Логика для матлингвистов

daniel.tiskin@gmail.com

31 мая 2023 г.

Содержание

1 Предмет логики

1.1 Предмет логики

> Logic, the study of correct reasoning, especially as it involves the drawing of inferences.
>
> Hintikka 2020

Логика изучает свойства таких структур, как

(1)
$$\dfrac{\text{Если дождь, холодно} \qquad \text{Если ветер, холодно} \qquad \text{Дождь или ветер}}{\text{Холодно}}$$

(2)
$$\dfrac{\dfrac{\text{Если дождь, холодно} \qquad \text{Если холодно, грустно}}{\text{Если дождь, грустно}} \qquad \text{Дождь}}{\text{Грустно}}$$

> Как любой дискурс, рассуждение разворачивается линейно, но мы будем обращать внимание на иерархические, нелинейные отношения в нём; ср. синтаксические деревья.

Что такое правильность? Истинность исходных положений (**посылок**) рассуждения и его **заключения**, их информативность и полезность изучаются другими науками. Логике остаются *valid* vs. *sound*

непротиворечивость рассуждения — отсутствие среди посылок таких, из которых одно утверждает (в числе прочего) некоторое A, а другое (в числе прочего) отрицает это A (тут даже структура не слишком важна)

связность — закономерная смена одних высказываний другими. Принципиально относится к порядку разворачивания рассуждения (≈ структуре). Включает

- связность по теме, содержанию — малодоступна классической логике (разве что в смысле совпадения частей высказываний, их структурных паттернов).
  Содержательную связность трудно формализовать: она во многом обусловлена отношениями лексических значений слов, составляющих высказывания. Там, где её можно описать синтаксически, ею занимаются релевантные логики. Мы увидим, что логические отношения восходят к семантическим, но легче формализуемы
- собственно логическая связность — **логическое следование** заключений из их посылок

Рассуждение без связности по теме, но логически строгое в смысле следования:

(3)
$$\dfrac{\text{Земля — третья от Солнца планета}}{\text{Сегодня пятница, или сегодня не пятница}}$$

> Рассуждения состоят из языковых объектов — высказываний, а логические отношения между высказываниями связаны с их синтаксической структурой, поэтому логическая теория должна опираться на лингвистическое описание **языка**, на котором рассуждают. Мы будем строить искусственные языки и формализованные системы (правил) рассуждения на них, где возможность сделать следующий шаг определённого вида зависит от формы и порядка ранее сделанных высказываний. Но иногда мы будем строить такие системы и для (фрагментов) русского языка, предполагая или делая формализацию.

1.2 Логика и форма

Ограничимся задачей для произвольных высказываний $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n, \mathsf{B}$ определить рассуждение (4) как правильное или неправильное на основании того, **следует** ли B из $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$.
Об **истинности** $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n, \mathsf{B}$ речи нет (это предмет других наук).

(4)
$$\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \therefore \mathsf{B}$$

Часто говорят, что логика **формальна** — обращает внимание на «форму» высказываний, составляющих рассуждения, и «форму» самого рассуждения — порядок появления в нём высказываний и то, в каких местах рассуждения высказывания или их части совпадают. Например, рассуждение (5) имеет правильную форму, а (6) — неправильную и потому неверно.

(5) $$\frac{\text{Хливкие шорьки пырялись по наве}}{\text{Хливкие шорьки пырялись по наве, \textbf{или} хрюкотали зелюки}}$$

(6) $$\frac{\text{Хливкие шорьки пырялись по наве}}{\text{Хливкие шорьки пырялись по наве, \textbf{и} хрюкотали зелюки}}$$

Аналогично, рассуждение (7) имеет правильную форму, а рассуждение (8) — неправильную и потому неверно, хотя высказывания в его составе могут (случайно) быть верными.

(7) $$\frac{\text{\textbf{Все} хливкие шорьки пырялись по наве} \qquad \text{Тузик — хливкий шорёк}}{\text{Тузик пырялся по наве}}$$

(8) $$\frac{\text{\textbf{Многие} хливкие шорьки пырялись по наве} \qquad \text{Тузик — хливкий шорёк}}{\text{Тузик пырялся по наве}}$$

«Формальность» в том, что для оценки (5)–(8) неважно знать, что означают *шорёк*, *пыряться* и т. д. Но важно знать, что значат *и*, *или*, *все*, *многие*, — ср. ситуацию, где *и* значит 'или' и (6) неправильно! Поэтому можно сказать, что «форма» высказывания важна в той мере, в какой важны **значения**, но не всех его элементов, а тех, которые приняты за **«логические»** знаки, т. е. чьи значения считаются известными и неизменными.

А здесь слова одни и те же, но разная форма первой посылки; но разная форма приводит к разному значению: значение высказывания часто зависит от порядка соединения его элементов.

см. Etchemendy 1983; попытку применения оппозиции в лингвистической теории см. в Chierchia 2021

(9) $$\checkmark\ \frac{\text{Если зима, то холодно} \qquad \text{Зима}}{\text{Холодно}} \qquad\qquad ✗\ \frac{\text{Если холодно, то зима} \qquad \text{Зима}}{\text{Холодно}}$$

> Мы будем исходить из того, что логические отношения высказываний опираются на их семантические отношения, т. е. на отношения между их значениями; значения же складываются из значений частей высказываний в соответствии с их взаиморасположением. Мы будем много говорить о значениях.

1.3 О связности: логическое следование

Логическое *следовательно* не сводится к причинно-следственным отношениям

- Причинность изучается науками: изучаемое лингвистом (ближайшее) значение слов *тело*, *масса*, *притягивать* не даёт закона всемирного тяготения; а логические отношения между высказываниями ясны (идеально рациональному) носителю языка
- Причины бывают у событий (того, что происходит), но вряд ли $(x > 1)$ и $(y \vdots x)$ — причина того, что y не простое число
- Если логическое отношение «направлено» от посылок к заключению, то это направление бывает противоположно «направлению» причинно-следственной связи:

(10) $$\frac{\text{Или лампочка горит, или цепь не замкнута} \qquad \text{Цепь замкнута}}{\text{Лампочка горит}}$$

Лучше представлять себе следование не через причину и следствие, а через «всегда, когда», где *когда* понимается не во временно́м смысле: высказывание B следует из $\{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n\}$ (нотация: $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vDash \mathsf{B}$), е. т. е. B имеет место при всех **положениях дел**, при которых имеют место вместе все $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ (но, возможно, и при некоторых других).

logical consequence
double turnstile

Положения дел часто представляют себе как возможные миры, но в этой роли могут выступать разные сущности, даже точки пространства или моменты времени (тогда *всегда*, *когда* примет буквальную интерпретацию). Положение дел в каждом «мире» описывается набором (возможно, бесконечным) взаимонезависимых параметров. Лейбниц 1989 [1710]

> Реальность, возможно, не такова: то, что Тузик пятнистый, зависит от его генома, а возможность у него генома — от существования Тузика; эти факты не взаимонезависимы. С другой стороны, философское осмысление лежащих в основе логики допущений привело Л. Витгенштейна к учению об **атомарных фактов** в мире (Витгенштейн 2017 [1921]).

Вместе миры составляют **логическое пространство** — совокупность способов, какими могут обстоять дела. Каждый параметр — одна «координатная ось» в пространстве с двумя значениями: 'да' и 'нет'. Миры — «точки» в этом дискретном пространстве.

	$+$	$-$
$+$	w_1	w_3
$-$	w_2	w_4

Тогда следование — теоретико-множественное отношение: высказывание B следует из высказывания A, е. т. е. все положения дел, о которых верно сказать A, входят в число таких положений дел, о которых верно сказать B.
Следование из нескольких высказываний-посылок:

$$\text{(11)} \qquad \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n\} \vDash \mathsf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} |\mathsf{A}_i|\right) \subseteq |\mathsf{B}|$$

Определение 1 (логическое следование (*in abstracto*))**.** Высказывание B следует из множества высказываний $\Gamma = \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n\}$, е. т. е. все положения дел, о которых верно сказать каждое из высказываний в Γ (т. е. верно будет сказать вместе и A_1, и A_2, и т. д. вплоть до A_n), входят в число таких положений дел, о которых верно сказать B. ⊣

Пример 1. Пусть каждый мир описывается тремя взаимонезависимыми параметрами: идёт ли дождь (A), дует ли ветер (B) и начался ли семестр (C). Можно ли сказать, что из 'Идёт дождь' следует 'Дует ветер' ($\mathsf{A} \vDash \mathsf{B}$)? А из 'Идёт дождь' — 'Идёт дождь, или дует ветер' ($\mathsf{A} \vDash \mathsf{A} \vee \mathsf{B}$)? ⊣

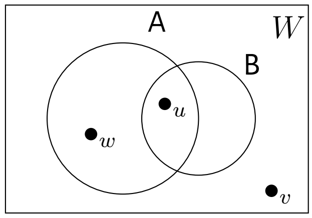
В примере 1 возможно восемь типов миров — восемь типов различных положений дел. ①②

> Больше при трёх параметрах быть не может, но почему для определения следования нужно брать все восемь, а не меньше?
>
> **Пример 2.** В отличие от примера 1, постулируем, что (типов) миров всего шесть. Верно ли, что $\mathsf{A} \vDash \mathsf{B}$? ⊣
>
> | | w_1 | w_2 | w_3 | w_4 | w_5 | w_6 |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | A | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ |
> | B | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
> | C | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
>
> Получается, отношение следования зависит от выбранного множества миров? Нет, т. к. существует максимальное такое множество, в котором больше всего разных сочетаний значений высказываний, — включающее все возможности, свободное от привнесённой информации (информирование как исключение возможностей). Те отношения следования, которые есть на таком множестве, сохранятся и на любом более ограниченном. Вообще вопрос о том, что входит в логическое пространство, сложен (ср. невозможные миры, где есть реальное противоречие — параметр принимает оба значения; миры, где слова значат другое, в двумерных семантиках).

Взаимонезависимость высказываний означает, что никакие два элементарных (сообщающих только 'да'/'нет' про один параметр варьирования миров) высказывания (или непересекающихся множества элементарных высказываний) не связаны логическим отношением, таким как следование. Такое отношение возможно между такими высказываниями, из которых хотя бы одно имеет нетривиальную структуру.

1.4 Пропозиции, информация и логические функции

Теоретико-множественная модель логических функций (значений логических связок) как операций над множествами миров — над **пропозициями** высказываний:



(12) $w \in |A| \subset (|A| \cup |B|) = |A \vee B|$

(13) $u \in (|A| \cap |B|) = |A \wedge B|$

(14) $|A| \cup |\neg A| = W$

(15) $|A \rightarrow B| = |\neg A \vee B| = \overline{|A|} \cup |B|$ все миры, где ¬A, а из тех, где A, — те, где ещё и B

Материальная импликация $\rightarrow$ здесь не означает ничего большего (так, (16) истинно при отсутствии бузины). Более глубокое моделирование значения *если… то* см. во II семестре, но и там речь пойдёт не о причинах, а о сходстве/различии между положениями дел (‘добавь к реальности бузину, а в остальном меняй как можно меньше, и тогда будет дядька’). Материальная импликация подходит разве тогда (17), когда коммуникантов не интересуют закономерности, — «импликация математиков». Lewis 1973

(16) Если в огороде бузина, то в Киеве дядька.

(17) (Спорим, что) если сегодня будет дождь, то дождь будет и завтра.

Чтобы, произнеся (17), выиграть пари, не нужно, чтобы сегодня был дождь: если его не будет, пари не будет проиграно. Если он будет, пари будет выиграно, е. т. е. дождь будет завтра. Единственная ситуация проигрыша — та, в которой дождь есть сегодня, но не завтра.

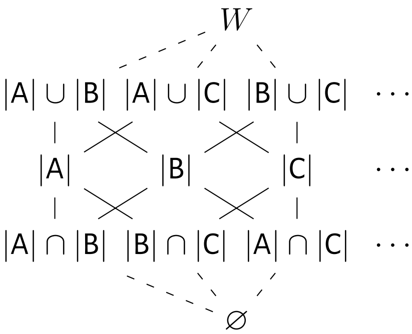


Рис. 1: Решётка пропозиций

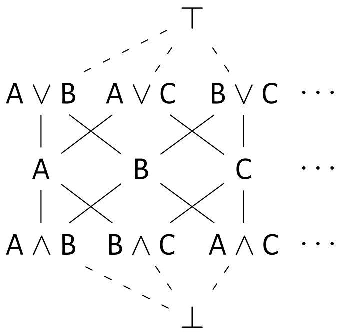


Рис. 2: Решётка формул

общее пересечение пропозиций пусто, т. к. где-то A, а где-то ¬A и т. д.

Пропозиции высказываний и высказывания образуют множества с параллельной структурой:

- если мир находится в $|A|$, то он находится и в $|A \vee B|$;
  если мир принадлежит пустой пропозиции $\emptyset$, то он принадлежит и любой другой (рис. 1)
- если (в данном мире) истинно A, то истинно и $A \vee B$;
  если истинна тождественная ложь $\perp$, то истинно что угодно (рис. 2)

> В простейшей модели значениями формул-высказываний являются ‘истина’ и ‘ложь’, т. е. мы мысленно остаёмся в конкретном (действительном?) мире. Этой моделью мы поначалу и будем пользоваться.

1.5 Лингвистические предпосылки логики

Выражения языка (естественного или формализованного) — знаки, двусторонние сущности. Значением всякого выражения, даже глагола, наречия, частицы, союза, глагольной группы, сложного предложения и т. д., мы будем считаться некоторый объект. Его называют **референтом** (актуальным **денотатом**), а отношение между означающим и означаемым — **референцией**. Такую семантику можно назвать **денотативной**. Соссюр 2004 [1915]

> Иногда говорят о «семантическом уровне» языка (наряду с другими уровнями языковой системы). Но если, как обычно считают, единицы уровня n строятся из единиц уровня $(n-1)$, то семантика не может быть уровнем языка (хотя может быть уровнем глосс). Напротив, значение целого складывается параллельно складыванию самого целого. Возможны морфологическая, лексическая, синтаксическая, … семантика.

Почти все интересующие нас языки (и все естественные) продуктивны: на них можно строить и понимать предложения, которые мы раньше не встречали. Поэтому описание языка должно иметь вид «словарь (инвентарь терминалов) + грамматика (**рекурсивные** порождающие правила для цепочек)». Синтаксис можно описывать в общем виде — с помощью ярлыков синтаксических категорий (Хомский 1962 [1957]), а не конкретных терминалов — через порождающие правила (18) или формы Бэкуса — Наура (19). Ярлыки не являются знаками описываемого языка и принадлежат только **метаязыку** описания, выступая **мета**переменными.

любимый сюжет генеративистов, см. Хомский 2005 [1966]

(18) $$\text{S} \longrightarrow \text{NP VP}$$

(19) $$\text{NP} ::= \text{N} \mid \text{AP NP}$$

Такое определение **индуктивно**: терминалы как база индукции и правила их соединения как индукционный переход.

Непейвода 1997: 139–141

Язык, чей синтаксис описан по принципу «словарь + рекурсивное определение правильно построенного выражения (ППВ, ППФ)», называют **формализованным**.

По желанию такой язык может быть **проинтерпретирован** — всем его выражениям (= ППВ) может быть сопоставлена семантика, включающая

Tarski 1936 ещё требует, чтобы было задано исчисление

- значения терминалов — «база индукции»
- правила вычисления значения целого (по правилу для каждого правила соединения в синтаксисе) — «индукционный переход» ④

Семантика, как и синтаксис, описывается на некотором метаязыке, который предполагается ясным. Рассмотрим несерьёзный пример того, как это делается, — «синтаксис» годичных колец на деревьях и их «интерпретацию» как возраст дерева (Rabern 2017):

Пример 3. Синтаксис: ствол состоит из сердцевины и колец, а дерево — из ствола и коры.

(20) $$\text{ствол} ::= (\bullet) \mid (\text{ствол})$$

(21) $$\text{дерево} ::= [\text{ствол}]$$

Семантика: сердцевина обозначает число 0; кольцо обозначает прибавление 1 (функцию!); кора обозначает функцию, которая берёт число (его предоставит ствол) и проверяет, действительно ли дереву столько лет.

(22) $$[\![\bullet]\!] = 0 \qquad [\![(\,)]\!] = \begin{bmatrix} 0 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ & \dots & \end{bmatrix} \qquad [\![[\,]]\!] = \{n \in \mathbb{N}\} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{е. т. е. дереву } n \text{ лет} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Значения частей для правил (20)–(21) соединяются применением функции к аргументу. ⊣ ⑤

Вопросы и задания

① Почему именно **типов** миров, а не просто миров?

② Составьте таблицу, показывающую, как обстоят дела в этих мирах (w_1—w_8). Сформулируйте общее правило для расчёта числа типов миров для заданного числа параметров.

③ Опишите значение эквивалентности $\leftrightarrow$ и выразите её через другие связки.

④ Почему нельзя просто задать списком значения всех выражений языка? Будь это возможно, не затемняло ли бы такое представление семантики естественного языка какой-либо важный аспект нашей языковой способности?

⑤ Вычислите значение $[(((((\bullet)))))]$ в языке Раберна.

```
def ring(i):
  return i + 1

def bark(i, j):
  return i == j

trunk = 0
print (ring(ring(ring(ring(ring(trunk))))),
  bark(ring(ring(ring(ring(ring(trunk))))), 5))
```

2 Логика высказываний

2.1 Язык логики высказываний $\mathcal{PL}$

2.1.1 Синтаксис

Чтобы в общем виде говорить о выражениях того или иного класса, используют **метапеременные** (метабуквы), печатаемые здесь прямым шрифтом без засечек. Их нужно отличать от переменных самого изучаемого языка, даваемых *курсивом*.
Метапеременные для обсуждения языка $\mathcal{PL}$:

- $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots$ — для произвольных формул: p, $(p \to q)$, $((q \wedge r) \to (\neg r))\ldots$
- $\mathsf{p}, \mathsf{q}, \ldots$ — для **атомарных формул**, не имеющих частей-формул: $p, q, r, \ldots$

Синтаксис языка $\mathcal{PL}$ в форме Бэкуса — Наура: ①

(23) $$\mathsf{p} \mid (\neg \mathsf{A}) \mid (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \mid (\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \mid (\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \mid (\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B})$$

Чтобы избежать синтаксической неоднозначности, примем, что любую связку сопровождает пара скобок. Скобки — **синкатегорематические** символы: не имеют своего значения, появляются в формуле и интерпретируются вместе с другими знаками.

connectives ②③

Kratzer 1991b: «not assigned a type»

2.1.2 Семантика

В традиционном изложении логики высказываний значениями формул являются не пропозиции, а **истинностные значения** ‘истина’ (**1**) и ‘ложь’ (**0**) — мы как бы оставили из всех возможных миров один, в котором находимся сами.

Атомарные формулы p, r и т. д. функционируют как переменные, т. е. подобны выделенным словам в (24) в том, что их значение в конкретном случае зависит не от словаря.

можно ввести и константы (имена истинностных значений) $\top$ и $\bot$

(24) a. *Он* хороший.
b. *Так* не пойдёт!
c. *Это* меня удивило.

Значения переменных определяются функциями **означивания** (приписывания)

valuation, assignment

(25) $$g_i : \mathcal{V}ar \longmapsto \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$$

При данном g_i все истинные формулы имеют одно значение — **1**, т. е. буквально неотличимы друг от друга по значению. Но p отличается от q подбором означиваний, при которых оно истинно: для любых двух разных атомарных формул найдётся g_i, сопоставляющее им разные истинностные значения (как в модели с пропозициями для разных высказываний найдётся

мир, где одно истинно, а другое ложно). Поэтому каждой формуле можно сопоставить множество означиваний, при которых она истинна, $\{g \mid [\![\mathsf{A}]\!]^g = \mathbf{1}\}$ — аналог пропозиции.
$[\![\cdot]\!]$ — **функция интерпретации**, сопоставляющая значение любому ППВ данного языка.

Синкатегорематическое изложение семантики. Многие учебники не определяют прямо значение логических связок, а описывают, какое значение принимает формула, где данная связка — последнее действие, при тех или иных значениях её подформул. ④

(26) $[\![\mathsf{p}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. $g(\mathsf{p}) = \mathbf{1}$

(27) $[\![\neg\mathsf{A}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^g = \mathbf{0}$

(28) $[\![\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^g = \mathbf{1}$ и $[\![\mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$

Шаг для атомарных формул (26) не является тривиальным! Означивание не знает, что оно нужно для функции интерпретации, а без означивания $[\![\cdot]\!]$ не знает значений атомарных формул и потому не может вычислить значения остальных. ⑤
Значения связок здесь даны в неявном виде: нет явного ответа на вопрос, что значит «сама по себе» конъюнкция. Разумеется, она означает не истинностное значение, а функцию.

или что значит выражение типа $(\mathsf{A} \wedge\ )$, у которого должно быть значение ввиду **бинарного ветвления**

Категорематическое изложение семантики. Эксплицитно определяется значение самих связок как функций, чьими аргументами выступают значения (под)формул, соединяемых связками. Определив значение каждой из связок построением **таблицы истинности**, можно по ней построить значение данной связки как функции из множеств (соответственно, множеств пар) значений аргументов во множество значений формулы со связкой. Поскольку значений у аргумента всего два, эти функции легко задать списками:

(29)

A	¬A
1	**0**
0	**1**

(30)

A	B	A ∧ B
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

(31) $$[\![\neg]\!] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \longmapsto & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \longmapsto & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

(32) $$[\![\wedge]\!] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle & \longmapsto & \mathbf{1} \\ \langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle & \longmapsto & \mathbf{0} \\ \langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle & \longmapsto & \mathbf{0} \\ \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle & \longmapsto & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$ ⑥⑦

Семантика $\wedge$ в (32) порождает конфликт с задачей пошаговой интерпретации формулы: в синтаксисе присоединение конъюнктов должно происходить по одному (из-за бинарности ветвления), а в семантике их значения пока что берутся парой.

Ср. функцию вычитания: в исходном виде она принимает в качестве аргументов пару чисел и выдаёт значение — число. Сделаем из неё функцию вычитания **из**, аргументы которой — числа, из которых вычитают, а значения — функции, вычисляющие разность от вычитания из $0, 1, 2$ и т. д.

(33) $$\begin{bmatrix} \langle 0,0 \rangle & \longmapsto & 0 \\ \langle 0,1 \rangle & \longmapsto & -1 \\ \langle 0,2 \rangle & \longmapsto & -2 \\ \langle 1,0 \rangle & \longmapsto & 1 \\ \langle 1,1 \rangle & \longmapsto & 0 \\ \langle 1,2 \rangle & \longmapsto & -1 \\ & \dots & \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & -1 \\ 2 & \longmapsto & -2 \\ & \dots & \end{bmatrix} \\ 1 & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & \longmapsto & 1 \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 2 & \longmapsto & -1 \\ & \dots & \end{bmatrix} \\ & \dots & \end{bmatrix}$$

Процедура перехода от функции от нескольких аргументов к функции от одного аргумента называется **шейнфинкелизацией** (**каррированием**). *schönfinkelisation, currying*

$$(34) \qquad (32) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ll} \mathbf{1} \longmapsto & \left[\begin{array}{lll} \mathbf{1} & \longmapsto & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \longmapsto & \mathbf{0} \end{array}\right] \\ \mathbf{0} \longmapsto & \left[\begin{array}{lll} \mathbf{1} & \longmapsto & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \longmapsto & \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array}\right]$$

⑧⑨

Синтаксические категории и семантические типы. В языке $\mathcal{PL}$ есть три класса эквивалентности по сочетаемости — синтаксических категории (не считая скобок; рис. 3). ⑩

Аналогично, в семантике $\mathcal{PL}$ есть тремя типа означаемых — **семантическими типами** (рис. 4), т. е. классами эквивалентности по семантической сочетаемости (или по «разряду элементов реальности», к которому относится денотат). Пока нам нужен один базовый тип — t, тип истинностных значений, к которому относятся объекты **1** и **0**.

о связях типов и рубрикации мира см. Ajdukiewicz 1978

$$\begin{array}{rr} p, \neg(p \vee (q \to r)): & S \\ \neg: & S/S \\ \wedge: & (S\backslash S)/S \end{array}$$

Рис. 3: Синтаксические категории $\mathcal{PL}$

$$\begin{array}{rr} [\![p]\!], [\![\neg(p \vee (q \to r))]\!]: & t \\ [\![\neg]\!]: & \langle t, t\rangle \\ [\![\wedge]\!]: & \langle t, \langle t, t\rangle\rangle \end{array}$$

Рис. 4: Семантические типы $\mathcal{PL}$

о категориальных грамматиках для лингвистов см. Тестелец 2001: гл. 14

2.2 Модель, истинность и следование

Модель $\mathcal{M}$ — действительная или воображаемая «реальность» (формальная онтология: сущности, их свойства, отношения и т. п.), откуда черпаются значения выражений всех типов в данном языке. Если все элементы некоторого множества формул Γ оказываются истинны, будучи проинтерпретированы в $\mathcal{M}$, говорят, что $\mathcal{M}$ — модель **для** Γ.

Модель включает как минимум один базовый **домен** (область интерпретации, универсум); для интерпретации $\mathcal{PL}$ нужен один базовый домен — $D_t = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$. На его основе строятся домены производных типов — типов функций. Функции в D_t называются **отношениями** (поэтому значения связок — отношения).

> Одноместные отношения называются **свойствами**; как нульместные отношения можно рассматривать сами **1** и **0**, а как имена этих отношений — $\top$ и $\bot$.

При интерпретации формулы у функции $[\![\cdot]\!]$ нужно указывать, в какой модели и при каком означивании происходит интерпретация, например $[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}_3, g_4}$. Эти индексы опускаются, когда очевидны (а в классической логике высказываний модель всё время одна и та же).

Имея понятия модели и означивания, можно определить основные логические понятия истинности и следования. При этом учитывается, что

- истинность рассматривается как характеристика высказываний (ППФ)
- определение истинности даётся на метаязыке, который считается понятным, так что прямая отсылка к свойствам мира не происходит
- поскольку высказываний бесконечно много, чтобы охватить их все, определение истинности должно даваться в общем виде (не для конкретных высказываний) и **рекурсивно** — даваться через свойства подформул данной формулы, т. е. истинностное значение формулы должно однозначно определяться значениями компонентов и их взаиморасположением
- классическая логика высказываний **двузначна**, так что всякому высказыванию должно сопоставляться только одно из $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ — непротиворечивость

хотя Тарский 1998 [1944] и связывает своё определение с корреспондентной теорией истины

Истинность и парадоксы

В $\mathcal{PL}$ нет знака со значением 'истинно'; в языках, где он есть, попытка дать определение истинности средствами самого языка приводит к парадоксу.

Пример 4 (парадокс определения истины).

(35) Предложение (35) не истинно.

$[\![(35)]\!] = \mathbf{1}$, е. т. е. предложение (35) не истинно:

- пусть (35) истинно; тогда (верно, что) оно не истинно (= ложно; ❶)
- пусть (35) ложно; тогда неверно, что оно не истинно, — оно истинно

Мы пришли к **парадоксу лжеца** — одному из парадоксов самореферентности. Поэтому определение истинности следует формулировать на метаязыке. ⊣

Теперь мы свяжем нашу семантику, где **1** и **0** пока выполняют роль пустых ярлыков (вместо них годились бы ♀ и ♂, Пупсень и Вупсень), с привычным понятием истинности.
В качестве исходного возьмём понятие выполнимости — «истинности хоть где-нибудь», наличие хотя бы одного верифицирующего формулу набора из модели и означивания:

Определение 2 (выполнимость). Формула A выполнима в модели $\mathcal{M}$, е. т. е. существует такое означивание g, что $[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathbf{1}$. ⊣ *satisfiability*

Определение 3 (истинность в модели). Формула A истинна в модели $\mathcal{M}$ (запись: $\mathcal{M} \vDash \mathsf{A}$), е. т. е. A выполнима в $\mathcal{M}$ при любом g. ⊣

Определение 4 (истинность *simpliciter*). Формула A (логически = тождественно) истинна (запись: $\vDash \mathsf{A}$), е. т. е. A истинна во всех интерпретациях (моделях). ⊣ *tautology* ❷

Определение 5 (выполнимое и противоречивое множество формул). Множество формул Γ противоречиво, е. т. е. Γ не имеет модели; иначе непротиворечиво (выполнимо, совместимо). ⊣ ❸

Теперь адаптируем определение 1 к конкретному языку — $\mathcal{PL}$:

Определение 6 (логическое следование). Формула B следует из множества формул $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ (запись: $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vDash \mathsf{B}$), е. т. е. все пары ⟨модель, означивание⟩, которые выполняют каждую формулу из $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$, выполняют также и B. ⊣ Tarski 2002 [1936]

Т. е. следование имеет место, когда множество пар «модель — означивание», выполняющих $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$, является подмножеством множества пар, выполняющих B. Ср. выше следование как отношение между пропозициями. Так,

(36)
$$p \vDash p \vee q$$
$$\left\{\begin{array}{c}\langle \mathcal{M}, [p \longmapsto \mathbf{1}, q \longmapsto \mathbf{1}]\rangle \\ \langle \mathcal{M}, [p \longmapsto \mathbf{1}, q \longmapsto \mathbf{0}]\rangle \\ \ldots\end{array}\right\} \subseteq \left\{\begin{array}{c}\langle \mathcal{M}, [p \longmapsto \mathbf{1}, q \longmapsto \mathbf{1}]\rangle \\ \langle \mathcal{M}, [p \longmapsto \mathbf{1}, q \longmapsto \mathbf{0}]\rangle \\ \langle \mathcal{M}, [p \longmapsto \mathbf{0}, q \longmapsto \mathbf{1}]\rangle \\ \ldots\end{array}\right\}$$

Иначе говоря (учитывая единственность $\mathcal{M}$), B следует из $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$, е. т. е. пересечение «пропозиций» посылок включается в «пропозицию» заключения (11).
А поскольку строки таблицы истинности соответствуют классам означиваний, определение следования можно операционализировать: ❹

Определение 7 (следование в таблице истинности). Формула B языка $\mathcal{PL}$ следует из формул $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$, е. т. е. все строки таблицы истинности, в которых каждая из $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ истинна, характеризуют как истинную также и B. ⊣

Альтернативное построение семантики

Языку $\mathcal{PL}$ можно дать семантику, где значением формулы будет не **1** или **0**, а то или иное множество означиваний. Тогда $[\![\cdot]\!]$ не требует индекса означивания, т. к. значение формулы — регион «пространства» означиваний G:

(37) $$[\![\mathsf{p}]\!] = \{g \mid g(\mathsf{p}) = \mathbf{1}\}$$

(38) $$[\![\neg\mathsf{A}]\!] = \overline{[\![\mathsf{A}]\!]} = G \setminus [\![\mathsf{A}]\!]$$

(39) $$[\![\mathsf{A} \vee \mathsf{B}]\!] = [\![\mathsf{A}]\!] \cup [\![\mathsf{B}]\!]$$

Тогда истинность в модели при означивании нуждается в переопределении:

Определение 8 (истинность в $\mathcal{M}$ при g)**.** Формула A истинна в модели $\mathcal{M}$ при означивании переменных g, е. т. е. $g \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}$. ⊣

2.3 Разрешающие процедуры для $\mathcal{PL}$

2.3.1 Две задачи логики

Можно условно выделить две группы проблем, интересующих логику:

- Какие формулы (высказывания данного языка) тождественно истинны, т. е. не могут быть ложными в силу своей структуры? Как относительно формулы проверить, ТИ ли она?
- Каковы правила получения истинных формул путём рассуждения:
  - «просто» (контингентно) истинных — путём вывода их из истинных посылок
  - тождественно истинных — из других тождественно истинных или беспредпосылочно — «на пустом месте» (поскольку не требуется никакой исходной информации о мире, чтобы утверждать то, что истинно в любом мире)?

Условно скажем, что на первый вопрос отвечают **разрешающие процедуры**, а на второй — **дедуктивные системы**, или **исчисления**. *decision procedure* vs. *calculus*

В нашей модели с пропозициями тождественно истинные формулы оказываются неинформативными (не исключают никаких миров). Но можно считать, что они описывают «логические факты», отличающие наш мир (и все «нормальные» миры) от миров, где, например, может быть одновременно $\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{A}$.
Является ли $(q \to p) \vee \neg(q \to p)$ выражением отдельного «логического факта» или же только проявлением общего «логического закона» $\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{A}$? (Является ли $5451,92803316 : 424,92993 = 12,8302$ выражением отдельного «математического факта» или же только проявлением общих законов арифметики?)

2.3.2 Разрешающие процедуры для $\mathcal{PL}$

Разрешающая процедура — алгоритм, позволяющий для произвольной A определить, является A тождественно истинной, тождественно ложной или **нейтральной**. Наглядная, но неэффективная РП — построение таблицы истинности. ❻
Если сразу спросить, можно ли фальсифицировать A, т. е. найти такое g, что $[\![\mathsf{A}]\!]^g = \mathbf{0}$, эффективность возрастает (например, $\to$ даёт ложь всего в одном из четырёх случаев). Это не меняет синтаксического, несемантического характера процедуры. Эта идея лежит в основе **аналитических таблиц**: предполагаем ложность A, откуда в зависимости от последнего действия делаем вывод о значениях подформул A.
На каждом шаге применяется одно из правил на рис. 5 в зависимости от последнего действия, пока A не будет разобрана до атомарных подформул. Если в каждой ветви полученной таблицы есть неконсистентность (формальное противоречие — одна и та же B и слева, и справа от черты), то исходное предположение неверно (т. е. A никогда не ложна). Это называется **замы-** ❼

канием подтаблицы. Если есть незамкнутые подтаблицы, то они вместе описывают все наборы значений атомов, при которых А ложна.

(40) $$\ldots \mathsf{B} \ldots \;\Big|\; \ldots \mathsf{B} \ldots$$

Эта процедура детерминированная: на каждом шаге один вариант действия; конечная: ввиду конечной длины А мы дойдём до атомов.

Непейвода 1997: 197 и сл.

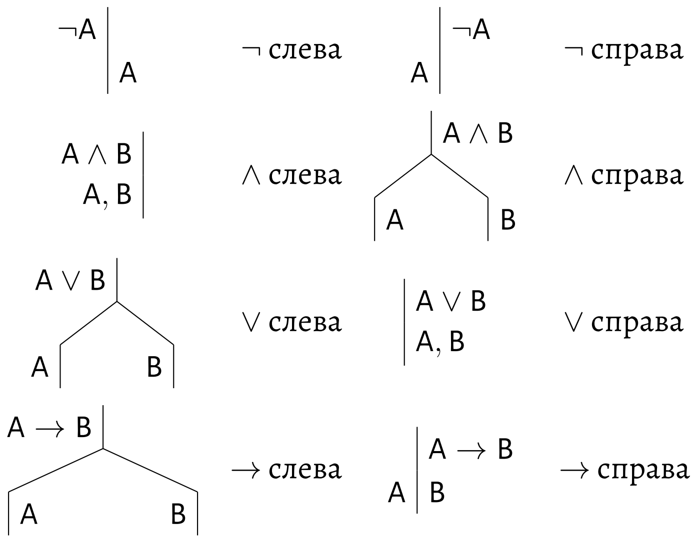


Рис. 5: Набор правил для аналитических таблиц (Непейвода 1997: 199)

2.4 Дедуктивные системы для $\mathcal{PL}$

2.4.1 Понятие дедуктивной системы

Дедуктивная система (= исчисление; ДС) — совокупность формальных правил оперирования формулами; требует уже заданного синтаксиса некоторого формализованного языка: только определив, что считать ППФ, можно определить правила перехода от одних формул к другим. В ДС для формализованного языка $\mathcal{L}$ входят

ср. Partee, Meulen, Wall 1990: 92, 186

- множество $\mathcal{A}$ **аксиом** — ППФ языка $\mathcal{L}$
- множество $\mathcal{R}$ **правил вывода** — способов преобразования (наборов) выражений, где от множества **посылок** переходят к одному **заключению**, вида

при желании можно считать, что $\mathcal{A} = \{R \in \mathcal{R} \mid$ в R 0 посылок$\}$

(41) $$\frac{\mathsf{A}_1 \qquad \ldots \qquad \mathsf{A}_n}{\mathsf{B}}$$

Число аксиом может быть бесконечно (и как правило таково, поскольку нужны теоремы очень разной структуры); и правила применяются к произвольным формулам. Поэтому $\mathcal{A}$ часто формулируют в метапеременных, т. е. пишут **схемы аксиом**; $\mathcal{R}$ тоже пишут в метапеременных.

