할 수 있다. 관심을 두고 꼭 한 번 그 과정을 따라가 보라. 위에서 이 강의록의 범위를 벗어난다고 하였는데, 그 말은 이 강의록의 수준을 넘는다는 것은 아니다. 단지, 이 강의는 기하학 강의고, 여기에서는 다루지 않는 질량이라든지 운동량이라든지 하는 개념이 등장하기 때문에 여기서 다루지 않는다는 것이다. 관심있는 사람은 꼭 물리학 책에서 그 증명을 읽어보기 바란다.

## 8.7 일반 상대론은 무엇인가?

위에서 그려진  $xt$  지도에서 계량기는  $dx^2 - dt^2$  으로 쓰여지는데, 이는  $E = 1, F = 0, G = -1$ 에 해당한다. 일반 상대성이론은  $E, F, G$ 가  $x, t$ 의 함수가 되도록 정하여 생기는 현상을 공부하는 학문이다. 즉, 계량기가  $E(x, t)dx^2 + 2F(x, t)dxdt + G(x, t)dt^2$  으로 쓰여지기를 원한다. 이는 “휘어진 시공간”을 표현한다. 일반 상대론의 가장 큰 문제는  $E, F, G$ 를 어떻게 정해야 하느냐 하는 것이다. 그러한 모델로서 가장 간단한 예는  $\frac{dx^2 - dt^2}{t^2}$  으로 계량기를 주는 것이 있는데, 이 계량기의 로렌츠 계량기에 대한 관계는 쌍곡 계량기의 유클리드 계량기에 대한 관계와 같다. 어떠한 계량기를 취하느냐에 따라서 우주가 어떻게 생겼느냐에 대한 해석이 달라진다. 우주는 달렸다느니, 팽창과 수축을 반복한다느니, 시간의 죽이 달혀 버린다느니 하는 얘기가 다 여기서 나오는 이야기다.

아인슈타인은 계량기가 어떤 미분 방정식을 만족하면 된다고 생각하였는데, 그 방정식을 아인슈타인의 방정식이라 한다. 이 방정식은 순수하게 미분기학적인 관점에서 논의될 수도 있다. 이를 위해서는 계량기 이외의 미분기학적인 개념이 필요한데 그 중에 제일로 중요한 것은 곡률 텐서라는 것이다. 곡률 텐서는 2차원 평면보다 더 차원이 높은 3차원 이상의 다양체를 기술하는데 아주 중요한 개념이다.

그런데, 한 물리학자에게 들은 바에 의하면 2005년 12월 현재, 특수 상대성이론에 대해서는 이제 그 진위에 대해서 누구도 이의를 제기하지 않으나 일반 상대성이론에 대해서는 이러저러한 논란이 많이 남아 있는 상황이라고 한다. (2011년 가을, 유럽 입자가속연구소에서 빛보다 빠른 입자를 발견하였다는 실험결과를 발표하였으나 대부분 물리학자들은 아마 틀렸을 것이라고 생각할 것이라고 한 물리학자가 말하였다. 진실은 과연?)

## 8.8 쌍곡 평면은 로렌츠 공간에 있는 어떤 곡면의 지도다.

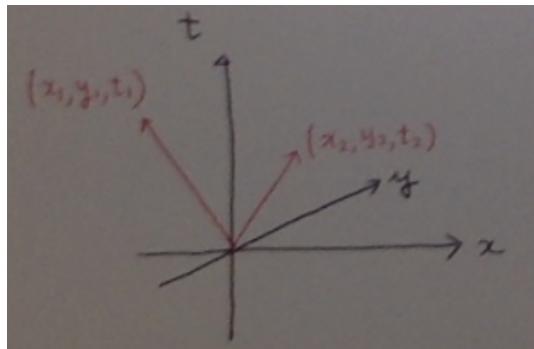
### 로렌쓰 공간

통상적으로 로렌츠 공간  $\mathbb{L}^3$ 의 점은  $(x, y, t)$ 로, 계량기는  $dx^2 + dy^2 - dt^2$ 로 나타낸다. 즉,

$$\mathbb{L}^3 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2\}.$$

이것이 의미하는 바는, 임의의 두 벡터  $(x_1, y_1, t_1)_p$ 와  $(x_2, y_2, t_2)_p$ 의 내적을 다음과 같이 정한다는 것이다.

$$(x_1, y_1, t_1)_p \circ (x_2, y_2, t_2)_p = x_1x_2 + y_1y_2 - t_1t_2. \quad (8.11)$$



사실 우리가 살고 있는 공간은 3차원이기 때문이기 때문에 1차원의 시간 까지 더한 4차원  $xyzt$  로렌츠 공간으로 기술이 되는데 그 경우 계량기는  $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$  이다. 차원이 높아짐에 따라 이론이 더 풍부해지는데 우리는 3차원 로렌츠 공간과 쌍곡 평면 사이의 관계를 알아보는 것까지만 다루기로 한다.

## 쌍곡평면의 쌍곡면 모델

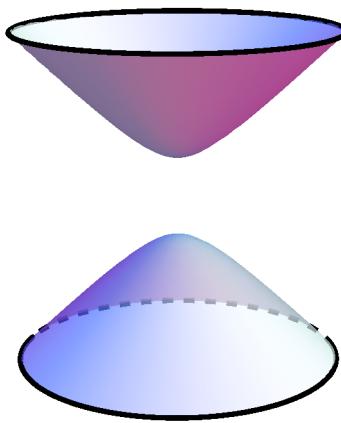
3차원 유클리드 공간에 들어 있는 2차원 구는 원점으로부터의 거리가 1인 점들의 집합임을 상기하라. 이와 유사한 맥락에서 3차원 로렌츠 공간에서 원점으로부터의 거리가  $i$ 인 점들의 집합, 즉

$$d((x, y, t), (0, 0, 0)) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 - (t - 0)^2} = i$$

을 생각하라. 이는 다음 방정식을 만족하는 점  $(x, y, t)$ 의 집합과 같다.

$$x^2 + y^2 - t^2 = -1.$$

이는 이엽 쌍곡면이 된다.



이 중에서 상반엽(上半葉), 즉  $t$ 가 0보다 큰 부분을  $H$ 라 하자. 즉

$$H := \{(x, y, t) \in \mathbb{L}^3 : x^2 + y^2 - t^2 = -1, t > 0\}.$$

## 쌍곡평면의 원반모델을 입체사영으로 얻어내기

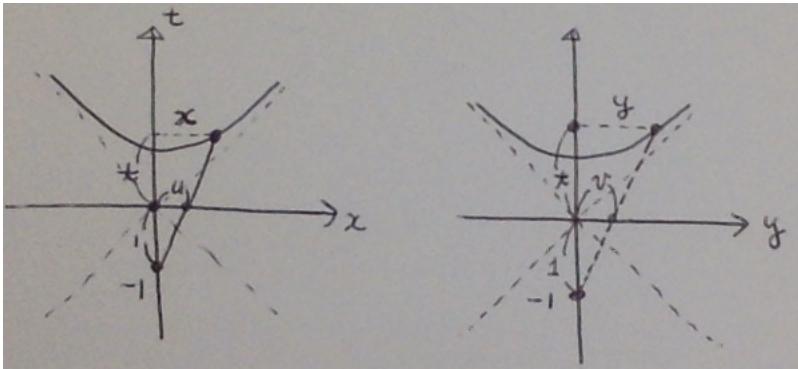
이 때 임의의 점  $P(x, y, t) \in H$ 와 남극점  $(0, 0, -1)$ 을 잇는 직선은  $xy$ -평면과 반드시 단 한 점  $Q(u, v)$ 에서 만난다. 유클리드 공간에서처럼, 이렇게  $P$ 에  $Q$ 를 대응시키는 관계 또한 입체 사영이라 하고  $\Pi$ 로 나타낸다.

