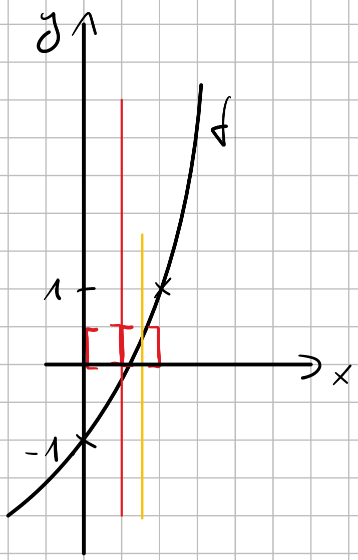
$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 3x - 1$

$f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad 3x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$



Intervallhalbierungsverfahren

① $[0;1]$

② $[0;0{,}5]$ $\quad [0{,}5;1]$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$
$x = 0{,}5 \Rightarrow f(0{,}5) = -\frac{1}{8}$
$x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

③ $[0{,}5;0{,}75]$ $\quad [0{,}75;1]$ ⇐ passendes Intervall

$f(0{,}5) = -\frac{1}{8}$
$f(1) = 1$
$f(0{,}75) = \frac{17}{64}$

Newton - Verfahren

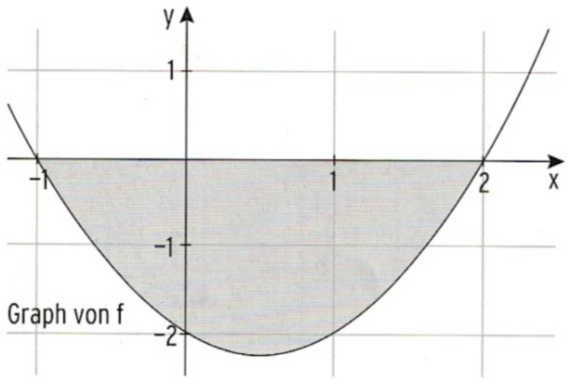
$$\boxed{x_{n+1} = \underset{\text{Startwert}}{x_n} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$$x_2 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{3 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1}{9 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 \cdot 1}$$

$N(\approx 0{,}5944 \mid 0)$ $\qquad = 1 - \frac{1}{4} = 0{,}75$

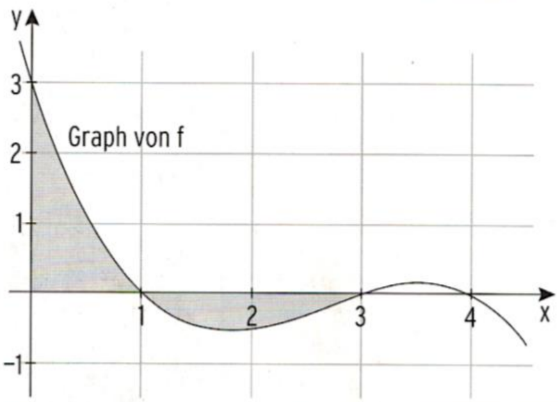
9. Ordnen Sie dem Inhalt der markierten Fläche ein Integral zu.

a)



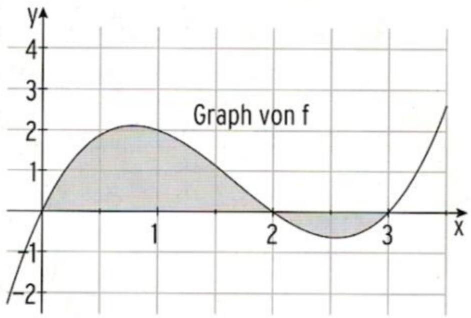
- ☐ $\int_{-1}^{2} f(x)dx$
- ☐ $\int_{2}^{-1} f(x)dx$
- ☒ $-\int_{-1}^{2} f(x)dx$

b)



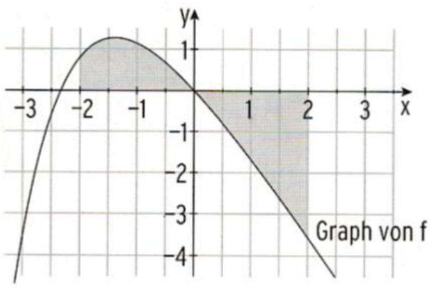
- ☐ $\int_{0}^{3} f(x)dx$
- ☐ $\int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$
- ☒ $\int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{3} f(x)dx$

c)



- ☐ $\int_{0}^{3} f(x)dx$
- ☐ $\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx\right)$
- ☒ $\int_{0}^{2} f(x)dx - \int_{2}^{3} f(x)dx$

d)



- ☐ $\int_{-2}^{2} f(x)dx$
- ☒ $\int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx$
- ☐ $-\int_{-2}^{2} f(x)dx$

Sonderfälle bei der Flächenberechnung

a) Fläche zwischen Kurve, Gerade und x-Achse

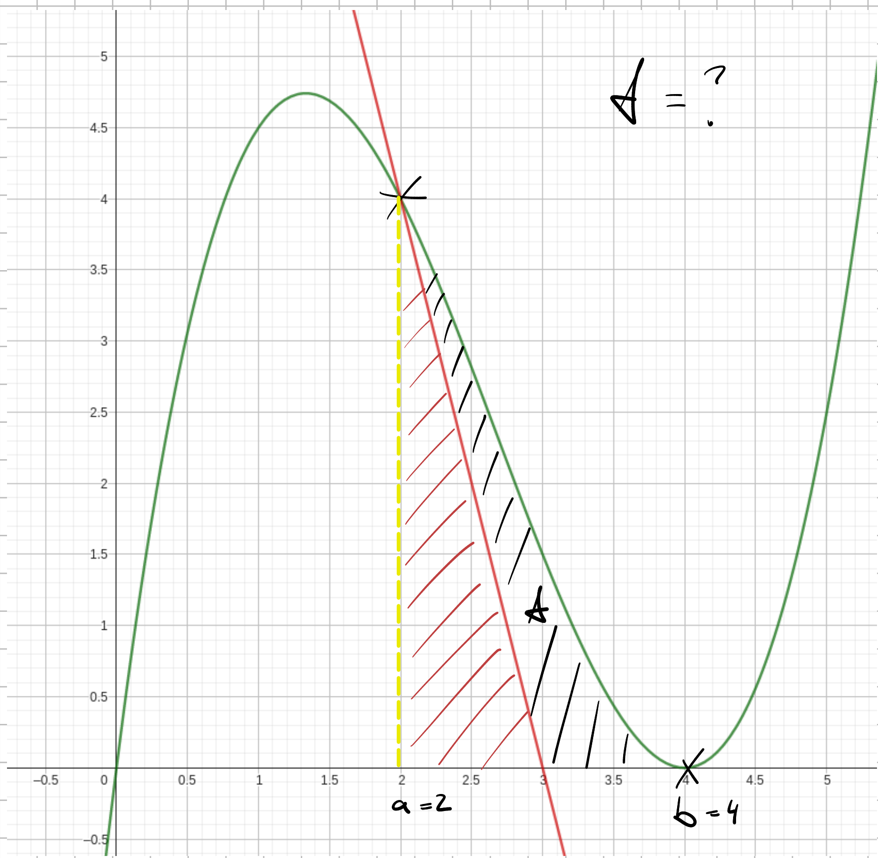
⇒ geg: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$; $x \in \mathbb{R}$

ges: Eigenschaften der Kurve?

⇒ die Gerade g mit der Steigung −4 schneidet k in $S(2|4)$

⇒ k und g schließen mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein.

ges: Flächenstück, welches den Punkt $P(3|1)$ enthält.



$$A = \int_2^4 f(x)\,dx - \Delta$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 4$$

$$= \int_2^4 \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x - 2$$

$$= \int_2^4 \frac{\frac{1}{2}}{4}x^4 - \frac{4}{6}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 2x$$

$$= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2\right]_2^4 - 2$$

$$A = \left[\frac{1}{8}\cdot 4^4 - \frac{4}{3}\cdot 4^3 + 4\cdot 4^2\right] - \left[\frac{1}{8}2^4 - \frac{4}{3}2^3 + 4\cdot 2^2\right] - 2$$

$$A = 1{,}3 \text{ FE}$$

b) Aufstellen von Kurvengleichungen bei gegebenem Flächeninhalt

ges: Fkt 3. Grades, punktsymmetrisch zum Ursprung, verläuft durch P(4|0), schließt mit der x-Achse im ersten Quadrant eine Fläche von 6,4 FE ein.
Wie lautet die Funktionsgleichung?

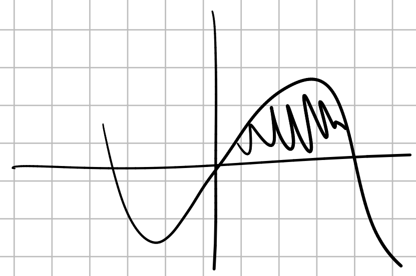
P(4|0) $\quad f(x) = ax^3 \cancel{+bx^2} + cx \cancel{+d}$

N(0|0) $\quad f(x) = ax^3 + cx$

$f(4) = 0 \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{c}{2}x^2$

$A = 6{,}4$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 6{,}4$$



$$\left[\frac{a}{4}\cdot 4^4 + \frac{c}{2}\cdot 4^2\right] - \left[\frac{a}{4}\cdot 0^4 + \frac{c}{2}\cdot 0^2\right] = 6{,}4$$

$$\left.\begin{aligned} 64a + 8c &= 6{,}4 \\ 64a + 4c &= 0 \end{aligned}\right] -$$

$4c = 6{,}4 \quad |:4$

$c = 1{,}6$

$64a + 4\cdot 1{,}6 = 0 \quad |-6{,}4$

$64a = -6{,}4 \quad |:64$

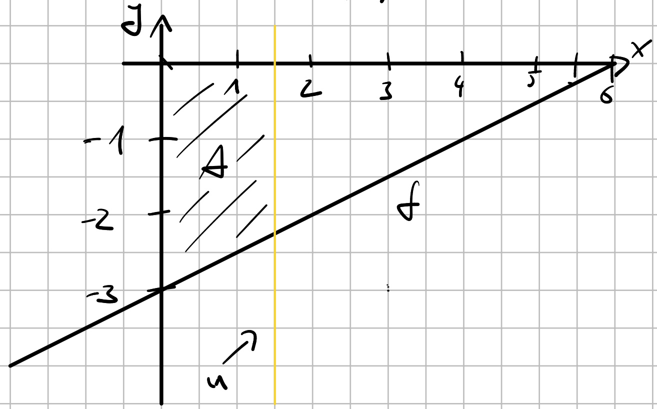
$a = -0{,}1$

$$\underline{\underline{f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}6x}}$$

Bestimmen von Grenzen bei gegebenem Flächeninhalt

geg: $f(x) = \frac{1}{2}x - 3 \; ; \; x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ die Koordinatenachsen und die Grenze $x = u$ $(0 < u < 6)$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt $A(u)$ ein.



ges: u für $A(u) = \frac{27}{4}$

$$\int_0^u f(x)\,dx = \frac{27}{4}$$

$$\int_0^u \left[\frac{0{,}5}{2}x^2 - 3x\right]_0^u = \frac{27}{4}$$

$$= \left[\frac{1}{4}u^2 - 3u\right]^u - \left[\frac{1}{4}\cdot 0^2 - 3\cdot 0\right]^0 = \frac{27}{4}$$

$$-\frac{1}{4}u^2 + 3u = -\frac{27}{4} \quad \Big| -\frac{27}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{27}{4}\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{6}{2} \pm \frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

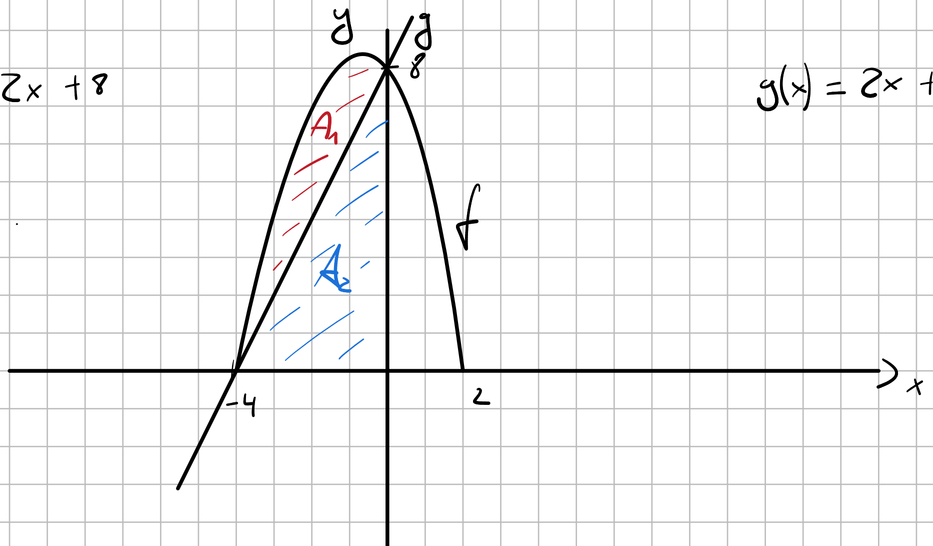
$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 9$$

$$A = |I| = \left|-\frac{27}{4}\right| = \frac{27}{4}$$

Verhältnis der Inhalte zweier Flächen

$f(x) = -x^2 - 2x + 8$

$g(x) = 2x + 8$



ges: Nachweis $A_1 : A_2 =$

ges: Nachweis $A_1 : A_2 = 19 : 8$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16\ L^{2}$

$A_1 = \int_{-4}^{0} (f(x) - A_2)\, dx$

$\int_{-4}^{0} \left(\left(-\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{2} x^2 + 8x \right) - 16 \right) dx$

$\int_{-4}^{0} \left(-\frac{1}{3} x^3 - x^2 + 8x \right) dx$

$\left[-\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 + 8 \cdot 0 \right] - \left[-\frac{1}{3} \cdot (-4)^3 - (-4)^2 + 8 \cdot (-4) \right] - \frac{80}{3}$

$A_1 = \frac{80}{3} - A_2$

$\frac{80}{3} - 16 = \frac{32}{3}$

$A_1 : A_2 = \frac{32}{3} : \frac{48}{3}$?

$16 : \frac{32}{3}$

A_1 :

$$\int_{-4}^{0} \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

$$\int_{-4}^{0} \left((-x^2 - 2x + 8) - (2x + 8)\right) dx$$

$$\int_{-4}^{0} \left(-x^2 - 4x\right) dx$$

$$\int_{-4}^{0} \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2\right) dx$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{4}{2} \cdot 0^2\right] - \left[-\frac{1}{3} \cdot (-4)^3 - \frac{4}{2} \cdot (-4)^2\right] = \frac{32}{3}$$

$$\frac{80}{3} - \frac{32}{3} = \frac{48}{3}$$

$f(x) = -0{,}5x^3 + 3x^2 - 4{,}5x + 1$

$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 4{,}5$

$f''(x) = -\frac{6}{2}x + 6$

$0 = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 4{,}5$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-4{,}5)}}{2 \cdot (-\frac{3}{2})}$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 3}{-3}$

TP$(1 \mid -1)$

HP$(3 \mid 1)$

$x_1 = \frac{-3}{-3} = 1 \quad f''(1) = 3 \rightarrow$ TP

$x_2 = \frac{-9}{-3} = 3 \quad f''(3) = -3 \rightarrow$ HP

$g(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 0{,}5$

$g'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$

$g''(x) = 12x^2 - 36x + 24$

$g'''(x) = 24x - 36$

$0 = 12x^2 - 36x + 24$

$x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 24}}{2 \cdot 12}$

$x_{1,2} = \frac{36 \pm 12}{24}$

$x_1 = 1 \quad g'''(1) \neq 0$

$x_2 = 2 \quad g'''(2) \neq 0$

WP$_1(1 \mid -\frac{1}{2})$

WP$_2(2 \mid \frac{1}{2})$

$f(x) = x^3 - x + 1$ $\quad x = 1$ $\quad y = mx + b$

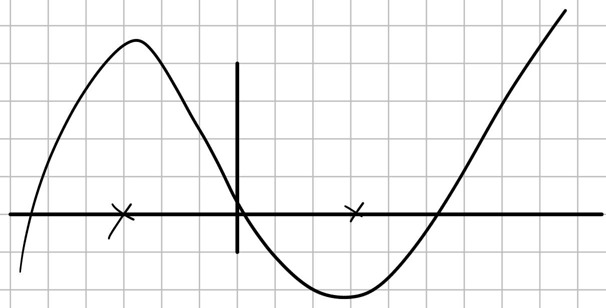
$f'(x) = 3x - 1$

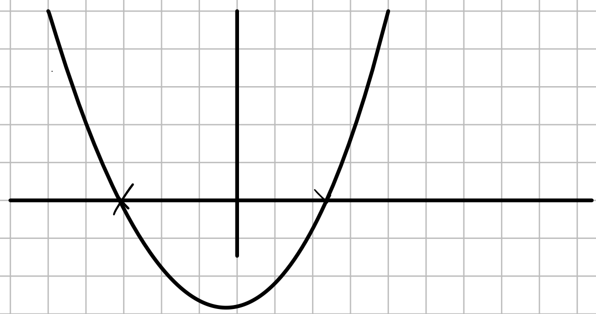
$f'(1) = 2$

$y = 2x + b$

$f(1) = 1$ $\quad \underline{\underline{y = 2x - 1}}$

$P(1|1)$





$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{4}{5}x^2$$

$$F(x) = \frac{\frac{1}{4}}{5}x^5 + \frac{\frac{3}{8}}{4}x^4 - \frac{\frac{4}{5}}{3}x^3$$

$$F(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{3}{32}x^4 - \frac{4}{15}x^3 + c$$

$$g(x) = -\frac{3}{4}e^{2x} - 2e^x$$

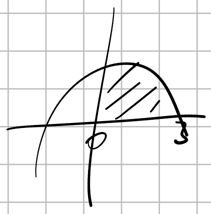
$$G(x) = -\frac{1}{8}e^{2x} - 2e^x$$

$$h(x) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$$

$$H(x) = \frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2x + c$$

$$\int_{-2}^{2}\left(-0{,}5x^4 + 2\right)dx = \left[\frac{-0{,}5}{5}x^5 + 2x\right]_{-2}^{2}$$

$$\left[-\frac{32}{10} + 4\right] - \left[\frac{32}{10} - 4\right] = -\frac{64}{10} + 8 = \underline{\frac{8}{5}}$$



