Chương 4

HỆ THỨC ĐỆ QUY

lvluyen@hcmus.edu.vn

http://bit.do/toanroirac

FB: **facebook.com/trr1920**

Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh

— — —— Tháng 9 năm 2019 — — ——

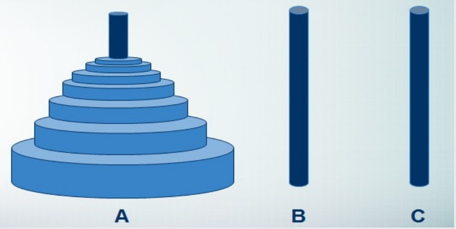
Nội dung

Chương 4. HỆ THỨC ĐỆ QUY

- Giới thiệu
- Hệ thức đệ quy tuyến tính với hệ số hằng
- Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất
- Nghiệm của hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

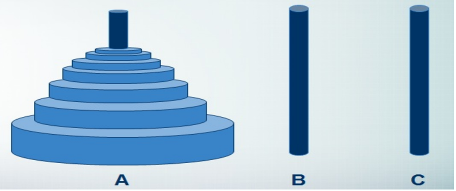
4.1. Giới thiệu

Ví dụ. Tháp Hà Nội



Có 3 cọc A, B, C và n đĩa với đường kính đôi một khác nhau. Nguyên tắc đặt đĩa vào cọc là: mỗi đĩa chỉ được chồng lên đĩa lớn hơn nó.

Ban đầu, cả n đĩa được đặt chồng lên nhau ở cọc A, hai cọc B và C để trống. Vấn đề đặt ra là chuyển cả n đĩa ở cọc A sang cọc C (có thể qua trung gian cọc B), mỗi lần chỉ chuyển được một đĩa. Ta gọi x_n là số lần chuyển đĩa, tìm x_n?



Giải. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$.

Với $n > 1$, trước hết ta chuyển $n-1$ đĩa bên trên sang cọc B qua trung gian cọc C (giữ nguyên đĩa thứ n dưới cùng ở cọc A). Số lần chuyển $n-1$ đĩa đó là x_{n-1}. Sau đó ta chuyển đĩa thứ n từ cọc A sang cọc C. Cuối cùng ta chuyển $n-1$ đĩa từ cọc B sang cọc C (cọc A làm trung gian). Số lần chuyển $n-1$ đĩa đó lại là x_{n-1}.

Như vậy số lần chuyển toàn bộ n đĩa từ A sang C là:

$$\boldsymbol{x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1}.$$

Nghĩa là

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_n & = & 2x_{n-1} + 1 \quad \text{với } n > 1 \end{cases}$$

Ví dụ. Một cầu thang có n bậc. Mỗi bước đi gồm 1 hoặc 2 bậc. Gọi x_n là số cách đi hết cầu thang. Tìm x_n?

Giải. Với $n = 1$, ta có $x_1 = 1$. Với $n = 2$, ta có $x_2 = 2$.

Với $n > 2$, để khảo sát x_n ta chia thành hai trường hợp loại trừ lẫn nhau:

- **Trường hợp 1.** Bước đầu tiên gồm 1 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n-1$ bậc nên số cách đi hết cầu thang là x_{n-1}.
- **Trường hợp 2.** Bước đầu tiên gồm 2 bậc. Khi đó, cầu thang còn $n-2$ bậc nên số cách đi hết cầu thang trong là x_{n-2}.

Theo nguyên lý cộng, số cách đi hết cầu thang là $x_{n-1} + x_{n-2}$. Do đó ta có:

$$\boldsymbol{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}$$

Như vậy

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2; \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{với } n > 2. \end{cases}$$

Định nghĩa. Một ***hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k với hệ số hằng*** là một hệ thức có dạng:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n \qquad (1)$$

trong đó

- $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_k$ là các hệ số thực;
- $\{f_n\}$ là một dãy số thực cho trước;
- $\{x_n\}$ là dãy ẩn nhận các giá trị thực.

