Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3(2+4i)+2(1-6i)=8$.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$ este tangentă la axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2+4}=5^{4x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 1, 3, 5 și 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$ și $C(4,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 2^n-1 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr natural.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numărul natural n știind că $A(n)\cdot A(1)=A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale p și q știind că $A(p)\cdot A(q)=A(pq)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3X+2$.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-4.

5p **c)** Arătați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=20$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+e^x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+x+1)f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-x+1)\,dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5p **c)** Arătați că $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int_0^t f(x)\,dx\right)=\frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6+12i+2-12i=$ $=6+2=8$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=4-4=$ $=0$, deci parabola asociată funcției f este tangentă la axa Ox	**3p** **2p**
3.	$x^2+4=4x \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot3=12$ numere	**3p** **2p**
5.	Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow m_d=-2$ $d: y=-2x-2$	**2p** **3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	**2p** **3p**
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$, $A(n)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{n+1}&0\\0&2^{n+1}-1&1\end{pmatrix}$ $A(3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^3&0\\0&2^3-1&1\end{pmatrix}$ și $A(n)\cdot A(1)=A(3) \Rightarrow n=2$	**3p** **2p**
c)	$A(p)\cdot A(q)=A(p+q)$ pentru orice numere naturale p și q $A(p+q)=A(pq) \Rightarrow p+q=pq \Rightarrow (p-1)(q-1)=1 \Rightarrow p=q=0$ sau $p=q=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-3\cdot0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	Câtul este $X+1$ Restul este $X+6$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-3$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=20$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x)'+\left(e^x\right)'=$	**2p**
	$=3+e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+e^x}{x}=3$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, deci dreapta de ecuație $y=3x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$g'(0)=0$, $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-4x-1=e^x-x-1$	**3p**
	$g(x)\geq g(0)\Rightarrow g(x)\geq 0\Rightarrow f(x)\geq 4x+1$ pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)dx=\int\limits_0^1 x^3\,dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{x^4}{4}\right\vert_0^1=\frac{1}{4}$	**3p**
b)	$\int\limits_0^1\left(f(x)-x+1\right)dx=\int\limits_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\left.\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	**2p**
c)	$\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{1}{t^4}\cdot\int\limits_0^t f(x)dx\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)}{4t^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^3}{4t^3\left(t^2+t+1\right)}=\frac{1}{4}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 2+3i$. Calculați z^2.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9\left(x^2+5\right)=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,0)$, $B(2,0)$ și $C(0,3)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $\det\left(A(1)\right)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că $\det\left(A(a)\right)=1$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Calculați $1\circ 2$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-\infty,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\le -\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx=2\ln 2-1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=1$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[2,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3i + (3i)^2 =$	**3p**
	$= -5 + 12i$	**2p**
2.	$f(x) = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$	**3p**
	$x = 3$ şi $y = 0$	**2p**
3.	$x^2 + 5 = 9 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$	**3p**
	$x_1 = -2$ și $x_2 = 2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	**2p**
5.	$AB = 4$, $CO = 3$ și CO este înălțime	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$	**2p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} =$	**3p**
	$= 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 1\cdot 0 =$	**3p**
	$= 6$	**2p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{vmatrix} = 5a + 1$	**3p**
	$5a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$	**2p**
c)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A(0)) = 1$	**2p**
	$(A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$1 \circ 2 = 2\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 1 - 3\cdot 2 + 6 =$	**3p**
	$= 1$	**2p**
b)	$x \circ y = 2\left(xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) =$	**2p**
	$= 2\left(x\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right)\right) + \frac{3}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=2\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	**3p**
	$x_1=1$ și $x_2=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{-x}}{x-2}=\frac{e^{-1}}{1-2}=$	**3p**
	$=-\frac{1}{e}$	**2p**
b)	$f'(x)=\frac{\left(e^{-x}\right)'\cdot(x-2)-e^{-x}\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{-e^{-x}\cdot(x-2)-e^{-x}}{(x-2)^2}$	**3p**
	$=\frac{-e^{-x}\cdot(x-1)}{(x-2)^2}=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty,2)$	**2p**
c)	$f'(1)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(1,2)$	**3p**
	$f(x)\le f(1)\Rightarrow f(x)\le -\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty,2)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 (x+1)f(x)dx=\int_1^2 \ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_1^2-\int_1^2 1dx=$	**3p**
	$=2\ln 2-x\Big\vert_1^2=2\ln 2-1$	**2p**
b)	$\int_1^e \left(f(x)+(x+1)\cdot f'(x)\right)dx=\int_1^e \left((x+1)\cdot f(x)\right)' dx=$	**3p**
	$=(x+1)f(x)\Big\vert_1^e=\ln e=1$	**2p**
c)	$V=\pi\cdot\int_2^3 g^2(x)dx=\pi\cdot\int_2^3 (x+1)^2 dx=$	**2p**
	$=\pi\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\Big\vert_2^3=\frac{37\pi}{3}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1$.