$f(x) = -0{,}5x^2 + x + 1{,}5$

$$\int_0^3 \left(-0{,}5x^2 + x + 1{,}5\right) dx$$

$$\int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1{,}5x\right) dx$$

$$\frac{9}{2} - 0 = 4{,}5 \ LE^{2}$$

K_g 3. Grades Sym. zum Ursprung

$E(2|8)$

$f(x) = ax^3 + \cancel{bx^2} + cx + \cancel{d}$

$f(x) \quad ax^3 + cx$

$f'(x) = 3ax^2 + c$

$f'(2) = 0$

$f(2) = 8$

$0 = 3a \cdot 2^2 + c$

I $\quad 0 = 12a + c \quad | \cdot 2$

II $\quad 8 = 8a + 2c$

I. $\quad 0 = 24a + 2c$

II $\quad 8 = 8a + 2c \quad] -$

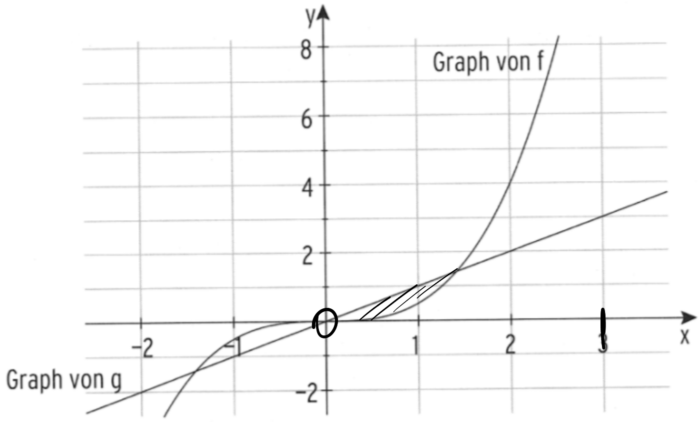
$-8 = 16a \quad | :16$

$a = -\frac{1}{2}$

$c = 6$

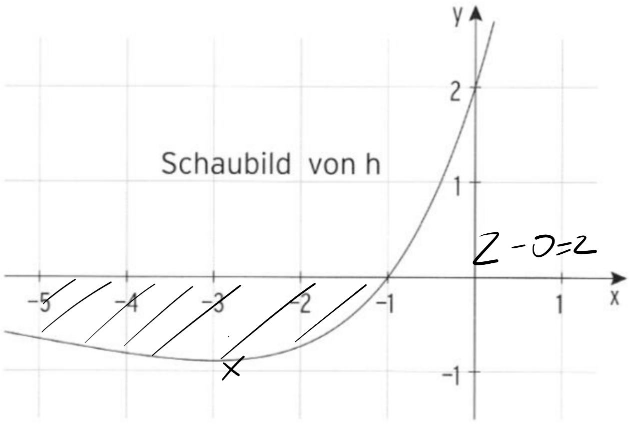
$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x}}$

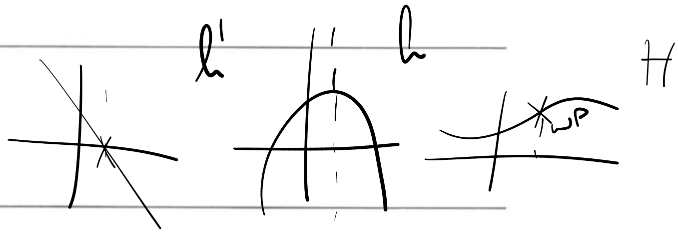
8. Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g. Entscheiden Sie, welche der Aussagen wahr oder welche falsch sind?



	(w)	(f)
f(x) − g(x) wechselt das Vorzeichen auf [0; 2]	X	
$\int_0^1 (f(x) - g(x))dx > 0$ → negativer Wert		X
$\int_{-1}^1 (f(x) - g(x))dx = 0$	X	
$\int_0^{2,5} (f(x) - g(x))dx > 0$	X	
$\int_{-1}^0 (g(x) - f(x))dx > 0$ < 0		X
$\int_0^{\sqrt{2}} (f(x) - g(x))dx = -2$		X
f − g hat drei Nullstellen auf $-2 \leq x \leq 2$	X	
Es gibt ein a > 0, so dass $\int_0^a (f(x) - g(x))dx = 0$	X	

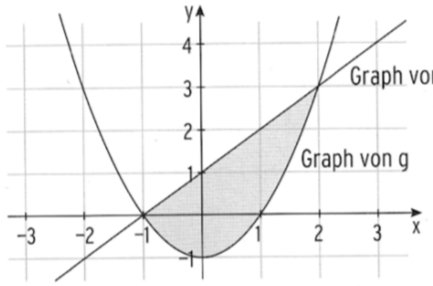
7. Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion h.
   H ist eine Stammfunktion von h.
   Begründen Sie für jede der folgenden Behauptungen, ob sie richtig oder falsch sind.



$H'(0) = 2$	☒ (r) ☐ (f)	
$h(-2) - h(0) < 0$	☒ (r) ☐ (f)	
Das Schaubild von H hat einen Tiefpunkt.	☒ (r) ☐ (f)	
$\int_{-5}^{-1} h(x)dx < -5$	☐ (r) ☒ (f)	
$\int_{-1}^{0} h'(x)dx = 2$	☒ (r) ☐ (f)	
Das Schaubild von H hat einen Wendepunkt mit negativer x-Koordinate.	☒ (r) ☐ (f)	
$3\int_{-2}^{-1} h(x)dx > 0$	☐ (r) ☒ (f)	

6. Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

$f(x)= x + 1; \quad g(x)= x^2 - 1$

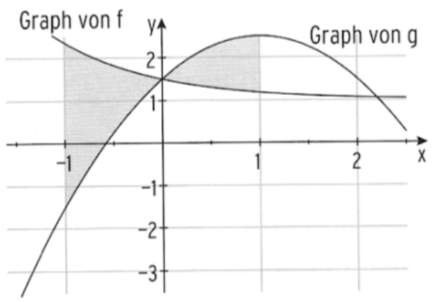


$$\int_{-1}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_{-1}^{2}\left((x+1)-(x^2-1)\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$\left[-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2\right]-\left[-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)\right]=\frac{9}{2}\,LE^2$$

$f(x)= 0{,}5e^{-x} + 1; \quad g(x) = - x^2 + 2x + 1{,}5$



$$A = \int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx + \int_{0}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

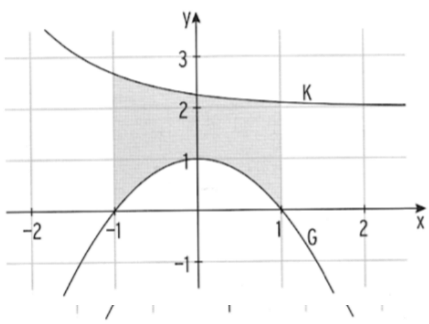
$$A = \int_{-1}^{0}\left((0{,}5e^{-x}+1)-(-x^2+2x+1{,}5)\right)dx + \int_{0}^{1}\left((-x^2+2x+1{,}5)-(0{,}5e^{-x}+1)\right)dx$$

$$A = \int_{-1}^{0}\left(0{,}5e^{-x}-0{,}5+x^2-2x\right)dx + \int_{0}^{1}\left(-x^2+2x+0{,}5-0{,}5e^{-x}\right)dx$$

$$A = \int_{-1}^{0}\left(\frac{-1}{0{,}5}e^{-x}-0{,}5x+\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{2}x^2\right)dx + \int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{2}x^2+0{,}5x-\frac{1}{0{,}5}e^{-x}\right)dx$$

$$A = 2{,}54\ LE^2$$

K: $f(x)= 0{,}25e^{-x} + 2$; G: $g(x)= - x^2 + 1$

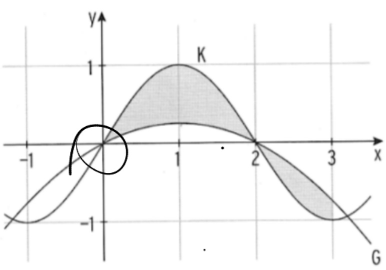


$$A = \int_{-1}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$A = \left[-0{,}25e^{-x}+\frac{1}{3}x^2+x\right]$$

$$= \left[1{,}24\right] + \ldots = 3{,}26\ FE$$

K: $f(x)= \sin(\frac{\pi}{2}x)$; G: $g(x)= -\frac{1}{4}x(x - 2)$



$$A = \overbrace{\int_{0}^{2}\left(f(x)-g(x)\right)dx}^{A_1} + \overbrace{\int_{2}^{3}\left(g(x)-f(x)\right)dx}^{A_2}$$

$$A_1 = \int_{0}^{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\left(-\frac{1}{4}x^2+0{,}5x\right)\right)dx$$

$$A_1 = \int_{0}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2-0{,}5x+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)dx$$

$$A_2 = \int\left(\left(-\frac{1}{4}x^2+0{,}5x\right)-\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)\right)dx$$

$$A_2 = \left(-\frac{\frac{1}{4}}{3}x^3+\frac{0{,}5}{2}x^2+\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)dx$$

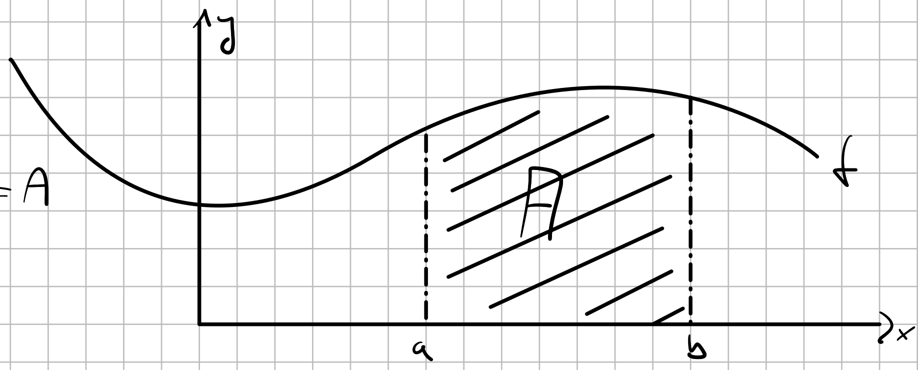
$$\left[\frac{\frac{1}{4}}{3}x^3-\frac{0{,}5}{2}x^2-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{\frac{1}{4}}{3}x^3+\frac{0{,}5}{2}x^2+\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{2}^{3} = \underline{1{,}24}\ LE^2$$

(1)

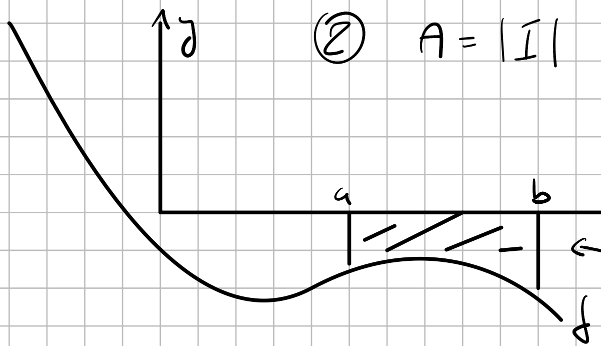
$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$$

$$= \left[F(b)\right] - \left[F(a)\right]$$

$I = A$

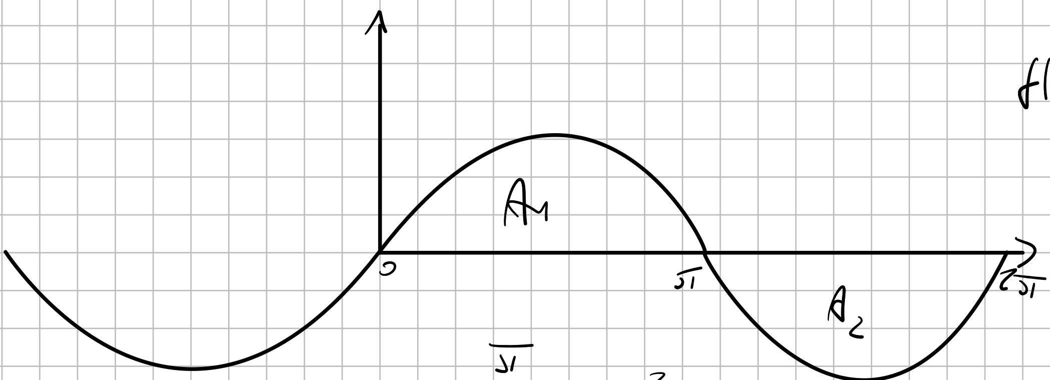


(2) $A = |I|$

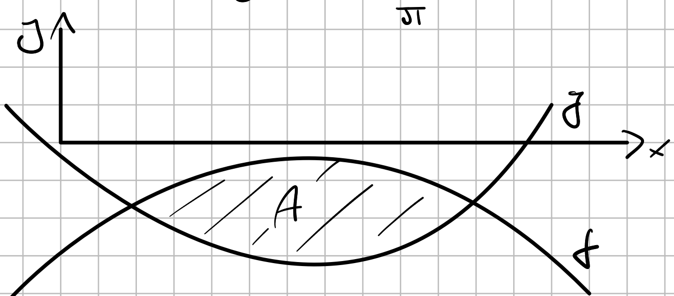


← negatives Flächeninhalt
↳ positiv machen

$f(x) = \sin x$



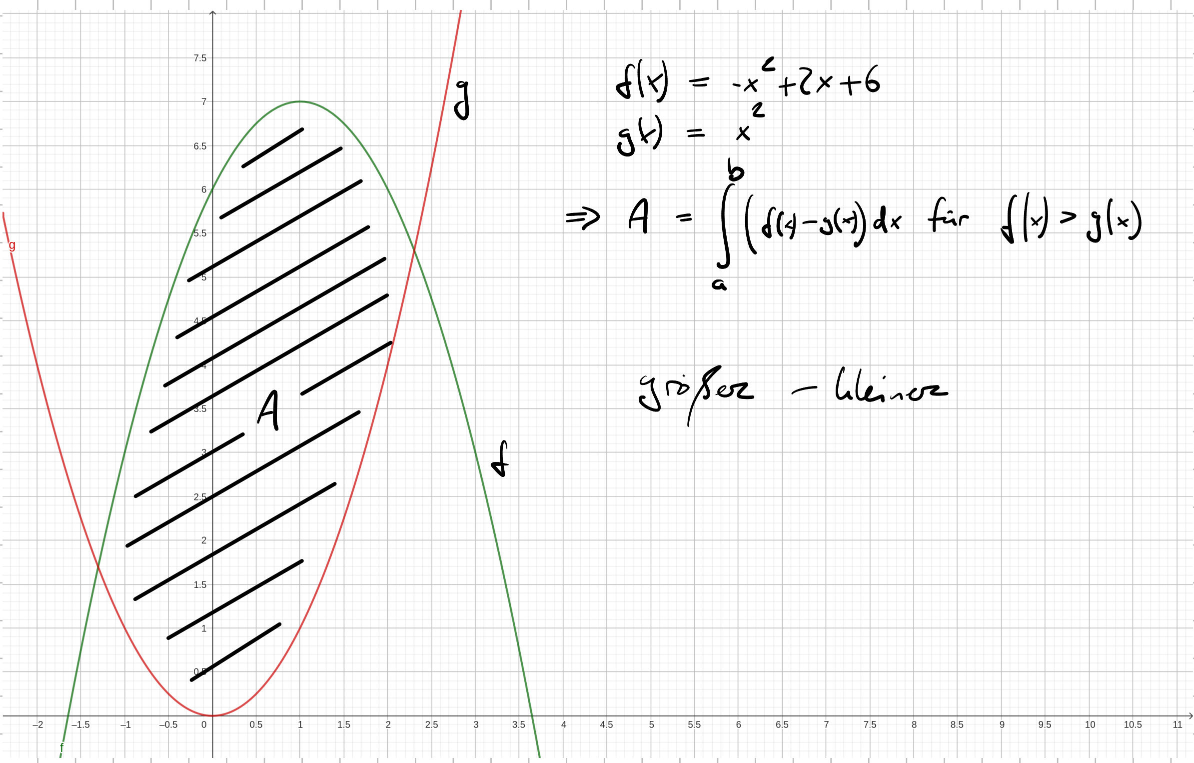
$$A = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$$