정리 8.8.1. 다음이 성립한다.

$$(u, v) = \Pi(x, y, t) = \left( \frac{x}{1+t}, \frac{y}{1+t} \right), \quad (8.12)$$

$$(x, y, t) = \Pi^{-1}(u, v) = \left( \frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{2v}{1-u^2-v^2}, \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2} \right). \quad (8.13)$$

**증명** 로렌츠 공간에서 관련 도형들을  $xt$ -평면,  $yt$ -평면으로 사영시키면 다음과 같다.



각 그림에서 관련된 삼각형들의 비례 관계에서 쉽게 식  $\frac{x}{1+t} = \frac{u}{1} = u$ ,  $\frac{y}{1+t} = \frac{v}{1} = v$ 를 얻는다. 두 번째 식을 얻으려면 이를  $x^2 - t^2 = -1$ 과 연립하여 풀어  $t = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ 를 얻고 다른 식은 나머지로부터 얻는다. ■

위 식을 3차원 유클리드 공간 속의 구를 평면으로 보내는 입체 사영과 비교하여 보라.  $\Pi$ 는 상반 엽을 단위 원반과 일대일대응시킨다. 따라서 단위 원반은 상반 엽을 나타내는 지도가 된다. 이때 계량기는 어떻게 표현되는지 알아보자.

**정리 8.8.2.** 계량기는  $\frac{4(du^2+dv^2)}{(1-u^2-v^2)^2}$ , 즉 쌍곡 평면의 단위 원반 모델에 주어진 계량기와 같다.

**증명** 먼저 이엽 쌍곡면의 윗부분을 다음 함수의 이미지로 생각하자.

$$\mathbf{X}(u, v) = \left( \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2} \right), \quad u^2 + v^2 < 1.$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_u(u, v) &= \frac{2}{(1 - u^2 - v^2)^2} (1 + u^2 - v^2, 2uv, 2u), \\ \mathbf{X}_v(u, v) &= \frac{2}{(1 - u^2 - v^2)^2} (2uv, 1 - u^2 + v^2, 2v).\end{aligned}$$

여기서 3차원 로렌츠 공간의 내적을 이용하면

$$\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle_{L^3} = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle_{L^3} = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \quad \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle_{L^3} = 0.$$

그러므로

$$\begin{aligned} ds^2 &= \langle d\mathbf{X}, d\mathbf{X} \rangle_{L^3} \\ &= \langle \mathbf{X}_u \mathbf{X}_v \rangle_{L^3} du^2 + 2 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle_{L^3} dudv + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle_{L^3} dv^2 \\ &= \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}. \end{aligned}$$



이 정리는, 쌍곡 평면의 원반 모델이 3차원 로렌츠 공간 속에 들어 있는 이엽 쌍곡면의 상반 엽에 대한 지도라고 말하고 있다. 쌍곡 평면의 상반 평면 모델은 원반 지도를 상반 평면 지도로 바꾼 것이다. 이러한 맥락에서, 3차원 로렌츠 공간 속에 들어 있는  $H$ 는 3차원 유클리드 공간속에 들어 있는 구와 대응 관계에 있다고 할 수 있다.

## 중심사영을 통하여 쌍곡평면의 벨트라미-클라인 모델 얻어내기

중심사영

$$\Pi : H \subset \mathbb{L}^3 \rightarrow \{(x, y, t) \in \mathbb{L}^3 : t = 1\}, \quad (x, y, t) \mapsto \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, 1\right)$$

은  $H$ 를 평면  $t = 1$ 에 있는 단위원반으로 보낸다. 편의상

$$(u, v) = \left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$$

라고 하면,  $-1 = x^2 + y^2 - t^2$ 까지 이용하여, 다음을 얻는다.

$$(x, y, t) = \frac{(u, v, 1)}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}.$$

이렇게 해서 쌍곡평면의 쌍곡면 모델에 대한 곡면함수

$$\mathbf{X}(u, v) = \frac{(u, v, 1)}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \quad \text{단 } u^2 + v^2 < 1$$

를 얻는데 이 경우 계량기를 계산하여 얻어지는  $uv$ -지도는 쌍곡평면의 벨트라미-클라인 모델이다. [38]을 참조하라.

**연습문제 8.8.3.** 다음 문제를 풀어 보자.

1. 계량기를 실제로 계산해 보아라.
2. 벨트라미-클라인 모델의 특징을 알아보아라.

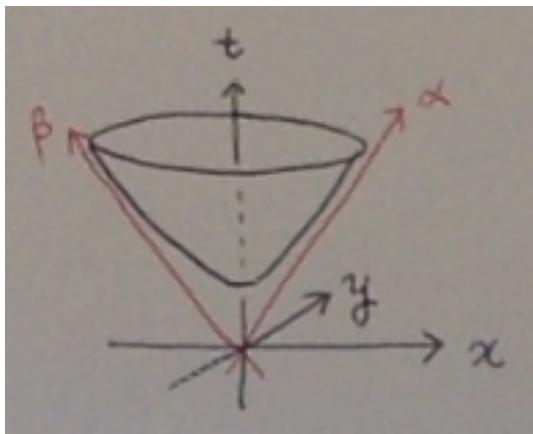
## 상반평면모델을 중심사영으로 얻어내기

먼저 3차원 로렌쓰 공간에 다음과 같은 새 좌표계를 설정하자.

$$\alpha = t + x, \quad \beta = t - x, \quad y = y.$$

그리면 쌍곡평면의 방정식은 다음과 같다:

$$\mathbf{H} = \{(\alpha, \beta, y) \in \mathbb{L}^3 : \alpha\beta = y^2 + 1\}.$$



이제  $\Pi_{\alpha_0} := \{(\alpha, \beta, y) \in \mathbb{L}^3 : \alpha = \alpha_0\}$ 라고 하면  $H^2$ 를  $\Pi_{\alpha_0}$ 로 자른 단면에 있는 점들은 다음 식을 만족시킨다.

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \alpha_0^{-1}(y^2 + 1).$$

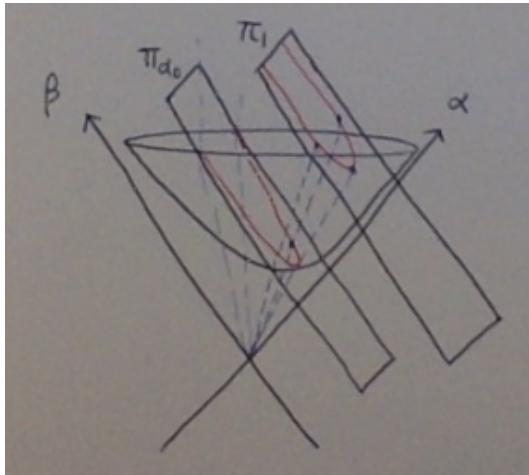
이 점들은 포물선이 됨에 주목하라.

이제 점  $(\alpha, \beta, y) = (0, 0, 0)$ 에서 뻗어나오는 직선을 이용하여 공간의 점을 평면  $\Pi_1$ 으로 보내는 중심사영을  $\Phi$ 라 하면

$$\Phi(\alpha, \beta, y) = (1, \beta/\alpha, y/\alpha).$$

$\Phi$ 에 의하여 위 곡선은 다음과 같이 변한다.

$$\alpha = 1, \quad \beta = y^2 + \alpha_0^{-2}.$$



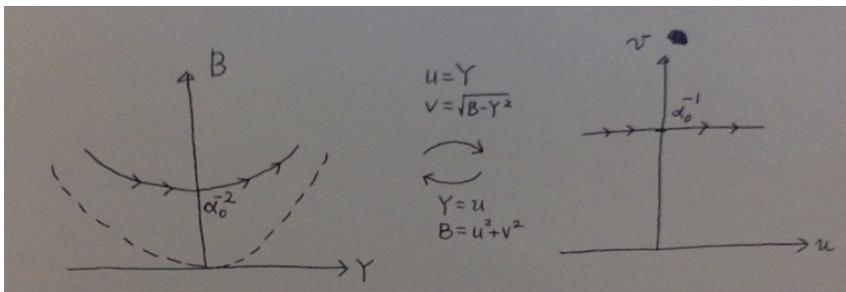
편의상 위 식을 다음과 같이 쓰자.

$$\{(Y, B) : B = Y^2 + \alpha_0^{-2}\}. \quad (8.14)$$

이는  $YB$ -평면에서 포물선이다. 이 포물선을 곧게 펴 보자. 그러기 위하여 다음과 같이  $u, v$ 를 정의한다.

$$u = Y, \quad v = \sqrt{B - Y^2}. \quad (8.15)$$

그러면 식 (8.14)로 주어진 포물선은  $uv$ -평면의 수평선  $v = \alpha_0^{-1}$ 에 해당한다.