Trường hợp dãy $f_n = 0$ với mọi n thì **(1)** trở thành

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad (2)$$

Ta nói **(2)** là một ***hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất cấp k với hệ số hằng***.

Ví dụ.

- $2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3 \longrightarrow$ tuyến tính cấp 2.
- $x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-3} = 20 + n2^{n-2} + 3^n \longrightarrow$ tuyến tính cấp 3.
- $2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n \longrightarrow$ tuyến tính cấp 2.
- $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \longrightarrow$ tuyến tính thuần nhất cấp 2.

Định nghĩa. Xét hệ thức đệ quy tuyến tính cấp k

$$\boldsymbol{a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f_n} \qquad \mathbf{(1)}$$

Mỗi dãy $\boldsymbol{\{x_n\}}$ thỏa **(1)** được gọi là một ***nghiệm*** của **(1)**.

Nhận xét rằng mỗi nghiệm $\boldsymbol{\{x_n\}}$ của **(1)** được hoàn toàn xác định bởi k giá trị ban đầu $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$.

Họ dãy số $\{x_n = x_n(C_1, C_2, \ldots, C_k)\}$ phụ thuộc vào k họ tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ được gọi là ***nghiệm tổng quát*** của **(1)** nếu mọi dãy của họ này đều là nghiệm của **(1)**.

Với k giá trị ban đầu $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, tồn tại duy nhất các giá trị của k tham số $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sao cho nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng thỏa

$$x_0 = y_0,\ x_1 = y_1,\ \ldots\ , x_{k-1} = y_{k-1} \qquad (*)$$

Khi đó, nghiệm $\{x_n\}$ tương ứng được gọi là ***nghiệm riêng*** ứng với điều kiện ban đầu $(*)$.

Giải một hệ thức đệ quy là đi **tìm nghiệm tổng quát** của nó; nhưng nếu hệ thức đệ quy có kèm theo điều kiện ban đầu, ta phải **tìm nghiệm** thỏa điều kiện ban đầu đó.

Ví dụ.

- $2x_n - 3x_{n-1} = 0$ có nghiêm tổng quát là $x_n = C\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
- $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ có nghiệm là $x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n$.

Lưu ý. Trong phạm vi của chương trình ta chỉ xét các hệ thức đệ quy tuyến tính (cấp 1 và 2) với hệ số hằng.

4.3. Nghiệm của HTĐQTT thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

Phương trình đặc trưng của **(1)** là phương trình bậc k định bởi

$$\boldsymbol{a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0} \qquad (*)$$

▷ **Trường hợp $k = 1$**. Phương trình đặc trưng $(*)$ trở thành

$$\boldsymbol{a_0\lambda + a_1 = 0}$$

nên có nghiệm là

$$\lambda_0 = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Khi đó, **(1)** có nghiệm tổng quát là: $\boldsymbol{x_n = C \cdot \lambda_0^n}$.

▷ **Trường hợp $k = 2$**. Phương trình đặc trưng $(*)$ trở thành

$$\boldsymbol{a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0} \qquad (*)$$

Người ta chứng minh được kết quả sau:

- Nếu $(*)$ có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì (1) có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$$

- Nếu $(*)$ có nghiệm kép thực λ_0 thì (1) có nghiệm tổng quát là

$$x_n = (C_1 + nC_2) \cdot \lambda_0^n$$

- Nếu $(*)$ có hai nghiệm phức liên hợp được viết dưới dạng

$$\lambda = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

thì (1) có nghiệm tổng quát là

$$x_n = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)$$

Ví dụ. Giải hệ thức đệ quy $\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} = 0 \\ x_0 = 5. \end{cases}$ (1)

Giải. Phương trình đặc trưng là $\lambda - 2 = 0$ có nghiệm là $\lambda = 2$. Suy ra (1) có nghiệm tổng quát là $x_n = C \cdot 2^n$.

Từ điều kiện $x_0 = 5$ ta có $C = 5$. Suy ra nghiệm của $(*)$ là $x_n = 5 \cdot 2^n$.