5p **2.** Determinați numărul real m știind că $f(m)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+1}=1$.

5p **4.** În anul 2013, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 4% din valoarea veniturilor anuale ale firmei. Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2013.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,6)$, $B(2,6)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Arătați că $\mathrm{tg}^2 60°+\mathrm{tg}^2 45°=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real x știind că $A\cdot A-xA=I_2$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2(x+y-1)-xy$.

5p **a)** Arătaţi că $1*2=2$.

5p **b)** Arătaţi că $x*2=2*x=2$ pentru orice număr real x.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+f(x)$ pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=0$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2 3x^2\,dx=7$.

5p **b)** Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f pentru care $F(1)=2014$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural n, $n\geq 2$ ştiind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x}\,dx=\frac{13}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$	**2p**
	$3\cdot\frac{1}{3}=1$	**3p**
2.	$m-4=1$	**3p**
	$m=5$	**2p**
3.	$2x^2+1=1$	**3p**
	$x=0$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$100000=4\%\cdot x$, unde x reprezintă venitul anual al firmei	**3p**
	$x=2500000$ de lei	**2p**
5.	$AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$	**3p**
	$AB^2+AC^2=BC^2$, deci ΔABC este dreptunghic	**2p**
6.	$\text{tg}\,60°=\sqrt{3}$ și $\text{tg}\,45°=1$	**2p**
	$\text{tg}^2 60°+\text{tg}^2 45°=3+1=4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3\cdot(-2)-1\cdot(-5)=-1$	**3p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow 2A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -5 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A-xA=\begin{pmatrix}4-3x & 1-x\\ -5+5x & -1+2x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}4-3x & 1-x\\ -5+5x & -1+2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow x=1$	**2p**
2.a)	$1*2=2(1+2-1)-1\cdot 2=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
b)	$x*2=2(x+2-1)-x\cdot 2=2$	**2p**
	$2*x=2(2+x-1)-2x=2=x*2$ pentru orice număr real x	**3p**
c)	$-x^2+4x-2=x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x_1=1$ și $x_2=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)e^x=$	**2p**
	$=-1\cdot e^0=-1$	**3p**
b)	$f'(x)=1\cdot e^x+(x-1)e^x=$	**3p**
	$=e^x+f(x)$ pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$	**2p**
	$=f'(0)=0$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	O primitivă F a funcţiei f este de forma $F(x)=x^3+x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=2+c\Rightarrow c=2012\Rightarrow F(x)=x^3+x^2+2012$	**2p**
c)	$\int_1^n \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^n(3x+2)dx=\frac{3n^2+4n-7}{2}$	**3p**
	$\frac{3n^2+4n-7}{2}=\frac{13}{2}\Leftrightarrow 3n^2+4n-20=0\Rightarrow n_1=-\frac{10}{3}$ nu este număr natural şi $n_2=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_1 = 6$ și $a_2 = 12$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(3^x-1)(3^x-3)=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cifra 1.

5p **5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB=2$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Calculați aria triunghiului isoscel ABC știind că $A=\frac{\pi}{2}$ și $AC=4$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Determinaţi matricea $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(1)\cdot X=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f=X^3-2X^2+3X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2$.