Определение 9. Аксиома А называется **независимой** от аксиом $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ в исчислении Σ, если А не может быть выведена в Σ из $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$. ⊣

Partee, Meulen, Wall 1990: 202

> Использование метапеременных приводит к тому, что сформулированных на метаязыке схем аксиом оказывается конечное число, а в дополнение к ним действует замена метапеременных произвольными выражениями. Иногда (Колмогоров, Драгалин 2006: 46–47) вместо схем аксиом используют собственно аксиомы на объектном языке и определяют правило подстановки произвольных подформул на место атомарных.

Результатом использования ДС являются выводы:

Определение 10. Вывод в ДС $\Sigma_{\mathcal{L}}$ — дерево, чьи листья занимают ППФ языка $\mathcal{L}$, а прочие вершины — ППФ языка $\mathcal{L}$, полученные из (наборов) ранее написанных ППФ применением того или иного из элементов $\mathcal{R}_{\Sigma}$. ⊣ ⑩

Определение 11 (выводимость)**.** Формула B выводима из конечного множества формул $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ в исчислении Σ ($A_1, \ldots, A_n \vdash_{\Sigma} B$), е. т. е. существует вывод в Σ, использующий не более чем все элементы Γ и оканчивающийся B. ⊣

добавка «не более чем» касается *монотонности* отношения $\vdash_{\Sigma}$

Исходные элементы вывода, не входящие в $\mathcal{A}$, называют **допущениями**. Вывод без допущений (для натуральных исчислений: без неснятых допущений) — доказательство:

Определение 12. Доказательство формулы A в ДС Σ — вывод, в котором нет других формул, кроме элементов $\mathcal{A}_{\Sigma}$, формулы A и формул, полученных из (наборов) ранее написанных применением того или иного из элементов $\mathcal{R}_{\Sigma}$. ⊣

Определение 13 (доказуемость)**.** Формула B **доказуема** в исчислении Σ ($\vdash_{\Sigma} B$), е. т. е. можно построить доказательство в Σ, оканчивающееся B. ⊣

Множество выражений, доказуемых в Σ, называется множеством **теорем** Σ.

2.4.2 Адекватность дедуктивной системы интерпретации языка

> Доказательство — конструкция, синтаксическая правильность которой гарантирует семантическую.
>
> Непейвода 1997: 76

То, что данная Σ обладает этим свойством, нужно доказывать.

Определение 14 (корректность)**.** Исчисление Σ корректно относительно интерпретации $[\![\cdot]\!]$ языка $\mathcal{L}$, е. т. е. не существует такой формулы $A \in \mathcal{L}$, что: $\vdash_{\Sigma} A$, но существует $g : [\![A]\!]^g = \mathbf{0}$. ⊣ ①

Чтобы показать корректность Σ, надо показать тождественную истинность всех элементов $\mathcal{A}_{\Sigma}$ и показать, что все элементы $\mathcal{R}_{\Sigma}$ сохраняют истинность.

Определение 15 (полнота)**.** Исчисление Σ **полно** относительно интерпретации $[\![\cdot]\!]$ языка $\mathcal{L}$, е. т. е. не существует такой формулы $A \in \mathcal{L}$, что: для всякого $g : [\![A]\!]^g = \mathbf{1}$ и при этом $\nvdash_{\Sigma} A$. ⊣

Определение 16 (адекватность)**.** Исчисление Σ **адекватно** интерпретации $[\![\cdot]\!]$ языка $\mathcal{L}$, е. т. е. Σ корректно и полно относительно $[\![\cdot]\!]$. ⊣ ②

Мы всегда требуем корректности, но иногда готовы мириться с неполнотой. ③

2.4.3 Аксиоматические исчисление

На каждом шаге вывода можно написать аксиому или формулу, полученную из ранее написанных по одному из правил вывода (например, таких, как на рис. 6). Вывод A заканчивается написанием A. Вывод будет иметь форму дерева, ветвящегося вверх (в сторону посылок-аксиом) при каждом применении правила MP — единственного в этой формулировке исчисления. Аксиоматические исчисления используют для доказательства «метатеоретических» теорем, таких как эта, связывающая наши «две задачи логики», но с синтаксической стороны (теоремы и выводимости вместо тождественно истинных формул и следования).

Теорема 1 (дедукции)**.** Если $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\Sigma} B$, то $A_1, \ldots, A_{n-1} \vdash_{\Sigma} A_n \to B$.

Клини 1973 [1967]: 54–58

Доказательство. Доказывается приписыванием «$A_n \to$ » ко всем шагам вывода с последующей вставкой недостающих шагов в дерево (чтобы превратить результат приписывания в полноценный вывод по требованиям аксиоматического исчисления):

1. $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \to \mathsf{A})$
2. $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \to ((\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \to \mathsf{C})) \to (\mathsf{A} \to \mathsf{C}))$
3. $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \to (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}))$
4. $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \to \mathsf{A}$; $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \to \mathsf{B}$
5. $\mathsf{A} \to (\mathsf{A} \vee \mathsf{B})$; $\mathsf{B} \to (\mathsf{A} \vee \mathsf{B})$
6. $(\mathsf{A} \to \mathsf{C}) \to ((\mathsf{B} \to \mathsf{C}) \to ((\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \to \mathsf{C}))$
7. $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \to ((\mathsf{A} \to \neg\mathsf{B}) \to \neg\mathsf{A})$
8. $\neg\neg\mathsf{A} \to \mathsf{A}$ (в классической версии исчисления)
9. $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \to ((\mathsf{A} \to \mathsf{A}) \to (\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}))$
10. $(\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}) \to (\mathsf{A} \to \mathsf{B})$; $(\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}) \to (\mathsf{B} \to \mathsf{A})$

axiom schemata

правило вывода:

$$\frac{\mathsf{A} \qquad \mathsf{A} \to \mathsf{B}}{\mathsf{B}}\ \text{MP}\ \ (\textit{modus ponens})$$

Рис. 6: Аксиоматизация логики высказываний по Клини (1973 [1967]: 467)

- если текущий шаг состоит в написании $\underline{\mathsf{C}} \in \mathcal{A}$ или $\mathsf{C} \in \{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_{n-1}\}$:

(42)
$$\frac{\mathsf{C} \to (\mathsf{A}_n \to \mathsf{C})\ \text{(подстановка в A1)} \qquad \mathsf{C}\ \text{(допущение)}}{\mathsf{A}_n \to \underline{\mathsf{C}}}\ \text{MP}$$

- если текущий шаг состоит в написании $\mathsf{C} = \mathsf{A}_n$: вставляем вывод формулы $\mathsf{C} \to \mathsf{C}$ ④
- если текущий шаг состоит в написании формулы, полученной MP из некоторых $\mathsf{D}, \mathsf{D} \to \mathsf{C}$:

(43)
$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{A}_n \to \mathsf{D} \qquad \begin{matrix}(\mathsf{A}_n \to \mathsf{D}) \to ((\mathsf{A}_n \to (\mathsf{D} \to \mathsf{C})) \to (\mathsf{A}_n \to \mathsf{C}))\\ \text{(подстановка в A2)}\end{matrix}}{(\mathsf{A}_n \to (\mathsf{D} \to \mathsf{C})) \to (\mathsf{A}_n \to \mathsf{C})}\ \text{MP} \qquad \mathsf{A}_n \to (\mathsf{D} \to \mathsf{C})}{\mathsf{A}_n \to \mathsf{C}}\ \text{MP} \quad \dashv$$

Очерк доказательства полноты исчисления относительно стандартной семантики

Теорема 2 (о полноте; Клини 1973 [1967]). Если B — тавтология (т. е. $\forall g : [\![\mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$), то $\vdash \mathsf{B}$.

Доказательство. Включает несколько вспомогательных утверждений:

Лемма 1. Каждой таблице истинности для связки, как в (32), соответствует набор выводимостей, например $\mathsf{A}, \mathsf{B} \vdash \mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$; $\mathsf{A}, \neg\mathsf{B} \vdash \neg(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})$ и т. д.

Доказательство. Проверяется перебором случаев. $\dashv$

Лемма 2. Таблице истинности для произвольной формулы соответствует набор выводимостей из литералов на основе атомов в составе формулы: например, $\neg\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C} \vdash \mathsf{A} \to (\mathsf{B} \vee \mathsf{C})$; $\mathsf{A}, \neg\mathsf{B}, \neg\mathsf{C} \vdash \neg(\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \vee \mathsf{C}))$ и т. д.

Доказательство. Идея в том, что любая подформула (или её отрицание, если она ложна) выводима из своих литералов цепочкой применений леммы 1. $\dashv$

Лемма 3. Если $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ — атомы тавтологии B, то $\mathsf{A}_1 \vee \neg\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vee \neg\mathsf{A}_n \vdash \mathsf{B}$.

Доказательство. Поскольку B — тавтология, в любой выводимости из леммы 2 она участвует без отрицания. Выводимости (ср. строки таблицы) имеют вид

(44)
$$\begin{gathered}\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vdash \mathsf{B}\\ \neg\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vdash \mathsf{B}\\ \vdots\\ \mathsf{A}_1, \ldots, \neg\mathsf{A}_n \vdash \mathsf{B}\\ \neg\mathsf{A}_1, \ldots, \neg\mathsf{A}_n \vdash \mathsf{B}\end{gathered}$$

Но тогда $A_1 \vee \neg A_1, \dots, A_n \vdash B$ и т. д. (ср. А6). $\dashv$

Поскольку $\vdash A_1 \vee \neg A_1$ и т. д., по транзитивности $\vdash$ из леммы 3 получаем $\vdash B$. $\dashv$

2.4.4 Натуральное исчисление

Задача натуральных исчислений (систем естественного вывода) — относительно близкая аппроксимация (математических) рассуждений. К прототипу «натуральности» близки системы, где правила интуитивно понятны, в числе преобладают над аксиомами (аксиом может не быть вообще), где есть правила введения и удаления для каждой связки. *natural deduction* Pelletier, Hazen 2012

Натуральные исчисления основываются на **допущениях** и их **снятии** — операции, позволяющей устранить зависимость надёжности заключения от контингентно («фактически», не логически, только при некоторых g) истинных формул.

На каждом шаге доказательства можно написать допущение или формулу, полученную из ранее написанных применением одного из правил вывода. Вывод A заканчивается написанием A. Вывод считается **доказательством**, если по окончании в нём не остаётся неснятых допущений (включая введённые на промежуточных шагах для технических нужд). ⑤⑥

Допущение снимается применением одного из **условных** правил У∨, В→, В¬, позволяющих вывести формулу при условии, что имеется некоторая другая выводимость. Взятые в [скобки] допущения при применении правила снимаются.
Допущение, сделанное в нескольких ветвях, сходящихся к общей вершине, можно снять одним применением условного правила ниже этой вершины. Это отражает нечувствительность классической логики к ресурсам (к числу токенов той или иной посылки).

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\ \text{В}\wedge \qquad \frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{A}\ \text{У}\wedge$$

$$\frac{A}{A \vee B} \quad \frac{B}{A \vee B}\ \text{В}\vee \qquad \frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad A \vee B}{C}\ \text{У}\vee$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ \text{В}\to \qquad \frac{A \to B \quad A}{B}\ \text{У}\to$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\ \text{В}\neg \qquad \frac{A \quad \neg A}{\bot}\ \text{У}\neg$$

$$\frac{\bot}{A}\ \text{ВПВ}$$

Рис. 7: Возможный набор правил естественного вывода

Все выводы, которые можно построить с помощью до сих пор названных правил, **конструктивны**. Вывод называется **неконструктивным** (интуитивно: не показано, A имеет место или же ¬A), если использует аксиомную схему $A \vee \neg A$. Гладкий 2001: 106

Если неконструктивное доказательство разрешено, усиливается значение правила У∨, которое теперь можно использовать для исследования следствий обеих «возможностей»: A и ¬A. ⑦⑧

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg s \wedge p\ [1]}{\neg s} \qquad s\ [3]}{\bot}}{r}}{s \to r}\ \text{В}\to, \cancel{3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg s \wedge q\ [2]}{\neg s} \qquad s\ [4]}{\bot}}{r}}{s \to r}\ \text{В}\to, \cancel{4} \qquad (\neg s \wedge p) \vee (\neg s \wedge q)\ [5]}{\dfrac{s \to r}{((\neg s \wedge p) \vee (\neg s \wedge q)) \to (s \to r)}\ \text{В}\to, \cancel{5}}\ \text{У}\vee, \cancel{1}, \cancel{2}$$

Рис. 8: Пример натурального вывода; указаны шаги, где снимаются допущения

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg p \qquad [p]}{(\neg\neg p) \wedge p}}{p} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg p \qquad [\neg p]}{\bot}}{p} \qquad p \vee \neg p}{p}$$

Рис. 9: Пример неконструктивного вывода (с изменениями из Гладкий 2001: 106)

> На практике нередко нужно доказывать формулы вида *кратной импликации* $\mathsf{A}_1 \to (\mathsf{A}_2 \to (\ldots \to \mathsf{A})\ldots)$, где выделяют несколько «антецедентов» $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n$ и «консеквент» A. Антецеденты удобно брать в качестве допущений, а затем снимать применением В→ (⑨).

Наш набор правил вывода продиктован соображениями полноты, независимости и идеала «введения — удаления»; вообще можно принять любое число сохраняющих истинность правил, дающих вместе полное исчисление. Этим пользуются, вводя **производные** правила, каждое из которых обосновано наличием аксиоматического или натурального вывода, ведущего к тому же заключению «окольным» путём.

admissible / derived rules

Многие правила, включая производные, имеют традиционные названия: ⑩

чисто условный (гипотетический) силлогизм:

$$\dfrac{\mathsf{B} \to \mathsf{C} \qquad \mathsf{A} \to \mathsf{B}}{\mathsf{A} \to \mathsf{B}}$$

условно-категорические силлогизмы — *modus ponens* и *modus tollens*:

$$\dfrac{\mathsf{A} \to \mathsf{B} \qquad \mathsf{A}}{\mathsf{B}} \qquad \dfrac{\mathsf{A} \to \mathsf{B} \qquad \neg\mathsf{B}}{\neg\mathsf{A}}$$

разделительно-категорические силлогизмы — *modus ponendo tollens* и *modus tollendo ponens*:

$$\dfrac{\mathsf{A} \dot{\vee} \mathsf{B} \qquad \mathsf{A}}{\neg\mathsf{B}} \qquad \dfrac{\mathsf{A} \dot{\vee} \mathsf{B} \qquad \neg\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$$

простая конструктивная дилемма (ср. MP):

$$\dfrac{\mathsf{A} \to \mathsf{C} \qquad \mathsf{B} \to \mathsf{C} \qquad \mathsf{A} \vee \mathsf{B}}{\mathsf{C}}$$

сложная конструктивная дилемма:

$$\dfrac{\mathsf{A} \to \mathsf{C} \qquad \mathsf{B} \to \mathsf{D} \qquad \mathsf{A} \vee \mathsf{B}}{\mathsf{C} \vee \mathsf{D}}$$

простая деструктивная дилемма (ср. MT):

$$\dfrac{\mathsf{A} \to \mathsf{C} \qquad \mathsf{A} \to \mathsf{D} \qquad \neg\mathsf{C} \vee \neg\mathsf{D}}{\neg\mathsf{A}}$$

сложная деструктивная дилемма:

$$\dfrac{\mathsf{A} \to \mathsf{C} \qquad \mathsf{B} \to \mathsf{D} \qquad \neg\mathsf{C} \vee \neg\mathsf{D}}{\neg\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{B}}$$

Рис. 10: Некоторые правила вывода и их традиционные названия

2.4.5 Секвенциальное исчисление

> Rather than axiomatizing the set of tautologies we can also axiomatize the deducibility relation itself.
>
> Kracht 2003: 193

Секвенциальные исчисления интерпретируются как рассуждения о выводах — своего рода метаязык для других исчислений, например для рассуждений о возможности того или ино-

sequent calculi; введены в Gentzen 1935

го вывода в наших аксиоматическом и натуральном исчислении (которые оба полны относительно стандартной семантики и, соответственно, равны по дедуктивной силе).
Секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ интуитивно трактуется как 'существует вывод хотя бы одной B из **сукцедента** Δ, использующий не более чем все формулы антецедента Γ'. Черта вывода трактуется как 'если есть такие-то выводы, то есть и такой-то вывод'.
На каждом шаге вывода можно написать любую подстановку в аксиомную схему

(45) $$\mathsf{A} \vdash \mathsf{A}$$

либо секвенцию, полученную из имевшихся на предыдущем шаге по одному из правил вывода. Вывод секвенции $\Gamma \vdash \Delta$ заканчивается написанием $\Gamma \vdash \Delta$. ❶

$$\frac{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma \vdash \Delta}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}, \Gamma \vdash \Delta}\ \wedge\vdash \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A} \qquad \Gamma \vdash \Delta, \mathsf{B}}{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}\ \vdash\wedge$$

$$\frac{\mathsf{A}, \Gamma \vdash \Delta \qquad \mathsf{B}, \Gamma \vdash \Delta}{\mathsf{A} \vee \mathsf{B}, \Gamma \vdash \Delta}\ \vee\vdash \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A}, \mathsf{B}}{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A} \vee \mathsf{B}}\ \vdash\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A} \qquad \mathsf{B}, \Gamma \vdash \Delta}{\mathsf{A} \to \mathsf{B}, \Gamma \vdash \Delta}\ \to\vdash \qquad \frac{\mathsf{A}, \Gamma \vdash \Delta, \mathsf{B}}{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A} \to \mathsf{B}}\ \vdash\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A}}{\neg \mathsf{A}, \Gamma \vdash \Delta}\ \neg\vdash \qquad \frac{\mathsf{A}, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg \mathsf{A}}\ \vdash\neg$$

Логические правила

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \mathsf{A} \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A}} \quad \text{утончение}$$

$$\frac{\Gamma, \mathsf{A}, \mathsf{A} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathsf{A} \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A}, \mathsf{A}}{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A}} \quad \text{сокращение}$$

$$\frac{\Gamma, \mathsf{A}, \mathsf{B} \vdash \Delta}{\Gamma, \mathsf{B}, \mathsf{A} \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A}, \mathsf{B}}{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{B}, \mathsf{A}} \quad \text{перестановка}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathsf{A} \qquad \Gamma', \mathsf{A} \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \quad \text{сечение}$$

Структурные правила

Рис. 11: Вариант правил вывода по Клини 1973 [1967]: 346

где посылки две, Γ и Δ могли бы быть разными, но если даны сокращение и утончение, то эти формулировки эквивалентны (Crouch, Genabith 2000)

Вопросы и задания

① Предложите другие типы метапеременных для данного языка. Сколько их?

② Приведите другие известные вам примеры синкатегорематических символов (в любых языках, для которых есть интерпретация).

③ Предложите способ обойтись без скобок, не жертвуя однозначностью записи. Приведите аналогии для полученного способа из естественных языков.

④ Почему в семантике языка логики высказываний достаточно трёх определений для связок? Можно ли обойтись меньшим их числом? Potts 2007: A.14

⑤ Почему не только атомарных? Верно ли, что всех?

⑥ Определите поведение остальных стандартных связок. Убедитесь, что основные бинарные связки, кроме $\to$, симметричны.

⑦ Сколько возможно различных унарных, бинарных связок (= сколько элементов в доменах $D_{\langle t,t\rangle}$, $D_{\langle t,\langle t,t\rangle\rangle}$)? Сопоставьте некоторым из них выражения естественного языка, например *ни… ни*, *только когда*.

⑧ Каррируйте другие бинарные связки, тернарную связку 'вне зависимости от A, если B, то C', а также функции 'расстояние от … до …' и 'местонахождение студента группы … в день недели … во время пары № …'.

⑨ Покажите, что гипотетический результат присоединения к конъюнкции одного из конъюнктов типа (∧ B) имеет ту же семантику, что и унарная связка, противоположная ¬.
⑩ Почему $\langle t, \langle t, t \rangle \rangle$, а не $\langle \langle t, t \rangle, t \rangle$? Как это связано с шейнфинкелизацией?
❶ Какое свойство *интерпретации* логики высказываний позволяет нам считать, что ‘не истинно’ = ‘ложно’ и наоборот?
❷ Сформулируйте определение выполнимости (вообще, а не в модели).
❸ Приведите примеры противоречивых множеств формул языка $\mathcal{PL}$. А естественного?
❹ Построив таблицу истинности, проверьте, имеют ли место отношения следования $p \to (\neg p) \vDash_? \neg p$, $(p \to q) \wedge ((\neg p) \to q) \vDash_? q$, $((\neg p) \vee q) \wedge r \vDash_? (\neg(p \wedge q)) \vee r$.
❺ Определите значение остальных связок при таком построении семантики.
❻ Каким образом таблицу истинности можно использовать для ответа на эти вопросы? Почему она малоэффективна?
❼ С какой стороны от черты нужно записать самоё A в начале работы?
❽ Сформулируйте правила анализа для эквивалентности и строгой дизъюнкции.
❾ Дайте табличный анализ некоторых аксиом аксиоматического исчисления высказываний (см. § 2.4.3 ниже).
❿ Для чего к *выводимо* или доказуемо добавлять *в дедуктивной системе* Σ?
① Определите, корректны ли следующие ДС:
(a) $\mathcal{A} : p$; $\mathcal{R} : \dfrac{\mathsf{A} \qquad \mathsf{A} \to \mathsf{B}}{\mathsf{B}}$
(b) $\mathcal{A} : \mathsf{A} \to (\mathsf{A} \vee \mathsf{B})$; $\mathcal{R} : \dfrac{\mathsf{A} \qquad \mathsf{A} \to \mathsf{B}}{\mathsf{B}}$
(c) $\mathcal{A} : (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \to \mathsf{A}, (\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \to \mathsf{B}$; $\mathcal{R} : \dfrac{\mathsf{A}}{\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}}$
② Можно ли представить синтаксис пропозиционального языка как исчисление? Будет ли оно корректно, полно (и относительно чего)?
③ Почему корректность ДС — обязательное условие её использования, а полнота нет?
④ Докажите в аксиоматическом исчислении: $p \to p$ (Клини 1973 [1967]: 48–49).
⑤ Назовите правила, применяемые на неаннотированных шагах доказательства на рис. 8.
⑥ Докажите в натуральном исчислении: ≈ Гладкий 2001: 96
(a) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
(b) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
(c) $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$
(d) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$
⑦ Прокомментируйте каждый шаг неконструктивного вывода $\neg\neg p \vdash p$ на рис. 9.
⑧ Выведите неконструктивно: $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$ (Гладкий 2001: 109).
⑨ Чему соответствует в написанной схеме формулы второе многоточие?
⑩ Придумайте по одному содержательному примеру на каждый из модусов на рис. 10.
❶ Докажите в секвенциальном исчислении аксиомы аксиоматического.

3 Неклассические логики высказываний

Классическая логика в семантическом отношении характеризуется

- двузначностью: $[\![\mathsf{A}]\!]^g \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$
- экстенсиональностью: $[\![\alpha(\beta)]\!]^g = \Phi([\![\alpha]\!]^g, [\![\beta]\!]^g)$ для некоторой Φ (в вычислении значений участвуют только значения, а не функции, превращающиеся в значения с добавлением аргументов, — интенсионалы и пр.)

Неэкстенсиональной будет логика, в которой для вычисления значения формулы при некоторых параметрах необходимо знать значение её подформулы при другом наборе параметров, например в модальной логике $[\![\Diamond p]\!]^{w,g} = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![p]\!]^{v,g} = \mathbf{1}$ для некоторого v (см. II семестр). Многозначные логики рассматриваются ниже.

3.1 Многозначные логики

3.1.1 Принципы построения

Если представить язык $\mathcal{PL}$ в виде т. н. логической **матрицы**, включающей D_t, определения связок и множество **выделенных** значений Des, получится

Malinowski 1993
designated values

(46) $$M_{\mathcal{PL}} = \langle \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}, [\![\neg]\!], [\![\wedge]\!], [\![\vee]\!], [\![\rightarrow]\!], \{\mathbf{1}\}\rangle$$

Выделенные значения:

- при данном g формула, имеющая одно из них, рассматривается как валидная (обобщение понятия истинности)
- формула, имеющая одно из них при каждом g, рассматривается как тавтология
- если наличие одного из них у каждого из A_i обеспечивает наличие одного из них у B, то $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vDash \mathsf{B}$ (обобщение понятия следования)

Если поменять D_t (и, возможно, Des), понадобится доопределить значения связок для новых комбинаций аргументов и получится матрица некоторой многозначной логики как «расширение» матрицы $\mathcal{PL}$. Например, для n-значного конечнозначного случая примем

есть языки, где многозначные связки не сохраняют значений для классических аргументов, например у Поста из-за *ротирующего* отрицания

(47) $$D_t = \left\{ \frac{k}{n-1} \;\middle|\; 0 \leq k < n \right\};$$

в наших трёхзначных примерах по-прежнему $Des = \{\mathbf{1}\}$. Различные определения связок мотивированы различной интуитивной интерпретацией нового истинностного значения $\frac{1}{2}$/#:

Smith 2013

слабая Клини ‘бессмыслица’: бессмысленная подформула «инфицирует» высказывание, в которое входит, и делает его бессмысленным (даже если оно классическая тавтология)

$\neg$	
1	0
#	#
0	1

$\wedge$	1	#	0
1	1	#	0
#	#	#	#
0	0	#	0

$\vee$	1	#	0
1	1	#	1
#	#	#	#
0	1	#	0

$\rightarrow$	1	#	0
1	1	#	0
#	#	#	#
0	1	#	1

сильная Клини ‘неизвестное классическое значение’: значение, которое слишком сложно вычислить (но если значение целого не зависит от того, **1** означает подформула или **0**, то вычислить можно) — конъюнкция как максимум, дизъюнкция как минимум

$\neg$	
1	0
#	#
0	1

$\wedge$	1	#	0
1	1	#	0
#	#	#	0
0	0	0	0

$\vee$	1	#	0
1	1	1	1
#	1	#	#
0	1	#	0

$\rightarrow$	1	#	0
1	1	#	0
#	1	#	#
0	1	1	1

Лукасевича ‘возможно’ или иное значение посередине — импликация как $\min(\mathbf{1}, \mathbf{1} - [\![\mathsf{A}]\!] + [\![\mathsf{B}]\!])$

это только некоторые из многочисленных логик

$\neg$	
1	0
#	#
0	1

$\wedge$	1	#	0
1	1	#	0
#	#	#	0
0	0	0	0

$\vee$	1	#	0
1	1	1	1
#	1	#	#
0	1	#	0

$\rightarrow$	1	#	0
1	1	#	0
#	1	1	#
0	1	1	1

> Чтобы логика была «по-настоящему» многозначной, а не вариантом представления классической, требуют, чтобы не существовало никакого двузначного способа получить тот же класс теорем или тот же набор отношений следования (Malinowski 1993: 30). Ср. вырожденный случай, когда **1** просто удваивается и берётся $Des = \{\mathbf{1}, \mathbf{1}'\}$.

Для многозначных логик нужны свои исчисления, поскольку у них свои классы тавтологий. Например, для трёхзначной логики Лукасевича (+ MP):

Malinowski 1993: 36, 39

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
3. $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
4. $((A \to \neg A) \to A) \to A$

D1. $A \lor B =_{df} (A \to B) \to B$

D2. $A \land B =_{df} \neg(\neg A \lor \neg B)$

3.1.2 Некоторые применения

Нечёткие понятия. Бесконечнозначные логики ($D_t = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$) могут применяться в вероятностных рассуждениях и для анализа проблем нечёткости (*vagueness*):

Gottwald 2020

Пример 5 (парадокс «куча»)**.** Если n песчинок составляют кучу песка, то $(n-1)$ должны составлять кучу («от одной песчинки ничего не может всерьёз поменяться»). Но тогда по индукции и одна песчинка — это куча.

(48)
$$\dfrac{\dfrac{1\,000\,000 — \text{куча} \qquad n — \text{куча} \to (n-1) — \text{куча}}{999\,999 — \text{куча}} \qquad n — \text{куча} \to (n-1) — \text{куча}}{999\,998 — \text{куча}}$$ ⊣

Вариант решения: сопоставим *если* A, *то* B значение, несколько меньшее **1** (ср. 'возможно', 'скорее всего'). Тогда в (48) заключение будет «чуть менее истинно», чем категорическая посылка, и по мере движения от «вполне» (**1**) истинного *1 000 000 — куча* истинностные значения промежуточных заключений будут уменьшаться.

Если выделенные значения начинаются, например, с 0,75, то MP может не сохранять валидность: при посылках с 0,75 заключение будет менее истинным, чем 0,75.

Shramko, Wansing 2020

Гомогенность. В интуитивной трактовке 'промежуточное значение' третье значение # можно использовать для описания семантики предложений типа

(49) Mary saw zebras. когда Мэри видела ровно одну зебру

(50) The professors are smiling. когда профессора в основном улыбаются

a *All the professors smiled* двузначно

Именные группы здесь проявляют свойство гомогенности (Križ 2019): если не все предметы из множества одинаковы в данном отношении, предложение имеет значение #; на него приходится отвечать не *Yes* или *No*, а *Well, …*. Ср. также

(51) If Nina comes to the party, Adam will be happy. = #, если скорее всего, но не точно

Пресуппозиция. В интуитивной трактовке 'нет значения; не оценить в отношении истинности; не определено; бессмыслица' # можно использовать для описания семантики предложений с пресуппозицией.

Определение 17. Пресуппозиция предложения (высказывания или вопроса) A — высказывание, которое должно быть истинно, чтобы A могло быть высказано (в т. ч. утверждаемо, отрицаемо, поставлено под вопрос или — иногда — включено в более сложное предложение). ⊣

(52) a. #Нынешний король Франции лыс.
b. %Нынешний король Франции не лыс.
c. #Лыс ли нынешний король Франции?

Russell 1905 vs. Strawson 1950

(53) Перестал ли ты бить своего отца?

(54) #Иван знает, что Земля плоская. ①

> Пресуппозиция — случай, когда абстракцию взаимонезависимости пропозиций приходится отбросить, во всяком случае если понимать атомарность широко, включая вносимые непредикативными единицами пресуппозиции в «атом» предложения.

Два подхода к пресуппозиции:

- прагматический — пресуппозиция как необходимое условие того, чтобы A можно было произнести в данном контексте ≈ ограничение на состояние фоновых знаний локуторов
- семантический — пресуппозиция как необходимое условие того, что $[\![A]\!]$ определено; оно может иметь интуитивный смысл (мы понимаем, что должно было бы иметь место, чтобы (52a) было истинно), но не определено $[\![A]\!] \in \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$: Strawson 1950

(55) $[\![(52a)]\!]$ определено, е. т. е. существует нынешний король Франции — ср. нотацию Heim 1992
когда определено, $[\![(52a)]\!] = \mathbf{1}$, е. т. е. нынешний король Франции лыс

Beaver, Krahmer (2001) показывают, как с помощью трёхзначной логики можно моделировать **проекцию** пресуппозиции — явление, при котором B[A], например ¬A, или A∇B, где $\nabla \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, или же (56), наследует пресуппозиции, бывшие у A.

(56) Иван знает, что нынешний король Франции лыс.
⇝ Существует нынешний король Франции, о котором Иван знает, что он лыс.

Они вводят новую трёхзначную логическую связку: A⟨B⟩; в остальном для перевода с естественного языка используется слабая логика Клини. Это позволяет предсказать поведение пресуппозиций (включая пресуппозиции пресуппозиций) в предложениях сложной структуры:

$\cdot\langle\cdot\rangle$	**1**	#	**0**
1	**1**	#	#
#	#	#	#
0	**0**	#	#

(57) a. Нынешний король Англии бородат, или 65-й президент США знает, что нынешний король Франции лыс.
b. $KE\_bearded\langle ex\_KE\rangle \vee P65\_knows\langle ex\_P65 \wedge KF\_bald\langle ex\_KF\rangle\rangle$

> С другой стороны, пресуппозицию можно рассматривать как отдельный от ассерции аспект интерпретации предложения, что даёт четырёхзначную логику ($\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\} \times \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$). Но истинная ассерция не лишает аномальности предложение с ложной пресуппозицией.

3.1.3 Многозначность и суперозначивания

Логику интересует сохранение истинности от посылок к заключению. Если у посылки ложная пресуппозиция, она не будет истинной или ложной, но в каком-то смысле сохранит свой логический потенциал: важно не то, что *Китеж* не имеет референта, а то, что если бы референт был, то имело бы место

(58) *Китеж находится в России* ⊨ *Если Земля круглая, то Китеж находится в России*

Fraassen (1966): назовём **суперозначиванием** (супероценкой) функцию, сопоставляющую **1** (**0**) тем формулам, которые имеют значение **1** (**0**) при всех «классических» (сопоставляющих их атомам **1** или **0**, но не #) означиваниях в данной модели. *supervaluation*
Истинность при всех суперозначиваниях — суперистинность, ложность при всех суперозначиваниях — суперложность. От правил вывода требуется сохранение суперистинности. ②

> Эту же идею можно использовать для высказываний с нечёткими терминами: если *красивый* — нечёткий термин, то *Этот лес красивый* может иметь #, но *Этот лес красивый, или этот лес некрасивый* будет суперистинно, т. к. истинно при любом уточнении *красивый*.

Эта семантика неклассическая, т. к. суперозначивание целого вычисляется не на основе суперозначиваний частей, а на основе означиваний целого: $p \vee \neg p$ логически суперистинно, хотя ни одна его подформула не суперистинна. нарушает экстенсиональность, если понимать её как выше, или композиционность

3.2 Слабые исчисления и их семантики

> Уже говорилось, что новый класс тавтологий заставляет строить новую, адекватную себе ДС; но и наоборот: предлагая новую ДС, мы провоцируем построение новой семантики, относительно которой эта ДС была бы хотя бы корректна, а лучше полна.

3.2.1 Интуиционистская логика против сильных абстракций

Аксиомные схемы классического исчисления высказываний $\neg\neg A \to A$ (в аксиоматическом) и $A \vee \neg A$ (в натуральном) дают «слишком дешёвый» способ доказательства:

- даже если я не могу напрямую получить A, но мне удалось показать несостоятельность $\neg A$, выведя из неё противоречие, то можно заключить к A косвенно
- я про всякое утверждение наперёд знаю, что истинно или оно, или его отрицание, хотя не смогу показать истинность ни того, ни другого за разумное время

интуиционистские секвенции: нельзя больше одной формулы в сукцеденте, поэтому $A \vdash A \not\rightarrow \vdash A, \neg A$

> Intuitionists deny… quantification over any infinite totality, on the ground that it is impossible to complete an infinite process.
>
> Dummett 1991

Но если просто убрать аксиомные схемы, то исчисление станет неполным относительно стандартной семантики. Полноту можно восстановить, дав новую семантику, например такую:

- g_i — частичные функции, приписывающие каждой p_i либо **1**, либо *ничего*
- g_i связаны **отношением достижимости** $\leq$ (рис. 12), так что

ср. Priest 2008: 105, Moschovakis 2018

(59) $$\text{для любой p : если } g(p) = \mathbf{1} \text{ и } g \leq g', \text{ то } g'(\mathrm{p}) = \mathbf{1}$$

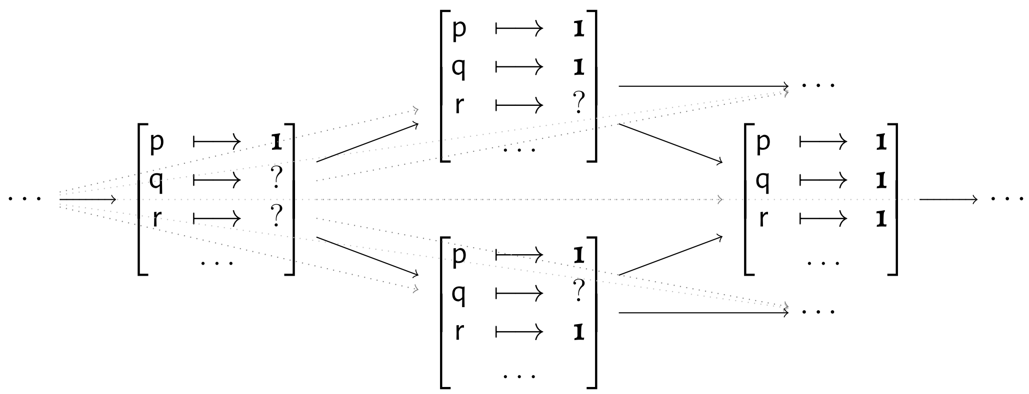


Рис. 12: Означивания, связанные отношением достижимости $\leq$

> Можно трактовать эту конструкцию так, что означивания моделируют различную степень неполноты сведений о мире, причём сведения не могут исчезать и не бывает «отрицательных» сведений (сведений о том, что $g_i(\mathrm{p}) = \mathbf{0}$ для той или иной p); ср. ситуацию, когда учёный день за днём пытается доказать существование в природе объекта с определёнными свойствами, просто найдя его.