$f_1 = f + 10$

$g_1 = g + 10$

Flächen zwischen Kurven



$f(x) = -x^2+2x+6$

$g(x) = x^2$

$\Rightarrow A = \int_a^b \left(f(x)-g(x)\right) dx$ für $f(x) > g(x)$

größer − kleiner

① a) $f(x) = \frac{1}{4}x^7 - 3x^2 + \frac{17}{4}x^3$

$f'(x) = \frac{7}{4}x^6 - 6x + \frac{51}{4}x^2$

$f''(x) = \frac{21}{2}x^5 - 6 + \frac{51}{2}x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}$

$f'(x) = -\frac{3}{2}e^{-3x}$

$f''(x) = \frac{9}{2}e^{-3x}$

c) $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$f'(x) = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$f''(x) = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Bestimmung von Extrempunkten

$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 10x + \frac{17}{3}$

$f'(x) = \frac{3}{12}x^2 - \frac{14}{4}x + 10$

$f''(x) = \frac{6}{12}x - \frac{14}{4}$

$0 = \frac{3}{12}x^2 - \frac{14}{4}x + 10$

$x_{1,2} = \frac{\frac{14}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{14}{4}\right)^2 - 4\cdot 10\cdot\frac{3}{12}}}{2\cdot\frac{3}{12}}$

$x_{1,2} = \frac{\frac{14}{4} \pm 1{,}5}{0{,}5}$

$x_1 = 10 \qquad x_2 = 4$

$x_1 = \frac{6}{12}\cdot 10 - \frac{14}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow$ TP

$x_2 = \frac{6}{12}\cdot 4 - \frac{14}{4} = -\frac{3}{2} \rightarrow$ HP

$y_1 = \frac{1}{12}\cdot 10^3 - \frac{7}{4}\cdot 10^2 + 10\cdot 10 + \frac{17}{3} = 14$

$y_2 = \frac{1}{12}\cdot 4^3 - \frac{7}{4}\cdot 4^2 + 10\cdot 4 + \frac{17}{3} = 23$

TP$(10|14)$

HP$(4|23)$

Bestimmung von Wendepunkten:

$f(x) = \frac{3}{48}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

$f'(x) = \frac{12}{48}x^3 - \frac{6}{2}x$

$f''(x) = \frac{36}{48}x^2 - \frac{6}{2}$

$f'''(x) = \frac{72}{48}x \neq 0$

$0 = \frac{36}{48}x^2 - \frac{6}{2} \quad | + \frac{6}{2}$

$\frac{6}{2} = \frac{36}{48}x^2 \quad | : \frac{36}{48}$

$4 = x^2 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

$f(2) = -5 \qquad WP_1(2|-5)$

$f(-2) = 5 \qquad WP_2(-2|5)$

Bestimmen von Tangentengleichung

ges. Tangentengl. an der Stelle $x=3$

$t = mx + b$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \qquad f'(x) = -\frac{2}{2}x + 1$

$m = f'(3) = -1 \cdot 3 + 1 = -2$

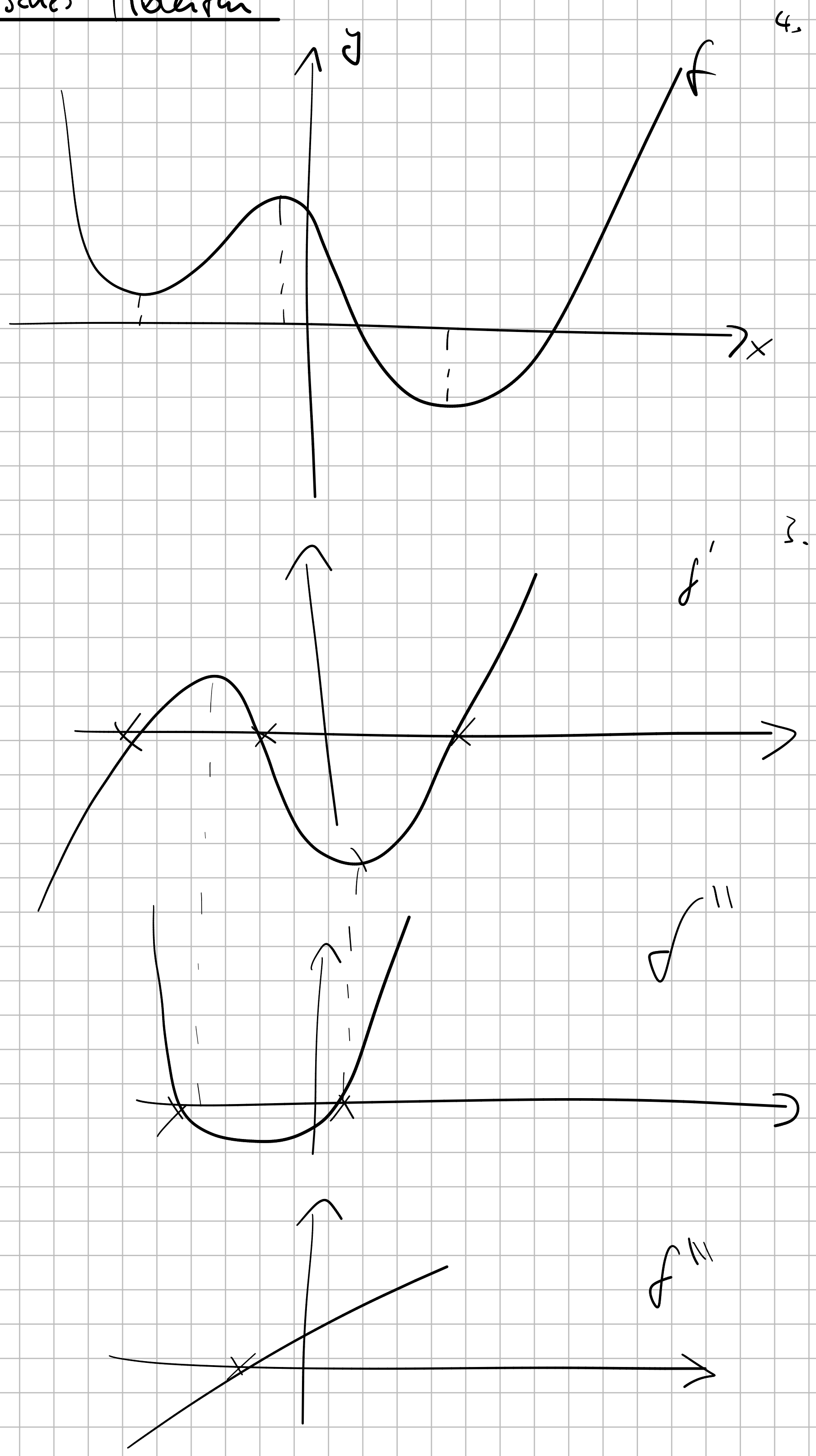
$t(x) = -2x + b \qquad f(3) = 0 \qquad P(3|0)$

$0 = -2 \cdot 3 + b \quad | + 6$

$b = 6$

$\underline{\underline{t(x) = -2x + 6}}$

Grafisches Ableiten



Integralrechnung

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^7 + \frac{3}{2}x^4 - 17$$

$$F(x) = \frac{-\frac{1}{4}}{8}x^8 + \frac{\frac{3}{2}}{5}x^5 - 17x$$

$$f(x) = \frac{7}{8}e^{2x}$$

$$F(x) = \frac{\frac{7}{8}}{2}e^{2x}$$

$$f(x) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3$$

$$F(x) = \frac{4}{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad 3x$$

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{2}x^2 + 7 \, dx = \left[\frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 + 7x + c\right]_{-1}^{3}$$

$$\left[\frac{1}{6}3^3 + 7\cdot 3 + c\right] - \left[\frac{1}{6}\cdot(-1)^3 + 7\cdot(-1) + c\right]_{-1}^{3} = \underline{\underline{\frac{98}{3}}}$$

Aufstellen von Funktionsgleichungen

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

4. Grad symm zur y-Achse

unger. $\cancel{bx^3}$ $\cancel{dx}$

---

3. Grad punkt symm z. Ursprung

ger. $\cancel{bx^2}$ $\cancel{d}$

1. Berechnen Sie das bestimmte Integral.

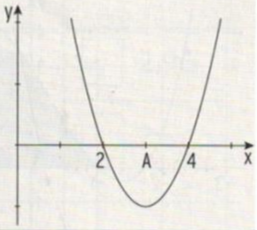
$\int_1^0 (e^{0,5x} + 1)dx$	$\int_1^0 (e^{0,5x} + 1)dx = \left[2e^{0,5x} + x\right]_1^0$ $= 2 - (2e^{0,5} + 1) = 1 - 2e^{0,5}$
$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (4\cos(2x))dx$	$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(4\cos(2x)dx\right) = \left[\frac{1}{2} \cdot 4\sin(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0$
$\int_{-1}^0 (e^{-0,25x} - 2)dx$	$\int_{-1}^{0} (e^{-0,25x} - 2)dx = \left[\frac{1}{-0,25} \cdot e^{-0,25x} - 2x\right]_{-1}^{0} = -4 - (10,27) = 6,27$
$\int_{-1}^3 (x^2 - 3x)dx$	$\int_{-1}^{3} (x^2 - 3x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right] = -\frac{8}{3}$
$\int_{-1}^1 (x^3 - 2x)dx$	$\int_{-1}^{1} (x^3 - 2x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2\right]_{-1}^{1} =$
$\int_{-2}^2 (x^4 + 3x^2 + 1)dx$	$\int_{-2}^{2} (x^4 + 3x^2 + 1)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + x^3 + x\right]_{-2}^{2}$

2. Wo liegt der Fehler?

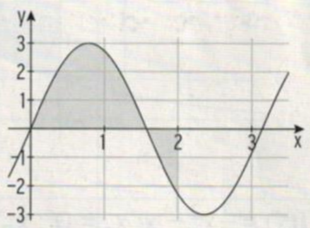
$\int_1^0 (e^{0,1x} - 1)dx = \left[0,1e^{0,1x} - x\right]_1^0$ $= (0,1e^{0,1} - 1) - 0,1$ $= 0,1e^{0,1} - 1,1$	Stammfunktion falsch Richtig: $F(x) = 10e^{0,1x} - x$ Einsetzen in falscher Reihenfolge Richtig: $F(0) - F(1)$
$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (3\sin(2x) + 1)dx = \left[\frac{3}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$ $= \frac{3}{2}\cos(\pi) - \frac{3}{2}\cos(2)$ $= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos(2)$	
$\int_{-1}^1 (5x^4 - 4x^3 - 2)dx = \left[x^5 + x^4 - 2x\right]_{-1}^1$ $= -1 + 1 + 2 - 0$ $= 2$	

Klasse	**2BKI1**	**Thema Integralrechnung**	MES Max-Eyth-Schule
Fach	**Mathematik**	**Bestimmtes Integral 2**	

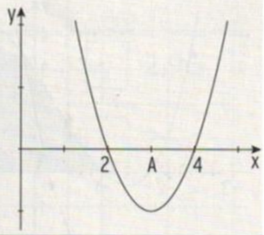
1. Das Schaubild von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt.

$f(x) = (x-2)(x-4)$	Nullstellen von f: $f(x) = 0 \quad x_1 = 2;\ x_2 = 4$ Flächeninhaltsberechnung: $\int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 (x^2 - 6x + 8)dx$ $= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x\right]_2^4 = -\frac{4}{3}$ Die Fläche hat einen Inhalt von $\frac{4}{3}$. 
$f(x) = -x^2(x-4)$	
$f(x) = x^4 - 2x^2$	

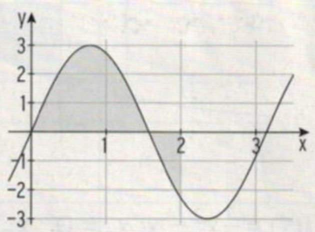
2. Das Schaubild von f begrenzt mit der x-Achse auf [a; b] eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt.

$f(x) = 3\sin(2x)$; $x \in [0; 2]$	f hat die Nullstellen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Flächeninhaltsberechnung: $\int_0^{0,5\pi} f(x)dx = \left[-\frac{3}{2}\cos(2x)\right]_0^{0,5\pi} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ $\int_{0,5\pi}^{2} f(x)dx = F(2) - F(0,5\pi) = 0,98 - \frac{3}{2}$ $= -0,52 \qquad A = 3,52$ 
$f(x) = \cos(0,5x)$; $x \in [0; 4]$	
$f(x) = e^{-0,5x} - 4$; $x \in [0; 2]$	

1. Das Schaubild von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt.

$f(x) = (x-2)(x-4)$	Nullstellen von f: $f(x) = 0 \quad x_1 = 2;\ x_2 = 4$ Flächeninhaltsberechnung: $\int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 (x^2 - 6x + 8)dx$ $= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x\right]_2^4 = -\frac{4}{3}$ Die Fläche hat einen Inhalt von $\frac{4}{3}$. 
$f(x) = -x^2(x-4)$	
$f(x) = x^4 - 2x^2$	

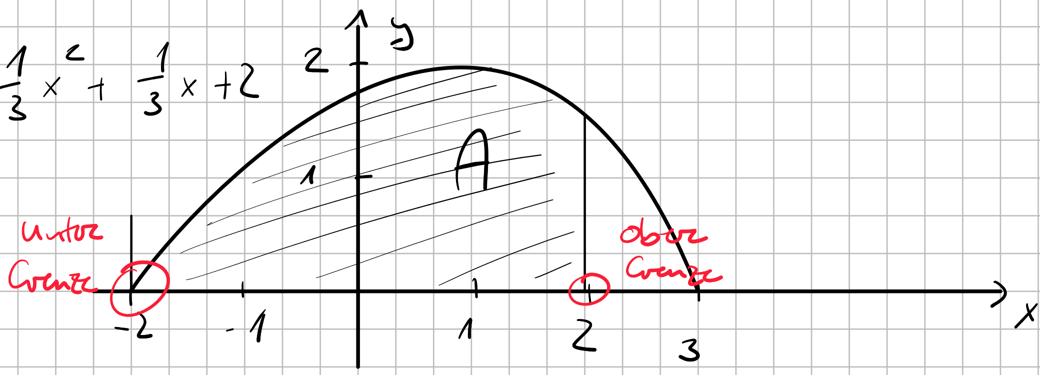
2. Das Schaubild von f begrenzt mit der x-Achse auf [a; b] eine Fläche. Berechnen Sie den Inhalt.

$f(x) = 3\sin(2x)$; $x \in [0; 2]$	f hat die Nullstellen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Flächeninhaltsberechnung: $\int_0^{0,5\pi} f(x)dx = \left[-\frac{3}{2}\cos(2x)\right]_0^{0,5\pi} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ $\int_{0,5\pi}^{2} f(x)dx = F(2) - F(0,5\pi) = 0,98 - \frac{3}{2}$ $= -0,52 \qquad A = 3,52$ 
$f(x) = \cos(0,5x)$; $x \in [0; 4]$	
$f(x) = e^{-0,5x} - 4$; $x \in [0; 2]$	

Flächenberechnung mit der Integralrechnung

1.) Flächen zwischen der Kurve und der x-Achse:

Bsp: $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$

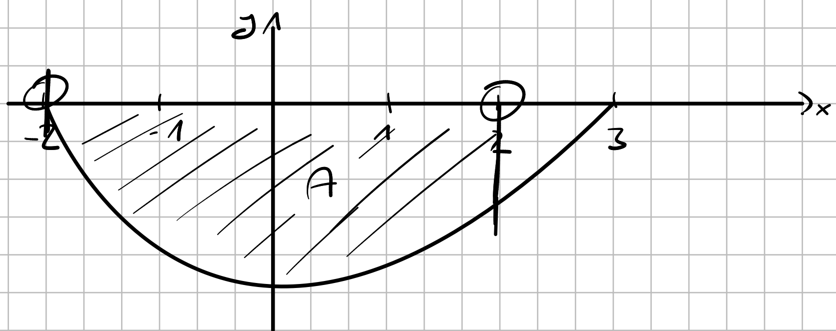


$$\Rightarrow I = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[-\frac{1}{9}2^3 + \frac{1}{6}2^2 + 2\cdot 2\right] - \left[-\frac{1}{9}\cdot(-2)^3 + \frac{1}{6}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2)\right] = 6,\overline{2} \quad \Rightarrow \underline{A = \frac{56}{9}}$$

Der Integralwert entspricht der Fläche!