변환 (8.14)는 역변환을 가지며 그 식은 다음과 같다:

$$Y = u, \quad B = u^2 + v^2.$$

이는  $uv$ -반평면 (즉  $v > 0$ )에 있는 수평선  $v = \alpha_0^{-1}$ 을  $YB$ -평면의 포물선  $B = Y^2 + \alpha_0^{-2}$ 으로 보내며 이는  $\mathbb{L}^3$ 의 평면  $\Pi_1$ 에 있는 포물선  $\beta = y^2 + \alpha_0^{-2}$ 와 같다. 이를 중심사영을 역으로 적용하여  $\Pi_{\alpha_0}$ 에 있는 점으로 보내면  $\beta = \alpha_0^{-1}(y^2 + 1)$ 을 만족시키는 포물선이 된다.

이를 모두 합성하면  $(u, v)$ 를  $H$ 의 점  $(\alpha, \beta, y) = (\frac{1}{v}, v + \frac{1}{v}u^2, \frac{u}{v}) = \frac{(1, u^2 + v^2, u)}{v}$ 로 보내는 변환을 얻는다. 이는  $txy$ 좌표로는 다음과 같다.

$$x = (\alpha - \beta)/2 = (v^{-1} - v - v^{-1}u^2)/2,$$

$$y = u/v,$$

$$t = (\alpha + \beta)/2 = (v^{-1} + v + v^{-1}u^2)/2.$$

즉,  $H^2$  는 다음과 같은 매개식을 가진다.

$$X(u, v) := (x, y, t) = \left( (v^{-1} - v - v^{-1}u^2)/2, u/v, (v^{-1} + v + v^{-1}u^2)/2 \right).$$

이 매개식의 계량기를 계산하면<sup>4)</sup> 다음과 같다. [39] 참조.

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

---

4) 이 절에서 지금까지의 계산은 사실 공간을 꼭 로렌츠 공간이라고 생각하지 않아도 되나  
지금 계량기를 계산하는 부분에서는 반드시 로렌츠 공간의 계량기를 가지고 해야 한다.

## 8.9 연습 문제

5장 2절에서 다룬, 유클리드 공간에 있는 단위구를 평면으로 보내는 입체사영을  $\Pi_E$ 라 하자. 이 때 단위구를 임의의 평면으로 자르면 원, 이를  $\gamma$ 라 하자, 이 얻어지는데  $\gamma$ 가 북극점을 지나는 경우  $\Pi_E(\gamma)$ 는 직선,  $\gamma$ 가 북극점을 지나지 않는 경우  $\Pi_E(\gamma)$ 는 원이 된다.

이와 비슷한 현상이  $H$ 를 평면으로 자른 단면을 입체사영하였을 때 벌어진다. 다음 연습문제들을 통해 이에 대하여 알아보자.

**연습문제 8.9.1.** 평면  $P : ax + by - ct + d = 0^5)$  과  $H$ 가 만나는 공통부분의  $\Pi$ 에 의한 상은

만약  $c + d = 0$ 면  $au + bv + (d - c)/2 = 0$ 로 주어지는 유클리드적 선분,

만약  $c + d \neq 0$ 면  $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = r^2$ 로 주어지는 유클리드적 원

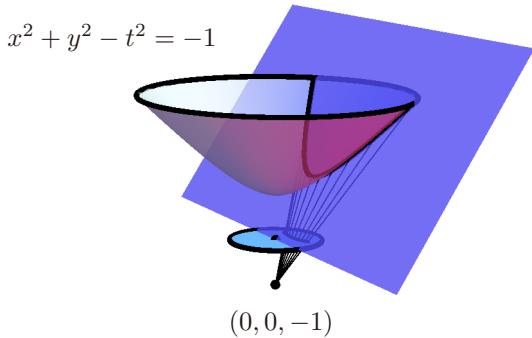
임을 보여라. 단

$$u_0 := \frac{a}{c+d}, \quad v_0 := \frac{b}{c+d}, \quad r := \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}}{|c+d|}. \quad (8.16)$$

---

5)  $(a, b, -c)$ 가 아닌  $(a, b, c)$ 가 평면에 수직이다.

**연습문제 8.9.2.**  $d = 0$  일 때, 즉  $P$ 가 원점을 지나는 평면일 때,  $\Pi(H \cap P)$ 은 단위원반에 수직으로 만나는 선분이거나 원호, 즉 쌍곡 평면의 곧은선, 임을 보여라.



**연습문제 8.9.3.**  $d \neq 0$  일 때 식 (8.16)은 다음을 줌을 보여라.

$$\frac{a}{d} = \frac{2u_0}{1-E}, \quad \frac{b}{d} = \frac{2v_0}{1-E}, \quad \frac{c}{d} = \frac{1+E}{1-E}, \quad E := u_0^2 + v_0^2 - r^2. \quad (8.17)$$

**연습문제 8.9.4.** 단위 원반에서 식  $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = r^2$  을 만족시키는 점들의 집합을 역사영하면 다음을 만족시킴을 보여라.

$$2u_0x + 2v_0y - (1+E)t + (1-E) = 0.$$

(힌트:  $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = r^2$  으로부터  $(\frac{x}{1+t} - u_0)^2 + (\frac{y}{1+t} - v_0)^2 = r^2$ . 이를 정리하면서  $x^2 + y^2$  을  $t^2 - 1$  로 치환하면 다음을 얻는다.

$$(E + 1)t^2 - 2u_0xt - 2v_0yt = -2Et + 2u_0x + 2v_0y - (E - 1).$$

이를 잘<sup>6)</sup> 정리하면 된다.)

**연습문제 8.9.5.**  $d_0 := \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$  라 할 때 (8.16)로부터 다음이 성립함을 보여라.

$$(d_0 + r - 1)(d_0 - r + 1)(d_0 - r - 1)(d_0 + r + 1) = -4 \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{(c + d)^2}.$$

이 식을 이용하여  $\Pi(H \cap P)$  가 원, 극한원, 초원인 것은  $a^2 + b^2 - c^2$  이 0보다 작거나, 0과 같거나, 0보다 크기 위한 필요충분조건임을 보여라.<sup>7)</sup>

**연습문제 8.9.6.**  $a^2 + b^2 - c^2$  이 0보다 작거나, 0과 같거나, 0보다 큰 경우  $H \cap P$  는 각각 유클리드 적으로 타원, 포물선, 쌍곡선이 됨을 보여라. (해설: 이것은  $\Pi(H \cap P)$  를 각각  $E$ ,  $P$ ,  $H$  라고 분류한 다른 이유가 되기도 한다.) (힌트: 이 문제에 답하는 가장 쉬운 방법은  $H \cap P$  를  $xy$ -평면으로 정사영한 상을 보는 것이다.)

6) 꼭 해 볼 것!

7) 각각의 경우  $P$  를 공간적, 광적, 시간적 평면이라 한다.



# 제 9 장

## 리만 기하학

## 9.1 리만 다양체를 향하여

쌍곡 평면, 로렌츠 평면 등을 통하여 우리는  $\mathbb{R}^2$ 의 영역에 계량기가 주어지면 유클리드 평면 기하와는 다른 기하가 될 수 있음을 알아보았다. 이제 지도를 통하여 기하를 공부하는 방법을 일반화시키는 두 가지 방향에 대하여 살펴보자.

하나는 지도의 차원을 높이는 것이다. 차원을 하나만 높여 생각하자.  $\mathbb{R}^3$ 의 영역  $\mathcal{U}$ 에 유클리드 계량기가 아닌 다른 계량기  $g$ 가 주어지면  $(\mathcal{U}, g)$ 에서 벌어지는 기하는 유클리드 공간 기하가 아닌 다른 3차원 공간의 기하가 된다. 즉  $\mathcal{U}$ 는 어딘가에 있는 어떤 3차원 영역을 나타내는 3차원 지도라고 해석을 할 수 있다. 더 나아가 비-유클리드 계량기가 주어진  $n$ -차원 영역을 생각할 수도 있는데, 이런 것은 2차원 지도를 일반화한  $n$ -차원 지도로 생각할 수 있겠다. 다음 절에서 몇 가지 3차원 지도와 계량기를 제시한다. 휘어진 공간이란 이렇게 비-유클리드 계량기가 주어진 지도를 말한다고 이해하면 사실과 크게 다르지 않다.