В предлагаемой семантике $\to$ больше не выразима через $\wedge$, $\vee$ и $\neg$:

(60) $[\![\mathsf{p}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. $g(\mathsf{p}) = \mathbf{1}$

(61) $[\![\neg \mathsf{A}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. $\nexists g', g \leq g' : [\![\mathsf{A}]\!]^{g'} = \mathbf{1}$

(62) $[\![\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^g = \mathbf{1}$ и $[\![\mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$

(63) $[\![\mathsf{A} \vee \mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^g = \mathbf{1}$ или $[\![\mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$

(64) $[\![\mathsf{A} \to \mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. $\forall g', g \leq g$: если $[\![\mathsf{A}]\!]^{g'} = \mathbf{1}$, то $[\![\mathsf{B}]\!]^{g'} = \mathbf{1}$

Такая семантика не делает логически истинными классические тавтологии
- $\neg\neg\mathsf{A} \to \mathsf{A}$: истинность A проверяется при самом g, а $\neg\neg\mathsf{A}$ — при всех достижимых из него ③
- $\mathsf{A} \vee \neg\mathsf{A}$: контрпримерами будут все g, где $[\![\mathsf{A}]\!]^g$ не определено и достижимо $g' : [\![\mathsf{A}]\!]^{g'} = \mathbf{1}$

> Оказывается, что более слабая в отношении выводимости/доказуемости логика требует семантики с *более сложной* структурой.
> Чем слабее исчисление, тем меньше формул в нём эквивалентны друг другу по дедуктивному потенциалу, и семантика должна отражать эту неэквивалентность.

3.2.2 Релевантная логика против парадоксов импликации

Т. н. парадоксы материальной импликации, т. е. тавтологии, мешающие понимать импликацию как отражение естественноязыкового понимания *если… то*:

Mares 2020

(65) $\mathsf{A} \to (\mathsf{B} \to \mathsf{A})$ — при чём тут B, почему именно она?

(66) $\mathsf{A} \to (\neg\mathsf{A} \to \mathsf{B}), (\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{A}) \to \mathsf{B}$ — можно ли умозаключить к B?

(67) $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \vee (\mathsf{B} \to \mathsf{A}), (\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \vee (\mathsf{B} \to \mathsf{C})$ — ср. (16)

Задача — построить логику, где ‘если A, то B’ означает, что между A и B есть общность содержания. Пусть означивания соответствуют пакетам информации:

④ версий много, излагаем семантику по Anderson, Belnap, Dunn 1975: § 81, ср. семантику А. Уркхарта по Dunn, Restall 2013

- g_i каждому атому p приписывает $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, ни одного из них или оба (противоречивые сведения): $g(\mathsf{p}) \in \{\emptyset, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}\}$
- для «пакетов» g, g' определена идемпотентная, коммутативная и ассоциативная операция соединения: $g \circ g'$
- интерпретация связок — в своего рода четырёхзначной логике:

$\neg$	
$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\emptyset$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\emptyset$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$

$\wedge$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\emptyset$
$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\emptyset$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\emptyset$	$\mathbf{0}$	$\emptyset$	$\mathbf{0}$	$\emptyset$

$\vee$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\emptyset$
$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\mathbf{1}$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\emptyset$	$\emptyset$

- семантика импликации основана на том, что если g делает ясной импликацию, а g' — антецедент, то $g \circ g'$ должна прояснять консеквент. Но $g \circ g'$ может не содержать информации о B или приписывать ей $\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$. Поэтому истинность A не гарантирует истинности $\mathsf{B} \to \mathsf{A}$:

  (68) $[\![\mathsf{A} \to \mathsf{B}]\!]^g = \mathbf{1}$, е. т. е. для любого g' : если $[\![\mathsf{A}]\!]^{g'} = \mathbf{1}$, то $[\![\mathsf{B}]\!]^{g \circ g'} = \mathbf{1}$

- тавтологии — формулы, имеющие значение $\mathbf{1}$ при $g_\emptyset$ — «в отсутствие информации»

в классической логике, конечно, импликация и антецедент оцениваются при одном и том же g_i

> Нужда в релевантности возникает лишь тогда, когда $\mathsf{A} \to \mathsf{B}$ рассматривается как нечто большее, чем $\neg\mathsf{A} \vee \mathsf{B}$, когда в импликацию вкладывается интуитивное значение ясности содержания консеквента из содержания антецедента.

3.2.3 Линейная логика и внимание к ресурсам

Важно, сколько раз и в каком порядке используются «ресурсы» в выводе. В обычных натуральных выводах «Multiple assumptions (of the same formula) are allowed to have the same index» (Crouch, Genabith 2000), т. е. можно снять несколько копий одного допущения (в разных ветвях вывода) одним применением условного правила. В секвенциях тот же эффект имеют утончение и сечение. В их отсутствие следующие правила вводят дедуктивно *различные* связки:

(69) $$\frac{\Gamma \vdash \mathsf{A} \qquad \Delta \vdash \mathsf{B}}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{A} \otimes \mathsf{B}} \vdash \otimes \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{A} \qquad \Gamma \vdash \mathsf{B}}{\Gamma \vdash \mathsf{A} \,\&\, \mathsf{B}} \vdash \&$$

$\otimes$ соответствует возможности получить оба конъюнкта сразу (ресурсов в антецеденте хватит: до шага вывода в каждой из посылок хватало как раз на один), & — возможности получить один на свой выбор (внизу не две копии Γ, а одна).
Аналогично для дизъюнкции: одно дело гарантия получения сукцедента, какой бы дизъюнкт ни выбрала некая внешняя сила ($\oplus$), т. е. достаточность любого из двух для желаемого результата, другое — неспособность обеспечить конкретный результат (Δ либо же Δ'), при том что неважно, каким результат окажется, т. к. в сукцеденте секвенции-заключения Δ и Δ' даны через «или»-запятую ($\invamp$).

(70) $$\frac{\Gamma, \mathsf{A} \vdash \mathsf{C} \qquad \Gamma, \mathsf{B} \vdash \mathsf{C}}{\Gamma, \mathsf{A} \oplus \mathsf{B} \vdash \mathsf{C}} \oplus \vdash \qquad \frac{\Gamma, \mathsf{A} \vdash \Delta \qquad \Gamma', \mathsf{B} \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', \mathsf{A} \invamp \mathsf{B} \vdash \Delta, \Delta'} \invamp \vdash$$

Такие связки используются в **линейной логике**, в которой при выводе ресурсы можно только перекомбинировать, но не реплицировать и не уничтожать ($\mathsf{A} \otimes \mathsf{B} \nvdash \mathsf{A}$). Линейная импликация (*lollipop*, $\multimap$), понимаемая как 'потребление ресурса A позволяет получить B' имеет те же секвенциальные правила, что $\to$ (но в силу других правил, например, $\mathsf{A}, \mathsf{A} \multimap \mathsf{B} \nvdash \mathsf{A} \otimes \mathsf{B}$).

представим только фрагменты по Crouch, Genabith 2000

> Для моделирования ресурсов, которые можно использовать в любом количестве (в т. ч. в нулевом), используются специальные операторы; формулы с ними допускают утончение и сокращение. Например, классической импликации соответствует $!\mathsf{A} \multimap \mathsf{B}$.

Один из вариантов семантики, отражающей чувствительность к количеству **токенов** данных, использует абстрактные «ресурсы». Пусть исходно есть $m + n$ ресурсов и ничего не истрачено: $\langle m + n, 0\rangle$. Тогда $[\![\mathsf{A}]\!]^{\langle m,n\rangle}$ — 'A верифицируется с расходованием n и сохранением m':

(71) $[\![\mathsf{A} \otimes \mathsf{B}]\!]^{\langle m,n\rangle} = \mathbf{1}$, е. т. е. $\exists n_1, n_2, n = n_1 + n_2 : [\![\mathsf{A}]\!]^{\langle m+n_2,n_1\rangle} = \mathbf{1}$ и $[\![\mathsf{B}]\!]^{\langle m+n_1,n_2\rangle} = \mathbf{1}$
(можно делить n между конъюнктами так, что хватит на оба)

(72) $[\![\mathsf{A} \,\&\, \mathsf{B}]\!]^{\langle m,n\rangle} = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^{\langle m,n\rangle}$ и $[\![\mathsf{B}]\!]^{\langle m,n\rangle}$ (но на оба сразу может не хватить)

(73) $[\![\mathsf{A} \oplus \mathsf{B}]\!]^{\langle m,n\rangle} = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^{\langle m,n\rangle}$ или $[\![\mathsf{B}]\!]^{\langle m,n\rangle}$ (хотя бы на одну хватит)

(74) $[\![\mathsf{A} \invamp \mathsf{B}]\!]^{\langle m,n\rangle} = \mathbf{1}$, е. т. е. $\forall m_1, m_2, m = m_1 + m_2 : [\![\mathsf{A}]\!]^{\langle m_1,n+m_2\rangle} = \mathbf{1}$ или $[\![\mathsf{B}]\!]^{\langle m_2,n+m_1\rangle} = \mathbf{1}$
(сколько бы (в т. ч. мало) ни израсходовать вдобавок к n,
этого хватит как минимум на один дизъюнкт)

(75) $[\![\mathsf{A} \multimap \mathsf{B}]\!]^{\langle m,n\rangle} = \mathbf{1}$, е. т. е. $\forall m_1, m_2, m = m_1 + m_2 : [\![\mathsf{A}]\!]^{\langle n+m_2,m_1\rangle} = \mathbf{0}$ или $[\![\mathsf{B}]\!]^{\langle m_2,n+m_1\rangle} = \mathbf{1}$

Средства линейной логики используются в синтаксисе (и семантике) естественного языка, где важно, что, даже если порядок слов свободный, результат деривации должен включать именно те слова, которые были взяты из лексикона, и именно в таких количествах (деривация **Ма-*

ша ела кашу кашу или **ела кашу* из набора {*ела*, *кашу*, *Маша*} не является правильной).

(76)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\textit{ела}}{(\mathrm{NP} \multimap \mathrm{S}) \circ\!\!- \mathrm{NP}} \otimes \overset{\textit{кашу}}{\mathrm{NP}} \otimes \overset{\textit{Маша}}{\mathrm{NP}}}{\overset{\textit{Маша}}{\mathrm{NP}} \otimes \overset{\textit{ела}}{(\mathrm{NP} \multimap \mathrm{S}) \circ\!\!- \mathrm{NP}} \otimes \overset{\textit{кашу}}{\mathrm{NP}}}}{\overset{\textit{Маша}}{\mathrm{NP}} \otimes \overset{\textit{ела кашу}}{\mathrm{NP} \multimap \mathrm{S}}}}{\overset{\textit{Маша ела кашу}}{\mathrm{S}}}$$

ср. $(S\backslash S)/S$, $\langle t, \langle t, t\rangle\rangle$

⑤

Ср. в *Linear logic for meaning assembly* (1995):

> It is this 'resource-sensitivity' of natural language semantics—an expression is used exactly once in a semantic derivation—that linear logic can model. The basic insight underlying linear logic is that logical formulas are *resources* that are produced and consumed in the deduction process. This gives rise to a resource-sensitive notion of implication, the *linear implication* $\multimap$: the formula A $\multimap$ B can be thought of as an action that can *consume* (one copy of) A to produce (one copy of) B. Thus, the formula A $\otimes$ (A $\multimap$ B) linearly entails B. It does not entail A $\otimes$ B (because the deduction consumes A), and it does not entail (A $\multimap$ B) (because the linear implication is also consumed in doing the deduction). This resource-sensitivity not only disallows arbitrary duplication of formulas, but also disallows arbitrary deletion of formulas. Thus the linear multiplicative conjunction $\otimes$ is sensitive to the multiplicity of formulas: A $\otimes$ A is not equivalent to A (the former has two copies of the formula A). For example, the formula A $\otimes$ A $\otimes$ (A $\multimap$ B) linearly entails A $\otimes$ B (there is still one A left over) but does not entail B (there must still be one A present).

Вопросы и задания

① Приведите примеры пресуппозитивных предложений других типов.
② Почему некоторым формулам суперозначивание может не сопоставить значения?
③ Объясните, почему A $\to \neg\neg$A остаётся логически истинной.
④ Вспомните, откуда может взяться у высказываний общность содержания в условиях взаимонезависимости атомарных высказываний.
⑤ Это запись в натуральном или в секвенциальном исчислении?

4 Логика предикатов первого порядка

4.1 К логическому анализу клаузы

Необходимость для логики. В логике высказываний атомы (переменные и $\top$, $\bot$) примерно соответствуют полноценным высказываниям, выражающим элементарные пропозиции. Но ни на каком уровне синтаксической структуры или семантического представления 'Вася бежит' и 'Петя бежит' не выражаются более сходно, чем 'Вася бежит' и 'Кошка сидит на шкафу'. Не ответить и на вопрос о том, что означает *Вася* или *бежит* само по себе (в отличие от *или*). Кроме того, невозможна формализация рассуждений вроде

$$\dfrac{\text{Все кошки серы} \qquad \text{Мурка — кошка}}{\text{Мурка серая}} \qquad \dfrac{\text{Один студент дружит со всем курсом}}{\text{У каждого на курсе есть друг}}$$

Можно сказать, что нужды логики требуют ввести формализованный язык, на котором можно сформулировать правила, ответственные за валидность таких рассуждений (какую форму они должны иметь, чтобы сохранять истинность).

Лексикографическая практика и морфосинтаксическая теория. Лексикографическая практика использует переменные, чтобы изолировать значение предиката (Апресян 2014). Переменные часто соответствуют объектам в привычном смысле, но могут соответствовать и объектам другого рода — (78), (79). ①

см. также Мельчук, Жолковский 1984

(77) **водить**$_{3.2}$
*A*1 *водит* *A*2 *из* *A*3 *в* *A*4 *по* *A*5
'Человек $A1$ управляет наземным или водным транспортным средством $A2$ и делает так, что $A2$ перемещается из места $A3$ в место $A4$ по маршруту $A5$, причём управление $A2$ является его профессией'

(78) **гадать**$_2$
*A*1 *гадает об* *A*2 *с помощью* *A*3
'Желая получить важную для него информацию о человеке или ситуации $A2$, человек $A1$ выполняет с объектами $A3$, особые ритуальные действия, считая, что в результате этих действий он получит эту информацию от высших или потусторонних сил'

(79) **вырасти**$_2$
*A*1 *вырос на* *A*2
'Количественный параметр $A1$ или количественный параметр объекта или явления $A1$, который был равен $A3$, стал больше на величину $A2$ или стал равен $A2$'

> В (77)–(79) лексикограф не пытается обобщать; объединяя сходные по типу участия в ситуации Ai от разных предикатов, получают **семантические роли**.

Идея о том, что общее понятие — это функция, отвечающая на вопрос о каждом отдельном объекте, относится он к данному классу или нет, восходит к Фреге (2000 [1891]). Ср. схожие мысли в Кассирер (1913 [1910]): законы природы как соотношения величин вместо проникновения в «суть» явлений.

$$\begin{bmatrix} \text{щ} & \longmapsto & \mathbf{1} \\ t & \longmapsto & \mathbf{0} \\ \text{ъ} & \longmapsto & \mathbf{1} \\ \gamma & \longmapsto & \mathbf{0} \\ & \dots & \end{bmatrix}$$

Предикаты и функторы. **Предикат** — знак, чьим означающим является отношение, т. е. функция из набора объектов в D_t. Как и у функций вообще, его аргументы следует считать упорядоченными. Поэтому можно сказать не только a *находится в отношении* R к b (а как сказать это для 3, 4, ... объектов?), но и $\langle a, b\rangle$ *выполняет* R. Мы будем ставить символ n-местного отношения (n-местный предикат) перед упорядоченной n-кой имён выполняющих его объектов. ②
Одноместные отношения называют *свойствами*. Нульместными отношениями можно считать значения пропозициональных переменных и пропозициональных констант $\top, \bot$ (лежат в D_t).
Выполнять отношения могут и отношения. Мы ограничимся отношениями между истинностными значениями (были уже в $\mathcal{PL}$) и отношениями между *индивидами*. ③
Отношение арности (*arity*, *adicity*) n выполняется n-ками объектов (возможно, с повторами), каждая из которых позволяет n *проекций* (множеств объектов, вовлечённых в него так или иначе: как первый элемент, как второй и т. д.). Если значение $proj_i$ однозначно определяется значениями остальных проекций, можно определить **функтор**. ④ ⑤

$$\begin{aligned} \textit{Отец}(x, y): \quad & proj_1(\langle x, y\rangle) = x = f_{\text{отец}}(y) \\ & proj_2(\langle x, y\rangle) = y \neq f_{\text{сын}}(y) \end{aligned}$$

Индивидные константы (см. §4.2) можно считать нульместными функторами.

> Предикат выдаёт истинностное значение, функтор — индивид.

4.2 Синтаксис $\mathcal{FOL}$

Классификация выражений языка логики предикатов первого порядка:

	Выражения	Категории
Термы	индивидные константы: $a, b, c, a', b_{61}, \ldots$ (индивидные) переменные: $x, y, z, x', y_{642}, \ldots$ сложные: $\mathsf{f}^n(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)$	N
n-местные функциональные константы, $n \geq 0$: $f, f', f_2, \ldots$		$(\ldots(N\underbrace{/N)\ldots)/N}_{n \text{ раз}}$
n-местные предикатные константы, $n \geq 0$: $P, R', Q_{371}, \ldots$		$(\ldots(S\underbrace{/N)\ldots)/N}_{n \text{ раз}}$
Унарные и бинарные связки		$S/S, S\backslash(S/S)$
Кванторы: $\exists x, \forall y, \ldots$		S/S

Индивидные, функциональные и предикатные константы вместе называют *нелогическими*; они составляют *сигнатуру* языка. **Сфера действия** (СД) квантора — его сестра в дереве структуры формулы (= порядка её построения из частей); см. рис. 13.

$$\mathsf{t} ::= \mathsf{a} \mid \mathsf{x} \mid \mathsf{f}^n(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)$$
$$\mathsf{A} ::= \mathsf{P}^n(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n) \mid \neg\mathsf{A} \mid \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \vee \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \to \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B} \mid \forall\mathsf{x}\ \underbrace{(\mathsf{A})}_{\text{СД}} \mid \exists\mathsf{x}\ \underbrace{(\mathsf{A})}_{\text{СД}}$$

Определение 18 (вхождения переменных)**.** *Связанным* называется вхождение переменной, одноимённой с переменной квантора, в СД квантора. Вхождение при кванторе — *техническое*, относится к связанным. Вхождение, не являющееся связанным, — *свободное*. ⊣

Язык называется *первопорядковым*, т. к. содержит квантификацию, но только по индивидным переменным. Язык второго порядка допускает квантификацию по предикатным и функциональным переменным, и т. д.

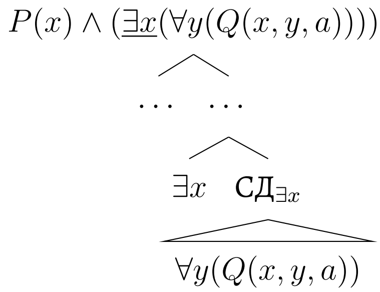


Рис. 13: Сфера действия кванторов

4.3 Семантика $\mathcal{FOL}$

Как и в интерпретации $\mathcal{PL}$, нужны модель и означивание; но определяются иначе:

- модель $\mathcal{M} = \langle\langle D_e, D_t\rangle, \mathcal{I}\rangle$:
  - D_e — домен индивидов (может быть любым, поэтому указание на модель, чьей частью является D_e, как параметр функции интерпретации $[\![\cdot]\!]$ теперь становится важно)
  - D_t — домен истинностных значений; фиксирован как $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$
  - $\mathcal{I}$ — функция интерпретации (нелогических) констант, модель словаря, к которому обращается интерпретатор

    $[\![\cdot]\!]$ моделирует самого интерпретатора
- означивания переменных $g_i \in G : \mathit{Var} \longmapsto D_e$

4.3.1 Семантика с некомпозиционной трактовкой кванторов (на $\{\mathbf{1},\mathbf{0}\}$)

При таком построении семантики значением формулы при данном означивании является истинностное значение. ⑥⑦⑧⑨

Интерпретация	**Семантический тип**
$[\![\mathsf{x}]\!]^{\mathcal{M},g} = g(\mathsf{x})$	e
$[\![\mathsf{a}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathcal{I}(\mathsf{a})$	e
$[\![\mathsf{f}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathcal{I}(\mathsf{f})$	$\langle e,\dots,\langle e,e\rangle\dots\rangle$
$[\![\mathsf{P}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathcal{I}(\mathsf{P})$	$\langle e,\dots,\langle e,t\rangle\dots\rangle$
$[\![\mathsf{f}^n(\mathsf{t}_1,\dots,\mathsf{t}_n)]\!]^{\mathcal{M},g} = [\![\mathsf{f}]\!]^{\mathcal{M},g}([\![\mathsf{t}_1]\!]^{\mathcal{M},g},\dots,[\![\mathsf{t}_n]\!]^{\mathcal{M},g})$	e
$[\![\mathsf{P}^n(\mathsf{t}_1,\dots,\mathsf{t}_n)]\!]^{\mathcal{M},g} = [\![\mathsf{P}]\!]^{\mathcal{M},g}([\![\mathsf{t}_1]\!]^{\mathcal{M},g},\dots,[\![\mathsf{t}_n]\!]^{\mathcal{M},g})$	t
$[\![\neg\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathbf{1} - [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g}$	t
$[\![\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M},g} = \min([\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g},[\![\mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M},g})$	t
$[\![\forall\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \min\limits_{o\in D_e}[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g[\mathsf{x}\longmapsto o]}$	t
$[\![\exists\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \max\limits_{o\in D_e}[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g[\mathsf{x}\longmapsto o]}$	t

эта формулировка семантики из Андреев, Митрофанова, Соколов 2014: 15

Максимум и минимум в семантике кванторов связаны с тем, что $\forall$, перебирая индивиды домена, проверяет, все ли выполняют A (конъюнкция индивидуальных проверок, возможно бесконечная), а $\exists$, перебирая их, проверяет, выполняет ли A хотя бы один (дизъюнкция индивидуальных проверок, возможно бесконечная).

Пример 6. Установить значение $\exists y\exists x\,\textit{После}(x,y)$ при $g=[x\longmapsto \textit{щ}, y\longmapsto \textit{я},\dots]$. ⊣

$$[\![\exists y\exists x\,\textit{После}(x,y)]\!]^g = \max_{o\in D_e}[\![\exists x\,\textit{После}(x,y)]\!]^{g[y\longmapsto o]} = \max_{o\in D_e}\max_{o'\in D_e}[\![\textit{После}(x,y)]\!]^{(g[y\longmapsto o])[x\longmapsto o']} =$$

$$\max_{o\in D_e}\max_{o'\in D_e}\Big(\mathcal{I}(\textit{После})\big((g[y\longmapsto o])[x\longmapsto o'])(y)\Big)\big(((g[y\longmapsto o])[x\longmapsto o'])(y)\big) =$$

информация об исходном g оказалась не востребована

$$\max_{o\in D_e}\max_{o'\in D_e}\left(\begin{bmatrix} \textit{а} & \longmapsto & \begin{bmatrix} \textit{а} & \longmapsto & \mathbf{0}\\ \textit{б} & \longmapsto & \mathbf{1}\\ & \dots & \end{bmatrix}\\ \textit{б} & \longmapsto & \begin{bmatrix} \textit{а} & \longmapsto & \mathbf{0}\\ \textit{б} & \longmapsto & \mathbf{0}\\ & \dots & \end{bmatrix}\end{bmatrix}(o)\right)(o') =$$

$\max_{o\in D_e}\mathsf{A}(x)$ при $g[x\longmapsto o]$ есть $\max_{o\in D_e}\mathsf{A}(o)$

$$\max\Big(\max(\text{‘\textit{а} дальше \textit{а}’, ‘\textit{а} дальше \textit{б}’, ‘\textit{а} дальше \textit{в}’, …}),$$
$$\max(\text{‘\textit{б} дальше \textit{а}’, ‘\textit{б} дальше \textit{б}’, ‘\textit{б} дальше \textit{в}’, …}),\dots\Big) = \mathbf{1}$$

предполагаем, что $\mathbf{1} > \mathbf{0}$

Строки для $\forall$ и $\exists$ порождают вопрос о том, что делать, если $D_e = \emptyset$ (это важно в модальных логиках). Принято считать, что для любой A в таком случае $[\![\forall\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathbf{1}$ и $[\![\exists\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathbf{0}$. Ср. более традиционные определения (‘все’ как ‘нет контрпримера’):

$$[\![\forall\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathbf{1},\quad \text{е. т. е.}\quad \underline{\text{для всех}}\ g'\sim_{\mathsf{x}} g : [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g'} = \mathbf{1},$$
$$[\![\exists\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathbf{1},\quad \text{е. т. е.}\quad \text{для некоторого}\ g'\sim_{\mathsf{x}} g : [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g'} = \mathbf{1}$$

Индивидные константы должны нечто обозначать, поэтому при их наличии в используемом варианте языка $D_e \neq \emptyset$ (Hodges 2001: 52).

Композициональность. Семантика в §4.3.1 естественно соответствует движению от внешнего квантора внутрь формулы: если внешний знак на этом шаге — квантор, вычисли значение подкванторной формулы при разных g, а иначе это не нужно.

композициональность сложнее, чем просто аддитивность (ср. Плунгян 2000: 27)

Определение 19 (принцип композицион(аль)ности). Значение выражения (при некотором наборе параметров) есть некоторая функция Φ_Ξ от значений составляющих его частей; выбор Φ_Ξ определяется способом синтаксического сочетания частей Ξ. ⊣

предполагаем бинарное ветвление

(80) $$[\![\Xi(\alpha,\beta)]\!]^{i_1,\ldots,i_n} = \Phi_\Xi([\![\alpha]\!]^{i_1,\ldots,i_n}, [\![\beta]\!]^{i_1,\ldots,i_n})$$

Итак, значения частей должны быть уже вычислены перед вычислением значения целого, т. е. при интерпретации следует двигаться от синтаксически первичных шагов (построения атомарных формул, затем первых применений связок…) к внешним границам формулы. В семантике кванторов у нас это пока не так, т. к. мы не знаем, истинностное значение подформулы при каких g нас заинтересует в дальнейшем.

см. об этом Westerståhl 2012: 5.2, 6.2

Семантика. Предположим, что значения формул — *множества означиваний*. Множество всех означиваний назовём G. Тогда индекс g для $[\![\cdot]\!]$ не нужен (кроме интерпретации термов, т. к. переменные по-прежнему означиваются); $\in$ тут в смысле 'в числе n-ок, выполняющих P'. ⑩

(81) $$[\![\mathsf{P}^n(\mathsf{t}_1,\ldots,\mathsf{t}_n)]\!]^{\mathcal{M}} = \{g \in G \mid \langle[\![\mathsf{t}_1]\!]^{\mathcal{M},g},\ldots,[\![\mathsf{t}_n]\!]^{\mathcal{M},g}\rangle \in [\![\mathsf{P}]\!]^{\mathcal{M}}\}$$ Kracht 2011: 4.2

(82) $$[\![\neg\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = G\backslash[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}$$

(83) $$[\![\mathsf{A}\wedge\mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} \cap [\![\mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M}}$$

(84) $$[\![\forall\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = \{g \in G \mid \text{для всех } g' \sim_{\mathsf{x}} g : g' \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}\}$$

«совпадают во всём, кроме, возможно, x»

(85) $$[\![\exists\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = \{g \in G \mid \text{для некоторого } g' \sim_{\mathsf{x}} g : g' \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}\}$$

Таким образом, $\forall$ формирует множество таких означиваний, чьи все x-варианты принадлежат множеству, обозначаемому подкванторной формулой, а $\exists$ формирует множество таких означиваний, чей хотя бы один x-вариант принадлежит множеству, обозначаемому подкванторной формулой. Если в формуле нет свободных переменных (есть только константы или все переменные связаны кванторами), то её значением в данной модели будет либо множество всех означиваний G (например, в любой модели у тавтологии $\forall x(\exists y P(x) \to (Q(y) \vee \neg Q(y)))$, либо пустое множество означиваний (как у формулы $\neg\exists z(P(z) \vee \neg P(z))$ в моделях, где $|D_e| \geq 1$). ❶

Определение 20 (истинность). Формула A истинна в $\mathcal{M}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = G$. ⊣

выполнимость: $[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$

> Здесь квантор (вместе со своим техническим вхождением переменной) выступает как «сентенциальный оператор», работающий вне зависимости от того, есть ли в подкванторной формуле вхождения одноимённой с ним переменной. При вычислении $[\![\mathsf{Q}_\mathsf{x}\mathsf{A}[\mathsf{x}]]\!]$ вхождения x, связываемые Q, не переинтерпретируется, а значение $\mathsf{Q}_\mathsf{x}\mathsf{A}[\mathsf{x}]$ вычисляется на основании уже готового $[\![\mathsf{A}[\mathsf{x}]]\!]$.

Пример 7. Пусть $D_e = \{\text{Соссюр, Теньер, Хомский}\}$; $\{\vec{o} \mid \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(P)(\vec{o}) = \mathbf{1}\} = \{\langle\text{С},\text{Т}\rangle, \langle\text{Т},\text{Х}\rangle, \langle\text{С},\text{Х}\rangle\}$ (интуитивно: 'старше'). Установить $[\![\forall x\exists y(P(x,y))]\!]^{\mathcal{M}}$. ❷

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	…
x	С	С	С	Т	Т	Т	Х	Х	Х	…
y	С	Т	Х	С	Т	Х	С	Т	Х	…

$$\begin{aligned}
[\![P(x,y)]\!]^{\mathcal{M}} &= \{g \mid \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(P)(\langle g(x), g(y)\rangle) = \mathbf{1}\} = \{g_2, g_3, g_6, \ldots\} \\
[\![\exists y P(x,y)]\!]^{\mathcal{M}} &= \{g' \mid \exists g, g' \sim_y g : g \in [\![P(x,y)]\!]^{\mathcal{M}}\} = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, \ldots\} \\
[\![\forall x\exists y P(x,y)]\!]^{\mathcal{M}} &= \{g'' \mid \forall g', g' \sim_x g'' : g' \in [\![\exists y P(x,y)]\!]^{\mathcal{M}}\} = \emptyset
\end{aligned}$$

И верно: не для каждого найдётся тот, кто старше его (есть самый старший). ⊣

4.4 Аналитические таблицы для $\mathcal{FOL}$

Общая идея: допущение о ложности формулы при некотором означивании; сокращение длины формулы (с «вычёркиванием» анализируемой формулы в случае пропозициональных правил); достижение противоречия означает ложность допущения, т. е. логическую истинность формулы (отсутствие фальсифицирующего означивания).

$\begin{array}{r\|} \forall x A \\ A\left[\frac{t}{x}\right] \end{array}$	t любой	$\forall$ слева	$\begin{array}{\|l} \forall x A \\ A\left[\frac{t}{x}\right] \end{array}$	t новый	$\forall$ справа
$\begin{array}{r\|} \exists x A \\ A\left[\frac{t}{x}\right] \end{array}$	t новый	$\exists$ слева	$\begin{array}{\|l} \exists x A \\ A\left[\frac{t}{x}\right] \end{array}$	t любой	$\exists$ справа

новый от начала вывода до данного места данной подтаблицы

Рис. 14: Кванторные правила для аналитических таблиц (Непейвода 1997: 202)

Новый термин выбирается, т. к. неизвестно, какой объект верифицирует $\exists x A$ и какой объект фальсифицирует $\forall x A$. Приходится взять имя объекта, с которым не связаны никакие утверждения, до сих пор участвовавшие в выводе. ❸

вводимые в вывод термы можно нумеровать: $t_1, t_2, \ldots,$ — отражая новизну

> Чем являются эти t_i с точки зрения семантики? Как и f_i в натуральном исчислении для $\mathcal{FOL}$ (ниже), чьё появление требуется в У$\exists$, это не вполне переменная, а скорее «неизвестная константа». Дело представлено так, будто нам неизвестны $\mathcal{I}(\mathsf{t}_i), \mathcal{I}(\mathsf{f}_i)$.
> Впрочем, в ходе вывода (но не в качестве его исходных посылок или заключения) могли бы появляться и вовсе не-формулы, если бы только их роль в выводе была строго регламентирована. Ср. ещё $\perp$.

Возможности выбирать терм в $\forall|$ и $|\exists$ используется для замыкания (под)таблиц: ❹

$$\begin{array}{r|l} \ldots & \ldots \\ \underline{P(t_3)} & \exists x P(x) \\ & \underline{P(t_3)} \text{ — намеренно выбран } t_3 \end{array}$$

Если противоречие не получено, (под)таблица не замкнётся, но, в отличие от логики высказываний, останутся доступные операции (заново подставить терм на место связанной квантором переменной). Автоматически процесс не остановится.
Т. е. в $\mathcal{FOL}$, в отличие от $\mathcal{PL}$, таблицы не дают **эффективной процедуры** отсева не логически истинных формул.

$$\begin{array}{r|l} & \forall x \exists y P(x,y) \to \exists x P(x,x) \\ \forall x \exists y P(x,y) & \exists x P(x,x) \\ \text{Путь 1. } \exists y P(t_1, y) & P(t_1, t_1) \\ P(t_1, t_2) & ? \\ ? & \\ \text{Путь 2. } \exists y P(t_3, y) & P(t_3, t_3) \\ P(t_3, t_4) & ? \\ ? & \end{array}$$

пример: Непейвода 1997: 204

можно вычёркивать использованные формулы, но не на кванторном шаге

К ❹: о «принципе пьяницы»

‘Существует такой индивид, что если он пьёт, то все пьют’; ср. Непейвода (1997: 204, сн. 2). Нашу интуицию здесь сбивает стремление рассматривать *если… то* как описание закономерности. В логике предикатов невозможно говорить о различных возможных ситуациях, только о единственном мире (модели); поэтому любое *если… то*, $\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$ — это материальная импликация, т. е. эквивалент $(\neg\mathsf{A}) \vee \mathsf{B}$, и не более того. Нам же хочется понять формулировку принципа как что-то вроде ‘существует такой индивид, что, **когда бы он ни** пил, все пьют’; здесь выбор искомого индивида оказывается независим от выбора момента времени. В логике же предикатов речь всегда идёт об одной возможной ситуации, в т. ч. об одном моменте времени (условном «сейчас»). Поэтому можно сначала посмотреть, каков мир сейчас, а потом в зависимости от этого выбрать индивида, выполняющего формулу под $\exists$.
Толкование «парадокса» у Р. Смаллиана (Smullyan 1978: 209–211):

(a) если все пьют, возьмём любого человека; он и будет тем самым индивидом;

(b) если не все пьют, возьмём любого непьющего; он не пьёт, поэтому антецедент импликации ложен и нас не интересует истинность консеквента.

