

1. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf $[a; b]$. $\underline{\Delta}$ Wechselseitige Rate

$f(x) = (x+1)^2; [0; 2]$	$\frac{f(2) - f(0)}{2-0} = \frac{9-1}{2} = 4$
$f(x) = 6x - 2x^3; [1; 3]$	$\frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{-36-4}{2} = \frac{-40}{2} = -20$
$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}; [-1; 2]$	$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3e - 3e^{-\frac{1}{2}}}{3} = \frac{3e - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}}{3} = e - \frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) = 2\sin(2x); [0; \frac{\pi}{4}]$	$\frac{f(\frac{\pi}{4}) - f(0)}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{2-0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{\pi}{4}} = 2,54$
$f(x) = 9; [-5; 3]$	0
$f(x) = x^4 - x^2; [-2; 0]$	$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{0 - 12}{0 - (-2)} = \frac{-12}{2} = -6$

2. Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0 .

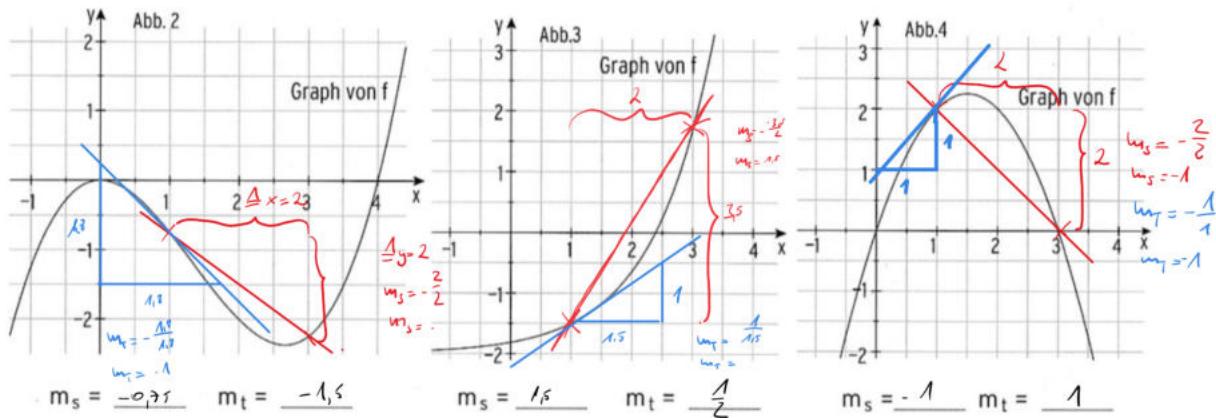
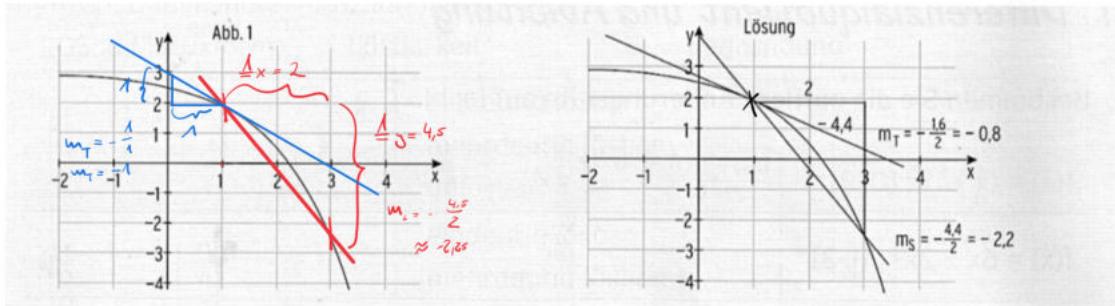
$f(x) = x^2 + 2; x_0 = 2$	$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2 - 6}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$ $h + 4 \rightarrow 4$ für $h \rightarrow 0$ $m_t = f'(2) = 4$
$f(x) = 6x^2 - 2; x_0 = 1$	$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{6 \cdot (1+h)^2 - 2 - 4}{h} = \frac{6 \cdot (1+2h+h^2) - 6}{h} = \frac{6h+12h+h^2}{h} = \frac{12h+h^2}{h} = 12 + h$ für $h \rightarrow 0$ $m_t = 12$
$f(x) = x^2 - x; x_0 = 0$	$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{(x+h)^2 - (x+h) - f(x)}{h} = \frac{h^2 - h}{h} = h - 1$ $\lim_{h \rightarrow 0} h - 1 = -1$

3. Für eine Funktion f gilt folgende Bedingung. Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild K von f treffen?

$f'(2) = -3$	K hat in $x = 2$ die Steigung -3.
$f'(4) = 0$	K hat in $x = 4$ die Steigung 0.
$f'(x) > 0; x \in \mathbb{R}$	K hat eine positive Steigung für alle $x \in \mathbb{R}$
$f(-1) = 0$	Der Punkt P(-1 0) liegt auf K.
$f(4) < 0$	Der Funktionswert an der Stelle 4 ist negativ.
$f'(-2) = -1$	K hat im $x = -2$ die Steigung -1.
$f(3) = 4 \wedge f'(3) = 0$ und	Punkt P(3 4) liegt auf K und K hat im $x > 3$ Steigung 0.
$f'(x) = 1$	K hat auf unb. x Steigung 1

$f'(2) = -3$ Funktion hat an Stelle 2 von -3

4. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f auf $[1; 3]$ und die momentane Änderungsrate in $x_0 = 1$ mithilfe der Abbildung.

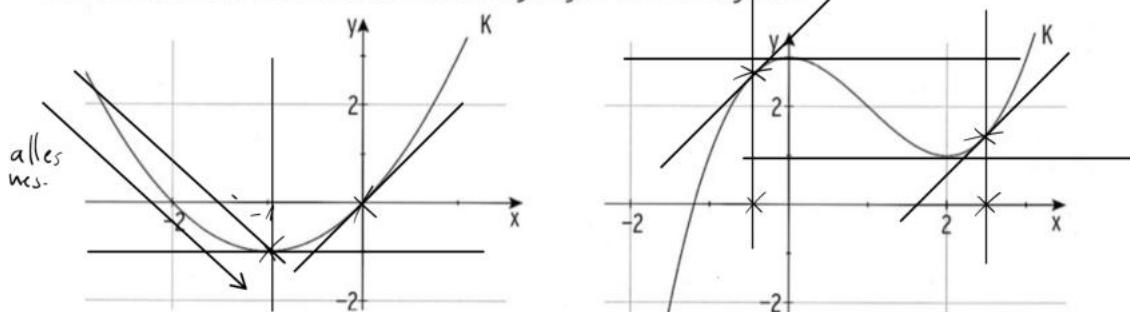


5. Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f . Beantworten Sie folgende Fragen.

a) An welcher Stelle hat K eine waagrechte Tangente?

b) An welcher Stelle hat K die Steigung 2?

c) Auf welchem Bereich sind die Steigungen von K negativ?

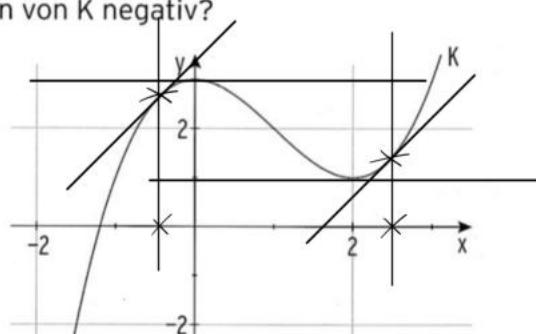


Lösung:

a) $x = -1$

b) $x = 0$

c) $f'(x) < 0$ für $x < -1$



Lösung:

a) $x = 0 ; x = 2$

b) $x = -0,5 ; x = 2,5$

c) $f'(x) < 0$ für $0 < x < 2$

$$f(x) = x^2 - x \quad \xleftarrow{x_0 \text{ einsetzen}} \quad \text{ges: Steigung an } x_0 = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^2 - (0+h) - 0}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-1}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} h - 1 = -1$$

6. Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f und der zugehörigen Ableitungsfunktion f' . Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

a)

$f(-1) > f(1)$

- wahr
 falsch

$f(0) > f'(0)$

- wahr
 falsch

Es gibt keinen Punkt auf K_f , in dem K_f eine Steigung von -3 aufweist.

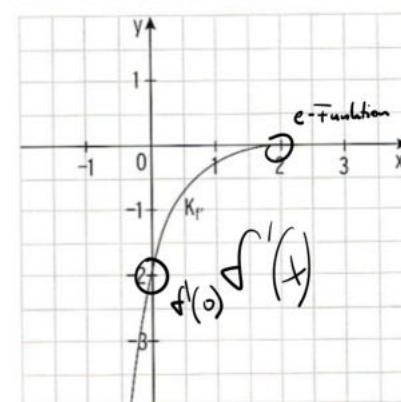
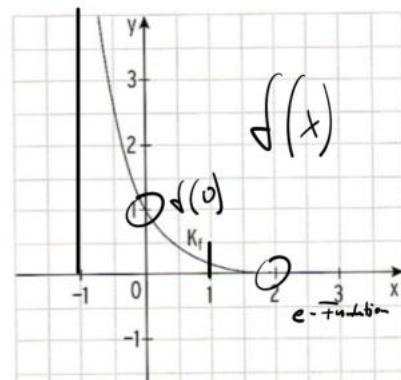
- wahr
 falsch

Im Schnittpunkt mit der y -Achse hat K_f die Steigung -2 .

- wahr
 falsch

$f(2) \cdot f'(2) < 0$

- wahr
 falsch



b)

K_f ist bei $x = 1$ steiler als die Gerade mit $y = -0,5x + 2$.

- wahr
 falsch

Die momentane Änderungsrate von f ist bei $x=0$ negativ.

- wahr
 falsch

$f(1) > f'(1)$

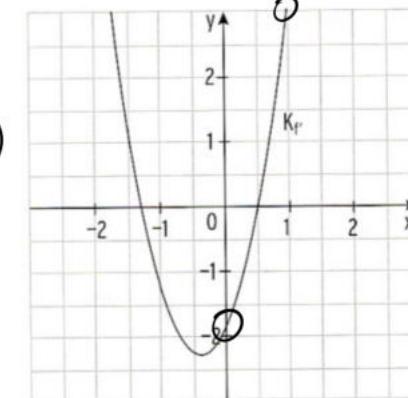
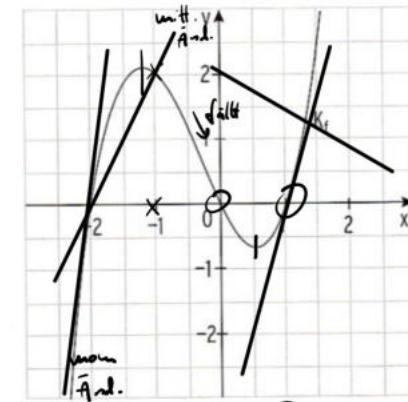
- wahr
 falsch

Es gibt einen Punkt auf K_f mit y -Wert 2, in dem K_f eine Steigung von -1 hat.

- wahr
 falsch

Die mittlere Änderungsrate auf $[-2; -1]$ ist größer als die momentane Änderungsrate in $x = -2$.

- wahr
 falsch



7. Bilden Sie die erste Ableitung.

$f(x) = 2\cos(x) + 1$	$f'(x) = -2\sin(x)$
$f(x) = -3\sin(x) - x$	$f'(x) = -3\cos(x) - 1 \cancel{x^{1-1}}$
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^4 + 3$	$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 4x^3$
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + x^2 + x - 4$	$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + 2x + 1$
$f(x) = 5e^x + 2x - 1$	$f'(x) = 5e^x + 2$
$f(x) = ae^x + b$	$f'(x) = ae^x$

8. Bilden Sie die erste Ableitung mithilfe der Kettenregel.

$f(x) = 2\sin(3x)$	$f'(x) = 2 \cdot 3\cos(3x) = 6\cos(3x)$
$f(x) = \frac{5}{3}e^{-4x}$	$f'(x) = -4 \cdot \frac{5}{3}e^{-4x} = -\frac{20}{3}e^{-4x}$
$\rightarrow f(x) = -0,25e^{8x} + 2$	$f'(x) = -2e^{8x} = -0,25e^{8x}$
$f(x) = -1,2e^{-3x} + 5x$	$f'(x) = -1,2e^{-3x} \cdot (-3) + 5 = 3,6e^{-3x} + 5$
$f(x) = 2ae^{bx} + c$	$f'(x) = 2ae^{bx} \cdot b = 2abe^{bx}$
$f(x) = -\pi \cos(0,5x)$	$f'(x) = \overline{1} \sin(0,5x) \cdot 0,5 = \frac{1}{2} \sin(0,5x)$
$f(x) = x - \sin(0,3\pi x)$	$f'(x) = -\cos(0,3\pi x) \cdot 0,3\pi = -0,3\pi \cos(0,3\pi x)$
$f(x) = \frac{9}{5}e^{-x} + x^2$	$f'(x) = -\frac{9}{5}e^{-x} + 2x = -\frac{9}{5}e^{-x} + 2x$
$f(x) = 4\sin(2x) + 1$	$f'(x) = 4\cos(2x) \cdot 2 = 8\cos(2x)$
$f(x) = 1 - 2\cos(2x)$	$f'(x) = 2\sin(2x) \cdot 2 = 4\sin(2x)$
$f'(x) = 4\cos(\frac{x}{\pi})$	$f'(x) = -4 \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) : \pi = -\frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$

9. Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung.

$f(x) = 2\cos(4x) + 2x$	$f'(x) = -8\sin(4x) + 2$	$f''(x) = -32\cos(4x)$
$f(x) = 6e^{2x} - x^2$	$f'(x) = 12e^{2x} - 2x$	$f''(x) = 12e^{2x} - 1$
$f(x) = \frac{1}{4}\cos(3x)$	$f'(x) = -\frac{3}{4}\sin(3x)$	$f''(x) = -\frac{9}{4}\cos(3x)$
$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 + x^2 - 8)$	$f'(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}$	$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x$

10. Entscheiden Sie, ob hier richtig oder falsch abgeleitet wurde. Beschreiben Sie gegebenenfalls kurz, worin der Fehler besteht.

Funktionsterme	richtig falsch	richtig wäre ...	Was wurde nicht beachtet?
$f(x) = 2x^4 + 2x^2$ $f'(x) = 8x^4 + 4x^2$	<input type="checkbox"/> (r) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	$f'(x) = 8x^3 + 4x$	Potenzregel: $(x^4)' = 4x^3$
$f(x) = 3x^6 - 3x^4 + x$ $f'(x) = 18x^5 - 12x^3$	<input type="checkbox"/> (r) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	$f'(x) = 18x^5 - 12x^3 + 1$	Potenzregel $x = 1 \cdot x = 1$
$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ $f'(x) = e^{2x}$	<input checked="" type="checkbox"/> (r) <input type="checkbox"/> (f)	$f'(x) =$	Kettenregel
$f(x) = \sin(2x) + 1$ $f'(x) = \cos(2x)$	<input type="checkbox"/> (r) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	$f'(x) = 2\cos(2x)$	Kettenregel
$f(x) = e^{2x} - x^2$ $f'(x) = e^{2x} - 2x$	<input type="checkbox"/> (r) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	$f'(x) = 2e^{2x} - 2x$	Potenzregel Kettenregel
$f(x) = \cos(\pi x)$ $f'(x) = \sin(\pi x)$	<input type="checkbox"/> (r) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	$f'(x) = -\pi \sin(\pi x)$	Kettenregel
$f(x) = 2x(x^3 + 4x^2)$ $f'(x) = 2(3x^2 + 8x)$ $\downarrow f(x) = 2x^4 + 8x^3$	<input type="checkbox"/> (r) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	$f'(x) = 8x^3 + 24x^2$	Potenzregel

11. Sind die Aussagen wahr (w) oder falsch (f)?

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

$$f'(x) = 2x$$

\uparrow
Steigung

Der Funktionswert von f mit $f(x) = x^2 + 1; x \in \mathbb{R}$, entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Ableitungsfunktion.

 (w) (f)

Der y -Wert $f'(x)$ entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Funktion f .

 (w) (f)

Die Ableitungsfunktion einer linearen Funktion ist eine konstante Funktion.

 (w) (f)

Es gibt keine zwei Funktionen, welche beide die gleiche Ableitungsfunktion haben.

 (w) (f)

Bei der Funktion f mit $f(x) = e^x$ entspricht der y -Wert an jeder Stelle der Steigung des zugehörigen Schaubildes.

 (w) (f)

1. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $x = u$.

$$f(x) = 3x - 2x^2$$

$$u = -2$$

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2 = -14$$

$$f'(x) = 3 - 4x; f'(-2) = 3 - 4(-2) = 11; \text{ also } m_t = 11$$

$$\text{Tangentengleichung: } y = 11x + b$$

$$\text{Punktprobe mit } B(-2 | -14): -14 = 11 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 8$$

$$\text{Tangentengleichung: } y = 11x + 8$$

$$f(x) = x - 2e^{0,25x}$$

$$u = 4$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{0,25x} \quad f'(4) = 1 - \frac{1}{2} e^{0,25 \cdot 4} = -0,3531 \approx -0,36$$

$$f(4) = -1,44$$

$$b = (4 | -1,44)$$

$$y = -0,36x + b \Rightarrow -1,44 = -0,36 \cdot 4 + b \mid +1,44$$

$$\Rightarrow b = 0$$

stetig

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(3x) + 1$$

$$u = \frac{\pi}{6}$$

$$f'(x) = 1,5 \cos(3x) \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,5 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$b = \left(\frac{\pi}{6} | 1,5\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}$$

$$y = 0x + b \quad \frac{3}{2} = 0 \cdot \frac{\pi}{6} + b$$

$$y = 1,5$$

2. Berechnen Sie die Gleichung der Normale an das Schaubild von f an der Stelle $x = u$.

$$f(x) = x^3 - x^2$$

$$u = -1$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 = -2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x; f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2(-1) = 5 \Rightarrow m_t = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Normalengleichung: } y = -\frac{1}{5}x + b$$

$$\text{Punktprobe mit } B(-1 | -2): -2 = -\frac{1}{5} \cdot (-1) + b \Rightarrow b = -\frac{11}{5}$$

$$\text{Normalengleichung: } y = -\frac{1}{5}x - \frac{11}{5}$$

$$f(x) = 3 - 2e^{-x}$$

$$u = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$B(0 | 1)$$

$$\textcircled{1} \quad f'(x) = 2e^{-x} \quad \textcircled{2} \quad f'(0) = 2e^0 = 2 = m_t$$

$$\textcircled{3} \quad m_n = -\frac{1}{2} \quad \textcircled{4} \quad y_n = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\textcircled{5} \quad 1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + b \quad \textcircled{6} \quad y_n = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$1 = b$$

$$f(x) = 2\cos(2x) + 2$$

$$u = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$B\left(\frac{\pi}{4} | 2\right)$$

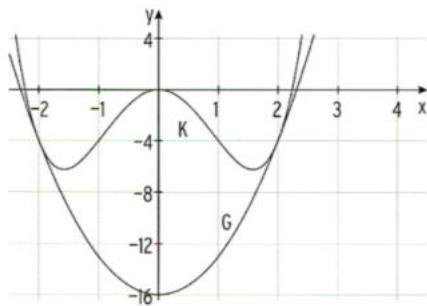
$$\textcircled{1} \quad f'(x) = -4 \sin(2x) \quad \textcircled{2} \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -4 = m_t$$

$$\textcircled{3} \quad m_n = \frac{1}{4} \text{ (kehrbarum)} \quad \textcircled{4} \quad y_n = \frac{1}{4} x + b$$

$$\textcircled{5} \quad 2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + b \mid -\frac{1}{16}\pi \quad \textcircled{6} \quad y_n = \frac{1}{4} x + 1,8$$

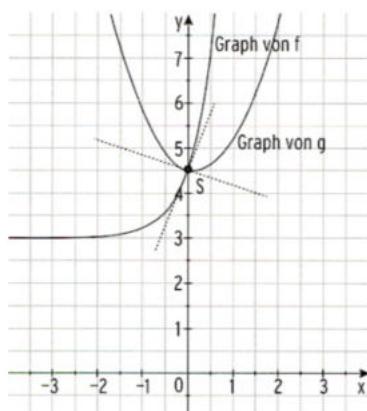
III Differentialrechnung
.....

6. Zeigen Sie: Das Schaubild K von $f(x) = x^2(x^2 - 5)$; $x \in \mathbb{R}$, und das Schaubild G von $g(x) = 3x^2 - 16$; $x \in \mathbb{R}$, haben genau zwei gemeinsame Punkte.
Welche besonderen Eigenschaften liegen vor?



Lösung:

7. Schneiden sich die Schaubilder von f mit $f(x) = 1,5e^{2x} + 3$ und g mit $g(x) = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{9}{2}$ senkrecht? Begründen Sie durch eine Rechnung.



Lösung:

8. Das Fahrzeug bricht in $x_0 = 10$ aus.

Trifft es das Hindernis im Punkt P(20 | 0,25)?

$$f(x) = 5,5e^{-0,1x}; f'(x) = -0,1 \cdot 5,5 e^{-0,1x} = -0,55e^{-0,1x}$$

Tangente in $x_0 = 10$

$$f'(10) = -0,55e^{-0,1 \cdot 10} = -0,2$$

$$\begin{aligned} y &= -0,2x + b \\ f(10) &= 5,5e^{-0,1 \cdot 10} = 2 \end{aligned}$$

Punktprobe mit P:

$$2 = -0,2 \cdot 10 + b$$

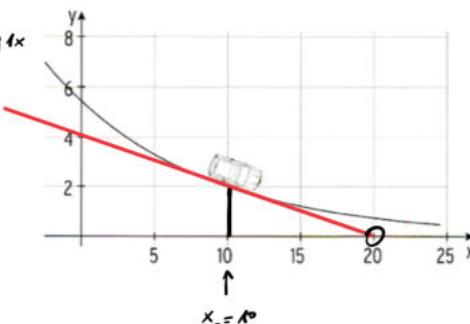
$$2 = -2 + b \quad |+2$$

$$b = 4$$

$$y = -0,2x + 4$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0,2x + 4 \quad |+0,2x \\ 0 &= 4 \quad |:0,2 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

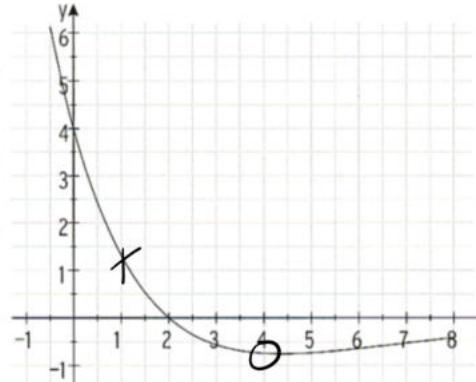
Skizze:



Mathematisch keine Kollision.

Unter realen Bedingungen Kollision,
wegen Breite.

3. Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge $D = [-1; 8]$.
Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

$h'(1) < 0 \leftarrow \text{steigung}$	<input checked="" type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)	
Das Schaubild von h' geht durch den Punkt $Q(2 0)$.	<input type="checkbox"/> (w) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	
$h'(7) = -0,5 \leftarrow \text{steigung}$	<input type="checkbox"/> (w) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	
Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$.	<input checked="" type="checkbox"/> (w) <input type="checkbox"/> (f)	
Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung.	<input type="checkbox"/> (w) <input checked="" type="checkbox"/> (f)	<i>keine Steigung 1</i>

4. Berührt das Schaubild K von f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1; x \in \mathbb{R}$, die x -Achse?
Begründen Sie durch Rechnung. Skizzieren Sie das Schaubild von f .