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}; \\ x_0 = 4; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ **(2)**

Giải.

$$\begin{aligned} & x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \\ \Leftrightarrow\ & x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

có 2 nghiệm thực phân biệt $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$. Suy ra **(2)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

Vì $x_0 = 4$; $x_1 = 9$ nên $\begin{cases} C_1 + C_2 = 4; \\ 2C_1 + 3C_2 = 9. \end{cases}$ Suy ra $C_1 = 3, C_2 = 1$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$x_n = 3 \cdot 2^n + 3^n.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} 4x_{n+1} - 12x_n + 9x_{n-1} = 0; \\ x_0 = 2; \\ x_1 = 9. \end{cases}$ **(3)**

Giải. Phương trình đặc trưng

$$\boldsymbol{4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0}$$

có 1 nghiệm thực kép là $\lambda_0 = 3/2$. Suy ra **(3)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = (C_1 + nC_2)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Vì $x_0 = 2$; $x_1 = 9$ nên $\begin{cases} C_1 = 2; \\ \dfrac{3}{2}(C_1 + C_2) = 9. \end{cases}$ Suy ra $C_1 = 2, C_2 = 4$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$x_n = (2 + 4n)\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0; \\ x_0 = 1; \\ x_1 = 4. \end{cases}$ **(4)**

Giải. Phương trình đặc trưng $\boldsymbol{\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0}$ có 2 nghiệm phức liên hợp là

$$\lambda = 1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Suy ra **(4)** có nghiệm tổng quát là

$$x_n = 2^n\left(A\cos\frac{n\pi}{3} + B\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Vì $x_0 = 1$; $x_1 = 4$ nên $\begin{cases} A = 1; \\ 2\left(\dfrac{1}{2}A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B\right) = 4. \end{cases}$ Suy ra $A = 1, B = \sqrt{3}$. Vậy nghiệm của hệ thức đệ quy là

$$x_n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

4.4. Nghiệm của HTĐQTT không thuần nhất

Xét hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất

$$\boldsymbol{a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = f_n} \qquad (1)$$

Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là

$$\boldsymbol{a_0x_n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của **(2)** là:

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0 \qquad (*)$$

Khi đó

Nghiệm tổng quát của (1) = **Nghiệm tổng quát của (2)** + **Nghiệm riêng của (1)**

Để tìm một nghiệm riêng của (1), ta xem xét hai dạng đặc biệt của vế phải $\boldsymbol{f_n}$ như sau:

- Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$, trong đó $P_r(n)$ là một đa thức bậc r theo n; β là một hằng số.
- Dạng 2. $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + \ldots + f_{n_s}$, trong đó các $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_s}$ thuộc Dạng 1.

Dạng 1. $f_n = \beta^n P_r(n)$. Có ba trường hợp xảy ra:

- **TH 1.** Nếu β không là nghiệm của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = \beta^n Q_r(n)$$

- **TH 2.** Nếu β là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n\beta^n Q_r(n)$$

- **TH 3.** Nếu β là nghiệm kép của phương trình đặc trưng $(*)$ thì (1) có một nghiệm riêng dạng:

$$x_n = n^2\beta^n Q_r(n)$$

Chú ý $Q_r(n) = A_r n^r + A_{r-1} n^{r-1} + \ldots + A_0$ là đa thức có cùng bậc r với $P_r(n)$, trong đó $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_0$ là $r+1$ hệ số cần xác định.

Để xác định các hệ số trên ta cần thế $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}$ vào (1) và cho n nhận $r+1$ giá trị nguyên nào đó hoặc đồng nhất các hệ số tương ứng ở hai vế để được một hệ phương trình. Các hệ số trên là nghiệm của hệ phương trình này.

Dạng 2. $f_n = f_{n_1} + f_{n_2} + \ldots + f_{n_s}$. Bằng cách như trên ta tìm được nghiệm riêng $x_{n_i} (1 \leq i \leq s)$ của hệ thức đệ quy

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f_{n_i}$$

Khi đó

$$x_n = x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots + x_{n_s}$$

là một nghiệm riêng của (1).

