UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Matija Kocbek

REDKEJŠI GRAFI Z VELIKIM KROMATIČNIM ŠTEVILOM

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2025

Kazalo

Redkejši grafi z velikim kromatičnim številom

POVZETEK

...

Sparse graphs with high chromatic number

ABSTRACT

...

Math. Subj. Class. (2020): ..., ...
Ključne besede: ..., ...
Keywords: ..., ...

1 Uvod

Grafi ponazarjajo relacije med različnimi objekti. Kromatično število nam pove, kako težko je razbiti graf na množice vozlišč, ki med seboj nimajo nobene povezave. Z drugimi besedami, pove nam, kakšno je minimalno število neodvisnih množic, ki jih potrebujemo, da lahko graf razbijemo na neodvisne množice.

Definicija 1.1. Naj bo $G = (V, E)$ (neusmerjen) graf. Naj bo K poljubna neprazna množica moči k. Tedaj preslikavi $c : V \to K$ pravimo k-barvanje vozlišč grafa G. Če sta poljubni sosednji vozlišči v G pobarvani z različnimi barvami, tj. če za sosednji u in v velja, da je $c(u) \neq c(v)$, potem pravimo, da je takšno k-barvanje dobro. Kromatično število G je najmanjše število k, za katerega obstaja dobro k-barvanje grafa G. Označimo ga z $\chi(G)$.

Definicija 1.2. Naj bo $G = (V, E)$ in $H \subseteq V$. Če nobeni dve vozlišči iz H nista med seboj povezani, pravimo, da je H neodvisna množica. Velikost neodvisne množice z največjo močjo imenujemo neodvisnostno število grafa G in ga označimo z $\alpha(G)$.

Kromatično in neodvisnostno število povezuje naslednja osnovna neenakost:

Trditev 1.3. *Za vsak graf G na n vozliščih velja $\alpha(G)\chi(G) \geq n$.*

Dokaz. Označimo z V_i množico vozlišč, ki jih neko optimalno dobro barvanje pobarva z i-to barvo. Iz definicije dobrega barvanja direktno sledi, da nobeni dve vozlišči iz V_i ne moreta biti povezani, saj sta enako pobarvani. Torej je V_i neodvisna množica. To pa pomeni, da je $|V_i| \leq \alpha(G)$. Torej je $n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G)\alpha(G)$ in je s tem trditev dokazana. □

Ta trditev je pomembna, saj je to ena od redkih znanih spodnjih mej za kromatično število. Velja tudi naslednja najenostavnejša zgornja meja za kromatično število:

Trditev 1.4. *Označimo z $\Delta(G)$ maksimalno stopnjo vseh vozlišč v grafu G. Tedaj je $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$*

Dokaz. PREPIŠI, KAKO JE KONVALINKA V KNJIGI ZAPISAL TA DOKAZ S POŽREŠNIM BARVANJEM. □

Za grafe brez trikotnikov velja naslednja karakterizacija:

Trditev 1.5. *Graf G nima trikotnikov natanko tedaj, ko je za vsako vozlišče v, njegova množica sosedov $N(v)$ neodvisna množica.*

Dokaz. Naj bo G brez trikotnikov. Naj bo v poljubno vozlišče. Denimo, da sta vozlišči u in w iz $N(v)$ povezani. Tedaj v, u in w tvorijo trikotnik, kar je protislovje.

Naj bo za vsako vozlišče v množica $N(v)$ neodvisna. Denimo, da imamo trikotnik sestavljen iz vozlišč u, v in w. Tedaj sta $v, w \in N(u)$, hkrati pa sta v in w povezani, kar je v protislovju z neodvisnostjo $N(u)$.

S tem smo dokazali obe smeri karakterizacije. □

Tema tega diplomskega dela so grafi, ki imajo veliko ožino tj. velikost najmanjšega cikla.

Definicija 1.6. Dolžini največjega cikla v grafu G pravimo ožina in jo označimo z $girth(G)$.

Takšni grafi so lokalno izredno enostavni. Če je ožina grafa g, bo podgraf porojen s poljubnih $g-1$ vozlišč dejansko gozd, ker ne more imeti ciklov. Pokazali pa bomo, da so lahko takšni grafi globalno zelo kompleksni, če za mero kompleksnosti vzamemo kromatično število. Videli bomo, da ima lahko graf s poljubno veliko ožino prav tako poljubno veliko kromatično število. Razvoj razumevanja takšnih grafov bomo predstavili skozi primere.

2 Grafi brez trikotnikov s poljubno velikim kromatičnim številom

Najmanjši možen cikel v grafu je cikel dolžine tri in takšnim ciklom pravimo trikotniki. Če nas zanima, ali lahko graf s poljubno veliko ožino ima poljubno veliko kromatično število, moramo začeti na prvem koraku in se vprašati, ali lahko ima sploh graf brez trikotnikov poljubno veliko ožino. Pokazali bomo, da lahko, s tem da bomo predstavili nekaj konstrukcij takšnih grafov.

TU ALI PA NA KONCU RAZDELKA DODAJ TRDITEV IN DOKAZ, DA SO SKORAJ VSI GRAFI BREZ TRIKOTNIKOV DEJANSKO DVODELNI GRAFI (V mapi imaš članek "Almost all triangle-free graphs are bipartite") IN IMAJO KOT TAKŠNI KROMATIČNO ŠTEVILO 2 IN DA ZATO REZULTATI IZ TEGA RAZDELKA RES NISO OČITNI!!!!!!! DODAJ PRAV TAKO KARAKTERIZACIJO DVODELNIH GRAFOV KOT GRAFOV BREZ LIHIH CIKLOV!!!!!

2.1 Tuttova konstrukcija

Prvi, ki je pokazal, da obstajajo grafi brez trikotnikov, ki imajo poljubno veliko kromatično število, je bil William Thomas Tutte, ki je pisal pod psevdonimom Blanche Descartes. Podal je sledečo induktivno konstrukcijo.