5p **c)** Determinați numărul real m știind că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=8$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătaţi că $f(x)\leq\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}\,dx$. Arătaţi că $I_{n+1}\leq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}\,dx=\ln 3$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_3=18$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=36$	**3p**
2.	$x_V=-1$	**2p**
	$y_V=3$	**3p**
3.	$3^x=1$ sau $3^x=3$	**2p**
	$x=0$ sau $x=1$	**3p**
4.	Sunt 18 numere de două cifre care conțin cifra 1, deci sunt 18 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{18}{90}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$	**2p**
	ΔABC echilateral $\Rightarrow AC=2$	**3p**
6.	ΔABC dreptunghic isoscel $\Rightarrow AB=4$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{4\cdot 4}{2}=8$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&2\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&a\\a&2&2\\a&a&2\end{vmatrix}=(a-2)^2(a+2)$	**3p**
	$(a-2)^2(a+2)=0\Leftrightarrow a=-2$ sau $a=2$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&2\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+y+z=4\\x+2y+2z=5\\x+y+2z=4\end{cases}$	**2p**
	$X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot1^2+3\cdot1+m=$	**2p**
	$=m+2$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2\cdot3=-2$	**3p**

c)	$\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3m=0$	**2p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3m-10 \Rightarrow m=-6$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(e)=0$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(e,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\le f(e)\Rightarrow f(x)\le\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=\frac{11}{6}$	**2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+x+1}dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge0, x-1\le0$ și $x^2+x+1>0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**3p**
c)	$\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\int_0^a\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\left.\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\right\|_0^a=\ln\left(a^2+a+1\right)$	**3p**
	$\ln\left(a^2+a+1\right)=\ln3\Leftrightarrow a^2+a+1=3$ care are soluția pozitivă $a=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z = 3 + 2(1 - i)$.

5p **2.** Arătați că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 23$ ştiind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 10 = 0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuații $y = (a-1)x + 1$ și $y = 2x - 3$ sunt paralele.

5p **6.** Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 3$, $AC = 4$ și $BC = 5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(-x) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1) + A(2) + \cdots + A(n)) = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziţie asociativă $x * y = 4(x + y - 3) - xy$.

5p **a)** Calculaţi $2 * 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x * y = 4 - (x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - x + 1$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x \to e} f(x) = 1$.

5p **b)** Arătați că $f'(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **c)** Arătați că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (-3, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 8x + 15}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{2014} (x+3)(x+5) f(x)\, dx = 2014$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x) \cdot f'(x)\, dx = -\frac{1}{144}$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a > 0$ ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = a$, are aria egală cu $\frac{1}{2} \ln \frac{10}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=3+2-2i=$	**3p**
	$=5-2i$, deci partea reală a numărului z este egală cu 5	**2p**
2.	$x_1+x_2=3$, $x_1x_2=10$	**3p**
	$x_1+x_2+2x_1x_2=3+2\cdot 10=23$	**2p**
3.	$x^2+x+1=1 \Rightarrow x^2+x=0$	**3p**
	$x_1=-1$ și $x_2=0$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 2 moduri	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar cifra sutelor poate fi aleasă într-un singur mod	**2p**
	Se pot forma $2\cdot 2\cdot 1=4$ numere	**1p**
5.	$a-1=2$	**3p**
	$a=3$	**2p**
6.	$A=\dfrac{\pi}{2}$	**2p**
	$R=\dfrac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=3$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & 1\\ 1 & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=0$	**2p**
c)	$A(1)+A(2)+\dots+A(n)=\begin{pmatrix}1+2+...+n & n\\ n & 1+2+...+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\cdot n=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n	**3p**
2.a)	$2*4=4(2+4-3)-2\cdot 4=$	**3p**
	$=12-8=4$	**2p**