Bsp 2: $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$



$$I = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - 2x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{1}{9}\cdot 2^3 - \frac{1}{6}\cdot 2^2 - 2\cdot 2\right] - \left[\frac{1}{9}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{6}\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2)\right] = -\frac{56}{9}$$

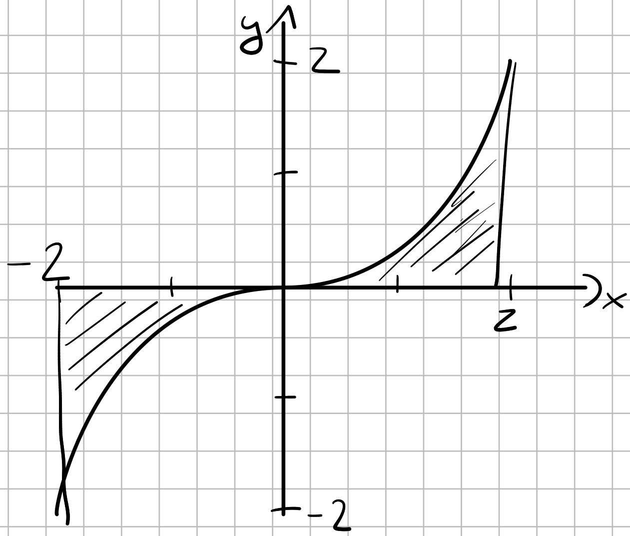
$$\Rightarrow A = \left|-\frac{56}{9}\right| = \underline{\underline{\frac{56}{9}}}$$

Der Integralwert entspricht nicht der Fläche!

Bsp. 3 : $h(x) = 0{,}5\,x^3$

$$\int_{-2}^{2} h(x)\,dx = \left[\frac{1}{8}x^4\right]_{-2}^{2}$$

$$\left[\frac{1}{8}\cdot 16\right] - \left[\frac{1}{8}\cdot 16\right] = 0$$

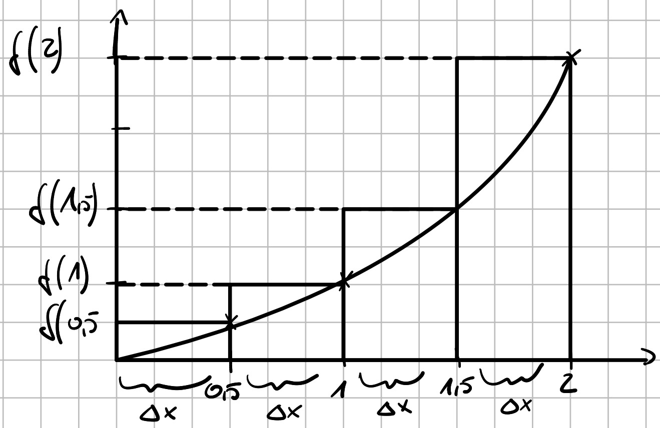


Der Integralwert entspricht nicht der Fläche!

Das bestimmte Integral

$f(x) = x^2 \Rightarrow \frac{1}{3}x^3$

$F(2) = \frac{8}{3}$?



$$A = \Delta x \cdot f(0{,}5) + \Delta x \cdot f(1) + \Delta x \cdot f(1{,}5) + \Delta x \cdot f(2)$$

$$= \Delta x\left(f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2)\right)$$

$$A = 0{,}5\,(0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4) = 3{,}75$$ (Wert mit Obersumme)

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{2}{n} \Rightarrow A = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n}\left(2\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2 + \frac{2}{n}\left(3\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2 + \dots + \frac{2}{n}\left(n\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2$$

$$A = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2\right)$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{(n^2+1n)\,(2n+1)}{6}$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{2^3}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \frac{16n^{\cancel{3}2} + 24n^{\cancel{2}} + 8\cancel{n}}{6n^{\cancel{3}2}}$$

$$= \frac{16n^2}{6n^2} + \frac{24\cancel{n} + \frac{8}{n}}{6n^{\cancel{2}}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{8}{3} + \frac{24 + \frac{8}{n}}{6n} \Rightarrow 0$$

$$\lim n \to \infty \quad A = \frac{8}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x) \cdot \Delta x = \int_0^2 f(x)\,dx = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^2$$

ehlatante Veränderung!

Regel: obere Grenze − untere Grenze

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3} \cdot 2^3\right] - \left[\frac{1}{3} 0^3\right] = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

313

① a)

$$\int_0^2 (2x+1)\,dx = \left[x^2 + x + c\right]_0^2$$

$$\left[2^2+2+c\right] - \left[0^2+0+c\right]$$

$$6+c-0-c = \underline{\underline{6}}$$

c braucht man nicht

b)

$$\int_{-1}^{3} 0{,}5x^3\,dx = \left[\frac{0{,}5}{4} x^4\right]_{-1}^{3}$$

$$\left[\frac{0{,}5}{4} \cdot 3^4\right] - \left[\frac{0{,}5}{4} \cdot (-1)^4\right]$$

$$\frac{81}{8} - \frac{1}{8} = \underline{\underline{10}}$$

297

1

a) $f(x) = 6 \quad F = 6x$

b) $f(x) = 7x+8 \quad F = \frac{7}{2}x^2 + 8x + c$

c) $f(x) = 4 - 3x + \frac{5}{2}x^2 \quad F = \frac{-3}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{6} \cdot x^3 + 4x + c$

d) $f(x) = -2x^3 + 5x \quad F = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + c$

2

a) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{2}{5}x^2 \quad F(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{2}{15}x^3 + c$

b) $f(x) = \frac{1}{32}x^4 + \frac{4}{5}x^3 - 3 \quad F(x) = \frac{1}{160}x^5 + \frac{1}{5}x^4 - 3x + c$

c) $f(x) = -7x^3 + \frac{3}{8}x^2 \quad F(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + c$

d) $f(x) = (x-2) \cdot (x+3) \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + c$

e) $f(x) = x^2(4x-3) \quad F(x) = x^4 - x^3 + c$

f) $f(x) = 1 - 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 \quad F(x) = 1x - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + c$

g) $f(x) = -\frac{2}{3}(x^4 + 6x^2 - 3) \quad F(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{6}{3}x^3 - 3x\right) + c$

h) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx \quad F(x) = \frac{a}{5}x^5 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{c}{2}x^2 + d$

i) $f(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 3x^2) \quad F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5 - 1x^3\right) + c$

3

a) $f(x) = 1 - \frac{5}{2}\sin(x) \quad F(x) = x - \frac{5}{2}\cos(x) + c$

b) $f(x) = -2\cos(x) - x^2 \quad F(x) = -2\sin(x) - \frac{1}{3}x^3 + c$

c) $f(x) = 2 - 3\sin(x) \quad F(x) = 2x + 3\cos(x) + c$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}e^x \quad F(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}e^x + c$

e) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2} \quad F(x) = \frac{e^x - x}{2} + c$

f) $-\frac{1}{18}x^3 - \cos(x) \quad F(x) = -\frac{1}{72}x^4 - \sin(x) + c$

g) $f(x)\ 4 \cdot (\sin(x) - x) \quad F(x) = 4 \cdot \left(\cos(x) - \frac{1}{2}x^2\right)$

h) $f(x) = -4e^x - \frac{1}{2}x + 4 \quad F(x) = -4e^x - \frac{1}{4}x^2 + 4x + c$

i) $f(x) = -\left(\frac{2}{3}e^x - 3\right) \quad F(x) = -\left(\frac{2}{3}e^x - 3x\right) + c$

j) $f(x) = e \cdot e^x + e \cdot x \quad F(x) = ex \cdot e^x + \frac{1}{2}ex^2$

k) $f(x) = e^x(1-e) \quad F(x) = e^x(1x - ex)$

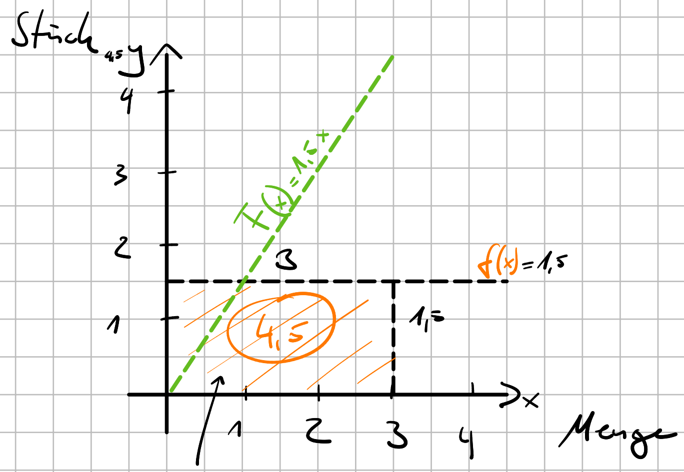
l) $f(x) = ae^x + b \quad F(x) = ae^x + bx + c$

Einführung in die Integralrechnung

Bsp: Die Funktion $f(x) = 1{,}5$ (Euro/Stück) beschreibt die Stückkosten für eine beliebige Produktionsmenge x.

$\Rightarrow$ für 3 Stück betragen die variablen Kosten $1{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$

für x Stück $\Rightarrow 1{,}5 \cdot x$



Der Flächeninhalt zwischen f und x-Achse $[0;3]$ entspricht den variablen Kosten für 3 Stück.

Die Funktion $F(x) = 1{,}5x$ heißt Stammfunktion von f.

$\Rightarrow$ es gilt: $F'(x) = f(x)$

Stammfunktion

gg: $f(x) = x^2$

ges: Funktion $F(x)$

Aufleiten

Lsg: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ fällt weg

$\vdots$

$\Rightarrow$ Für beliebig viele Funktionen F, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden gilt $F'(x) = x^2$

Stammfunktion bilden (Aufleiten)

$$F'(x) = f(x) \qquad F(x) = \int f(x) \cdot dx$$

Differenzieren (Ableiten)

Das unbestimmte Integral

Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt unbestimmtes Integral.

Regeln:

1. $\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$

Bsp: $\int 3x^3 \, dx = \frac{3}{4} x^4 + c = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 + c$

2. $\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$

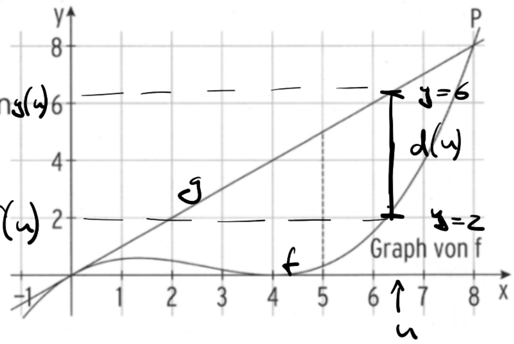
Bsp: $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

3. $\int \sin(kx) \, dx = -\frac{1}{k} \cos(kx) + c$

4. $\int \cos(kx) \, dx = \frac{1}{k} \sin(kx) + c$

Ein Geländeverlauf wird beschrieben durch die Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$; $0 \leq x \leq 8$ (siehe Abbildung).

Ein Seil soll vom Ursprung zum Punkt P(8 | 8) gespannt werden.
Bestimmen Sie den größtmöglichen senkrechten Abstand des Seils zum Gelände.



Lösung

Wir wählen

Zielfunktion mit Definitionsbereich: $g(u) - f(u) = d(u)$ $\quad \mathbb{D} = [0;8]$

$d(u) = u - \left(\frac{1}{16}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u\right) = -\frac{1}{16}u^3 + \frac{1}{2}u^2$

Untersuchung der Zielfunktion auf ein Maximum

Ableitungen: $d'(u) = -\frac{3}{16}u^2 + u$

Notwendige Bedingung: $d'(u) = 0 \rightarrow -\frac{3}{16}u^2 + u = 0$

$u\left(-\frac{3}{16}u + 1\right) = 0 \Rightarrow u_1 = 0,\ u_2 = \frac{16}{3}$

Nachweis: $d''(u) = -\frac{3}{8}u + 1$; $d''\left(\frac{16}{3}\right) < 0 \Rightarrow HP$

$d(u)$ hat ein relatives Maximum für $u = \frac{16}{3}$.

Relatives Maximum: $d \approx 4{,}74$

Randwerte

Für die Randstellen $d(0) = 0$, $d(8) = 0$ gilt:

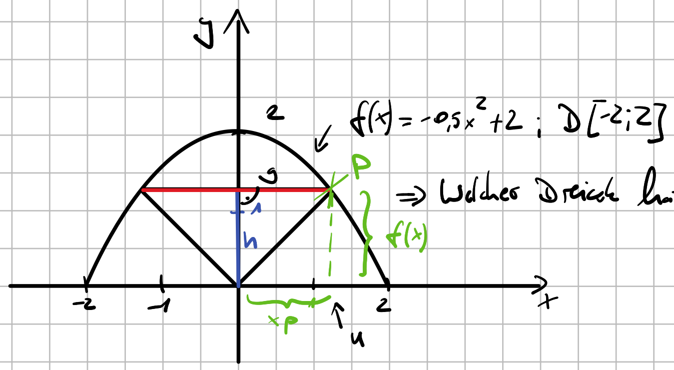
Ergebnis: Der größtmögliche Abstand liegt bei $u = \frac{16}{3}$

Vorgehensweise

1. Zielgröße bestimmen.
2. Nebenbedingung feststellen.
3. Zielfunktion bestimmen
4. Extremwerte bestimmen
5. Randwerte bestimmen
6. Zielgröße berechnen

Modellierung von Optimierungsproblemen

Bsp: Aus einem Werkstück ein Dreieck gefräst werden



⇒ Welches Dreieck hat den größten Flächeninhalt?

Lsg: $A_\triangle = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

$\Rightarrow g = 2 \cdot u$

$h = f(u)$

$A_\triangle(u) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}u \cdot f(u)$

$= u \cdot (-0{,}5u^2+2)$

$= -0{,}5u^3+2u$

⇒ ges: HP

$A_\triangle'(u) = -1{,}5u^2+2$

$A_\triangle''(u) = -3u$

$0 = -1{,}5u^2+2 \quad | +1{,}5u^2$

$1{,}5u^2 = 2 \quad | :1{,}5$

$u^2 = \frac{4}{3} \quad | \sqrt{\ }$

$u_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \qquad D(u) = [0;2] \Rightarrow +\sqrt{\frac{4}{3}}$

$-\sqrt{\frac{4}{3}}$ kein Element in D

$A_\triangle''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0 \Rightarrow HP$

$A_\triangle(0) = 0$

$A_\triangle(2) = 0$

$A_\triangle\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 1{,}54$

$u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ hat die größte Fläche!

278

6

$f(2)=8$

$f'(2)=0$

$f(x)=ax^3+cx$

$8=a\cdot 8^3+c\cdot 8$

$f'(x)=3ax^2+c$

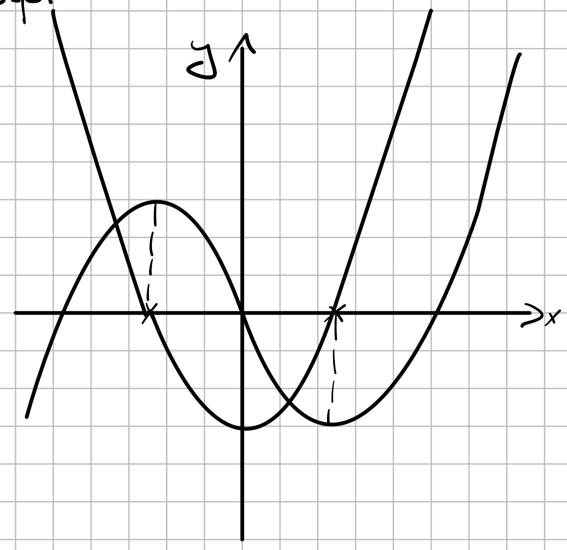
$0=3a\cdot 2^2+c$

$+$

Monotonie

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ monoton steigend
$f'(x) < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

Bsp:



Bestimmung von Wendepunkten

1. Funktion 3x Ableiten
2. 2. Ableitung = 0 setzen

   $f''(x) = 0$
3. Ergebnis in 3. Ableitung einsetzen und prüfen ob $f'''(x) \neq 0$ ist.
4. Ergebnis aus 2 in f einsetzen und y-Koordinate berechnen.