Lösung:

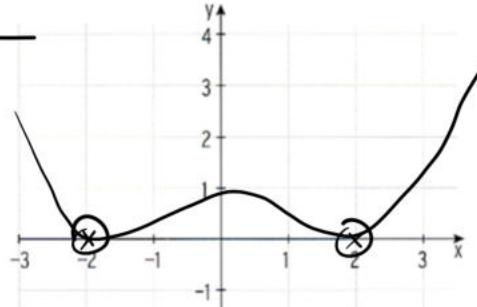
$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad z_{1,2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} \quad z_{1,2} = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{z_{1,2}} \\ z_{1,2} = \pm \sqrt{4} \quad x_{1,2} = \pm 2$$

$g(x) = 0$ \downarrow einsetzen

$$\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 = 0 \quad | \text{ subst.}$$

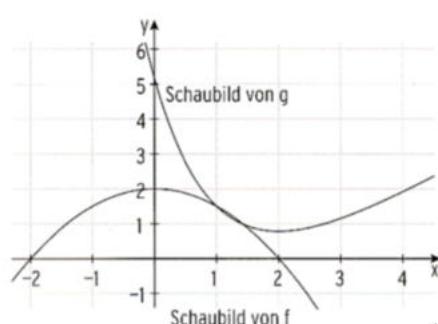
$$x^2 = z \quad \frac{1}{16}z^2 - \frac{1}{2}z + 1 = 0 \\ z_{1,2} = \frac{-(-\frac{1}{2}) \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{1}{16}}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \pm \sqrt{z_{1,2}} \\ &= \pm \sqrt{4} \\ &= \pm 2 \end{aligned}$$



$$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - x \Rightarrow f'(2) = 0 \\ g'(x) = 0 \Rightarrow g'(0) = 0$$

5. Berühren sich das Schaubild von f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2; x \in \mathbb{R}$, und das Schaubild von g mit $g(x) = e^{2-x} + x - e + 0,5; x \in \mathbb{R}$, in $x_0 = 1$?
Begründen Sie rechnerisch.



Lösung:

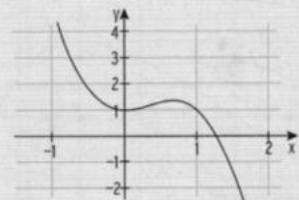
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 + 2 &= e^{2-x} + x - e + 0.5 \\ -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 &= \frac{e^{2-1}}{2} \\ e^{2-1} + 1 - e + 0.5 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{Berührpunkt}$$

$$f(x) = -x$$

$$g(x) = -e^{x-2} + 1 \Rightarrow g(1) = -e^1 + 1 \approx -1.7$$

5. Gegeben ist die Funktion f . Das Schaubild von f heißt K. Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K.

$$f(x) = 2x^2 - 2x^3 + 1; \quad x \in \mathbb{R}$$



$$f'(x) = 4x - 6x^2; \quad f''(x) = 4 - 12x$$

$$\text{Notwendige Bedingung: } f'(x) = 0 \quad 4x - 6x^2 = 0$$

$$\text{Ausklammern: } x(4 - 6x) = 0$$

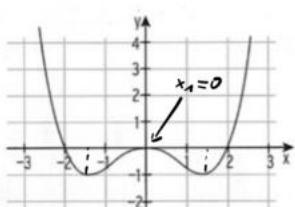
$$\text{Satz vom Nullprodukt: } x = 0 \vee 4 - 6x = 0$$

$$\text{Stellen mit waagrechter Tangente: } x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$$

$$\text{Mit } f''(0) = 4 > 0 \text{ und } f(0) = 1: \quad T(0 | 1)$$

$$\text{Mit } f''\left(\frac{2}{3}\right) = -4 < 0 \text{ und } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{35}{27}: \quad H\left(\frac{2}{3} | \frac{35}{27}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2; \quad x \in \mathbb{R}$$



$$f'(x) = 0; \quad f'(x) = x^3 - 2x \quad ② \quad f''(x) = 3x^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x = 0 \quad f''(0) < 0 \Rightarrow HP$$

$$x(x^2 - 2) = 0 \quad f''(\sqrt{2}) > 0 \Rightarrow TP$$

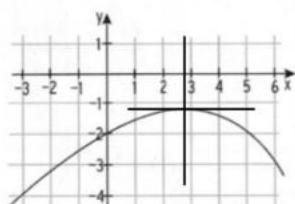
$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & x^2 - 2 &= 0 \\ x_2 &= \pm \sqrt{2} & x &= \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

TP₁(-√2 | -1)

HP (0 | 0)

TP₂(√2 | 1)

$$f(x) = x - 2e^{0,25x}; \quad x \in \mathbb{R}$$



$$f'(x) = -0,5e^{0,25x} + 1 \quad f''(x) = \frac{1}{8}e^{0,25x}$$

$$0 = -0,5e^{0,25x} + 1 \quad (+0,5e^{0,25x}) \quad f''(x) = -\frac{1}{8}e^{0,25x} < 0 \rightarrow HP$$

$$1 = 0,5e^{0,25x} \quad | : 0,5$$

$$2 = e^{0,25x} \quad | \ln$$

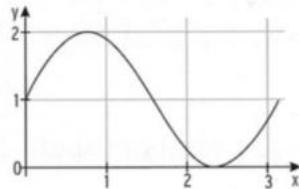
$$0,63 = 0,25x \quad | : 0,25$$

$$2,5 = x$$

$$HP(4 | \ln(4))$$

$$-1,227$$

$$f(x) = \sin(2x); \quad x \in [0; \pi]$$



$$HP = \left(\frac{\pi}{4} | 1 \right)$$

$$TP = \left(\frac{3\pi}{4} | 0 \right)$$

1. Bestimmen Sie die Monotoniebereiche des Graphen von f mit Hilfe der Abbildung.

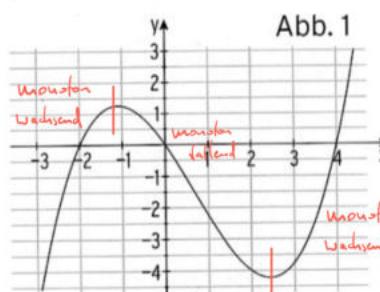


Abb. 1: $-1,2 ; 2,5$

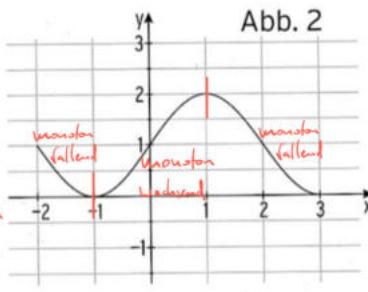


Abb. 2: $-1 ; 1$

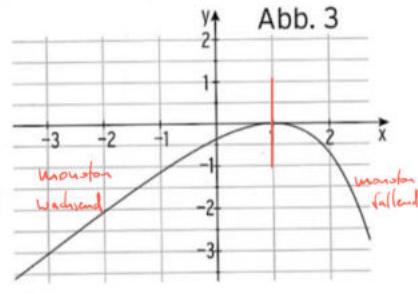
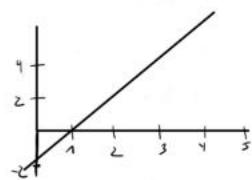


Abb. 3: 1

2. Zeigen Sie, f mit $f(x) = x^2 - 2x$, ist auf $[1; 5]$ monoton wachsend.

Ableitung: $f'(x) = 2x - 2$



$$0 = 2x - 2 \quad |+2$$

$$2 = 2x \quad |:2$$

$$1 = x$$

$f(x)$ ist monoton wachsend

3. Zeigen Sie, f mit $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3$
ist für $x < 0$ monoton fallend.

Ableitung: $f'(x) = -3x^2 + 4x$

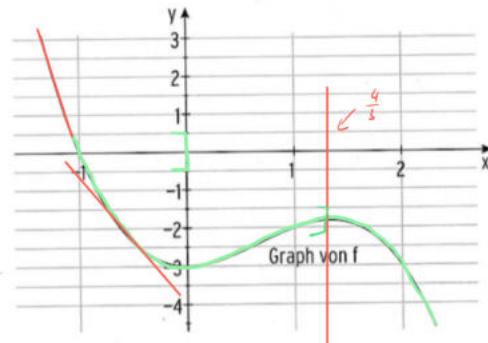
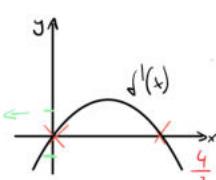
$$0 = -3x^2 + 4x$$

$$0 = x(-3x + 4)$$

$$\xrightarrow{\downarrow} x_1 = 0 \quad \hookrightarrow -3x + 4 = 0 \quad |+3x$$

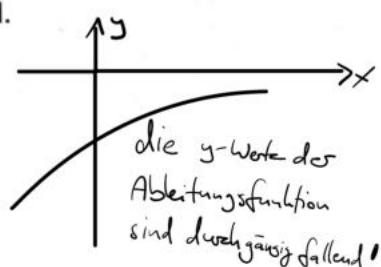
$$4 = 3x \quad |:3$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$

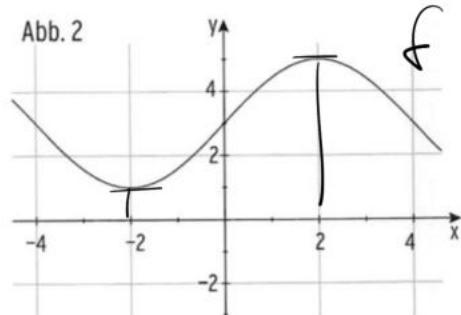
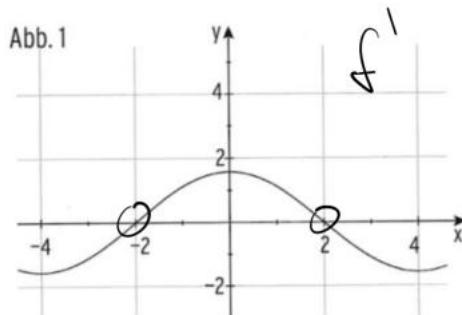


4. Zeigen Sie, f mit $f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + 1$, ist auf \mathbb{R} monoton fallend.

Ableitung: $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$



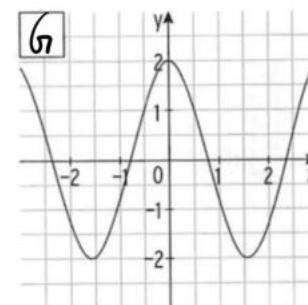
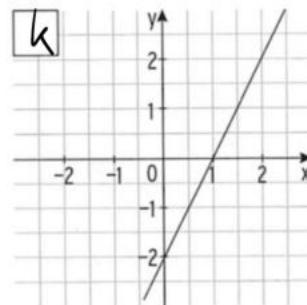
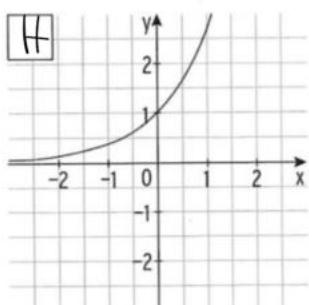
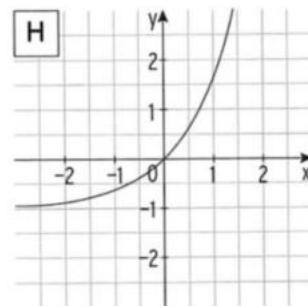
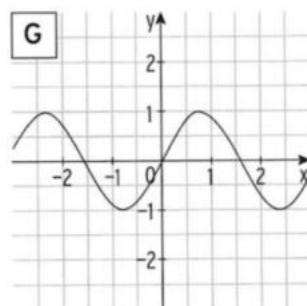
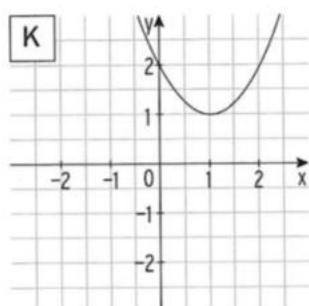
2. Die folgenden Abbildungen 1 und 2 zeigen die Schaubilder einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion. Welches Schaubild gehört zur Funktion, welches zur Ableitungsfunktion? Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Zuordnung: f' Abb. 1 f Abb. 2

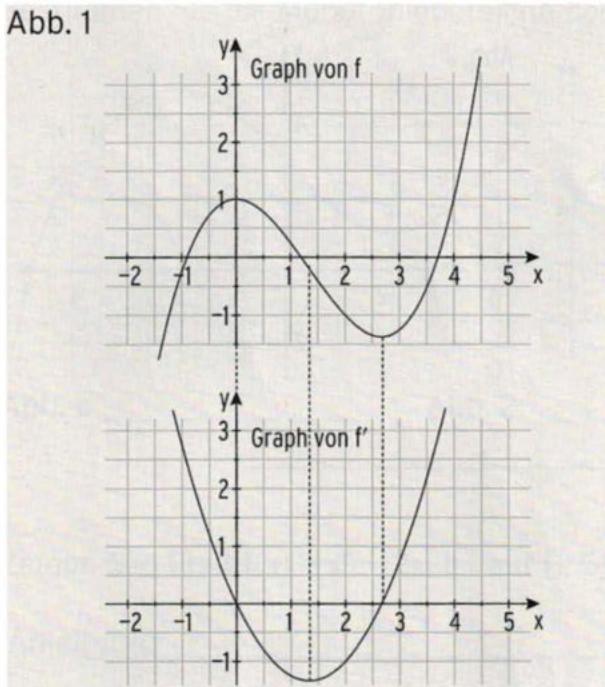
Begründung: siehe Skizze

3. Die Abbildungen zeigen die Schaubilder K von f, G von g und H von h und die Schaubilder der zugehörigen Ableitungen f', g' und h'. Ordnen Sie zu und begründen Sie.



Begründung: _____

Abb. 1



$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

Abb. 3

$$f'(x) = -1 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

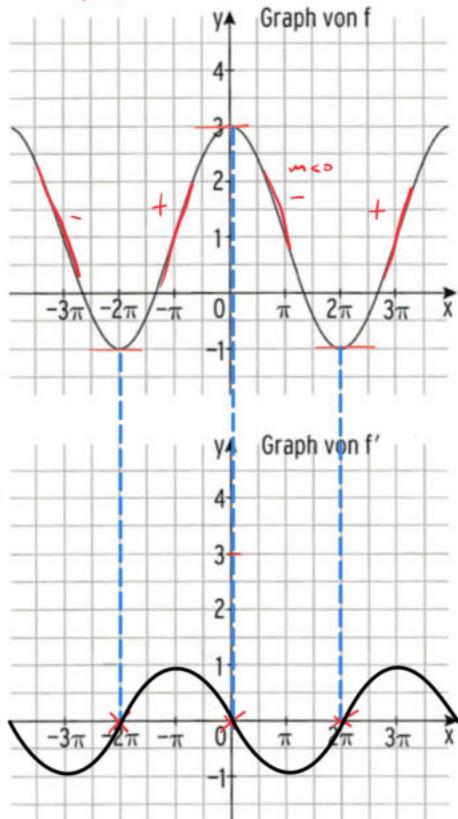


Abb. 2

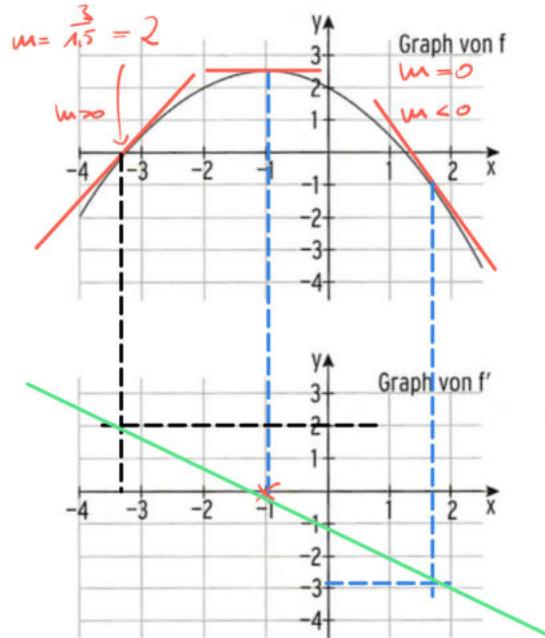
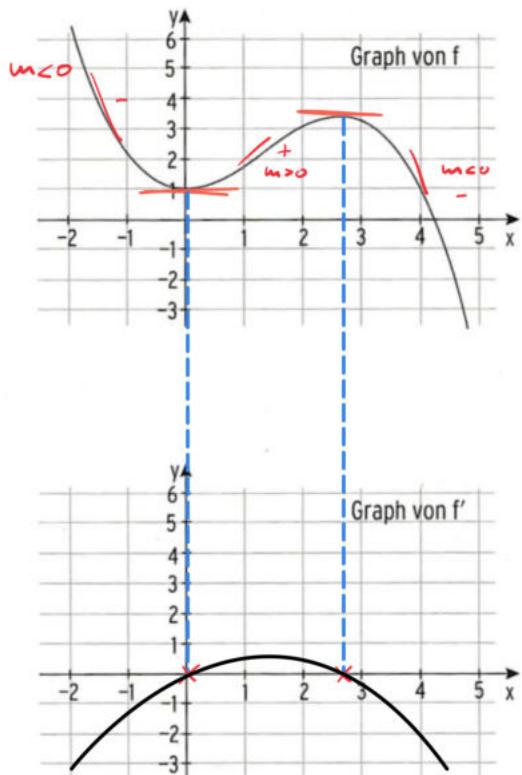


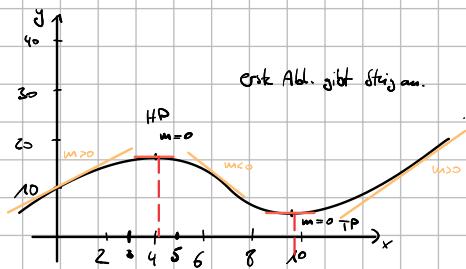
Abb. 4



Extrempunkte

Bsp: Verkaufszahlen von Bohrmaschinen

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 10x + \frac{17}{3}$$



Übergang der Verläufe von

Wachsend zu fallend \Rightarrow HP

fallend zu wachsend \Rightarrow TP

\Rightarrow Nachweis für Extrempunkte:

a) notwendig \Rightarrow $f'(x) = 0$

① $\Rightarrow f'(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{7}{2} \pm \sqrt{(-\frac{7}{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10}}{2 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{7}{2} \pm 1,5}{0,5}$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 10$$

b) Nachweis über Vorzeichenwechsel

\Rightarrow VZW von $+$ \rightarrow $-$

\hookrightarrow Hochpunkt HP

\Rightarrow VZW von $-$ \rightarrow $+$

\hookrightarrow Tiefpunkt TP

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=1,75 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=-1,25 \end{cases}$$

\uparrow
positive
Steigung

\uparrow
negative
Steigung

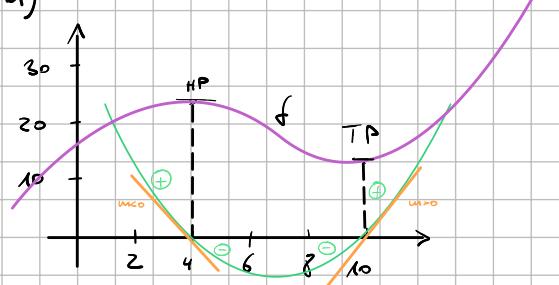
c) Nachweis über 2. Ableitung (hinreichend)

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \quad 4/10 \text{ einsetzen, für HP od. TP}$$



$$f''(x) = -\frac{3}{2} < 0 \rightarrow \text{HP} \quad (4 \text{ eingesetzt})$$

$$f''(x) = +\frac{3}{2} > 0 \rightarrow \text{TP} \quad (10 \text{ eingesetzt})$$

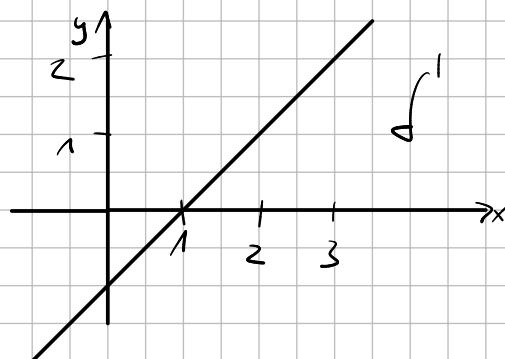
(2)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

monoton wachsend für
 $x \geq 1$?

→ ① Ableitung bilden

$$\Rightarrow f'(x) = x - 1$$

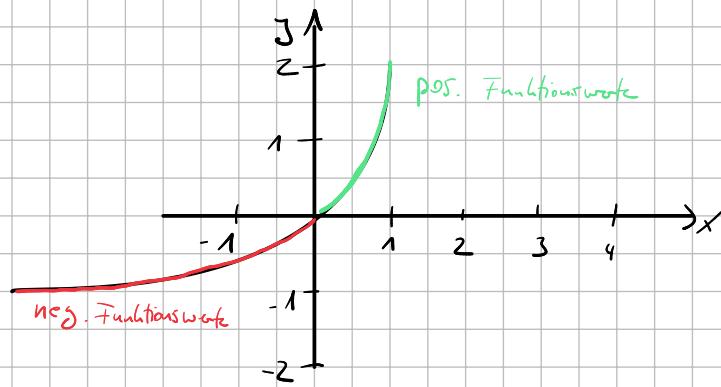


f ist monoton wachsend für $x \geq 1$, da $f'(x) \geq 0$ für $x \geq 1$

(3)

$$f(x) = e^x - x$$

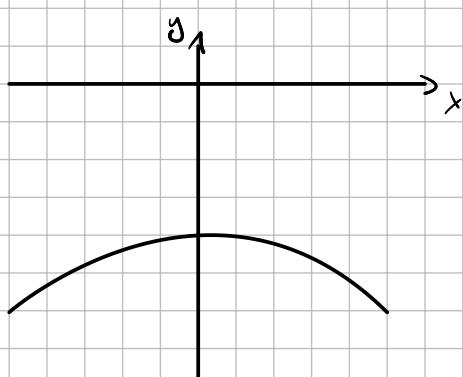
$$f'(x) = e^x - 1$$



(4)

a) $f(x) = -x^3 - 2x + 3$

$$f'(x) = -3x^2 - 2$$

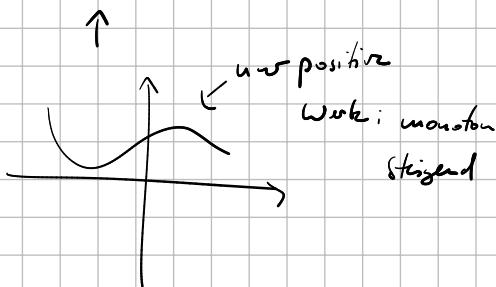


$$f'(x) < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$

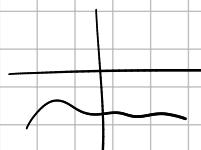
b) $f(x) = \frac{3}{5}x^5 + x^3 + 4$

$$f'(x) = 3x^4 + 3x^2$$



immer positive
Werte; monoton
steigend

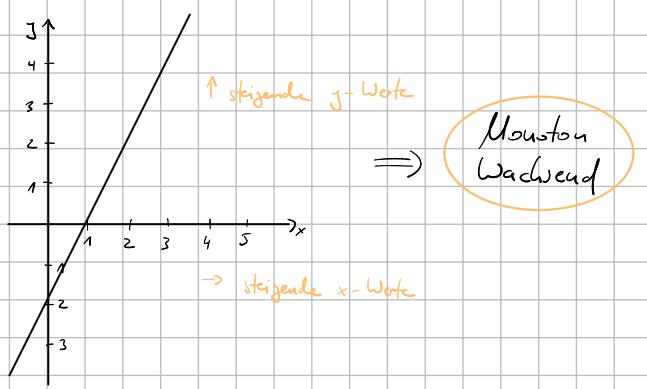
c)



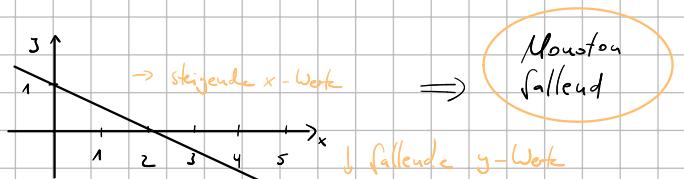
immer monoton fallend

Monotonie

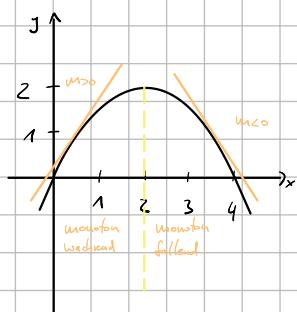
Bsp 1: $f(x) = 2x - 3$



Bsp. 2: $f(x) = -0,5x + 1$



Bsp. 3: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$



Definition:

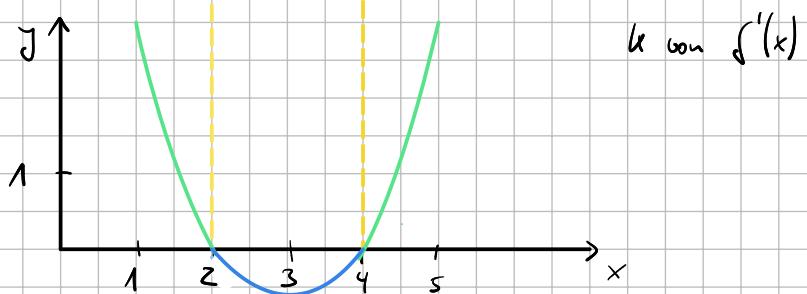
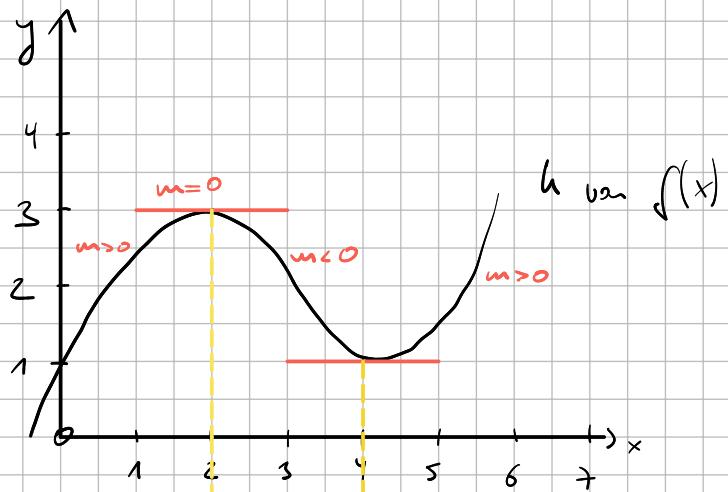
Gilt auf einem Bereich I (intervall):

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für alle } x \in I \\ \text{so heißt die Funktion} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \end{array} \right.$$

\Rightarrow Monotonic untersuchung:



Graphisches Differenzieren



Merke:

k ist das Schaubild von $f(x)$.