b)	$x * y = 4x + 4y - 12 - xy = 4 - xy + 4x + 4y - 16 =$ $= 4 - x(y-4) + 4(y-4) = 4 - (x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$x * x = 4 - (x-4)^2 \Rightarrow x * x * x = 4 + (x-4)^3$ $(x-4)^3 = x - 4 \Rightarrow x = 3$ sau $x = 4$ sau $x = 5$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x \to e} f(x) = \lim\limits_{x \to e}(x \ln x - x + 1) =$ $= e \ln e - e + 1 = 1$	**2p** **3p**
b)	$f'(x) = (x \ln x - x + 1)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 =$ $= \ln x + 1 - 1 = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$	**3p** **2p**
c)	$f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0,1)$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1, +\infty)$ $f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int\limits_0^{2014} (x+3)(x+5) f(x) dx = \int\limits_0^{2014} 1 dx =$ $= x \Big\|_0^{2014} = 2014$	**2p** **3p**
b)	$\int\limits_{-1}^{1} f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) \Big\|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(f^2(1) - f^2(-1)\right) =$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{576} - \frac{1}{64}\right) = -\frac{1}{144}$	**3p** **2p**
c)	$\mathcal{A} = \int\limits_0^a \|f(x)\| dx = \int\limits_0^a \frac{1}{(x+4)^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x+3}{x+5} \Big\|_0^a = \frac{1}{2} \ln \frac{5(a+3)}{3(a+5)}$ $\frac{5(a+3)}{3(a+5)} = \frac{10}{9} \Rightarrow a = 1$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $5\left(2+\sqrt{3}\right)-5\sqrt{3}=10$.

5p **2.** Determinați numărul real a știind că $f\left(1\right)=a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2x+1\right)=\log_2 5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(2,5\right)$ şi $B\left(3,5\right)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.

5p **6**. Arătați că $\sin^2 30°+\cos^2 45°=\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x știind că $B+C=A$.

5p **c)** Arătaţi că $B\cdot B+B=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p **a)** Arătați că $0\circ\left(-4\right)=-4$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=\left(x+4\right)\left(y+4\right)-4$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\ln x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in\left(0,+\infty\right)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f\left(x\right)-f\left(2\right)}{x-2}=\frac{3}{4}$.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F\left(x\right)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 e^x\,dx=e-1$.