Indukcijo delamo na kromatičnem številu k. Začnemo z grafom G_1, ki vsebuje samo eno vozlišče. Denimo sedaj, da poznamo graf G_k, ki ima n vozlišč. Graf G_{k+1} zgradimo tako, da vzamemo množico Y z $k(n-1)+1$ vozlišči in brez kakršnihkoli povezav med njimi. Za vsak $X \subseteq Y$, ki vsebuje n vozlišč vzamemo kopijo grafa G_k, ki jo označimo z G_X in povežemo to kopijo z X tako, da je vsako vozlišče iz X povezano z natanko enim vozliščem iz G_X. Različnih kopij grafa G_k med seboj ne povezujemo, tj. med nobenima vozliščema iz G_X in $G_{X'}$ ne obstaja povezava, če je $X \neq X'$. S tem smo zgradili G_{k+1}.

Pokažimo, da je $\chi(G_k) = k$ in da G_k ne vsebuje trikotnikov.

Trditev 2.1. *Graf G_k iz Tuttove konstrukcije ne vsebuje nobenega trikotnika in velja $\chi(G_k) = k$.*

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo. Graf z enim vozliščem ima kromatično število 1 in je brez trikotnikov, torej je baza indukcije izpoljnena. Denimo, da trditev za G_k in pokažimo, da velja za G_{k+1}.

Najprej s protislovjem pokažimo, da je $\chi(G_{k+1}) \geq k+1$. Denimo nasprotno, da je $\chi(G_{k+1}) \leq k$. Tedaj obstaja c, ki je pravilno k-barvanje grafa g_{k+1}. Recimo, da G_k ima n vozlišč. Tedaj po konstrukciji velja, da ima množica Y iz konstrukcije $k(n-1)+1$ vozlišč, ki so pobarvana pravilno z večjemu k različnimi barvami. Zato mora obstajati vsaj ena barva b, s katero je pobarvanih vsaj n vozlišč iz Y. Vzemimo poljubnih n vozlišč iz Y pobarvanih s b in označimo to množico z X. Ker je po indukcijski predpostavki $\chi(G_k) \geq k$, bo c pobarval G_X, ki je kopija G_k z natanko k barvami, saj je c pravilno barvanje. Ker je vsako vozlišče v X povezano z natanko enim v G_X in ker je c pravilno barvanje, je b različna barva od vseh k barv, s katerimi smo pobarvali G_X. Torej je c pobarval G_{k+1} z vsaj $k+1$ barvami, kar pa je protislovje.

Prav tako je $\chi(G_{k+1}) \leq k+1$. Po indukcijski predpostavki lahko namreč vsako kopijo G_k pobarvamo s k barvami, saj različne kopije niso med seboj povezane. Tedaj lahko vzamemo poljubno novo barvo, ki je nismo uporabili za kopije G_k in z njo pobarvamo Y, saj elementi Y nimajo med seboj povezav. S tem smo dokazali želeno, saj smo dobili pravilno $(k+1)$-barvanje grafa, in je res $\chi(G_{k+1}) = k+1$.

Denimo, da v G_{k+1} obstaja trikotnik. V trikotniku so vsa vozlišča paroma povezana, zato lahko v njem leži kvečjemu eno vozlišče iz Y, saj med vozlišči v Y ni povezav. Prav tako preostali dve vozlišči morata ležati v isti kopiji G_k, saj nimamo povezav med različnimi kopijami. To pa pomeni, da imamo vozlišče v Y, ki je povezano z dvema različnima vozliščema iz iste kopije G_k, kar pa je v protislovju s konstrukcijo. Torej G_{k+1} res ne vsebuje trikotnikov.

□

Opomba 2.2. Če definiramo G_k le za $k \geq 3$ in za G_3 vzamemo cikel dolžine sedem, ob zgornji trditvi velja celo, da je $girth(G_k) \geq 6$ za vsak $k \geq 3$. DOKAŽI TO!!!!!!!!!

Tuttova konstrukcija torej res dokazuje, da lahko imajo grafi brez trikotnikov poljubno veliko kromatično število. Vendar so grafi v Tuttejevi konstrukciji izredno veliki (če ima G_k recimo n vozlišč, ima G_{k+1} potem $\binom{k(n-1)+1}{n}n+k(n-1)+1$ vozlišč) in je v resnici kromatično število zelo majhno v razmerju s številom vozlišč. Iz tega aspekta je bolj zanimiva konstrukcija Mycielskega. Glavna prednost Tuttejeve konstrukcije je ta, da dokazuje, da lahko imajo tudi grafi brez ciklov dolžine manjše ali enake 4 ali 5 poljubno velika kromatična števila.

2.2 Konstrukcija Mycielskega

Jan Mycielski je leta 1955 podal konstrukcijo, ki iz začetnega grafa z n vozlišči zgradi graf z $2n+1$ vozlišči, ki ima večje kromatično število kot začetni graf, hkrati pa nima trikotnikov, če jih začetni graf nima. Konstrukcija je podana na naslednji način.

Denimo, da imamo graf G na n vozliščih $v_1, \ldots, v_n$. Potem definiramo $M(G)$ kot graf z $2n+1$ vozlišči $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c$. Za vse i, j, za katere obstaja povezava $v_i v_j$ v G, tvorimo povezave $a_i a_j, a_i b_j$ in $a_j b_i$ v $M(G)$. Ob tem za vsak i med 1 in n tvorimo povezavo $b_i c$ v $M(G)$. Takšnemu grafu $M(G)$ pravimo graf Mycielskega grafa G.