$f(x)$ ist der y -Wert von k

$f'(x)$ ist die Steigung von k an einer Stelle x .

Die Funktionswerte der Ableitungsfunktion $f'(x)$
sind die Steigungswerte von k .

Berührpunkte von Funktionsgraphen

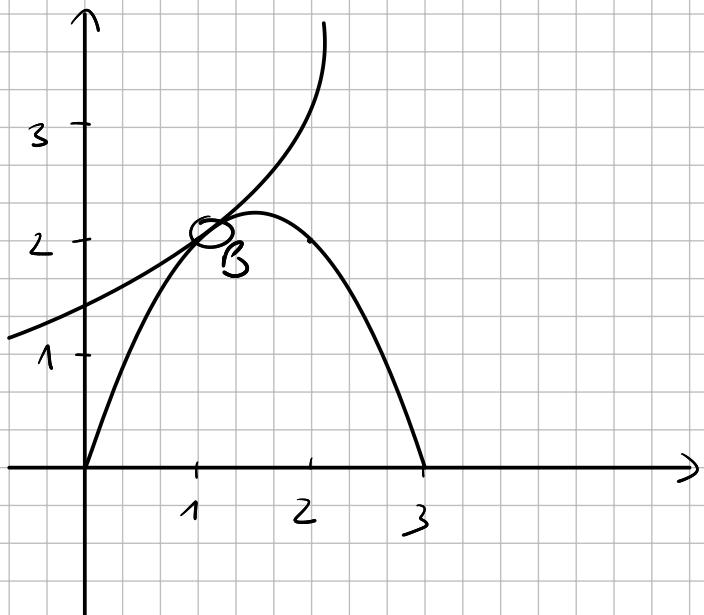
Bsp:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^x + 1$$

$$g(x) = -x^2 + 3x$$

Schnittpunkte: ?

$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} e^x + 1 = -x^2 + 3x \quad |+x^2 - 3x$$

$$\frac{1}{2} e^x + x^2 - 3x + 1 = 0$$

\Rightarrow lsg. durch Probieren z.B. $x=1$

$$\frac{1}{2} e^1 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow f(1) = g(1)$$

$$\frac{1}{2} e^2 + 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} e^x$$

$$\Rightarrow g'(x) = -2x + 3$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} e^1 = 1$$

$$\Rightarrow g'(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$$

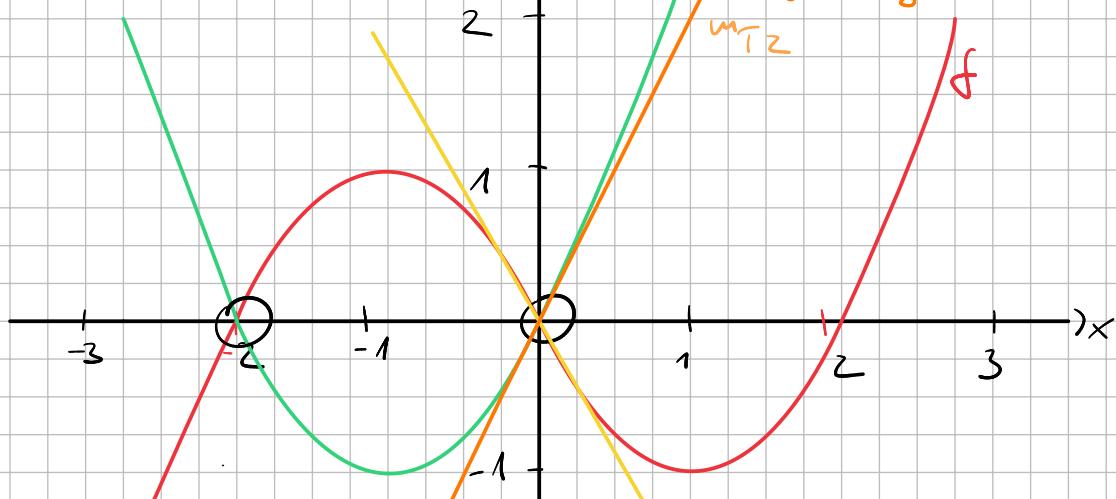
Der Berührpunkt B ist ein gemeinsamer Punkt von f und g mit gleicher Steigung

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f'(x) &= g'(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Berührpunkt}$$

Senkrechter Schnitt von Kurven

Bsp: $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$

$$g(x) = x^2 + 2x$$



\Rightarrow Tangentensteigung = 1. Ableitung

an der Stelle $x_0=0$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x + 2$$

$$\Rightarrow g'(0) = 2$$

Tangente an g bei $x=0$

m_{T2}

f

m_{T1}

Tangente an f bei $x=0$

\Rightarrow Tangentensteigung = 1. Ableitung

an der Stelle $x_0=0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x = x^2 + 2x \quad | -x^2 - 2x$$

$$\frac{1}{8}x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x = 0$$

$$x \left(\frac{1}{8}x^2 - x - \frac{5}{2} \right) = 0$$

$$\downarrow x_1=0 \quad \hookrightarrow x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-\frac{5}{2})}}{1/4}$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{1 \pm \frac{3}{2}}{1/4}$$

$$m_{T1} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{T2} = 2$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1 \text{ Wahr}$$

\Rightarrow Liegen im Rechten Winkel zueinander

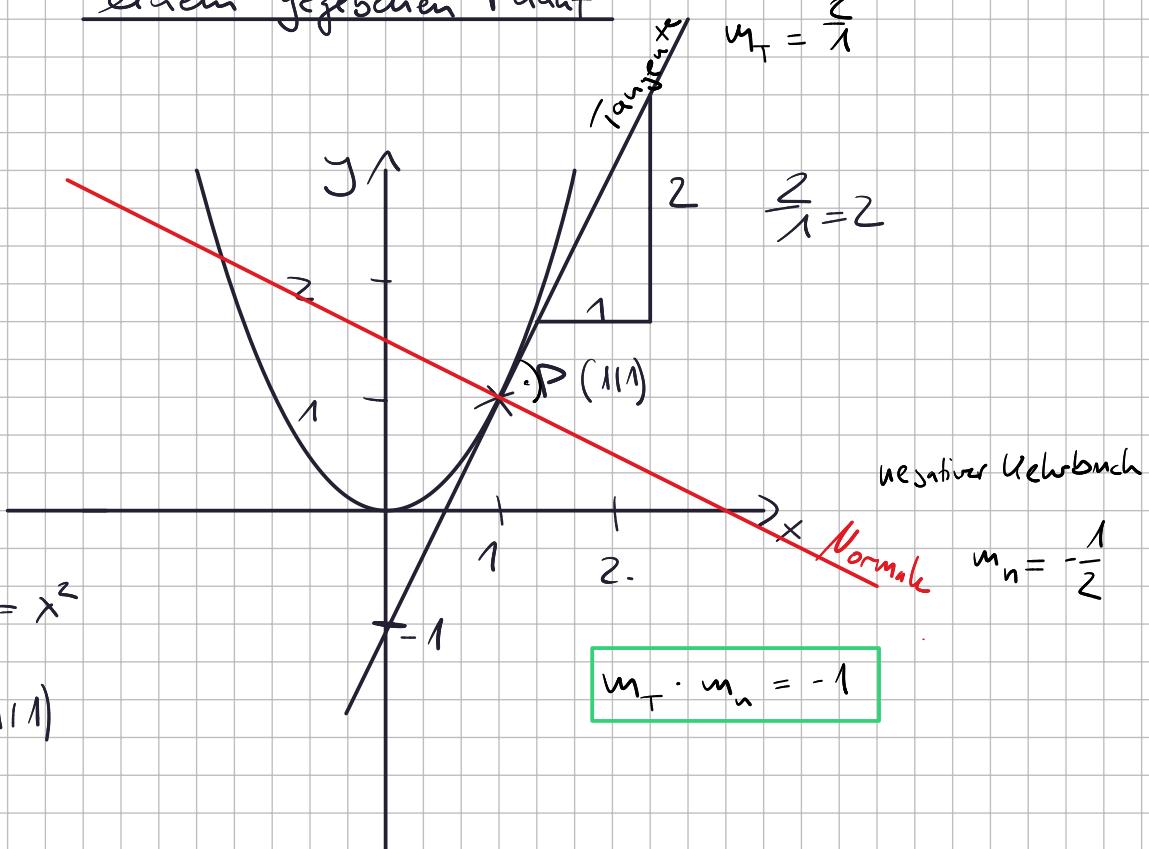
$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 10$$

f und g schneiden sich senkrecht, wenn die Tangenten im Schnittpunkt senkrecht aufeinander stehen. Es gilt:

$$f(x_s) = g(x_s) \text{ und } f'(x_s) \cdot g'(x_s) = -1$$

Aufstellen einer Tangentengleichung in einem gegebenen Punkt



$$\text{Bsp. } f(x) = x^2$$

Punkt $P(1|1)$

$$\textcircled{1} \quad \text{Ableitung bilden : } f'(x) = 2x$$

$$\textcircled{3} \quad y = 2x + b$$

$$1 = 2 \cdot 1 + b \quad | -2 \\ -1 = b$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Tangentengleichung : } y = m_T x + b$$

$$\textcircled{4} \quad y = 2x - 1$$

ges : Normalengleichung

$$\textcircled{1} \quad \text{Ableitung bilden } \Rightarrow f(x) = 2x$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Ableitung an der Stelle } x_0 \text{ bestimmen } \Rightarrow f'(1) = 2 = m_T$$

$$m_N = -\frac{1}{2} \quad (\text{neg. Kehrbuch})$$

$$\textcircled{3} \quad y = -\frac{1}{2}x + b$$

$$\Rightarrow \text{Punktprobe } 1 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b \quad | + \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{3}{2} \quad \downarrow$$

$$y_N = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

227

- ① a) $f(x) = 2e^{3x}$ $f'(x) = 3 \cdot 2e^{3x} = 6e^{3x}$
- b) $f(x) = 5e^{-x}$ $f'(x) = -1 \cdot 5e^{-x} = -5e^{-x}$
- c) $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$ $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = 1e^{2x}$
- d) $f(x) = \frac{3}{2} \sin(3x)$ $f'(x) = \frac{3}{2} \cos(3x) \cdot 3 = \frac{9}{2} \cos(3x)$
- e) $f(x) = \cos(6x) + 1$ $f'(x) = -\sin(6x) \cdot 6 = -6\sin(6x)$
- f) $f(x) = -\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ $f'(x) = -\sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$
- g) $f(x) = 4\sin(\pi x)$ $f'(x) = 4\cos(\pi x) \cdot \pi = 4\pi\cos(\pi x)$
- h) $f(x) = 2 - \cos(0,5x)$ $f'(x) = -\sin(0,5x) \cdot 0,5 = -0,5\sin(0,5x)$

Die Kettenregel

Bsp: $f(x) = \underbrace{\sin(2x)}_{\text{trigonometrische Fkt.}} \quad \text{lineare Fkt.}$ $\Rightarrow f(x) = h(u(x))$
 $\qquad\qquad\qquad$ $\qquad\qquad\qquad$ $\qquad\qquad\qquad$ verketten Funktion

ges: neue Regel

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{h(u(x_2)) - h(u(x_1))}{x_2 - x_1} \Rightarrow f'(x) = h'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$= \frac{h(u(x_2)) - h(u(x_1))}{x_2 - x_1} \cdot \frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_2) - u(x_1)} = 1$$

Merk:

aufere Ableitung
mal
innere Ableitung

$$= \frac{h(u(x_2)) - h(u(x_1))}{u(x_2) - u(x_1)} \cdot \frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{c \cdot b} \\ \text{1 " } \qquad \qquad \qquad \text{" } u'(x) \end{array} \right.$$

(3) a) $f(x) = 3\cos(x) - 4$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$ c) $f(x) = x^3 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{8}{5}x$
d) $f(x) = \frac{3}{52}x^2 + \frac{3}{7}$ e) $f(x) = -4x^3 - 12x$ f) $f(x) = -\frac{10}{6}x + \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} g) &= -(x^2 - 12x + 36)(x+1) & h) & f(x) = 0,5(x^2 - 2)^2 \\ &= -(x^3 - x^2 - 12x^2 - 12x + 36x + 36) & &= 0,5(x^4 - 4x^2 + 4) \\ &= -(x^3 - 11x^2 - 24x - 36) & &= 0,5x^4 - 2x^2 + 2 \\ &= -x^3 + 11x^2 + 24x + 36 \end{aligned}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$$

$$i) f'(x) = \frac{5}{16}x^4 + \frac{3}{16}x^2$$

$$j) A(u) = 3u^2 - 3u - u$$

$$k) l'(t) = 0,5t^3 - 3t$$

$$l) f'(x) = \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\right) - (x^2 - 12x + 16)$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 12x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{7}{2}x + 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{26}{8}x + \frac{7}{2}$$

$$m) f'(x) = 2ax + b$$

$$n) g'(x) = 2ax^2 + 2bx + c$$

(4)

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = 6e^x & b) f(x) = -7e^x & c) f(x) = x + 4 + 5e^x \\ d) f(x) = \frac{3}{4}e^x - c & e) f(x) = -3e^x & f) f(x) = \frac{1}{4}e^x - 15x^2 \end{array}$$

(5)

$$a) f'(x) = 2 - 3\cos(x) \quad b) f'(t) = 2t^3 - 1 - 5\sin(t)$$

$$c) f'(x) = -4\sin(x) - 8\cos(x) \quad d) A'(u) = -\frac{1}{2}\cos(u)$$

$$f(x) = x^3 \quad x_0 = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h) \cdot (1+h) \cdot (1+h) - 1}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+2h+h^2) - 1}{h} \quad x_0 = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^1 + 2h^2 + h^3 + h^4 + h^5 - 1}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 3 + 3h + h^2 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 3 + 3h + h^2 = 3$$

Ableitungsregeln

1.) Ableiten von Potenzfunktionen

Beispiel: $f(x) = x^2$

Werttabelle $f(x)$

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

x	h(x)
1	2
2	4
3	6
4	8

$h(x) = 2x$

Ableitungsberechnung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h)^2 - z^2}{h} \end{aligned}$$

Regel: „Alte“ Hochzahl als Faktor vor x „setzen“, „neue“ Hochzahl = „alte“ Hochzahl.

Ableitungsregel für $f(x) = e^x$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Ableitungsregel für trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \times x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \times x^{2-1} = 2 \times x^1 = 2x$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \times x^{3-1} = 3 \times x^2$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4 \times x^{4-1} = 4 \times x^3$$

⋮

Einführung in die Differenzialrechnung

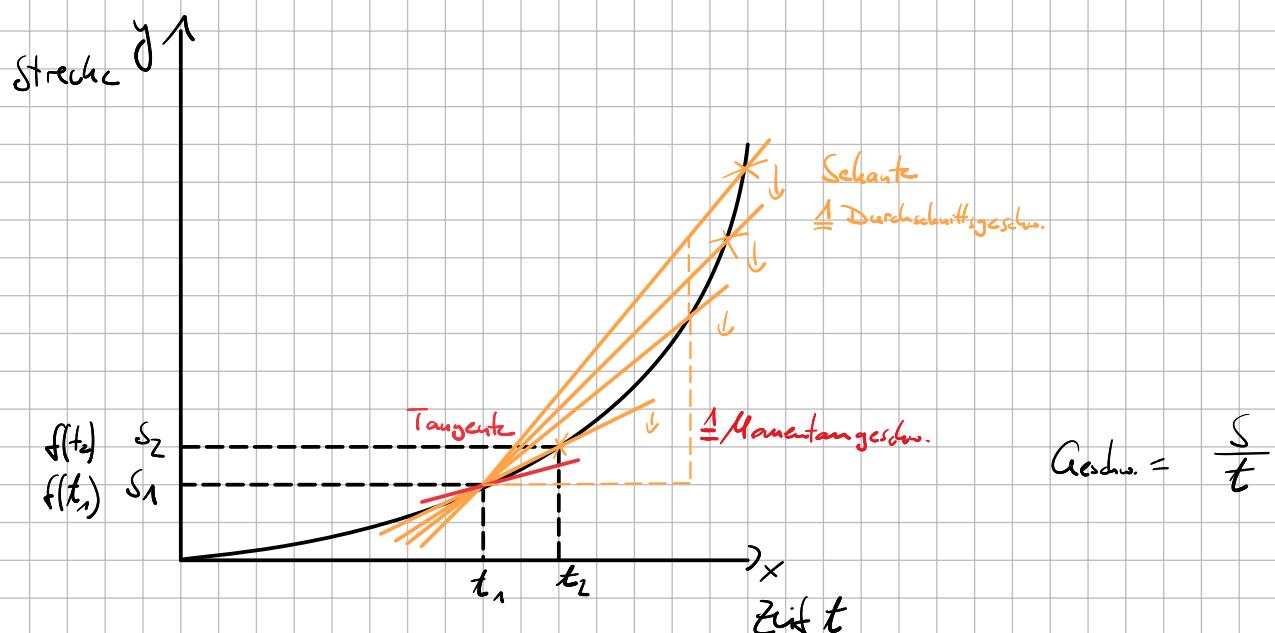
Bsp: Geschwindigkeitsmessung

a) Messung der Durchschnittsgeschwindigkeit

(z.B. Streckenabschnittsmessung bei der Durchfahrt eines Tunnels.)

b) Messung der Momentangeschwindigkeit

(z.B. Radargerät am Ortsausgang)



Gesucht: Geschwindigkeit zur Zeit t_1

Problem: Die Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ kann an der Stelle t_1 nicht berechnet werden, weil zu einem einzelnen Zeitpunkt die Strecke = 0 ist.

Lösung: Man lässt den zweiten Punkt in Richtung des ersten Punktes wandern, die Steigungsdreiecke werden im Folge immer kleiner.
→ Schließlich liegen die beiden Punkte aufeinander. Aus der Sekante wird eine Tangente.

→ Die Steigung der Tangenten lässt sich mit folgendem Ausdruck beschreiben:

$$m_t = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

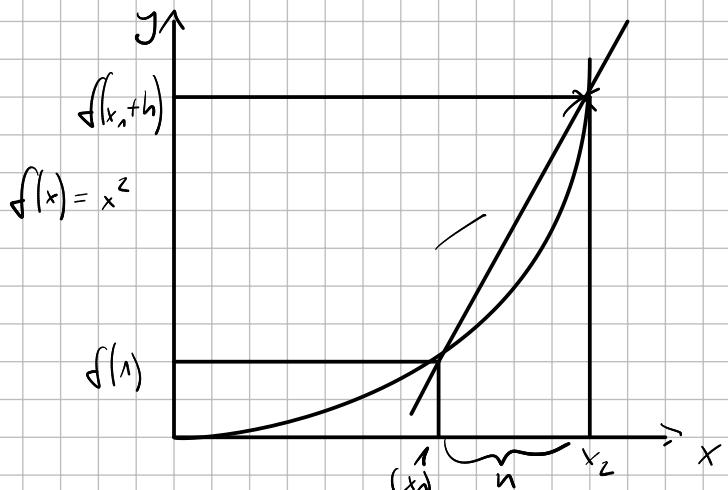
$\lim =$ *linies
Grenzwert*

Differentialquotient

allgemein:

$$m_s = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Die Ableitung



$$m_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h - 1}$$

$$= \frac{(1+h^2) - 1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2 - 1}{h}$$

$$= 2+h \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} 2+h = 2 = m_s$$

S. 211

①

$$2a + 1,5b + 3b = 950$$

$$3a + 6b + 2,5b = 1550$$

$$a + b + b = 420$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 2 & 1,5 & 3 & 950 \\ 3 & 6 & 2,5 & 1550 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} -\cdot(-2) \\ + \\ + \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -0,5 & 1 & 110 \\ 0 & 3 & -0,5 & 330 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot 6 \\ + \\ + \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -0,5 & 1 & 110 \\ 0 & 3 & -0,5 & 330 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot 6 \\ + \\ + \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -0,5 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & 5,5 & 300 \end{array} \right)$$

$$5,5b = 300 \quad | :5,5$$

$$\underline{b = 180}$$

$$-0,5b + 1 \cdot 180 = 110 \quad | -180$$

$$-0,5b = -70 \quad | \cdot (-0,5)$$

$$\underline{b = 140}$$

$$1a + 1 \cdot 140 + 1 \cdot 180 = 420 \quad | -320$$

$$\underline{a = 100}$$

$$\underline{\underline{U = \begin{pmatrix} 100 \\ 140 \\ 180 \end{pmatrix}}}$$

(2)

$$0,1P_1 + 0,15P_2 + 0,25P_3 = 1,2$$

$$0,2P_1 + 0,3P_2 + 0,1P_3 = 2$$

$$10P_1 + 10P_2 + 20P_3 = 100$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,1 & 0,15 & 0,25 & 1,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 2 \\ 10 & 10 & 20 & 100 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} -\cdot(-0,2) \\ + \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0,1 & 0,15 & 0,25 & 1,2 \\ 0 & 0 & -0,4 & -0,4 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{-5} \\ + \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,1 & 0,15 & 0,25 & 1,2 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & -0,4 & -0,4 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Zeilenausch}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0,1 & 0,15 & 0,25 & 1,2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -0,4 & -0,4 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow P_3 = 1$$

$$-5P_2 + -5 \cdot 1 = -20 \quad |+5$$

$$-5P_2 = -15 \quad |\div(-5)$$

$$P_2 = 3$$

$$0,1P_1 + 0,15 \cdot 3 + 0,25 \cdot 1 = 1,2 \quad |-0,7$$

$$0,1P_1 = 0,5 \quad |\cdot 0,1$$

$$P_1 = 5$$

$$L = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 18 & 30 & 42 & 102 \end{array}$$

$$P_1(0|18) \Rightarrow d = 18$$

$$P_2(2|30)$$

$$P_3(4|42)$$

$$P_4(6|102)$$



$$I. \quad 18 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$

$$II. \quad 30 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + 18$$

$$III. \quad 42 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + 18$$

$$IV. \quad 102 = a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + 18$$

$$II. \quad 30 = 8a + 4b + 2c + 18$$

$$III. \quad 42 = 64a + 16b + 4c + 18$$

$$IV. \quad 102 = 216a + 36b + 6c + 18$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 12 \\ 64 & 16 & 4 & 24 \\ 216 & 36 & 6 & 84 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot(-8) \\ +\downarrow \\ +\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 0.25 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot(2) \\ \cdot(-4) \\ +\downarrow \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 12 \\ 0 & -16 & -12 & -72 \\ 0 & -72 & -48 & -240 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot(1/8) \\ +\downarrow \\ +\end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 0.25 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.25 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 12 \\ 0 & -16 & -12 & -72 \\ 0 & 0 & 6 & 84 \end{array} \right)$$

$$6c = 84 \quad | :6$$

$$\underline{c = 14}$$

$$-16b + -12 \cdot 14 = -72 \quad | + 168$$

$$-16b = 96 \quad | :(-16)$$

$$\underline{\underline{b = -6}}$$

$$8a + 4 \cdot (-6) + 2 \cdot 14 = 12 \quad | -4$$

$$8a = 8 \quad | :8$$

$$\underline{\underline{a = 1}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = 1x^3 - 6x^2 + 14x + 18}}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