   $WP(x_{wp} / y_{wp})$

3

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$f''(x) = -6x + 6$

$f'''(x) = -6 \neq 0$

$f''(x) = 0 \Rightarrow -6x + 6 = 0 \quad \underline{\underline{x = 1}}$

$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1$

$f'(1) = 3$

$y = mx + b$

$y = 3x + b$

PP mit WP(1 | 1)

$1 = 3 \cdot 1 + b \quad | -3$

$b = -2$

$\underline{\underline{y = 3x - 2}}$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow$ EP bestimmen (HP/TP)

① 2 × Ableiten

② 1. Ableitung $= 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

$\downarrow$

a) keine Lösung: keine EP

b) es gibt eine Lsg.

③ Lsg. in 2. Ableitung einsetzen und prüfen ob

Erg. < 0 = Tiefpunkt

Erg > 0 = Hochpunkt.

S. 279

①

b) $f(x) = x - 3 + e^{-2x}$

① $f'(x) = 1 - 2e^{-2x}$

② $f''(x) = 4e^{-2x}$

$$0 = 1 - 2e^{-2x} \quad | -1$$

$$-1 = -2e^{-2x} \quad |: -2$$

$$\frac{1}{2} = e^{-2x} \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -2x \quad |: (-2)$$

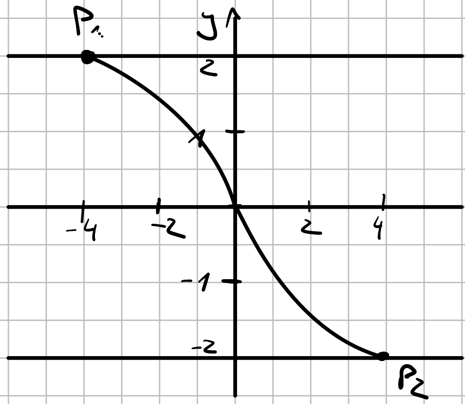
$$\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-2} = x$$

③ $y = 4e^{-2\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-2}\right)}$ $\quad f''\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-2}\right) > 0$

$y = 2 \rightarrow$ TP

TP $\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-2} \middle| f\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-2}\right)\right)$

S. 278 (22)



$f(x) = \frac{1}{64}x^3 - \frac{3}{4}x$

$P_1(-4|2)$ / $P_2(4|-2)$ / $N=(0|0)$

$f(x) = ax^3 + \cancel{bx^2} + cx + \cancel{d}$ $d=0$

fällt weg: Punktsymmetrisch zum Ursprung

$f(-4) = 2$

$f(4) = -2$

$f(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) = ax^3 + cx$

$2 = a\cdot(-4)^3 + c\cdot(-4)$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= -64a - 4c \\ -2 &= 64a + 4c \end{aligned}\right] +$$

I + II

$0 = 0$

$\Rightarrow$ kein Ergebnis

↳ weitere Bedingung nötig:

$f'(4) = 0$ $f'(x) = 3ax^2 + c$

$f'(-4) = 0$

$0 = 3a\cdot 4^2 + c$

$$\left.\begin{aligned} \text{I}\quad & 48a + c = 0 \\ \text{II}\quad & -64a - 4c = 2 \quad |:-(4) \\ & 16a + c = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right] - \quad 32a = -\tfrac{1}{2} \;|:(-32)$$

$a = \frac{1}{64}$

$48\cdot\frac{1}{64} + c = 0 \;|-\frac{3}{4}$

$c = \frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{1}{64}x^3 - \frac{3}{4}$

2. Das Schaubild der Funktion p mit $p(x) = ax^4 + cx^2 - \frac{7}{4}$ hat den Tiefpunkt T(2 | − 3).

Berechnen Sie die Werte von a und c und geben Sie den Funktionsterm an.

Ableitung: $p'(x) = 4ax^3 + 2cx$

Bedingungen: $p'(2) = 0$

$p(2) = -3$

Lineares Gleichungssystem:

$16a + 4c - \frac{7}{4} = -3$

$32a + 4c = 0$

Lösung des linearen Gleichungssystems:

$\text{I} \quad 16a + 4c = -\frac{5}{4}$

$\text{II} \quad 32a + 4c = 0$ $\quad \ominus \; \text{II} - \text{I}$

$\Rightarrow 16a = \frac{5}{4} \quad |:16$

$a = \frac{5}{64}$

$32 \cdot \frac{5}{64} + 4c = 0$

$\frac{5}{2} + 4c = 0 \quad | -\frac{5}{2}$

$4c = -\frac{5}{2} \quad |:4$

$c = -\frac{5}{8}$

Funktionsterm:

$p(x) = \frac{5}{64}x^4 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{7}{4}$

3. Kreuzen Sie die zutreffende Bedingung an.

P(2 | − 3) liegt auf dem Graph K von f.	☐ $f'(2) = -3$	☒ $f(2) = -3$
K hat einen Wendepunkt W(− 4 | 1).	☐ $f'(-4) = 1$	☒ $f''(-4) = 0$
K hat einen Hochpunkt in x = 5.	☒ $f'(5) = 0$	☐ $f''(5) = 1$
K hat an der Stelle x = 1 die Steigung 1.	☐ $f'(1) = 0$	☒ $f'(1) = 1$
K ist an der Stelle x = 1 linksgekrümmt.	☐ $f''(1) = 0$	☒ $f''(1) > 0$
In x = − 2 wechselt f das Monotonieverhalten.	☐ $f(-2) = 5$	☒ $f'(-2) = 0$
In x = 1 ist K steigend.	☒ $f'(1) > 0$	☐ $f'(1) = -2$

4. Formulieren Sie zum folgenden Aufschrieb eine geeignete Aufgabenstellung.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = ax^3 + cx; \quad f'(x) = 3ax^2 + c$

$f(2) = -3 \qquad 8a + 2c = -3$

$f'(2) = 0 \qquad 12a + c = 0$

Aufgabenstellung:

Setzen sie ein und lösen sie die Funktion.

5. Das Schaubild einer Funktion f mit $f(x) = ae^{bx} + c$; $x \in \mathbb{R}$, hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung y = 3. Der Graph von f schneidet die y-Achse in S(0 | 1) mit Steigung 2.

Ableitung: $f'(x) = abe^{bx}$

Bedingungen:

$f'(0) = 2$

$f(0) = 1$

Gleichungssystem:

I. $2 = abe^{b\cdot 0}$

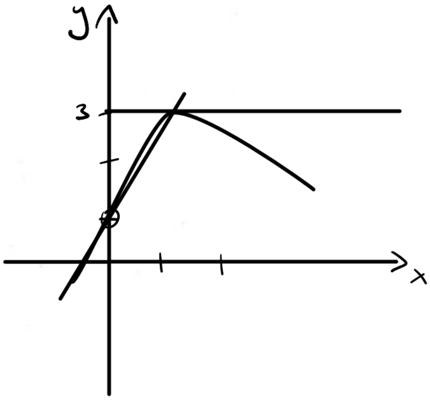
$a\cdot b = 2$

$b = -1$

II. $1 = ae^{b\cdot 0} + 3$

$a + 3 = 1$

$a = -2$



Lösung des Gleichungssystems:

$f(x) = -2e^{-x} + 3$

Funktionsterm:

6. Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) f(2) = 1

(2) f′(2) = 0 und f″(2) > 0

(3) f″(4) = 0 und f‴(4) ≠ 0

Beschreiben Sie für jede dieser drei Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat. Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

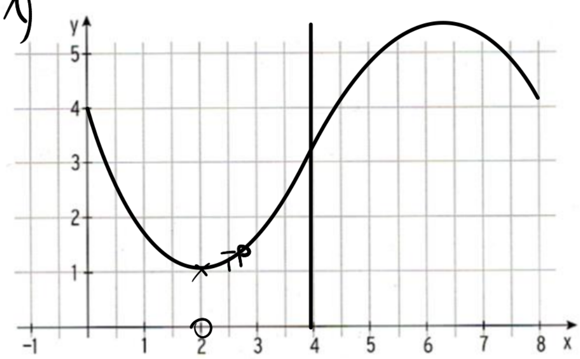
Lösung:

Skizze:

(1) Verläuft durch den Punkt P(2 | 1)

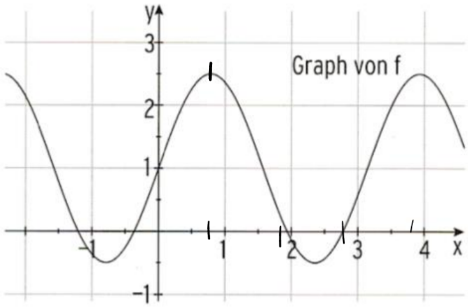
(2) TP x=2 f(2) | Steigung x=2=0

(3) WP (2 | f(4))



7. Bestimmen Sie den Funktionsterm mithilfe der Abbildung.

a)



Ansatz: $f(x) = a\sin(kx) + b$

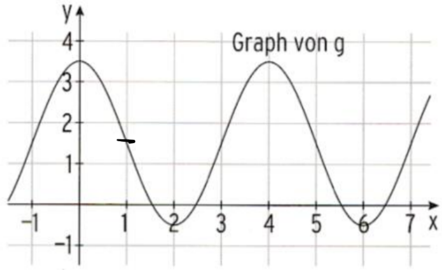
Amplitude: $1{,}5$

Periode: $\pi \approx 3{,}1$ $b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Mittellinie: 1

Funktionsterm: $f(x) = 1{,}5\sin(2x) + 1$

b)



Ansatz: $g(x) = a\cos(kx) + b$

Amplitude: 2

Periode: 4 $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Mittellinie: $1{,}5$

Funktionsterm: $g(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x) + 1{,}5$

8. Die unten stehende Wertetabelle gehört zu einer ganzrationalen Funktion g.

x	−2	−1	0	1	2	3	4
g(x)	−4	0	−2	−4	0	16	50
g′(x)	9	0	−3	0	9	24	45
g″(x)	−12	−6 <0 HP	0 WP	3 >0 TP	6	18	24

Das zugehörige Schaubild K besitzt

die gemeinsamen Punkte mit der x-Achse:
$N_1(-1|0)$ $N_2(2|0)$

den Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|-2)$

den Hochpunkt: HP $(-1|0)$

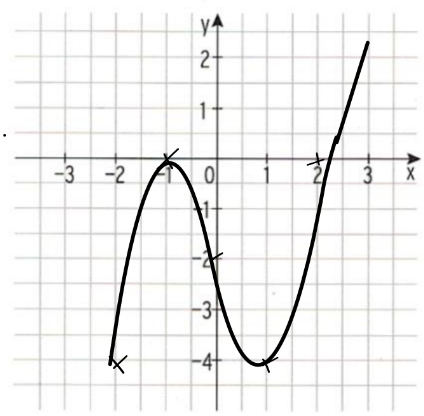
den Tiefpunkt: TP $(1|-4)$

den Wendepunkt: WP $(0|-2)$

Die Funktion muss mindestens den Grad 3

haben, da 2 Extrempunkte.

Skizze des zugehörigen Schaubilds:



278

20

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 36$

a) $K(6) = 96$

$K'(4) = 4$

$K(4) = 68$

$\Rightarrow K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\text{I.} \quad 60 = 216a + 36b + 6c$

$\text{II.} \quad 32 = 64a + 16b + 4c$

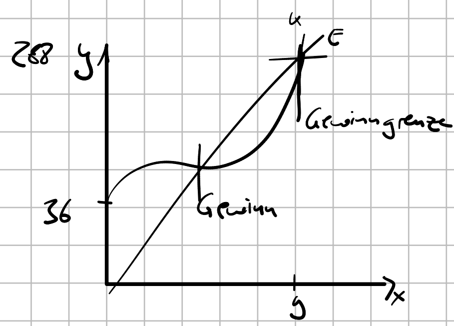
$\text{III.} \quad 4 = 48a + 8b + c$

b) $96 = 6^3 - 9 \cdot 6^2 + 28 \cdot 6 + 36$ = wahr ✓

c) $K(9) = 288$ ↓

Kosten = 288
Erlös = 288

$E(x) = 32x \qquad m = \frac{288}{9} = 32$



Aufstellen von Kurvengleichungen

Bsp 1:

$f(x) = ax\cdot(x-1)\cdot(x-3)$; $x \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ ← Produktform

das Schaubild von f hat im Ursprung die Steigung 6.

$f(x) = ax\cdot(x-1)\cdot(x-3)$
$\downarrow$
3 Nullstellen: 0, 1, 3

$f'(0) \Rightarrow 6$

$f(x) = ax(x^2 - 4x + 3)$

$f(x) = ax^3 - 4ax^2 + 3ax$

$f'(x) = 3ax^2 - 8ax + 3a$

PP mit $f'(0) = 6$

$\Rightarrow \quad 3a\cdot 0^2 - 8a\cdot 0 + 3a = 6$

$3a = 6 \quad |:3$

$a = 2$

$f(x) = 2x\cdot(x-1)\cdot(x-3)$

Bsp 2:

$f(x) = ax^3 + bx^2$; $x \in \mathbb{R}$

WP (1|8)

ges: a, b

$f(1) = 8$

$f''(1) = 0$

$8 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2$

$8 = a + b \quad \rightarrow a+b=8$

$8 = -4 + b \quad |+4$

$12 = b$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$0 = 6\cdot a\cdot 1 + 2b \quad \rightarrow 6a + 2b = 0$

II − 2 · I

$4a = -16 \quad |:4$

$a = -4 \qquad b = 12$

$\Rightarrow f(x) = -4x^3 + 12x^2$

Bsp 3:

gegeben ist eine Polynomfunktion 4. Grades <u>symm.</u> zur y-Achse mit einer waagrechten Tangente bei $x=2$.

Die Gerade mit $y = 6x + 7{,}5$ berührt k in $x = -1$

↓ Berührpunkt

ges: $f(x)$

Lsg: $f(x) = ax^4 + \cancel{bx^3} + cx^2 + \cancel{dx} + e$ 5 Unbekannte → 3 Unbekannte

$\Rightarrow f'(2) = 0$	$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$
	$0 = 4a \cdot 2^3 + 2c \cdot 2$
$\Rightarrow f'(-1) = 6$	$6 = 4a \cdot (-1)^3 + 2c \cdot (-1)$
$\Rightarrow f(-1) = 1{,}5$	$1{,}5 = a \cdot (-1)^4 + c \cdot (-1)^2 + e$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1{,}5 \\ -4 & -2 & 0 & 6 \\ 32 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 4 \quad \cdot(-32) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -28 & -32 & -48 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 14 \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 24 & 120 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 24e = 120$

$\Rightarrow e = 5 \Rightarrow$ II. $2c + 20 = 12 \quad | -20$

$2c = -8 \quad | :2$

$c = -4$

I. $a + 1 = 1{,}5 \quad | -1$

$a = 0{,}5$

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 5$

Bsp. 4: $f(x) = ae^{x} + b \quad ; \; a; b \in \mathbb{R}$

$y = \underset{m}{-0{,}5}x + 1$

$\uparrow$ $f'(x)$

$\Rightarrow f(0) = 1$

$f'(0) = -0{,}5$

$f'(x) = ae^{x}$

$1 = ae^{0} + b \Rightarrow a + b = 1 \quad b = 1{,}5$

$-0{,}5 = ae^{0} \Rightarrow a = -0{,}5$

$\Rightarrow f(x) = -0{,}5e^{x} + 1{,}5$

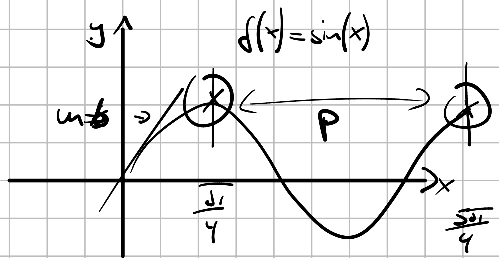
Bsp. 5:

amplitude

$f(x) = a \sin(bx) \; ; \; x \in \mathbb{R} \; ; \; a, b \in \mathbb{R}$

Streckung in x-Richtung

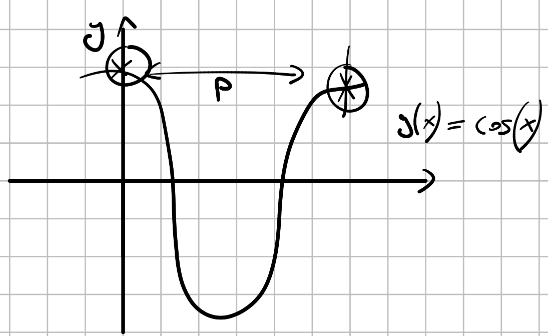
ges: $P = 2$; Steigung im Ursprung $= 5$