4.5 Натуральное исчисление для $\mathcal{FOL}$

- Задача логического вывода — получить истинные следствия (и желательно *все*), если даны истинные посылки ❺
- Дедуктивная система = исчисление: аксиомы $\mathcal{A}$; правила $\mathcal{R}$ вида $\dfrac{\mathsf{A}_1 \ \dots \ \mathsf{A}_n}{\mathsf{B}}$ мы опускаем упоминание языка $\mathcal{L}$
- Вывод в Σ — дерево, листья которого заполняют аксиомы или допущения, а прочие узлы заняты предложениями, полученными из них по правилам.
  Выводимость в Σ: $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n \vdash_\Sigma \mathsf{B}$, е. т. е. существует вывод в Σ, использующий максимум $\mathcal{A} \cup \{\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n\}$ и заканчивающийся B.
  Доказуемость — выводимость из $\mathcal{A}$ (может быть пустым)

Для работы с правилами понадобится техническое понятие подстановки.

Определение 21 (подстановка)**.** $\mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{a}}\right]$ — результат подстановки терма t на место всех свободных вхождений переменной x в A. Подстановка корректна, если ни одно вхождение x, бывшее свободным, не становится связанным. ⊣ ❻ разъяснение на примере $\exists y \in \mathbb{N} : y > x$ см. в Гладкий 2001: 113

К правилам вывода, введённым ранее в логике высказываний, добавляются четыре новых для работы с кванторами. Переменные, свободные в посылке (≈ в допущении), мы **отмечаем** справа от вывода во всех строках, зависящих от посылки, пока не свяжем обратно. Наша система правил во многом следует Suppes (1957: до 99). ср. Pelletier 1999, Pelletier, Hazen 2012

$\dfrac{\mathsf{A}[\mathsf{y}]}{\forall \mathsf{x} \mathsf{A}[\mathsf{x}]}$	y не отмечена	В$\forall$	$\dfrac{\forall \mathsf{x} \mathsf{A}[\mathsf{x}]}{\mathsf{A}[\mathsf{t}]}$		У$\forall$*
$\dfrac{\mathsf{A}[\mathsf{t}]}{\exists \mathsf{x} \mathsf{A}[\mathsf{x}]}$		В$\exists$*	$\dfrac{\exists \mathsf{x} \mathsf{A}[\mathsf{x}]}{\mathsf{A}\left[\mathsf{f}(\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n)\right]}$	$\mathsf{x}_1, \dots, \mathsf{x}_n$ свободны в A; f новый	У$\exists$

*если $\mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{x}}{\mathsf{t}}\right]$ (resp. $\mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right]$) корректна

Рис. 15: Кванторные правила натурального исчисления предикатов

Непейвода (1997: 281–282) предлагает называть В$\exists$ доказательством на примере, У$\forall$ переходом от общего к частному, а В$\forall$ обобщением. ❼❽❾

Пример 8. Хорошая возможность протестировать правила — сравнение тождественно истинной импликации с не тождественно истинной: см. рис. 16. ⊣ ❿

$$\begin{array}{c} \exists x\forall y P(x,y) \\ \hline \forall y P(f_1,y) \\ \hline P(f_1,z) \\ \hline \exists x P(x,z) \\ \hline \forall y\exists x P(x,y) \\ \hline \exists x\forall y P(x,y)\to\forall y\exists x P(x,y)\end{array} \qquad \begin{array}{c} \forall y\exists x P(x,y) \\ \hline \exists x P(x,z) \\ \hline P(f_1(z),z) \\ \hline ?\ \text{(разве что обратно вывести } \exists x P(x,z)\text{)} \\ \hline \vdots \\ \hline \forall y\exists x P(x,y)\to\exists x\forall y P(x,y)\end{array}$$

Рис. 16: Два примера применения правил на рис. 15

Другие варианты правила У∃

$$\frac{\exists x A[x]}{A[t]}\ \text{t новый} \qquad \frac{\exists x A[x] \qquad \begin{array}{c} A[t] \\ \vdots \\ B \end{array}}{B}\ \text{t новый}$$

Своеобразную версию правого правила дают Андреев, Митрофанова, Соколов (2014: 12):

$$\frac{\exists x A[x] \qquad \forall x(A[x]\to B)}{B}$$

Вопросы и задания

① Приведите более простые примеры, в т. ч. одно- и нульместных отношений.

② Покажите, что упорядоченность необходима при определении отношений.

③ Приведите примеры отношений между свойствами и/или отношениями; между объектом и отношением; между истинностными значениями.

④ Приведите пример n-ки с повторами, выполняющей n-местное отношение.

⑤ Покажите, что $f_{\text{сын}}(y)$ в общем случае не определена.

⑥ В чём причина сходства семантики конъюнкции и квантора всеобщности?

⑦ Может ли формула $\forall x(\textit{Двоечник}(x) \leftrightarrow \textit{Отличник}(x))$ быть истинна в какой-либо $\mathcal{M}$ с естественной интерпретацией предикатов (Непейвода 1997: 42)?

⑧ Переведите (пока интуитивно, т. е. сохраняя условия истинности; более строго см. в курсе далее) на язык первого порядка: (a) *Есть города, что мне милы*; (b) *Кто жил и мыслил, тот не может в душе не презирать людей*; (c) *Каждый был другом всем остальным*.

⑨ (a) Дайте определение квантору $\exists!$ со значением ‘существует единственный’, используя синтаксис языка логики предикатов с равенством (Potts 2007: A.50).

(b) Дайте определение квантору $\exists^{\leq n}$ ‘существует от силы n’.

(c) Дайте определение квантору $\exists^{\geq n}$ ‘существует как минимум n’.

⑩ Определите дизъюнкцию и импликацию в композиционной семантике.

❶ Определите следование в композиционной семантике языка логики предикатов. (Рассматривайте означивания как «случаи», в которых могут быть верны посылки и заключение.)

❷ Почему в таблицу введены многоточия?

❸ Объясните, что означает, что индивид (шире — упорядоченная n-ка индивидов) *верифицирует* формулу; *фальсифицирует* формулу.

❹ Проверьте на логическую истинность:

(a) $\exists x(A(x)\to\forall y A(y))$ — «принцип пьяницы»

(b) $\exists x(\exists y A(y)\to A(x))$

(c) $(\forall x A(x,x)\wedge\neg B(x))\to\exists x\exists y A(y,x)$

(d) $\forall x\exists y A(x,y)\to\exists x\forall y A(x,y)$

(e) $(\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \to \exists z(\neg A(z) \to B(z))$

❺ Вспомните определения корректности, полноты и адекватности исчисления Σ относительно интерпретации $[\![\cdot]\!]$ языка $\mathcal{L}$.

❻ Подставьте: (a) $[P(x) \vee Q(x)]\left[\frac{y}{x}\right]$; (b) $[\forall x P(x,y)]\left[\frac{y}{x}\right]$; (c) $[P(a,x,b) \to ((\exists x Q(x)) \wedge Q(x))]\left[\frac{y}{x}\right]$.

❼ Покажите (см. Гладкий 2001: 115), что требование корректности подстановки y вместо x в У∀ и В∃ (соответственно) не может быть отброшено, на примерах $\nvDash \forall x \exists y Q(x,y) \to \exists y Q(y,y)$ и $\nvDash \forall y Q(y,y) \to \exists x \forall y Q(x,y)$.

❽ Покажите необходимость требования «y не отмечена» на $\nvDash \forall x(P(x) \to \forall y P(y))$.

❾ Покажите, что У∃ не может иметь вид $\dfrac{\exists \mathsf{xA[x]}}{\mathsf{A[t]}}$, на $\nvDash \forall x(\exists x P(x) \to P(x))$.

❿ Докажите (Гладкий 2001: 116, 119, 121) в натуральном исчислении предикатов:

(a) $\forall x \forall y Q(x,y) \to \forall y \forall x Q(x,y)$

(b) $\exists x \exists y Q(x,y) \to \exists y \exists x Q(x,y)$

(c) $\forall x(P(x) \wedge \mathsf{B}) \to (\forall x(P(x)) \wedge \mathsf{B})$, B не содержит свободной x

(d) $(\exists x(P(x)) \vee \mathsf{B}) \to \exists x(P(x) \vee \mathsf{B})$, B не содержит свободной x

(e) $(\forall x P(x) \vee \forall x R(x)) \to \forall x(P(x) \vee R(x))$

(f) $\exists x(P(x) \vee R(x)) \to (\exists x P(x) \vee \exists x R(x))$

5 Неклассические семантики классических логик

До сих пор мы ставили в соответствие выражениям языка компоненты модели, но вместо этого можно сопоставлять им процедуры (проверки истинности при некоторых условиях и т. д.), как в теоретико-игровых семантиках, или операции обновления имеющихся сведений о мире, как в динамических семантиках.

5.1 Теоретико-игровая интерпретация логических знаков

5.1.1 Содержательные трактовки кванторов. Понятие зависимости

Как предикаты второго порядка: $\forall x(P(x))$ — ‘свойству, обозначаемому P, присуще свойство выполняться всеми $o \in D_e$’

Как {конъ-; дизъ-}юнкции подстановок: $\forall x(P(x))$ — ‘какой терм ни подставь на место связанных квантором вхождений x, всё сойдёт’ (ср. нотацию кванторов как в $\bigwedge x \bigvee y P(x,y)$ в Montague 1974)

Подстановочная интерпретация кванторов

Исходя из обычной семантики кванторов, следовало бы сказать «какой индивид из D_e ни выбери…» (86). Но можно (87) трактовать формулу с квантором как (возможно, бесконечную, ①) конъюнкцию (∀) или дизъюнкцию (∃) **подстановок** в подкванторную формулу термов на место вхождений переменных, связывавшихся квантором (Marcus 1962).

(86) $$[\![\forall \mathsf{xA}]\!]^{\mathcal{M},g} = \min_{o \in D_e}[\![\mathsf{A[x]}]\!]^{g[\mathsf{x} \longmapsto o]} \qquad [\![\exists \mathsf{xA}]\!]^{\mathcal{M},g} = \max_{o \in D_e}[\![\mathsf{A[x]}]\!]^{g[\mathsf{x} \longmapsto o]}$$

(87) $$[\![\forall \mathsf{xA}]\!]^{\mathcal{M}} = \min_{\mathsf{t} \in \mathcal{L}}\left[\!\!\left[\mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right]\right]\!\!\right] \qquad [\![\exists \mathsf{xA}]\!]^{\mathcal{M}} = \max_{\mathsf{t} \in \mathcal{L}}\left[\!\!\left[\mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right]\right]\!\!\right]$$

В таком случае переменные пробегают по термам — подмножеству выражений $\mathcal{L}$; способность терма выполнять предикаты не зависит от реального существования обозначаемого объекта (попытка решить проблему «пустых» имён).
Эта семантика $\mathcal{FOL}$ отлична от данной в § 4.3 и не эквивалентна ей.

Пример 9. Если в языке нет констант (имён) для иррациональных чисел, то и в домене $\mathbb{R}$ будет ложна $\exists x \neg$*Рациональное*(x) и истинна $\forall x$*Рациональное*(x). ⊣

Поэтому для адекватных интуиции условий истинности требуется достаточное количество термов, чтобы по ним могли пробегать кванторы (②).
Этой проблемы не будет, если определить иначе (Lavine 2000):

(88) $[\![\exists x \mathsf{A}]\!] = \mathbf{1}$, е. т. е. можно расширить язык за счёт новой c : $\left[\!\!\left[\mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{c}}{\mathsf{x}}\right]\right]\!\!\right] = \mathbf{1}$

Подстановка (если есть что подставить, т. е. если в языке есть терм с нужным постоянным значением) и изменение означивания дают семантически идентичные результаты:

(89) $$\left[\!\!\left[\mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right]\right]\!\!\right]^g = [\![\mathsf{A}[\mathsf{x}]]\!]^{g[\mathsf{x}\longmapsto[\![\mathsf{t}]\!]]},$$

поэтому объяснение кванторов через подстановки в основном близко привычной нам трактовке кванторов в $\mathcal{FOL}$. В некомпозиционной относительно кванторов семантике квантор влияет на «контекст интерпретации» — модифицирует функцию означивания, которой пользуется $[\![\cdot]\!]$. В этом смысле квантор ведёт себя как «модальный оператор» или, точнее, как «монстр» (Rabern 2013; Rabern, Ball 2019).

Hintikka, Sandu (1994) предлагают третью трактовку — кванторы

а первым догадался, видимо, Ч. С. Пирс

как выражение функций выбора: формулы с кванторами говорят о цепочках выбора индивидов из домена, причём выбирают антагонистичные стороны (игроки):

- ∃ обосновывая истинность формулы, я (Верификатор, Myself, ∃лоиза) могу выбрать самый подходящий индивид — тот, который мне выгоднее всего, который «скорее других» выполняет формулу
- ∀ обосновывая ложность формулы, беспощадная действительность (Фальсификатор, Nature, ∀беляр) подсовывает мне наименее подходящий индивид; поэтому мне для победы нужно, чтобы формула выполнялась любым

ср. «новый» и «любой» в аналитических таблицах

Выбранная цепочка индивидов подставляется в формулу, и выясняется истинностное значение формулы-подстановки.

При трактовке кванторов как индикаторов выбора ясно, что цепочки кванторов выражают функциональные зависимости:

$\forall x \exists y \forall z \exists w \mathsf{A}[x, y, z, w]$ ‘для всякого x
  найдётся такой y (разный при разных x?), что
 для всякого z
  найдётся такой w (разный при разных x, z?), что
  $\mathsf{A}[x, y, z, w]$’

Пример 10. У каждой фирмы$_x$ есть свой (один) центр разбора жалоб$_y$ и разные (в зависимости от страны$_z$) центры приёма жалоб$_w$, такие, что в x можно обратиться в y из z через w. ⊣

z зависит от x, y ≈ ‘при прочих равных, зная значения x и y, можно однозначно предсказать соответствующие значения z’.

5.1.2 Теоретико-игровая семантика

Общая идея: играют Верификатор и Фальсификатор; их задачи, соответственно, верифицировать и фальсифицировать формулу путём подбора {конъ-; дизъ-}юнктов и ассоциированных с кванторами подстановок.

Определение 22 (компоненты игры, неформально)**.** Каждый логической связке сопоставлен игрок, делающий выбор в этот момент:

строго — в Mann, Sandu, Sevenster 2011: 10 ff.

(∨, ∃) Верификатор выбирает дизъюнкт или индивид
(∧, ∀) Фальсификатор выбирает дизъюнкт или индивид
(¬) мы меняемся ролями ③

Последовательности ходов — *истории*. *Терминальным* историям соответствуют значения платёжной функции для каждого игрока; у нас либо $p_\forall = 1, p_\exists = 0$ (Верификатор проигрывает, Фальсификатор выигрывает), либо наоборот. ⊣

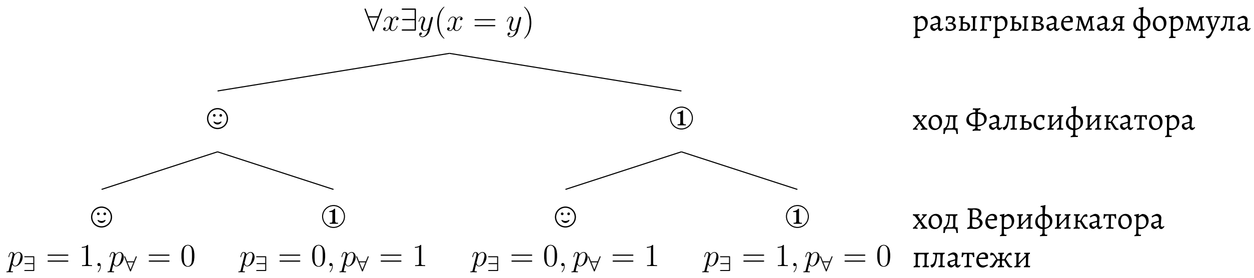


Рис. 17: Раунд орлянки не вслепую: Верификатор выигрывает, если ему выпало то же, что Фальсификатору, и проигрывает в противоположном случае

Определение 23 (стратегия, нестрого)**.** Стратегия игрока n — набор действий n для всех случаев в игре, когда его очередь ходить: для каждой подыстории, после которой ходит n, стратегия содержит единственное действие из множества возможных на данный момент (другие возможности — в других стратегиях). Стратегия n *выигрышная*, если n всегда может вынудить реализацию такой терминальной истории, что $p_n = 1$. ⊣ ④

Определение 24 (истинность)**.** Формула A истинна в $\mathcal{M}$, если для Верификатора существует выигрышная стратегия в $G^{\mathcal{M}}_{\mathsf{A}}$, и ложна, если выигрышная стратегия в $G^{\mathcal{M}}_{\mathsf{A}}$ существует для Фальсификатора. ⊣ ⑤

5.1.3 Частичное отношение порядка кванторов

В отличие от рис. 17, в настоящей орлянке вслепую я не знаю, что выпало другому игроку, так что мой выбор не может обусловливаться его выбором и я не могу *обеспечить* себе победу. (Ср., напротив, задачу встретиться с другом в определённом месте: мы договорились, и я могу прийти туда же, куда и он, потому что располагаю информацией о его ходе.) В таких случаях на стратегии n налагается ограничение: они должны быть **одинаковы** для всех случаев, которые я не могу отличить друг от друга (т. е. определяю в один класс эквивалентности).

В классической $\mathcal{FOL}$ место квантора в формуле однозначно определяет и его сферу действия (какие вхождения одноимённой переменной он связывает), и его приоритет (какие выборы, ассоциированные с ∧/∨ и ∀/∃, будут сделаны раньше, а какие позже его). Ср. $\forall x \exists y$A и $\exists y \forall x$A. Henkin (1961): можно расширить $\mathcal{FOL}$ до языка, позволяющего формулы с приоритетом — отношением частичного порядка типа

Hintikka, Sandu 1994: 125

(90) $$\begin{pmatrix} \forall x & \exists y \\ \forall z & \exists w \end{pmatrix} \mathsf{A}[x, y, z, w].$$

Таким формулам соответствуют как раз игры, в которых у игрока нет сведений о некоторых предшествующих ходах оппонента (или возможности учесть эти ходы при выборе своей стратегии). Например, для настоящей орлянки вслепую имеем

(91) $$\begin{pmatrix} \forall x \\ \exists y \end{pmatrix} (x = y).$$

Поэтому никто не имеет выигрышной стратегии в орлянке: выбор осуществляется оппонентами независимо друг от друга, и нет гарантии, что два выбора совпадут.

Возможно, в естественном языке есть предложения, отношения кванторов в которых не выразить на обычном языке первого порядка (т. е. не совпадающие по условиям истинности ни с одной формулой языка типа $\mathcal{FOL}$ с линейным расположением кванторов):

(92) Most relatives of each villager and most relatives of each townsman hate each other. (Barwise 1979 в ответ Hintikka 1973; vs. Gierasimczuk, Szymanik 2009)

$$\forall x \left(V(x) \to \forall z \left(T(x) \to \begin{pmatrix} \text{MOST}\, y : R(x,y) \\ \text{MOST}\, w : R(z,w) \end{pmatrix} H(y,w) \right) \right)$$

Такие формулы не проинтерпретировать в привычной семантике $\mathcal{FOL}$.

Не теоретико-игровая семантика для ветвящихся кванторов

Денотативную (не теоретико-игровую) семантику, позволяющую это сделать, предложил Hodges (1997). Формулы там выполняются множествами означиваний, так что можно потребовать, чтобы значение некоторой переменной в этом множестве не зависело от значений некоторых других.

Пример 11. На последнем шаге розыгрыша формулы $\begin{pmatrix} \forall x \forall y \\ \exists z \end{pmatrix} (x = y + z)$ Верификатору подходят такие множества означиваний Γ, что

(a) $\forall g, g' \in \Gamma : g \sim_{x,y} g' \Rightarrow g(z) = g'(z)$ (любые два означивания из этого множества, различные не более чем по x, y, должны совпасть и по z — Верификатор не может использовать информацию о выборе, сделанном Фальсификатором для x и для y; иначе говоря, если нет других зацепок для значения z, кроме x и y, то отдельно для данного означивания его определить нельзя)

(b) $\forall g \in \Gamma : [\![x = y + z]\!]^g = \mathbf{1}$

Выигрышной стратегии для этой формулы Верификатор не имеет: для этого для любого множества частичных означиваний (означивающих только x и y), чьи все элементы выполняют $\exists z(x = y + z)$, должно существовать множество расширений на z, являющееся одним из таких Γ; но есть контрпримеры. ⊣

5.2 Динамическая интерпретация

Мотивация. В перспективе мы хотим переводить с естественного языка на язык типа $\mathcal{FOL}$ шаг за шагом, т. е. составляющие формулы-перевода будут соответствовать составляющим русского предложения. Поэтому непонятно, как может местоимение (переменная) быть связанным через границу предложения или из придаточного в главное:

(93) a. На парте сидел какой-то гном$_1$. Он$_1$ читал учебник синтаксиса.

(94) Если на сцене висит какое-то ружьё, в конце пьесы оно выстрелит. *donkey anaphora*

a. #‘Если существует ружьё, висящая на сцене, то ☛ оно выстрелит’

b. #‘Существует такое ружьё, что если оно висит на сцене, то оно выстрелит’

c. ‘Для всякого ружья верно: если оно висит, то оно выстрелит’

d. ‘Если на сцене висит хотя бы одно ружьё, то хотя бы одно ружьё выстрелит’

Мы предсказываем (94a) и, возможно, (94b), а реальные интерпретации — (94c) и (94d). Нужно переописать семантику $\exists$ и $\to$, чтобы модификации означивания в антецеденте сказывались на консеквенте (= чтобы $\exists$ в антецеденте связывали в консеквент).

Семантика. В **динамических семантиках** значение высказывания — это его влияние на предшествующее информационное состояние слушающего (разные исходные состояния дают разные итоговые, но функция «множество исходных $\longmapsto$ множество итоговых» постоянна, и она-то и есть значение высказывания). context-change potential (CCP, Heim 1983)

Есть разные варианты; CCP высказывания можно моделировать как множество пар означиваний (второе — результат проверки или модификации первого) или как множество пар мно- Groenendijk, Stokhof 1991; Nouwen 2020 жеств означиваний (состояний дискурса — информации и референтов; до vs. после семантического вклада данного высказывания). Мы представим значение высказывания как функцию, принимающую множество означиваний и выдающую множество означиваний ($\langle G, G\rangle$). $\approx \langle\langle g,t\rangle, \langle g,t\rangle\rangle$

(95) $$G[P(t_1,\ldots,t_n)] = \{g \in G \mid \langle [\![t_1]\!]^g, \ldots, [\![t_n]\!]^g\rangle \in \mathcal{I}(P)\}$$

(96) $$G[\neg \mathsf{A}] = \{g \in G \mid g \notin G[\mathsf{A}]\}$$

(97) $$G[\mathsf{A} \vee \mathsf{B}] = G[\mathsf{A}] \cup G[\mathsf{B}]$$

(98) $$G[\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}] = G[\mathsf{A}][\mathsf{B}]$$

(99) $$G[\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}] = G[\neg\mathsf{A}] \cup G[\mathsf{A}][\mathsf{B}]$$

(100) $$G[\exists \mathsf{x}\mathsf{A}(\mathsf{x})] = \bigcup_{g\in G} \{g' \sim_x g \mid \{g\}[\mathsf{A}(\mathsf{x})] = \{g\}\}$$

(101) $$G[\forall \mathsf{x}\mathsf{A}(\mathsf{x})] = G[\neg\exists \mathsf{x}\neg\mathsf{A}(\mathsf{x})]$$

Семантика соположения предложений в дискурсе такая же, как у конъюнкции (98), поэтому можно моделировать сохранение значения x_1 в (93a).
Семантика (99) требует, чтобы все означивания, «переживающие» обновление информации за счёт антецедента, «переживали» и последующее обновление за счёт консеквента. Это проверяется «понарошку», локально: информация антецедента в отдельности ничего не обновляет. Между антецедентом и консеквентом информация сохраняется, и этого достаточно для передачи семантики (94c).

Пример 12. Рассмотрим пример модели с $D_e = \{☺, ☹\}$ с данным исходным G:

$$\mathcal{I}(\textit{Веселее}) = \begin{bmatrix} \langle ☺, ☺\rangle \longmapsto \mathbf{0} \\ \langle ☺, ☹\rangle \longmapsto \mathbf{1} \\ \langle ☹, ☺\rangle \longmapsto \mathbf{0} \\ \langle ☹, ☹\rangle \longmapsto \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{Bmatrix} g_1 : x \longmapsto ☺, y \longmapsto ☺ \\ g_2 : x \longmapsto ☺, y \longmapsto ☹ \\ g_3 : x \longmapsto ☹, y \longmapsto ☺ \\ g_4 : x \longmapsto ☹, y \longmapsto ☹ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
G[\textit{Веселее}(x,y)] &= \{g \in G \mid \langle g(x), g(y)\rangle \in \mathcal{I}(\textit{Веселее})\} = \{g_2\} \\
G[\neg\textit{Веселее}(x,y)] &= \{g \in G \mid g \notin G[\textit{Веселее}(x,y)]\} = \{g_1, g_3, g_4\} \\
G[\textit{Веселее}(x,y) \vee \textit{Веселее}(y,x)] &= G[\textit{Веселее}(x,y)] \cup G[\textit{Веселее}(y,x)] = \{g_2\} \cup \{g_3\} = \{g_2, g_3\} \\
G[\neg\textit{Веселее}(x,y) \wedge \neg(x=y)] &= G[\neg\textit{Веселее}(x,y)][\neg(x=y)] = \{g_1,g_3,g_4\}[\neg(x=y)] = \{g_3\} \\
G[\neg(x=y) \rightarrow \textit{Веселее}(x,y)] &= G[\neg\neg(x=y)] \cup G[\neg(x=y)][\textit{Веселее}(x,y)] = \\
&= \{g_1,g_4\} \cup \{g_2,g_3\}[\textit{Веселее}(x,y)] = \{g_1,g_4\} \cup \{g_2\} = \{g_1,g_2,g_4\} \\
G[\exists x \textit{Веселее}(x,y)] &= \bigcup_{g\in G} \{g' \sim_x g \mid \{g\}[\textit{Веселее}(x,y)] = \{g\}\} = \{g' \sim_x g_2\} = \{g_2, g_4\} \\
G[\forall x \textit{Веселее}(x,y)] &= \emptyset
\end{aligned}$$

⊣

Раньше было непонятно, откуда значение 'Для всякого ружья…' в (94c), если в предложении *какой-то*; теперь нам не нужен $\forall$ в переводе (94c), т. к. поменялись правила интерпретации $\exists$ и $\rightarrow$. Естественным переводом (94) в значении (94c) будет

(102) $$(\exists x(\textit{Ружьё}(x) \wedge \textit{Висит}(x))) \rightarrow \textit{Выстрелит}(x),$$

но интерпретация этой формулы в (95)–(101) отлична от её интерпретации в стандартной семантике $\mathcal{FOL}$: x в консеквенте де-факто связана. (В (102) x'у в каждом из означиваний, получающихся после интерпретации антецедента, будет сопоставлен какой-то индивид, выполняющий *Ружьё* и *Висит*.) Пусть

$$\mathcal{I}(\textit{Висит}) = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 & \longmapsto & \mathbf{0} \\ \mathrm{P}_2 & \longmapsto & \mathbf{1} \\ \mathrm{HP} & \longmapsto & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \mathcal{I}(\textit{Выстрелит}) = \begin{bmatrix} \mathrm{P}_1 & \longmapsto & \mathbf{0} \\ \mathrm{P}_2 & \longmapsto & \mathbf{1} \\ \mathrm{HP} & \longmapsto & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad G = \begin{Bmatrix} g_1 : x & \longmapsto & \mathrm{P}_1 \\ g_2 : x & \longmapsto & \mathrm{P}_2 \\ g_3 : x & \longmapsto & \mathrm{HP} \end{Bmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
G[(\exists x(\textit{Ружьё}(x) \wedge \textit{Висит}(x))) \to \textit{Выстрелит}(x)] =\\
&= G[\neg\exists x(\textit{Ружьё}(x) \wedge \textit{Висит}(x))] \cup\\
&\quad \cup G[\exists x(\textit{Ружьё}(x) \wedge \textit{Висит}(x))][\textit{Выстрелит}(x)] =\\
&= \{g \in G \mid g \notin G[\exists x(\textit{Ружьё}(x) \wedge \textit{Висит}(x))]\} \cup\\
&\quad \cup G[\exists x(\textit{Ружьё}(x) \wedge \textit{Висит}(x))][\textit{Выстрелит}(x)] = \emptyset \cup \{g_2\} = \{g_2\}
\end{aligned}$$

Для интерпретации (94d) даже этого формализма оказывается недостаточно. Ср. ситуацию, когда висит два ружья, а стреляет одно.

Вопросы и задания

① От чего зависит, конечную или бесконечную?

② Выполняется ли это условие в языке первого порядка, как мы его определяли? Достаточно ли здесь того, чтобы, как мы требовали, всякий терм был проинтерпретирован?

③ «Разыграйте» формулу $\forall x \exists y(x > 5 \to y + 3 < 2x) \vee \neg\exists x \forall y(x \geq 3 \wedge x + y = 2)$ на домене натуральных чисел $\mathbb{N}$ несколько раз.

④ Сколько различных стратегий имеет Верификатор на рис. 17?

⑤ Истинна ли $\forall x \exists y(x = y)$ в модели для орлянки? Означает ли это, что у игрока бывает выигрышная стратегия в орлянке? Соответственно, верно ли сопоставление орлянке формулы $\forall x \exists y(x = y)$?

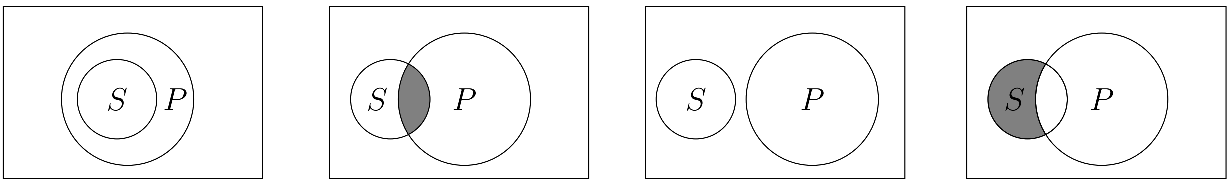
6 Логика и естественный язык

Структура темы

- Изложение традиционного учения о силлогизмах
- Процедура перевода силлогизмов с естественного языка на язык $\mathcal{FOL}$
- Принципы перевода с естественного языка на вспомогательный, примеры
- Введение в моделирование логического вывода в естественном языке

6.1 Традиционное учение о силлогизмах

Исторически первая форма логики, изложенная явно (почти как дедуктивная система), — учение о **простом категорическом силлогизме** в «Первой аналитике» (Аристотель 1978b; также о «непосредственных умозаключениях» в «Об истолковании», Аристотель 1978a). Аристотель заметил, что иногда, если указаны два отношения у трёх свойств, третье логически следует.



общеутвердительное	частноутвердительное	общеотрицательное	частноотрицательное
A	I	E	O
каждый S есть P; *a есть P*	*некоторый S есть P*	*ни один S не есть P*; *a не есть P*	*некоторый S не есть P*

Модусы силлогизма. Пример такого рассуждения:

$$\frac{\text{Ни один } M \text{ не есть } P \qquad \text{Некоторые } S \text{ суть } M}{\text{Некоторые } S \text{ не суть } P}$$

Термин, который в заключении оказывается сказуемым, называют **бо́льшим** (P), тот, который оказывается подлежащим, — **меньшим** (S), а отсутствующий в заключении — **средним** (M). Посылка с большим термином — бо́льшая — по традиции пишется сначала.
В традиционной номенклатуре гласные в названии модуса показывают количество (A, E vs. I, O) и качество (A, I vs. E, O) суждений в нём:

грамматическим сказуемым P будет в «стандартной» форме; ср. *Имеют перья птицы*

№	Посылки	«Правила»	Основные модусы	При $\lvert S\rvert \neq \emptyset$
I	СБ · МС	СБ∀, МС+	*Barbara*, *Darii*, *Celarent*, *Ferio*	*Barbari*, *Celaront*
II	БС · МС	1−, БС∀	*Camestres*, *Baroko*, *Cesare*, *Festino*	*Camestro*, *Cesaro*
III	СБ · СМ	СМ+	*Darapti*, *Disamis*, *Datisi*, *Felapton*, *Ferison*, *Bokardo*	
IV	БС · СМ	если 1−, БС∀ если БС+, СМ∀	*Bramantip*, *Camenes*, *Dimaris*, *Fesapo*, *Fresison*	*Camenop*

ср. Гладкий (2001: 122– 140; список: 130); Клини 1973 [1967]: 162–170

Таблица 1: Верные модусы простого категорического силлогизма

Примеры модусов разных фигур: ①

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Все старославянские твёрдые}\\ \text{требуют непереднего гласного}\end{array}\qquad \begin{array}{c}\text{Все старославянские}\\ \text{заднеязычные твёрдые}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Все старославянские заднеязычные}\\ \text{требуют непереднего гласного}\end{array}}\ \textit{Barbara}, \text{I}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Некоторые падежные значения}\\ \text{не выражаются внутри слова}\end{array}\qquad \text{Все падежные значения грамматические}}{\begin{array}{c}\text{Некоторые грамматические значения}\\ \text{не выражаются внутри слова}\end{array}}\ ?$$

Сведение модусов. Аристотель думал о модусах II и III фигур (IV он не рассматривал) как о «несовершенных» и тем заложил представление о производных правилах вывода. Можно показать, как преобразованием четырёх «совершенных» модусов I фигуры получить остальные:

(s) высказывание слева от s обратить (T_1 *есть* $T_2 \rightsquigarrow T_2$ *есть* T_1)

(p) высказывание слева от p обратить в исходном, заменив *все* на *некоторые*

(m) поменять местами посылки

(k) допустить противоречащее заключению («допустим, заключение неверно…»); из него на месте посылки, отмеченной k, и из оставшейся посылки получится высказывание, противоречащее посылке, отмеченной k («…но тогда не могут вместе быть истинны обе посылки; значит, при их истинности заключение должно быть истинно, т. е. модус сохраняет истинность») ②

6.2 Формализация силлогистики в логике предикатов

Есть несколько способов формализации силлогистики, в т. ч. путём дополнения языка $\mathcal{PL}$ формул с «силлогистическими константами» a, i, e, o (не у нас). Бочаров, Маркин 2010

6.2.1 Функция для рекурсивного перевода

Всем модусам соответствуют выводы переводов их заключений из пар переводов их посылок на язык $\mathcal{FOL}$, например в натуральном исчислении. Сравнением *условий истинности* можно получить соотношения

a	*Все* P *суть* Q	$\forall x(\mathsf{P}(x) \to \mathsf{Q}(x))$
i	*Некоторые* P *суть* Q	$\exists x(\mathsf{P}(x) \land \mathsf{Q}(x))$
e	*Ни один* P *не есть* Q	$\forall x(\mathsf{P}(x) \to \neg\mathsf{Q}(x))$
o	*Некоторые* P *не суть* Q	$\exists x(\mathsf{P}(x) \land \neg\mathsf{Q}(x))$

Но как получить их строго? P, Q как целое — одноместные предикаты, но могут иметь сложную внутреннюю структуру. В связи в т. ч. с этим нужно определить **функцию перевода** $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle$, которая вычисляет перевод произвольного выражения, подобно тому как функция интерпретации $[\![\cdot]\!]$ вычисляет его значение. ③ ④

Пример 13. $\langle\!\langle$*Неверно, что* A$\rangle\!\rangle = \neg\langle\!\langle$A$\rangle\!\rangle$; $\langle\!\langle$A *и* B$\rangle\!\rangle = \langle\!\langle$A$\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle$B$\rangle\!\rangle$; $\langle\!\langle$*если* A, *то* B$\rangle\!\rangle \stackrel{?}{=} \langle\!\langle$A$\rangle\!\rangle \to \langle\!\langle$B$\rangle\!\rangle$; $\langle\!\langle$*Боря идёт*$\rangle\!\rangle = \langle\!\langle$*идёт*$\rangle\!\rangle\big(\langle\!\langle$*Боря*$\rangle\!\rangle\big) = R(b)$; $\langle\!\langle$*Кто-то идёт*$\rangle\!\rangle = ?$ ⊣

Допустим, связка *есть* (*суть*) имеет нулевой перевод. Перевод кванторов:

(103) $$\langle\!\langle \textit{Все P суть Q} \rangle\!\rangle = \forall x\big(\langle\!\langle \mathsf{P} \rangle\!\rangle(x) \to \langle\!\langle \mathsf{Q} \rangle\!\rangle(x)\big)$$

(104) $$\langle\!\langle \textit{Все P суть \_} \rangle\!\rangle = \forall x\big(\langle\!\langle \mathsf{P} \rangle\!\rangle(x) \to \_(x)\big)$$

(105) $$\langle\!\langle \textit{Все } \__1 \textit{ суть } \__2 \rangle\!\rangle = \forall x\big(\__1(x) \to \__2(x)\big)$$

Таким образом, *все* (как и любое другое кванторное слово) переводится конструкцией, которая при добавлении двух одноместных предикатных символов превращается в формулу, внешним знаком которой является соответствующий квантор. Но нельзя же пользоваться нотацией с дырочками в формулах? ⑤

6.2.2 Применение λ-абстракции

Общепринятой нотацией для «недостаточных» (функциональных) выражений является λ-нотация, где λ — оператор абстракции:

для лингвистов: Heim, Kratzer 1998: 34–39

$$\lambda x.x^2 \qquad \lambda y.\lambda x.x+y \qquad \lambda P.\lambda x.P(x)$$

λ-оператор превращает выражение, к которому присоединяется, в функцию из множества — пробега переменной при нём во множество — домен, из которого было взято значение исходного выражения. Например, $\lambda x.\sin x$ — функция из $\mathbb{R}$ в $[-1;1]$. Значение выражения не зависит от означивания тех переменных, которые связаны в нём λ-операторами.

sin и $\lambda x.\sin x$ — функции, $\sin x$ — число (возможно, неизвестное)

Применение функции, образованной с помощью λ, к аргументу («β-редукция»):

(106) $$[\lambda x.x^2](3) = 3^2 = 9$$

(107) $$[\lambda y.\lambda x.x+y](3)(2) = [\lambda x.x+3](2) = 2+3 = 5$$

(108) $$[\lambda P.\lambda x.P(x)](\textit{Бежит})(\textit{боря}) = [\lambda x.\textit{Бежит}(x)](\textit{боря}) = \textit{Бежит}(\textit{боря})$$

Одно из достоинств λ-нотации как средства формализации значения: при семантической композиции (комбинации значений частей в значение целого) ничего не исчезает, выражение — перевод целого не сокращается безвозвратно, порядок операций виден (пока мы не применим β-редукцию). До редукции перевод русской фразы действительно *состоит* из переводов её частей, ср. принцип композиционности.