Ví dụ. Cho hệ thức đệ quy

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = f_n \qquad \mathbf{(1)}.$$

Khi đó hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$. Ta xét một số trường hợp sau:

- Nếu $f_n = 2n + 1$ thì **(1)** có nghiệm riêng dạng $x_n^{(p)} = an + b$.
- Nếu $f_n = 5^n(3n^2 + 2n + 1)$ thì $x_n^{(p)} = 5^n(an^2 + bn + c)$.
- Nếu $f_n = 5^n$, thì $x_n^{(p)} = 5^n a$.
- Nếu $f_n = 3^n$ thì $x_n^{(p)} = n3^n a$.
- Nếu $f_n = 2^n(3n + 1)$ thì $x_n^{(p)} = n2^n(an + b)$.

Ví dụ. Cho hệ thức đệ quy

$$x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = f_n \qquad \mathbf{(1)}.$$

Khi đó hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 6x_{n-1} + 9x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0} \qquad (*)$$

có nghiệm kép là $\lambda_0 = 3$. Ta xét một số trường hợp sau:

- Nếu $f_n = 3^n$ thì **(1)** có nghiệm riêng dạng $x_n^{(p)} = n^2 3^n a$.
- Nếu $f_n = 3^n(5n+1)$ thì $x_n^{(p)} = n^2 3^n(an+b)$.
- Nếu $f_n = 2^n(5n+1)$ thì $x_n^{(p)} = 2^n(an+b)$.

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n+1; \\ x_0 = 1;\ x_1 = 3. \end{cases}$ **(1)**

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 2$ và $\lambda_2 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1\, 2^n + C_2\, 3^n} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 2n + 1$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 1$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 1$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{x_n = an + b} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$(an+b)-5[a(n-1)+b]+6[a(n-2)+b]=2n+1.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n=0; n=1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} -7a+2b=1; \\ -5a+2b=3. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a=1; b=4$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n+4} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = C_1\, 2^n + C_2\, 3^n + n + 4 \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0=1$ và $x_1=3$ vào (6) ta được

$$\begin{cases} C_1+C_2=-3; \\ 2C_1+3C_2=-2. \end{cases}$$

Từ đó ta có $C_1=-7$ và $C_2=4$. Thế vào (6) ta được

$$\boldsymbol{x_n = -7\cdot 2^n + 4\cdot 3^n + n + 4}.$$

Ví dụ. Giải hệ thức đệ quy

$$2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 4n + 1. \qquad \mathbf{(1)}$$

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{2x_n - 3x_{n-1} + x_{n-2} = 0} \qquad (2)$$

Phương trình đặc trưng của **(2)** là:

$$\boldsymbol{2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 1/2$. Do đó nghiệm tổng quát của (2) là:

$$x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 4n + 1$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 1$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 1$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{x_n = n(an + b)} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$2n(an+b) - 3(n-1)[a(n-1)+b] + (n-2)[a(n-2)+b] = 4n+1.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n = 0; n = 1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} a + b = 1; \\ 3a + b = 5. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 2; b = -1$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n(2n - 1)} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + n(2n-1)$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của $\begin{cases} x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = (18n+12)3^n; \\ x_0 = 2;\ x_1 = 0. \end{cases}$ **(1)**

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = 0} \qquad \mathbf{(2)}$$

Phương trình đặc trưng của (2) là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0} \qquad (*)$$

có nghiệm kép là $\lambda_0 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của **(2)** là:

$$\boldsymbol{x_n = (C_1 + nC_2)3^n} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**.Vế phải của **(1)** là $f_n = (18n+12)3^n$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 3$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 1$.