$2 = \frac{2\pi}{b} \; | \cdot b$

$2b = 2\pi \; | : 2$

$b = \pi$



$f(x) = a \sin(\pi x)$

$f'(x) = a\pi \cos(\pi x)$

$f'(0) = 5$

$5 = a\pi \cdot \cos(\pi \cdot 0)$

$5 = a\pi \; | : \pi$

$a = 1{,}591 \qquad f(x) = 1{,}591 \sin(\pi x)$

Bsp. 6 geg: Kostenfunktion 3. Grades

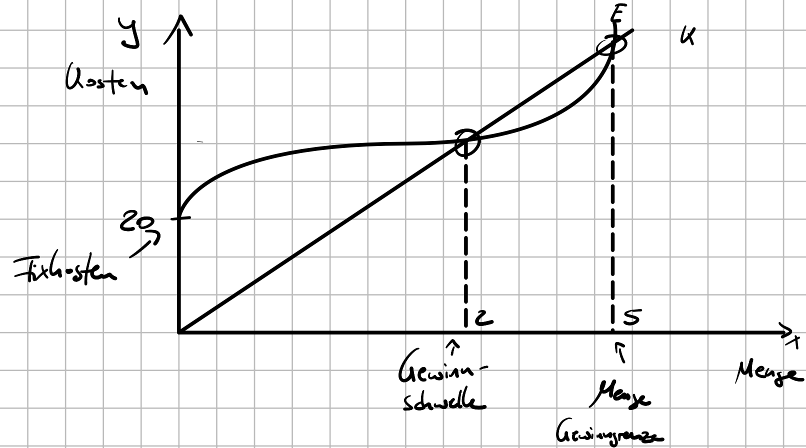
→ Verkaufserlös 180 GE / ME

→ Fixkosten 20 GE (Basis)

→ Kostendeckung 2 ME

→ Stückkosten 4 ME = 13 GE

→ Gewinngrenze bei 5 ME



ges: LGS

$k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ✓

I. $360 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + 20$

II. $52 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + 20$

III. $900 = a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 \cdot 20$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 340 \\ 64 & 16 & 4 & 32 \\ 125 & 25 & 5 & 880 \end{array}\right)$$

– aus Fixkosten = 20 GE ⇒ $d = 20$

aus Kostendeckung bei 2 ME und

– Verkaufserlös 180 GE/ME

⇒ $K(2) = E(2)$ (Kosten von 2 = Erlös von 2) = 360

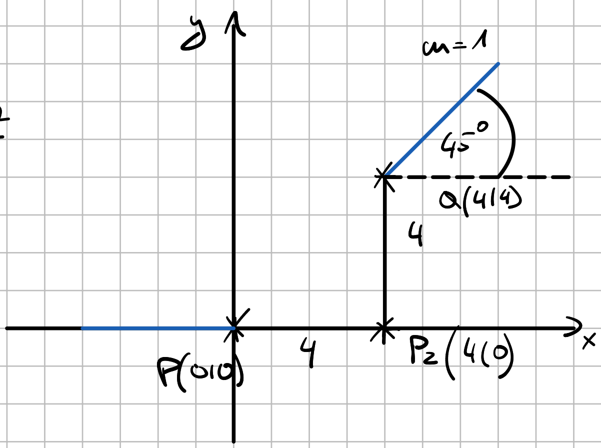
– aus Stückkosten 13 GE bei 4 ME = 52 GE

$K(4) = 4 \cdot 13 = 52$ GE

– aus Gewinngrenze = 5 ME ⇒

$K(5) = E(5) = 900$ GE

Bsp. 7



$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\left.\begin{array}{l} f'(4) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} f'(x) = 3ax^2 + 2b + c$

$f(4) = 1$

$f(0) = 0$

S. 270

8

a) $P(-2|1) \rightarrow$ falsch

b) Doppelnullstelle bei $x = -1 \rightarrow$ falsch

c) Normale mit $m_n = 0{,}5$

$m_n \cdot m_T = -1 \Rightarrow m_T = -2 \rightarrow$ wahr

d) 1. Ableitung nullsetzen ; 2. Ableitung < 0 = Hochpunkt $\rightarrow$ wahr

9

a)

$$f(x) = -2e^{0,5x} + x + 2$$

$$f'(x) = -1e^{0,5x} + 1$$

$$f''(x) = -0{,}5e^{0,5x}$$

$$f'''(x) = -0{,}25e^{0,5x}$$

$f'()$: $0 = -1e^{0,5x} + 1 \quad | +1e^{0,5x}$

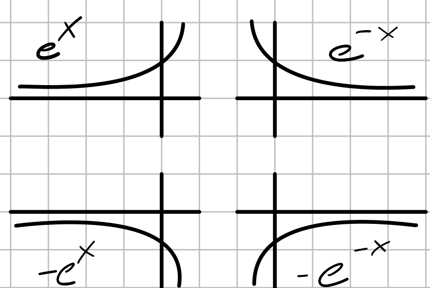
$e^{0,5x} = 1 \quad | \ln$

$0{,}5x = 0 \quad | :0{,}5$

$x = 0$ ✓ $\Longrightarrow$ HP $(0|0)$ ← 0 in f() einsetzen

$f''()$: $-0{,}5e^{0,5\cdot 0} = -\frac{1}{2}$ ✓

↳ folgt: extrempunkt (Hochpunkt)



$f''()$: $-0{,}5e^{0,5x} = 0 \quad | : -0{,}5$

$e^{0,5x} = 0 \quad | \ln$ ↯ Hat keinen Wendepunkt

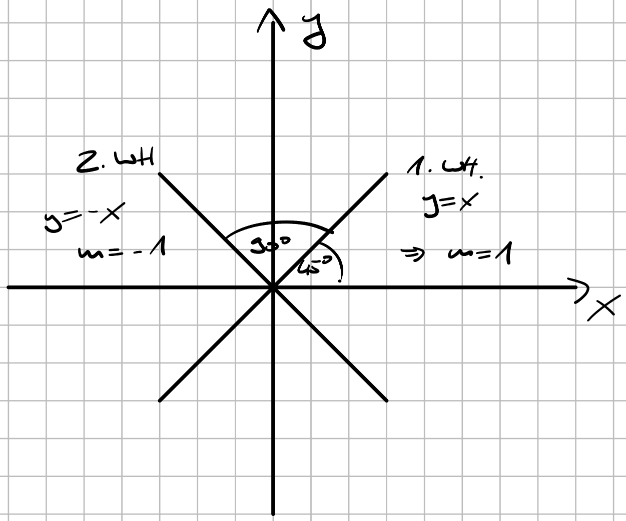
b) $f'(x) = -e^{0,5x} + 1$

$1 = -e^{0,5x} + 1 \quad | -1$

$0 = -e^{0,5x} \quad | \ln$ → kann <u>nicht</u> null werden

$\ln(0) = 0,5x \quad | :0,5$

$\frac{\ln(0)}{0,5} = x$ ↯



c) $f(x) = -2e^{0,5x} + x + 2$

$g(x) = (1-e)x + 2$

$f'(x) = g'(x)$

$g(x) = x - ex + 2$

$g'(x) = 1 - e$

$-e^{+0,5x} + 1 = 1 - e \quad | -1 \quad | T$

$e = e^{+0,5x} \quad | \ln$

$\ln(e) = +0,5x \quad | :0,5$

$x = \frac{\ln(e)}{0,5}$

$x = 2 \quad \to \quad -e \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} = -2$

$\left.\begin{array}{l} f(2) = -1,436 \\ g(2) = -1,436 \end{array}\right\}$ Es gibt einen Schnittpunkt zwischen den beiden Funktionen

10

a) $0 = \frac{\pi}{2} - \sin(x) \quad | +\sin(x)$

$\sin(x) = \frac{\pi}{2} \quad | \arcsin$

↯ kein Schnittpunkt mit x-Achse

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$y_{max} = 1 + \frac{\pi}{2}$

$y_{min} = \frac{\pi}{2} - 1$

b) Ja:

$1 + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Bestimmung von Extrempunkten

① 1. + 2. Ableitung

② 1. Ableitung 0 setzen

③ Ergebnis in 2. Ableitung einsetzen (wenn $\neq 0$)

④ Prüfung: ist $f(x) < 0$ (Hochpunkt) $(x_1 \mid f(x_1))$

oder $f(x) > 0$ (Tiefpunkt) $(x_1 \mid f(x_1))$

x_1 in normale Fkt. einsetzen

Bestimmung von Wendepunkten

① Funktion 3x Ableiten

② 2. Ableitung = 0 setzen

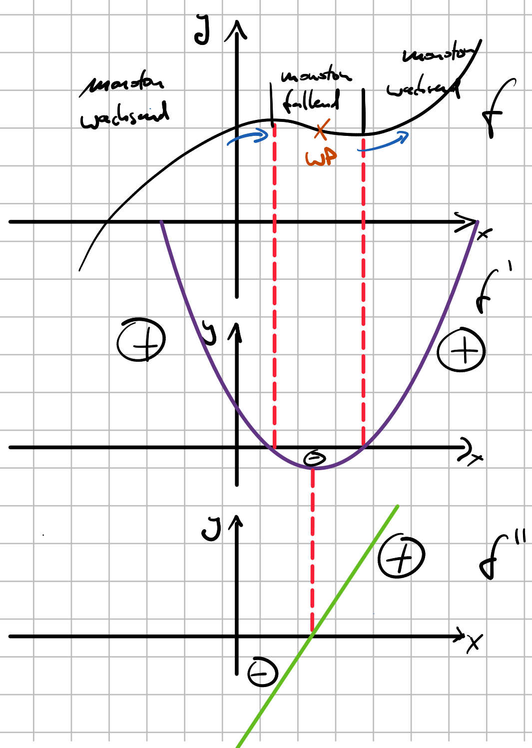
$f''(x) = 0$

③ Ergebnis in 3. Ableitung einsetzen und prüfen ob $f'''(x) \neq 0$ ist.

④ Ergebnis aus ② in f einsetzen und y-Koordinate berechnen.

$WP(x_{wp} \mid y_{wp})$

Monotonie



263

(12) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{27}{4}$; $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -1x^3 + 3x^2$

$f''(x) = -3x^2 + 6x$

$f'''(x) = -6x + 6 \neq 0$

$0 = -3x^2 + 6x$

$0 = x_1(-3x+6)$

$\Downarrow$

$x_1 = 0$

$-3x+6 = 0 \quad | +3x$

$6 = 3x \quad | :3$

$2 = x_2$

$f(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - \frac{27}{4}$

$y_2 = 17$

$WP_1(0 | -6{,}75)$

$WP_2(2 / 17)$

$m_{wp1} = f_1'(x_{wp1}) = 0$

$m_{wp2} = f'(x_{wp2}) = 4$

WT_1 : $y = 0x + b$

$-6{,}75 = 0 \cdot 0 + b$

$-6{,}75 = b$

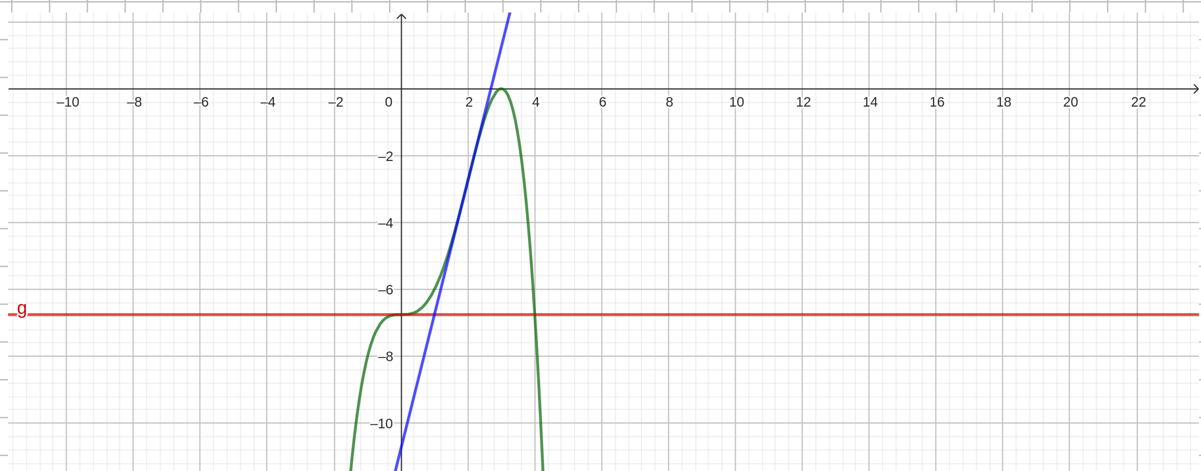
$\underline{\underline{y = 0x - 6{,}75}}$

WT_2 : $y = 4x + b$

$-\frac{11}{4} = 4 \cdot 2 + b \quad | -8$

$-\frac{43}{4} = b$

$\underline{\underline{y = 4x - \frac{43}{4}}}$



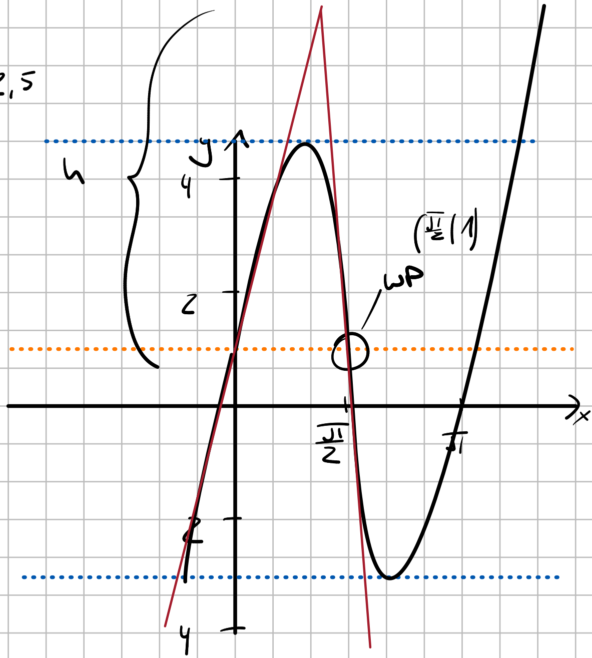
(16)

$f(x) = 4\sin(2x) + 1 \; ; \quad -1 \le x \le 2{,}5$

$f'(x) = 8\cos(2x)$

$f''(x) = -16\sin(2x)$

$f'''(x) = -32\cos(2x)$



$y = mx + b$

$\uparrow$

f'

$f'(x) = 8\cos(2x)$

$f'(\frac{\pi}{2}) = 8\cos(2\pi)$

$\Rightarrow y = -8x + b$

$1 = -8 \cdot \frac{\pi}{2} + b$

$b = 1 + 4\pi$

$\underline{\underline{y = -8x + 1 + 4\pi}}$

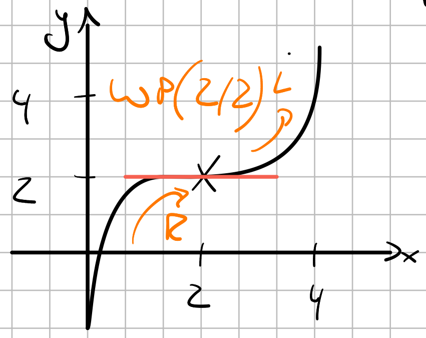
$h = f(\frac{\pi}{4}) - 1 = 2\pi$

$\underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2\pi = 4{,}93 \; LE^2}}$

$f(\frac{\pi}{4}) = -8\,\frac{\pi}{4} + 1 + 4\pi$

$= 1 + 2\pi$

Sattelpunkt



$\Rightarrow$ Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt <u>Sattelpunkt</u>.

$$f(x) = (x-2)^3 + 2 \qquad f(2) = 2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(x-2)(x-2) + 2 \\ &= (x^2 - 4x + 4)(x-2) + 2 \\ &= (x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x + 4x - 8 + 2) \\ &= x^3 - 6x^2 + 12x - 6 \end{aligned}$$

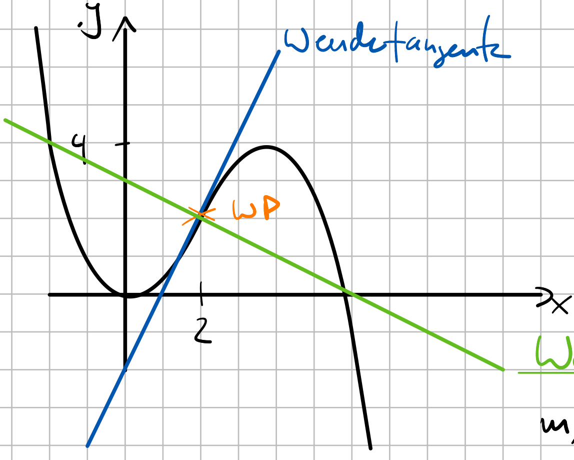
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 \qquad f'(2) = 0$$

$$f''(x) = 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad 6x - 12 = 0 \quad | +12 \quad | :6$$

$$x = 2$$

$$f'''(x) = 6 \neq 0$$

Bestimmung der Wendetangente



$f(x) = -x^3 + 3x^2$

$WP(1|2)$

x_{wp} y_{wp}

Wendepunkt

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$y = mx + b$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