5p **b)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Calculați $\int_0^1 F\left(x\right)dx$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5(2+\sqrt{3})=10+5\sqrt{3}$	**3p**
	$5(2+\sqrt{3})-5\sqrt{3}=10+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}=10$	**2p**
2.	$f(1)=a \Rightarrow 1+3=a$	**3p**
	$a=4$	**2p**
3.	$2x+1=5$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 9 numere de două cifre care sunt divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(2-3)^2+(5-5)^2}$	**3p**
	$AB=1$	**2p**
6.	$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4\cdot 2-1\cdot 8=0$	**3p**
b)	$B+C=\begin{pmatrix}4 & 2+x\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}4 & 2+x\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow x=6$	**2p**
c)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot B+B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
2.a)	$0\circ(-4)=0\cdot(-4)+4\cdot 0+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-16+12=-4$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+4x+4y+16-4=$	**2p**
	$=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$(x+4)^2-4=12$	**2p**
	$x^2+8x=0 \Rightarrow x_1=-8$ și $x_2=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=$	**3p**
	$=\frac{2+1}{2^2}=\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=-1$, $f'(1)=2$, deci ecuația tangentei este $y=2x-3$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 e^x dx=e^x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(e^x-\frac{x^2}{2}-1\right)'=e^x-x=$	**3p**
	$=f(x)$ pentru orice număr real x, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\left(e^x-\frac{x^2}{2}-1\right)dx=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1\frac{x^2}{2}dx-\int_0^1 dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\|_0^1-\frac{x^3}{6}\Big\|_0^1-x\Big\|_0^1=e-1-\frac{1}{6}-1=e-\frac{13}{6}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\right):\frac{19}{9}=1$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2014-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2014$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2+3x}=9^{x-1}$.
5p	**4.** Prețul unui aparat de fotografiat este de 360 de lei. Determinați prețul aparatului de fotografiat după o reducere cu 25%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$ și $B(2,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.
5p	**6.** Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC dreptunghic în A știind că $AC=6$ și $\sin B=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+y+11$.
5p	**1.** Calculați $8*(-3)$.
5p	**2.** Arătați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.
5p	**3.** Verificați dacă $e=-11$ este element neutru al legii de compoziție „$*$”.
5p	**4.** Determinați numerele întregi x știind că $\left(x^2\right)*x=121$.
5p	**5.** Arătați că $x*(x+23)=(x*x)*12$ pentru orice număr real x.
5p	**6.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg x*\lg x=13$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**1.** Calculați $\det(A(0))$.
5p	**2.** Determinați numărul real a știind că $2A(a)+A(a-3)=3A(0)$.
5p	**3.** Arătați că $A(1)+A(2)+\ldots+A(9)=9A(5)$.
5p	**4.** Arătați că $\det(A(a)+A(b))=4\det(A(a)\cdot A(b))$ pentru orice numere reale a și b.
5p	**5.** Verificați dacă matricea $A(-a)$ este inversa matricei $A(a)$ pentru orice număr real a.
5p	**6.** Determinați matricea $X=\begin{pmatrix}p & 2\\ q & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ știind că $X\cdot A(a)=A(a)\cdot X$ pentru orice număr real a.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_pedagogic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{1}{3}\right)^2+2=\frac{1}{9}+\frac{18}{9}=\frac{19}{9}$	**3p**
	$\frac{19}{9}:\frac{19}{9}=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2014-x=x-2014$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=2014$ și $y=0$	**2p**
3.	$x^2+3x=x-1\Leftrightarrow x^2+2x+1=0$	**3p**
	$x=-1$	**2p**
4.	$\frac{25}{100}\cdot 360=90$	**3p**
	După reducere prețul aparatului de fotografiat este $360-90=270$ de lei	**2p**
5.	M mijlocul segmentului $AB\Rightarrow x_M=\frac{-2+2}{2}=0$	**3p**
	$y_M=3$	**2p**
6.	$\frac{3}{5}=\frac{6}{BC}$	**3p**
	$BC=10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$8*(-3)=8-3+11=$	**3p**
	$=16$	**2p**
2.	$(x*y)*z=(x+y+11)*z=x+y+z+22$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(y+z+11)=x+y+z+22=(x*y)*z$ pentru orice numere reale x, y și z	**3p**
3.	$x*(-11)=x+(-11)+11=x$	**3p**
	$(-11)*x=-11+x+11=x$ pentru orice număr real x	**2p**
4.	$(x^2)*x=121\Leftrightarrow x^2+x-110=0$	**3p**
	$x_1=10$ și $x_2=-11$	**2p**
5.	$x*(x+23)=x+(x+23)+11=2x+34$	**2p**
	$(x*x)*12=(x+x+11)+12+11=2x+34=x*(x+23)$ pentru orice număr real x	**3p**
6.	$\lg x+\lg x+11=13$	**2p**
	$\lg x=1\Rightarrow x=10$ care verifică ecuația	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot 0=$	**3p**
	$=1$	**2p**