3. Das lineare Gleichungssystem wird mit dem Gaußverfahren gelöst. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & \text{---} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -5 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \text{---} & -3 & 7 \\ 0 & -8 & \text{---} & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \text{---} \end{array} \right)$

4. Das lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie die Lösung.

<p>a) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$</p>	<p>$3x_3 = -3; x_3 = -1$ $2x_2 = 3; x_2 = 1,5$ eingesetzt in $x_1 + 2x_3 = 1$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow x_1 = 3$</p>	<p>Lösung: $(3; 1,5; -1)$ oder: $x_1 = 3; x_2 = 1,5; x_3 = -1$</p>
<p>b) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$</p>		

5. Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

<p>a) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$</p>	<p>Wählen Sie: $x_3 = r$ Eingesetzt in $x_2 - x_3 = 2: x_2 = 2 + r$ Eingesetzt in $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $x_1 - 2(2+r) + r = 0: x_1 = 4 + r$</p>	<p>Lösung: $(4 + r; 2 + r; r)$ oder: $x_1 = 4 + r; x_2 = 2 + r;$ $x_3 = r$</p>
<p>b) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$</p>	<p>$x_3 = r$ $\rightarrow x_2 + 2r = 4 \Rightarrow x_2 = 4 - 2r$ $\Rightarrow x_1 + (4 - 2r) + r = 0$ $x_1 + 4 - r = 0 \Rightarrow x_1 = -4 + r$</p>	$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} -4+r \\ 4-2r \\ r \end{pmatrix}$
<p>c) $\left(\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$</p>	<p>$x_3 = r$ $\rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2 \quad \underline{x_2=2}$ $\Rightarrow x_1 - 1 \cdot (2) + r = 5$ $x_1 - 2 + r = 5 \quad +2 - r$ $x_1 = 7 - r$</p>	$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 7-r \\ 2 \\ r \end{pmatrix}$

2. Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch die Punkte A, B und C.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der quadratischen Funktion.

a) A(1 | 1), B(3 | 3) und C(-2 | 1)

Lösung durch Punktprobe in $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$A(1 | 1): \quad a + b + c = 1$$

$$B(3 | 3): \quad 9a + 3b + c = 3 \quad \text{LGS für } a, b, c$$

$$C(-2 | 1): \quad 4a - 2b + c = 1$$

LGS in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot (-9)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -6 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 3: $c = \frac{3}{5}$; Einsetzen von c in Zeile 2: $-6b - 8 \cdot \frac{3}{5} = -6 \Rightarrow b = \frac{1}{5}$

Einsetzen von b und c in Zeile 1: $a + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$

Funktionsterm der quadratischen Funktion: $f(x) = 0,2x^2 + 0,2x + 0,6$

b) A(1 | 2), B(2 | 4) und C(3 | 6,5)

1. Lösung durch Punktprobe in $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$A(1 | 2): \quad a + b + c = 2$$

$$B(2 | 4): \quad 4a + 2b + c = 4 \quad \text{LGS für } a, b, c$$

$$C(3 | 6,5): \quad 9a + 3b + c = 6,5$$

2. Schreiben Sie das LGS in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & 6,5 \end{pmatrix}$$

3. Lösung mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -8 & -11,5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2,25 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Aus Zeile 3

$$c = 0,25$$

Einsetzen von c in Zeile 2:

$$-2b - 3 \cdot 0,25 = -4 \Rightarrow b = 1,25$$

Einsetzen von b und c in Zeile 1:

$$a + 1,25 + 0,25 = 2 \Rightarrow a = 0,25$$

Funktionsterm der quadratischen Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

Mehrdeutig lösbar LGS

Bsp.

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$-7x_2 + 7x_3 = 14$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = -5$$

↓

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ -1 & 3 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{-7} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & -5 \end{array} \right)$$

↓

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \quad \text{aus III}$$

$$\Rightarrow x_3 = r$$

$$\Rightarrow II \Rightarrow -x_2 + r = 2$$

$$-x_2 = 2 - r \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{x_2 = -2 + r}$$

$$r = 4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{U}} = \begin{pmatrix} -1+2r \\ -2+r \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{in I} \Rightarrow -x_1 + (-2+r) + r = 1$$

$$-x_1 - 2 + r + r = 1$$

$$\begin{array}{l} -x_1 - 2 - 2r = 1 \\ -x_1 = 1 - 2r \\ x_1 = -1 + 2r \end{array} \quad \begin{array}{l} |+2-2r \\ | \cdot (-1) \end{array}$$

LGS ist unlösbar

Bsp:

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2$$

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -\cdot(-3) \\ + \\ + \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & -8 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -\cdot\left(\frac{3}{12}\right) \\ + \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & -8 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\cdot\left(\frac{3}{-3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -\cdot 12 \\ + \\ + \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{orange} \\ \text{green} \\ \text{black} \end{array}}$$

$$0 \cdot x_3 = -\frac{1}{4} \quad \underline{\underline{f.A.}}$$

Regel: Ist ein Diagonalelement der umgeformten Koeffizientenmatrix gleich Null, so ist das LGS unlösbar.

1. Lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 .

Eindar
lösbar

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ -3 & 0 & 3 & | & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ -3 & 0 & 3 & | & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 5 \\ 0 & 3 & 6 & | & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 3 & | & 18 \end{vmatrix}$$

$$3x_3 = 18 \Rightarrow x_3 = 6$$

Einsetzen in $-x_2 - x_3 = 5$ ergibt:

$$-x_2 - 6 = 5 \Rightarrow x_2 = -11$$

Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ergibt:

$$x_1 - 11 + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$$

Lösung: (5; -11; 6)

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 4 & 6 & 1 & | & 3 \\ -1 & -1 & 4 & | & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{+(-4)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & -2 & -11 & | & -14 \\ 0 & 1 & 7 & | & 10 \end{vmatrix} \xrightarrow{+(-2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & -2 & -11 & | & -14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1,5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & -2 & -11 & | & -14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1,5 \end{array} \quad \begin{array}{c} (-2) \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$1,5x_3 = 1,5 \quad | : 1,5 \quad -2x_2 - 11 \cdot 1 = -14 \quad | +11$$

$$\underline{x_3 = 1}$$

$$-2x_2 = -6 \quad | : (-2)$$

$$\underline{x_2 = 3}$$

$$1x_1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 5$$

$$1x_1 + 6 + 3 = 5 \quad | -5$$

$$1x_1 + 3 = 0 \quad | -3$$

$$1x_1 = -3$$

$$\underline{x_1 = 4}$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{L = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}}}}$$

① b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & | & 13 \\ 4 & 3 & 2 & | & -9 \\ -3 & -4 & -3 & | & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{+(-2)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & | & 13 \\ 0 & 1 & -2 & | & -25 \\ -3 & -4 & -3 & | & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{+2,5}$

② $\begin{array}{ccc} & & \\ \text{I} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & | & 13 \\ 0 & 1 & -8 & | & -25 \\ 0 & -2,5 & 4,5 & | & 25,5 \end{array} \right) & \\ \text{II} & & \\ \text{III} & & \end{array}$

$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & | & 13 \\ 0 & 1 & -8 & | & -25 \\ 0 & 0 & -15,5 & | & -62 \end{array} \right)$

$$\text{aus III } -15,5x_3 = -62 \quad | : (-15,5)$$

$$x_3 = 4 \Rightarrow \text{in II}$$

$$\Rightarrow 1x_2 - 32 = -35 \quad | +32$$

$$x_2 = -3 \Rightarrow \text{in I}$$

$$\Rightarrow 1x_1 - 3 + 20 = 13 \quad | -17$$

③ d) $\begin{array}{ccc} & & \\ \text{I} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ -2 & 2 & 1 & | & 1 \\ 3 & 4 & -5 & | & -5 \end{array} \right) & \\ \text{II} & \xrightarrow{+2} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 1 \\ 3 & 4 & -5 & | & -5 \end{array} & \\ \text{III} & \xrightarrow{+(-3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & -8 & | & -4 \end{array} & \end{array} \quad \underline{\underline{L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}}$

④ $\begin{array}{ccc} & & \\ \text{I} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \end{array} \right) & \\ \text{II} & \xrightarrow{+(-4)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & | & -8 \end{array} & \\ \text{III} & \xrightarrow{+(-3)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & -5 \end{array} & \end{array}$

⑤ $\begin{array}{ccc} & & \\ \text{I} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & -5 \end{array} \right) & \\ \text{II} & \xrightarrow{+1} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{array} & \\ \text{III} & \xrightarrow{+(-5)} \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 4 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{array} & \end{array}$

$$-1,25x_3 = -4,25 \quad | : (-1,25)$$

$$x_3 = 3$$

$$4x_2 - 5 = 3 \quad | +5$$

$$4x_2 = 8 \quad | : 4$$

$$\underline{x_2 = 2}$$

$$1x_1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1 \quad \underline{\underline{\underline{L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}}}$$

$$1x_1 + 2 - 5 = 1$$

$$1x_1 - 3 = 1 \quad | +3$$

$$\underline{\underline{x_1 = 4}}$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Eindringlich
lösbar

Bsp:

Ein Erzeuger liefert 3 verschiedene Apfelsorten an einen Großhändler (B: Boskop ; J: Jonathan ; E: Elstar).

Folgende Tabelle zeigt die Liefermenge der letzten 3 Tage:

Tag	B	J	E (kg)	Zahlung (€)
1	40	40	100	320
2	80	40	20	240
3	40	80	40	240

ges: Wie hoch ist der Preis pro Kilo für jede Apfelsorte?

R:

$$1. \quad 40x_1 + 40x_2 + 100x_3 = 320$$

$$2. \quad 80x_1 - 40x_2 + 20x_3 = 240$$

$$3. \quad 40x_1 + 80x_2 + 40x_3 = 240$$

LGS

Lösungsverfahren nach Gauß

*eindeutig
lösbar*

①

$$40x_1 + 40x_2 + 100x_3 = 320 \rightarrow \cdot(-2)$$

$$80x_1 + 40x_2 + 20x_3 = 240 + \cdot(-1)$$

$$40x_1 + 80x_2 + 40x_3 = 240 +$$

→

②

$$40x_1 + 40x_2 + 100x_3 = 320$$

$$0 - 40x_2 - 180x_3 = -400$$

$$0 + 40x_2 - 60x_3 = -80 +$$

③

$$\cancel{40x_1 + 40x_2 + 100x_3 = 320}$$

$$\text{II} \quad \cancel{0 - 40x_2 - 180x_3 = -400}$$

$$\text{III} \quad \cancel{0 + 0 - 240x_3 = -480} \mid :(-240)$$

* aus III $\Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow$ in II eingesetzt $\Rightarrow -40x_2 - 110 \cdot 2 = -400$

$$\Rightarrow -40x_2 - 360 = -400 \quad |+360$$

$$-40x_2 = -40 \quad |:(-40)$$

$$x_2 = 1$$

$$40x_1 + 40 \cdot 1 + 100 \cdot 2 = 320$$

$$40x_1 + 240 = 320 \quad |-240$$

$$40x_1 = 80 \quad |:40$$

$$x_1 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Lösungsvektor } \underline{U} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 40 & 40 & 100 & 320 \\ 80 & 40 & 20 & 240 \\ 40 & 80 & 40 & 240 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} (-2) \\ + \\ + \end{matrix} \left[\begin{matrix} | \\ | \\ | \\ -1 \end{matrix} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 160 & 40 & 100 & 320 \\ 0 & -40 & -180 & -400 \\ 0 & 40 & -60 & -80 \end{array} \right) \rightarrow \left[\begin{matrix} | \\ + \end{matrix} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 40 & 100 & 320 \\ 0 & -40 & -180 & -400 \\ 0 & 0 & -240 & -480 \end{array} \right)$$

Eindeutig
Lösbar

Weitere Vorgehensweise wie *

①

$$\text{a) } \cos(x) = -1 \quad | \text{ arccos} \\ x = \arccos(-1)$$

$$x = \pi$$

$$\rightarrow x_1 = \underline{\underline{0}}$$

$$x_2 = \underline{-\pi} \quad \text{6}$$

$$\rightarrow x_3 = \pi + 2\pi = \underline{3\pi}$$

$$\rightarrow x_4 = -\pi + 2\pi = \underline{\pi}$$

$$x_5 = \bar{\pi} \quad \text{6}$$

$$\text{b) } \sin(2x) = \frac{1}{2} \quad | \text{ arcsin} \\ 2x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$2x = \frac{1}{6}\pi \quad | :2$$

$$x = \frac{1}{12}\pi$$

$$\rightarrow x_1 = \underline{\frac{1}{12}\pi}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{12}\pi\right) = \underline{\frac{5}{12}\pi}$$

$$\rightarrow x_3 = \frac{1}{12}\pi + \pi = \underline{\frac{13}{12}\pi}$$

$$x_4 = \frac{5}{12}\pi + \pi = \underline{\frac{17}{12}\pi}$$

c)

$$4\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad | :4$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad | \text{ arccos}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\pi \quad | \cdot 2$$

$$x = \pi$$

$$x_1 = \underline{0}$$

$$x_2 = \underline{-\pi}$$

$$x_3 = \pi + 4\pi = \underline{5\pi}$$

$$x_4 = -\pi + 4\pi = \underline{3\pi}$$

$$P = \frac{2\pi}{0,5x} \quad | \cdot 0,5x$$

$$0,5x = 2\pi \quad | :0,5$$

$$P = \underline{4\pi}$$

② a)

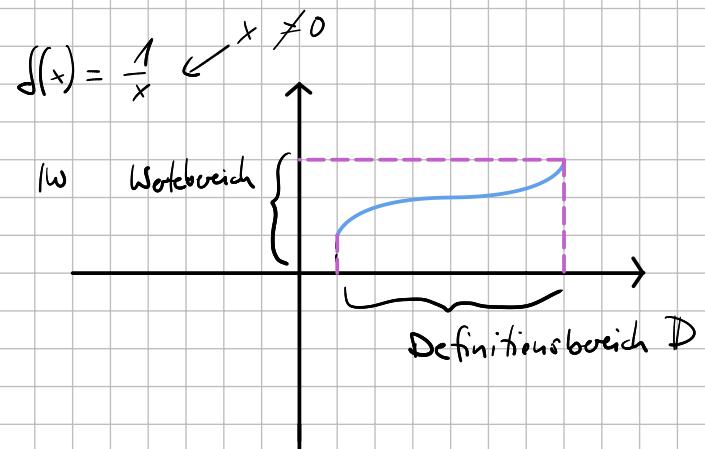
$$f(x) = -4 \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + 3$$

$$a = 4$$

$$b = 3\pi \quad \nearrow \frac{2\pi}{\frac{2}{3}}$$

$$d = 3$$

$$\omega = [-1; 7]$$



- ① Entstehung des Funktionsgraphen aus $f(x) = \cos(x)$ um den Faktor 4.
- ② Spiegelung an der x -Achse
- ③ Verschiebung an der x -Achse um 3
- ④ Streckung in x -Richtung um den Faktor 1,5

b)

$$g(x) = a \sin(bx) + d$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{fl\"oschter Punkt } A(1/5) \\ \text{Tiefster Punkt } B(3/ -2) \end{array} \right\} \text{ Benachbart}$$

$$a: \frac{5 - (-2)}{2} = 3,5$$

P folgt aus:

$$b: \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$$

$$x_H \text{ und } x_T \Rightarrow \frac{P}{2} = x_T - x_H$$

$$d: \frac{5 + (-2)}{2} = 1,5$$

$$= 2$$

$$\Rightarrow P = 4$$

$$g(x) = 3,5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) + 1,5$$

c)

$$f(x) = a \cos(bx) + d$$

$$a = \frac{1 - (-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$P = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{1 + (-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

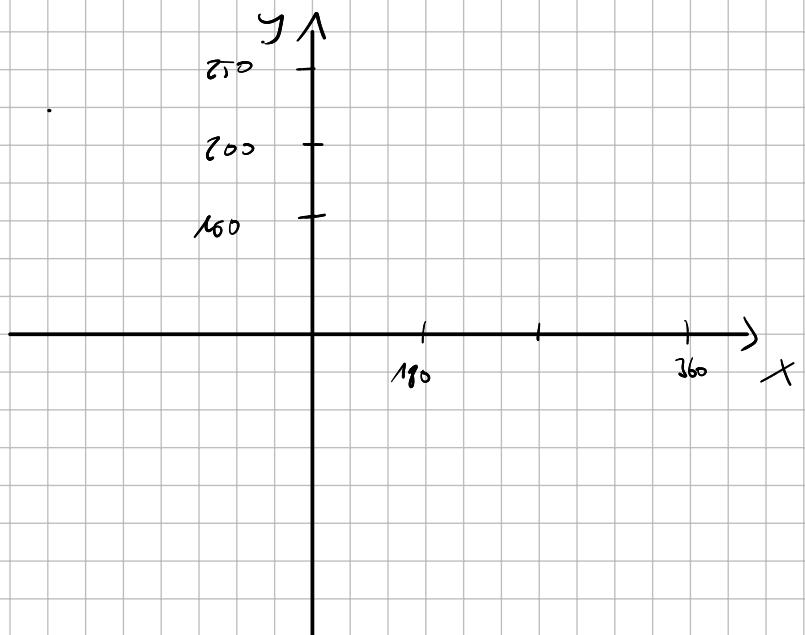
$$\underline{\underline{f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 1}}$$

(3) $g(x) = -8 \sin(3x) - 2$

Wertebereich $\omega = [-10; 6]$

(4) $f(t) = 50 \cos\left(\frac{\pi t}{180} \cdot t\right) + 200 = 175$

$[0; 360]$



5. 103 Nr. ①

$$f(t) = a \cdot \cos(k \cdot t) + b$$

$$a = \frac{y_H - H_T}{2}$$

$$a = \frac{51 - 1}{2} = 25$$

$$b = \frac{y_H + y_T}{2}$$

$$b = \frac{51 + 1}{2} = 26$$

$$k = 2\pi : 240 = \frac{\pi}{120}$$

$$\underline{f(t) = -25 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot t\right) + 26}$$

Wann wird die Höhe von 32 m erreicht?

$$32 = -25 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot t\right) + 26 \quad | -26$$

$$6 = -25 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot t\right) \quad | : -25$$

$$-\frac{6}{25} = \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot t\right) \quad | \arccos$$

$$\arccos\left(-\frac{6}{25}\right) = \frac{\pi}{120} \cdot t$$

$$1,813 = \frac{\pi}{120} \cdot t \quad | : \frac{\pi}{120}$$

$$t_1 = \underline{65,257}$$

Nach 65,257 Sch. hat man die Höhe von 32 m erreicht.

$$65,257$$

$$P = 240$$

$$t_2 = -65,257$$

$$t_3 = -65,257 + 240 = 174,74 \text{ Sch.}$$

133

②

$$f(x) = a \cdot \cos(bx) + d$$

\uparrow Periode dauer
 \uparrow amplitude
 \uparrow Verschiebung in y-Richtung

$$a = \frac{y_H - y_T}{2}$$

$$a = \frac{41,3 - 5,6}{2} = 17,85$$

$$d = \frac{y_H + y_T}{2}$$

$$d = \frac{41,3 + 5,6}{2} = 23,45$$

$$b = \frac{2\pi}{P}$$

$$b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

da 1 Tag

$$f(x) = 17,85 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 23,45$$

Wie lange steht die Sonne höher als 28 Grad

$$17,85 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 23,45 = 28 \quad | -23,45$$

$$17,85 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) = 4,55 \quad | : 17,85$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) = 0,254 \quad | \arccos$$

$$\frac{\pi}{12}x = \arccos(0,254)$$

$$\frac{\pi}{12}x = 1,313 \quad | : \frac{\pi}{12}$$

$$x = 5,015$$

$$x_1 = 5,015$$

$$x_2 = -5,015$$

$$x_3 = 5,015 + 24 = 29,...$$

$$x_4 = -5,015 + 24 = 18,985 \approx 19$$

(3)

$$f(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + b$$

$$a = \frac{16,5 - 8}{2} = \underline{\underline{4,25}}$$

$$b = \frac{16,5 + 8}{2} = \underline{\underline{12,25}}$$

$$f(t) = 4,25 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 12,25$$

Tageslänge am 21. April

$$\hookrightarrow f(1) = 4,25 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) + 12,25 \approx 14,38 \text{ Stunden}$$

Tageslänge am 6. Juni

$$\hookrightarrow f(3,5) = \dots \approx 16,35 \text{ Stunden}$$

(4)

$$f(t) = -1,5 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + 3$$

$$a = \frac{4,5 - 1,5}{2} = 1,5$$

$$-1,5 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + 3 = 2,25 \quad | -3$$

$$b = \frac{2\pi}{5} = 1,256$$

$$-1,5 \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = -0,75 \quad | :(-1,5)$$

$$d = \frac{4,5 + 1,5}{2} = 3$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = 0,75 \quad | \arccos$$

$$\frac{2\pi}{5}t = \arccos(0,75)$$

$$\frac{2\pi}{5}t = \frac{1}{3}\pi \quad | \cdot \frac{5}{2\pi}$$

$$t_1 = \frac{5}{6} \approx 0,833$$

$$t_2 = -\frac{5}{6} + P = \frac{25}{6}$$

$$t_3 = \frac{35}{6}$$

15. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

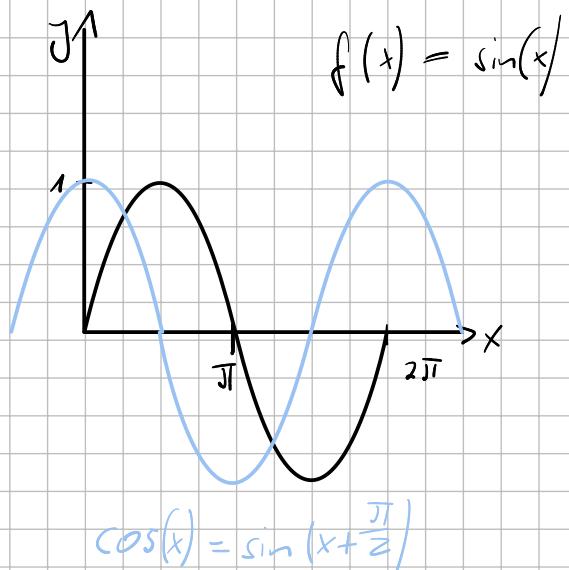
a) $2\sin(x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(x) = 0,5$	c) $2\sin(x) = -1 \mid :2$	d) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mid \arccos$
$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ mithilfe der Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$	WTR: $x = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x = -\frac{\pi}{3} \notin [0; 2\pi]$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$	$\sin(x) = -\frac{1}{2} \mid \arcsin$ $x = \arcsin(-\frac{1}{2})$ $x = -\frac{1}{6}\pi$ $x_1 = -\frac{1}{6}\pi$ $x_2 = -\frac{1}{6}\pi - x_1$ $= \pi - (-\frac{1}{6}\pi) = -\frac{5}{6}\pi$ $x_3 = x_1 + P = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ $x_4 = x_2 + P = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$	$x = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$ $x = \frac{1}{6}\pi$ $x_1 = \frac{1}{6}\pi$ $x_2 = -\frac{1}{6}\pi$ $x_3 = \frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$ $x_4 = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$

16. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $2\sin(2x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(\frac{x}{2}) = 0,5$	c) $2\sin(\frac{\pi}{3}x) = -1 \mid :2$	d) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mid \arccos$
$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1 2} = \pm \frac{2\pi}{3}$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ $(x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi > 2\pi)$ keine Lösung)	WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1 2} = \pm \frac{2\pi}{3}$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ $(x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi > 2\pi)$ keine Lösung)	$\sin(\frac{\pi}{3}x) = -\frac{1}{2} \mid \arcsin$ $\frac{\pi}{3}x = \arcsin(-\frac{1}{2})$ $\frac{\pi}{3}x = -\frac{1}{6}\pi \mid : \frac{1}{3}$ $x = -\frac{1}{2}$ $P = \frac{2\pi}{3}$ $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})$ $x_3 = -2,5$ $x_4 = -\frac{1}{2} + 6 = 5,5$ $x_5 = -2,5 + 6 = 3,5$	$2x = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$ $2x = \frac{1}{6}\pi \mid :2$ $x = \frac{1}{12}\pi$ $x_1 = \frac{1}{12}\pi$ $x_2 = -\frac{1}{12}\pi$ $x_3 = \frac{1}{12}\pi + \pi = \frac{13}{12}\pi$ $x_4 = \frac{1}{12}\pi + \pi = \frac{11}{12}\pi$ $x_5 = \frac{1}{12}\pi$ $x_6 = \frac{13}{12}\pi$

17. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	b) $\sin(\frac{\pi}{4}x) = 0$	c) $\cos(\frac{x}{3}) = -0,5$	d) $\cos(2x) = 0$



allgemeine Sinusfunktion: y-Achsen-Verschiebung

$$f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$$

\uparrow Amplitude \downarrow Verschiebung auf x-Achse.
wie hoch der Bogen geht.