다른 하나는 곡면 조각 여러 개를 이어 붙여가면서 전체 곡면을 만들어 내는 것이다. 이 강의록에서는 곡면 조각 하나에서 생기는 일만 다루었지 곡면 조각 여러 개를 이어붙여 전체를 만든다는 게 어떤 건지 예를 보인 적도 없고 설명을 제시한 적도 없다. 다다음 절에서 리만 곡면을 통하여 이런 예를 제시한다.

이제 어떤  $n$ -차원 물체의 부분부분을 나타내는 여러  $n$ -차원 지도들이 주어졌다고 하자. 그러면 주어진  $n$ -차원 지도들을 이리저리 붙여가면서 전체를 상상할 수 있다. 이렇게 만들어낸 전체가 다양체(manifold)다. 물론 정확한 수학적 정의는 이렇게 주어지지 않지만 본질적으로 이렇다는 얘기다. 다양체는 현대 수학에서 정말 중요한 개념이다. 사실 이 강의록 전체를 통하여 이야기하고 싶었던 것이 ‘다양체라는 것이 있다’는 것이다. 다양체의 정의와 다양체에서 성립하는 기하에 대해서는 엄청나게 많은 문헌이 존재하므로 이 강의록을 넘어 다양체의 기하를 공부하고 싶은 이는 다양체에 관한 문헌들을 읽어보면 된다.

다양체는, 물론 어느 공간에 집어넣어 생각할 수도 있지만<sup>1)</sup>, 본질적으로 어느 공간에 (들어) 있는 존재가 아니며, 우주의 수학적 모델로 쓰여왔다. 우주는 가장 큰 것으로서 우주보다 더 큰 것은 없으므로 우주를 나타내기 위해선 우주를 다양체로 바라보는 것이 적절해 보인다.

---

1) 노벨 경제학상 수상자인 존 내쉬의 이름이 붙은 내쉬 매립 정리라는 것이 있는데 이는 모든 리만 다양체는 적당한 고차원 유클리드 공간에 들어있는 것으로 생각해도 된다는 것이다.

## 9.2 3차원 지도와 계량기의 예

위에 제시한 일반화의 두 방향 중 차원을 높이는 부분에 대한 예를 몇 가지 제시한다.

**3차원 구  $\mathbb{S}^3(1)$ 의 대부분을 나타내는 지도와 계량기**

$$\mathcal{U} = \mathbb{R}^3, \quad (u, v, w) \in \mathcal{U}, \quad ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2 + dw^2)}{(1 + (u^2 + v^2 + w^2))^2}.$$

지도 한 장만으로 나타낼 수 없는 공간.  $\infty$  주변을 나타내기 위하여 다른 지도가 필요하다.

**3차원 쌍곡 공간  $\mathbb{H}^3(-1)$  전체를 나타내는 지도와 계량기 반공간 모델이다.**

$$\mathcal{U} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w > 0\}, \quad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2}.$$

**3차원 쌍곡 공간  $\mathbb{H}^3(-1)$  전체를 나타내는 지도와 계량기 공 모델이다.**

$$\mathcal{U} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 < 1\}, \quad ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2 + dw^2)}{(1 - (u^2 + v^2 + w^2))^2}.$$

## 9.3 리만 다양체의 접속과 곡률

리만 다양체란 계량기  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 이 주어진 다양체  $M$ 을 말한다. 이 절에서는 이 경우 곡률을 어떻게 정의하는지 이 책의 5.6절을 따라 간단히 살펴본다. 자세한 사항은 리만기하학에 관한 대부분의<sup>2)</sup> 책에서 찾아볼 수 있다.

먼저 리만 다양체에서도 지도를 생각한다. 그 좌표함수를  $u^1, u^2, \dots, u^n$ 이라고 하자. 그러면  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는  $g_{ij}du^i du^j$  꼴이 된다. 단  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 이  $g_{ij}$ 에 대하여 정의 4.3.7에서처럼 크리스토펠 기호  $\Gamma_{ij}^k$ 를 정의한다. 그리고 임의의 함수들  $f^i, g^j$ 에 대하여

$$\nabla_{(f^i \partial_i)}(g^j \partial_j) := f^i ((\partial_i g^j) \partial_j + g^j \Gamma_{ij}^k \partial_k) = f^i (\partial_i g^k + g^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k$$

라고 정의하자. 이  $\nabla$ 는 (5.42), (5.43), (5.44), (5.45), (5.46), (5.47)을 만족시키는 접속이 된다. 이제 이 접속에 대하여 정의 5.7.1과 똑같이 다음 리만곡률 텐서  $R$ 을 정의한다.

$$R(X, Y)Z := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - [X, Y].$$

다음 정의는 식 5.49과 비교하여 비슷한 점과 다른 점을 생각해 보기 바란다.

**정의 9.3.1.**  $T_p M$ 의 2차원 부분공간  $\Pi_p$ 의 단면 곡률(sectional curvature)은

---

2) 사실은 ‘모든’이 맞겠지만 저자가 모든 리만 기하학 책을 본 게 아니어서 이 정도로 쓴다.

다음과 같이 정의된다.<sup>3)</sup> <sup>4)</sup>

$$K(\Pi_p) := \frac{\langle R(X_p, Y_p)Y_p, X_p \rangle(p)}{\langle X_p, X_p \rangle \langle Y_p, Y_p \rangle - \langle X_p, Y_p \rangle^2}$$

(단, 여기서  $X, Y$ 는  $\Pi$ 의 임의의 기저. 어떤 기저를 택하더라도 이 값은 변하지 않는다.) 리치 곡률(Ricci curvature)은 다음과 같이 정의된다. 단  $n$ 은 리만 다양체의 차원이다.

$$Ric(X, Y) := \sum_{i=1}^n \langle R(X_i, Y)X, X_i \rangle, \quad \text{단 } \{X_i\}_{i=1}^n \text{은 단위 직교 기저}$$

스칼라 곡률(scalar curvature)은 다음과 같이 정의된다.

$$S(p) := \sum_{i=1}^n Ric(X_i(p), X_i(p)), \quad \text{단 } \{X_i\}_{i=1}^n \text{은 단위 직교 기저.}$$

특정한 리만다양체에 대한 위 곡률들의 구체적인 값을 구하는 일반적인 방법은 좌표를 하나 선택하고 그 좌표를 통하여 모든 연관된 모든 것을들 구해나가는 것이다.

3) 이런, 부호가 반대네. 거 참, 어떻게 맞추지?

4) 죽겠네. 여기서는  $R$ 의 argument들이 벡터장이 아니고 벡터네... 그리고 이것을 2차원 다양체의 곡률로 설명하려면 Exponential map을 정의해야 하는데...

## 9.4 아인슈타인의 장 방정식

(위키피디아에서 [http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_field\\_equations](http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations))

4차원 다양체  $M$ 에 스트레스 텐서  $T$ 가 주어져 있다고 하자. 그러면 다음 식을 만족시키는 4차원 로렌츠 계량기  $g$ 가 존재하겠는가?

$$(각 지도에서) \quad Ric_{ij} - \frac{1}{2}Sg_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}.$$

여기서

$$Ric_{ij} = \text{리치 곡률 텐서 } Ric \text{의 성분} \quad (9.1)$$

$$S = \text{스칼라 곡률} \quad (9.2)$$

$$g_{ij} = \text{계량기 } g \text{의 성분} \quad (9.3)$$

$$\Lambda = \text{우주 상수 (cosmological constant)} \quad (9.4)$$

$$G = \text{뉴턴의 중력 상수 (gravitational constant)} \quad (9.5)$$

$$c = \text{빛의 속력} \quad (9.6)$$

$$T_{ij} = \text{스트레스 텐서 } T \text{의 성분} \quad (9.7)$$

여기서 스트레스 텐서란 물질과 에너지의 분포 때문에 생기는 것인데 아무 것도 없으면 **0**이다. 위 식은 물질과 에너지의 분포가 공간의 곡률을 결정하는

원리라고 아인슈타인이 제시한 식이다.<sup>5)</sup> 리만 계량기가 아닌 로렌쓰 계량기에 대해서도 접속  $\nabla$ 는 같은 방식으로 정의되고 리만 계량기에 대해 정의된 접속과 유사한 성질을 가진다.