(Относительно) композиционная семантика λ-оператора

Для случая абстракции по индивидной переменной:

(109) $$[\![[\lambda \mathsf{x}.\mathsf{A}](\mathsf{t})]\!]^g = [\![\mathsf{A}]\!]^{g[\mathsf{x}\longmapsto[\![\mathsf{t}]\!]^g]}$$

(110) $$[\![\lambda \mathsf{x}.\alpha]\!]^g : \{o \in D_e\} \longmapsto \{[\![\alpha]\!]^{g[\mathsf{x}\longmapsto o]}\}, \qquad [\![\alpha]\!] : \tau,\ [\![\lambda \mathsf{x}.\alpha]\!] : \langle e, \tau\rangle$$

Строго говоря, λx имеет переменную синтаксическую категорию и переменный семантический тип, т. к. в λx.α категория выражения α и тип его значения могут быть любыми; α даже не обязано обозначать функцию или содержать переменные, в т. ч. x.

Теперь можно записать перевод квантора иначе; тип его значения — $\langle\langle e,t\rangle,\langle\langle e,t\rangle,t\rangle\rangle$: ⑥⑦

(111) $$\langle\!\langle \textit{все} \rangle\!\rangle = \lambda P.\lambda Q.\forall x(P(x) \to Q(x))$$

(112) $$\langle\!\langle \textit{все зайцы} \rangle\!\rangle = [\lambda P.\lambda Q.\forall x(P(x) \to Q(x))](\lambda y.\textit{Заяц}(y)) \overset{\beta}{=} \overset{\beta}{=} \lambda Q.\forall x([\lambda y.\textit{Заяц}(y)](x) \to Q(x)) \overset{\beta}{=} \lambda Q.\forall x(\textit{Заяц}(x) \to Q(x))$$

(113) $$\langle\!\langle \textit{Все зайцы спят} \rangle\!\rangle = \big([\lambda P.\lambda Q.\forall x(P(x) \to Q(x))](\lambda y.\textit{Заяц}(y))\big)(\lambda z.\textit{Спит}(z)) \overset{\beta}{=} \overset{\beta}{=} [\lambda Q.\forall x(\textit{Заяц}(x) \to Q(x))](\lambda z.\textit{Спит}(z)) \overset{\beta}{=} \forall x(\textit{Заяц}(x) \to \textit{Спит}(x))$$

Группы детерминатора типа *все зайцы*, *какой-то человек*, *не более 65 студентов*, т. е. кванторные группы, обозначают функции второго порядка (свойства свойств), которые называются **обобщёнными кванторами** (Heim, Kratzer 1998: 140–150).

Таким образом, λ-абстракторы появляются в переводах даже лексически элементарных единиц естественного языка: необязательно, чтобы перевод сам был элементарным в языке, на который мы переводим. Но при построении сложного выражения до редукции его перевод будет конкатенацией переводов частей.

6.2.3 Перевод и рекурсия

Подбором можно получить для (114a) перевод (114b).

(114) a. Какой-то студент, которого все профессора любят, пришёл.

b. $\exists x\Big(\big(\textit{Студент}(x) \wedge \forall y(\textit{Профессор}(y) \to \textit{Любит}(y,x))\big) \wedge \textit{Пришёл}(x)\Big)$

Но (114a) не предел сложности (его нет). Можно ли дать общие правила перевода? Можно: тут та же идея, что у композициональной интерпретации: перевод синтаксического целого должен быть функцией Φ от переводов его (двух) непосредственно составляющих α и β и синтаксического правила Ξ, по которому они соединены.

упоминание индексов на всякий случай сохраним, понадобится в модальных логиках

(115) $$\langle\!\langle \Xi(\alpha,\beta) \rangle\!\rangle^{i_1,\dots,i_n} = \Phi_{\Xi}(\langle\!\langle \alpha \rangle\!\rangle^{i_1,\dots,i_n}, \langle\!\langle \beta \rangle\!\rangle^{i_1,\dots,i_n})$$

Принимая очевидные синтаксические конвенции, дадим правила

(116) $$\langle\!\langle \text{Q NP} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \text{Q} \rangle\!\rangle(\langle\!\langle \text{NP} \rangle\!\rangle)$$

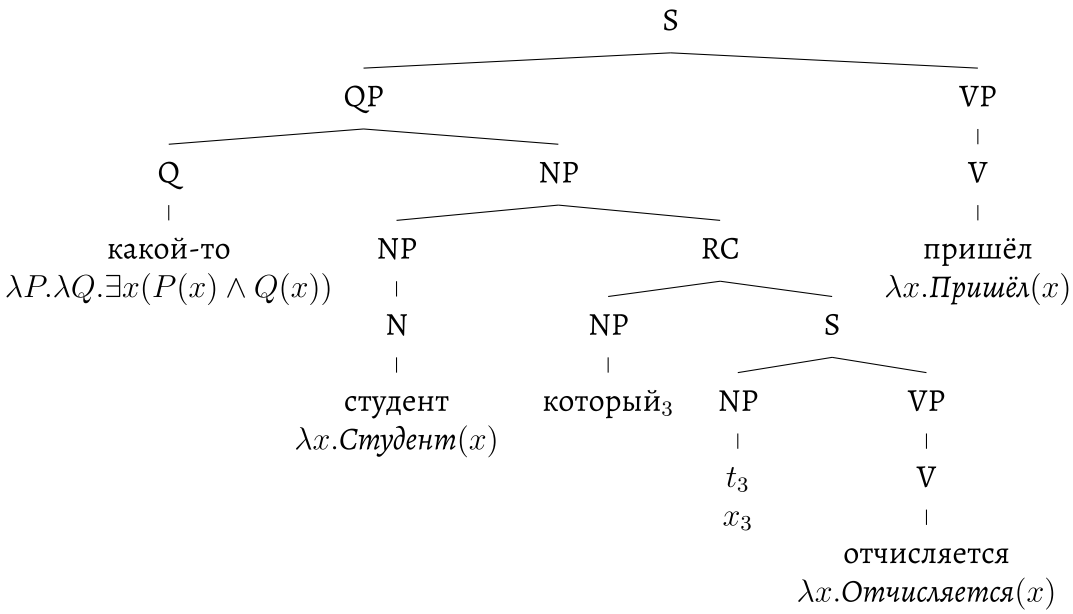
(117) $$\langle\!\langle \text{QP VP} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \text{QP} \rangle\!\rangle(\langle\!\langle \text{VP} \rangle\!\rangle)$$

(118) $$\langle\!\langle \text{NP RC} \rangle\!\rangle = \lambda x.\langle\!\langle \text{NP} \rangle\!\rangle(x) \wedge \langle\!\langle \text{RC} \rangle\!\rangle(x)$$

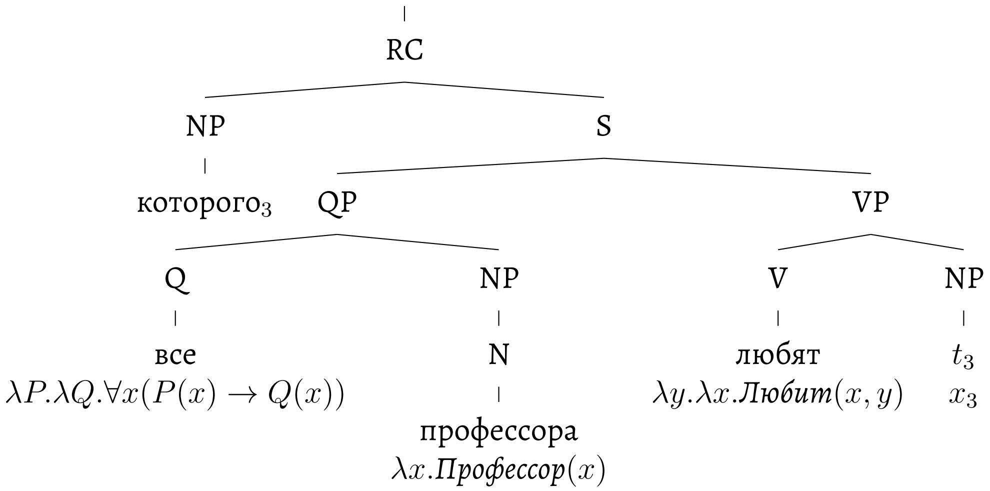
(119) $$\langle\!\langle \textit{который}_i \text{ S} \rangle\!\rangle = \lambda x_i.\langle\!\langle \text{S} \rangle\!\rangle$$

Сначала применим их к более простому примеру:

(120) Какой-то студент, который отчисляется, пришёл.



Единственное отличие для (114) будет внутри RC. ⑧



Мы только что произвели **непрямую интерпретацию** выражений естественного языка:

- сначала определяется формализованный язык $\mathcal{L}$ (у нас это $\mathcal{FOL}^\lambda$), для выражений которого задаётся композициональная $[\![\cdot]\!]$
- затем определяется рекурсивная $\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle$, отображающая множество выражений естественного языка в $\mathcal{L}$

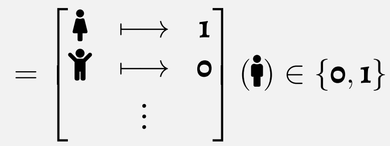
(121) $$\text{естественный язык} \xmapsto{\langle\!\langle\cdot\rangle\!\rangle} \mathcal{L} \xmapsto{[\![\cdot]\!]} \mathcal{M}$$

При непрямой интерпретации задача семантиста, строго говоря, не в сочинении семантики! Семантика языка-посредника определена заранее (он уже интерпретирован на любой подходящей модели за счёт $[\![\cdot]\!]$), а заново создаётся перевод единиц естественного языка на язык-посредник (в т. ч. через установление соответствий между синтаксическими правилами и семантическими операциями). Partee, Hendriks 2011: 20–21

Прямая интерпретация

А вот здесь, напротив, сами выражения естественного языка интерпретируются на подходящей модели (т. е. естественный язык получает список правил интепретации типа данного в § 4.2 синтаксиса $\mathcal{FOL}$): естественный язык $\xmapsto{[\![\cdot]\!]} \mathcal{M}$. Например,

$$[\![\textit{Вася бежит}]\!]^{\mathcal{M},g} = [\![\textit{бежит}]\!]([\![\textit{Вася}]\!]^{\mathcal{M},g}) = \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(\textit{бежит})\big(\mathcal{I}_{\mathcal{M}}(\textit{Вася})\big)$$



6.3 Монотонность и следование

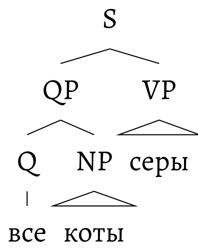
Силлогистика описывает рассуждения на естественном языке, но оперирует архаичным синтаксисом (субъект — связка — предикат). Непрямая интерпретация позволяет переводить на язык-посредник, для которого есть исчисления. Можно ли построить интуитивно понятное исчисление напрямую на основе синтаксиса естественного языка?

6.3.1 Обобщённые кванторы

Все, *некоторые* переводятся функциями от двух аргументов, в чьё описание входят унарные $\forall$, $\exists$. *Большинство*, *больше половины* не выразить через унарные кванторы: Barwise, Cooper 1981

(122) $$[\![\textit{Большинство кошек серые}]\!] = \mathbf{1},\ \text{е. т. е.}\ |\{x \mid x\ \text{кошка},\ x\ \text{серый}\}| > \frac{1}{2}\,|\{x \mid x\ \text{кошка}\}|$$

И в синтаксисе предложения кванторное слово соединяется сначала с NP-рестриктором, а уже потом с остальной частью предложения.
Зато *все*, *некоторые* и т. д. выразимы через бинарные операции:



(123) $$\langle\langle \textit{все} \rangle\rangle = \lambda P.\lambda Q.\{x \mid P(x)\} \subseteq \{x \mid Q(x)\}$$

(124) $$\langle\langle \textit{некоторые} \rangle\rangle = \lambda P.\lambda Q.\{x \mid P(x)\} \cap \{x \mid Q(x)\} \neq \emptyset$$

(125) $$\langle\langle \textit{больше половины} \rangle\rangle = \lambda P.\lambda Q.|\{x \mid P(x)\}| > \frac{1}{2}|\{x \mid Q(x)\}|$$

(126) $$\langle\langle \text{Оля} \rangle\rangle = \lambda Q.\{\text{оля}\} \subseteq \{x \mid Q(x)\}$$

единичные S как общие в суждениях типов A, E ⑨⑩

6.3.2 Монотонность и «естественная логика»

Мы обобщим отношение следования, понимаемое теоретико-множественно, на другие семантические типы. Можно задать отношение порядка для любых семантических объектов:

- для D_t принято $\mathbf{1} \geq \mathbf{0}$
- для любых $o, o' \in D_e$ можно принять, что $o \geq o'$
- для любых $f, f' \in D_{\langle\tau,t\rangle} : f \geq f' \Leftrightarrow \{o \in D_\tau \mid f(o)\} \supseteq \{o \in D_\tau \mid f'(o)\}$

Определим функции, **сохраняющие порядок**: $\forall o, o'(o \geq o' \Rightarrow f(o) \geq f(o'))$, — и функции, **обращающие порядок**: $\forall o, o'(o \geq o' \Rightarrow f(o') \geq f(o))$. Eijck 2007; Moss 2012
Это семантика, но можно и *в синтаксисе* сопоставить позициям аргументов, по которым данная функция сохраняет порядок, знак «$+$», по которым обращает — «$-$», остальным — 0. Первые называются **монотонными** (аргумент не меньше — значение не меньше), вторые **антимонотонными**. Обычно для сохранения общности правил метки приписываются не словам, а целым синтаксическим категориям.

(127) a. [*неверно, что* S^-]
b. [*не* VP^-]
c. $[_\text{S}\ [_\text{DP}$ *каждый* $\text{NP}^-]\ \text{VP}^+]$
d. $[_\text{S}\ [_\text{DP}$ *некоторые* $\text{NP}^+]\ \text{VP}^+]$
e. $[_\text{S}\ [_\text{DP}$ *большинство* $\text{NP}^0]\ \text{VP}^+]$
f. $[_\text{S}\ [_\text{DP}$ *ровно четыре* $\text{NP}^0]\ \text{VP}^+]$

Для позиции, на которую подставляют, важен не валентный на неё оператор сам по себе, а произведение «$+$» и «$-$» на пути из корневого узла до непосредственно подчиняющего (умножение на 0 всегда даёт 0). При этом каждый семантически валентный элемент привносит ещё один «$+$», «$-$» или 0 для каждой из своих валентностей.
В результате полярность составляющей α — это произведение всех полярностей «над» α и полярности, приписываемой валентным словом (рис. 18). ❶
Разметку по полярности можно трактовать как синтаксическую черту языка; её правильность проверяется семантическими отношениями следования, доступными нам как носителям.
Если по окончании разметки $\mathsf{A}[\alpha]^+$, то позиция α допускает замену на любое $\beta : [\![\beta]\!] \geq [\![\alpha]\!]$; если $\mathsf{A}[\alpha]^-$, то позиция α допускает замену на любое $\beta : [\![\beta]\!] \leq [\![\alpha]\!]$. Можно ввести в язык логический знак «$\Rightarrow$» с семантикой

(128) $$[\![\alpha \Rightarrow \beta]\!] = \mathbf{1}, \quad \text{е. т. е.} \quad [\![\beta]\!] \geq [\![\alpha]\!],$$

а затем сформулировать правила вывода (понимаемые как применение словарных гипо/гиперонимических отношений к выводу на основе конкретного предложения)

(129) $$\frac{\mathsf{A}[\alpha]^+ \qquad \alpha \Rightarrow \beta}{\mathsf{A}[\beta]} \qquad\qquad \frac{\mathsf{A}[\alpha]^- \qquad \beta \Rightarrow \alpha}{\mathsf{A}[\beta]}$$

Например, окажется верным рассуждение (с опущенными посылками с $\Rightarrow$)

$$\frac{\text{Все второкурсники}^- \text{ — студенты}^+}{\text{Все второкурсники-матлингвисты — учащиеся}}$$

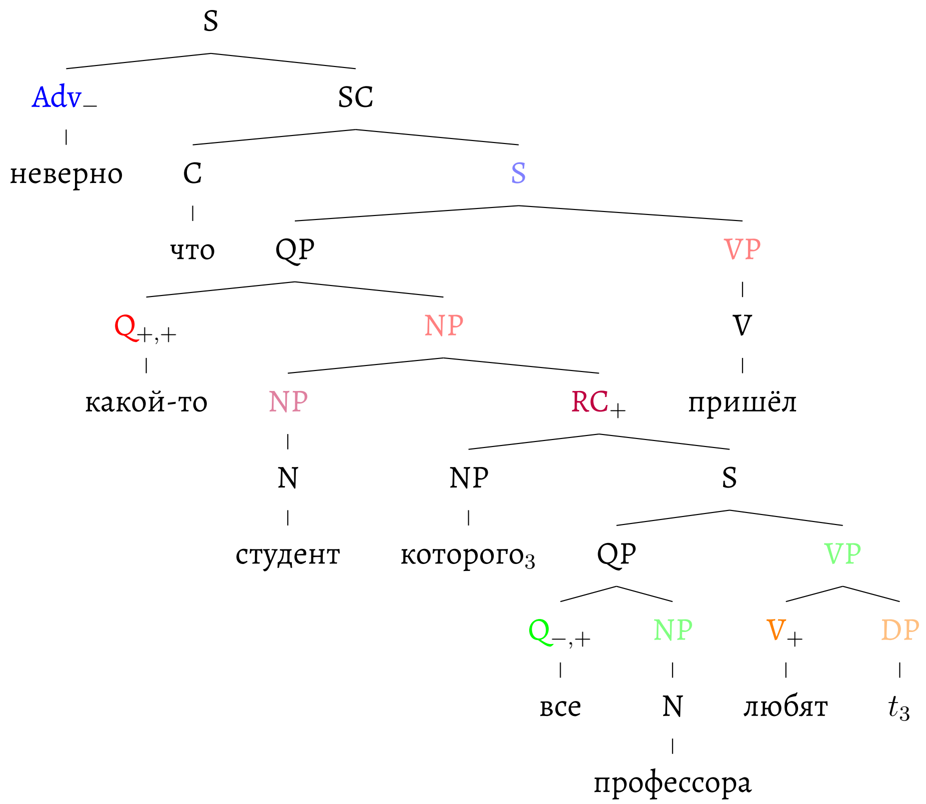


Рис. 18: Разметка по полярности русского предложения (актанты отмечены цветом)

Тогда невозможность получить надёжное заключение без хотя бы одной истинной посылки в любой из фигур категорического силлогизма можно трактовать как требование, чтобы при выводе была дана информация об отношении включения: $[\![T]\!] \subseteq [\![T']\!]$ (A) или $[\![T]\!] \subseteq \overline{[\![T']\!]}$ (E).

$$\frac{\textit{Все } P\ Q^{+} \qquad Q \Rightarrow R}{\textit{Все } P\ R}\ \textit{Barbara} \qquad\qquad \frac{\textit{Некоторые } P\ Q^{+} \qquad Q \Rightarrow \textit{не-}R}{\textit{Некоторые } P \textit{ не } R}\ \textit{Ferio}$$

Поведение некоторых синтаксических конфигураций можно аксиоматизировать:

для «нормальных» (*субсектив-ных*) A

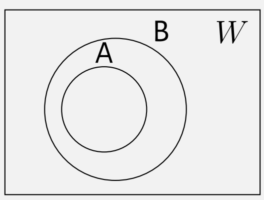
(130) $\mathrm{NP}_{\{1,2\}} \Rightarrow \mathrm{NP}_1$ *или* NP_2 $\qquad \mathrm{NP}_1$ *и* $\mathrm{NP}_2 \Rightarrow \mathrm{NP}_{\{1,2\}}$ $\qquad$ AP NP $\Rightarrow$ NP

Отношения между нечленимыми символами алфавита (отдельными словами, например *на-рисовать* $\Rightarrow$ *изобразить*) должны задаваться отдельными аксиомами.

Следование как частный случай отношений по монотонности

Витгенштейн 2017 [1921]

В теории, в которой высказываниям соответствуют множества *положений дел*, или «случаев» (означиваний, миров, пар ⟨модель, означивание⟩ и т. д.), следование окажется отношением включения на множествах «случаев» — частным случаем отношения объектов типа $\langle \tau, t\rangle$, где $\tau ::= s$, тип возможных миров. Значение высказывания как его **интенсионал** (функция, сопоставляющая ему в каждом мире **1** или **0**) — свойство миров.



(131) $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vDash \mathsf{B} \Leftrightarrow \{\langle \mathcal{M}, g\rangle \mid [\![\mathsf{A}_1]\!]^{\mathcal{M},g}, \ldots, [\![\mathsf{A}_n]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathbf{1}\} \subseteq \{\langle \mathcal{M}, g\rangle \mid [\![\mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M},g} = \mathbf{1}\}$

(132) $\mathsf{A} \vDash \mathsf{B} \Leftrightarrow \{w \mid [\![\mathsf{A}]\!](w) = \mathbf{1}\} \subseteq \{w \mid [\![\mathsf{A}]\!](w) = \mathbf{1}\}$

Материальная импликация говорит, что истинностное значение консеквента «не хуже» значения антецедента; поэтому только категорические, но и условно-категорические силлогизмы можно трактовать как схемы подстановки по монотонности (в нулевом контексте, так что полярность положительна).

(133) $$\frac{\mathsf{A} \qquad \mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}}{\mathsf{B}}\,\mathrm{MP} \qquad \frac{\mathsf{A} \qquad \mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}}{\mathsf{B}}$$

От полярности может зависеть не только возможность логического вывода через замену по монотонности, но и сочетаемость слов в синтаксисе. Это можно объяснять чисто синтаксически (хотя и через полярность), а можно семантически: *any* требует ложности всех альтернатив, которые не следуют из предложения с *some* на месте *any*, например ложности *I saw Martian A*, *I saw Martian B* и т. д. в (134a), что в совокупности противоречит самому *I saw some Martians*, делая (134a) противоречивым. Chierchia 2013

(134) a. *I saw any Martians.
b. I did not see any Martians.
c. Everyone who saw any Martians reported them to the bureau.
d. If you see any Martians report them to the bureau immediately.

Вопросы и задания

① Постройте рассуждения по модусам *Ferio*, *Camestres*, *Darapti*, *Bocardo*, *Bramantip*, *Fresison*.

② Сведите те модусы из ①, которые не относятся к I фигуре.

③ Приведите пример одноместного предиката со сложной структурой.

④ Вспомните формулировку принципа композицион(аль)ности и соображения, заставляющие руководствоваться им в семантике естественного языка.

⑤ Какую синтаксическую категорию и какой семантический тип приписать кванторным словам *все*, *некоторые* и пр., чтобы предсказать их синтаксическую сочетаемость и взаимодействие их значений с значениями других слов?

⑥ Определите переводы слов/сочетаний *некоторые*, *ни один*, *некоторые… не*.

⑦ Покажите в натуральном исчислении, что модус (a) *Camestres* II фигуры; (b) *Bocardo* III фигуры — является допустимым производным правилом (сохраняет истинность). Взамен черты вывода можно объединить посылки и заключение кратной импликацией и показать, что полученная формула является тавтологией.

⑧ Постройте перевод (120) шаг за шагом в соответствии с правилами (116)–(119). Постройте шаг за шагом перевод для (114a).

⑨ На примере кванторов типа *существует не менее* n покажите, что отношение включения определено и для кванторов.

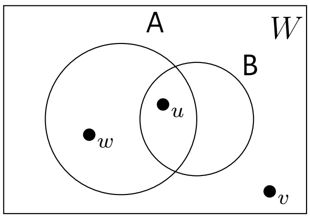
⑩ Верно ли, что $[\![$*подарить*$]\!] \geq [\![$*подарить Васе*$]\!]$? Почему при переходе от одного к другому как будто бы меняется тип, чего быть не должно?

❶ Вычислите полярность каждого лексического контекста на рис. 18.

7 More Fun with Worlds: применения моделей возможных миров

В §§ 1.3–1.4 дана модель универсума возможных миров для формализации понятий информации, следования и т. п. Пусть $|\mathsf{A}|$ — **пропозиция** A, т. е. множество миров, где имеет место A.

$$\begin{aligned}
|\mathsf{A} \vee \mathsf{B}| &= |\mathsf{A}| \cup |\mathsf{B}| \\
|\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}| &= |\mathsf{A}| \cap |\mathsf{B}| \\
|\neg \mathsf{A}| &= \overline{|\mathsf{A}|} = W \setminus |\mathsf{A}| \\
|\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}| &= \overline{|\mathsf{A}|} \cup |\mathsf{B}| \\
\mathsf{A} \vDash \mathsf{B} \Leftrightarrow |\mathsf{A}| &\subset |\mathsf{B}| \Leftrightarrow \forall w (w \in |\mathsf{A}| \Rightarrow w \in |\mathsf{B}|)
\end{aligned}$$



①

A истинно в w, е. т. е. $w \in |\mathsf{A}|$. При этом $[\![\mathsf{A}]\!]$ можно отождествить с одним из двух:

«$w \in |\mathsf{A}|$»$\in \{1, 0\}$ тогда $[\![\mathsf{A}]\!]^{w,g}$ зависит от w; традиционный для модальной логики путь

$f: W \longmapsto \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ тогда $[\![\mathsf{A}]\!]^g$ не зависит от w, представляя собой тест для миров (свойство миров!); иногда применяется в описании семантики модальности в естественном языке

Множество миров (максимальных положений дел) как значение формулы функционирует подобно множеству означиваний в композициональной семантике логики предикатов и также формализует идею перебора случаев.
Эта модель (иногда с дополнениями) имеет другие применения: описание различных «измерений» значения выражений (и различных смыслов эквивалентности по значению), построение «логик вероятности», неквантитативное моделирование возможности и вероятности.

7.1 Миры и значения

В каком смысле *Сегодня рабочий день* и *Волга впадает в Каспийское море* имеют одно и то же значение, а в каком разные? В каком смысле *самая населённая страна мира* и *вторая экономика мира* (или *единственный царствующий император* и *сын единственного отрекшегося императора*) имеют одинаковое значение, а в каком разные?
Формализация типа $\mathcal{FOL}$ приписывает им одинаковые значения (даже в семантике на G, т. к. в них нет переменных). ②
В этих парах одинаковый денотат/референт (**1** и Китай), но их понимание требует разных значений и они *могли бы* иметь разный денотат, будь наш мир другим (т. е. их денотаты и их тождество зависят от случайностей мира). Может ли значение (языковой объект) зависеть от положения дел в мире? Стоит считать значением в лингвистическом смысле что-то постоянное?
Фреге (2000 [1892]): знак имеет *значение* (*Bedeutung*, референт в широком смысле) и *смысл* (*Sinn*, невещественное мыслительное содержание — «способ данности», процедуру обнаружения референта в мире).

vs. Соссюр с двусторонностью знака

Эту идею формализовал (с потерей алгоритмического компонента?) Карнап (1959 [1956]): у знака есть **экстенсионал** (денотат; ср. традиционный термин *объём понятия* = *extension*) и **интенсионал** (функция $W \longmapsto$ экстенсионалы).

референциальное выражение (имя собственное, определённая дескрипция)	$\langle s, e\rangle$	индивидный концепт
свойство	$\langle s, \langle e, t\rangle\rangle$	
n-местное отношение	$\langle s, \langle e, \ldots, \langle e, t\rangle \ldots\rangle\rangle$	
высказывание	$\langle s, t\rangle$	пропозиция

свойство ≈ множество

Поэтому выражения могут быть экстенсионально эквивалентны, не будучи интенсионально эквивалентны (но не наоборот): ③④

$$[\![\textit{самая населённая страна мира}]\!]^{@} = [\![\textit{вторая экономика мира}]\!]^{@}$$
$$\neg\forall w\big([\![\textit{самая населённая страна мира}]\!]^{w} \neq [\![\textit{вторая экономика мира}]\!]^{w}\big)$$
$$\lambda w.[\![\textit{самая населённая страна мира}]\!]^{w} \neq \lambda w.[\![\textit{вторая экономика мира}]\!]^{w}$$

Ср. замечание Фреге о различной познавательной ценности тождеств *Утренняя звезда есть Утренняя звезда* и *Утренняя звезда есть Вечерняя звезда* (второе можно не знать).
Таким образом, при интерпретации в конкретном мире определённая дескрипция «автоматически» приобретает соответствующий индивид в качестве значения/референта.

Нерешённая проблема

Тем не менее, оказываются интенсионально эквивалентными (т. е. вообще неразличимыми по значению), например, $2 \times 2 = 4$ и 599 *и* 601 — *простые числа-близнецы*, хотя интуитивно их «содержание» различно, например можно знать одно и не знать другого (но не чисто «лингвистическое» ли это знание?).

Ещё средневековые логики-семантисты развили теорию о том, что в контексте модального или временнóго слова предикаты меняют значение (*амплификация* и *рестрикция*); после Фреге эта проблема описывается как «невзаимозаменяемость эквивалентных *salva veritate*»: Parsons 2014

(135) a. Самая населённая страна мира находится в Азии. экстенсионально эквивалентны
b. Первая экономика Азии находится в Азии.

(136) a. Необходимо (неизбежно), что самая населённая страна мира находится в Азии. экстенсионально неэквивалентны
b. Необходимо (неизбежно), что первая экономика Азии находится в Азии.

(137) a. Оля знает, что самая населённая страна мира находится в Азии.
b. Оля знает, что первая экономика Азии находится в Азии.

Отсюда характеристика модальных контекстов как **«непрозрачных»** (*opaque*).
Но если считать, что собственно семантика дескрипции — это её интенсионал, невзаимозаменимость ясна: эквивалентные — это интенсионально эквивалентные, и как раз такие выражения были бы взаимозаменимы даже в контекстах типа (136)–(137). Модальное слово переносит действие в другие возможные миры, где могут быть экстенсионально неэквивалентны выражения, экстенсионально эквивалентные в @.

хотя ср. о числах-близнецах выше

7.2 Миры и индуктивная логика

Дедуктивно рассуждение, основанное на логическом следовании: рассуждающий претендует на то, что истинностью посылок гарантирована истинность заключения. Связь такой трактовки с бытовым определением «от общего к частному» можно видеть в том, что миры, где все S суть P, лежат на пересечении всех $|S_i$ *есть* $P|$, так что *Все* S *суть* $P \vDash S_i$ *есть* P.
Индуктивное рассуждение стремится показать, что заключение поддерживается посылками в той или иной степени (Hawthorne 2021):

но нужна ещё информация о том, что S_i есть S (где S_i единичный или общий, меньший S по объёму)

> among the logically possible states of affairs that make the premises true, the conclusion must be true in (at least) proportion r of them—where r is some numerical measure of the support strength.

Иногда говорят, что **индуктивно сильное** рассуждение — такое, которое поддерживает заключение более чем на 50%. По-видимому, это определение даёт трудноинтерпретируемые результаты там, где (даже если это исходно не было известно) априорная вероятность истинности заключения выше апостериорной, хотя последняя превышает 50%.

Пример 14. Насколько убедительно рассуждение *Петя — человек, и Пете 8 лет* $\therefore$ *Петя грамотный* по сравнению с *Петя — человек* $\therefore$ *Петя грамотный*? ⊣

Ввиду порога (в 50% или другого) индуктивные рассуждения **немонотонны**, т. е. ⑤⑥

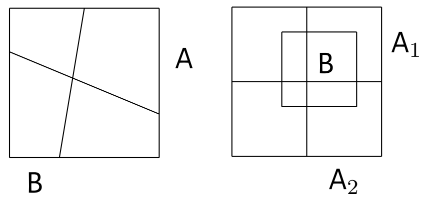
(138) $$\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \vDash_{\text{инд}} \mathsf{B} \quad \not\Rightarrow \quad \mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n, \mathsf{A}_{n+1} \vDash_{\text{инд}} \mathsf{B}$$

(139) a. Маша — выпускница футбольной академии «Зенита» 2020 года; вероятно, она профессиональная футболистка.
b. Маша — выпускница футбольной академии «Зенита» 2020 года, которая в 2021 году попала в автокатастрофу, после которой у неё обнаружились необыкновенные способности художника; вероятно…
c. Маша — выпускница футбольной академии «Зенита» 2020 года, которая в 2021 году попала в автокатастрофу, после которой у неё обнаружились необыкновенные способности художника; но она презирает искусство и прошла полную реабилитацию; вероятно…

Иногда индуктивное рассуждение действительно идёт «от частного к общему» (экстраполяция с выборки на генеральную совокупность с некоторым доверительным интервалом для некоторого порога вероятности). Иногда такие отношения усмотреть трудно, ср. *Петя учится на 4 курсе филфака; Петя знает, кто такой Крушевский* $\therefore$ *У Пети уже был курс фонологии*.

В таких случаях удобно думать о рассуждении в терминах возможных миров: если считать, что W содержит все исходы в «объективно правильных» пропорциях, индуктивная сила аргументаç соответствует **условной вероятности** истинности заключения при условии совместной истинности посылок. Тогда (при допущении «равномерного заполнения» рисунка мирами) формула Байеса приобретает «геометрический» смысл: силу можно посчитать

(140) $$P(\mathsf{B} \mid \mathsf{A}) = \frac{P(\mathsf{B}) \times P(\mathsf{A} \mid \mathsf{B})}{P(\mathsf{A})}$$



Объясняется и интуиция о том, что в случае индуктивных рассуждений лучше приводить больше «свидетельств», «доводов в пользу» заключения, хотя это не правило вывода с несколькими посылками (типа В∧ или У∨): если события, соответствующие посылкам, взаимонезависимы, то их совместность повышает условную вероятность заключения.