Streckung in x-Richtung

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = 14 \sin(x) \quad (1 \cdot x) \quad a = 14$$

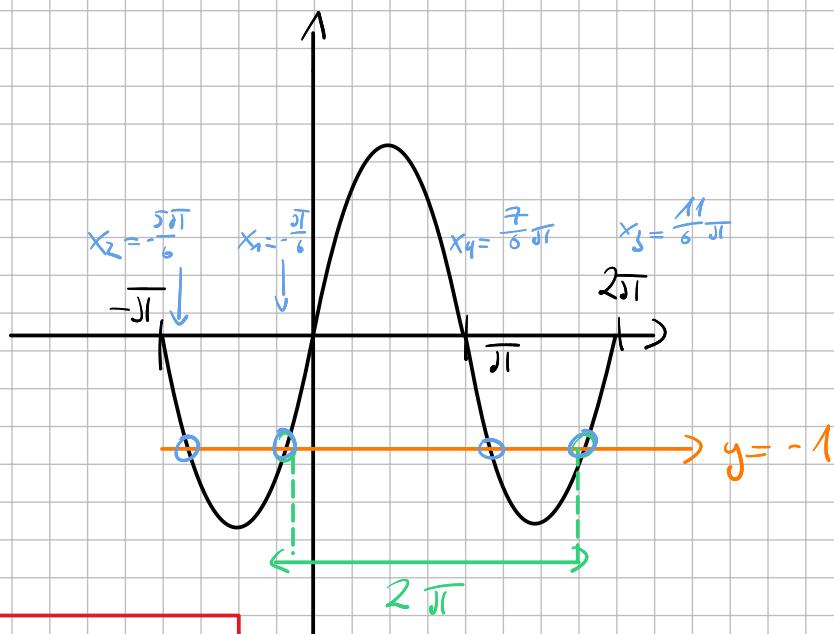
$$f(x) = 7$$

$$\Rightarrow 14 \sin(x) = 7$$

$$x_2 = -\frac{P}{2} - x_1$$

$$= -\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{5\pi}{6}$$



sin:

$$x_2 = -\frac{P}{2} - x_1$$

cos:

$$x_2 = -x_1$$

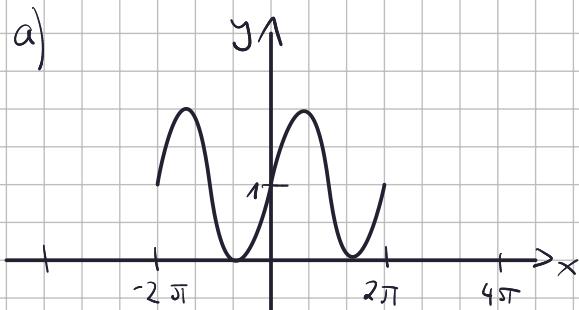
S. 175

Amplitude

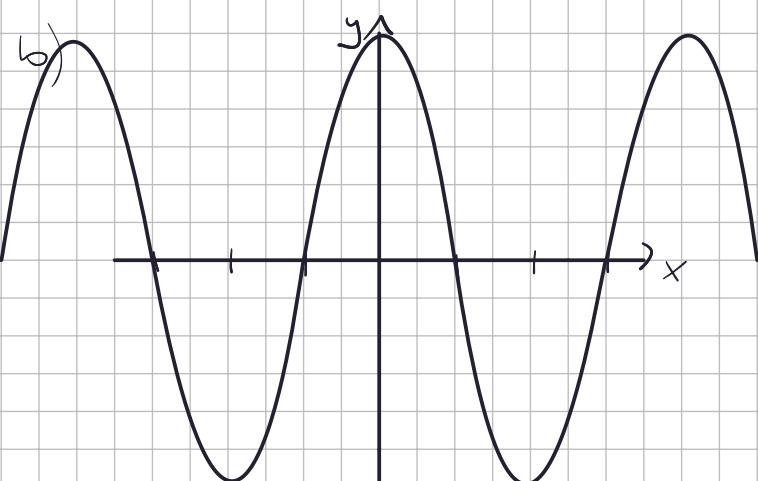
(1) a) $f(x) = 3 \sin(x)$ b) Amp: 2 c) -5 d) 4 e) -6 f) -2

(2)

a)



$$f(x) = \sin(x) + 1$$



$$f(x) = 3\cos(2x)$$

176

- (1) a) → S
b) → A
c) → C

(2)

a) nicht verschoben

b) Amplitude

c) Amplitude

(3)

$$f(f) \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

$$f(x) = 2\sqrt{5}\cos(4x)$$

$$f(x) = 2\cos($$



1. Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe des WTR.

x (im Bogenmaß)	sin(x)	cos(x)
1	0,84	0,54
$\frac{1}{6}\pi$	0,5	0,87
$-\frac{1}{6}\pi$	-0,5	0,87
π oder 0 oder 2π	0	$\cos(0) = 1$ $\cos(\pi) = -1$

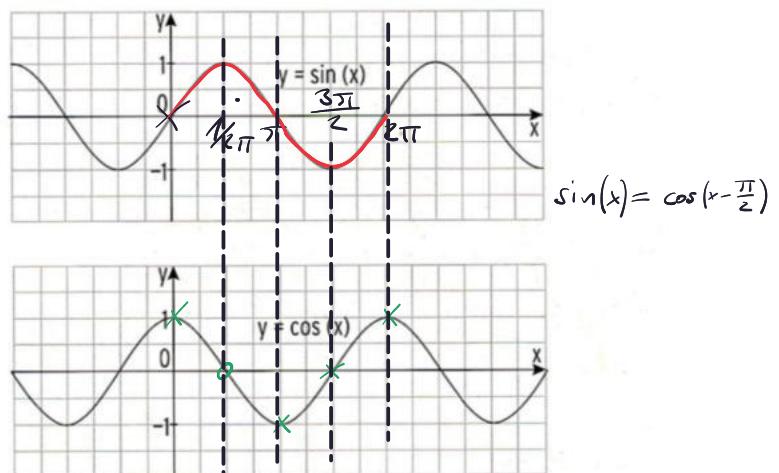
$$\cos(x) = 0,88 \quad | \arccos$$

$$\arccos(\cos(x)) = \arccos(0,88)$$

x (grad)	sin(x)	cos(x)
28,35°	0,47	0,88
90	1	0
44,42	0,7	0,71
165,83	0,24	-0,97

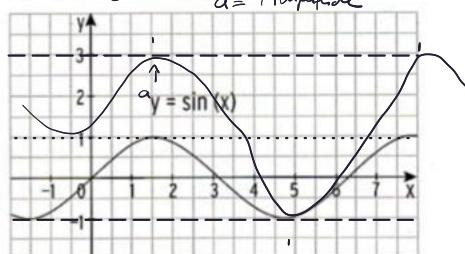
2. Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe des WTR. Skalieren Sie die x-Achse.

x	sin(x)	cos(x)
0	0	1
2π	0	1
π	0	-1
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$-\frac{1}{2}\pi$	-1	0
$-\frac{3}{2}\pi$	1	0
$\frac{5}{2}\pi$	1	0
7π	0	-1
12π	0	1

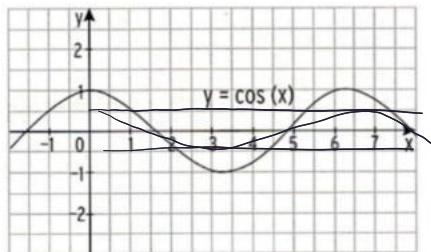


3. Zeichnen Sie das zugehörige Schaubild ein.

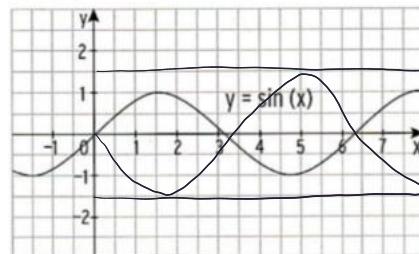
a) $f(x) = 2\sin(x) + 1$
 $a = \text{Amplitude}$



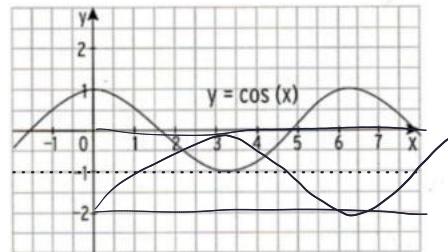
c) $f(x) = 0,5\cos(x)$



b) $f(x) = -1,5\sin(x)$



d) $f(x) = -\cos(x) - 1$

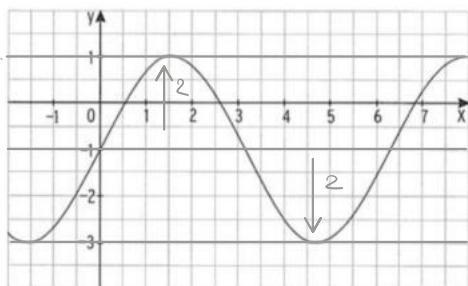


sinus weint g-Achse bei Mittellinie

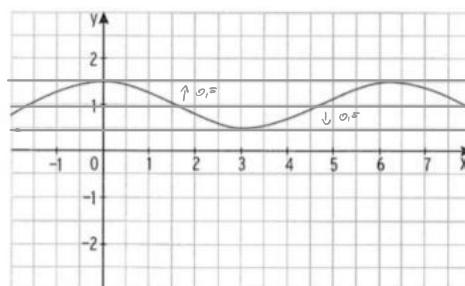
4. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form $f(x) = a \sin(x) + b$

bzw. $f(x) = a \cos(x) + b$.

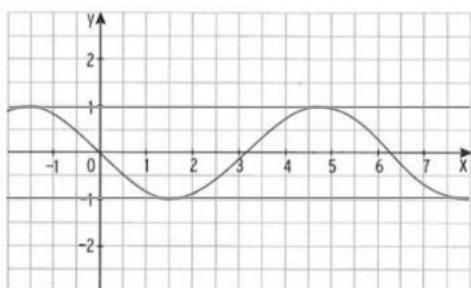
a) $f(x) = 2 \sin(x) - 1$



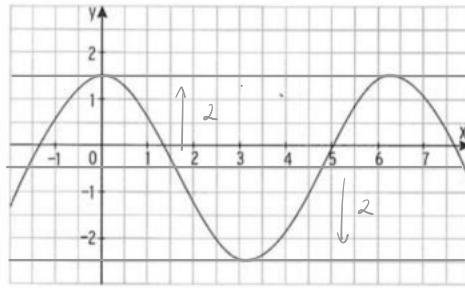
b) $f(x) = 0,5 \cos(x) + 1$



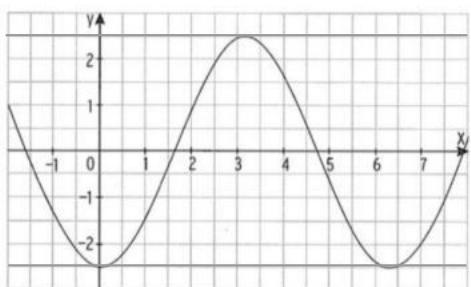
c) $f(x) = -\sin(x)$



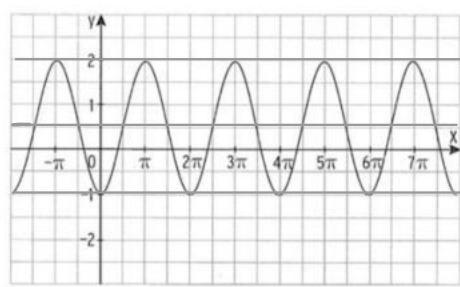
d) $f(x) = 2 \cos(x) - 0,5$



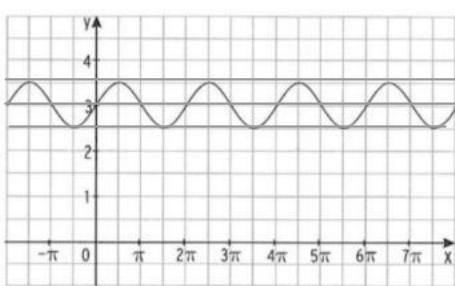
e) $f(x) = -2,5 \cos(x)$



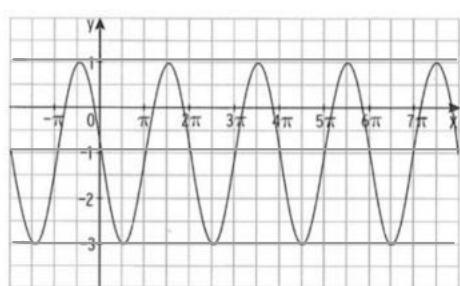
f) $f(x) = -1,5 \cos(x) + 0,5$



g) $f(x) = 0,5 \sin(x) + 3$



h) $f(x) = -2 \sin(x) - 1$



5. Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

- a) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 0,5\sin(x) - 1$ entsteht aus der Sinuskurve ($y = \sin(x)$) durch Streckung mit dem Faktor 0,5 in y -Richtung und durch Verschiebung um 1 nach unten.
- b) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -\cos(x) + 2$ entsteht aus der Kosinuskurve ($y = \cos(x)$) durch Spiegelung an der x -Achse und durch Verschiebung um 2 nach oben.
- c) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\cos(x) - 3$ entsteht aus der Kurve mit $y = \cos(x)$ durch Streckung mit dem Faktor 2 in y -Richtung und durch Verschiebung um 3 nach unten.
- d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = -\pi \sin(x)$ entsteht aus der Kurve mit $y = \sin(x)$ durch Spiegelung an der x -Achse und Streckung um π in y -Richtung.

6. Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

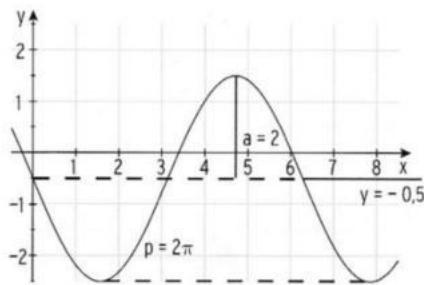
Funktionsterm	a	p	Funktionsterm	a	p
$f(x) = 0,25\sin(\pi x)$	$a = 0,25$	$p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$	$f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$	-5	$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$
$f(x) = 6\cos(5x)$	$a = 6$	$p = \frac{2\pi}{5}$	$f(x) = 1,6\sin(3x)$	$1,6$	$p = \frac{2\pi}{3}$
$f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$	$a = -4$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$	$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$	$-\frac{4}{3}$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
$f(x) = 3\cos(2x)$	$a = 3$	$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$	$f(x) = \cos(x) + 1$	1	$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

7. Geben Sie den Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

a	p	$f(x) = a \cdot \sin(kx)$	a	p	$f(x) = a \cdot \cos(kx)$
$a = 2$	$p = 2$	$f(x) = 2\sin(\pi x)$	$a = 6$	$p = 4\pi$	$f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$
$a = \pi$	$p = 1$	$f(x) = \pi \sin(2\pi x)$	$a = 4$	$p = 4$	$f(x) = 4 \cos(\frac{\pi}{2}x)$
$a = 0,5$	$p = \frac{2}{3}\pi$	$f(x) = 0,5 \sin(3x)$	$a = \frac{5}{2}$	$p = \frac{3}{4}$	$f(x) = \frac{5}{2} \cos(\frac{8\pi}{3}x)$

8. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

$$g(x) = -2\sin(x) - 0,5$$

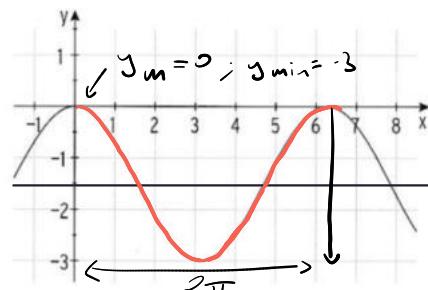


$$\begin{aligned} a &= \frac{0 - (-3)}{2} \\ a &= 1,5 \end{aligned}$$

$$g(x) = 1,5 \cos(x) - 1,5$$

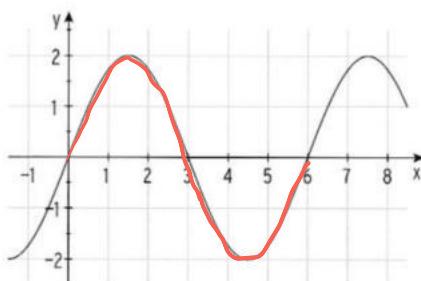
$$d = \frac{0 + 3}{2}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\pi}{p} = 1 \\ b &= \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \end{aligned}$$



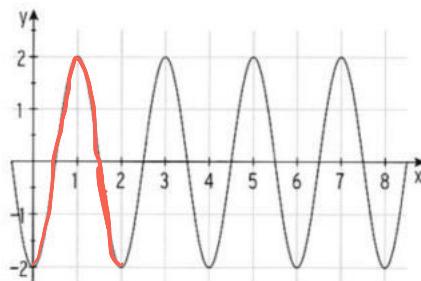
$$g(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\pi}{6} \\ b &= \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$



$$g(x) = -2 \cos(\pi x)$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\pi}{2} \\ b &= \pi \end{aligned}$$



Lösungshinweise:
keine Verschiebung in x-Richtung

$$\text{Mittellinie: } d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{1,5 + (-2,5)}{2} = -0,5$$

$$\text{Amplitude: } \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{1,5 - (-2,5)}{2} = 2$$

Wegen Spiegelung an der x-Achse: $a = -2$

Periode: Differenz benachbarter

Minimalstellen

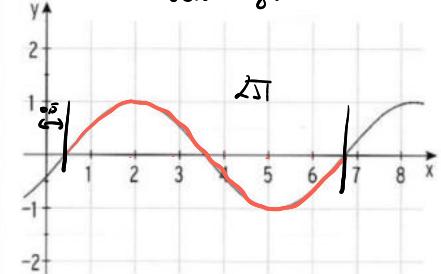
$$\text{Aus } p = \frac{2\pi}{b} \text{ folgt } b = \frac{2\pi}{p} = 1$$

Einsetzen in $g(x) = a \sin(bx) + d$

$$g(x) = \sin(x - 0,5)$$

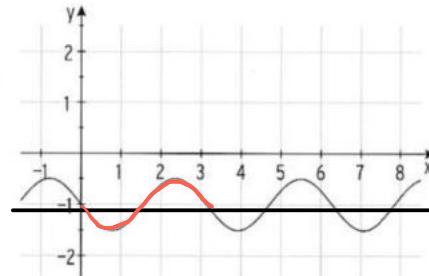
\uparrow
Verschiebung um 0,5

$$\begin{aligned} d &= 0 \\ a &= 1 \\ b &= \frac{2\pi}{6\pi} \\ b &= 1 \end{aligned}$$



$$g(x) = -0,5 \sin(2x) - 1$$

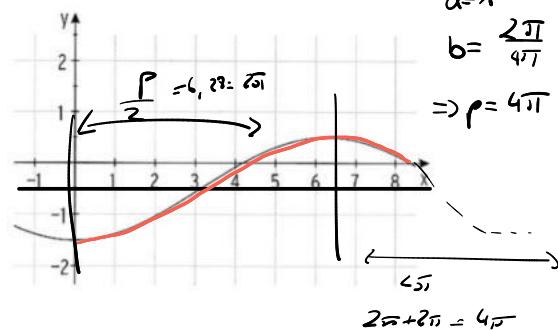
$$b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$



$$g(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 0,5$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{2\pi}{4\pi} \\ b &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = 4\pi$$



(4)

a) $f(x) = 1 - \frac{4}{5} \sin(2x)$ ↗ Verschiebung = 1
 $f(x) = -\frac{4}{5} \sin(2x) + 1$

$\uparrow < 1$

A: können sich nicht berühren.

b) $+ \frac{4}{5}$

$f(x) = -\frac{4}{5} \sin(2x) + \frac{4}{5} = \min 1$ Kontakt mit x

(5)

a = 3

p ≈ 6,3 $f(x) = -3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

b = 6π

p = $\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

(11)

b) : A

a) : B

c) : C

(12)

$f(x) = 2 \sin(2x) - 1$

A: fängt nicht bei 1 an

B: Periode 2π , nicht bei 1π

C: Amplitude ist 1,5

(13)

① $f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

$p = NR \quad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6}\pi$

② $f(x) = 2,5 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1$

$p = 4 \quad \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{11}{2}$

Trigonometrische Gleichungen

Bsp: $f(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin(x) = 0,5}_{\text{trigonometrische Gleichung}}$$

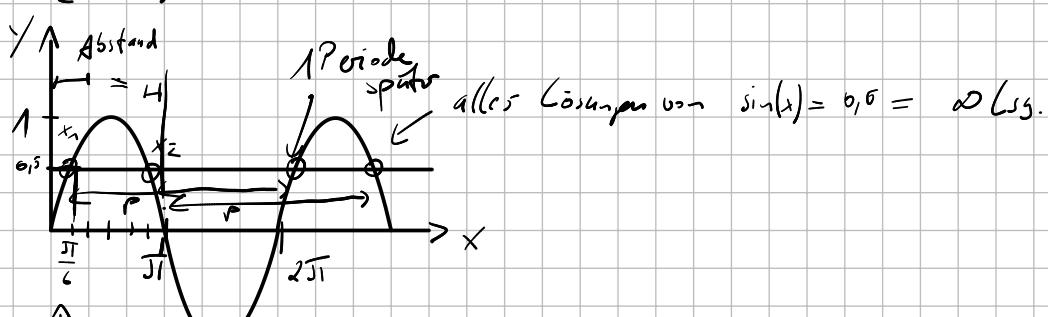
Lsg. $\sin(x) = 0,5 \mid \arcsin(\cdot)$

← Radizierung!