2.	$2\cdot\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & a-3\\0 & 1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3 & 3a-3\\0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
	$3a-3=0\Leftrightarrow a=1$	**2p**
3.	$A(1)+A(2)+\ldots+A(9)=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}1 & 9\\0 & 1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}9 & 1+2+\ldots+9\\0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 45\\0 & 9\end{pmatrix}=9\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\0 & 1\end{pmatrix}=9A(5)$	**3p**
4.	$A(a)+A(b)=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & b\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & a+b\\0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(a)+A(b)\right)=4$	**2p**
	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & a+b\\0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(a)\cdot A(b)\right)=1\Rightarrow\det\left(A(a)+A(b)\right)=4\det\left(A(a)\cdot A(b)\right)$	**3p**
5.	$A(a)\cdot A(-a)=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
	$A(-a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ pentru orice număr real a	**2p**
6.	$\begin{pmatrix}p & 2\\q & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p & 2\\q & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}p & pa+2\\q & qa+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+qa & 2+a\\q & 1\end{pmatrix}$ pentru orice număr real a	**3p**
	$p=1$ și $q=0\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real x știind că numerele 2, 4 și $x+5$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+4$ este situată deasupra axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$ și $B(1,2)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq-\frac{1}{4}$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-4X+2a$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Determinați numărul real a știind că $1+i$ este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Pentru $a=3$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-31$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_2=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot(x+5)=4^2$	**2p**
	$x=3$	**3p**
2.	$\Delta=1-16=-15$	**2p**
	$a=1>0$ și $\Delta<0\Rightarrow$ parabola asociată funcției f este situată deasupra axei Ox	**3p**
3.	$x^2-1=8\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x_1=-3$ și $x_2=3$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care au suma cifrelor egală cu 7, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	$M(0,3)$	**2p**
	$OM=3$	**3p**
6.	$x=\dfrac{\pi}{6}$	**2p**
	$\sin 2x=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&2x&0\\0&4x+1&0\\0&3x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2y&0\\0&4y+1&0\\0&3y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2x+2y+8xy&0\\0&4x+4y+16xy+1&0\\0&3x+3y+12xy&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&2(x+y+4xy)&0\\0&4(x+y+4xy)+1&0\\0&3(x+y+4xy)&1\end{pmatrix}=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=I_3\Rightarrow A(2x+4x^2)=A(0)\Rightarrow 2x+4x^2=0$	**3p**
	$x_1=0$ și $x_2=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+0^2-4\cdot 0+2a=$	**2p**
	$=2a$	**3p**
b)	$x_1=1+i\Rightarrow x_2=1-i$	**1p**
	$x_1+x_2+x_3=-1\Rightarrow x_3=-3$	**2p**
	$x_1x_2x_3=-2a\Rightarrow a=3$	**2p**

c)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(1+i)^3+(1-i)^3+(-3)^3=$	**3p**
	$=(2i-2)+(-2i-2)-27=-31$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x^2)'\cdot(x-2)-x^2\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(4)=f'(4)(x-4)$	**2p**
	$f(4)=8$, $f'(4)=0$, deci ecuația tangentei este $y=8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$	**1p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(2,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(2,4]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
2.a)	$I_2=\int_0^1\dfrac{x^2}{x^3+1}dx=\dfrac{1}{3}\int_0^1\dfrac{3x^2}{x^3+1}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}\ln 2$	**3p**
b)	$I_{n+3}+I_n=\int_0^1\dfrac{x^{n+3}}{x^3+1}dx+\int_0^1\dfrac{x^n}{x^3+1}dx=\int_0^1\dfrac{x^n(x^3+1)}{x^3+1}dx=$	**3p**
	$=\int_0^1 x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\ge 0$, $x^3+1>0\Rightarrow I_n\ge 0$	**2p**
	$I_{n+3}\ge 0$ și $I_{n+3}+I_n=\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Calculați z^2.

5p **2.** Determinaţi numărul real m ştiind că punctul $M(m,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-3) = 2$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu număr impar de elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu M mijlocul laturii AD. Arătați că $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Arătați că $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 2014 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că $A + A \cdot A = 2014 I_2$.

5p **c)** Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $A \cdot X = 2014\, I_2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X^2 + mX - 6$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $f(0)$.

5p **b)** Arătați că $\dfrac{1}{x_1x_2} + \dfrac{1}{x_1x_3} + \dfrac{1}{x_2x_3} = 1$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m știind că rădăcinile polinomului f sunt trei numere întregi consecutive.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \ln 2$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-1,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuaţii $x = 0$ și $x = n$, are aria mai mare sau egală cu $\ln 4$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Barem de evaluare şi de notare