Ceteris paribus

Индуктивные в вероятностном смысле — не единственные рассуждения, где отсутствие следования не мешает ценности рассуждения. Например, иногда выделяют ещё **правдоподобные** рассуждения, не дотягивающие до порога в 50%, но повышающие вероятность заключения для убеждаемого (Walton 2013).
Кроме того, сюда относятся умозаключения «при прочих равных», например имеющие дело с множествами, организованными вокруг прототипа (*Это птица* ∴ *Это летает* — если не сказано, что это пингвин, киви и т. д.). Если в базе данных не сказано, что это пингвин и т. д., мы предполагаем дефолтный вариант (*closed world assumption*), т. е. принимаем *Это не пингвин и не…* до поступления опровергающей информации, которая сразу рассматривается как достаточная для отказа он допущения *ceteris paribus*, а не вступает с ним в конкуренцию. Из-за этого такие рассуждения тоже немонотонны.

7.3 Миры и возможность

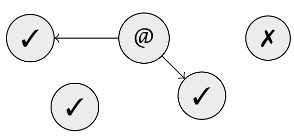
Какое положение дел делает истинным (141a)? Оно может быть истинным в мире w, даже если там на самом деле не солнечно.
Какое положение дел делает истинным (141b)? Оно может не быть истинным в w, даже если там на самом деле солнечно.

(141) a. Возможно, что в Москве солнечно.
b. Необходимо (неизбежно), что в Москве солнечно.

Общая идея: будучи интерпретируемы в w, эти высказывания говорят не напрямую о положении дел в w, а о положениях в некотором **множестве альтернативных** ему и друг другу миров. Сам w может входить или не входить в это множество (142a); для некоторых модальностей он должен туда входить: (142b)–(142c).

(142) a. Вася думает, что в Москве солнечно (но он ошибается).
b. Вася знает, что в Москве солнечно (#но он ошибается).
c. Физически возможно, что в Москве солнечно.

Выбор множества альтернатив зависит от типа модальности и от w. Например, для *физически возможно* будут взяты миры, где законы физики такие же, как в w, а события могут быть другие; физическая возможность A в w означает, что хотя бы в одном из таких миров A имеет место.



> Определение модальности для нужд лингвистики как того, о чём говорят в терминах необходимости и возможности, см. в Auwera, Plungian (1998).

Такая трактовка возможности и необходимости лежит в основе стандартных семантик для модальных логик и будет изложена ниже. Кроме неё, используется **относительная** трактовка, позволяющая отразить степени вероятности и возможность при условии (включая и более соответствующую интуиции, чем $[\![\rightarrow]\!]$, семантику *если… то*).

Kratzer (1991a): множество релевантных миров-альтернатив можно получить как пересечение пропозиций из **модальной базы** M — некоторого (зависящего от w) множества высказываний, определяющих для данной модальности, например конкретного набора норм для деонтической *позволено законами Руритании, чтобы…* или известных обстоятельств для доксастической *моим убеждениям не противоречит, что…* (= *я допускаю, что…*). Модальные слова типа *может*, *must* в словаре имеют фиксированную квантификативную силу (∀ vs. ∃), но допускают разные модальные базы и поэтому могут обозначать модальность разного типа.

Для некоторых типов модальностей модальной базы недостаточно:

- доксастические могут выражать разную степень убеждённости (*возможно*, *possible* vs. *вероятно*, *probable*) внутри совместимого с убеждениями
- деонтические рассуждения обычно предполагают, что нарушение нескольких норм хуже, чем нарушение одной (миры, где грабят и убивают, хуже тех, где только грабят), но сама по себе модальная база только отделяет миры, где кодекс соблюдается (истинны все высказывания из базы), от остальных — можно было бы упорядочить высказывания из кодекса по важности
- **условные** высказывания можно рассматривать как модальные — квантификацию по мирам с рестриктором, выраженным придаточным:

  A$\Box\!\!\rightarrow$ B $\approx$ '(все) миры, где выполняется A, суть миры, где выполняется B' $\subseteq$

  A$\Diamond\!\!\rightarrow$ B $\approx$ 'множество миров, где выполняется A, пересекается с множеством миров, где B'

  Толкования примерные: уже Lewis (1973) обсуждает «собелевские последовательности» типа

  (143) If the USA threw its weapons into the sea tomorrow, there would be war; but if the USA and the other nuclear powers all threw their weapons into the sea tomorrow, there would be peace; but if they did so without sufficient precautions against polluting the world's fisheries, there would be war… — ср. (139)

  Проблема в том, что если *все* миры, где США выбрасывают оружие, суть миры, где война, откуда среди них взять подмножество (где США выбрасывают, но и другие тоже), где мир? Решение Льюиса: A$\Box\!\!\rightarrow$ B означает '*Ближайшие к* w, т. е. наиболее похожие на w, миры из тех, где выполняется A, суть миры, где выполняется B'

По Кратцер, для таких модальностей нужно сочетание модальной базы с **источником отношения порядка** (*ordering source*) — множеством S высказываний, из которых чем больше выполняет мир v, тем он «лучше». В случае норм это действительно лучше (ближе к нормативному идеалу), а в случае условных высказываний S зависит от выбора w и описывает все или существенные для нас его свойства: чем меньше таких свойств имеет мир v, тем дальше он отстоит от w на шкале сходства; шкала сходства с конкретным w задаёт отношение частичного порядка на W (для другого w с другими свойствами будет другое отношение частичного порядка).

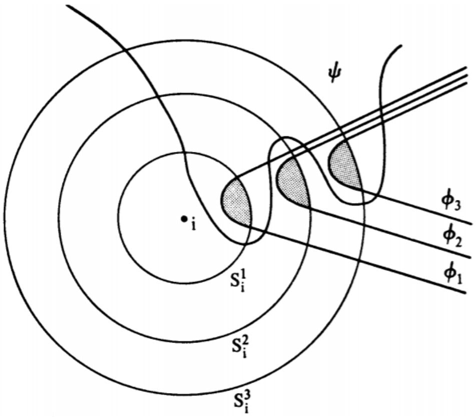


Рис. 19: Семантика условной «модальности» (Lewis 1973). Здесь $i = @$, S_i^j — сферы миров одинаковой близости к @, ϕ_k — антецеденты из (143) всё дальше от реальности, ψ — 'There is war'

Тогда для *Если* A, *то* B (т. е. A$\Box\!\!\rightarrow$ B):

(144) $$[\![\textit{Если A, то B}]\!]^{w,M,S} = \forall v \in \bigcap_{\mathsf{C}_i \in M} |\mathsf{C}_i| \big((v \in |\mathsf{A}| \wedge \neg\exists u \in |\mathsf{A}|(u <_S v)) \Rightarrow v \in |\mathsf{B}| \big)$$

Для относительно высокой степени уверенности («для любого мира, где не-A, найдётся не более далёкий, где A, но обратное — т. е. при мене мест |A| и $\overline{|\mathsf{A}|}$ — неверно»):

(145) $$[\![\textit{Вероятно, B}]\!]^{w,M,S} = \forall v \in \bigcap_{\mathsf{C}_i \in M} |\mathsf{C}_i| \big(v \in \overline{|\mathsf{A}|} \Rightarrow \exists u \in \bigcap_{\mathsf{C}_i \in M} |\mathsf{C}_i| (u \leq_S v \wedge u \in |\mathsf{A}|) \big),$$

но не наоборот

Вопросы и задания

① Определите эквивалентность формул в терминах возможных миров.

② Для каких целей такое равенство желательно, а для каких нежелательно? Ср. пример *изобретатель двухфокусных линз — первый генеральный почтмейстер* США (Kripke 1980) с неизменными признаками.

③ Покажите то же различие для *Сегодня рабочий день* и *Волга впадает в Каспийское море*.

④ Покажите из определений, что интенсиональная эквивалентность выражений влечёт экстенсиональную.

⑤ Почему в дедукции немонотонность невозможна?

⑥ Изобразите в кругах Эйлера различные пропозиции, например из (139), чтобы показать, откуда берётся немонотонность.

8 Модальная логика высказываний

8.1 Что такое модальность?

Языки $\mathcal{PL}$ и $\mathcal{FOL}$ предназначены для описания одного положения дел (а при попытке понять их иначе возникают парадоксы типа «принципа пьяницы»). Контексты, в которых высказывание понимается как описывающее «другое» (нереальное) положение дел, — **модальные** в широком смысле (≈ возможность или неизбежность = необходимость в широком смысле).

> We shall distinguish between four kinds of *modi*.
>
> First, there are the alethic modes or modes of truth. These are the modalities with which so-called modal logic traditionally has been concerned. They can conveniently be divided into two subkinds. Sometimes we consider the modes in which a proposition is (or is not) true. A proposition is pronounced necessarily, possibly, or contingently true. Sometimes we consider the

> modes in which a property is present (or absent) in a thing. A property is pronounced necessarily, possibly, or contingently present in a certain thing. ⟨...⟩
>
> Secondly, there are the epistemic modes or modes of knowing. ⟨...⟩
>
> Thirdly, there are the deontic modes or modes of obligation. ⟨...⟩
>
> Fourthly, there are the existential modes or modes of existence. Their treatment is sometimes called quantification theory and is usually not regarded as a branch of modal logic. Whether universality, existence, and emptiness should be counted as modal attributes or not, is largely a matter of terminological convenience. One should, however, not fail to observe that there are essential similarities between alethic, epistemic, and deontic modalities on the one hand and quantifiers on the other hand. — Wright 1951

Russell (2010 [1918]): «One may call a propositional function [$\approx \lambda x.\mathsf{A}[x]$] *necessary*, when it is always true; *possible*, when it is sometimes true; *impossible*, when it is never true»

Классификация Auwera, Plungian (1998), ориентированная на диахронические сдвиги значения в естественных языках, включает внутреннюю ('могу по собственным свойствам'), внешнюю ('могу ввиду того, как обстоят дела вокруг'), деонтическую и эпистемическую модальность. Всего можно насчитать ещё больше типов по модальной базе:

	'$\forall w$'	'$\exists w$'	
алетическая	$\Box$	$\Diamond$	метафизическая (самая общая)
номологическая			законы природы
circumstantial			обстоятельства
эпистемическая	K_a	$\hat{K}_\mathsf{a}$	знания
доксастическая	B_a	$\hat{B}_\mathsf{a}$	убеждения
булетическая			желания
динамическая	$[\pi]$	$\langle\pi\rangle$	процессы, алгоритмы
деонтическая	O	P	нормы
временнáя	H, G	P, F	прошлое или будущее
условная	$\Box\!\!\rightarrow$	$\Diamond\!\!\rightarrow$	антецедент

В наших семантиках нереальные положения дел — это миры, альтернативные @, и/или моменты времени, альтернативные «сейчас» (но моменты времени тоже можно рассматривать как альтернативные друг другу миры).

8.2 Способы построения семантик возможных миров

Есть разные способы выделять множество миров, положения дел в которых релевантны для интерпретации данного высказывания с модальностью, как функцию от данного мира.

8.2.1 Без отношения достижимости

Можно просто потребовать, чтобы *необходимо, что* A (нотация: $\Box$A) выполнялась, е. т. е. во всех мирах универсума выполняется A.

Определение 25. Модель $\mathcal{M}$ состоит из $D_t = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$, $D_s = W$ — универсума возможных миров; $g : (At \times W) \longmapsto \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ — функция означивания, сопоставляющая атомарным формулам истинностные значения в каждом мире. ⊣

В такой семантике можно определить *универсальную* модальность (146); а поскольку мы привыкли, что $\Diamond\mathsf{A} =_{\text{df}} \neg\Box\neg\mathsf{A}$, можно определить **двойственную** к ней возможность (147).

(146) $$[\![\Box\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w} = \mathbf{1}, \text{ е. т. е. } \forall v\big(v \in W \Rightarrow [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v} = \mathbf{1}\big)$$

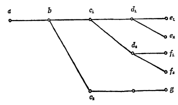
(147) $$[\![\Diamond\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w} = \mathbf{1}, \text{ е. т. е. } \exists v\big(v \in W \ \&\ [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v} = \mathbf{1}\big)$$

Такая модальность выдаёт **1** либо во всех мирах, либо ни в каком вне зависимости от того, из какого мира оценивается истинность формулы. Но

> Sometimes the truth of modal propositions does... vary with contingent properties of the world, and Leibniz' semantics [(146)] is not able to predict this correctly. — Kupffer 2015

Пример 15 (номологический)**.** В мире w_1 физические константы допускают возможность существования звёзд в 1000 раз массивнее Солнца (даже если их в этом мире нет), но при других физических константах, в мире w_2, такой возможности нет. ⊣

Пример 16 (временной)**.** В 1941 году Япония могла избежать тяжёлого поражения, но с течением времени такое развитие событий перестало быть возможным. В июле 1945 года можно было, капитулировав, избежать атомной бомбардировки, но 7 августа такой возможности уже не было (начало события было в прошлом). ⊣



Пример 17 (эпистемический)**.** В нашем мире Вася не знает теоремы Пифагора, но в альтернативном мире, где ему не купили PS5, он её знает. ⊣

Выделение множества миров по набору высказываний (модальной базе) позволяет сделать модальность неуниверсальной: изменение базы поменяет соответствующее ей множество миров, а отсюда и истинность модальных формул.

(148) $$[\![\Box \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w} = \mathbf{1},\ \text{е. т. е. } \forall v \big(v \in \bigcap_{\mathsf{C}_i \in M} |\mathsf{C}_i| \Rightarrow [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v} = \mathbf{1}\big)$$

8.2.2 С отношением достижимости

Реляционные. Другой способ получить неуниверсальную модальность — сделать множество альтернативных миров относительным для данного мира. Kripke (1963) предложил трактовать необходимость в w как истинность в мирах из некоторого подмножества $S \subseteq W$, вычисляемого как функция от w; тогда

- в разных мирах могут быть истинны разные необходимости и возможности;
- в модели могут сосуществовать модальности, соотносимые с разными $S(w)$.

С. Крипке использовал бинарное отношение между мирами — **отношение достижимости**. accessibility relation

Определение 26. Фреймом (структурой) называется $F = \langle W, R \rangle$, где W — универсум возможных миров, а $R \subseteq (W \times W)$ — отношение достижимости. ⊣ может быть несколько R_i

Определение 27. Модель $\mathcal{M}$ состоит из D_t и фрейма F; $g : (At \times W) \longmapsto \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ — функция означивания, сопоставляющая атомарным формулам значения в каждом мире. ⊣

(149) $$[\![\Box \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w} = \mathbf{1},\ \text{е. т. е. } \forall v \in \{u \mid R(w,u)\}\big([\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v} = \mathbf{1}\big)$$ ①

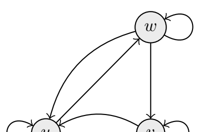
Если строить семантику, в которой значением формулы является пропозиция (множество миров), а истинность A в w определяется как $w \in [\![\mathsf{A}]\!]$, семантика оказывается аналогична семантике ∀ при композициональной трактовке кванторов; ср. $R(w,v)$ и $g' \sim_{\mathsf{x}} g$,

(150) $$[\![\Box \mathsf{A}]\!] = \big\{w \mid \forall v\big(R(w,v) \Rightarrow v \in [\![\mathsf{A}]\!]\big)\big\} \text{ и } [\![\forall \mathsf{x} \mathsf{A}]\!] = \big\{g \mid \forall g'\big(g' \sim_{\mathsf{x}} g \Rightarrow g \in [\![\mathsf{A}]\!]\big)\big\}$$

R привлекательно тем, что позволяет манипулировать истинностью некоторых модальных формул во всех мирах фрейма вне зависимости от g. Сама «топология» фрейма делает некоторые высказывания истинными или ложными (хотя бывает, что такая формула выполняется без соответствующего свойства фрейма; ②). изучается *теорией соответствия* (Benthem 2001)

Refl	$\forall w(wRw)$	**T** : □A → A
Antirefl	$\forall w(\neg wRw)$	—
Sym	$\forall w \forall v(wRv \to vRw)$	**B** : A → □◇A
Trans	$\forall w \forall v \forall u((wRv \wedge vRu) \to wRu)$	**4** : □A → □□A
Seri	$\forall w \exists v(wRv)$	**D** : □A → ◇A
Eucl	$\forall w \forall v \forall u((wRv \wedge wRu) \to vRu)$	**5** : ◇A → □◇A
Conn	$\forall w \forall v \forall u((wRv \wedge wRu) \to (vRu \vee uRv))$	**G** : □(□A → B) ∨ □(□B → A)

Benthem 2001, Kaufmann, Condoravdi, Harizanov 2006: 86



На языке $\mathcal{PML}$ можно сказать «меньше», чем на языке $\mathcal{FOL}$, даже собственно о модальных фреймах (ср. антирефлексивность выше). Язык $\mathcal{PML}$ эквивалентен по выразительной силе фрагменту языка первого порядка, содержащему из констант лишь предикат '_ достижим из _' и одноместные предикаты (на мирах), соответствующие атомарным формулам $\mathcal{PML}$, с ограничением на «расстояние» между квантором и связываемыми им переменными (ср. «стандартный перевод», Benthem 1983: 39):

(151) $\langle\!\langle \Box(s \vee \Diamond(p \wedge q)) \rangle\!\rangle^{@} = \forall w \big(R(w, @) \rightarrow \big(S(w) \vee \exists v \big(R(v, w) \wedge (P(v) \wedge Q(v))\big)\big)\big)$

Мы будем использовать только реляционные семантики и уже среди них проводить дальнейшие разграничения (например, по способу кросс-идентификации индивидов в $\mathcal{FOML}$).

Окрестностные. Дедуктивные способности реальных агентов несовершенны; даже компьютеру может понадобиться недопустимо долгое время для какого-нибудь вывода.

Пример 18. Если я знаю аксиомы Евклида и их достаточно (аксиомы характеризуют именно те миры, где истинны интересующие нас теоремы), почему я с трудом понимаю некоторые теоремы? Ведь я располагаю всем необходимым знанием, т. е. правильно располагаю себя в логическом пространстве. ⊣

Реляционная семантика неспособна это моделировать, поэтому в ней ошибочно предсказывается тождественная ложность ③

(152) Вася знает аксиомы Евклида, но не знает, что $S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Изменим определение R так, что теперь оно связывает мир w не с множеством миров $S \subseteq W$, а с множеством множеств миров $S \subseteq \wp(W)$. Pacuit 2014

(153) $$[\![\Box \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w} = \mathbf{1}, \text{ е. т. е. } [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} \in R(w)$$

С таким определением совместимо, что $\Box\mathsf{A}$ и $\mathsf{A} \vDash \mathsf{B}$, но $\neg\Box\mathsf{B}$.

Но эквивалентные формулы (а не такие, что одна следует из другой, но не наоборот) неразличимы даже для этой семантики. Можно разве что использовать формализм, где само значение высказывания не фиксировано (зависит от мира), — «двумерную семантику». ср. Egré 2014

Поскольку в окрестностных семантиках меньше тавтологий, чем в реляционных, в общем случае относительно них корректны *слабые* дедуктивные системы — те, в которых отсутствуют (в т. ч. как производные)

$$\mathbf{K} : \Box(\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}) \rightarrow (\Box\mathsf{A} \rightarrow \Box\mathsf{B}) \qquad \frac{\mathsf{A}}{\Box\mathsf{A}}\,\text{Nec}\,, \text{ но ср. } \frac{\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}}{\Box\mathsf{A} \leftrightarrow \Box\mathsf{B}}$$

даже если A логически следует из написанного выше в дереве вывода, не факт, что достижима пропозиция $|\Box\mathsf{A}|$

8.3 Язык модальной логики высказываний $\mathcal{PML}$

8.3.1 Синтаксис

Язык логики высказываний $\mathcal{PL}$ расширяется за счёт сентенциальных операторов 'необходимо' и 'возможно':

(154) $$\mathsf{p} \mid \neg\mathsf{A} \mid \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \vee \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B} \mid \Box\mathsf{A} \mid \Diamond\mathsf{B}$$

Как и кванторы, модальности могут входить в сферу действия друг друга, но у них нет индексов, так что не различаются priority scope и binding scope — подформула может интерпретироваться только в мирах, вводимых ближайшим к ней оператором. Ср. $\Diamond p$ и $\exists x P(x)$, $\exists w p_w$. ④

8.3.2 Семантика

Как и в $\mathcal{PL}$, атомарные пропозиции взаимонезависимы. Каждый мир характеризуется *максимально непротиворечивым* множеством формул. Но есть другой класс «фактов» — отношения достижимости между мирами, поэтому два разных мира могут иметь одинаковый набор истинных атомов, но различаться за счёт стрелок R и различий между мирами, куда они ведут;

если миры одинаковы (или даже эквивалентны в более слабом смысле) и в отношении R, то средствами модальной логики они не различимы (состоят в отношении *бисимуляции*); это проявление ограниченности её *выразительной силы* (ср. *синий*, *голубой* $\sim$ *blue*).

Ditmarsch, Hoek, Kooi 2007: 24, i.a.

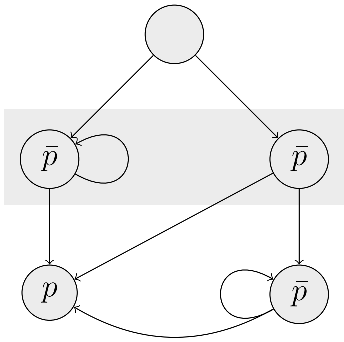


Рис. 20: Миры в сером поле состоят в отношении бисимуляции: значения атомов там одинаковы, а для каждого мира w, достижимого из одного, найдётся мир v, достижимый из другого и бисимулярный w

Синкатегорематическое описание $\Box$, $\Diamond$. Как с кванторами в $\mathcal{FOL}$, можно дать значение формул со старшим знаком — модальным оператором, не давая значения самих операторов.

(155) $[\![\mathsf{p}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$, е. т. е. $g(\mathsf{p}, w) = \mathbf{1}$

(156) $[\![\neg \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{0}$

(157) $[\![\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$, е. т. е. $[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$ и $[\![\mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$

(158) $[\![\Box \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$, е. т. е. $\forall v\big(R(w,v) \Rightarrow [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v,g} = \mathbf{1}\big)$

(159) $[\![\Diamond \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$, е. т. е. $\exists v\big(R(w,v)\ \&\ [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v,g} = \mathbf{1}\big)$

Категорематическое описание $\Box$, $\Diamond$. Можно прямо определять значение модальных операторов. Чтобы их семантика была композиционной, значение формулы представляется как *пропозиция* — множество миров; ср. множества означиваний как значения формул в языке первого порядка (поэтому означивание как параметр $[\![\cdot]\!]$ не нужно). ⑤

(160) $[\![\mathsf{p}]\!]^{\mathcal{M},g} = \{w \mid g(\mathsf{p}, w) = \mathbf{1}\}$

(161) $[\![\neg \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = W \setminus [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g}$

(162) $[\![\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M},g} = [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} \cap [\![\mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M},g}$

(163) $[\![\Box \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \{w \mid \forall w(wRv \Rightarrow v \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g})\}$; $\quad [\![\Box]\!] = \lambda S.\lambda w.\forall v(wRv \Rightarrow S(w) = \mathbf{1})$

(164) $[\![\Diamond \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},g} = \{w \mid \exists w(wRv\ \&\ v \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}})\}$; $\quad [\![\Diamond]\!] = \lambda S.\lambda w.\exists v(wRv\ \&\ S(w) = \mathbf{1})$

см. Ditmarsch, Hoek, Kooi 2007; ⑥⑦⑧⑨

В пропозицию $|\Box\mathsf{A}|$ входят все миры, откуда (не достижимы никакие либо) достижимы только A-миры. Ср. для $\forall$xA: означивания, чьи все x-варианты в A.

8.4 Аналитические таблицы для $\mathcal{PML}$

По аналогии с кванторными правилами для логики первого порядка, где производится выбор индивида, правила для модальных операторов требуют выбора мира, но тут выбор ограничен мирами, достижимыми из того, о котором до данного шага шла речь. Немодальные правила оставляют результат своего применения в том же мире, который был на входе (см. рис. 21). Для замыкания требуется совпадение и формулы, и мира:

в $\mathcal{FOL}$ мы могли бы выбирать $g' : g' \sim_{\mathsf{x}} g$

ср. требование совпадения термов в таблицах для $\mathcal{FOL}$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \ldots w : \mathsf{B} \ldots \;\Big|\; \ldots w : \mathsf{B} \ldots \end{array}$$

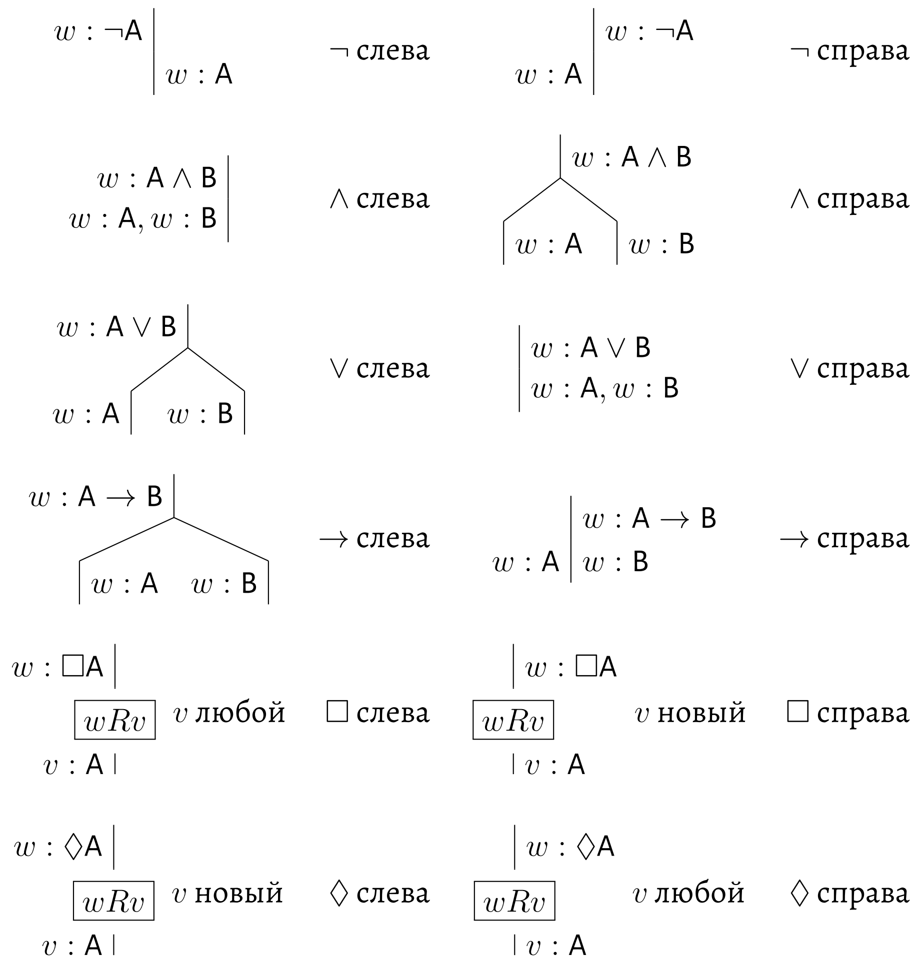
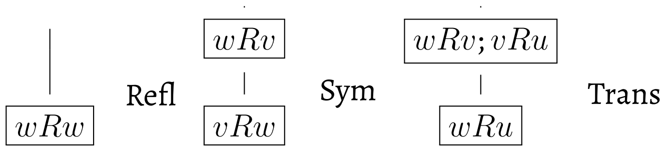


Рис. 21: Правила анализа для модальной логики высказываний

Полученная система эквивалентна аксиоматической без дополнительных аксиом (только пропозициональные и **K**; см. ниже). Добавляя правила, касающиеся отношения достижимости, ⑩ можно получать более сильные системы. Например, добавление трёх следующих правил (нейтральных по отношению к оппозиции «справа — слева») даёт эквивалент системы **KT4B**: ❶



8.5 Дедуктивные системы для $\mathcal{PML}$

8.5.1 Аксиоматические

Поскольку для разных модальностей (и научно-философских воззрений на них) нужны разные ❷ свойства фреймов, адекватные семантикам наборы аксиом имеют модульную архитектуру:

- аксиомы и правила исчисления высказываний (любые, например рис. 6)
- аксиомы для модальности:
  - общая для **нормальных** систем схема **K** : $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$; «тривиализует» окрестностную семантику до реляционной, ср. проблему «логического всеведения» в аспекте примера 18: в нормальных системах следствия необходимого (знаемого) являются автоматически необходимыми (знаемыми)
  - по желанию — иные аксиомы, среди которых

    T $\Box A \to A$ (veridicality, отличающая знание от убеждения)

    4 $\Box A \to \Box\Box A$ (позитивная интроспекция: ‘если знаю, то знаю, что знаю’)

5 $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ (негативная интроспекция: ‘если не знаю, то знаю, что не знаю’) ❸
B $A \to \Box_F\Diamond_P A$; $A \to \Box_P\Diamond_F A$ (в версии бимодальной системы — временнóй)

- *правило Гёделя* (necessitation) Nec (в дополнение к MP):

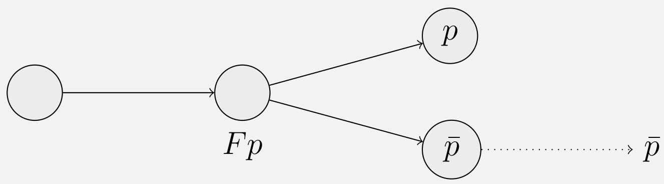
$$\frac{A}{\Box A}\ \text{Nec}$$

На применение Nec нет ограничений, но и без того ввиду определения вывода в аксиоматической системе его посылка не может появиться в аксиоматическом выводе случайно и является или аксиомой (подстановкой в схему), или ранее доказанной формулой, или осознанно сделанным допущением (но его придётся трактовать как универсально истинное). Ввиду Nec все тавтологии автоматически необходимы (известны, обязательны…) — ещё одна составляющая нормальности системы ❹

не в каком-то конкретном мире, как ниже в натуральном исчислении с метками миров

Философские причины выбора аксиом: ветвится ли время?

По Аристотелю (*De int.* 19a), «завтра морское сражение необходимо будет или не будет, но это не значит, что завтра морское сражение необходимо будет или что оно необходимо не произойдёт». Этому соответствуют модели *ветвящегося* (вперёд) времени, где может не выполняться аксиомная схема линейного будущего $\Diamond_P\Diamond_F A \to (\Diamond_P A \vee (A \vee \Diamond_F A))$ (Rescher, Urquhart 1971: 90).



$\Diamond_P\Diamond_F p; \neg(\Diamond_P p \vee (p \vee \Diamond_F p))$

8.5.2 Натуральные

Тоже строятся модульно: все правила натурального исчисления для $\mathcal{PL}$ и правила введения и удаления для $\Box$ и $\Diamond$, аналогичные правилам для $\forall$ и $\exists$ в исчислении для $\mathcal{FOL}$ (только ограниченные достижимыми мирами).
В отличие от $\mathcal{FOL}$, формула не может содержать свободных переменных, «оставшихся от» снятых кванторов. Чтобы указать зависимость значения формулы от выбора мира, можно, как и в аналитических таблицах, ввести в исчисление метки миров, вводимые в рассмотрение декларациями достижимости типа wRv.
Формула в выводе трактуется как истинная в том мире, чей индекс ей сопутствует, но не обязательно во всех мирах. Поэтому применять аналог Nec нет оснований, как и применять В$\forall$ к произвольной свободной переменной:

Basin, Matthews, Viganò 1997; ср. аналитические таблицы

Negri 2011: «modal logic has a context-dependent rule (the rule of necessitation) that cannot be applied to arbitrary derivations»

$$* \frac{\dfrac{\exists x P(x)}{P(t)}}{\forall y P(y)} \quad \text{OK} \frac{\dfrac{\exists x P(x)}{P(t)}}{\exists y P(y)} \qquad * \frac{p : v \qquad uRv}{\Box p : u} \quad \text{OK} \frac{p : v \qquad uRv}{\Diamond p : u}$$

В логике предикатов правило В$\forall$ позволяет ввести всеобщность, если терм строкой выше был на самом деле произвольным (получен с помощью У$\forall$). Идею «настоящей» произвольности можно распространить на выбор мира (рис. 22).
Тем, что в В$\Box$ и У$\Diamond$ требуется, чтобы утверждения о достижимости были допущениями и чтобы v не встречался в других ветвях, сходящихся к точке применения правила, обеспечивается новизна v (к тому же $v \neq w$). ❺

8.6 Между модальной логикой высказываний и логикой предикатов

Теория соответствия предполагает, что $W = D_s$ устроен по существу так же, как D_e: пропозиции — свойства/множества миров, R_i в смысле реляционной семантики — двуместные отно-

$$\begin{array}{c}[wRv]\\ \vdots\\ \dfrac{v : \mathsf{A}}{w : \Box\mathsf{A}}\ \text{В}\Box\end{array} \qquad\qquad \dfrac{w : \Box\mathsf{A} \qquad wRv}{v : \mathsf{A}}\ \text{У}\Box$$

$$\dfrac{v : \mathsf{A} \qquad wRv}{w : \Diamond\mathsf{A}}\ \text{В}\Diamond \qquad\qquad \dfrac{w : \Diamond\mathsf{A} \qquad \begin{array}{c}[v : \mathsf{A}] \quad [wRv]\\ \ddots \quad \vdots\\ u : \mathsf{B}\end{array}}{u : \mathsf{B}}\ \text{У}\Diamond$$

$$\dfrac{}{wRw}\ \text{Refl} \qquad \dfrac{wRv}{vRw}\ \text{Sym} \qquad \dfrac{wRv \qquad vRu}{wRu}\ \text{Trans}$$

Рис. 22: Правила вывода для модальных операторов в модальном натуральном исчислении высказываний = натуральном исчислении для $\mathcal{MPL}$ (Basin, Matthews, Viganò 1997)

шения между мирами. В «стандартном переводе» $\mathcal{PML}$ на $\mathcal{FOL}$ роль «тут» выполняет индекс мира у функции перевода (151).
В таких переводах нет более чем двуместных отношений (используются свойства миров и R_i) и любая переменная по мирам, не связанная ближайшим квантором, связана следующим по счёту. Поэтому для переводов с $\mathcal{PML}$ достаточно фрагмента $\mathcal{FOL}$ с двумя переменными. В $\mathcal{FOL}$ есть формулы, не эквивалентные никаким формулам с (одной или) двумя переменными, поэтому $\mathcal{FOL}$ более выразительный, чем $\mathcal{PML}$.

Мы видели, что на языке $\mathcal{PML}$ не выразить иррефлексивность фрейма. Аналогично, для нескольких модальностей $\mathcal{PML}$ не может выразить, что одно R является пересечением двух других R_i, R_j, т. к. это утверждение неотличимо от более слабого — в нём три $\Diamond$ могут соответствовать разным путям на фрейме (Areces, Cate 2007: 828).

(165) $$\Diamond_R\mathsf{A} \to (\Diamond_{R_i}\mathsf{A} \wedge \Diamond_{R_j}\mathsf{A})$$

Искомое соотношение легко выразить в $\mathcal{FOL}$:

(166) $$\forall x(\exists y(xRy) \leftrightarrow \exists z(xR_iz \wedge xR_jz))$$

Чтобы выразить иррефлексивность, можно добавить квантификацию по мирам ('для любого w : w недостижим из w'), но для этого необязательно переходить к полной выразительной силе $\mathcal{FOL}$: можно добавить т. н. «номиналы» — переменные, которым означивание сопоставляет не **1** или **0**, а мир. Тогда будут формулы, истинные в единственном мире. Получится **гибридная логика** (Braüner 2022), в которой можно определить и квантификацию по номиналам — т. е. производным образом по мирам.

(167) $$[\![\mathsf{p}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}\text{, е. т. е. } g(\mathsf{p}, w) = \mathbf{1}$$

(168) $$[\![\mathsf{a}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}\text{, е. т. е. } g(\mathsf{a}) = w$$

(169) $$[\![\forall\mathsf{a}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}\text{, е. т. е. } \forall g' \sim_{\mathsf{a}} g : [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g'} = \mathbf{1}$$

Тогда иррефлексивность выразима как $\forall a(a \to \neg\Diamond a)$ ($\Diamond a$ не может быть истинно в силу достижимости другого мира, где a, т. к. такой мир единствен по (168)).