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(0,5) \quad \leftarrow \sin^{-1}$$

$$x = \arcsin(0,5)$$

$$x = \frac{1}{6}\pi$$



bei $\frac{\pi}{6} : y = 0,5$

Nur loc Sinus!

$$\frac{\pi}{6} = x_1 \quad \left| \quad x_2 = \frac{\pi}{2} - x_1 = x_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\pi = \underline{\underline{\frac{5}{6}\pi}}$$

↔ P

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ oder } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

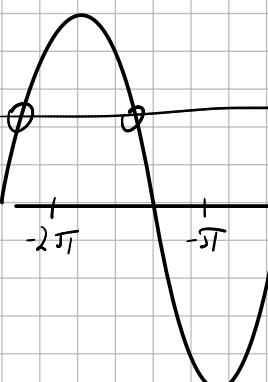
Bsp 2

$$f(x) = \cos(x)$$

$$\cos = 0,5 \mid \arccos$$

$$\arccos(\cos(x)) = \arccos(0,5)$$

$$x = \frac{1}{3}\pi$$



$$\Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ oder } x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$4 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2 = 27 \quad | -27$$

$$4 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 25 = 0 \quad | +25$$

$$4 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 25 \quad | :4$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 6.25 \quad | \arcsin$$

$$\frac{\pi}{4}x = y$$

185

$$P=2\pi$$

$$\textcircled{1} \quad c) \quad 2 \cos(x) = \sqrt{2} \quad [-\pi; 2\pi]$$

$$2 \cos(x) = \sqrt{2} \quad | :2$$

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad | \arccos \quad \text{liest ch}$$

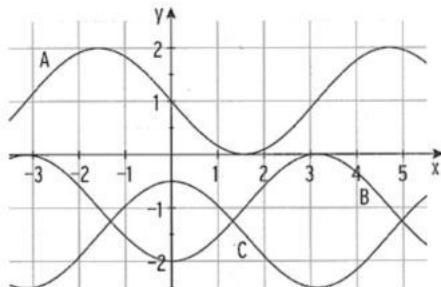
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}\pi \\ x_2 = -\frac{1}{4}\pi \end{cases} \quad \text{mit } P = 2\pi \quad \text{liest dim}$$

$$x_3 = x_1 + 2\pi = \frac{3}{4}\pi - \text{nicht dim}$$

$$\textcircled{x}_4 = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{9}{4}\pi \leftarrow \text{dim}$$

$$\{ \frac{1}{4}\pi; -\frac{1}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi \}$$

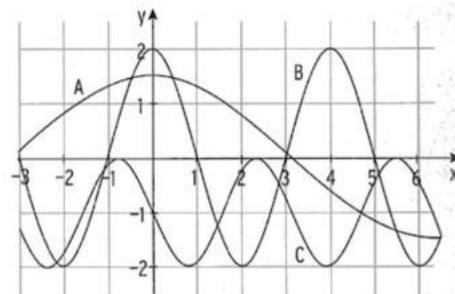
12. Ordnen Sie zu.



 : $f(x) = -\cos(x) - 1$

 : $g(x) = \cos(x) - 1,5$

 : $h(x) = -\sin(x) + 1$



 : $f(x) = 1,5\cos(0,5x)$

 : $g(x) = -1 - \sin(2x)$

 : $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x)$

13. Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

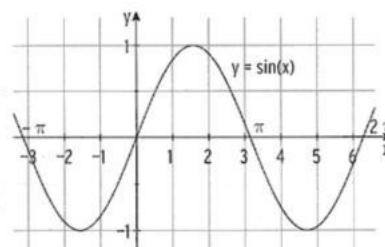
- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| a) Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| b) Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x + 1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| e) Die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |
| f) Die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(x) + 4$ hat den Wertebereich $[1; 7]$. | <input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f |

14. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

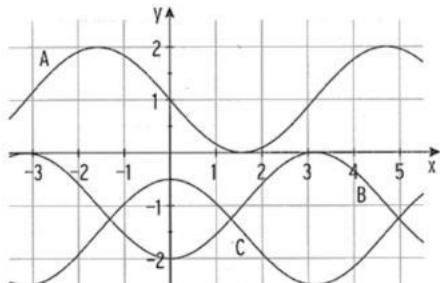
a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x =$

b) $\sin(x) = 0,5 \Rightarrow x =$

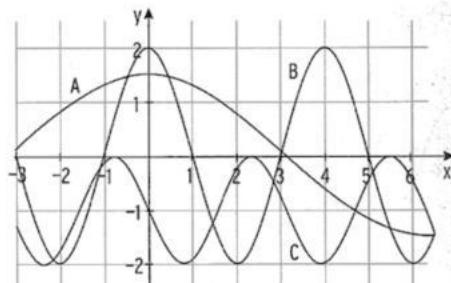
c) $\sin(x) = -0,5 \Rightarrow x =$



12. Ordnen Sie zu.



- ____ : $f(x) = -\cos(x) - 1$
 ____ : $g(x) = \cos(x) - 1,5$
 ____ : $h(x) = -\sin(x) + 1$



- ____ : $f(x) = 1,5\cos(0,5x)$
 ____ : $g(x) = -1 - \sin(2x)$
 ____ : $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x)$

13. Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

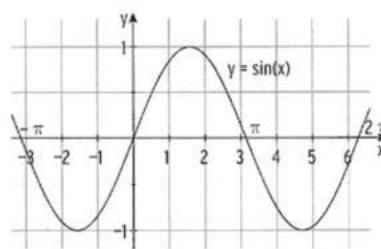
a) Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
b) Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x + 1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
e) Die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f
f) Die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(x) + 4$ hat den Wertebereich $[1; 7]$.	<input type="checkbox"/> w <input type="checkbox"/> f

14. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x =$

b) $\sin(x) = 0,5 \Rightarrow x =$

c) $\sin(x) = -0,5 \Rightarrow x =$



15. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $2\sin(x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(x) = 0,5$	c) $2\sin(x) = -1$	d) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ mithilfe der Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$	WTR: $x = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x = -\frac{\pi}{3} \notin [0; 2\pi]$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$		

16. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $2\sin(2x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(\frac{x}{2}) = 0,5$	c) $2\sin(\frac{\pi}{3}x) = -1$	d) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{4}$ Mit der Sinuskurve: $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ Mit $z = 2x$: $x_1 = \frac{\pi}{8}; x_2 = \frac{3\pi}{8}$ Periode $p = \pi$: $x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ $x = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11}{8}\pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{8}; x_2 = \frac{3\pi}{8}$ $x_3 = \frac{9\pi}{8}; x_4 = \frac{11\pi}{8}$	WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1 2} = \pm \frac{2\pi}{3}$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ $(x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi > 2\pi)$ keine Lösung)		

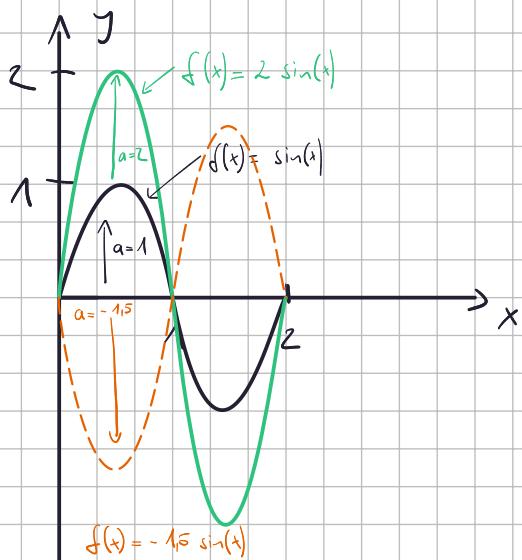
17. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	b) $\sin(\frac{\pi}{4}x) = 0$	c) $\cos(\frac{x}{3}) = -0,5$	d) $\cos(2x) = 0$

Die allgemeine Sinusfunktion

\cos ist um $\frac{\pi}{2}$ von \sin verschoben

$$\Rightarrow f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$$

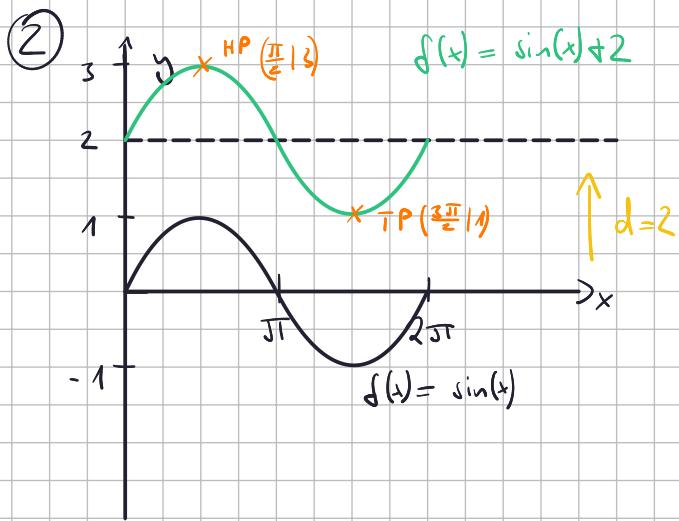


Die Amplitude a berechnet sich

aus:

$$a = \frac{y_H - y_T}{2}$$

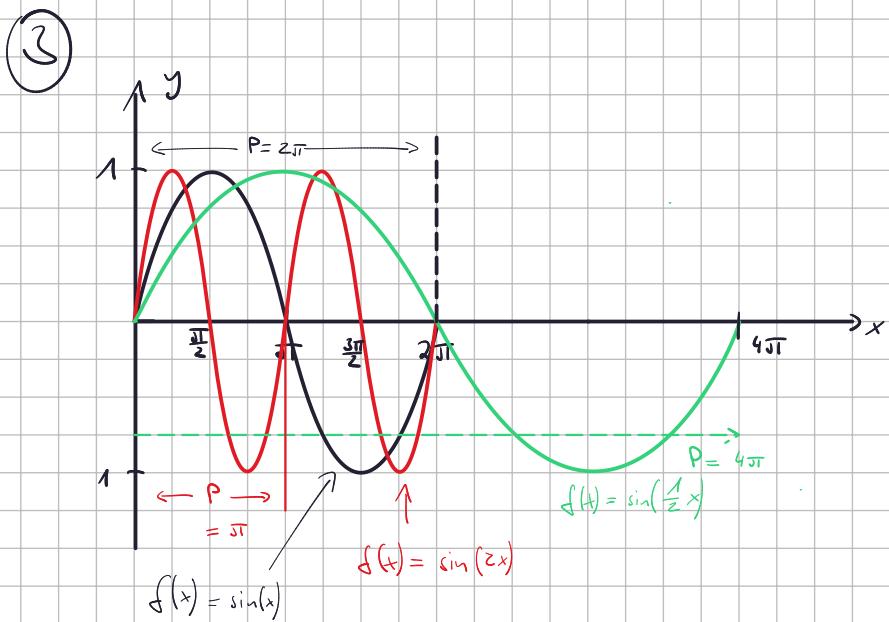
Streckung in y -Richtung: a



d bewirkt eine Verschiebung in y -Richtung

$$d = \frac{y_H + y_T}{2}$$

Verschiebung in y -Richtung: d



$$\text{Periode } p = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{p}$$

Streckung in x -Richtung: b

Das Bogenmaß eines Winkels

$$\text{Kreisumfang: } U = 2r \cdot \pi$$

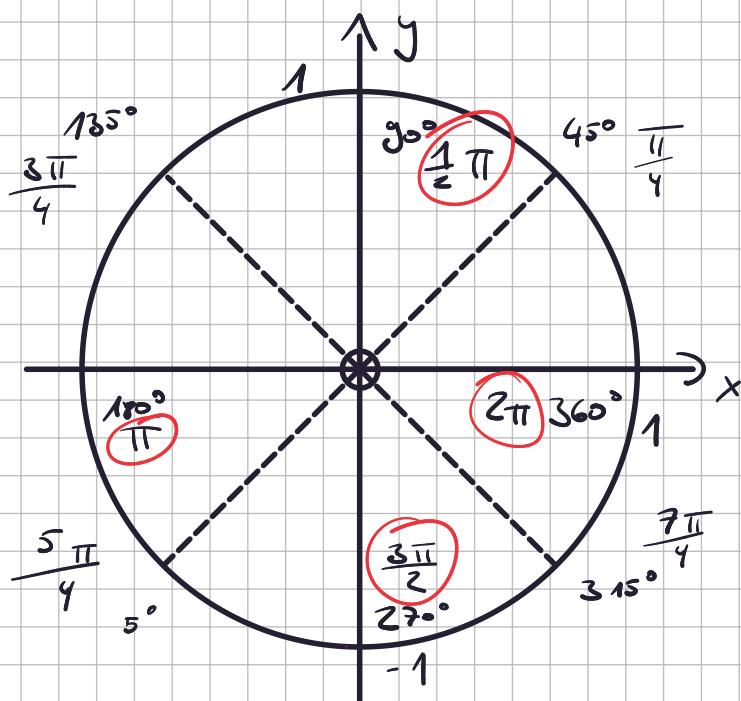
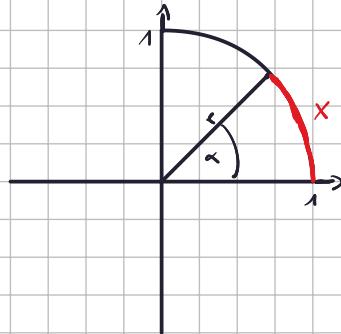
$$\text{mit } r=1 \Rightarrow U=2\pi$$

Winkelmaß Vollkreis: 360°

$$\Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{2\pi}{360^\circ} \quad | \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ \cdot x}{2\pi} = \frac{180^\circ \cdot x}{\pi}$$



Trigonometrische Funktionen

Bsp.

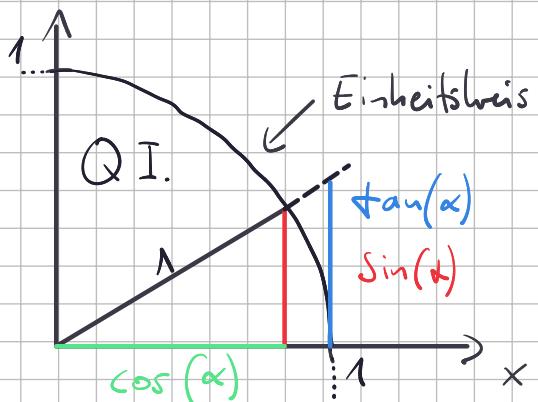
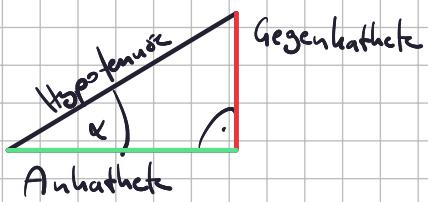
Ebbe / Flut

Atemung

Pendeluhr

Wechselstrom

A) Winkelfunktionen für Winkel zwischen 0° - 90°



$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$	GAG HHA
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------

für : $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

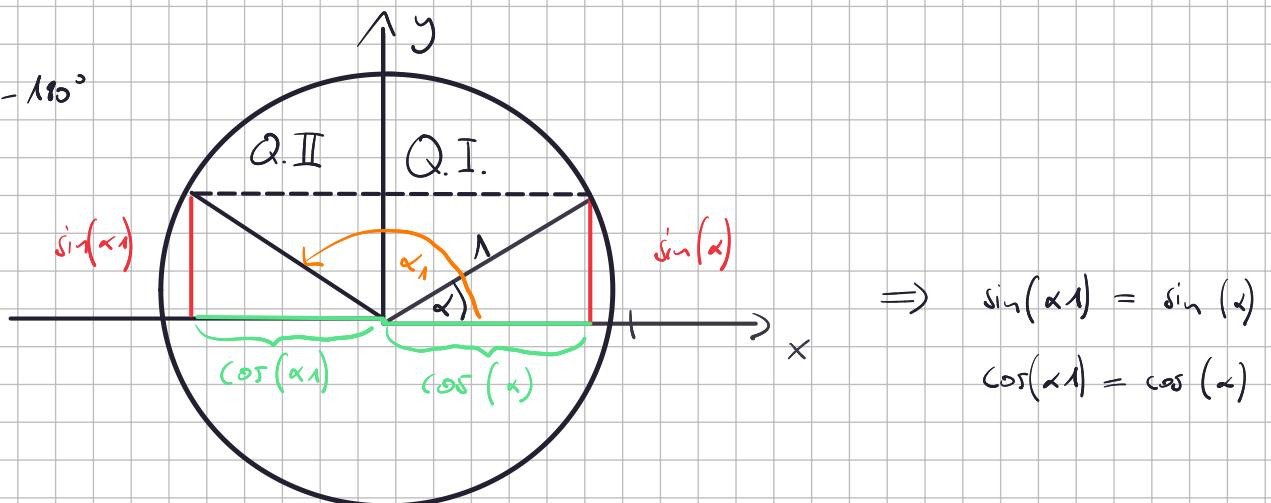
$$0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$

$$0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

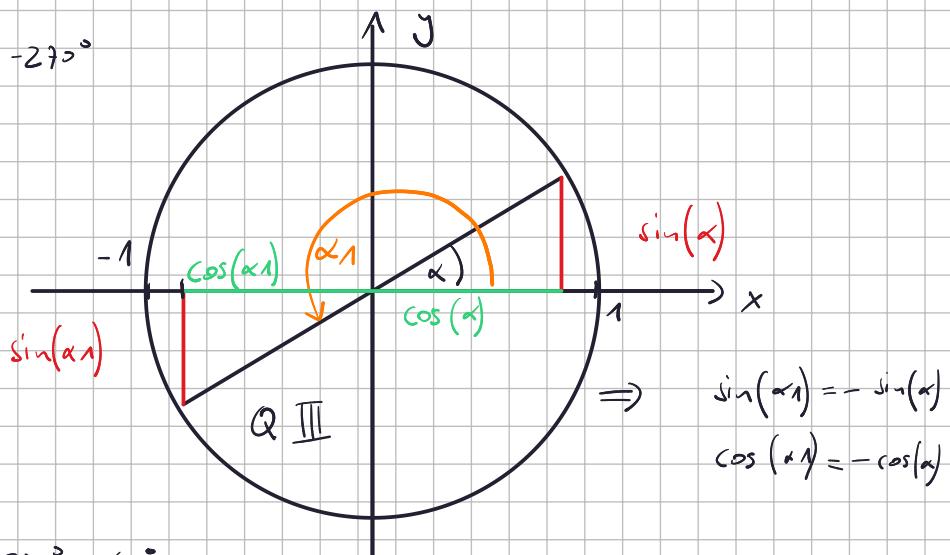
$$\begin{array}{l} \sin(0^\circ) = 0 \\ \sin(90^\circ) = 1 \\ \cos(0^\circ) = 1 \\ \cos(90^\circ) = 0 \end{array}$$

B) Winkelfunktionen in den Quadranten

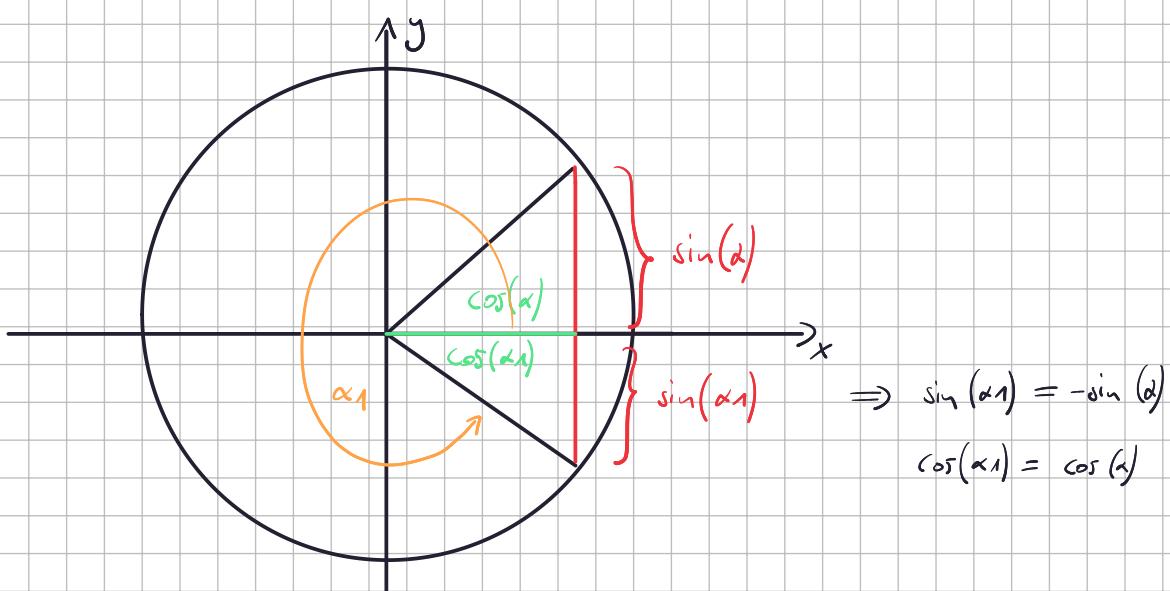
1) $\alpha_1: 90^\circ - 180^\circ$

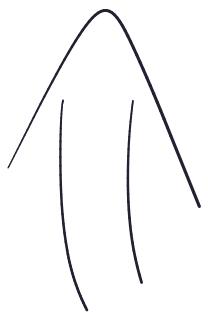


2) $\alpha_1: 180^\circ - 270^\circ$



3) $\alpha_1: 270^\circ - 360^\circ$





Trigonometric

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = a \cdot \gamma^t \\ f(t) = a \cdot e^{k \cdot t} \end{array} \right\} \text{gleich} \quad k = \ln(\gamma)$$

Bei Prozentrechnung immer 1 setzen.

⑤

Ist exponentiell

$$q = 1,35$$

$$f(t) = 3,9 \cdot 1,35^t$$

$$13 = 3,9 \cdot 1,35^t \quad | : 3,9$$

$$\frac{13}{3,9} = 1,35^t \quad \left| \log_{1,35} \left(\frac{13}{3,9} \right) \right.$$

$$t = 4,01 \text{ Jahren}$$

A: Nach ca 4 Jahren.

S. 151

②

$$80.000 = 150 \cdot q^t \quad | : 150$$

$$\frac{80.000}{150} = 1,3^t \quad | \log$$

$$\log_{1,3} \left(\frac{80.000}{150} \right) = t$$

$$t \approx 23,53 \quad \text{Wochen}$$

gesamtg = 8ha
8ha = 80.000 m²
Anfangsbestand: 150 m²

③

8

$$\therefore = k \cdot 1,046$$

Um 43 %

④

$$g(t) = g(0) e^{-0,0122 \cdot t}$$

$$g(20) = 24$$

$$g(0) e^{-0,0122 \cdot 20} = 24 \quad | : e^{-0,0122 \cdot 20}$$

$$g(0) = 30,63$$

Anfangsbestand = 30,63 Gramm.

$$30,63 \cdot e^{-0,0122 \cdot t} = 0,01 \quad | : 30,63$$

$$e^{-0,0122 \cdot t} = \frac{0,01}{30,63} \quad | \ln$$

$$-0,0122 \cdot t = \ln \left(\frac{0,01}{30,63} \right) \quad | : -0,0122$$

$$t = \frac{\ln \left(\frac{0,01}{30,63} \right)}{-0,0122}$$

$$\underline{\underline{t = 657,36 \text{ Tage}}}$$

$$c) \quad T_h = -\frac{\ln(2)}{k} = -\frac{\ln(2)}{-0,0122} = 56,8 \text{ Tage}$$

$$k = \ln(q) \quad | \quad e^{(k)} = e^{\ln(q)}$$

$$\underline{q = 0,99}$$

Prozentuale Abnahme um ca. 1% pro Tag

$$f(t) = 30,63 \cdot 0,99^t$$

$$f(t) = 25,05 \%$$

S. 151

(1)

Lsg I.

$$30,2 = -\frac{\ln(z)}{k} \quad | \cdot k$$

$$30,2 \cdot k = -\ln(z) \quad | : 30,2$$

$$k = -\frac{\ln(z)}{30,2}$$

$$k = -0,022$$

$$f(t) = 1 \cdot e^{-0,022 \cdot t}$$

$$f(t) = 0,502 = \underline{\underline{50,2\%}}$$

$$f(t) = 1 \cdot e^{-0,022 \cdot t} = 0,10 \quad | (\ln$$

$$-0,022 \cdot t = \ln(0,1) \quad | : (-0,022)$$

$$t = \frac{\ln(0,1)}{-0,022}$$

$$\underline{\underline{t = 100,32}}$$

A: Nach ungefähr 100 Jahren.