$y = m x_{wp} + b \longrightarrow y = 3x - 1$

$m_{wp} = f'(x_{wp})$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 3$

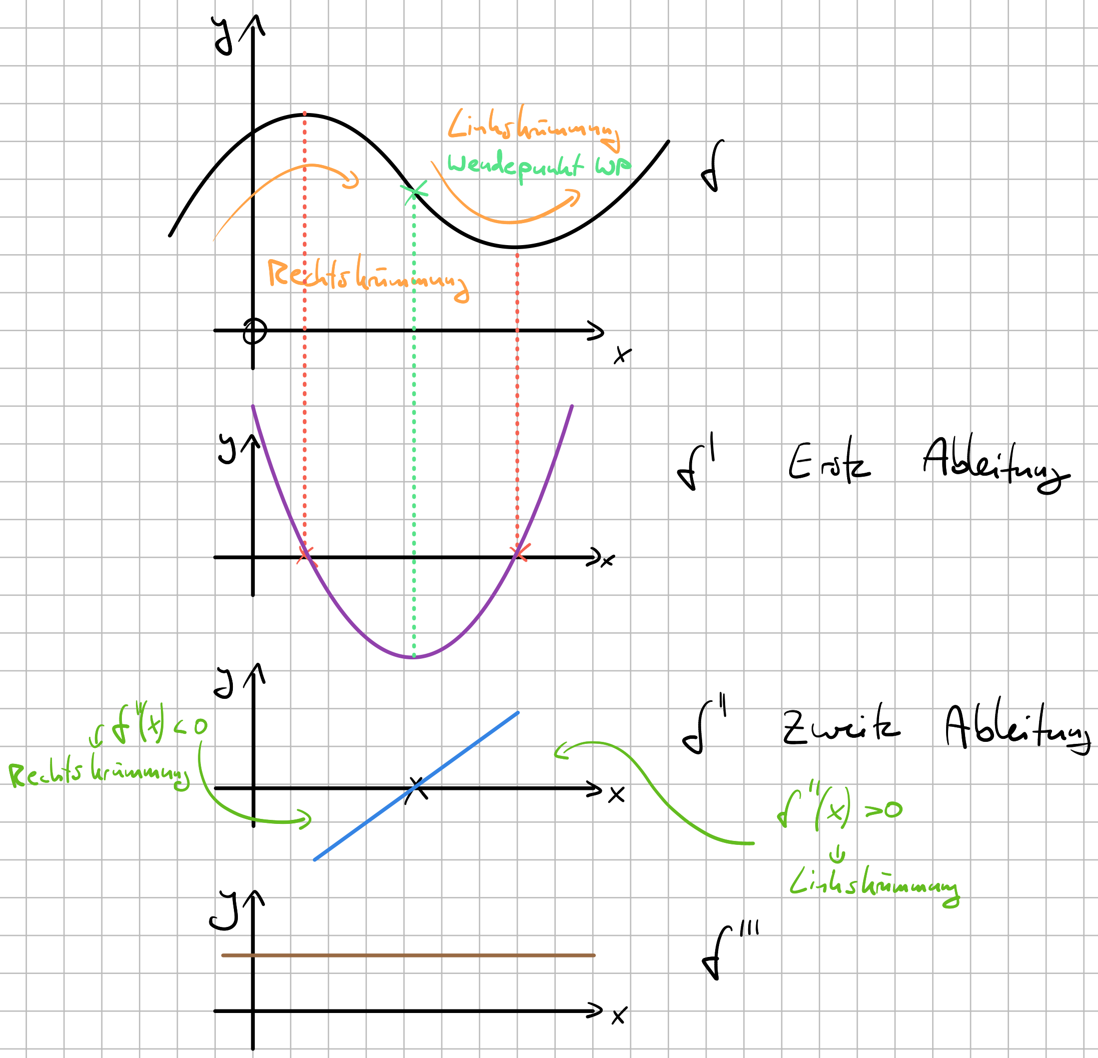
$\Rightarrow y = 3x + b \Rightarrow$ PP mit WP

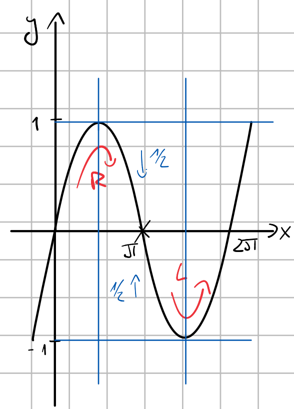
$2 = 3 \cdot 1 + b \quad | -3$

$b = -1$

$y = 3x - 1$

Krümmungsverhalten und Wendepunkte





Bestimmung von Wendepunkten

① Funktion 3x Ableiten

② 2. Ableitung = 0 setzen

$f''(x) = 0$

③ Ergebnis in 3. Ableitung einsetzen und prüfen ob $f'''(x) \neq 0$ ist.

④ Ergebnis aus ② in f einsetzen und y-Koordinate berechnen.

$WP\,(x_{wp} \,/\, y_{wp})$

Bsp:

$$f(x) = \frac{3}{48}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \; ; \quad x \in \mathbb{R}$$

① $f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$

$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$

$f'''(x) = \frac{3}{2}x$

② $f''(x) = 0$ $\quad \frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \quad | +3$

$\frac{3}{4}x^2 = 3 \quad | : \frac{3}{4}$

$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

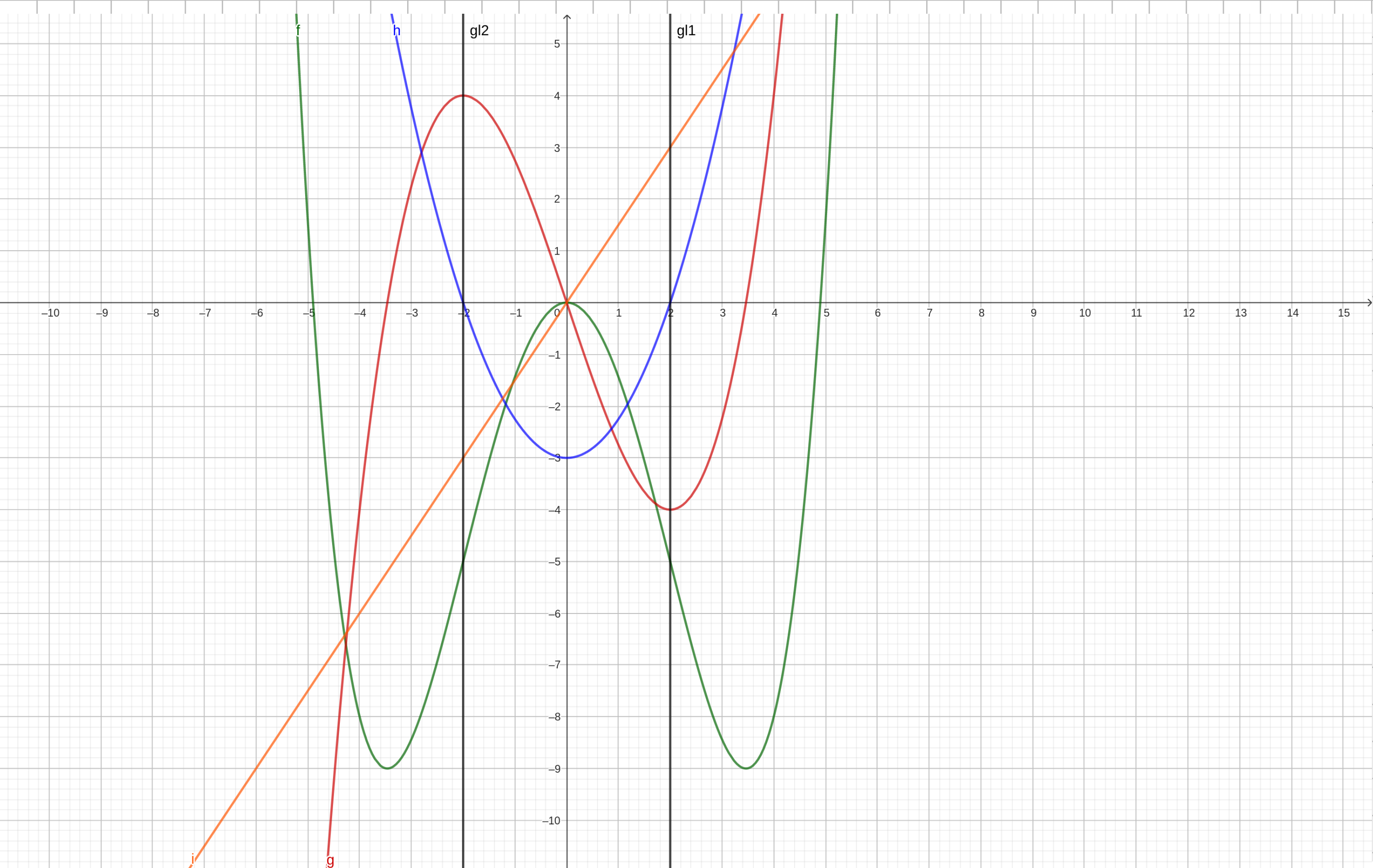
③ $f'''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 \neq 0$

$f'''(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2) \neq 0$

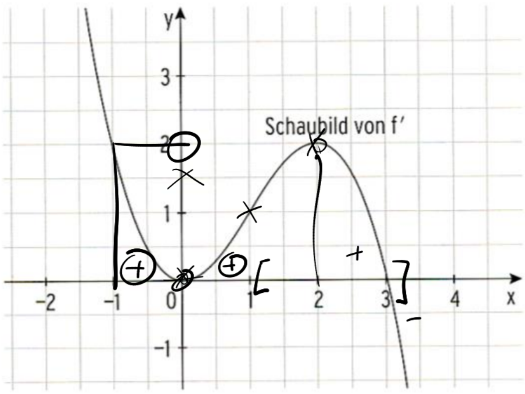
④

$f(2) = -5 \Rightarrow WP_1 \; (2 | -5)$

$f(-2) = -5 \Rightarrow WP_2 \; (-2 | -5)$



14. Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f′ für $1{,}4 \leq x \leq 3{,}2$.
Die nachfolgenden Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Entscheiden Sie. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Das Schaubild von f hat genau drei Extrempunkte.	☐ (w) ☒ (f)	
Das Schaubild von f hat genau drei Wendepunkte.	☐ (w) ☒ (f)	
Das Schaubild von f hat einen Sattelpunkt auf der y-Achse.	☒ (w) ☐ (f)	
$f'(x) < 2$	☒ (w) ☐ (f)	
$f'(2{,}5) > 0$	☒ (w) ☐ (f)	
$f''(3) > 0$	☐ (w) ☒ (f)	
Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.	☐ (w) ☒ (f)	
Das Schaubild von f ist bei $x = -1$ steigend.	☒ (w) ☐ (f)	
$f(2) > f(0)$	☒ (w) ☐ (f)	

13. Gegeben ist das Schaubild K der Funktion f mit $x \in [-1; 4]$. Tragen Sie die wichtigen Punkte ein und lesen Sie die Koordinaten ab. Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Bereiche, in denen K von f steigend ist bzw. in denen K von f rechtsgekrümmt ist.

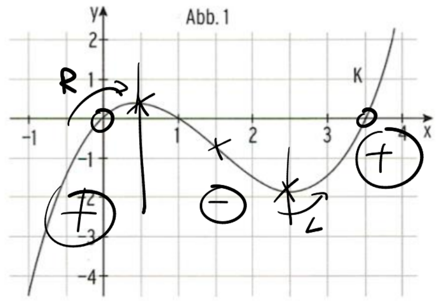
a)

Wichtige Punkte: Nullstellen: $X_1(0|0)$; $X_2(1|0)$; $X_3(3{,}5|0)$

$HP(0{,}5|0{,}5)$; $TP(2{,}5|-2)$

steigend für $x < 0{,}5 \vee x > 2{,}5$

rechtsgekrümmt für $x < 1.5$



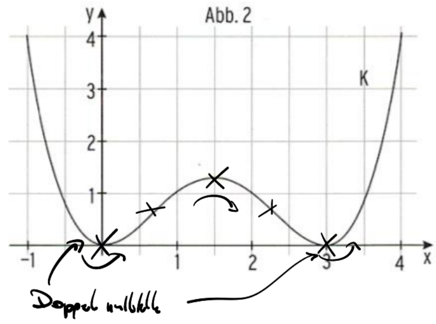
b)

Wichtige Punkte: $x_{1,2} = 0$ $x_{3,4} = 3$ | $HP = (1{,}5|1{,}25)$

$TP_1 = (0|0)$; $TP_2(3|0)$

steigend für $(x > 0 \rightarrow x < 1{,}5) \vee (x > 3)$

rechtsgekrümmt für $x > 0{,}75 \rightarrow x < 2{,}25$



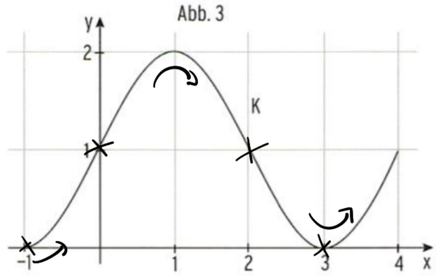
c)

Wichtige Punkte: $x_{1,2} = -1$; $x_{3,4} = 3$

$HP = (1|2)$ | $TP_1 = (-1|0)$ | $TP_2 = (3|0)$

steigend für $x > -1 \rightarrow x = 1 \vee x > 3$

rechtsgekrümmt für $x > 1 \wedge x < 2$

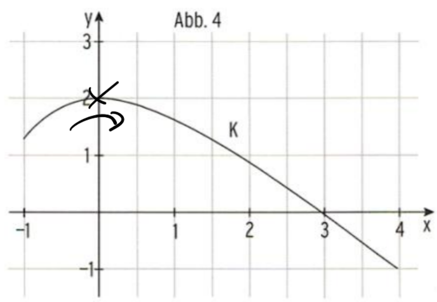


d)

Wichtige Punkte: $x_1 = 3$ | $HP = (0|2)$

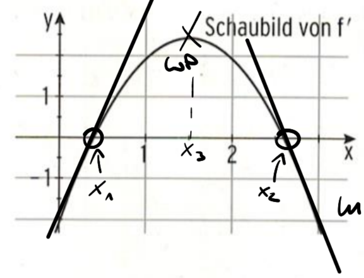
steigend für $x < 0$

rechtsgekrümmt für $x \in \mathbb{R}$



11. Die Abbildung zeigt das Schaubild der 1. Ableitungsfunktion einer Funktion f. Begründen Sie mithilfe der Zeichnung, dass das Schaubild von f einen Hoch-, einen Tief- und einen Wendepunkt mit positiver Steigung besitzt.

(Tiefpunkt) TP(x_1|) $m>0 \hat{=} f'(x_1)$



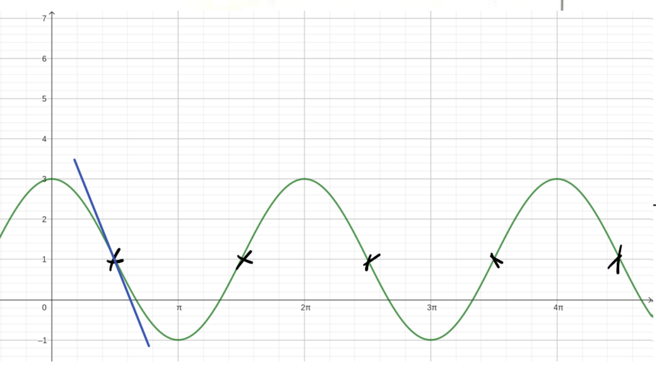
$m<0$ (Hochpunkt) HP(x_2|) $f'(x_2)$

Lösung: $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = 0$
Scheitelpunkt f' = WP und
$f''(x_3) = 0$ + VZW von ⊕ ⇒ ⊖ ⇒ WP

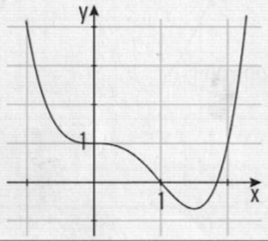
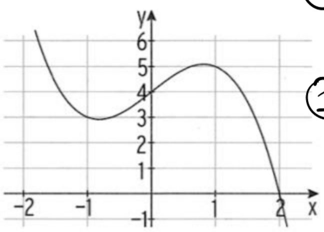
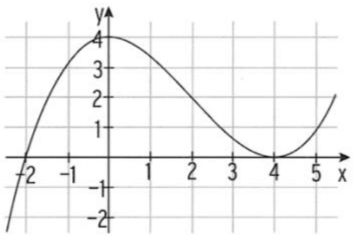
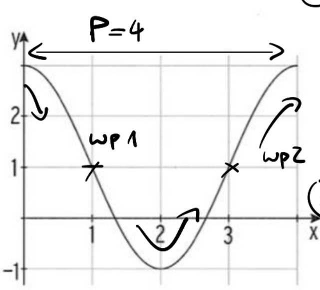
WP mit positiver Steigung, da f' an der Stelle x_3 größer 0.