Vì $\beta = 3$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{x_n = n^2 3^n (an+b)} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$(n+1)^2 3^{n+1}[a(n+1)+b] - 6n^2 3^n(an+b)+ \\ 9(n-1)^2 3^{n-1}[a(n-1)+b] = (18n+12)3^n.$$

Cho n lần lượt nhận hai giá trị $n=0; n=1$ ta được hệ:

$$\begin{cases} 6b = 12; \\ 54a + 18b = 90. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 1; b = 2$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{x_n = n^2(n+2)3^n} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$x_n = (C_1 + nC_2)3^n + n^2(n+2)3^n \qquad (6)$$

Thay điều kiện $x_0 = 2$ và $x_1 = 0$ vào (6) ta được

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ 3C_1 + 3C_2 + 9 = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có $C_1 = 2$ và $C_2 = -5$. Thế vào (6) ta được

$$\boldsymbol{x_n} = (2-5n)3^n + n^2(n+2)3^n = \boldsymbol{3^n(n^3 + 2n^2 - 5n + 2)}$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3\cdot 4^n \qquad \mathbf{(1)}$$

Giải. Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0} \qquad \mathbf{(2)}$$

Phương trình đặc trưng của **(2)** là:

$$\boldsymbol{\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0} \qquad (*)$$

có hai nghiệm thực là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 3$. Do đó nghiệm tổng quát của **(2)** là:

$$\boldsymbol{x_n = C_1 + C_2\cdot 3^n} \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 20 + (2-n)2^{n-2} + 3\cdot 4^n$ thuộc **Dạng 2**. Ta xét các hệ thức đệ quy sau:

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 20 \qquad (1a)$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = (2-n)2^{n-2} \qquad (1b)$$

$$x_n - 4x_{n-1} + 3x_{n-2} = 3 \cdot 4^n \qquad (1c)$$

Bằng cách giải tương tự như **Dạng 1**, ta có các nghiệm riêng của

- $(1a)$ là $x_{n_1} = -10n$
- $(1b)$ là $x_{n_2} = n2^n$
- $(1c)$ là $x_{n_3} = 4^{n+2}$

Như vậy, **(1)** có nghiệm riêng là:

$$\boldsymbol{x_n = -10n + n2^n + 4^{n+2}} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là

$$\boldsymbol{x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n - 10n + n2^n + 4^{n+2}}$$

Ví dụ. Với $n \geq 1$, đặt

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)2^k.$$

Tính tổng s_n theo n bằng cách thiết lập một hệ thức đệ quy có điều kiện đầu và tìm nghiệm của hệ thức đệ quy đó.

Giải. Ta có $s_n = s_{n-1} + n(n+1)2^n$ và $s_1 = 1(1+1)2^1 = 4$. Như vậy hệ thức đệ quy là

$$\begin{cases} s_n - s_{n-1} = 2^n(n^2+n) \\ s_1 = 4. \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất tương ứng là:

$$\boldsymbol{s_n - s_{n-1} = 0} \qquad \mathbf{(2)}$$

Phương trình đặc trưng của **(2)** là:

$$\boldsymbol{\lambda - 1 = 0} \qquad (*)$$

có một nghiệm là $\lambda = 1$. Do đó nghiệm tổng quát của **(2)** là:

$$s_n = C. \qquad (3)$$

Bây giờ ta tìm một nghiệm riêng của **(1)**. Vế phải của **(1)** là $f_n = 2^n(n^2+n)$ có dạng $\boldsymbol{\beta^n P_r(n)}$ với $\beta = 2$ và $P_r(n)$ là đa thức bậc $r = 2$.