Lsg II.

$$f(t) = a \cdot q^t$$

100:

$$f(t) = 1 \cdot q^{30,2} = 0,5 \quad | : 1$$

$$q^{30,2} = \frac{0,5}{1} \quad | \sqrt[30,2]{}$$

$$q = 0,577$$

$$f(t) = 1 \cdot 0,577^t = 0,1 \quad | \log_{0,577}(0,1)$$

$$t = 58,55$$

$$f(t) = 1 \cdot 0,577^{30}$$

$$f(t) = 0,502 = \underline{\underline{50,2\%}}$$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$g(x) = -2,5 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$$

Streching in y um -3,5

Streching in x um Faktor 4

S. 144 Nr. ①

① a) $y: f(0) = 2e^0 - 2 = 0$ b) $y: f(0) = e^{-0} + 3 = 4$

$x: 2e^x - 2 = 0 \mid +2$
 $2e^x = 2 \mid :2$
 $e^x = 1 \mid \ln$
 $x = \ln(1)$

$x: e^{-x} + 3 = -3 \mid -3$
 $e^{-x} = -6 \mid \ln$

4) $f(x) = 4 - 2e^x$

$y: f(0) = 4 - 2e^0 = 2$

$x: f(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2e^x = 0 \mid +2e^x$
 $4 = 2e^x \mid :2$
 $2 = e^x \mid \ln$
 $x = \ln(2)$

d) $f(x) = e^{-0,4x} - 3$

$y: f(x) = e^{-0,4 \cdot 0} - 3$

$f(0) = -2$

$x: f(x) = 0 \Rightarrow e^{-0,4x} - 3 = 0 \mid +3$

$e^{-0,4x} = 3 \mid \ln$

$-0,4x = \ln(3) \mid :(-0,4)$

$x = \frac{\ln(3)}{-0,4}$

e) $f(x) = -1 + 2e^{1,25x}$

$f(0) = -1 + 2e^{1,25 \cdot 0}$

$f(0) = 1$

$f(x) = 0 \Rightarrow -1 + 2e^{1,25x} = 0 \mid +1$
 $2e^{1,25x} = 1 \mid :2$

$e^{1,25x} = \frac{1}{2} \mid \ln$

$1,25x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \mid :1,25$

$x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1,25}$

$f(0) = \frac{e}{2} - e^{0,5x}$

$f(0) = \frac{e}{2} - e^{0,5 \cdot 0}$

y: $f(0) = \frac{e}{2} - 1$

$x: \frac{e}{2} - e^{0,5x} = 0 \mid +e^{0,5x}$

$\frac{e}{2} = e^{0,5x} \mid \ln$

$0,5x = \ln\left(\frac{e}{2}\right) \mid :0,5$

$x = \frac{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}{0,5}$

⑤

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= -e^{2x} \\ g(x) &= -6e^x \end{aligned}$$

Punkte bestimmen:

$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow -e^{2x} = -6e^x$$

$$-e^{2x} = -6e^x \quad | +6e^x$$

$$-e^{2x} + 6e^x = 0$$

$$e^x(-e^x + 6) = 0$$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad \hookrightarrow -e^x + 6 &= 0 \quad | +e^x \\ \neq 0 \quad 6 &= e^x \quad | \ln \\ \underline{\ln(6) = x} \end{aligned}$$

x einsetzen:

$$-e^{-\ln(6)} = -36$$

$$S(\ln(6) \mid -36)$$

$$b) \quad f(x) = e^{2x} + 6$$

$$g(x) = 5e^x$$

$$e^{2x} + 6 = 5e^x \quad | -5e^x$$

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 = e^x \\ u_2 &= 2 = e^x \end{aligned}$$

 \Rightarrow Resubstitution

$$x_1 = \ln(2)$$

$$x_2 = \ln(3)$$

$$S_1(\ln(2) \mid 10) \quad S_2(\ln(3) \mid 15)$$

$$c) f(x) = -e^{3x} + 2x$$

$$g(x) = 2x - 5$$

$$-e^{3x} + 2x = 2x - 5 \quad | +e^{3x} - 2x$$

$$0 = e^{3x} - 5 \quad | +5$$

$$5 = e^{3x} \quad | \ln$$

$$\ln(5) = 3x \quad | :3$$

$$\frac{\ln(5)}{3} = x$$

$$j(y) = 2 \cdot \frac{\ln(\bar{s})}{3} - 5$$

$$j(y) = -3, 927$$

$$\underline{\underline{S\left(\frac{\ln(\bar{s})}{3} \mid -3, 927\right)}}$$

d)

$$f(x) = 2e^{0,5x} - 3x$$

$$g(x) = -3x + 1$$

$$2e^{0,5x} - 3x = -3x + 1 \quad | +3x$$

$$2e^{0,5x} = 1 \quad | :2$$

$$e^{0,5x} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$

$$0,5x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad | :0,5$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0,5}$$

$$g(y) = -3 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0,5} + 1$$

$$g(y) = 5,158$$

$$\underline{\underline{S\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0,5} \mid 5,158\right)}}$$

(6)

$$5000e^x = 80.000 \cdot e^{-x} \quad | - 80.000e^{-x}$$

$$5000e^x - 80.000e^{-x} = 0$$

$$e^x \cdot (5000 - 80.000e^{-2x}) = 0$$

\downarrow
 $\neq 0$

$$\hookrightarrow 5000 - 80.000e^{-2x} = 0 \quad | +80.000e^{-2x}$$

$$5000 = 80.000e^{-2x} \quad | : 80.000$$

$$\frac{1}{16} = e^{-2x} \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{1}{16}\right) = -2x \quad | : (-2)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{-2} = x$$

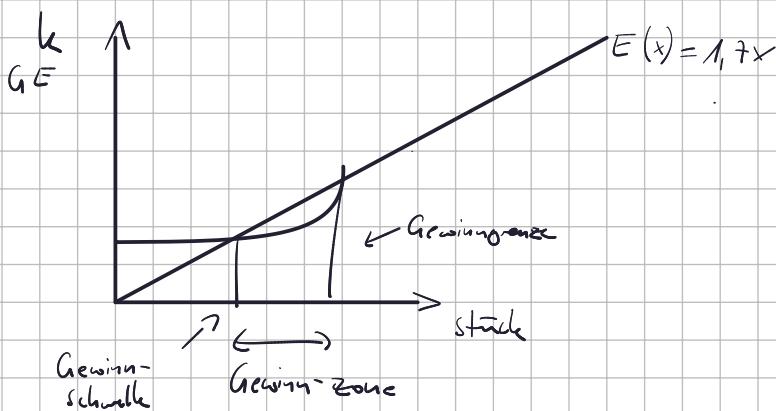
$$\underline{\underline{\zeta(1,386 / 20.000)}}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{-2}$$

$$5000e^x = y$$

(7)

$$u(x) = 0,4 e^{0,5x} + 2,5$$



$$0,4 e^{0,5x} + 2,5 = 1,7x \quad | - 1,7x$$

$$0,4 e^{0,5x} + 2,5 - 1,7x = 0$$

nochsts zulässig: 2,1 in TR.

164 Nr. 3

$$h(t) = 1000 \cdot (1 - 0,85 \cdot e^{-0,0513 \cdot t})$$

$$h(t) = 1000 \cdot (1 - 0,85 \cdot e^{-0,0513 \cdot 0})$$

$$h(t) = 1000 \cdot (1 - 0,85)$$

$$h(t) = 1000 \cdot 0,15$$

$$h(t) = 150 \quad A: \text{Zur Beginn gibt es } 150 \text{ Kaninchen.}$$

Läuft gegen den Bestand von 1000

$$h(t) = 1000 \cdot (1 - 0,85 \cdot e^{-0,0513 \cdot t}) = 250$$

$$1000 \cdot (1 - 0,85 \cdot e^{-0,0513 \cdot t}) = 250 \quad | : 1000$$

$$1 - 0,85 \cdot e^{-0,0513 \cdot t} = \frac{250}{1000} \quad | - 1$$

$$-0,85 \cdot e^{-0,0513 \cdot t} = -\frac{3}{4} \quad | : (-0,85)$$

$$e^{-0,0513 \cdot t} = \frac{15}{17} \quad | \ln$$

$$-0,0513 \cdot t = \ln\left(\frac{15}{17}\right) \quad | : -0,0513$$

$$t = \underline{\underline{2,439}}$$

Nach ca. $2\frac{1}{2}$ Monaten hat der Bestand ca. 250 Kaninchen erreicht.

S. 154 Nr. (2)

$u = \text{Wachstumskonstante}$

Biomasse wächst: ✓

$$\rightarrow g(t) = a - 10e^{-kt}$$

↑ Schraube od. Grenzwert.

geg:

$$g(0) = 10$$

$$g(10) = 16,321$$

$$a - 10e^{-k \cdot 0} = 10$$

$$a - 10 = 10 \quad | +10$$

$$a = 20$$

$$20 - 10e^{-k \cdot 10} = 16,321 \quad | + 10e^{-k \cdot 0} - 16,321$$

$$3,679 = 10e^{-k \cdot 10} \quad | : 10$$

$$\frac{3,679}{10} = e^{-k \cdot 10} \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{3,679}{10}\right) = -k \cdot 10 \quad | : 10$$

$$\frac{\ln\left(\frac{3,679}{10}\right)}{10} = -k \quad | \cdot (-1)$$

$$10$$

$$-\frac{\ln\left(\frac{3,679}{10}\right)}{10} = k$$

$$k = 0,055954412$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(t) = 20 - 10e^{-0,055954412 \cdot t}}}$$

c) $20 - 0,55 = 19$ gesucht: t von 55% des Grenzwertes

$$g(t) = 20 - 10e^{-0,055954412 \cdot t} = 19 \quad | -20$$

$$-10e^{-0,055954412 \cdot t} = -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$10e^{-0,055954412 \cdot t} = 1 \quad | : 10$$

$$e^{-0,055954412 \cdot t} = \frac{1}{10} \quad | \ln$$

$$-0,055954412 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \quad | : -0,055954412$$

$$\underline{\underline{t = 23,026}} \quad A: \text{Nach 23 Jahren sind } 55\% \text{ erreicht.}$$

①

$$T(t) = T_u + (T_0 - T_u) e^{kt}$$

$$T(30) = 24,7$$

$$\begin{aligned} T(t) &= 20 + (80 - 20) e^{kt} \\ &= 20 + 60 e^{kt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 20 + 60 e^{k \cdot 30} = 24,7 \quad | -20$$

$$60 e^{k \cdot 30} = 4,7 \quad | : 60$$

$$e^{k \cdot 30} = \frac{4,7}{60} \quad | \ln$$

$$k \cdot 30 = \ln\left(\frac{4,7}{60}\right) \quad | : 30$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{4,7}{60}\right)}{30}$$

$$\underline{T(t) = 20 + (80 - 20) e^{\frac{\ln\left(\frac{4,7}{60}\right)}{30} t}}$$

$$30 = 20 + (80 - 20) \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{4,7}{60}\right)}{30} t}$$

$$30 = 20 + 60 \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{4,7}{60}\right)}{30} t} \quad | : 60$$

$$\frac{30}{60} = e^{\frac{\ln\left(\frac{4,7}{60}\right)}{30} t} \quad | \ln$$

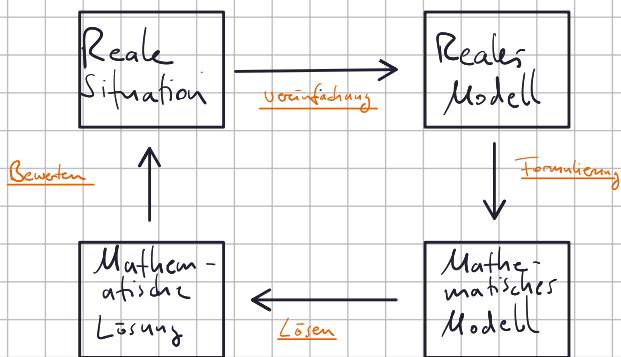
$$\ln\left(\frac{30}{60}\right) = \frac{\ln\left(\frac{4,7}{60}\right)}{30} t \quad | : \frac{\ln\left(\frac{4,7}{60}\right)}{30}$$

$$\underline{\frac{\ln\left(\frac{30}{60}\right)}{\ln\left(\frac{4,7}{60}\right)} = t}$$

$$\underline{t = 11,6 \text{ Minuten}}$$

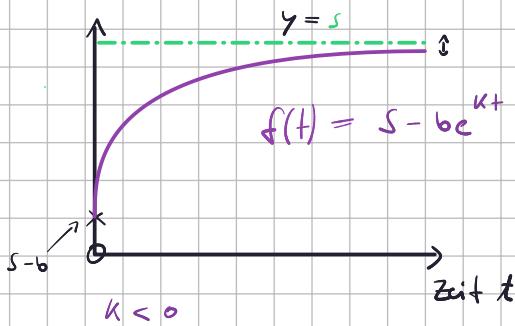
A: Nach 11,6 Minuten ist der Körper auf 30°C gesunken.

Modellierung

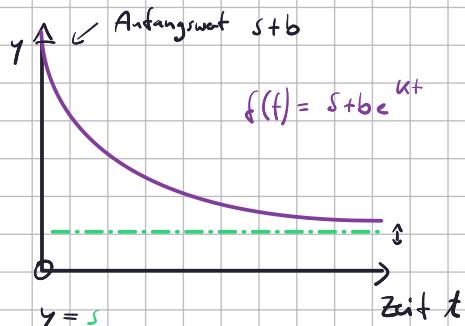


Beschränktes Wachstum / beschränkter Zerfall

a) Beschränktes Wachstum



b) Beschränkter Zerfall



Bsp.: Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen (8°C) und erwärmt sich auf 21°C Raumtemperatur.

Nach 10 min. beträgt die Temperatur 14°C

Braucht weniger als 10 min zum Abkühlen.

$$\Rightarrow f(t) = 21 - be^{-kt}$$

$$f(0) = 8$$

$$f(0) = 21 - b \cdot e^{k \cdot 0} = 8 \quad |+b-8$$

$$f(10) = 21 - 13 \cdot e^{-kt} = 14 \quad | :13$$

aus Aufgabe

$$f(10) = 14$$

$$\Rightarrow 21 - 13 \cdot e^{-k \cdot 10} = 14 \quad |-14 + 13e^{-k \cdot 10}$$

$$\frac{7}{13} = 13e^{-k \cdot 10} \quad | :13$$

$$\frac{7}{13} = e^{-k \cdot 10} \quad |\ln$$

$$\ln\left(\frac{7}{13}\right) = k \cdot 10 \quad | :10$$

$$\frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{10} = k$$

Einsetzen:

$$f(t) = 21 - 13e^{\frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{10} t}$$

Bsp 2:

Eine Tasse Tee wird zubereitet und kühlst in Folge auf Zimmertemp.
ab (21°). Nach 15 Minuten hat die Anfangstemperatur um 20° abgenommen.

ges. $f(t) = ?$

$$\Rightarrow f(t) = 21 + b e^{-kt}$$

$$f(0) = 100$$

$$f(t) = 21 + 100 \cdot e^{-kt} = 100 \quad | -100$$

$$f(t) = 21 + 79 e^{-kt} \quad | :79$$

$$f(15) = 80$$

$$f(t) = 21 + 79 e^{-kt} = 80 \quad | -21$$

$$79 e^{-kt} = 59 \quad | :79$$

$$e^{-kt} = \frac{59}{79} \quad | \ln$$

$$-kt = \ln\left(\frac{59}{79}\right) \quad | :t$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{59}{79}\right)}{15}$$

$$f(t) = 21 + 79 e^{\frac{\ln\left(\frac{59}{79}\right)}{15} \cdot t}$$

Exponentielles Wachstum

Bsp.: 1000 € Startkapital

8% Verzinsung pro Jahr

$$\Rightarrow K(t) = 1000 \cdot \boxed{1,08}^t$$

\nearrow \nwarrow

Wachstumsfaktor

$$e^{\ln(q)} = q$$

\nearrow \nwarrow

in Jahren

$$K(t) = 1000 \cdot e^{\boxed{\ln(1,08)} \cdot t}$$

\nearrow \nwarrow

Wachstumskonstante

$$K(t) =$$

\Rightarrow exponentielles Wachstum wird beschrieben durch:

$$\underline{f(t) = a \cdot e^{kt}}; t \geq 0$$

$k > 0$ ist die Wachstums Konstante

$a = f(0)$ ist der Anfangsbestand

23. a) Liegt bei den nachfolgenden Vorgängen näherungsweise ein exponentieller Wachstums- bzw. Zerfallsprozess vor?

2011	2012	2013	2014	2015	
112,7	132,7	152,7	172,7	192,7	<input type="checkbox"/> ja <input checked="" type="checkbox"/> nein
2011	2012	2013	2014	2015	<input checked="" type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein
7,80	7,41	7,04	6,69	6,36	

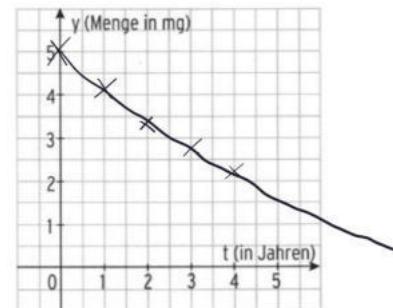
b) Beim exponentiellen Wachstum gilt $q \geq 1$,
beim exponentiellen Zerfall gilt $0 < q \leq 1$.

24. Eine Anfangsmenge von 5 mg des radioaktiven Stoffes Radon 222 zerfällt exponentiell gemäß der Tabelle (t in Tagen; y in mg).

t	0	1	2	3	4
y	5	4,09	3,34	2,73	2,23

a) Stellen Sie den Vorgang im Koordinatensystem dar.

b) Ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm auf 3 Arten.



1. Die Regression am WTR führt zu $f(t) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Der Anfangsbestand von $a = \underline{5}$ und die Wachstumsfaktor $q = \underline{0,82}$ führen zu $f(t) = \underline{5} \cdot \underline{e^{0,82t}}$. $\rightarrow -18\%$

3. Das Einsetzen des Anfangsbestandes von $a = \underline{5}$ und der Koordinaten des Punktes $P(\underline{3} | \underline{2,73})$ in $f(t) = a \cdot e^{kt}$ führen zu $\underline{5} \cdot \underline{e^{k \cdot 3}} = \underline{2,73} \Rightarrow \underline{k = \frac{\ln(2,73)}{3}}$

$$e^{k \cdot 3} = \underline{\frac{2,73}{5}} \quad | \ln$$

$$k \cdot 3 = \ln\left(\frac{2,73}{5}\right) \quad | :3$$

$$k = \ln\left(\frac{2,73}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad k = -0,201$$

Somit gilt $f(t) = \underline{5 \cdot e^{-0,201t}}$.

c) Die Halbwertszeit beträgt $t_H = \underline{\hspace{2cm}}$. Überprüfen Sie dies am Schaubild.

$$T_H = \frac{-\ln(2)}{k} \Rightarrow -\frac{\ln(2)}{-0,201}$$

21. Die nachfolgenden exponentiellen Wachstums- bzw. Zerfallsvorgänge sollen durch Funktionsterme beschrieben werden. Geben Sie jeweils zwei Funktionsterme an.

Vorgang	$f(t) = a \cdot b^t$	$f(t) = a \cdot e^{kt}$
Ein Kapital von 1500 EUR wird mit einem Zinssatz von 3 % jährlich verzinst.	$f(t) = 1500 \cdot 1,03^t$ (t in Jahren)	$e^k = 1,03$ $k = \ln(1,03) \approx 0,03$ $f(t) = 1500 \cdot e^{0,03t}$
Ein Auto wird für 20000 EUR gekauft. Pro Jahr verliert es 30 % an Wert.	$f(t) = 20000 \cdot 0,70^t$ (t in Jahren)	$e^k = 0,70$ $k = \ln(0,70)$ $f(t) = 20000 \cdot e^{\ln(0,70) \cdot t}$
Zu Beginn sind 4 Rechner mit einem Computervirus infiziert. Die Anzahl der insgesamt infizierten Rechner verzehnfacht sich täglich.	$f(t) = 4 \cdot 10^t$ (t in Tagen)	$e^k = 10$ $k = \ln(10)$ $f(t) = 4 \cdot e^{\ln(10) \cdot t}$
Von einem radioaktiven Stoff sind zu Beginn 5 g vorhanden. Die Menge halbiert sich jährlich.	$f(t) = 5 \cdot \frac{1}{2}^t$ (t in Jahren)	$e^k = \frac{1}{2}$ $k = \ln(\frac{1}{2})$ $f(t) = 5 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2}) \cdot t}$

22. Das gesamte Holzvolumen (in m³) eines Waldes wächst exponentiell und ist für die Jahre ab 2011 in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

2011	2012	2013	2014	2015
85000	90100	95506	101236	107310

{ } { } { } { }

$$\frac{90100}{85000} = \frac{95506}{90100} = \frac{101236}{95506} = \frac{107310}{101236} = 1,06 \\ 6\%$$

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Wachstumsfaktor q für alle Zeitschritte konstant ist.

b) Der zugehörige Funktionsterm (mit t = 0 im Jahr 2011) lautet: $f(t) = 85000 \cdot e^{(0,06) \cdot t}$. Damit wird im Jahr 2020 ein Holzvolumen von $143,605,7115 \text{ m}^3$ erwartet.