Если столь ограниченного языка достаточно для описания какой-то предметной области (т. е. уже какого-то D_e со свойствами и отношениями на нём), для её описания используют **дескрипционные логики** — языки вида

(170) $$\mathsf{Prop} ::= \mathsf{p} \mid \neg\mathsf{Prop} \mid \mathsf{Prop}_1 \sqcap \mathsf{Prop}_2 \mid \mathsf{Prop}_1 \sqcup \mathsf{Prop}_2 \mid \exists\mathsf{rel}.\mathsf{Prop} \mid \forall\mathsf{rel}.\mathsf{Prop}$$

се эти формулы одной категории и неформально понимаются как имена классов индивидов:

которые суть p; которые суть $\mathsf{Prop}_1 \sqcap \mathsf{Prop}_2$ (т. е. одновременно Prop_1 и Prop_2); которые суть $\forall$rel.Prop (т. е. чьи все rel-реляты суть Prop); и т. д. ❻

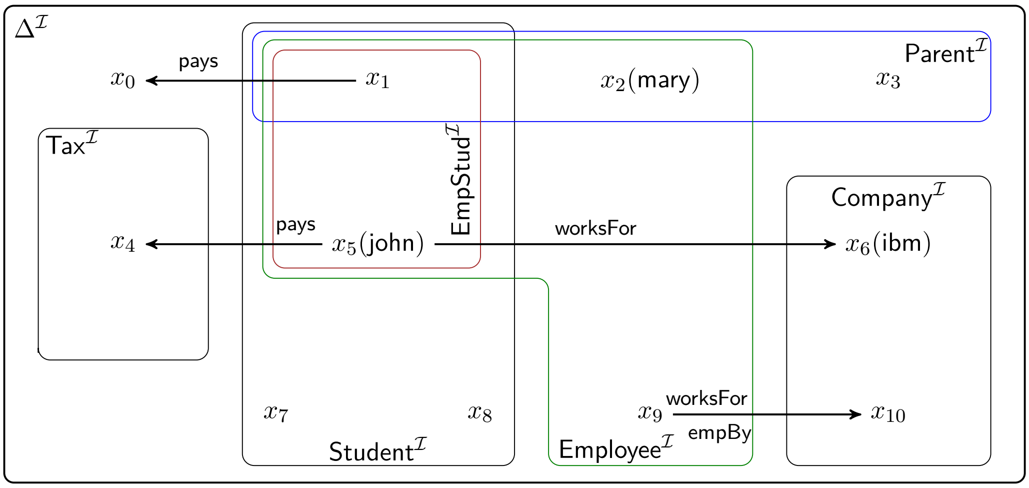


Рис. 23: Пример модели с индивидами, для описания которой достаточно выразительной силы дескрипционной логики (Varzinczak 2019). Ср. индивиды с мирами, классы индивидов с пропозициями, стрелки отношений с инстанциями разных R_i

8.7 Модальная логика и информационная динамика

Если модальность трактуется эпистемически или доксастически, $R_i(w)$ можно понимать и как информационную **неопределённость** агента i — невозможность для него точнее указать мир, в котором он находится. В случае знания, в отличие от убеждения, $@ \in R_i(w)$; ср. $\mathbf{T} : \Box \mathsf{A} \to \mathsf{A}$. Можно построить формализованный язык, описывающий изменение информационного состояния в зависимости от оглашения той или иной информации, — язык динамической эпистемической (или доксастической) логики.

public announcement

(171) $$\mathsf{p} \mid \neg\mathsf{A} \mid \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \vee \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \to \mathsf{B} \mid \Box_i \mathsf{A} \mid [\mathsf{B}!]\mathsf{A}$$

Формула, чей внешний знак — оператор оглашения, истинна в $\mathcal{M}, w, g$, если без оператора она истинна в $\mathcal{M}$, откуда удалены не выполняющие анонсированную формулу миры, и w, g:

Ditmarsch, Hoek, Kooi 2007

(172) $$[\![[\mathsf{B}!]\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w} = \mathbf{1}, \text{ е. т. е. } [\![\mathsf{B}]\!]^{\mathcal{M},w} = \mathbf{0} \text{ или } [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}',w} = \mathbf{1}, \quad W_{\mathcal{M}'} = W_{\mathcal{M}} \setminus |\mathsf{B}|$$

Эпистемическая/доксастическая и динамическая модальности связаны:
$[\mathsf{B}]\Box_i\mathsf{A} \leftrightarrow (\mathsf{B} \to \Box_i[\mathsf{B}]\mathsf{A})$ если $\Box_i$ понимается как знание
$[\mathsf{B}]\Box_i\mathsf{A} \leftrightarrow \Box_i(\mathsf{B} \to [\mathsf{B}]\mathsf{A})$ если $\Box_i$ понимается как убеждение
Оглашение изображается как удаление миров из фрейма; истинность формул в выделенном (понимаемом как действительный) мире можно оценить, пользуясь стрелками R_i, ведущих к оставшимся мирам.

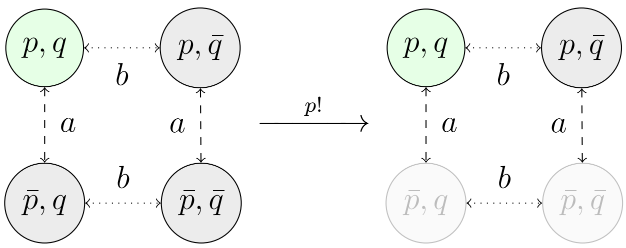


Рис. 24: Оглашение p, после которого агент a (но не агент b) в выделенном мире будет знать, что $p \wedge q$, хотя не знал этого ранее: в исходной модели $[\![[p!]\Box_a(p \wedge q)]\!]^{\mathcal{M},\bullet} = \mathbf{1}$

Вопросы и задания

① Определите $[\![\Diamond A]\!]$ в реляционной семантике.

② Покажите, что фрейм может не быть рефлексивным, даже если выполняет **T**.

③ Объясните, почему (152) будет всегда ложно в реляционной семантике.

④ Достаточно ли инвентаря синтаксических категорий, введённого ранее?

⑤ Почему нет индекса мира у функции интерпретации?

⑥ Какой семантический тип имеет S?

⑦ Опишите категорематически семантику $\vee$, $\to$.

⑧ В каких мирах фрейма выполняются формулы?

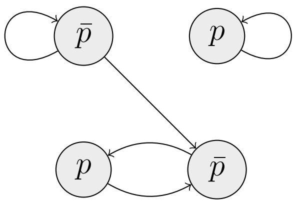
(a) $\Box p$

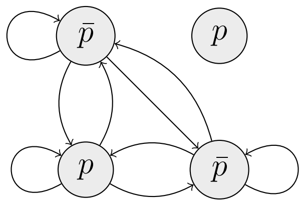
(b) $\Box\neg p$

(c) $\Diamond\neg p$

(d) $\Box\Box p$

(e) $\Box\Diamond p$





⑨ Постройте фрейм, в некоторых (но не всех) мирах которого выполнялись бы формулы:

(a) $\Box q$;

(b) $\Diamond(q \wedge \Box p)$;

(c) $\Box(\Box p \to q)$.

⑩ Продемонстрируйте логическую истинность с помощью аналитической таблицы, соответствующей системе **K**: Fitting, Mendelsohn 1998: 51, 55

(a) $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$

(b) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

(c) $(\Box p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q)$

(d) $(\Box\Diamond p \wedge \Diamond\Diamond q) \to \Box\Diamond(p \wedge q)$

❶ Продемонстрируйте логическую истинность с помощью аналитической таблицы с Refl, Sym и Trans, соответствующей модальной системе **KT4B** $=$ **S5**:

(a) $\Diamond(p \to \Box p)$

(b) $\Box p \vee \Box(\Box p \to q)$

(c) $\Diamond(p \wedge \Box q) \leftrightarrow (\Diamond p \wedge \Box q)$

❷ Вспомните определения дедуктивной системы, её адекватности (относительно модели или класса моделей), вывода и доказательства.

❸ Где отрицание ('не знаю') в записи аксиомы негативной интроспекции?

❹ Покажите, что в системе со снятием допущений (в натуральном исчислении) неограниченное применение Nec приводило бы к абсурдным выводам. Поведение какого правила в естественном выводе для логики первого порядка это напоминает?

❺ Докажите в модальном натуральном исчислении высказываний формулы, чью истинность вы демонстрировали с помощью аналитических таблиц выше.

❻ В каких точках (для каких индивидов) в модели на рис. 23 истинна формула

(173) $$\exists\text{worksFor.Company} \sqcup \forall\text{pays}(\text{Tax} \sqcup \neg\text{Student})?$$

9 Модальная логика первого порядка

Мы построим расширение языка $\mathcal{FOL}$ за счёт модальностей $\Box$, $\Diamond$. Это приводит к семантическим проблемам (и делается отчасти для их прояснения и решения), поскольку интерпретация термов может быть различной в разных мирах.

9.1 Проблемы референции и квантификации в модальных контекстах

9.1.1 Модальность *de dicto* и *de re*

Что характеризуют, чему приписываются модальные свойства типа ‘быть возможным’, ‘быть необходимым’? Quine (1966 [1953]) рассматривает варианты:

пропозиции как индивиду: пропозиция называется собственным именем (174) или именем, получаемым продуктивно — помещением в кавычки формулировки пропозиции (175)

(174) Теорема Пифагора необходима [= необходимо истинна].

(175) «В любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов» — необходимая пропозиция.

Тогда модальный предикат не отличается от обычных предикатов на индивидах, а индивид, которому он приписывается, может быть назван любым из своих имён *salva veritate* (т. е. (174) и (175) эквивалентны); в этом случае нужно считать, что пропозиции ‘что Утренняя Звезда светит’ и ‘что Вечерняя Звезда светит’ — одна и та же пропозиция (неважно, какое из синонимичных имён используется), а пропозиции ‘что самая населённая страна мира находится в Азии’ и ‘что вторая экономика мира находится в Азии’, видимо, различны.

Напоминает метаязыковые предикаты, сказываемые о формулах, но не внутри формул (в одном формализованном языке во избежание парадокса не говорят ‘ложно, что ложно…’) см. §2.2

пропозиции как таковой: формулировка пропозиции не «упоминается» в кавычках, а используется (так что в ней тоже могут быть модальные слова), а модальный оператор ведёт себя синтаксически как отрицание или квантор (S/S)

(176) Необходимо, что в любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Здесь замена формулировки пропозиции на экстенсионально эквивалентную ей в общем случае не сохраняет истинность: см. §7.1; ①

(177) Необходимо, что Волга впадает в Каспийское море. $\neq$ (176)

Ситуация отличается от описанной выше тем, что выше мы и не считаем, что имена ‘что в любом прямоугольном… катетов’ и ‘что Волга впадает в Каспийское море’ эквивалентны, а здесь истинностные значения (экстенсионалы) придаточных одинаковы, т. е. значение-экстенсионал (176) зависит не от экстенсионала придаточного!

свойству или отношению: наряду со свойством ‘бежать’ рассматриваются ‘с необходимостью бежать’ (т. е. ‘быть таким, который во всех достижимых по данному R мирах бежит’) и ‘возможно, бежать’ и т. п.

(178) В любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы необходимо равен сумме квадратов катетов.

Отличие от предыдущего варианта в том, что только при такой трактовке модальности можно связать переменную внутри модального контекста квантором, находящимся снаружи:

(179) Каждое живое существо с необходимостью является открытой системой.
‘Каждый из существующих в @… таков, что во всех R-достижимых из @ мирах w он…’
#‘Во всех R-достижимых из @ мирах w каждый из существующих в w…’

Этот случай не охватывается предыдущими трактовками:

- в (179) не квантификация внутрь **имени** пропозиции: если «x есть P» — имя пропозиции, то значение/референт x (внеязыковой объект) не участвует в вычислении значения этого имени (участвует сам символ x). Петя не выполняет свойство ‘«_» содержит четыре буквы’
- в (179) не квантификация по индивидам внутрь **пропозиции**: окажется, что экстенсионально эквивалентные (кореферентные в @) имена в общем случае невзаимозаменимы в таких контекстах, так что истинность приписывания свойства P индивиду a зависит от «способа обозначения» a, выбранного, чтобы отослать к нему.

(180) a. 2^3 с необходимостью чётно.
b. Число планет в Солнечной системе с необходимостью чётно.

В (180) значение предложения зависит от интенсионала подлежащего, а не от его экстенсионала; но подлежащее (с виду) не находится в сфере действия модального слова. Откуда мы знаем, в каких контекстах вместо экстенсионала выражения нужно брать его интенсионал (или экстенсионал, но в других мирах), чтобы соединить со значением его синтаксической сестры? Угроза для **композициональности**

похоже на проблему «переозначиваний» в синкатегорематической семантике кванторов в $\mathcal{FOL}$

Под влиянием примеров типа (180) (и своих бихевиористских взглядов) Куайн предпочитал вообще избегать интенсионалов. Но часть проблемы связана с отсутствием в его формализованных языках способа показать, что такие примеры содержат неоднозначность сферы действия; у нас есть λ, а на $\mathcal{FOML}^{\lambda}$ эти значения переводятся по-разному:

(181) a. Первооткрыватели радиации с необходимостью сильно рисковали.
естественно понять как $\Box\big([\lambda x.P(x)](t)\big)$ 'во всех w, $@Rw$: $t_{\langle s,e\rangle}(w)$ есть P в w' (*de dicto*)

b. Первооткрыватели радиации с необходимостью родились в XIX в.
естественно — $\big[\lambda x.\Box P(x)\big](t)$ 'для $t_{\langle s,e\rangle}(@)/t_e$: во всех w, $@Rw$: он есть P в w' (*de re*)

9.1.2 Тождество индивидов от мира к миру

Часто считается, что можно говорить о данном индивиде в нескольких мирах (как с ним обстоят дела в мире w, в мире w' и т. д., например что было бы с ним, случись то или это). Формула $\big[\lambda x.\Box P(x)\big](t)$ выше предполагает такую возможность. Как представить себе существование одной и той же вещи в разных мирах (даже и в разные моменты времени)?

> We are accustomed to think of a man apart from his duration. When I portrayed "Myself" in Fig. 2, you were for the moment surprised that I should include my boyhood and old age. But to think of a man without his duration is just as abstract as to think of a man without his inside. Abstractions are useful, and a man without his inside (that is to say, a *surface*) is a well-known geometrical conception. But we ought to realise what is an abstraction and what is not. The "four-dimensional worms" introduced in this chapter seem to many people terribly abstract. Not at all; they are unfamiliar conceptions but not abstract conceptions. It is the section of the worm (the man Now) which is an abstraction. — Eddington 1929: 53

Две философские позиции:

Lewis 1968; 1986: *модальный реализм* — возможные миры в каком-то смысле существуют (мы живём в одном из них); в силу максимальности миры не пересекаются; поэтому нельзя представить себе существование одного и того же объекта в разных мирах. Кроме того, такой объект в отрыве от миров был бы не вполне либо противоречиво охарактеризован (большой я или маленький, если здесь/сегодня я большой, а там/вчера был маленький)

Kripke 1980: миры не даны, а возникают «по построению»; можно указать на объект(ы) и представить, что с ним(и) было бы при альтернативном положении дел. Проблема тождества в таком случае не возникает

Почему это волнует лингвиста-семантиста? Есть высказывания на естественном языке, для анализа значения которых тождество индивида (рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение) оказывается слишком сильным требованием.

Пример 19 (алетический)**.** Можно представить ситуацию, в которой яйцеклетка вместо меня породила бы пару близнецов. ⊣

Hintikka, Sandu 1995: 271

(182) Я мог бы быть парой близнецов. $я = я_1,\ я = я_2 \Rightarrow я_1 = я_2$?!

Пример 20 (временной)**.** Из Берлина выходит поезд и в Хамме делится на поезд до Дюссельдорфа и поезд до Кёльна. Оба преемственны по отношению к вышедшему из Берлина; странно говорить, что его маршрут закончился в Хамме. ⊣

Schwarz 2014

(183)
$$\frac{\text{Поезд, вышедший из Берлина, направится в Дюссельдорф} \qquad \text{Поезд, вышедший из Берлина, направится в Кёльн}}{\text{Поезд, который направится в Дюссельдорф, направится в Кёльн}}\ ??$$

Пример 21 (доксастический; «двойное знакомство» = *double vision*). Ральф встречает Орткатта дваждны: на пляже и в кутузке, — но не знает, что это один и тот же человек. Он думает: «Тот, кого я встретил в кутузке, — шпион»; «Тот, кого я встретил на пляже, не шпион». ⊣ Quine 1956

Одному индивиду в нашем мире соответствуют два в мирах — доксастических альтернативах Ральфа, не тождественных друг другу.

(184) a. Ральф думает, что Орткатт — шпион.
 b. Об Орткатте Ральф думает, что он шпион.

(185) a. Ральф думает, что Орткатт не шпион.
 b. Об Орткатте Ральф думает, что он не шпион.

> Иногда жалуются, что тождество недостаточно гибко (ср. негибкую универсальную модальность vs. R, §8.2), чтобы отразить разные способы идентификации индивидов («с этой точки зрения a в w больше похож на b в v, с той — на d в v»).

Lewis (1968): заменим тождество более слабым отношением 'быть **двойником**'; таких отношений при достаточно широком их понимании может быть больше одного. *counterpart*

Отношение двойничества не обязательно симметрично или транзитивно: в (182) оба близнеца мне двойники, но я не могу быть двойником никому из них (обоим не могу, а одного не выбрать); транзитивность нарушится, если a и b, b и c достаточно сходны, а a и b уже нет.

но принять двоих людей за одного — два оригинала у одного двойника?

Определение 28 (двойники по Льюису). Индивид b в мире v является двойником индивида a в мире w, е. т. е.

(a) качественное сходство b с a больше, чем у b с каким-либо $d \neq a$ из w, и

(b) качественное сходство b с a превышает некоторый порог сходства ϑ. ⊣ ②

Для вычисления качественного сходства могут использоваться все свойства, а могут только некоторые и даже единственное свойство (например, то, через которое Ральф идентифицирует Орткатта). Двойничество можно и просто постулировать (Льюис не стал бы: если двойничество оторвано от свойств, то некоторые два мира могут различаться не свойствами, а только тем, кто чей двойник). Lewis 1983

> In W[3] Adam lives for 932 years and Noah for 948. Then moving from one possible world to another, but keeping our fingers, so to speak, on the same two entities, we arrive at a world in which Noah lives for 930 years and Adam for 950. In that world, therefore, Noah has the age that Adam has in this one, and Adam has the age that Noah has in this one; the Adam and Noah that we started with might thus be said to have exchanged their ages. Now let us continue on to still other possible worlds and allow them to exchange still other properties. We will imagine a possible world in which they have exchanged… the first letters of their names, then one in which they have exchanged the second, then one in which they have exchanged the fourth, with the result that Adam in this new possible world will be called "Noah" and Noah "Adam." Proceeding in this way, we arrive finally at a possible world W^n which would seem to be exactly like our present world W^1, except for the fact that the Adam of W^n may be traced back to the Noah of W^1 and the Noah of W^n may be traced back to the Adam of W^1. — Chisholm 1967

> **Кросс-идентификация для неиндивидов?**
>
> Для экстенсионалов свойств и отношений функцию отождествления от мира к миру выполняет интенсионал (Armstrong 1989: 25–26): без него неясно, почему несовпадающие от мира к миру экстенсионалы называются одним словом типа *синий* или *бежать* и что делать со свойствами, чей экстенсионал в данном мире одинаков.
> Baron (2015) предлагает двойники для свойств и пропозиций как подход к различным разновидностям *de re*.

Bob is new to Boston. He's not familiar with the city or even its sports teams. He calls Mary while on tour, and we're with Mary. He walks by the Prudential Center, and sees the building light up—the lit windows show 'GO SOX!' He says to Mary, 'The Prudential Center says "GO SOX!"' even though he has no idea what that means. Mary knows that this only happens when the Red Sox win a game, and, knowing that we are avid baseball fans, Mary says...

(186) Bob said that the Red Sox won a game!

Egré (2014) объясняет отсутствие логического всеведения тем, что в доксастических альтернативах есть двойники пропозиций, убеждённость в которых приписывается:

(187) Peter believes that if it's raining, it's cold, but does not believe that if it's not cold, it's not raining.

9.2 Синтаксис $\mathcal{FOML}$

Можно думать о языке $\mathcal{FOML}$ как об обогащении $\mathcal{FOL}$ модальными операторами $\Box, \Diamond$ или как об обогащении $\mathcal{PML}$ предикатами, термами и квантификацией. по-английски часто *quantified modal logic*

(188) $$\mathsf{t} ::= \mathsf{a} \mid \mathsf{x} \mid \mathsf{f}^n(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)$$

(189) $$\mathsf{A} ::= \mathsf{P}^n(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n) \mid \neg\mathsf{A} \mid \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \vee \mathsf{B} \mid \mathsf{A} \to \mathsf{B} \mid \Box\mathsf{A} \mid \Diamond\mathsf{A} \mid \forall\mathsf{x}\mathsf{A} \mid \exists\mathsf{x}\mathsf{A}$$

Хотя $\forall\mathsf{x}\forall\mathsf{y}\mathsf{A} \leftrightarrow \Box\forall\mathsf{y}\forall\mathsf{x}\mathsf{A}$ и семантически $\Box$ похож на $\forall$, а $\Diamond$ на $\exists$, не всегда $\forall\mathsf{x}\Box\mathsf{A} \leftrightarrow \Box\forall\mathsf{x}\mathsf{A}$.

9.3 Семантика $\mathcal{FOML}$

9.3.1 Семантики с кросс-идентификацией через тождество

Семантики различаются в зависимости от того, одинаковый ли домен индивидов признаётся для всех миров или каждый мир имеет свой. Если каждый мир имеет свой домен, кванторы обычно трактуются как перебирающие индивидов в рамках данного мира (*актуалистская* квантификация); при постоянном домене кванторы перебирают все индивиды модели (*поссибилистская* квантификация), с чем естественно сочетается выделенный предикат существования, известный по свободным логикам. Fitting 2004; Fitting, Mendelsohn 1998

Определение 29 (модель с переменным доменом)**.** Модель — $\mathcal{M} = \langle F, D, Inh, \mathcal{I}\rangle$, где $F = \langle W, R\rangle$ — фрейм, D — (общий) домен индивидов, $Inh : W \longmapsto \wp D$, а $\mathcal{I} : Const \times W \longmapsto \wp D^n$ — функция интерпретации нелогических констант. ⊣

Здесь интерпретация констант = словарь $\mathcal{I}$, в т. ч. термов, зависит от мира, но означивание переменных g не зависит от мира. Inh сопоставляет каждому миру подмножество D, рассматриваемое как множество существующих в этом мире индивидов.

(190) $$[\![\forall\mathsf{x}\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}, \text{ е. т. е. для всех } g' \sim_{\mathsf{x}} g : \text{ если } g'(x) \in D_w, \text{ то } [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g'} = \mathbf{1}$$

Пробег квантора в данном w составляют существующие в w индивиды. Рассматриваются только такие g', которые сопоставляют x индивиды из D_w.

Переменность домена можно ограничить, потребовав определённого соотношения доменов ② w и v в случае wRv: ③

монотонность: $wRv \Rightarrow D_w \subseteq D_v$; тогда на фрейме выполняются все подстановки в *обратную схему Баркан*

дальняя аналогия — семантика интуиционистской логики с мирами, где g_i связаны с $\leq$

(191) $$\Box\forall\mathsf{x}\mathsf{A} \to \forall\mathsf{x}\Box\mathsf{A}$$

антимонотонность: $wRv \Rightarrow D_w \supseteq D_v$; *схема Баркан*

(192) $$\forall\mathsf{x}\Box\mathsf{A} \to \Box\forall\mathsf{x}\mathsf{A}$$

Выполнение обоих свойств вместе означает постоянный домен.

Определение 30 (модель с постоянным доменом). Модель — $\mathcal{M} = \langle F, D, \mathcal{I}\rangle$, где $F = \langle W, R\rangle$ — фрейм, D — домен индивидов, а $\mathcal{I} : Const \times W \longmapsto \wp D^n$ — функция интерпретации нелогических констант. ⊣

(193) $$[\![\forall \mathsf{x} \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}, \text{ е. т. е. для всех } g' \sim_{\mathsf{x}} g : [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g'} = \mathbf{1}$$

Категорематическая семантика модальности (и кванторов); ср. Kupffer 2015

Можно положить, что формулы обозначают пропозиции (множества миров; ④).

(194) $$[\![\mathsf{P}^n(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \{w \mid \mathcal{I}_w(\mathsf{P}^n)([\![\mathsf{t}_1]\!]^{\mathcal{M},w,g}, \ldots, [\![\mathsf{t}_n]\!]^{\mathcal{M},w,g}) = \mathbf{1}\}$$

(195) $$[\![\Box \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \{w \mid \forall v (wRv \Rightarrow v \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v,g})\}$$

(196) $$[\![\forall \mathsf{x} \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \{w \mid \text{для всех } o \in D_w : w \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g[\mathsf{x} \longmapsto o]}\} = \bigcap_{o \in D_w} [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g[\mathsf{x} \longmapsto o]}$$

Чтобы трактовать категорематически и кванторы, обобщим понятие пропозиции: будем считать, что значение формулы — множество пар $\langle$мир, означивание$\rangle$ (⑤):

	w_1	w_2	w_3	…
g_1	−	+	+	
g_2	+	−	+	
g_3	−	+	−	
⋮				

$$[\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = \{\ \langle w_2, g_1\rangle, \langle w_3, g_1\rangle, \langle w_1, g_2\rangle, \langle w_3, g_2\rangle, \langle w_2, g_3\rangle, \ldots\ \}$$

(197) $$[\![\mathsf{P}^n(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)]\!]^{\mathcal{M}} = \{\langle w, g\rangle \mid \mathcal{I}_w(\mathsf{P}^n)([\![\mathsf{t}_1]\!]^{\mathcal{M},w,g}, \ldots, [\![\mathsf{t}_n]\!]^{\mathcal{M},w,g}) = \mathbf{1}\}$$

(198) $$[\![\Box \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = \{\langle w, g\rangle \mid \text{для всех } v, wRv : \langle v, g\rangle \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}\}$$

(199) $$[\![\forall \mathsf{x} \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = \{\langle w, g\rangle \mid \text{для всех } g' \sim_{\mathsf{x}} g : \langle w, g'\rangle \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}\}$$

Как обычно, понятие истинности можно определить как производное:

(200) $$\mathsf{A} \text{ истинна в } \mathcal{M} \text{ в } w \text{ при } g \Leftrightarrow \langle w, g\rangle \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}$$

(201) $$\mathsf{A} \text{ истинна в } \mathcal{M} \Leftrightarrow \text{для всех } w \in W_{\mathcal{M}}, g \in G : \langle w, g\rangle \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}$$

Можно пойти дальше: в варианте языка, где предикаты обозначают *пропозициональные функции* типов $\langle e, \langle s, t\rangle\rangle$, $\langle e, \langle e, \langle s, t\rangle\rangle\rangle$ и т. д., можно заставить означивания означивать переменные по мирам и получить

(202) $$[\![[\mathsf{P}^n(\mathsf{t}_1, \ldots, \mathsf{t}_n)](\mathsf{w})]\!]^{\mathcal{M}} = \{g \mid \mathcal{I}(\mathsf{P}^n)([\![\mathsf{t}_1]\!]^{\mathcal{M},g}, \ldots, [\![\mathsf{t}_n]\!]^{\mathcal{M},g}, g(\mathsf{w})) = \mathbf{1}\}$$

(203) $$[\![\Box_{\mathsf{w}} \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = \{g \mid \text{для всех } g' \sim_{\mathsf{w}} g, g(\mathsf{w}) R g'(\mathsf{w}) : g' \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}\}$$

(204) $$[\![\forall \mathsf{x} \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}} = \{g \mid \text{для всех } g' \sim_{\mathsf{x}} g : g' \in [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M}}\}$$

9.3.2 Семантики с кросс-идентификацией через двойничество

Номинально в двойниковых семантиках можно постулировать постоянный или же переменный домен, но важно скорее не это, а ограничения на отношение ‘быть двойником’, которыми можно имитировать постоянный домен без *possibilia* (одно-однозначные соответствия).

Определение 31 (модель с двойниками). Модель — $\mathcal{M} = \langle F, D, \mathcal{C}, \mathcal{I}\rangle$, где $F = \langle W, R\rangle$ — фрейм, D — (постоянный) домен индивидов, $\mathcal{C} : W^2 \longmapsto \wp D^2$ — функция, сопоставляющая каждой паре миров множество пар индивидов, где второй трактуется как двойник первого. ⊣

ср. Fitting 2004; получается, b в v может быть двойником a в w, а b в u не быть

В семантике модальных операторов используется 'для всех': это наш способ выразить, что нас интересуют именно двойники всех индивидов, упомянутых в A (ввиду композициональности на этом этапе интерпретации мы не можем заглянуть внутрь A и понять, каких именно индивидов двойники нам понадобятся; приходится брать двойников всех вообще индивидов).

(205) $[\![\Box \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$, е. т. е. для всех v, wRv :

$$\text{для всех } g' = g\left[\frac{o'}{o}\right], \langle o, o'\rangle \in \mathcal{C}(w,v) : [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v,g'} = \mathbf{1}$$

(206) $[\![\Diamond \mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathbf{1}$, е. т. е. найдётся v, wRv :

$$\text{найдётся } g' = g\left[\frac{o'}{o}\right], \langle o, o'\rangle \in \mathcal{C}(w,v) : [\![\mathsf{A}]\!]^{\mathcal{M},v,g'} = \mathbf{1}$$

9.4 Аналитические таблицы для $\mathcal{FOML}$

Строятся модульным способом: пропозициональные правила (рис. 5), правила для модальностей (рис. 21) и правила для кванторов, различные в зависимости от того, *актуалистски* или *поссибилистски* понимается квантификация либо предполагается семантика с двойниками. ср. Priest 2008: 310, Kupffer 2015: 62

Постоянный домен предполагает трактовку индивидов как существующих во всех мирах — скорее всего, «субсистирующих» там. Индивиды одни и те же во всех мирах, поэтому выполняются и анализируемы в таблицах как тождественно истинные обе схемы Баркан

$$\begin{array}{r|l} w : \forall \mathsf{x}\mathsf{A} & \\ w : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right] & \end{array} \quad \text{t любой} \quad \forall \text{ слева} \qquad \begin{array}{|l} w : \forall \mathsf{x}\mathsf{A} \\ w : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right] \end{array} \quad \text{t новый} \quad \forall \text{ справа}$$

$$\begin{array}{r|l} w : \exists \mathsf{x}\mathsf{A} & \\ w : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right] & \end{array} \quad \text{t новый} \quad \exists \text{ слева} \qquad \begin{array}{|l} w : \exists \mathsf{x}\mathsf{A} \\ w : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right] \end{array} \quad \text{t любой} \quad \exists \text{ справа}$$ ⑥

Переменный домен предполагает трактовку индивидов как контингентных, так что кванторные правила учитывают случай несуществования индивида-(контр)примера. Для этого в синтаксис вводится предикат существования E, ср. в свободных логиках (Lambert 1967; 1981); и там, где терм новый, E(t) является информацией, извлекаемой из предыдущей строки, как wRv из $w : \Diamond$A слева)

$$\begin{array}{c} w : \forall \mathsf{x}\mathsf{A} \\ \hline w : \mathsf{E}(\mathsf{t}) \mid w : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c}\text{t любой} \\ \forall \text{ слева}\end{array} \qquad w : \mathsf{E}(\mathsf{t}) \begin{array}{|l} w : \forall \mathsf{x}\mathsf{A} \\ \\ w : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c}\text{t новый} \\ \forall \text{ справа}\end{array}$$

$$\begin{array}{r|} w : \exists \mathsf{x}\mathsf{A} \\ w : \mathsf{E}(\mathsf{t}) \\ w : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c}\text{t новый} \\ \exists \text{ слева}\end{array} \qquad \begin{array}{c} w : \exists \mathsf{x}\mathsf{A} \\ \hline w : \mathsf{E}(\mathsf{t}) \mid w : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}}{\mathsf{x}}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c}\text{t любой} \\ \exists \text{ справа}\end{array}$$

⑦; какой t ни возьми, либо его нет в w, либо он проваливает A

Двойниковые фреймы имеют те же правила, что для постоянного домена, но другие правила для модальностей: попадание в другой мир влечёт замену термов, кроме связанных переменных, термами соответствующих двойников.

В реальности a в w может не иметь ни одного, иметь один или иметь более одного двойника в некотором v, wRv. Но, как и в случае R, на $\mathcal{C}$ можно наложить дополнительные ограничения, например «квазимонотонность»

(207) $$wRv \Rightarrow \forall x \in D_w \exists y \in D_v(\langle x, y\rangle \in \mathcal{C}(w,v))$$ ⑧

Тогда если wRv, то, в частности, $w : \Box P(a) \Rightarrow v : P(b)$ для некоторого $b : \langle a, b\rangle \in \mathcal{C}(w,v)$. Тогда выполняется и подстановка в обратную схему Баркан $\Box\forall x P(x) \to \forall x \Box P(x)$: в достижимых мирах есть двойники всех «здешних» индивидов. Рассмотрим такой случай: ⑨

$a\mathcal{C}b$: интуитивно говоря, b копирует a

$$\begin{array}{c|}
w : \Box\mathsf{A}[\mathsf{t}_1,\ldots,\mathsf{t}_n] \\
\boxed{wRv} \\
\boxed{\mathsf{t}_1\mathcal{C}\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}_n\mathcal{C}\mathsf{t}'_n} \\
v : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}_1}{\mathsf{t}'_1},\ldots,\frac{\mathsf{t}_n}{\mathsf{t}'_n}\right]
\end{array}
\quad \begin{array}{c} v,\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}'_n \\ \text{любые} \\ \Box\ \text{слева}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c}
w : \Box\mathsf{A}[\mathsf{t}_1,\ldots,\mathsf{t}_n] \\
\boxed{wRv} \\
\boxed{\mathsf{t}_1\mathcal{C}\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}_n\mathcal{C}\mathsf{t}'_n} \\
v : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}_1}{\mathsf{t}'_1},\ldots,\frac{\mathsf{t}_n}{\mathsf{t}'_n}\right]
\end{array}
\quad \begin{array}{c} v,\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}'_n \\ \text{новые} \\ \Box\ \text{справа}\end{array}$$

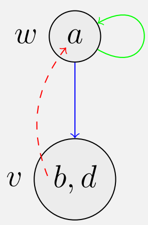
$$\begin{array}{c|}
w : \Diamond\mathsf{A}[\mathsf{t}_1,\ldots,\mathsf{t}_n] \\
\boxed{wRv} \\
\boxed{\mathsf{t}_1\mathcal{C}\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}_n\mathcal{C}\mathsf{t}'_n} \\
v : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}_1}{\mathsf{t}'_1},\ldots,\frac{\mathsf{t}_n}{\mathsf{t}'_n}\right]
\end{array}
\quad \begin{array}{c} v,\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}'_n \\ \text{новые} \\ \Diamond\ \text{слева}\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c}
w : \Diamond\mathsf{A}[\mathsf{t}_1,\ldots,\mathsf{t}_n] \\
\boxed{wRv} \\
\boxed{\mathsf{t}_1\mathcal{C}\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}_n\mathcal{C}\mathsf{t}'_n} \\
v : \mathsf{A}\left[\frac{\mathsf{t}_1}{\mathsf{t}'_1},\ldots,\frac{\mathsf{t}_n}{\mathsf{t}'_n}\right]
\end{array}
\quad \begin{array}{c} v,\mathsf{t}'_1,\ldots,\mathsf{t}'_n \\ \text{любые} \\ \Diamond\ \text{справа}\end{array}$$

Если $\mathsf{t}\mathcal{C}\mathsf{t}'$, то нельзя записать $\mathsf{t}''\mathcal{C}\mathsf{t}'$ для $\mathsf{t}'' \neq \mathsf{t}$: нельзя быть двойником двух индивидов из одно мира. Дополнительные правила для свойств R: ⑩

$$\begin{array}{c} | \\ \boxed{wRw, \mathsf{t}\mathcal{C}\mathsf{t}} \end{array}\ \text{Refl}
\qquad
\begin{array}{c} \boxed{wRv, \mathsf{t}\mathcal{C}\mathsf{t}'} \\ | \\ \boxed{vRw, \mathsf{t}'\mathcal{C}\mathsf{t}} \end{array}\ \text{Sym}
\qquad
\begin{array}{c} \boxed{wRv, \mathsf{t}\mathcal{C}\mathsf{t}; vRu, \mathsf{t}'\mathcal{C}\mathsf{t}''} \\ | \\ \boxed{wRu, \mathsf{t}\mathcal{C}\mathsf{t}''} \end{array}\ \text{Trans}$$

Вне зависимости от того, «новый» терм подставляется или «любой», денотат всякого терма существует только в одном мире. Чтобы по ошибке не приписать индивиду существование в нескольких мирах, а миру — достижимость из нескольких никак не связанных миров, полезно рисовать схему фрейма по мере введения новых миров и термов.

$$\begin{array}{r|l}
 & w : \Box\exists x\Diamond\exists y P(x,y) \to \Diamond\exists y\exists x P(x,y) \\
w : \Box\exists x\Diamond\exists y P(x,y) & w : \Diamond\exists y\exists x P(x,y) \\
\multicolumn{2}{c}{\boxed{wRw}} \\
w : \exists x\Diamond\exists y P(x,y) & \\
w : \Diamond\exists y P(a,y) & \\
\multicolumn{2}{c}{\boxed{wRv; a\mathcal{C}b}} \\
\multicolumn{2}{c}{|}
\end{array}$$



9.5 Натуральное исчисление для $\mathcal{FOML}$

Для моделей с переменным доменом кванторные правила вывода (модальные см. в натуральном исчислении для $\mathcal{PML}$) могут иметь вид

Basin, Matthews, Viganò 1997; Viganò 2000: 94–95; ❶

$$\dfrac{\begin{array}{c}[w : \mathsf{E}(\mathsf{y})] \\ \vdots \\ w : \mathsf{A}[\mathsf{y}]\end{array}}{w : \forall\mathsf{x}\mathsf{A}[\mathsf{x}]}\ \text{В}\forall
\qquad
\dfrac{w : \forall\mathsf{x}\mathsf{A}[\mathsf{x}] \qquad w : \mathsf{E}(\mathsf{t})}{w : \mathsf{A}[\mathsf{t}]}\ \text{У}\forall$$

$$\dfrac{w : \mathsf{A}[\mathsf{t}] \qquad w : \mathsf{E}(\mathsf{t})}{w : \exists\mathsf{x}\mathsf{A}[\mathsf{x}]}\ \text{В}\exists
\qquad
\dfrac{w : \exists\mathsf{x}\mathsf{A}[\mathsf{x}] \qquad \begin{array}{c}[w : \mathsf{A}[\mathsf{t}]] \quad [w : \mathsf{E}(\mathsf{t})] \\ \ddots \quad \therefore \\ v : \mathsf{B}\end{array}}{v : \mathsf{B}}\ \text{У}\exists$$

предикат E *выделенный*, т. к. участвует в правилах вывода

Ограничения на переменность домена:

$$\dfrac{wRv \qquad w : \mathsf{E}(\mathsf{t})}{v : \mathsf{E}(\mathsf{t})}\ \text{монотонность}
\qquad
\dfrac{wRv \qquad v : \mathsf{E}(\mathsf{t})}{w : \mathsf{E}(\mathsf{t})}\ \text{антимонотонность}$$

Вопросы и задания

① Вспомните примеры, свидетельствующие о необходимости различать несколько отношений эквивалентности значений различной строгости.