Trditev 2.3. *Če graf G nima trikotnikov, potem nima trikotnikov niti njegov graf Mycielskega $M(G)$.*

Dokaz. Naj bo G brez trikotnikov. Dokazujemo s protislovjem. Denimo, da ima $M(G)$ nek trikotnik. Vsa vozlišča znotraj trikotnika so med seboj povezana. Ker v $M(G)$ ni povezav med b_i in b_j za nobena i in j, je lahko v ciklu kvečjemu eno vozlišče oblike b_i. To pomeni, da mora biti vsaj eno vozlišče oblike a_i v trikotniku. Ker c ni povezan z nobenim vozliščem te oblike, c ne more biti v trikotniku. Torej imamo v trikotniku a_j in a_k za neka različna j in k. Če bi imeli v trikotniku še vozlišče a_i za nek i različen od j in k, bi to pomenilo, da imamo trikotnik v G, saj je podgraf $M(G)$ porojen z vozlišči $a_1, \ldots, a_n$ izomorfen G po konstrukciji, kar je protislovje. Torej je v trikotniku še vozlišče b_i za nek i. To pa po konstrukciji $M(G)$ pomeni, da imamo v G povezave v_iv_k, v_iv_j in v_jv_k, kar je trikotnik. Ker G po predpostavki nima trikotnikov, smo prišli do protislovja. □

Trditev 2.4. *Velja* $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$.

Dokaz. Pokažimo najprej, da je $\chi(M(G)) \geq \chi(G) + 1$. Dokazujemo s protislovjem. Denimo, da je $\chi(M(G)) \leq \chi(G) = k$. Tedaj obstaja pravilno k-barvanje $M(G)$, recimo mu f. Brez škode za splošnost je $f(c) = k$. Zaradi pravilnosti f, ni nobeno vozlišče oblike b_i pobarvano s k. Barvanje f porodi pravilno k-barvanje grafa G, recimo mu g, podano z $g(v_i) = f(a_i)$. Če je kakšno vozlišče v_i v G pobarvano s k, lahko spremenimo barvo v $f(b_i)$ in je barvanje grafa G še vedno pravilno. Namreč, če imamo povezavo v_iv_j v G, imamo tudi povezavo b_ia_j v $M(G)$, kar pomeni, da je $f(b_i) \neq f(a_j) = g(a_j)$ zaradi pravilnosti barvanja f. Torej tudi v spremenjenem barvanju nimamo nobenih sosedov z enako barvo, torej je to pravilno barvanje G. Vsa vozlišča v G, ki so bila pobarvana s k, smo na novo pobarvali z neko barvo iz $\{1, \ldots, k-1\}$, ker je $f(b_i) \neq k$ za vse i. To pa pomeni, da smo našli pravilno $(k-1)$-barvanje G, kar je v protislovju z $\chi(G) = k$. Dokažimo še $\chi(M(G)) \leq \chi(G) + 1$. Naj bo $k = \chi(G)$ in naj bo g pravilno k-barvanje grafa G. Definiramo potem f kot $(k + 1)$-barvanje grafa $M(G)$. Naj bo $f(a_i) = f(b_i) = g(v_i)$ za vse i. Naj bo $f(c) = k + 1$. Pokažimo, da je f pravilno barvanje. Ker je $f(b_i) \neq k + 1$ za vse i, c nima enake barve z nobenim sosedom. Če pa imamo v $M(G)$ povezavo oblike a_ia_j ali pa a_ib_j za neka različna i in j, vemo, da imamo v G povezavo v_iv_j. Ker je $f(a_i) = g(v_i) \neq g(v_j) = f(a_j) = f(b_j)$, pri čemer smo upoštevali pravilnost g, vemo, da niti sosedi oblike a_i in a_j ali a_i in b_j ne bodo imeli enake barve. Torej je f res pravilno $(k + 1)$-barvanje $M(G)$ in je res $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$. □

Posledica 2.5. *Naj bo G_3 cikel dolžine 5. Naj bo $G_{k+1} = M(G_k)$ za vsak $k \geq 3$. Tedaj je G_k brez trikotnikov in $\chi(G_k) = k$ za vsak $k \geq 3$.*

Dokaz. Dokažemo z indukcijo. G_3 je cikel lihe dolžine, torej ima kromatično število 3, in nima trikotnikov, saj cikel dolžine 3. Baza indukcije je s tem izpolnjena. Indukcijski korak dokažemo enostavno s prejšnjima trditvama. □

Konstrukcija Mycielskega nam torej porodi še eno družino grafov brez trikotnikov, katerih kromatično število neomejeno narašča. Grafi iz te družine so dosti manjši kot grafi iz Tuttejeve konstrukcije, in sicer bi z indukcijo lahko enostavno dokazali, da je število vozlišč v G_k enako $3 \cdot 2^{k-2} - 1$ za $k \geq 3$. Torej kromatično število narašča logaritemsko glede na število vozlišč. To je še vedno dosti majhno, vendar veliko boljše kot v Tuttovi konstrukciji.

2.3 Zamični grafi

2.4 Ramseyjevi grafi

Vsi grafi iz prejšnjih podrazdelkov so dejansko imeli precej majhna kromatična števila glede na velikosti grafov. V tem podrazdelku pa bomo obravnavali grafe z dosti večjim kromatičnim številom, torej globalno dosti bolj kompleksne grafe. Poglejmo naslednjo družino grafov.

Imejmo neko naravno število m in geometrijo Γ s točkami $\mathcal{P}$ in premicami $\mathcal{L}$ s poljubno incidenčno relacijo, za katero velja aksiom $\mathcal{A}$, da skozi $m-1$ paroma različnih točk poteka kvečjemu ena premica. Naj bo A končna podmnožica $\mathcal{P}$ in B končna podmnožica $\mathcal{L}$. Tedaj lahko A uredimo s poljubno linearno urejenostjo $<$. Nato tvorimo graf $\mathcal{G}$ tako, da za vozlišča vzamemo vse urejene pare točk in premic $(p, L), p \in A, L \in B$, za katere velja, da p leži na L. Tem parom rečemo incidenčni pari. Vozlišči (p, L) in (p', L') povežemo, če velja, da je $p < p'$, da sta L in L' različni in da p leži na L'. Tedaj veljajo naslednje trditve:

Trditev 2.6. *$\mathcal{G}$ ne vsebuje klike velikosti m.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Denimo, da imamo kliko $(p_1, L_1), (p_2, L_2), \ldots,$ (p_m, L_m). Tedaj so vse točke in premice paroma različne. Naj bo brez škode za splošnost $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$. Tedaj po konstrukciji velja, da $p_1, \ldots p_{m-1}$ ležijo na L_{m-1} in L_m. Ker imamo geometrijo, v kateri skozi $m-1$ paroma različnih točk poteka kvečjemu ena premica, je $L_{m-1} = L_m$, kar pa je protislovje. Torej $\mathcal{G}$ res ne vsebuje klike velikosti m. □

Trditev 2.7. *Velja $\alpha(\mathcal{G}) \leq |A| + |B|$.*

Dokaz. Naj bo $H \subseteq V(\mathcal{G})$ poljubna neodvisna množica vozlišč. Tedaj lahko H zapišemo kot disjunktno unijo dveh množic.

Prva množica vozlišč vsebuje urejene pare točk in premic iz H, za katere velja, da se točka pojavi v vsaj dveh urejenih parih iz H. Vzemimo dva takšna urejena para, v katerih se točka ponovi, recimo (p, L) in (p, L'). Ker je množica H neodvisna, mora za vsako vozlišče $(q, L') \in H, q \neq p$ veljati $q < p$, saj bi sicer imeli povezavo med (p, L) in (q, L'), kar bi bilo v protislovju z neodvisnostjo H. Podobno mora za vsako vozlišče $(q, L) \in H, q \neq p$ veljati $q < p$, saj bi sicer imeli povezavo med (p, L') in (q, L). To pa že pomeni, da je izmed vseh točk, ki se pojavijo v paru z L v množici H, točka p maksimalna. Ker je maksimum v linearni urejenosti enolično določen, se bo z vsake premice, ki se pojavi v nekem paru v H, kvečjemu ena točka pojavila v več kot enem paru. To pomeni, da bo v prvi množici vozlišč vsaka premica iz B nastopila v kvečjemu enem paru. V prvi množici bo torej kvečjemu $|B|$ vozlišč.

Druga množica vozlišč vsebuje urejene pare točk in premic iz H, za katere velja, da se točka pojavi v natanko enem urejenem paru iz H. Vozlišč v drugi množici bo torej kvečjemu toliko, kolikor je točk v A, torej kvečjemu $|A|$.

Množica H, ki je unija prve in druge množice, vsebuje torej kvečjemu $|A| + |B|$ vozlišč. Ker je bila H poljubna neodvisna množica, smo dokazali $\alpha(\mathcal{G}) \leq |A| + |B|$. □

Trditev 2.8. *Naj bo $L_A(\Gamma)$ množica točk iz A, ki leži na $L \in B$ v geometriji Γ. Velja $\chi(\mathcal{G}) \geq \frac{\sum_{L \in B} |L_A(\Gamma)|}{|A|+|B|}$.*

Dokaz. Graf $\mathcal{G}$ ima ravno $\sum_{L \in B} |L_A(\Gamma)|$ vozlišč. Če upoštevamo prejšnjo trditev in neenakost 1.3, dobimo, da je res $\chi(\mathcal{G}) \geq \frac{\sum_{L \in B} |L_A(\Gamma)|}{|A|+|B|}$. □

Osredotočimo se zdaj na primer, ko je $m = 3$, torej na primer, ko skozi poljubni različni točki v geometriji poteka kvečjemu ena premica in ko graf $\mathcal{G}$ ne vsebuje trikotnikov. Zanima nas, kako optimalno izbrati $\mathcal{P}, \mathcal{L}, A$ in B, da bo $\mathcal{G}$ imel čim manjše neodvisnostno število in posledično čim večje kromatično število. Povejmo to malo bolj formalno. Denimo, da je dano naravno število n. Denimo nadalje, da imamo podano množico točk $\mathcal{P}$ in premic $\mathcal{L}$. Naj potem množica $\mathcal{N}_{(\mathcal{P},\mathcal{L})}$ vsebuje vse nabore točk in premic, za katere je število incidenčnih parov med temi točkami in premicami enako n, torej za katere je $|V(\mathcal{G})| = n$. Natančneje, naj bo $\mathcal{N}_{(\mathcal{P},\mathcal{L})} = \{(A, B); A \subseteq \mathcal{P}, B \subseteq \mathcal{L}, \sum_{L \in B} |L_A(\Gamma)| = n\}$. Naj bo nadalje $m_{(\mathcal{P},\mathcal{L})}$ najmanjši nabor točk in premic v geometriji podani s $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, med katerimi je natanko n incidenčnih parov, tj. naj bo $m_{(\mathcal{P},\mathcal{L})} = \min\{|A| + |B|; (A, B) \in \mathcal{N}_{(\mathcal{P},\mathcal{L})}\}$. Če imamo fiksno geometrijo $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, bomo ob optimalni izbiri A in B po drugi izmed prejšnjih trditev dobili graf s številom vozlišč n in z neodvisnostnim številom $m_{(\mathcal{P},\mathcal{L})}$. Označimo za konec še $C(n) = \min\{m_{(\mathcal{P},\mathcal{L})}; (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ geometrija, ki ustreza aksiomu $\mathcal{A}\}$. Torej bo graf $\mathcal{G}$ na n vozliščih imel ob optimalni izbiri $\mathcal{P}, \mathcal{L}, A$ in B neodvisnostno število $C(n)$. Pokažimo dve trditvi glede števila $C(n)$:

Trditev 2.9. *(Alexander Ravsky)* $C(n) = \Omega(n^{\frac{2}{3}})$.