위 성질을 만족시키는 로렌쓰 계량기  $g$ 가 존재하면  $(M, g)$ 는 우주의 모델이 된다. 여기서는 빛이 나아가는 길을  $(M, g)$ 의 곧은선으로 해석한다. 즉,  $g$ 에 대한 접속을  $\nabla$ 라 할 때  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mathbf{0}$ 을 만족시키는 곡선  $\gamma$ 를 따라서 빛이 움직이는 것으로 한다.

---

5) 수학의 많은 위대한 발견이 그렇듯이 이 식도 사실은 힐베르트가 아인슈타인이 이 식을 발견하기 불과 몇달 전에 변분법이라는 수학의 한 기법을 이용하여 유도하였다고 한다.

## 9.5 연습문제

다음에 주어진 문제들은 모두 3차원 구 속의 클리포드 원환면 (Clifford Torus)라는 곡면의 성질을 이용한 문제이다.

**연습문제 9.5.1.** 다음 집합들을 생각하라.

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

이 때  $S^1$ 과  $S^2$ 는 각각 원과 구를 나타내며, 이를 입체 사영으로 지도로 표현하는 방법은 다음과 같다.

1. 자,  $S^3$ 에 대한 3차원 지도는 어떻게 만들어지는가?

2. 다음 집합을 생각하라.

$$CT = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 : x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}, x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}\}.$$

$CT$ 는  $S^3$  속에 들어있는 곡면이다. 이를 지도 속에 그려 보아라.

**연습문제 9.5.2.**  $xz$ -평면에 주어진 다음 곡선이 사실은 원임을 보이고 중심과 반지름을 구하여라.

$$\vec{r}(b) = \left( \frac{1}{\sqrt{2} - \sin b}, 0, \frac{\cos b}{\sqrt{2} - \sin b} \right), \quad 0 \leq b < 2\pi$$

**연습문제 9.5.3.** 점  $\vec{r}(b)$ 를  $z$ -축에 대하여  $a$  만큼 회전시킨 점을  $\vec{X}(a, b)$  라 할 때,  $\vec{X}(a, b)$ 의 식을 구하여라. ( $\vec{X}$ 의 이미지는 결국 원환면이 된다.)

$$\vec{r}(b) = \left( \frac{1}{\sqrt{2} - \sin b}, 0, \frac{\cos b}{\sqrt{2} - \sin b} \right), \quad 0 \leq b < 2\pi$$

**연습문제 9.5.4.**  $t \in [0, 2\pi]$  에 대해 곡선  $\vec{\alpha}(t) = \vec{X}(t, t)$ 를 생각하라. 이 곡선  $\vec{\alpha}$ 가 사실은 원임을 보이고 그 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하여라.  
(힌트.  $\vec{\alpha}$ 의  $x$ -좌표와  $z$ -좌표가 같음을 잘 이용하여라.)

**연습문제 9.5.5.**  $a_0, b_0$ 가 상수일 때,  $\vec{X}(a, b_0), \vec{X}(a_0, b)$  등 도 모두 원환면 위의 원이고,  $\vec{\alpha}$ 도 원환면 위의 원인데, 이를  $z$ -축에 대해 돌려도 여전히 원환면 위의 원이다. 자 원환면 위에 위에서 알아낸 원 말고도 다른 원들이 있겠는가?

# 부록

## A 1-형식들의 텐서 곱, 대칭 곱, 쪘기 곱

**이 절의 학습 목표** 선형대수학에서 소개되는 벡터  $v$ , 내적  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , 쌍대공간  $V^*$ , 1-형식, 텐서 곱  $\otimes$ , 대칭 곱  $\odot$ , 쪽기 곱  $\wedge$  등등에 대하여 복습한다.

2차원 벡터 공간  $V$ 를 생각하자. 이 때 한 쌍의 벡터  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 에 대하여 다음 네 가지 성질을 만족시키면서 실수를 대응시키는 함수  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 를 내적이라 한다.

- (1) 어떤  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 에 대해서도  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ .
- (2)  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  이면  $\mathbf{v} = 0$ . 거꾸로,  $\mathbf{v} = 0$ 이면  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .
- (3)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 대칭이다. 즉,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ .
- (4)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 각 항에 대해 선형이다.

내적이 정해져 있는 2차원 벡터 공간  $V$ 의 기저  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ 를 하나 선택하자. 그러면 모든 벡터는  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ 의 선형결합으로 나타내어진다. 이 때,

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{f}_1 + v^2 \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{w} = w^1 \mathbf{f}_1 + w^2 \mathbf{f}_2$$

라고 하면, 아인쉬타인의 합 기호법을 사용하여,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle v^i \mathbf{f}_i, w^j \mathbf{f}_j \rangle = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle v^i w^j. \quad (\text{A.1})$$

이제 일-형식(一形式, one-form)이라는 것을 도입하자. 앞에서  $f_1, f_2$ 라는 기저를 고정했는데, 이 때  $V$ 에서  $\mathbb{R}$ 로 가는 두 선형함수  $\theta^1, \theta^2$ 를 다음과 같이 정의하자.<sup>6)</sup>

$$\theta^i(\mathbf{f}_j) = \delta_j^i := \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

이러면 선형성 덕분에

$$\theta^i(\mathbf{v}) = v^1\theta^i(\mathbf{f}_1) + v^2\theta^i(\mathbf{f}_2) = v^i$$

가 된다. 마찬가지로  $\theta^j(\mathbf{w}) = w^j$ . 따라서 (A.1)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \theta^i(\mathbf{v})\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle \theta^j(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle \theta^i(\mathbf{v})\theta^j(\mathbf{w}) \quad (\text{A.2})$$

이때 이 식의 양변에서  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 를 지워버리고 다음과 같이 쓰고 싶다.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \theta^i\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle \theta^j = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle \theta^i \theta^j \quad (\text{A.3})$$

그런데 (A.2)은 괜찮지만 (A.3)는 아직은 괜찮지 않다. (A.2)에서의 곱은 실수들끼리의 곱인데 반하여 (A.3)에 등장하는 실수  $\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle$ , 1-형식  $\theta^i$  그리고  $\theta^j$  사이의 곱은 아직 정의가 되지 않은 탓이다. 즉  $\theta^i \theta^j$ 의 의미가 주어져 있지 않다. 여기서 텐서곱, 짜기곱, 대칭곱 등의 개념이 등장한다.

$V$ 에  $\mathbb{R}$ 로 가는 선형 사상을 1-형식이라 하고 모든 1-형식들의 모임을  $V^*$ 라고 하자. 그러면  $V^*$  또한 2차원 벡터 공간이 되며  $\theta^1, \theta^2$ 는  $V^*$ 의 기저가 된다.

---

6) 즉  $\delta_j^i$ 는 크로네커(Kronecker) 델타다.

$\theta^1, \theta^2$  를  $f_1, f_2$  의 쌍대 기저라고 한다. 이 때  $\alpha, \beta \in V^*$  에 대하여

$$\text{텐서곱}(\alpha \otimes \beta), \quad \text{대칭곱}(\alpha \odot \beta), \quad \text{쐐기곱}(\alpha \wedge \beta)$$

등을

$$\alpha \otimes \beta(v, w) := \alpha(v) \cdot \beta(w)$$

$$\alpha \odot \beta(v, w) := \frac{\alpha \otimes \beta(v, w) + \beta \otimes \alpha(v, w)}{2}$$

$$\alpha \wedge \beta(v, w) := \frac{\alpha \otimes \beta(v, w) - \beta \otimes \alpha(v, w)}{2}$$

와 같이 정의한다. 이때 일반적으로  $\alpha \otimes \beta(v, w) \neq \beta \otimes \alpha(v, w)$  이기 때문에  $\alpha \otimes \beta \neq \beta \otimes \alpha$  라고 할 수 있으나<sup>7)</sup>  $\alpha \odot \beta(v, w) = \beta \odot \alpha(v, w)$  인 덕분에

$$\alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha$$

라고 할 수 있다. 마찬가지로

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$$

임을 알 수 있다. 두 실수 사이의 곱을 나타낼 때 곱 기호( $\times$ )를 생략하는 것처럼 대칭곱에서도  $\odot$  을 생략하여  $\alpha \odot \beta$  을  $\alpha\beta$  와 같이 쓰기도 한다. 즉

$$\alpha \odot \beta = \alpha\beta$$

이제 텐서곱을 이용하면 (A.3)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle f_i, f_j \rangle \theta^i \otimes \theta^j$$

7) 정확히 말하자면 ‘ $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$  라고 할 수 없으나’

그런데 잘 보면, 내적이 대칭이라는 사실로부터, 다음을 알 수 있다.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle \theta^i \odot \theta^j = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle \theta^i \theta^j$$

이제 (A.3)의 표현이 괜찮은 표현이 되었다.