Vì $\beta = 2$ không nghiệm của phương trình đặc trưng $(*)$ nên **(1)** có một nghiệm riêng dạng:

$$\boldsymbol{s_n = 2^n(an^2+bn+c)} \qquad (4)$$

Thế (4) vào **(1)** ta được:

$$2^n(an^2+bn+c) - 2^{n-1}[a(n-1)^2 + b(n-1) + c] = 2^n(n^2+n)$$

Cho n lần lượt nhận ba giá trị $n = 0; n = 1; n = 2$ ta được hệ:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}\,b + \dfrac{1}{2}\,c = 0; \\ 2\,a + 2\,b + c = 4; \\ 14\,a + 6\,b + 2\,c = 24. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 2; b = -2; c = 4$. Thế vào (4) ta tìm được một nghiệm riêng của **(1)** là:

$$\boldsymbol{s_n = 2^n(2n^2 - 2n + 4)} \qquad (5)$$

Từ (3) và (5) ta suy ra nghiệm tổng quát của **(1)** là:

$$s_n = C + 2^n(2n^2 - 2n + 4) \qquad (6)$$

Thay điều kiện $s_1 = 4$ vào (6) ta được $C = -4$. Vậy nghiệm của **(1)** là

$$\boldsymbol{s_n = -4 + 2^n(2n^2 - 2n + 4)}.$$

Ví dụ. Cho $x_0 = 1$ và $x_1 = 2$. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $x_{n+1} - 3x_n + 2x_{n-1} = n$, với $n \geq 1$.

Đáp án. $x_n = 3 \cdot 2^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 2$

Ví dụ.(tự làm) Gọi x_n là số chuỗi bit có chiều dài n mà không có 2 bit 0 đứng liền nhau. Hãy lập hệ thức đệ quy của x_n và tìm x_n.

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy
$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}.$$

b) Tìm một nghiệm riêng của hệ thức đệ quy
$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + (18n-6)3^{n-1}.$$

c) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu: $a_0 = 2, a_1 = 9$ của hệ thức đệ quy
$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n3^{n+1}.$$

Đáp án. a) $x_n = 3^n(C_1 + C_2 \cdot n)$ b) $x_n = n^2 3^n(n+2)$

c) $x_n = 3^n\left(\frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - n + 2\right)$

Ví dụ.(tự làm) Cho $x_0 = 1$ và $x_1 = 6$. Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy $x_n - 4x_{n-1} + 8x_{n-2} = 0$, với $n \geq 2$.

Đáp án. $x_n = (2\sqrt{2})^n \left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + 2\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy: $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$

b) Tìm nghiệm của hệ thức đệ quy: $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = (6n-5)2^{n-1}$ thỏa điều kiện đầu $x_0 = 7, x_1 = 4$.

Đáp án. a) $x_n = C_1\,(-1)^n + C_2\,2^n$ b) $x_n = 4\cdot(-1)^n + 2^n(n^2+3)$

Ví dụ.(tự làm)

a) Tìm nghiệm tổng quát của hệ thức đệ quy: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$.

b) Tìm nghiệm thỏa điều kiện đầu $a_0 = 8, a_1 = 5$ của hệ thức đệ quy: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 10n(-2)^n - 3(-2)^{n-1}$

Đáp án. a) $a_n = C_1\cdot(-2)n + C_2\cdot 3^n$

b) $a_n = 7\cdot 3^n + (-2)^n(2n^2+5n+1)$

Bài tập. Giải các hệ thức đệ quy sau

a) $\begin{cases} x_n + 4x_{n-1} - 5x_{n-2} = 12n + 8; \\ x_0 = 0, x_1 = -5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51)3^n; \\ x_0 = 3, x_1 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 2; \\ x_0 = 1, x_1 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2} = -n^2 - 2n + 3; \\ x_0 = 1, x_1 = 3. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_{n+2} - 16x_{n+1} + 64x_n = 128 \cdot 8^n; \\ x_0 = 2, x_1 = 32. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 15x_n = 2 \cdot 5^{n+1}; \\ x_0 = -1, x_1 = -2. \end{cases}$

Xem đáp án ở slide kế tiếp

Đáp án.

a. $x_n = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3}(-5)^n + n^2 + 4n$

b. $x_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + (-2)^n + 3^n n$

c. $x_n = n^2 - 2n + 1$

d. $x_n = -3 \cdot 2^n + n^2 + 4n + 4$

e. $x_n = 8^n(n^2 + n + 2)$

f. $x_n = 3^n + 5^n(n - 2)$