Dokaz. Imejmo poljubno geometrijo $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, ki izpoljnjuje aksiom $\mathcal{A}$ in poljubni množici točk in premic $(A, B) \in \mathcal{N}_{(\mathcal{P},\mathcal{L})}$. Označimo $a = |A|$ in $b = |B|$. Oglejmo si kartezični produkt $A \times B$, ki si ga lahko predstavljamo kot tabelo, v kateri so vrstice označene z elementi A in stolpci z elementi B. Če je $p \in \mathcal{P}, L \in \mathcal{L}$ in $p \in L$, pobarvamo celico (p, L), sicer pa jo pustimo nepobarvano. Ker skozi dve točki poteka kvečjemu ena premica, ne obstaja četverica paroma različnih pobarvanih parov $(p, L), (p', L), (p, L')$ in (p', L'), saj bi v primeru, da taka četverica obstaja, veljalo $L = L'$, kar je protislovje. Rečemo, da tabela nima pravokotnikov z osno-poravnanimi stranicami.

Pokažimo zdaj splošnejšo neenakost za takšne tabele. Imejmo tabelo z a vrsticami in b stolpci, ki nima pravokotnikov z osno-poravnninimi stranicami. Označimo njene elemente s t_{ij}. Tedaj ne obstaja četverica indeksov i, j, k in l, da so t_{ik}, t_{il}, t_{jk} in t_{jl} pobarvane celice. Pravimo, da i-ta vrstica prepoveduje par stolpcev $\{j, k\}$, če sta tako m_{ij} kot tudi m_{ik} pobarvani. Po predhodni ugotovitvi v tabeli brez pravokotnikov z osno-poravnanimi stranicami dve različni vrstici ne moreta prepovedati istega para stolpcev. Označimo sedaj z l_i število pobarvanih celic v i-ti vrstici. Tedaj i-ta vrstica prepove natanko $\binom{l_i}{2}$ parov stolpcev. Ker dve različni vrstici ne moreta prepovedati istega para stolpcev, z vsoto $\sum_{i=1}^{a} \binom{l_i}{2}$ preštejemo poljuben par stolpcev kvečjemu enkrat. Ker je vseh parov stolpcev $\binom{b}{2}$, je $\sum_{i=1}^{a} \binom{l_i}{2} \leq \binom{b}{2}$. To neenakost lahko nadalje razpišemo v $b^2 - b \geq \sum_{i=1}^{a} l_i^2 - \sum_{i=1}^{a} l_i$. Upoštevajoč Cauchy-Schwarzovo neenakost dobimo $b^2 - b \geq \frac{1}{a}(\sum_{i=1}^{a} l_i)^2 - \sum_{i=1}^{a} l_i$.

Če se vrnemo nazaj v naš kontekst, velja $n = \sum_{i=1}^{a} l_i$ in tako $b^2 - b \geq \frac{n^2}{a} - n$ oz. $n^2 - an - a(b^2 - b) \leq 0$. Če to razrešimo kot kvadratično neenačbo sledi, da je $2n \leq a + \sqrt{a^2 + 4ab^2 - 4ab}$ oz. $(2n - a)^2 \leq a^2 + 4ab^2 - 4ab$. Od tod dobimo $n^2 - an \leq ab^2 - ab$ oz. $a \geq \frac{n^2}{b^2-b+n}$. Torej je $a + b \geq \frac{n^2}{b^2-b+n} + b$. Označimo z

b_0 točko, v kateri je dosežen minimum desne strani neenakosti na intervalu $[1, \infty)$. Tedaj je $a + b \geq \frac{n^2}{b_0^2 - b_0 + n} + b_0 \geq b_0$. Če pišemo $f(b) = \frac{n^2}{b^2 - b + n} + b$, velja $f'(b) = \frac{b^4 - 2b^3 + b^2(2n+1) - 2bn(n+1) + 2n^2}{(b^2 - b + n)^2} = \frac{(b-1)(b^3 - b^2 + 2nb - 2n^2)}{(b^2 - b + n)^2}$. Torej je $f'(b) = 0$, če je $b = 1$ ali $b^3 - b^2 + 2nb - 2n^2 = 0$. Če pišemo $g(b) = b^3 - b^2 + 2nb - 2n^2$, je $g'(b) = 3b^2 - 2b + 2n$, kar je pozitivna funkcija, torej je $g(b)$ naraščajoča kubična funkcija in zato ima enačba $b^3 - b^2 + 2nb - 2n^2 = 0$ natanko eno ničlo, ki je hkrati minimum funkcije f na intervalu $[1, \infty)$. Ta ničla je torej ravno b_0 in zato velja $b_0^3 - b_0^2 + 2nb_0 - 2n^2 = 0$. Lahko preverimo, da je $g(\sqrt[3]{2n^2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{n}) < 0$. Zaradi naraščanja g vemo, da je potem $b_0 > \sqrt[3]{2n^2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{n}$, torej je tudi $|A| + |B| = a + b \geq b_0 > \sqrt[3]{2n^2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{n}$. Ker so bili $\mathcal{P}, \mathcal{L}, A$ in B poljubni, je $C(n) > \sqrt[3]{2n^2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{n}$ in zato $C(n) = \Omega(n^{\frac{2}{3}})$. □

Trditev 2.10. *$C(n)$ je nepadajoče zaporedje.*

Dokaz. Denimo, da imamo geometrijo $\Gamma = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, ki izpolnjuje aksiom $\mathcal{A}$ in množici točk in premic A in B, da je $\sum_{L \in B} |L_A(\Gamma)| = m \geq n$. Tedaj lahko za vsak $L \in B$ izberemo takšno podmnožico $L'_A \subseteq L_A(\Gamma)$, da bo $\sum_{L \in B} |L_A(\Gamma) \setminus L'_A| = n$. Tedaj lahko definiramo novo geometrijo Γ', ki ima za točke in premice prav tako $\mathcal{P}$ in $\mathcal{L}$, vendar velja, da v tej geometriji $p \in \mathcal{P}$ leži na $L \in \mathcal{L}$ natanko tedaj ko leži na L v Γ, vendar ni iz L'_A. Ker smo le zmanjšali incidenčno relacijo, bo tudi geometrija Γ' izpolnjevala aksiom $\mathcal{A}$, prav tako pa bo veljalo, da je $\sum_{L \in B} |L_A(\Gamma')| = \sum_{L \in B} |L_A(\Gamma) \setminus L'_A| = n$. Ker so bile $\mathcal{P}, \mathcal{L}, A$ in B poljubne, je $C(m) \geq C(n)$ za poljuben $m \geq n$ in je torej zaporedje $C(n)$ res nepadajoče. □