**곡면론과 선형대수 사이의 관계** 자, 미분 기하를 공부하는 데 왜 갑자기 선형 대수를? 이는 곡선과 곡면을 공부하는 데에 벡터가 이용되기 때문이며 이미 1학기 때 이에 대하여 자세히 살펴 본 바가 있다. 이제 생각해 보고자 하는 점은 곡면의 접벡터를 어떻게 곡면을 나타내는 지도에서 생각할 수가 있는가 하는 점이다. 이를 위해서는 먼저 지도 상의 벡터들에 대해서 개념을 조금 바꿀 필요가 있다. 이제까지는 평면에서 벡터는 시점에 관계없이 크기와 방향만 같으면 같은 벡터라고 배웠다. 예를 들어 다음 그림에서  $v_p$ 와  $v_q$ 는 서로 같은 벡터라고 배웠다.

### 그림첨가

그런데 미분 기하에서는 위 그림의  $v_p$ 와  $v_q$ 를 같은 벡터라고 보지 않는다. 즉, 벡터의 시점이 다르면 다른 벡터라고 보는 것이다. 이렇게 하는 이유는, 지금

이 시점에서 말로 설명하면 오히려 더 알기 어려우므로 다음 절에서 공부하는, 지도의 벡터를 곡면의 벡터와 동일시하는 과정을 공부한 다음에는 이해가 쉬울 것이라는 이야기만 하고 넘어간다.

어쨌거나, 이제 지도에서 시점이 같은 벡터들을 다 모아 놓으면 기존의 벡터 덧셈(vector addition)과 수 곱셈(scalar multiplication)에 대하여 여전히 벡터공간이 된다. <sup>8)</sup> 즉, 지도의 매 점마다 벡터공간이 할당되어 있다고 할 수 있다. 이때 지도 위의 모든 벡터들의 집합은 지도 위 매 점에 할당된 벡터공간들의 합집합이 되는데 이를 벡터 다발(vector bundle)이라 한다.

---

8) 이 말의 의미를 정확히 이해하기 바란다.

## B 미분형식

이 책의 본문에서 다루는 많은 것들이

$$\mathbf{F} : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

꼴이다. 예를 들어 1장에서 다룬 평면 곡선  $\gamma$ , 2장에서 다룬 공간 곡선  $\alpha$ , 3장 이후부터 다룬 곡면  $\mathbf{X}$ , 평면의 점의 좌표를 나타내는 좌표 함수  $u^i$ , 또한 일변수 함수  $f$  등이 그렇다.

$$\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$u^i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

이제  $\mathbf{F}$ 의 미분 형식(differential form)이라 하는  $d\mathbf{F}$ 란 것에 대하여 알아보자.<sup>9)</sup> 이를 통하여 본문에 소개된  $d\mathbf{X}$ ,  $d\mathbf{G}$ ,  $du^i$  등의 의미를 파악할 수 있다.

$\mathcal{V}$ 의 한 점  $p$ 와  $\mathbb{R}^m$ 의 벡터  $\mathbf{v}_p$ 에 대하여 다음과 같은 곡선을 생각하라.

$$\delta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{V}, \quad \delta(0) = p, \quad \dot{\delta}(0) = \mathbf{v}.$$

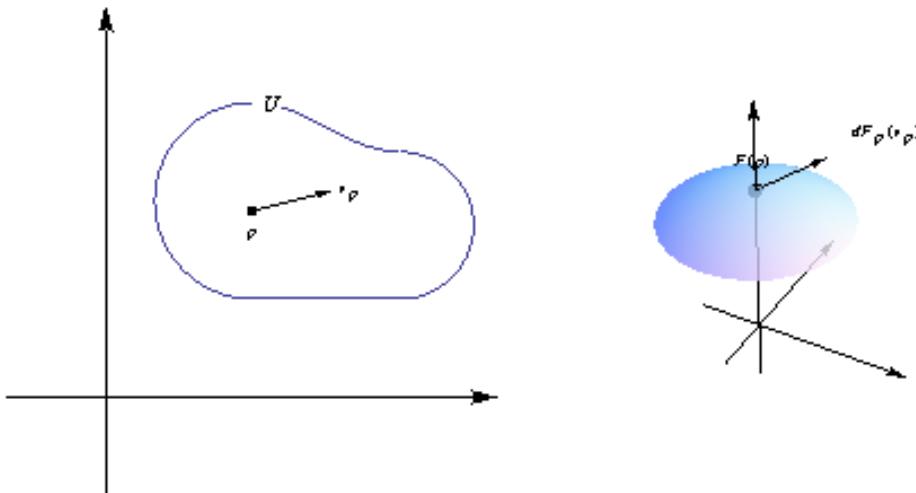
---

9) 자세한 설명은 [16, 125쪽 ~ 133쪽]을 참조하라.

이제  $d\mathbf{F}$ 는  $\mathbf{v}_p$ 를 다음과 같이 보낸다.

$$d\mathbf{F}(\mathbf{v}_p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{F} \circ \delta(t).$$

$m < n$ 인 경우  $d\mathbf{F}(\mathbf{v}_p)$ 는  $\mathbf{F}$ 의 이미지에 접하는 벡터가 된다.  $\mathbf{F}$ 가  $X$ 인 경우는 이미 본문에 잘 다루어져 있다.  $\mathbf{F}$ 가  $\gamma$ ,  $\alpha$ 인 경우는 약간의 해석이 필요하다. 먼저  $\mathbf{v}_p$ 를 시각화하여 보자. 이는 수직선에서  $p$ 라는 수에서 출발하여  $v$ 라는 수만큼 오른쪽 또는 왼쪽으로 움직인 벡터를 나타낸다.



이는  $S \subset \mathbb{E}^3$ 의 접벡터와  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 의 벡터를 일대일 대응시키기 위한 작업이다.

## 중요

$$d\mathbf{F}_p : T_p \mathcal{U} \cong \mathbb{R}^m \rightarrow T_{\mathbf{F}(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

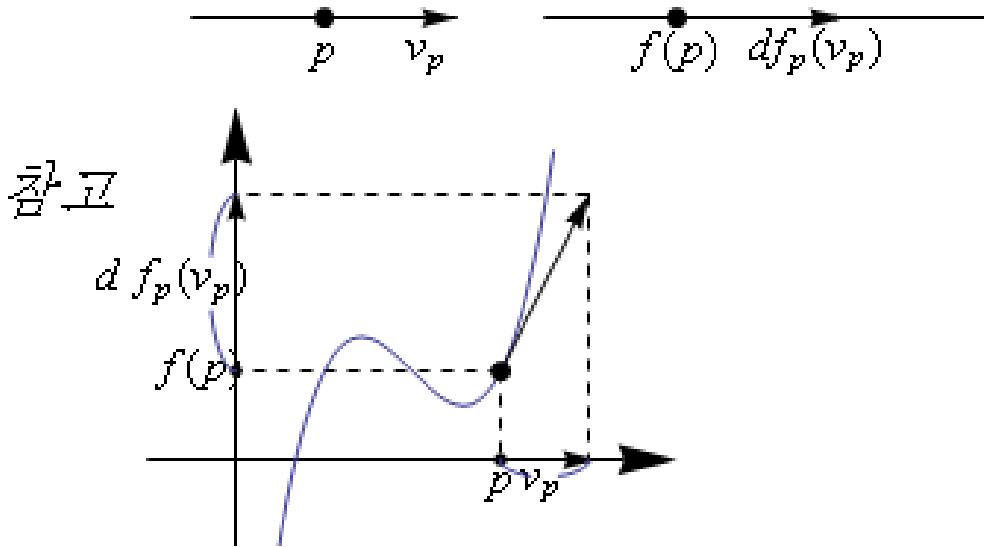
예 B.6.  $f(x) = x^3$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

먼저  $T_p \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ ,  $T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ .

$$df_p(q) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (p + tq)^3 = 3p^2 \cdot q.$$



예 B.7. 일반적으로 연쇄법칙에 의하여  $df_p(v_p) = \frac{df}{dx}(p) \cdot v_p$ .