② Какой объект является двойником по Льюису для $o \in D_w$ в самом w?

③ Произведите рассуждение, показывающее, почему истинность подстановок в схемы Баркан связана с (анти)монотонностью.

④ Вспомните композиционную семантику для переменной, нелогической константы, отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации.

⑤ Используя λ-нотацию, определите собственную семантику $\Box$.

⑥ Покажите, что в моделях с постоянным доменом общезначимы: Priest 2008: 327

(a) $\forall x \Box P(x) \leftrightarrow \Box \forall x P(x)$

(b) $\Diamond \forall x Q(x) \to \forall x \Diamond Q(x)$

(c) $\Box \Diamond \exists x P(x) \to \Box \exists x \Diamond (P(x) \vee Q(x))$

(d) при допущении Refl, Sym и Trans: $\exists y \Diamond \Diamond Q(y) \to \Diamond \exists z Q(z)$

(e) при допущении Refl, Sym и Trans: $\Diamond \forall y \Box P(y) \to \Box \Box \forall x P(x)$

⑦ Покажите с помощью аналитических таблиц, что в моделях с переменным доменом общезначимы:

(a) $(\Box \forall x P(x) \wedge \Box \forall y Q(x)) \to \Box \forall z (P(z) \wedge Q(z))$

(b) $\Diamond \exists y Q(y) \to \Diamond \exists y (P(y) \vee Q(y))$

(c) $\exists x \Box P(x) \to \Box \exists x P(x)$

⑧ Что давало бы $\exists ! y$?

⑨ Как связано вводимое ограничение с обратной схемой Баркан?

⑩ Покажите, как в формулировке Sym и Trans используется ограничение, связывающее отношение двойничества с R.

❶ Докажите в натуральном исчислении прямую и обратную формулы Баркан, используя соответствующие ограничения на переменность домена.

Заключение: выразительная сила языков

Мы изучили ряд формализованных языков: $\mathcal{PL}, \mathcal{FOL}, \mathcal{PML}, \mathcal{FOML}$ — и мотивировали их проблемами в семантике и использовании (в рассуждениях) естественного языка. Можно ли их сравнить по возможностям выражения «содержания», верно ли одни кажутся нам выразительнее других? Достаточно ли наших формализованных языков, чтобы сказать ясно всё, что мы хотим формализовать (ср. в XX в. идеи более строгого языка, *regimented language* для нужд науки и философии) в естественном?

Понятие выразительной силы и сравнение языков

Ни в какой реальной ситуации высказывание не описывает ситуацию целиком: оно описывает какие-то признаки ситуации, релевантные для коммуникантов (отличающие её от других ситуаций в важном для них отношении). Возможно, для полного описания понадобилась бы бесконечная формула (в наших допущениях это невозможно). ср. пропозицию как регион W

Поэтому на деле вопрос о выразительности языка не о том, в каких ситуациях на нём можно что-то сказать (неверно, что что на менее выразительном языке в каких-то ситуациях ничего нельзя сказать: на любом $\mathcal{L}$ в каждой ситуации что-то можно сказать, хотя бы тавтологию; но тавтологии не различают положений дел). Речь о возможности различать с помощью высказываний языка существенно различные для нас ситуации (чьё различие можно представить как различие в параметрах, описываемых на достаточно выразительном метаязыке). ①

Например, набором параметров будет $\mathcal{M}, w, g$, где $\mathcal{M}$ определяет, какие индивиды и какие отношения между ними есть, а w определяет, из какой «перспективы» рассматривается $\mathcal{M}$.

Дело запутывается тем, что для языков с константами (кроме $\top, \bot$) мы не фиксировали жёстко ни **сигнатуру** (набор нелогических констант), ни её семантику, т. е. фактически имели дело с «семейством» языков $\mathcal{FOL}$ или языков $\mathcal{FOML}$. Под их выразительными возможностями в общем смысле можно понимать «лучшее», на что они способны при благоприятном для различения данных наборов параметров подборе сигнатуры и семантики констант.

Определение 32 (различение)**.** Язык $\mathcal{L}$ может различить наборы параметров $\boldsymbol{\pi} = \langle \pi_1, \ldots, \pi_n \rangle$ и $\boldsymbol{\rho} = \langle \rho_1, \ldots, \rho_n \rangle$, е. т. е. существует $\mathsf{A} \in \mathcal{L} : [\![\mathsf{A}]\!]^{\boldsymbol{\pi}} \neq [\![\mathsf{A}]\!]^{\boldsymbol{\rho}}$. ⊣

Определение 33 (различение на множествах)**.** Язык $\mathcal{L}$ может различать множества наборов параметров Π и P, е. т. е. существует такая $\mathsf{A} \in \mathcal{L}$, что для всех $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}' \in \Pi, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}' \in \mathrm{P} : [\![\mathsf{A}]\!]^{\boldsymbol{\pi}} = [\![\mathsf{A}]\!]^{\boldsymbol{\pi}'}, [\![\mathsf{A}]\!]^{\boldsymbol{\rho}} = [\![\mathsf{A}]\!]^{\boldsymbol{\rho}'}, [\![\mathsf{A}]\!]^{\boldsymbol{\pi}} \neq [\![\mathsf{A}]\!]^{\boldsymbol{\rho}}$. ⊣

Инае говоря, такая A задаёт класс эквивалентности наборов параметров ($\approx$ все могут быть описаны с помощью A).

Пример 22. Язык $\mathcal{L} = \{$👍, 👎$\}$ делит все ситуации всего на два класса эквивалентности. ⊣

Blackburn, Benthem 2007: 12

Пример 23. В подъязыке простых цветообозначений русский различает *синий* и *голубой*, а английский нет. ⊣

Таким образом, если дано множество наборов параметров Π для сравнения языков, то

если уменьшить Π, некоторые неравенства по силе превратятся в равенства

Определение 34 (более выразительный)**.** Язык $\mathcal{L}_1$ более выразительный, чем язык $\mathcal{L}_2$, е. т. е. $\{\langle \Pi', \Pi'' \rangle \mid \mathcal{L}_2 \text{ различает } \Pi' \text{ и } \Pi''\} \subset \{\langle \Pi', \Pi'' \rangle \mid \mathcal{L}_1 \text{ различает } \Pi' \text{ и } \Pi''\}$, где $\Pi', \Pi'' \in \Pi$. ⊣

Пример 24. Язык логики высказываний $\mathcal{PL}$ различает наборы параметров g_1 и g_2 (например, за счёт формулы p) и множества наборов параметров $\{g_1, g_4\}$ и $\{g_2, g_3, g_5\}$ (например, за счёт $p \wedge (\neg s)$). См. рис. 25. ⊣

Пример 25. Бисимуляция в модальной логике: язык модальной логики высказываний $\mathcal{PML}$ не различает соединённые пунктиром миры на рис. 26. Их может различить язык, в котором есть высказывания, истинные строго в одном мире (номиналы в гибридной логике, §8.6), или полноценная квантификация по мирам вместо $\Box, \Diamond$ и равенство (можно было бы прямо сказать, сколько миров должно быть достижимо из данного и каких). ⊣

	p	q	r	s	t	...
g_1	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	...
g_2	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	...
g_3	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	...
g_4	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	...
g_5	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	...
			$\vdots$			

Рис. 25

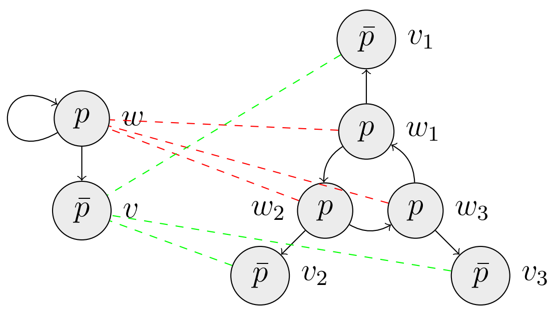


Рис. 26

Говоря, что положение дел ϕ невыразимо на данном языке $\mathcal{L}$, имеют в виду, что $\mathcal{L}$ не различает класс наборов параметров, где везде ϕ, и класс, где везде не-ϕ, т. е. средствами $\mathcal{L}$ нельзя разделить логическое пространство n-ок параметров на **все и только** такие, где ϕ, и остальные. Чтобы доказать, что $\mathcal{L}_1$ не менее выразителен, чем $\mathcal{L}_2$, применяют процедуру перевода с $\mathcal{L}_2$ на $\mathcal{L}_1$ в общем виде (**погружения** $\mathcal{L}_2$ в $\mathcal{L}_1$).

ср. Tulenheimo 2004: 18–19

Определение 35 (погружаемость). Язык $\mathcal{L}_2$ погружаем в язык $\mathcal{L}_1$ на множестве наборов параметров Π, е. т. е. для любой $\mathsf{A} \in \mathcal{L}_2$ найдётся $\mathsf{B}_\mathsf{A} \in \mathcal{L}_1 : \forall \vec{\pi} \in \Pi : \vec{\pi} \vDash \mathsf{A} \Leftrightarrow \vec{\pi} \vDash \mathsf{B}_\mathsf{A}$. ⊣

направленность погружения не в $\Leftrightarrow$, а в $\forall \mathsf{A} \exists \mathsf{B}_\mathsf{A}$ (②)

Если $\mathcal{L}_2$ погружаем в $\mathcal{L}_1$, то $\mathcal{L}_1$ *не менее* выразителен, чем $\mathcal{L}_2$; если при этом неверно, что $\mathcal{L}_1$ погружаем в $\mathcal{L}_2$, то $\mathcal{L}_1$ *более* выразителен, чем $\mathcal{L}_2$.

Пример 26. Как обсуждалось в §8.2.2, $\mathcal{PML}$ погружается в $\mathcal{FOL}$, снабжённый одноместными предикатами для каждой p типа '_ выполняет p' и двуместным предикатом 'из _ достижим _': $q \vee \Box(q \wedge r) \rightsquigarrow_w Q(w) \vee \forall v(R(w,v) \to (Q(v) \wedge R(v)))$. ⊣

Выразительная сила и естественный язык

Мы уже знаем, что для некоторых выражений естественного языка нет аналогов в наших формализованных, ср. такие бинарные кванторы, как *большинство*. Но область того, что изученными в курсе средствами не формализовать, существенно шире.

«Прозрачные» интерпретации

Одна из интерпретаций (208) не может быть переведена на $\mathcal{FOML}$: Kocurek 2018; ③

(208) Everyone who's actually rich could have been poor.

'Могло бы быть так, что каждый из $\{x \mid x$ богат в @$\}$ беден'

Дело в том, что, в отличие от квантификации как таковой, $\Box$, $\Diamond$ не связывают переменную, так что всё в их сфере действия автоматически «связано» — интерпретируется во вводимых ими мирах. Два способа исправить это:

- Добавить де-факто индексальный (см. ниже) оператор, возвращающий интерпретацию в @:

  (209) $$[\![\Box(@\mathsf{A} \wedge \mathsf{B})]\!]^w = \mathbf{1}, \text{ е. т. е. } \forall v(R(w,v) \Rightarrow [\![\mathsf{A}]\!]^{@} = \mathbf{1} \;\&\; [\![\mathsf{B}]\!]^w = \mathbf{1})$$

  Не решает проблемы перевода высказываний, в которых интерпретация «возвращается» не в @, а в любой «предыдущий» мир:

  (210) Necessarily, everyone who's rich could have been poor.

  Можно использовать оператор, «смотрящий назад» (*backward-looking*), и семантику, «запоминающую» последовательность введённых в рассмотрение миров
- Вместо $\mathcal{FOML}$ использовать вариант $\mathcal{FOL}$, в котором некоторые переменные пробегают по мирам (**двусортный** $\mathcal{FOL}$), ср. для (210):

  (211) $$\forall w(R(@,w) \to \exists v(R(w,v) \wedge \forall x(Rich(x,w) \to Poor(x,v))))$$

Сдвиги значения

В §8.2.2 мы видели, что даже окрестностная семантика не справляется с примерами типа (212)–(213), предсказывая их тождественную ложность.

(212) Вася знает, что $2 \times 2 = 4$, но не знает, что $493^2 = 243049$.

(213) Вася думает, что если идёт дождь, то холодно, но не думает, что если не холодно, то не идёт дождь. ср. Egré 2014: 227

Одна из возможных интуиций: в (212) Вася не понимает, что *означает* 493^2, а в (213) — что означает *если* и/или *не*. Т. е. в мирах, совместимых с его знаниями/убеждениями, различны или просто отличаются от реальных не только положения дел в мире, но и «положения дел в языке» — значения терминов. Но в наших формализмах нет естественного способа выразить значение 'то, что в w называется 493^2, в w равно 243049'.

Пример 27. Ср. классический пример в философии (Kripke 1980): возможно ли, что вода не H_2O? Нет. Можно ли это себе представить ($\approx$ не быть уверенным, что вода — это H_2O)? Да. В вопросе о возможности имеется в виду, что термин *вода* значит то же, что в нашем мире, в каком мире ни производилась бы интерпретация; в вопросе о представимости допускается, что мы смотрим с позиции нереального мира, в котором иначе **фиксируем значение** термина

вода. Т. е. *возможно* манипулирует обычным индексом мира интерпретации w, а *представимо* — ещё и индексом мира фиксации значений w_c.
Пусть в мирах w_1 и w_3 водой называют только H_2O, а в мире алкоголиков w_2 — только C_2H_5OH. При этом в мирах w_1 и w_2 пьянеют только от спирта, а в мире w_3 — только от воды (там другие законы природы). Тогда истинность или ложность

(214) От воды пьянеют.

в w зависит от того, является ли называемое водой в w тем веществом, от которого пьянеют по законам природы в w (т. е. истинность зависит от двух факторов-«измерений»).

$w_c \downarrow, w \rightarrow$	w_1	w_2	w_3
w_1	0	0	1
w_2	1	0	1
w_3	0	1	1

Теперь функция интерпретации должна иметь два параметра-мира: w и w_c. ⊣

Тогда $\Box$, $\Diamond$ (в т. ч. в доксастической трактовке) манипулируют только w, но можно определить псевдомодальный оператор **диагонализации** †, заменяющий w_c (в роли которого обычно выступает @) на текущий w: Stalnaker 1978

(215) $$[\![\dagger \mathsf{A}]\!]^{w_c,w} = [\![\mathsf{A}]\!]^{w,w}$$

Чтобы выразить непротиворечивое значение (213), можно перевести его как

(216) $$K_v \dagger (p \rightarrow q) \wedge K_v \dagger (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Индексальность

В чём-то похожая проблема — интерпретация примеров типа

(217) Петя думает, что находится в библиотеке.

(218) Маша хочет есть.

Аналогия со сдвигом значения в том, что тут тоже нужно второе измерение значения, т. к. содержание мысли Пети и желания Маши нельзя точно выразить не от первого лица: мысль 'Петя находится в библиотеке' неэквивалентна мысли 'я нахожусь в библиотеке', если я не уверен, что я Петя (что возможно); желание 'чтобы Маша поела' неэквивалентно желанию 'чтобы я поела'. Петя и Маша могут не быть уверены, кем из индивидов внутри мира являются. Perry 1977
Аналогично ведут себя предложения со словами *я*, *ты*, *здесь*, *сейчас*: их значения зависят не от мира, а от «перспективы» внутри него — **контекста**, состоящего из мира произнесения w_c, говорящего s_c, слушающего h_c (ср. *ты*), момента произнесения t_c, места произнесения ℓ_c… В одном и том же мире *Я здесь* будет обозначать разное в устах разных говорящих. Тогда контекст должен быть одним из параметров $[\![\cdot]\!]$.
В некотором смысле эквивалентность

(219) $$[\![\text{Я нахожусь здесь}]\!]^{@,c_0} = [\![\text{Д. Т. находится в аудитории 2-У}]\!]^{@,c_0}$$

слабая, но не в том смысле, что они эквивалентны только экстенсионально (§7.1): они эквивалентны в любом мире в данном контексте, но есть контексты, где даже в том же мире @ они неэквивалентны, т. е. истинность зависит не от мира, а от контекста.
Я нахожусь здесь не тавтология в смысле истинности во всех мирах (т. е. не необходимо), поскольку есть миры, где Д. Т. не в аудитории 2-У. Но это истинно в любом мире для «нормальных» контекстов — тех, где s_c находится в ℓ_c (контексты, где выделенный говорящий не находится в выделенном месте речи, аномальны). Kaplan 1989: 509

Вопросы и задания

① Почему тавтологии не различают положений дел?

② Почему не годится замена «⇔» на следование в одну из сторон?

③ Какую ещё интерпретацию имеет (208)?

Литература

Ajdukiewicz K. On the Problem of Universals // The Scientific World-Perspective and Other Essays, 1931–1963. Springer, 1978. P. 95–110.

Anderson A. R., *Belnap N. D.*, *Dunn J. M.* Entailment. Vol. II: The Logic of Relevance and Necessity. 1975.

Areces C., *Cate B. ten*. Hybrid Logic // Handbook of Modal Logic. Elsevier, 2007. P. 821–868.

Armstrong D. M. Universals: An Opinionated Introduction. Westview Press, 1989.

Auwera J. van der, *Plungian V. A.* Modality's semantic map // Linguistic Typology. 1998. Vol. 2, no. 1. P. 79–124.

Baron C. Generalized Concept Generators // Proceedings of NELS. Vol. 46. 2015. P. 59–68.

Barwise J. On branching quantifiers in English // Journal of Philosophical Logic. 1979. Vol. 8, no. 1. P. 47–80.

Barwise J., *Cooper R.* Generalized quantifiers and natural language // Linguistics and Philosophy. 1981. Vol. 4, no. 2. P. 159–219.

Basin D., *Matthews S.*, *Viganò L.* Labelled propositional modal logics: Theory and practice // Journal of Logic and Computation. 1997. Vol. 7, no. 6. P. 685–717.

Beaver D., *Krahmer E.* A partial account of presupposition projection // Journal of Logic, Language and Information. 2001. Vol. 10, no. 2. P. 147–182.

Benthem J. van. Correspondence Theory // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 2. 2nd ed. 2001. P. 325–408.

Benthem J. van. Modal Logic and Classical Logic. Bibliopolis, 1983.

Blackburn P., *Benthem J. van*. Modal Logic: A Semantic Perspective // Handbook of Modal Logic. Elsevier, 2007. P. 1–84.

Braüner T. Hybrid Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / ed. by E. N. Zalta. Winter 2022. 2022. URL: https://plato.stanford.edu/archives/win2022/entries/logic-hybrid/.

Chierchia G. Logic in grammar: Polarity, free choice, and intervention. OUP, 2013.

Chierchia G. On being trivial: Grammar vs. logic // The Semantic Conception of Logic: Essays on Consequence, Invariance, and Meaning / ed. by G. Sagi, J. Woods. Cambridge University Press, 2021. P. 227–248.

Chisholm R. M. Identity Through Possible Worlds: Some Questions // Noûs. 1967. Vol. 1, no. 1. P. 1–8.

Crouch R., *Genabith J. van*. Linear Logic for Linguists. 2000. URL: http://www.coli.uni-saarland.de/courses/logical-grammar/contents/crouch-genabith.pdf.

Ditmarsch H. van, *Hoek W. van der*, *Kooi B. P.* Dynamic Epistemic Logic. Springer, 2007.

Dummett M. Frege: Philosophy of Mathematics. Harvard University Press, 1991.

Dunn J. M., *Restall G.* Relevance logic // Handbook of Philosophical Logic. Vol. 6. Springer, 2013. P. 1–128.

Eddington A. S. The Nature of the Physical World. Macmillan; Cambridge University Press, 1929.

Egré P. Hyperintensionality and *De Re* Beliefs // Epistemology, Context, and Formalism. Vol. 369 / ed. by F. Lihoreau, M. Rebuschi. Springer, 2014. P. 213–243. (Synthese Library).

Eijck J. van. Natural Logic for Natural Language // Logic, Language, and Computation: 6$^{\text{th}}$ International Tbilisi Symposium on Logic, Language, and Computation, TbiLLC 2005. 2007. P. 216–230.

Etchemendy J. The doctrine of logic as form // Linguistics and Philosophy. 1983. Vol. 6, no. 3. P. 319–334.

Fitting M. First-order intensional logic // Annals of Pure and Applied Logic. 2004. Vol. 127, no. 1–3. P. 171–193.

Fitting M., *Mendelsohn R. L.* First-Order Modal Logic. Springer, 1998.

Fraassen B. van. Singular terms, truth-value gaps, and free logic // Journal of Philosophy. 1966. Vol. 63, no. 17. P. 481–495.

Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. I // Mathematische Zeitschrift. 1935. Jg. 39, Nr. 1. S. 176–210.

Gierasimczuk N., *Szymanik J.* Branching quantification v. two-way quantification // Journal of Semantics. 2009. Vol. 26, no. 4. P. 367–392.

Gottwald S. Many-Valued Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / ed. by E. N. Zalta. Spring 2015. 2020. URL: http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/logic-manyvalued/.

Groenendijk J., *Stokhof M.* Dynamic predicate logic // Linguistics and Philosophy. 1991. Vol. 14, no. 1. P. 39–100.

Hawthorne J. Inductive Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / ed. by E. N. Zalta. Spring 2021. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021. URL: https://plato.stanford.edu/archives/spr2021/entries/logic-inductive/.

Heim I. On the Projection Problem for Presupposition // Proceedings of WCCFL. Vol. 2. 1983. P. 114–125.

Heim I. Presupposition projection and the semantics of attitude verbs // Journal of Semantics. 1992. Vol. 9, no. 3. P. 183–221.

Heim I., *Kratzer A.* Semantics in generative grammar. Oxford: Blackwell, 1998.

Henkin L. Some remarks on infinitely long formulas // Infinitistic Methods. Warsaw: PAN, 1961. P. 167–183.

Hintikka J. Logic // Encyclopædia Britannica. 2020. URL: https://www.britannica.com/topic/logic.
Hintikka J. Quantifiers vs. quantification theory // Dialectica. 1973. Vol. 27, no. 3/4. P. 329–358.
Hintikka J., *Sandu G.* The Fallacies of the New Theory of Reference // Synthese. 1995. Vol. 104, no. 2. P. 245–283.
Hintikka J., *Sandu G.* What is a Quantifier? // Synthese. 1994. Vol. 98, no. 1. P. 113–129.
Hodges W. Compositional semantics for a language of imperfect information // Logic Journal of IGPL. 1997. Vol. 5, no. 4. P. 539–563.
Hodges W. Elementary predicate logic // Handbook of philosophical logic. T. 1 / под ред. D. M. Gabbay, F. Guenthner. Springer, 2001. C. 1—129.
Kaplan D. Demonstratives // Themes from Kaplan / ed. by J. Almog, J. Perry, H. Wettstein. OUP, 1989. P. 481–563.
Kaufmann S., *Condoravdi C.*, *Harizanov V.* Formal approaches to modality // The expression of modality / ed. by W. Frawley. Mouton de Gruyter, 2006. P. 71–106.
Kocurek A. W. On the expressive power of first-order modal logic with two-dimensional operators // Synthese. 2018. Vol. 195. P. 4373–4417.
Kracht M. Interpreted languages and compositionality. Springer, 2011. URL: http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/mkracht/html/compositionality/compositionality.pdf.
Kracht M. The mathematics of language. Vol. 63. Walter de Gruyter, 2003. (Studies in Generative Grammar). URL: https://pub.uni-bielefeld.de/download/2594509/2610875.
Kratzer A. Modality // Semantics: An international handbook of contemporary research / ed. by A. von Stechow, D. Wunderlich. De Gruyter, 1991a. P. 639–650.
Kratzer A. Representation of Focus // Semantik: ein internationales Handbuch der zeitgenössischen Forschung / ed. by A. von Stechow, D. Wunderlich. 1991b. P. 825–834.
Kripke S. A. Semantical analysis of modal logic I: Normal modal propositional calculi // Mathematical Logic Quarterly. 1963. Vol. 9, no. 5/6. P. 67–96.
Kripke S. A. Naming and Necessity. Harvard University Press, 1980.
Križ M. Homogeneity effects in natural language semantics // Language and Linguistics Compass. 2019. Vol. 13, no. 11. DOI: 10.1111/lnc3.12350.
Kupffer M. Incompleteness in QML. 01/2015. Unpublished lecture notes, Goethe-Universität Frankfurt.
Lambert K. Free logic and the concept of existence // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1967. Vol. 8, no. 1/2. P. 133–144.
Lambert K. On the philosophical foundations of free logic // Inquiry. 1981. Vol. 24, no. 2. P. 147–203.
Lavine S. Quantification and ontology // Synthese. 2000. Vol. 124, no. 1. P. 1–43.
Lewis D. Counterfactuals. Blackwell, 1973.
Lewis D. Counterpart theory and quantified modal logic // Journal of Philosophy. 1968. Vol. 65, no. 5. P. 113–126.
Lewis D. Individuation by Acquaintance and by Stipulation // The Philosophical Review. 1983. Vol. 92, no. 1. P. 3–32.
Lewis D. On the Plurality of Worlds. Blackwell, 1986.
Linear logic for meaning assembly / M. Dalrymple (et al.) // Proceedings of Computational Logic for Natural Language Processing. 1995. URL: https://arxiv.org/abs/cmp-lg/9504012v1.
Malinowski G. Many-Valued Logics. Clarendon Press, Oxford, 1993.
Mann A. L., *Sandu G.*, *Sevenster M.* Independence-friendly logic: A game-theoretic approach. Vol. 386. Cambridge University Press, 2011. (LMS Lecture Notes Series).
Marcus R. B. Interpreting Quantification // Inquiry. 1962. Vol. 5, no. 1–4. P. 252–259.
Mares E. Relevance Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / ed. by E. N. Zalta. Winter 2020. 2020. URL: https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/logic-relevance/.
Montague R. Pragmatics ; Pragmatics and Intensional Logic // Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague / ed. by R. Thomason. Yale University Press, 1974.
Moschovakis J. Intuitionistic Logic // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / ed. by E. N. Zalta. Fall 2018. 2018. URL: https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/logic-intuitionistic/.
Moss L. S. The soundness of internalized polarity marking // Studia Logica. 2012. Vol. 100, no. 4. P. 683–704.
Negri S. Proof theory for modal logic // Philosophy Compass. 2011. Vol. 6, no. 8. P. 523–538.
Nouwen R. E-type pronouns: congressmen, sheep and paychecks // The Wiley Blackwell Companion to Semantics / ed. by D. Gutzmann (et al.). Oxford: Wiley Blackwell, 2020.
Pacuit E. Neighborhood Semantics for Modal Logic. 2014. URL: http://pacuit.org/esslli2014/nbhd.
Parsons T. Articulating Medieval Logic. Oxford University Press, 2014.

Partee B. H., Hendriks H. L. W. Montague Grammar // Handbook of Logic and Language / ed. by J. van Benthem, A. ter Meulen. Second edition. Elsevier, 2011. P. 3–94.
Partee B. H., Meulen A. ter, Wall R. Mathematical methods in linguistics. Springer, 1990.
Pelletier F. J., Hazen A. P. A history of natural deduction // Handbook of the History of Logic. Vol. 11. 2012. P. 341–414. URL: https://www.ualberta.ca/~francisp/papers/PellHazenSubmittedv2.pdf.
Pelletier F. J. A brief history of natural deduction // History and Philosophy of Logic. 1999. Vol. 20, no. 1. P. 1–31.
Perry J. Frege on demonstratives // Philosophical Review. 1977. Vol. 86, no. 4. P. 474–497.
Potts C. Logic for Linguists / Stanford University. 07/2007. URL: http://www.christopherpotts.net/ling/teaching/lsa108P/materials/potts-lsa07-logic4ling-screen.pdf.
Priest G. An Introduction to Non-Classical Logic: From If to Is. Cambridge University Press, 2008.
Quine W. V. O. Quantifiers and Propositional Attitudes // Journal of Philosophy. 1956. Vol. 53, no. 5. P. 177–187.
Quine W. V. O. Three Grades of Modal Involvement // The Ways of Paradox. Harvard University Press, 1966 [1953]. P. 156–174.
Rabern B. Monsters in Kaplan's logic of demonstratives // Philosophical Studies. 2013. Vol. 164, no. 2. P. 393–404.
Rabern B. Tree-Ring Semantics. 2017. URL: https://brianrabern.net/tree-ring-semantics.pdf.
Rabern B., Ball D. Monsters and the Theoretical Role of Context // Philosophy and Phenomenological Research. 2019. Vol. 98, no. 2. P. 392–416.
Rescher N., Urquhart A. Temporal Logic. Springer, 1971.
Russell B. On Denoting // Mind. 1905. Vol. 14, no. 56. P. 479–493.
Russell B. The Philosophy of Logical Atomism. Routledge, 2010 [1918].
Schwarz W. Counterpart theory and the paradox of occasional identity // Mind. 2014. Vol. 123, no. 492. P. 1057–1094.
Shramko Y., Wansing H. Truth Values // The Stanford Encyclopedia of Philosophy / ed. by E. N. Zalta. Winter 2015. 2020. URL: http://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/truth-values/.
Smith N. J. J. Many-Valued Logics // Routledge Companion to Philosophy of Language. Routledge, 2013. P. 652–667.
Smullyan R. M. What is the Name of This Book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1978.
Stalnaker R. Assertion // Pragmatics / ed. by P. Cole. New York Academic Press, 1978. P. 315–332.
Strawson P. On referring // Mind. 1950. Vol. 59, no. 235. P. 320–344.
Suppes P. Introduction to Logic. Van Nostrand Reinhold Company, 1957.
Tarski A. On the concept of following logically // History and Philosophy of Logic. 2002 [1936]. Vol. 23, no. 3. P. 1.
Tarski A. The Concept of Truth in Formalized Languages // Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford University Press, 1936. P. 152–278.
Tulenheimo T. Independence-Friendly Modal Logic. Studies in its Expressive Power and Theoretical Relevance : PhD thesis / Tulenheimo Tero. University of Helsinki, 2004. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00856495/document.
Varzinczak I. Formal Foundations of Ontologies and Reasoning. 2019. URL: https://ijv.ovh/common/slides/GrazCourse/GrazCourse-Part1.pdf. Centre for Information Modelling, University of Graz.
Viganò L. Labelled Non-Classical Logics. Springer Science & Business Media, 2000.
Walton D. Methods of Argumentation. Cambridge University Press, 2013.
Westerståhl D. Compositionality in Kaplan Style Semantics // The Oxford Handbook of Compositionality / под ред. M. Werning, W. Hinzen, E. Machery. OUP, 2012. С. 192—219.
Wright G. H. von. An Essay in Modal Logic. Amsterdam: North-Holland, 1951.
Андреев А. В., Митрофанова О. А., Соколов К. В. Введение в формальную семантику. СПб.: Филологический факультет СПбГУ, 2014. URL: http://mathling.phil.spbu.ru/sites/default/files/Formal_semantics.pdf.
Апресян Ю. Д., ред. Активный словарь русского языка. Т. 2. В—Г. М.: ЯСК, 2014.
Аристотель. Об истолковании // Сочинения в 4-х т. Т. 2. М.: Мысль, 1978a.
Аристотель. Первая аналитика // Сочинения в 4-х т. Т. 2. М.: Мысль, 1978b.
Бочаров В. А., Маркин В. И. Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010.
Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. М.: Канон+, 2017 [1921].
Гладкий А. В. Введение в современную логику. МЦНМО, 2001. URL: http://www.mccme.ru/free-books/gladkii/glad.ps.gz.
Карнап Р. Значение и необходимость. М.: Издательство иностранной литературы, 1959 [1956].
Кассирер Э. Познание и действительность. Понятие о субстанции и понятие о функции. 1913 [1910].

Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973 [1967].
Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. М.: КомКнига, 2006.
Лейбниц Г. В. Опыты теодицеи о благости Божией, свободе человека и начале зла // Сочинения в 4-х т. Т. 4. М.: Мысль, 1989 [1710].
Мельчук И. А., Жолковский А. К. Толково-комбинаторный словарь современного русского языка. Wiener Slawistischer Almanach, 1984.
Непейвода Н. Н. Прикладная логика. Издательство УдмГУ, 1997. URL: http://ecsocman.hse.ru/data/901/643/1219/book.pdf.
Плунгян В. А. Общая морфология: Введение в проблематику. М.: УРСС, 2000.
Соссюр Ф. Курс общей лингвистики. М.: УРСС, 2004 [1915].
Тарский А. Семантическая концепция истины и основания семантики // Аналитическая философия: Становление и развитие. 1998 [1944].
Тестелец Я. Г. Введение в общий синтаксис. М.: РГГУ, 2001.
Фреге Г. О смысле и значении // Логика и логическая семантика. М.: Аспект-Пресс, 2000 [1892]. С. 230—246.
Фреге Г. Функция и понятие // Логика и логическая семантика. М.: Аспект-Пресс, 2000 [1891]. С. 215—229.
Хомский Н. Синтаксические структуры // Новое в лингвистике. Вып. II. М.: Издательство иностранной литературы, 1962 [1957]. С. 412—527.
Хомский Н. Картезианская лингвистика. Глава из истории рационалистической мысли. М.: КомКнига, 2005 [1966].