Poglejmo zdaj poseben primer grafa $\mathcal{G}$. Če je k potenca nekega praštevila, graf P_k zgradimo tako, da pogledamo končno projektivno ravnino reda k, torej projektivno ravnino z $k^2 + k + 1$ točkami. Za vozlišča vzamemo vse urejene pare točk in premic (p, L), za katere velja, da p leži na L. Točke v ravnini opremimo s poljubno linearno urejenostjo $<$. Vozlišči (p, L) in (p', L') povežemo, če velja, da je $p < p'$, da sta L in L' različni in da p leži na L'. Tedaj velja naslednja trditev:

Trditev 2.11. *P_k ne vsebuje trikotnikov. Velja $\alpha(P_k) \leq 2 \cdot (k^2 + k + 1)$ in $\chi(P_k) \geq \frac{k+1}{2}$.*

Dokaz. P_k je poseben primer grafa $\mathcal{G}$, kjer smo za geometrijo Γ vzeli končno projektivno ravnino reda k, za A in B pa smo vzeli vse točke in premice v njej. Tedaj je $m = 3$, saj je v projektivni ravnini premica natanko določena z dvema točkama. Torej P_k po prvi izmed prejšnjih trditev za $\mathcal{G}$ ne vsebuje klike velikosti tri, tj. ne vsebuje trikotnika. Ker imamo v projektivni ravnini reda k točno $k^2 + k + 1$ točk in enako toliko premic, je $|A| = |B| = k^2 + k + 1$. Od tod sledi po drugi trditvi za $\mathcal{G}$, da je $\alpha(P_k) \leq 2 \cdot (k^2 + k + 1)$ Ker na vsaki premici leži natanko $k + 1$ točk, za vsak $L \in B$ velja $|L_A(\Gamma)| = k + 1$ in tako $\sum_{L \in B} |L_A(\Gamma)| = (k + 1)(k^2 + k + 1)$. Od tod sledi po tretji trditvi za $\mathcal{G}$, da je $\chi(P_k) \geq \frac{k+1}{2}$. □

Ker ima P_k $(k^2 + k + 1)(k + 1)$ vozlišč, nam prejšnje trditve povejo, da je $\chi(P_k) = \Omega(n^{\frac{1}{3}})$, kjer je $n = |V(P_k)|$ kar je občutno večje kromatično število kot v prejšnjih konstrukcijah in kaže, da je lahko graf globalno res precej kompleksen kljub odsotnosti trikotnikov.

Na analogen način bi lahko za potenco poljubnega praštevila k zgradili graf A_k iz končne afine geometrije reda k, torej končne afine geometrije s k^2 točkami. Le-ta ima k^2+k premic in na vsaki premici leži k točk. Torej ima graf A_k natanko $k^2(k+1)$ vozlišč in na analogen način kot prejšnjo trditev pokažemo naslednjo trditev:

Trditev 2.12. *A_k ne vsebuje trikotnikov. Velja $\alpha(A_k) \leq 2k^2+k$ in $\chi(A_k) \geq \frac{k(k+1)}{2k+1}$.*

Tudi za A_k torej velja, da je $\chi(A_k) = \Omega(n^{\frac{1}{3}})$, kjer je $n = |V(A_k)|$. Prav tako smo s tem pokazali, da je $C(k^3+k^2) \leq 2k^2+k$, kjer je k potenca nekega praštevila. Opremljeni s to ugotovitvijo, lahko pokažemo naslednjo trditev:

Trditev 2.13. *$C(n) = \Theta(n^{\frac{2}{3}})$.*

Dokaz. Pokazali smo že, da je $C(n) = \Omega(n^{\frac{2}{3}})$. Moramo torej najti še zgornjo mejo. Z odvajanjem lahko hitro preverimo, da je funkcija $f(k) = \frac{(k+1)^3+(k+1)^2}{k^3+k^2}$ padajoča na intervalu $[1,\infty)$. Torej bo za naravna števila k veljalo, da je $\frac{(k+1)^3+(k+1)^2}{k^3+k^2} \leq 6$, kar pomeni, da za poljubno naravno število n obstaja k, da je $n \leq k^3+k^2 \leq 6n$. Prav tako vemo, da po Bertrandovem postulatu obstaja praštevilo p, za katero velja $k \leq p \leq 2k$. Ker vemo, da je $C(n)$ nepadajoče zaporedje, velja $C(n) \leq C(p^3+p^2) \leq 2p^2+p \leq 8k^2+2k \leq 8(k^2+k) \leq 8\cdot 6\frac{n}{k} = 48\frac{n}{k}$. Ker je $n \leq k^3+k^2 \leq 2k^3$ in zato $\sqrt[3]{\frac{n}{2}} \leq k$, dobimo $C(n) \leq 48\frac{n}{k} \leq 48\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}}$. Torej je res $C(n) = \Theta(n^{\frac{2}{3}})$.