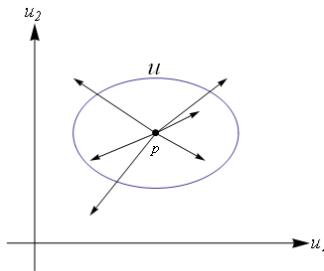


예 B.8.  $u^i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ 가 좌표함수일 때,  $du_p^i$ 는 점  $p \in \mathcal{U}$ 에 시점을 둔 평면벡터  $v_p$ 를 숫자  $du^i(v_p)$ 로 보낸다. 다른 말로,  $du_p^i$ 는  $T_p\mathcal{U}$ 에서  $\mathbb{R}$ 로 가는 일-형식이다.

예 B.9. 곡선  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ 에 대하여  $d\gamma_p$ 는 점  $p \in (a, b)$ 에 시점을 둔 일차원 벡터  $v_p$ 를 점  $\gamma(p) \in \mathbb{R}^2$ 에 시점을 둔 2차원 벡터로 보낸다.

예 B.10. 곡면  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대하여  $d\mathbf{X}$ 는 점  $p \in \mathcal{U}$ 에 시점을 둔 평면벡터  $v_p$ 를 점  $\mathbf{X}(p) \in \mathbb{R}^3$ 에 시점을 둔 3차원 벡터로 보낸다.

이의 응용에 가장 중요한 것은  $\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 에 대해서다. 점  $p \in \mathcal{U}$ 에 시점을 둔 벡터들의 집합을  $T_p\mathcal{U}$ 라 하자.



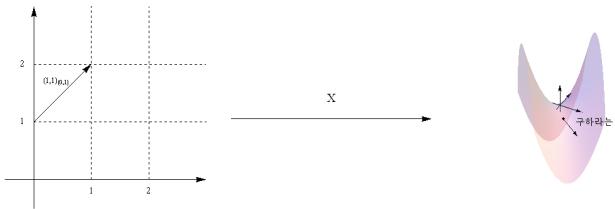
자,  $v_p \in T_p\mathcal{U}$ 를  $d\mathbf{X}$ 로 보내면 어떠한 벡터가 되는가? 이를 위해  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $\gamma(t) = p + tv_p$ 를 생각하면,

$$d\mathbf{X}_p(v_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbf{X} \circ \gamma)(t).$$

이는 곡면  $\mathbf{X}[\mathcal{U}] \subset \mathbb{E}^3$ 의 이미지에  $\mathbf{X}(p)$ 에서 접하는 벡터가 된다.

**연습문제 B.11.** 다음 문제를 풀어 보자.

1.  $\mathbf{X}(u, v) = (u + v, u - v, u^2 - v^2)$  일 때,  $d\mathbf{X}_{(0,1)}((1, 1)_{(0,1)})$  를 구하여라.



2.  $d\mathbf{X}_p$  는  $T_p\mathcal{U}$  와  $T_{\mathbf{X}(p)}S$  사이의 isomorphism이 된다는 것을 보여라.

이 사상의 중요성은  $T_{\mathbf{X}(p)}S$  를  $T_p\mathcal{U}$  랑 동일시시켜준다는 데 있다. 좀 더 자세히 말하자면 공간 속 곡면의 접평면을 지도 속의 평면과 동일시하는 것이다. 즉, 곡면을 지도로 생각하고자 할 때 곡면 위 접벡터를 어떻게 지도의 접벡터로 볼 수 있는가 하는 방법을 제시하고 있다.

독자의 편의를 위하여, 다른 대상이 곡면을 나타내는 지도의 좌표함수인 경우를 특별히 정리하여 둔다. 함수  $u^i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  인 경우  $du_p^i$  는 2 차원 벡터공간  $T_p\mathcal{U} \cong \mathbb{R}^2$  로부터  $T_{u^i(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$  로 가는 사상이 되어  $(\mathbb{R}^2)^*$  의 원소로 생각할 수 있다. 이 때 앞 단원에서 소개한

$$\text{텐서 곱 } du_p^i \otimes du_p^j, \quad \text{대칭 곱 } du_p^i \wedge du_p^j, \quad \text{쐐기 곱 } du_p^i \odot du_p^j$$

을 생각할 수가 있다. 나중에 보게 되겠지만 대칭 곱은 일차기본형식, 즉 계량기와 이차 기본형식을 표현하는 데에 중요하게 쓰인다. 대칭 곱  $du_p^i \odot du_p^j$  을 간단히  $du_p^i du_p^j$ 로, 특히  $du_p^i \odot du_p^i$ 를  $(du^i)^2$ 으로 나타낸다. 째기곱은 이 강의록에서는 잘 다루지 않겠지만 미분 기하를 공부하는데 굉장히 중요한 도구라는 것과 [26]이 째기곱을 이용하여 기본적인 수준에서 출발하여 미분 기하를 전개하며 우리나라 많은 대학에서 교재로 사용한다는 이야기만 하고 넘어간다.



# 참고문헌

다음에 주어진 참고 문헌들은 아직 다 정리가 안된 상태지만, 학생들이 무슨 책을 읽으면 되는가에 대한 궁금증을 덜어 주고 싶은 마음에서 일단 적어 보았습니다.

- [1] 고려대학교 이과대학 수학과 교수실, 미적분학과 행렬, 고려대학교 출판부, 서울, 2001년.
- [2] 고바야시 쇼시찌, 유클리드 기하에서 현대 기하로 (번역: 원대연), 청문각, 서울, 2001년.
- [3] 고바야시 쇼시치, 곡선과 곡면의 미분 기하학 (번역: 김병학), 청문각, 서울, 1999년.
- [4] 양성덕, 공간의 세계 강의록, 2001년 가을
- [5] 양성덕, 로렌즈 평면과 공간의 기초 기하학, 작성 중.
- [6] 윤갑진, 미분 기하학, 경문사, 서울, 2004년.
- [7] 이오덕, 우리글 바로 쓰기 1 (오늘의 사상신서 131), 한길사, 파주, 경기도, 1998년.

- [8] 이경미, 로렌츠 평면의 삼각형과 원에 관한 초등기하, 고려대학교 대학원 수학과 석사학위논문, 2011년 7월.
- [9] 이종우(편저), 기하학의 역사적 배경과 발달, 경문사, 2001년.
- [10] 서진주, 로렌츠 평면의 이차곡선에 관하여, 고려대학교 대학원 수학과 석사학위논문, 2011년 6월.
- [11] 서대현, 로렌츠 삼각형의 게르곤 포인트, 고려대학교 대학원 수학과 석사학위논문, 2013년 12월.
- [12] 최대호, 미분 기하학, 제2판, 경문사, 2002년.
- [13] 최대호, 미분 기하학 제2판 연습문제풀이집, 경문사, 서울, 2002년.
- [14] 프레슬리, 앤드류, 미분기하학 입문(전재복·채영도·김병학 옮김), 경문사, 2009.
- [15] J. Anderson, Hyperbolic Geometry, Springer Verlag, London, 1999.
- [16] Manfredo P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [17] C. G. Gibson, Elementary Geometry of Differentiable Curves: an Undergraduate Introduction, Cambridge University Press, United Kingdom, 2001.
- [18] Ronald N. Goldman, Curvature formulas for implicit curves and surfaces, Computer Aided Geometric Design 22(7):632–658, October 2005.
- [19] Alfred Gray, Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.