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z^2=(2+i)^2=4+4i+i^2=$	**3p**
	$=3+4i$	**2p**
2.	$f(m)=1$	**2p**
	$m-3=1 \Leftrightarrow m=4$	**3p**
3.	$x-3=9$	**3p**
	$x=12$ care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Numărul submulţimilor cu un număr impar de elemente ale unei mulţimi cu 4 elemente este egal cu $C_4^1+C_4^3=$	**3p**
	$=8$	**2p**
5.	$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$	**2p**
	$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}$	**3p**
6.	$\cos C=\sin B$, $\sin C=\cos B$	**2p**
	$\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=\sin^2 B+\cos^2 B=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0\cdot(-1)-1\cdot 2014=$	**3p**
	$=-2014$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2014 & -2014\\ -1 & 2015\end{pmatrix}$	**3p**
	$A+A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2014 & -2014\\ -1 & 2015\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2014 & 0\\ 0 & 2014\end{pmatrix}=2014I_2$	**2p**
c)	$A^{-1}=\frac{1}{2014}\begin{pmatrix}1 & 2014\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=2014A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2014\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3-6\cdot 0^2+m\cdot 0-6=$	**2p**
	$=-6$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=6$, $x_1x_2x_3=6$	**2p**
	$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{6}=1$	**3p**
c)	f are rădăcinile $x_1=k-1$, $x_2=k$ şi $x_3=k+1$ unde $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_1+x_2+x_3=3k\Rightarrow k=2$	**2p**
	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3\Rightarrow m=11$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x'\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f'(1)=0$, deci ecuaţia tangentei este $y=\dfrac{1}{2}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=-1$	**2p**
	$f'(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,-1)$, $f'(x)>0$ pentru $x\in(-1,1)$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	Punctele de extrem sunt $x=-1$ și $x=1$	**1p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)dx=\int_0^1\dfrac{1}{x+1}dx=$	**2p**
	$=\ln(x+1)\Big\vert_0^1=\ln 2$	**3p**
b)	F este o primitivă a lui $f\Rightarrow F''(x)=f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{(x+3)^2}$	**2p**
	$F''(x)<0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F este concavă pe $(-1,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^n\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^n\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}\right)dx=\ln\left((x+1)(x+2)(x+3)\right)\Big\vert_0^n=$	**2p**
	$=\ln\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$	**1p**
	$n\geq 1\Rightarrow(n+1)(n+2)(n+3)\geq 24\Rightarrow\mathcal{A}\geq\ln 4$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x-1}=9$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 3.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(4,1)$ și $C(4,4)$. Arătați că $AB=BC$.

5p **6.** Determinați aria triunghiului ABC dreptunghic în A știind că $AB=6$ și $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=0$.

5p **b)** Arătaţi că $A\cdot A=5A$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x și y pentru care $A+\begin{pmatrix}x&y\\y&-3\end{pmatrix}=I_2$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=x+y+xy$.

5p **a)** Arătaţi că $(-1)\circ 1=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+1)\circ(x-3)=4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=3$, situat pe graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(2x+1)\,dx=2$.

5p **b)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x-1$.

5p **c)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este o funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$	**2p**
2.	$f(0)=4$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=0$ și $y=4$	**2p**
3.	$3x-1=2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Numerele naturale de o cifră mai mici sau egale cu 3 sunt $0, 1, 2$ și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 10 numere naturale de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	**2p**
5.	$AB=3$	**2p**
	$BC=3\Rightarrow AB=BC$	**3p**
6.	$AC=8$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 4-2\cdot 2=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=5A$	**2p**
c)	$A+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ 2+y & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ 2+y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0,\ y=-2$	**2p**
2.a)	$(-1)\circ 1=-1+1+(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=0-1=-1$	**2p**
b)	$x\circ y=x+xy+y+1-1=$	**2p**
	$=x(y+1)+(y+1)-1=(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$(x+2)(x-2)-1=4 \Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x_1=-3$ și $x_2=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{x-2}=$	**2p**
	$=\frac{3-1}{3-2}=2$	**3p**
b)	$f'(x)=\frac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}=$	**2p**
	$=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=-\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
c)	$y-f(3)=f'(3)(x-3)$	**2p**
	$f(3)=2$, $f'(3)=-1$, deci ecuaţia tangentei este $y=-x+5$	**3p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$V=\pi\int\limits_0^1 g^2(x)dx=\pi\int\limits_0^1 x^4 dx=$	**2p**
	$=\pi\frac{x^5}{5}\Big\vert_0^1=\frac{\pi}{5}$	**3p**
c)	F este o primitivă a funcţiei $f \Rightarrow F'(x)=f(x)$	**2p**
	$F'(x)=(x+1)^2\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcţia F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**