Clausura de las Expresiones Lineales bajo Suma y Multiplicación por Constantes

Consideremos una expresión de la forma

$$E(x) = ax + b$$

donde a y b son constantes reales y x es una variable.

Queremos demostrar que si aplicamos cualquier secuencia finita de:

1. Multiplicación por una constante
2. Suma de una constante

a $E(x)$, el resultado puede expresarse nuevamente como

$$E'(x) = a'x + b'$$

para ciertas constantes a' y b'.

Paso 1: Multiplicación por una constante

Sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$k \cdot (ax + b) = (ka)x + (kb)$$

Esto sigue siendo de la forma $a'x + b'$ con $a' = ka$ y $b' = kb$.

Paso 2: Suma de una constante

Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$(ax + b) + c = ax + (b + c)$$

Esto sigue siendo de la forma $a'x + b'$ con $a' = a$ y $b' = b + c$.

Paso 3: Composición de operaciones

Dado que ambas operaciones individualmente preservan la forma $a'x + b'$, cualquier secuencia finita de ellas también preservará dicha forma. Esto se demuestra por inducción matemática:

Caso base: $E_0(x) = ax + b$ es de la forma $a'x + b'$.

Paso inductivo: Supongamos que $E_n(x) = a_n x + b_n$ tiene la forma deseada. Si multiplicamos por una constante o sumamos una constante, los Pasos 1 y 2 muestran que el resultado sigue siendo de la forma $a'x + b'$.

Por lo tanto, por inducción, después de cualquier número finito de sumas o multiplicaciones por constantes, la expresión sigue teniendo la forma $a'x + b'$.

Conclusión

Cualquier expresión obtenida a partir de $ax + b$ mediante una combinación finita de multiplicaciones por constantes y sumas de constantes puede reescribirse siempre como otra expresión $a'x + b'$, donde a' y b' son números reales.