19. Lösen Sie die Gleichung.

a) $-2e^{-x} + e^2 = 0$

b) $\frac{1}{4}(e^{2x} - 3) = 0$

c) $-e^{2x} + 11e^x - 28 = 0$

d) $2 - e \cdot e^{0,5x} = 0$

e) $2e^x - 7e^{-x} = 0$

f) $e^{2x} - 5e^x = -6$

$a) -2e^{-x} + e^2 = 0 \quad +e^{-x}$ $-2e^{-x} = e^2 \quad : (-1)$ $e^x = 2e^{-x} \quad : 2$ $\frac{e^x}{2} = e^{-x} \quad \ln$ $\ln\left(\frac{e^x}{2}\right) = -x \quad \cdot (-1)$ $\underline{\underline{x = -\ln\left(\frac{e^x}{2}\right)}}$	$b) \frac{1}{4}(e^{2x} - 3) = 0 \quad \cdot 4$ $e^{2x} - 3 = 0 \quad +3$ $\frac{e^{2x}}{4} = \frac{3}{4} \quad : \frac{1}{4}$ $\frac{e^{2x}}{2} = \frac{3}{4} \quad \ln$ $\ln\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \quad : 2$ $\underline{\underline{x = \frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{2}}}$	$c) -e^{2x} + 11e^x - 28 = 0 \quad +e^{2x}$ $-e^{2x} + 11e^x - 28 = 0 \quad \cdot (-1)$ $e^{2x} - 11e^x + 28 = 0 \quad +\sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}$ $e^{2x} = \frac{11e^x \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2}$ $e^{2x} = \frac{11e^x \pm \sqrt{121 - 112}}{2}$ $e^{2x} = \frac{11e^x \pm \sqrt{9}}{2}$ $e^{2x} = \frac{11e^x \pm 3}{2}$ $e^{2x} = \frac{11e^x + 3}{2} \quad : e^x$ $e^x = \frac{11e^x + 3}{2e^x}$ $e^x = \frac{11}{2} + \frac{3}{2e^x}$ $e^x = \frac{11}{2} + 1,5 \quad \ln$ $\underline{\underline{x_1 = \ln\left(\frac{11}{2} + 1,5\right)}}$	$d) 2 - e \cdot e^{0,5x} = 0 \quad -2 + e$ $-e \cdot e^{0,5x} = -2 + e \quad : (-1)$ $e^{0,5x} = \frac{-2 + e}{-e}$ $0,5x = \frac{\ln(-2 + e)}{-e} \quad : 0,5$ $x = \frac{\ln(-2 + e)}{-0,5e}$
$e) 2e^x - 7e^{-x} = 0 \quad \cdot e^x$ $2e^{2x} - 7 = 0 \quad +7$ $2e^{2x} = 7 \quad : 2$ $e^{2x} = 3,5 \quad \ln$ $2x = \ln(3,5) \quad : 2$ $x = \frac{\ln(3,5)}{2}$	$f) e^{2x} - 5e^x = -6 \quad +6$ $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$ $e^{2x} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$ $e^{2x} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $e^{2x} = 3 \quad : 2$ $e^x = \frac{3}{2} \quad \ln$ $x_1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $e^x = 2 \quad : 2$ $\ln(2) = x_2$		

20. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte und die Asymptote von K_f . Skizzieren Sie K_f .

a) $f(x) = 4e^{-0,25x} - 3$

b) $f(x) = -\frac{1}{8}e^{3x} + 3$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) =$

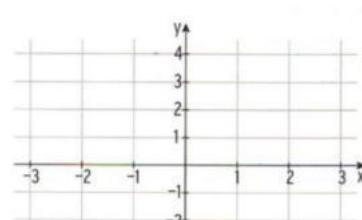
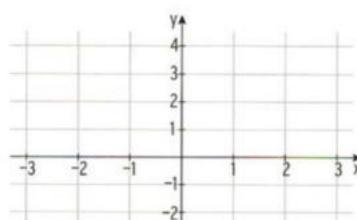
$S_y ($

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = 0$

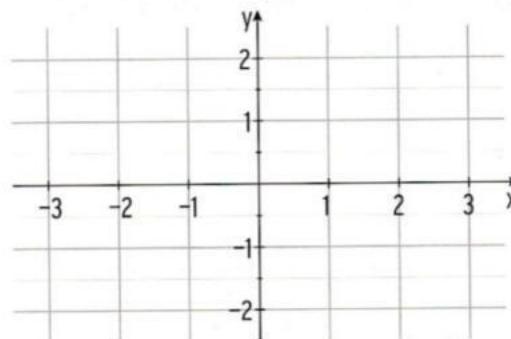
$N ($

Asymptote: $y =$



15. Für welche Werte von c hat die Gleichung $e^x + c = 0$ eine Lösung?
Antwort: Für $c < 0$

Begründen Sie mithilfe einer Skizze:



16. Lösen Sie die Gleichung mithilfe des Logarithmus.

$3e^{2x} = 15$	$2e^{-x} - 3 = 1$	$7 - 2e^{-0,2x} = 0$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1$
$3e^{2x} = 15$	$2e^{-x} - 3 = 1 \quad +3$	$7 - 2e^{-0,2x} = 0 \quad +2e^{-0,2x}$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1 \quad -2$
$e^{2x} = 5$	$2e^{-x} = 4 \quad :2$	$7 = 2e^{-0,2x} \quad :2$	$-e^{\frac{2}{5}x} = -3 \quad $
$2x = \ln(5)$	$e^{-x} = 2 \quad \ln$	$3,5 = e^{-0,2x} \quad \ln$	$3 = e^{\frac{2}{5}x} \quad \ln$
$x = \frac{1}{2} \ln(5)$	$x = \ln(2) \quad T$	$\ln(3,5) = -0,2x \quad :-0,2$	$\ln(3) = \frac{2}{5}x \quad :\frac{2}{5}$
	$\lambda = \ln(2)$	$\frac{\ln(3,5)}{-0,2} = x$	$\frac{\ln(3)}{\frac{2}{5}} = x$

17. Lösen Sie die Gleichung mit dem Satz vom Nullprodukt.

$e^{2x} - 3e^x = 0$	$e^x - 3e^{-x} = 0$	$e^x - 4e^{2x} = 0$
$e^x(e^x - 3) = 0$	$e^x(1 - 3e^{-2x}) = 0$	$e^x(1 - 4e^x) = 0$
$e^x = 0 \vee e^x - 3 = 0$	$\downarrow \quad 1 - 3e^{-2x} = 0 \quad +3e^{-2x}$	$\downarrow \quad 1 - 4e^x = 0 \quad +4e^x$
$e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$	$\neq 0 \quad 1 = 3e^{-2x} \quad :3$	$\neq 0 \quad 1 = 4e^x \quad :4$
$e^x \neq 0$	$\frac{1}{3} = e^{-2x} \quad \ln$	$\frac{1}{4} = e^x \quad \ln$
	$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -2x \quad :(-2)$	$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = x$
	$-\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = x$	

18. Lösen Sie die Gleichung mit Substitution.

$e^{2x} - 4e^x = -3$	$-2e^{2x} + 6e^x + 8 = 0$	$e^x + 4e^{-x} + 5 = 0 \quad \cdot e^x$
$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$	$-2u^2 + 6u + 8 = 0 \quad :(-2)$	$e^{2x} + 4 + 5e^{-x} = 0$
$e^x = u \quad (e^{2x} = u^2)$	$u^2 - 3u - 4 = 0$	$u^2 + 5u + 4 = 0$
$u^2 - 4u + 3 = 0$	$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$	$u_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$u = 1 \vee u = 3$	$u_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$	$u_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$
$e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$	$u_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad e^x = 2 \quad \ln$	$u_1 = \frac{-2}{2} = -1 \quad e^x = -1 \quad \ln$
$e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$	$u_2 = \frac{2}{2} = 1 \quad e^x = 1 \quad \ln$	$u_2 = \frac{-8}{2} = -4 \quad e^x = -4 \quad \ln$
	$\ln(1) = x_1$	$\ln(-4) = x_2$

Verdopplungszeit

$$1000 \rightarrow 2000$$

Wachstumskonstante

$$0,077 \cdot t$$

$$1000 \cdot e^{0,077 \cdot t} = 2000 \quad | : 1000$$

$$e^{0,077 \cdot t} = 2 \quad | \ln$$

$$0,077 \cdot t = \ln(2) \quad | : 0,077$$

$$\underline{t = 9,01 \approx 9 \text{ Jahre}}$$

⇒

$$\text{allg. } T_V = \frac{\ln(2)}{k}$$

Wachstumskonstante

Halbwertszeit

Bsp. 100 kg atomarer

Brennstoff

Zerfall 5% jährlich

$$\Rightarrow 100 \rightarrow 50 \text{ kg}$$

NR:

0,95 Faktor

$$100 \cdot e^{\ln(0,95) \cdot t} = 50 \quad | : 100$$

Wachstumsfaktor: 0,95

$$e^{\ln(0,95) \cdot t} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$

$$\ln(0,95) \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad | : \ln(0,95)$$

$$\underline{t = 13,5 \text{ Jahre}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,6931 \dots$$

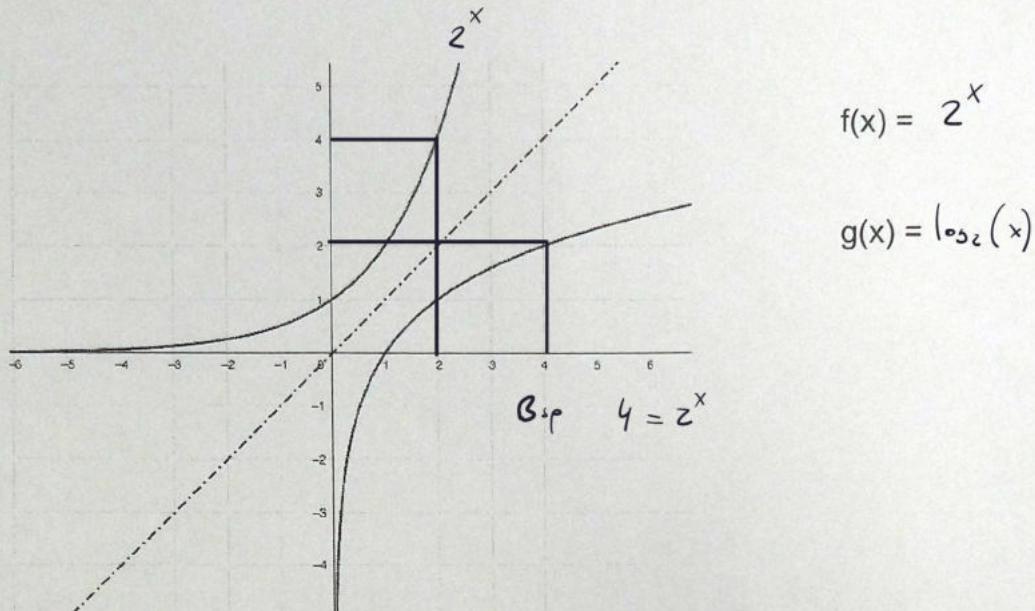
$$\ln(2) = 0,6931 \dots$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

allg. Halbwertszeit

$$T_H = -\frac{\ln(2)}{k}$$

Beispiel :



Allgemeine Form :

$$a^x = b$$

Lösung :

$$x = \log_a(b)$$

Definition :

Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Horazahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

$$(a > 0; a \neq 1; b > 0)$$

Regeln :

- (1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
- (2) $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) \cdot \log_a(v)$
- (3) $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$

Exponentialgleichungen

1) Der Logarithmus

Bsp. $2^x = 8 \Rightarrow$ gesucht ist der Exponent x .

Lösung $x = 3 \Rightarrow$ Logarithmus von 8 zur Basis 2.

Schreibweise: $3 = \log_2(8)$

\Rightarrow Exponentialgleichung zur Basis e

Bsp. $e^x = 4$ Logarithmus naturalis

Lösung: $x = \ln(4)$ (Natürlicher Logarithmus)

$$x \approx 1,38$$

Lösen von Exponentialgleichungen

2)

a) Anwendung des Logarithmus

$$\begin{aligned} \text{bsp.1} \Rightarrow e^x &= 5 \mid \ln \\ \Rightarrow \ln(e^x) &= \ln(5) \\ \Rightarrow x &= \underline{\ln(5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bsp.3} \quad e^{2x} - 2e &= 0 \mid +2e \\ e^{2x} &= 2e \mid \ln \\ 2x &= \ln(2e) \mid :2 \\ x &= \frac{\ln(2e)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bsp.2} \quad \frac{1}{2}e^{1-x} - 3 &= 0 \mid +3 \\ \frac{1}{2}e^{1-x} &= 3 \mid \cdot 2 \\ e^{1-x} &= 6 \mid \ln \\ 1-x &= \ln(6) \mid -1 \\ -x &= \ln(6) - 1 \mid \cdot (-1) \\ x &= -\ln(6) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{bsp.4} \quad e^{-2x} + 3 &= 0 \mid -3 \quad -e^{-2x} - 3 &= 0 \mid +3 \\ e^{-2x} &= -3 \mid \ln \quad e^{-2x} &= 3 \mid \ln \\ -2x &= \ln(-3) \quad \boxed{y} \\ -2x &= \ln(3) \end{aligned}$$

b)

Aushklammern und SUMP

Bsp. 1 $e^x - e^{2x} = 0$

$$e^x \cdot (1 - e^x) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \neq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ \rightarrow 1 - e^x = 0 \end{array} \quad | + e^x$$

$$1 = e^x \quad | \ln$$

$$x = \ln(1)$$

$$\underline{x = 0}$$

Bsp. 2 $4e^{-x} - 2e^{2x} = 0$

$$e^{-x} (4 - 2e^{2x}) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \neq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ \rightarrow 4 - 2e^{2x} = 0 \end{array} \quad | - 4$$

$$-2e^{2x} = -4$$

$$e^{2x} = 2 \quad | \ln$$

$$2x = \ln(2) \quad | : 2$$

$$x = \frac{\ln(2)}{2}$$

Potenzregeln

$$e^x \cdot e^x = e^{x+x} = e^{2x}$$

$$e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$$

$$e^{2x} \cdot e^{-x} = e^x$$

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

Lösen durch Substitution

$$\text{Bsp: } e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$e^x \cdot e^x - 5e^x + 6 = 0$$

$$\text{Substitution } e^x = u$$

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$u_1 = \frac{5+1}{2}$$

$$u_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \Rightarrow \text{Resubstitution}$$

$$u_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad u = e^x$$

$$e^x = 2 \quad | \ln$$

$$x_1 = \underline{\ln(2)}$$

$$e^x = 3 \quad | \ln$$

$$x_2 = \underline{\ln(3)}$$

Weitere Regeln:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \leftarrow \text{allgemein}$$

$$(e^x)^2 = e^{2x}; (e^{-x}) = e^{-2x}$$

Bsp.

$$e^x - 20e^{-x} = -1 \quad | +1$$

$$e^x - 20e^{-x} + 1 = 0 \quad | \cdot e^x$$

$$e^x - 20 + e^{-x} = 0$$

$$u^2 + u - 20 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$u_1 = \frac{-1+9}{2} = 4$$

$$u_2 = \frac{-1-9}{2} = -5 \quad e^x = 4 \quad | \ln$$

$$\underline{x = \ln(4)} \quad \checkmark$$

$$x_2 = \underline{\ln(-5)} \quad \text{y}$$

$$(1) \text{ g) } e^x - 6e^{2x} = 0$$

$$e^x(1 - 6e^{2x}) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \neq 0 \end{array} \quad \hookrightarrow 1 - 6e^{2x} = 0 \quad | +6e^{2x}$$

$$1 = 6e^{2x} \quad | :6$$

$$\frac{1}{6} = e^{2x} \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{1}{6}\right) = 2x \quad | :2$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{2} = x$$

(2)

$$\text{b) } 0.5e^{3x} - 5e^{2x} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$e^{3x} - 10e^{2x} = 0$$

$$e^{2x}(e^x - 10) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \neq 0 \end{array} \quad \hookrightarrow e^x - 10 = 0 \quad | +10$$

$$e^x = 10 \quad | \ln$$

$$\underline{x = \ln(10)}$$

$$\text{d) } \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{4} = 0 \quad | + \frac{e^{-x}}{4} \quad | \cdot 4$$

$$2e^x - e^{-x} = 0$$

$$e^x \cdot (2 - e^{-2x}) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \neq 0 \end{array} \quad \hookrightarrow 2 - e^{-2x} = 0 \quad | + e^{-2x}$$

$$2 = e^{-2x} \quad | \ln$$

$$\ln(2) = -2x \quad | \cdot (-2)$$

$$\underline{\underline{\frac{\ln(2)}{-2} = x}}$$

(3)

$$e^{2x} + e^x = 0$$

$$e^{5x} (e^x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \neq 0 \end{array} \quad \hookrightarrow e^x \cdot 3 = 0 \quad | :3$$

$$e^x = 3 \quad | \ln$$

$$\underline{\underline{x = \ln(3)}}$$

(5)

$$ae^{2x} - e^x = 0$$

$$e^x(ae^x - 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \neq 0 \end{array} \quad \hookrightarrow ae^x - 1 = 0 \quad | +1$$

$$a \cdot e^x = 1 \quad | :a$$

$$e^x = \frac{1}{a} \quad | \ln$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{a}\right) \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ a > 0 \end{array}$$

nicht lösbar für $a \leq 0$

c)

Lösen durch Substitution

(1) a) $e^x = 30 \quad | \ln$ b) $e^{3x} = 12 \quad | \ln$ c) $e^{1-x} = 1000 \quad | \ln$

$$\underline{\underline{x = \ln(30)}}$$

$$3x = \ln(12) \quad | :3$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\ln(12)}{3}}}$$

$$1-x = \ln(1000) \quad | -1$$

$$-x = \ln(1000)-1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{\underline{x = -\ln(1000)+1}}$$

d) $e^{5x}-4=0 \quad | +4$

$$e^{5x}=4 \quad | \ln$$

$$5x = \ln(4) \quad | :5$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\ln(4)}{5}}}$$

(2) a) $\frac{e^{-x}}{2}-3=0 \quad | +3$ i) $6e^{(\ln(3)) \cdot x}-18=0 \quad | +18$

$$\frac{e^{-x}}{2}=3 \quad | \cdot 2$$

$$e^{-x}=6 \quad | \ln$$

$$-x = \ln(6) \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{\underline{x = -\ln(6)}}$$

$$6e^{(\ln(3)) \cdot x}=18 \quad | :6$$

$$e^{(\ln(3)) \cdot x}=3 \quad | \ln$$

$$(\ln(3)) \cdot x = \ln(3) \quad | :(\ln(3))$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

(3) $e^{2x}+5=0 \quad | -5$

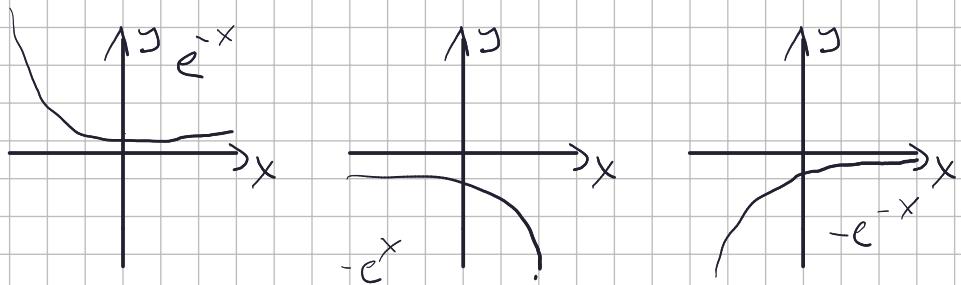
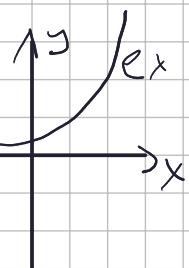
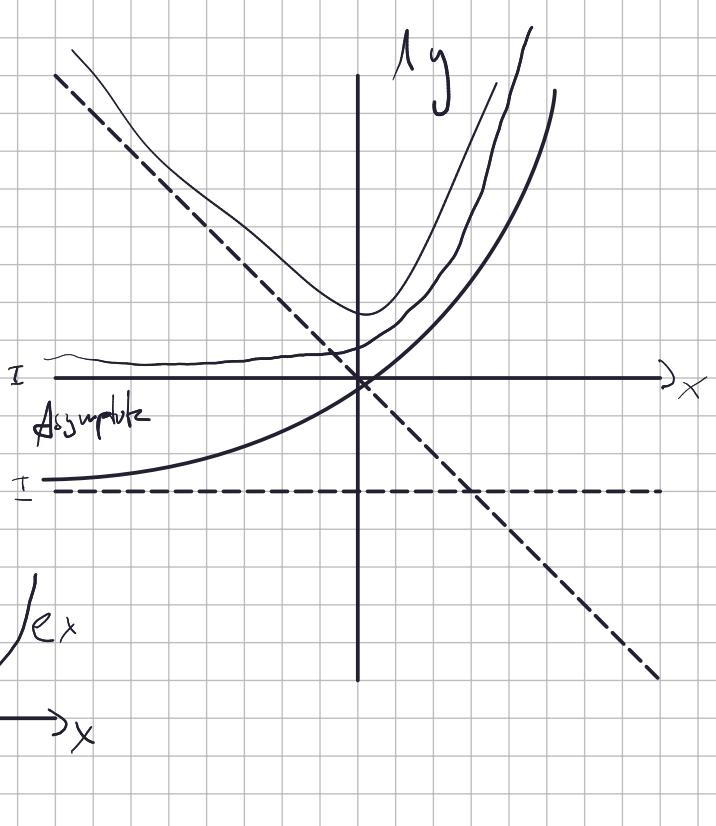
$$e^{2x}=-5 \quad | \ln$$

$$2x = \ln(-5) \quad \text{!}$$

Da in \ln nicht
minus stehen darf

$e^{2x}+a=0$

wenn a positiv ist.



Mathe I KA

① a) $-2x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$$x \cdot (-2x - \frac{3}{4}) = 0$$

$$\hookrightarrow x_{1,2} = 0 \quad \hookrightarrow -2x - \frac{3}{4} = 0 \mid +2x$$

$$-\frac{3}{4} = 2x \mid :2$$

$$-\frac{3}{8} = x_3$$

b)

$$x^2(x-4) = 0$$

$$\hookrightarrow x_{1,2} = 0 \quad \hookrightarrow x_{3,4} = x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$x^2 = 4 \quad \mid \pm\sqrt{}$$

$$x_{3,4} = \pm 2$$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = 2$$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$z_1 = \frac{2}{2} = 1 \quad \pm \sqrt{1} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$z_2 = \frac{8}{2} = 4 \quad \pm \sqrt{4} = \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

(2)

a) $f(x) = 3x^4 - 1 = C$

b) $g(x) = -3x^3 - x^2 = B$

c) $f(x) = 0,5x^3 + 2x - 3 = F$

d) $i(x) = -3x^3 + 4x = D$

e) $j(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 \cdot 1 = E$

f) $k(x) = 2x^4 - 3x^2 - 0,5 = A$

③

$$f(x) = 0,5x^3 - 3x$$

$$g(x) = -0,5x$$

$$0,5x^3 - 3x = -0,5x \mid +0,5x$$

$$0,5x^3 - 2,5x = 0$$

$$x \cdot (0,5x^2 - 2,5) = 0$$

$$\hookrightarrow x_{1,2,3} = 0 \quad \hookrightarrow x_{4,5} = 0,5x^2 - 2,5 = 0 \mid +2,5$$

$$0,5x^2 = 2,5 \mid :0,5$$

$$1x^2 = 5 \quad \mid \pm\sqrt{}$$

$$x_4 = \sqrt{5}$$

$$x_5 = -\sqrt{5}$$

$$\underline{s_1(-\sqrt{5} \mid \frac{\sqrt{5}}{2})}$$

$$y = -0,5 \cdot (-\sqrt{5})$$

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\underline{s_2(0 \mid 0)}$$

$$y = -0,5 \cdot 0$$

$$\underline{s_3(\sqrt{5} \mid -\frac{\sqrt{5}}{2})}$$

$$y = -0,5 \cdot \sqrt{5}$$

(4)

Funktion dritten Grades

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -10 \quad P(21-6)$$

$$f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)$$

$$-6 = a \cdot (2-(-1)) \cdot (2-1) \cdot (2-(-10))$$

$$-6 = a \cdot (3) \cdot (1) \cdot (12)$$

$$-6 = 36a \quad | : 36$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x+10)}}$$

(5)

Fkt. 4. Grades

$$\text{mit } f(0) = 3; \quad f(1) = 4; \quad f(-2) = -5$$

Symmetrisch zur y-Achse

↗

exponenten
größer

$$\begin{aligned} P_1(0|3) \\ P_2(1|4) \\ P_3(-2|-5) \end{aligned}$$

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + 3$$

$$3 = c$$

$$\text{I. } 4 = a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + 3$$

$$1 = a + c \quad | \cdot 4$$

$$4 = 4a + 4c$$

$$\text{II. } -5 = a \cdot (-2)^4 + c \cdot (-2)^2 + 3$$

$$-8 = 16a + 4c$$

$$\text{III. } -1 \cdot 4$$

$$-12 = 12a \quad | : 12$$

$$-1 = a$$

$$-1 + c = 1 \quad | + 1$$

$$a = -1$$

$$c = 2$$

$$\underline{\underline{f(x) = -1x^4 + 2x^2 + 3}}$$

Mathe II

$$(x+4)(x+1)$$

x	x
x	x
x	x
x	x

1)

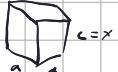
4,5 T Sand

$$4500 \text{ kg} : 1500 \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3} = 3 \text{ m}^3$$

\Rightarrow allg: $V = a \cdot b \cdot c$



$$\Rightarrow V = (4 - 2x)^2 \cdot x$$

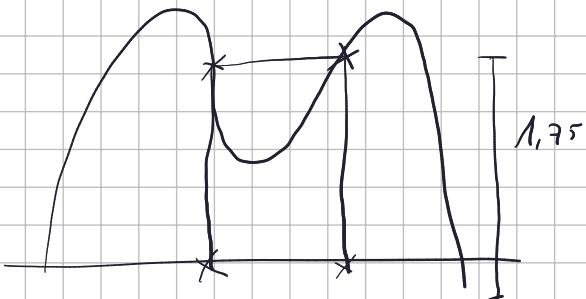


$$= (16 - 16x + 4x^2) \cdot x$$

$$V(x) = 4x^3 - 16x^2 + 16x$$

$$x_{\min} = 0,3$$

$$x_{\max} = 1,2$$



$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$-x^4 + 2x^2 - 1 = 1,75 \quad | -1,75$$

$$-x^4 + 2x^2 - 0,75 = 0 \quad x^2 = z$$

$$-z^2 + 2z - 0,75 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-0,75) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{-2}$$

$$z_1 = \frac{-2 + 1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \begin{array}{l} x_1 = 0,707 \\ x_2 = -0,707 \end{array}$$

$$z_2 = \frac{-2 - 1}{-2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \quad 0,707^2 = \underline{\underline{1,41}}$$