- [20] M. J. Greenberg, Euclidean and Non-Euclidean Geometries, 2nd ed. W. H. Freeman and Co., U.S.A., 1974.
- [21] D. Hilbert and Cohn-Vossen, Geometry and the Imagination, Chalsea Publishing Co., N.Y., 1956.
- [22] R. Hartshorne, Geometry: Euclid and Beyond, Springer UTM, 2000.
- [23] J. E. Marsden, Basic Complex Analysis, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [24] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, Elementary Classical Analysis, 2<sup>nd</sup> ed., W. H. Freeman and Company, 1993.
- [25] Richard S. Millman and George D. Parker, Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [26] Barrett O'Neill, Elementary differential geometry, Academic Press, New York, 1966.
- [27] J. Oprea, The Mathematics of Soap films: Explorations with Maple, Student Mathematical Library, vol. 10, American Mathematical Society, U. S. A., 2000.
- [28] R. Osserman, A Survey of Minimal Surfaces, Dover Publications, Mineola, N.Y., 1986.
- [29] Saul Stahl, The Poincaré Half-Plane, Jones and Bartlett Publishing Co., London, England, 1993.
- [30] George A. Jennings, Modern Geometry with Applications, Universitext, Springer Verlag, 1994.

- [31] Robert Resnick, Introduction tp Special Relativity, John Wiley & Sons, 1968.
- [32] Barrett O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, 1984.
- [33] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, Elementary differential equations and boundary value problems, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney 1965
- [34] Michael Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish or Perish, INC. Vol. I , II , III, IV, V. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.
- [35] Elmer G. Rees, Notes on Geometry, Universitext. [University Textbook] Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983. viii+109 pp.
- [36] <http://www.dgp.toronto.edu/~mccrae/projects/clothoid/sbim2008mccrae.pdf>
- [37] [https://en.wikipedia.org/wiki/Poincaré\\_half-plane\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Poincaré_half-plane_model)
- [38] [https://en.wikipedia.org/wiki/Beltrami%E2%80%93Klein\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Beltrami%E2%80%93Klein_model)
- [39] Joseph A. Quinn, A complex Quarteernion model for hyperbolic 3-space, arXiv.1701.06709v2.

# 인명 찾아보기

여기에 등장하는 이름들은 이 책에 등장하는 수학자들입니다. 수학자 계보를 찾아보는 사이트인 <http://www.genealogy.ams.org>를 이용하면 수학자들의 족보를 알 수 있습니다.

Greenberg, 455

Minkowski, 480

가우스, Johann Carl Friedrich Gauss(30 April 1777 – 23 February 1855), 268

그린, George Green(14 July 1793 – 31 May 1841), 283

랑크레, Michel-Ange Lancret(15 December 1774 – 17 December 1807), 111

바이어슈트라스, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass(31 October 1815 – 19 February 1897), 187

보네, Pierre Ossian Bonnet(22 December 1819 – 22 June 1892), 268

빌라르소, Antoine-Joseph Yvon Villarceau(15 January 1813 – 23 December 1883), 107

셔억, Heinrich Ferdinand Scherk(27 October 1798 – 4 October 1885), 184

엔네퍼, Alfred Enneper(June 14 1830 – March 24 1885), 173

유클리드, Euclid(300 BC), 7

천성센(陳省身), Shiing-Shen Chern(26 October 1911 – 3 December 2004), 286

포앙카레, 391

프레네, Jean Frédéric Frenet(7 February 1816 – 12 June 1900), 75

# 용어 찾아보기

3차원 구, 514

3차원 쌍곡 공간, 514

Beltrami-Kelin 원반 모델, 455

bertrand mate, 108

binormal vector, 75

calculus of variation, 257

catenary, 180

catenoid, 180

clothoid, 3

digon, 270

elliptic point, 191

first fundamental form, 138

fundamental theorem for curves in space, 102

generalized helix, 108, 111

geodesic, 235

geodesic curvature, 235

geodesic triangle, 268

great circle, 232

Hopf Theorem, 192

hyperbolic point, 191

lightlike particle, 481

material particle, 481

meridian, 259

minimal surface, 173

Monge patch, 184

normal plane, 76

normal variation, 168

- order of contact, 93
- osculating plane, 76
  
- parabolic point, 191
- parallel, 259
- planar point, 191
- principal normal vector, 75
- proper time, 481
- PT, 22
  
- rectifying plane, 76
- ruled surface, 214
  
- second fundamental form, 138
- semi definite, 472
- signed curvature, 16
- signed curvature function, 16
  
- tangent vector, 75
- taxicab plane, 7
- torsion, 78
- total signed curvature, 44

- tractrix, 194, 216  
TSC, 44  
twisted cubic, 107  
  
umbilical point, 192  
  
variation, 251  
  
world line, 481
- 가우스 곡률, 162  
가우스 보네-천 항등식, 286  
가우스 사상, 128  
가우스-보네 정리, 268  
가우스의 식, 314  
가우스의 위대한 정리, 312  
각의 3등분, 405  
강체 운동, 371  
견인선, 194, 216  
경선, 259  
계량기, 306  
곡률 구, 114

- 곡률 원, 35  
곡률 텐서, 494  
곡면 조각, 127  
곡면론의 기본정리, 322  
곡면속 곡선론의 기본정리, 287  
곧은 선, 235  
곧은 선 연립 방정식, 244  
곧은선 삼각형, 268  
곧펴기 평면, 76  
공간 곡선론의 기본정리, 102  
공간적 벡터, 480  
공변 미분, 331  
과거를 향하는, 481  
광적 벡터, 480  
국소적 개념, 3  
극소 곡면, 173  
기하 평균, 119  
꼬인 3차 곡선, 107  
  
나선, 108  
나선면, 115, 183

- 내재적 양, 306  
다양체, 513  
단면 곡률, 515  
단위 유사구면, 269  
대역적 가우스-보네 정리, 284  
대원(大圓), 232  
동시성, 488  
등각선, 220  
등비 변환, 181  
로그 나선, 49  
로렌츠 평면, 470  
리만 구, 424  
리치 곡률, 516  
매다니-코다지 식, 320  
몽주 조각, 184  
미래를 향하는, 481  
미분 형식, 310  
반수(反數), 45  
배꼽점, 192  
법 곡률, 160

- 법평면, 76  
변분법, 257  
변형, 251  
불변량, 167  
비누막, 171
- 사건, 479, 481  
사건  $p$ 의 과거, 481  
사건  $p$ 의 미래, 481  
사인 법칙, 398  
산술 평균, 119  
상반평면모델, 364  
선대칭, 409  
선직면, 214  
선형 분수 변환, 408  
셔억의 극소 곡면, 184  
수직변형, 168  
스칼라 곡률, 516  
스트레스 텐서, 517  
시간 원추, 481  
시간적 벡터, 480

- 시공간 평면, 479  
시점, 21  
쌍곡 평면, 364  
쌍곡점, 191  
어울림 조건, 322  
엔네퍼의 곡면, 173  
열률, 78  
오른 나선, 57  
오일러 특성수, 284  
옹골찬 집합, 163  
우주 상수, 517  
위선, 259  
유클리드 평면, 7  
유향 각, 36  
유향 곡률, 16  
유향 곡률 함수, 16, 24  
이각형, 270  
이엽 쌍곡면, 497  
이중 수직 벡터, 75  
일반 나선, 108, 111

- 
- 일반 상대성 이론, 494
  - 입체 사영, 124, 498
  - 입체사영, 124
  - 전 유향 곡률, 44
  - 접벡터, 75
  - 접촉 구, 55
  - 접촉 원, 99
  - 접촉 평면, 76
  - 접촉도, 93
  - 정칙, 127
  - 정칙 곡선, 24
  - 제1 기본 형식, 138
  - 제2 기본 형식, 138
  - 종법선벡터, 75
  - 종점, 21
  - 주 법(法) 벡터, 75
  - 중력 상수, 517
  - 직교좌표계, 274
  - 쪽매맞추기, 464
  - 최단선, 249

- 축폐선, 50  
측지 곡률, 235  
측지 선, 235  
코사인 법칙, 398
- 크리스토펠 기호, 241  
클리포드 원환면, 519  
타원점, 191  
택시 평면, 7  
평균 곡률, 162  
평면 곡선론의 기본 정리, 42  
평면점, 191  
평행 이동, 22, 409  
폐곡선, 46  
포물점, 191  
표준위치, 409  
푸앵카레 변환, 475  
프레네 방정식, 79  
프레네 틀, 75  
피타고라스의 정리, 393  
향보존, 439

현수면, 180

현수선, 180, 216

형 작용소, 145

호프 정리, 192

회선 곡선, 3

회전 이동, 409