Trditev lahko pokažemo tudi konstruktivno. Naj bodo k in p kot zgoraj. Naj bo $\Gamma = (\mathcal{P},\mathcal{L})$ končna afina geometrija reda p. Naj bo A množica vseh točk in B množica vseh premic v Γ. Tedaj je $\sum_{L\in B}|L_A(\Gamma)| = p^3+p^2$. Tedaj lahko za vsak $L \in B$ izberemo takšno podmnožico $L'_A \subseteq L_A(\Gamma)$, da bo $\sum_{L\in B}|L_A(\Gamma)\setminus L'_A| = n$. Tedaj lahko definiramo novo geometrijo Γ', ki ima za točke in premice prav tako $\mathcal{P}$ in $\mathcal{L}$, vendar velja, da v tej geometriji $p \in \mathcal{P}$ leži na $L \in \mathcal{L}$ natanko tedaj ko leži na L v Γ, vendar ni iz L'_A. Ker smo le zmanjšali incidenčno relacijo, bo tudi geometrija Γ' izpolnjevala aksiom $\mathcal{A}$, prav tako pa bo veljalo, da je $\sum_{L\in B}|L_A(\Gamma')| = \sum_{L\in B}|L_A(\Gamma)\setminus L'_A| = n$. Torej je $C(n) \leq |A|+|B| = 2p^2+p \leq 2(p^2+p) \leq 48\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}}$, kot smo pokazali v nekonstruktivnem dokazu. S tem smo še konstruktivno dokazali željeno. □

Treba je omeniti, da so ocene, ki smo jih izpeljali v predhodnem dokazu zelo slabe. Namreč, že za $k \geq 4$, bo veljalo $\frac{(k+1)^3+(k+1)^2}{k^3+k^2} \leq 2$, kar je veliko boljša ocena. Prav tako smo pri porazdelitvi praštevil upoštevali samo Bertrandov postulat, praštevila pa so dosti bolj gosta od tega, kar nam le-ta zagotovi. Ob tem, nismo sploh upoštevali, da bi lahko namesto p vzeli poljubno potenco praštevila in bi dokaz še vedno veljal, temveč smo gledali samo sama praštevila. Potence praštevil pa so še občutno gosteje porazdeljene. Visoke konstante pri oceni bi lahko torej občutno zmanjšali.

Trditev 2.14. *Naj bo n poljubno naravno število. Naj bo q^3+q^2 najmanjše število takšne oblike, pri čemer je q potenca nekega praštevila in $n \leq q^3+q^2$. Naj bo Γ končna afina geometrija reda k, A in B pa množici vseh točk in premic v Γ. Tvorimo geometrijo Γ', ki vsebuje vse točke in premice iz Γ, incidenčna relacija v Γ' pa je podana tako, da vzamemo incidenčno relacijo iz Γ in iz nje odstranimo natanko q^3+q^2-n poljubnih incidenčnih parov. Tedaj za graf $\mathcal{G}$ porojen z Γ', A in B velja $|V(\mathcal{G})| = n$ in $\alpha(\mathcal{G}) = \Theta(n^{\frac{2}{3}})$.*

Dokaz. V konstruktivnem dokazu prejšnje trditve smo za Γ vzeli končno afino geometrijo reda p, kjer je p praštevilo in velja $n \leq p^3 + p^2$, in nato na opisan način konstruirali Γ'. To pomeni, da je $q \leq p$ in zato lahko na enak način kot v prejšnjem konstruktivnem dokazu izpeljemo oceno $\alpha(\mathcal{G}) \leq |A| + |B| \leq 48\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}} = O(n^{\frac{2}{3}})$. Ker velja $C(n) = \Omega(n^{\frac{2}{3}})$, je tudi $\alpha(\mathcal{G}) = \Omega(n^{\frac{2}{3}})$ in zato $\alpha(\mathcal{G}) = \Theta(n^{\frac{2}{3}})$. Prav tako na identičen način kot v prejšnjem konstruktivnem dokazu pokažemo, da je $|V(\mathcal{G})| = \sum_{L\in B} |L_A(\Gamma')| = n$. V tem dokazu smo upoštevali, da je $\alpha(\mathcal{G}') \leq |A'|+|B'|$ in $|V(\mathcal{G}')| = \sum_{L\in B'} |L_{A'}(\Gamma'')|$ za poljuben graf $\mathcal{G}'$ porojen z Γ'', A' in B'. □

Ta trditev nam pove, da lahko dejansko za vsak n konstruiramo graf $\mathcal{G}$ z $m = 3$ (torej brez trikotnikov) na n vozliščih, da bo veljalo $\alpha(\mathcal{G}) \sim n^{\frac{2}{3}}$ in $\chi(\mathcal{G}) \sim n^{\frac{1}{3}}$. To je dejansko zelo blizu največjemu kromatičnemu številu in najmanjšemu neodvisnostnemu številu, ki ga lahko dosežemo v grafu brez trikotnikov. Za vse grafe brez trikotnikov G veljata naslednji meji.

Trditev 2.15. *V grafu G brez trikotnikov na n vozliščih, je $\alpha(G) \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.*

Dokaz. Naj bo G graf brez trikotnikov. Standardno označimo maksimalno stopnjo nekega vozlišča v grafu z $\Delta(G)$. Naj ima v stopnjo $\Delta(G)$. Če je $\Delta(G) \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, je po 1.5 množica $N(v)$ neodvisna množica z močjo vsaj $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, torej je $\alpha(G) \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Če je $\Delta(G) \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$, pa po 1.4 obstaja dobro barvanje grafa z $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ barvami. Pri takšnem barvanju moramo vsaj eno barvo uporabiti na $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ vozliščih in ta vozlišča tvorijo neodvisno množico. Torej je spet $\alpha(G) \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. □

Trditev 2.16. *V grafu G brez trikotnikov na n vozliščih je $\chi(G) \leq 2\sqrt{n} + 1$*

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na številu vozlišč. Če je $\Delta(G) \leq \sqrt{(n)}$, po 1.4 velja $\chi(G) \leq \sqrt{n} + 1 \leq 2\sqrt{n} + 1$. Če je $\Delta(G) \geq \sqrt{n}$ in je maksimalna stopnja dosežena v v, je $H = N(v)$ neodvisna in jo lahko pobarvamo z isto barvo, velja pa da ima H vsaj $\sqrt{n}$ vozlišč. Torej je $G \setminus H$ graf brez trikotnikov na kvečjemu $n - \sqrt{n}$ vozlišč. Po indukcijski predpostavki ga lahko tedaj pobarvamo s kvečjemu $2\sqrt{n - \sqrt{n}} + 1$ barvami. Ker je $\sqrt{n - \sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \frac{1}{2}$, kar vidimo s kvadriranjem obeh strani neenakosti, lahko dejansko $G \setminus H$ pobarvamo s kvečjemu $2\sqrt{n}$ barvami. Kot smo že ugotovili, lahko H pobarvamo z isto barvo, torej lahko G pobarvamo s kvečjemu $2\sqrt{n} + 1$ barvami. S tem smo pokazali, da je res $\chi(G) \leq 2\sqrt{n} + 1$. □

Dejansko velja za takšne grafe še strožja meja $\chi(G) \leq (2 + o(1))\sqrt{\frac{n}{\log n}}$ (težji dokaz v članku "The χ-Ramsey problem for triangle-free graphs").

Prvi članek, ki je predstavil eksplicitno konstrukcijo družine grafov brez trikotnikov z n vozlišči in neodvisnostnim številom reda $O(n^{\frac{2}{3}})$ je bil [1]. Kasneje so konstrukcijo grafov P_k predstavili v [2]. Do danes še vedno ne poznamo konstrukcije družine grafov brez trikotnikov z asimptotsko manjšim neodvisnostnim številom. V tem razdelku smo posplošili konstrukcijo Ramseyjevih grafov podano v [2]. V tistem članku so predstavili grafe P_k, mi smo pa kot poseben primer posplošitve konstrukcije uvedli še grafe A_k in s pomočjo le-teh konstruirali grafe brez trikotnikov na n vozliščih z neodvisnostnim številom reda $\Theta(n^{\frac{2}{3}})$ za poljuben n. V tem razdelku je s tem podana prva konstrukcija takšnih grafov za poljuben n, saj tako [1] kot tudi [2] predstavljajo konstrukcije le za n posebne oblike.

TU JE TREBA ŠE RAZLOŽITI, ZAKAJ JIH IMENUJEMO "RAMSEYJEVI GRAFI"!!!!!!!!!!!!

3 Grafi s poljubno veliko ožino in poljubno velikim kromatičnim številom

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da odsotnost trikotnikov ne omejuje kromatičnega števila grafa. Prav tako smo poskušali ugotoviti, kako globalno kompleksen je lahko graf, ki nima trikotnikov, torej graf, ki je lokalno na poljubnih treh vozliščih izredno enostaven. V tem razdelku bomo najprej pokazali, da ožina sama po sebi ne more omejiti kromatičnega števila, tj. da za poljubno veliko fiksno ožino vedno obstaja graf s poljubno velikim kromatičnim številom. Nato pa bomo poskusili analizirati, kako skupaj velikost grafa in njegova ožina omejujeta kromatično število. Pogledali bomo, koliko kompleksen je lahko nek graf globalno v odvisnosti od tega, koliko enostaven je lokalno.

Najprej definiramo pojem naključnega grafa:

Definicija 3.1. Verjetnostni prostor slučajnih grafov $G(n,p)$ je podan z množico vseh grafov na n vozliščih kot množico elementarnih izidov, dogodek je poljubna množica grafov na n vozliščih, verjetnost vsakega grafa G z m povezavami pa je enaka $P(G) = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$.

Opomba 3.2. Verjetnost posameznega grafa v prostoru slučajnih grafov lahko interpretiramo tako, da za vsako posamezno povezavo neodvisno izbiramo, ali je vsebovana v grafu, in p je verjetnost, da je posamezna povezava vsebovana v grafu.

Naslednja lema je pomembna za dokaz glavnega izreka:

Lema 3.3. *Naj bo slučajna spremenljivka $X : G(n,p) \to \mathbb{R}$ število k-ciklov v $G = (V,E) \in G(n,p)$. Potem je:*

$$E(X) = \frac{n^{\underline{k}}}{2k}p^k,$$

kjer je $n^{\underline{k}} = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Dokaz. Preštejmo število ciklov dolžine k v polnem grafu na $n = |V|$ vozliščih. Pomagamo si z zaporedji vozlišč $C = v_1, v_2, \dots, v_k$. Število zaporedij z različnimi elementi dolžine k na n-elementni množici je $n^{\underline{k}}$, vsak cikel pa ustreza $2k$ takšnim zaporedjem, saj cikel porodi k možnih začetnih točk zaporedji in imamo dve možni smeri premikanja po ciklu. Število možnih ciklov je torej $\frac{n^{\underline{k}}}{2k}$. Za vsak cikel C_i, $1 \leq i \leq \frac{n^{\underline{k}}}{2k}$, definiramo indikatorsko slučajno spremenljivko X_i:

$$X_i = \begin{cases} 1, & C_i \subseteq G \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Velja $E[X_i] = P(X_i = 1) = p^k$, saj je po zgornji opombi to verjetnost, da je vseh k povezav iz C_i vsebovanih v G. Prav tako velja, da je $X = \sum_{i=1}^{\frac{n^{\underline{k}}}{2k}} X_i$, saj oba izraza preštejeta vse cikle dolžine k v grafu G. Torej po linearnosti pričakovane vrednosti velja:

$$E[X] = E[\sum_{i=1}^{\frac{n^k}{2k}} X_i] = \sum_{i=1}^{\frac{n^k}{2k}} E[X_i] = \sum_{i=1}^{\frac{n^k}{2k}} p^k = \frac{n^k}{2k} p^k.$$

□

Literatura

[1] N. Alon, *Explicit ramsey graphs and orthonormal labelings*, Electron. J. Comb. **1** (1994), DOI: 10.37236/1192, dostopno na https://doi.org/10.37236/1192.

[2] B. Codenotti, P. Pudlák in G. Resta, *Some structural properties of low-rank matrices related to computational complexity*, Theor. Comput. Sci. **235**(1) (2000) 89–107, DOI: 10.1016/S0304-3975(99)00185-1, dostopno na https://doi.org/10.1016/S0304-3975(99)00185-1.

Slovar strokovnih izrazov