12. Gegeben ist die Funktion f mit Schaubild K. Zeigen Sie, W ist Wendepunkt von K. Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente an K in W.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$; $x \in \mathbb{R}$ $W(1 \mid \frac{4}{3})$	$f'(x) = x^2 - 2x + 2$; $f''(x) = 2x - 2$; $f'''(x) = 2$ W ist Wendepunkt: $f(1) = \frac{1}{3} - 1 + 2 = \frac{4}{3}$; $f''(1) = 0$; $f'''(1) \neq 0$ Tangentengleichung mit $f'(1) = 1$: $y = x + b$ $W(1 \mid \frac{4}{3})$: $\frac{4}{3} = 1 + b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$ Tangentengleichung: $y = x + \frac{1}{3}$
$f(x) = -\frac{1}{4}(x^3 - 6x^2)$; $x \in \mathbb{R}$ $W(2 \mid +4)$	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ | $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$ | $f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ | $f'''(x) = -\frac{3}{2}$ $0 = -\frac{3}{2}x + 3 \quad \vert +\frac{3}{2}x$ $\frac{3}{2}x = 3 \quad \vert :\frac{3}{2}$ $x = 2$ $2 = -\frac{3}{2} \quad \vert +\frac{3}{2}$ $3{,}5 \neq 0$ $y = -\frac{1}{4}\cdot 2^3 + \frac{3}{2}\cdot 2^2 = 4$ Wendetangente: $f'(2) = 3$, $y = 3x + b$ $4 = 3\cdot 2 + b \quad \vert -6$ $-2 = b$ $y = 3x - 2$
$f(x) = 1 + 2\cos(x)$; $x \in \mathbb{R}$ $W(\frac{\pi}{2} \mid 1)$	$f'(x) = -2\sin(x)$ | $f''(x) = 2\cos(x)$ | $f'''(x) = -2\sin(x)$ $y = mx + b$ $= f'(x_{WP})$ $f'(\frac{\pi}{2}) = -2\sin(\frac{\pi}{2}) = -2$ $1 = -2\cdot\frac{\pi}{2} + b \quad \vert +\pi$ $1 + \pi = b$ $y = -2x + 1 + \pi$



10. Gegeben ist die Funktion f mit Schaubild K. Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von K.

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1;$ $x \in \mathbb{R}$ 	$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$; $f''(x) = 12x^2 - 12x$; $f'''(x) = 24x - 12$ Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $12x^2 - 12x = 0$ Ausklammern, Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \vee 12x - 12 = 0$ Mögliche Wendesstellen: $x = 0 \vee x = 1$ Mit $f'''(0) = -12 \neq 0$ und $f(0) = 1$: $W_1(0 \mid 1)$ Mit $f'''(1) = 12 \neq 0$ und $f(1) = 0$: $W_2(1 \mid 0)$
$f(x) = -x^3 + 2x + 4;$ $x \in \mathbb{R}$ 	① $f'(x) = -3x^2$ $f''(x) = -6x$ $f'''(x) = -6 \neq 0$ ② $0 = -6x \mid :(-6)$ $0 = x$ ③ $y = -0^3 + 2 \cdot 0 + 4$ $y = 4$ WP = (0|4)
$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4;$ $x \in \mathbb{R}$ 	$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x$; $f''(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$; $f'''(x) = \frac{3}{4} \neq 0$ $0 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} \mid +\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2} = \frac{3}{4}x \mid :\frac{3}{4}$ $2 = x$ $f(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^3 - \frac{3}{4} \cdot 2^2 + 4$ $f(x) = 2$ WP(2|2)
$f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x) + 1;$ $x \in [0; 4]$ 	① $f'(x) = -\pi \sin(\frac{\pi}{2}x)$; $f''(x) = -\frac{\pi^2}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}x)$; $f'''(x) = \frac{\pi^3}{4} \sin(\frac{\pi}{2}x)$ ② $0 = -\frac{\pi^2}{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}x) \mid : -\frac{\pi^2}{2}$ $0 = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ $\frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}x \mid :\frac{\pi}{2}$ $f'''(1) \neq 0$ $f'''(3) \neq 0$ $x_1 = 1 \mid x_2 = -1 \mid x_3 = x_1 + 4 = 5 \mid x_4 = x_2 + 4 = 3$ ③ $y = 2\cos(\frac{\pi}{2} \cdot 1) + 1$ $y = 1$ $WP_1(1 \mid 1)$ $y = 2\cos(\frac{\pi}{2} \cdot 3) + 1$ $y = 1$ $WP_2(3 \mid 1)$

6. Bestimmen Sie die Krümmungsbereiche des Graphen von f mit Hilfe der Abbildung.

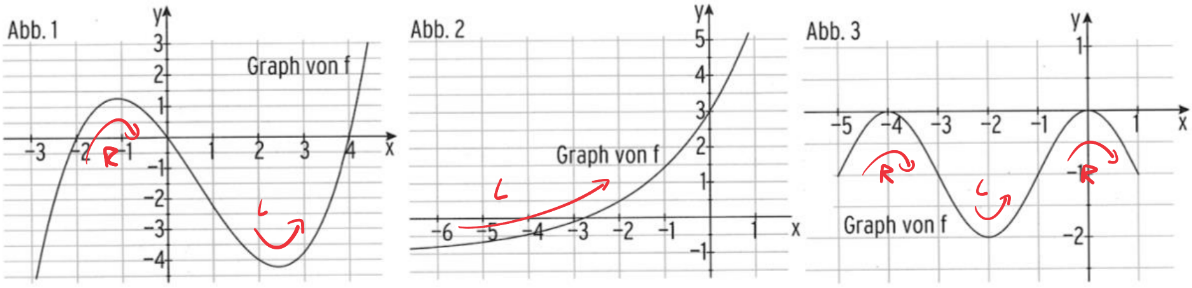


Abb. 1: ________________ Abb. 2: ________________ Abb. 3: ________________

7. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Krümmung.

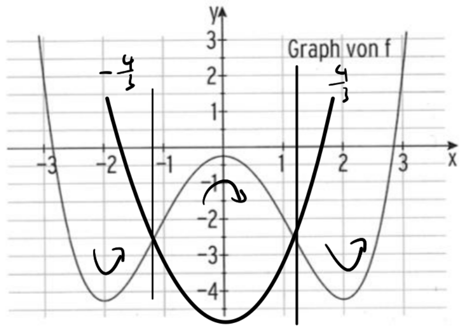
Ableitungen: $f(x)' = 3x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = 6x - 4$ $\qquad 0 = 6x - 4 \mid +4$

$4 = 6x \mid :6$

$x = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Rechtsk. für $x < \frac{2}{3}$; linksk. für $x > \frac{2}{3}$

8. Zeigen Sie, das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 8x^2 - 1);\ x \in \mathbb{R}$, ist für $x \in [-1; 1]$ rechtsgekrümmt.



Ableitungen:

$f'(x) = 1x^3 - 4x$ $\qquad 0 = 3x^2 - 4 \mid +4$

$f''(x) = 3x^2 - 4$ $\qquad 4 = 3x^2 \mid :3$

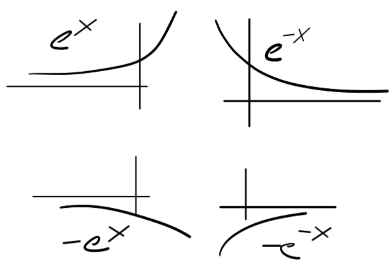
$f'''(x) = 6x \neq 0$ $\qquad \frac{4}{3} = x^2 \mid \sqrt{\ }$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$

Linkskrümmung für $x < -\frac{4}{3} \wedge x > \frac{4}{3}$

Rechts " " $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$

9. Zeigen Sie, das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + x;\ x \in \mathbb{R}$, ist linksgekrümmt auf $\mathbb{R}$.



Ableitungen:

$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + 1$ $\qquad 0 = \frac{1}{2}e^{-x} \mid \cdot 2$

$f''(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ $\qquad 0 = e^{-x} \mid \ln$

$x = -\ln(0)$ ↯

1. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate auf [a; b]. $\underline{1}$ Durchschnittsrate

$f(x) = (x+1)^2$; [0; 2]	$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{9-1}{2} = 4$
$f(x) = 6x - 2x^3$; [1; 3]	$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-36-4}{2} = \frac{-40}{2} = -20$
$f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$; [− 1; 2]	$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{3e-3e^{-\frac{1}{2}}}{3} = \frac{\cancel{3}e-\cancel{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}}{\cancel{3}} = e - \frac{1}{\sqrt{e}}$
$f(x) = 2\sin(2x)$; $[0; \frac{\pi}{4}]$	$\frac{f(\frac{\pi}{4})-f(0)}{\frac{\pi}{4}-0} = \frac{2-0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{\pi}{4}} = 2{,}54$
$f(x) = 9$; [− 5; 3]	0
$f(x) = x^4 - x^2$; [− 2; 0]	$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \frac{0-12}{0-(-2)} = \frac{-12}{2} = -6$

2. Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate in x_0.

$f(x) = x^2 + 2;\ x_0 = 2$	$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2+2-6}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$ $h + 4 \to 4$ für $h \to 0$ $m_t = f'(2) = 4$
$f(x) = 6x^2 - 2;\ x_0 = 1$	$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{6\cdot(1+h)^2-2-4}{h} = \frac{6\cdot(1+2h+h^2)-6}{2} = \frac{\cancel{6}+12\cancel{h}+6h^2-\cancel{6}}{\cancel{h}} = 12+6h$ für $h \to 0$ $m_T = 12$
$f(x) = x^2 - x;\ x_0 = 0$	$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(x+h)^2-(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h^{\cancel{2}}-\cancel{h}1}{\cancel{h}1} = h$ $\lim_{h\to 0} = -1$

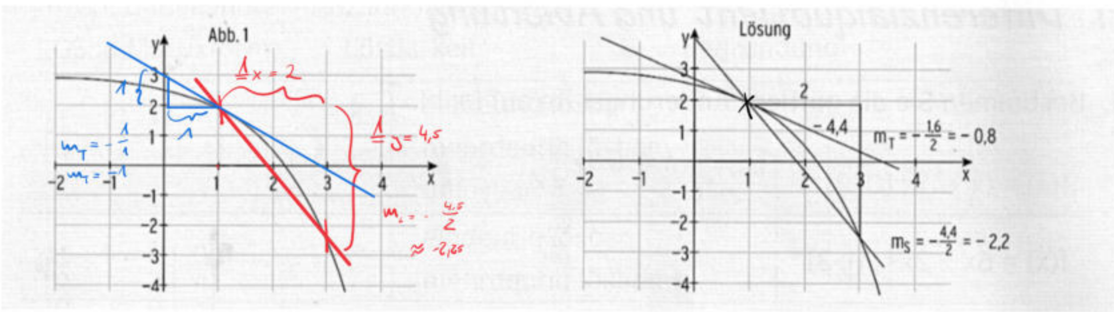
3. Für eine Funktion f gilt folgende Bedingung. Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild K von f treffen?

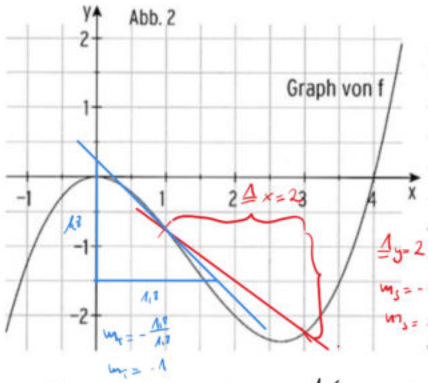
$f'(2) = -3$	K hat in x = 2 die Steigung − 3.
$f'(4) = 0$	K hat in $x = 4$ die Steigung 0.
$f'(x) > 0;\ x \in \mathbb{R}$	K hat eine positive Steigung für alle $x \in \mathbb{R}$
$f(-1) = 0$	Der Punkt P (−1|0) liegt auf K.
$f(4) < 0$	Der Funktionswert an der Stelle 4 ist negativ.
$f'(-2) = -1$	K hat in $x = -2$ die Steigung −1.
$f(3) = 4 \wedge f'(3) = 0$ (und)	Punkt P(3|4) liegt auf K und K hat in $x=3$ Steigung 0.
$f'(x) = 1$	K hat auf unb. x Steigung 1

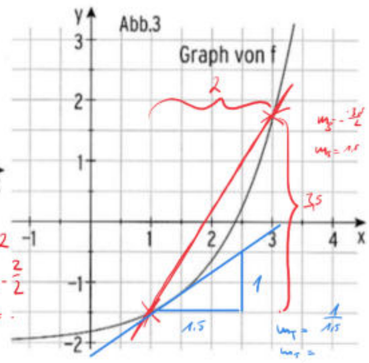
Ableitung gemeint

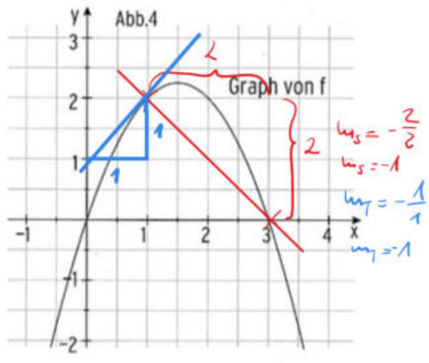
$f'(2) = -3$ Funktion hat an Stelle 2 von −3

4. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f auf [1; 3] und die momentane Änderungsrate in $x_0 = 1$ mithilfe der Abbildung.



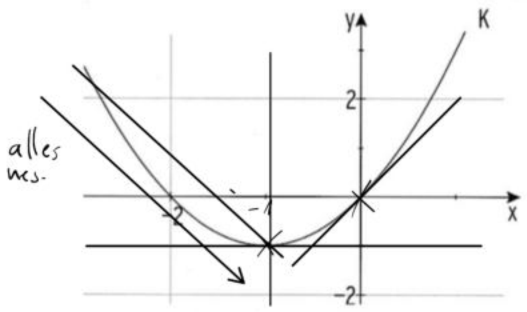


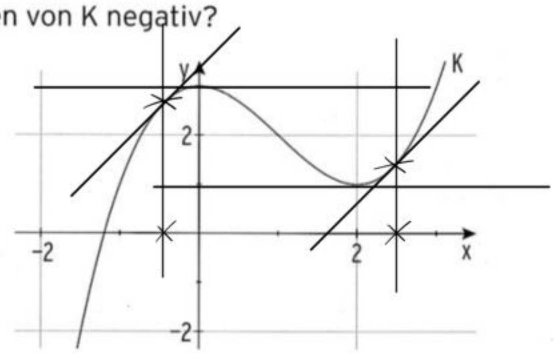




m_s = $-0,75$ m_t = $-1,5$ m_s = $1,5$ m_t = $\frac{1}{2}$ m_s = -1 m_t = 1

5. Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Funktion f. Beantworten Sie folgende Fragen.
   a) An welcher Stelle hat K eine waagrechte Tangente?
   b) An welcher Stelle hat K die Steigung 2?
   c) Auf welchem Bereich sind die Steigungen von K negativ?





Lösung:

a) $x = -1$

b) $x = 0$

c) $f'(x) < 0$ für $x < -1$

Lösung:

a) $x = 0$; $x = 2$

b) $x = -0,5$; $x = 2,5$

c) $f'(x) < 0$ für $0 < x < 2$

$f(x) = x^2 - x$ $\leftarrow$ x_0 einsetzen

ges: Steigung an $x_0 = 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h}$$

: $$\lim_{h \to 0} \frac{(0+h)^2 - (0+h) - 0}{h}$$

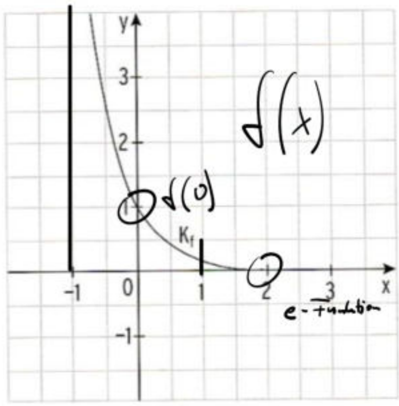
$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}} - \cancel{h}}{\cancel{h}}$$

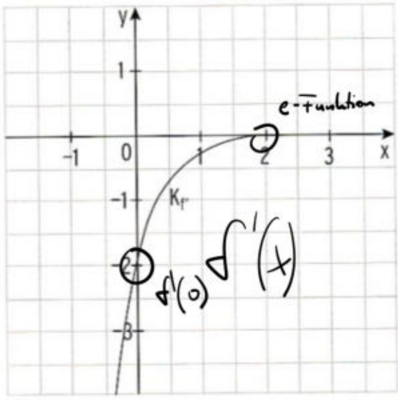
$$\lim_{h \to 0} \frac{h-1}{1} = \lim_{h \to 0} h-1 = -1$$

6. Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f und der zugehörigen Ableitungsfunktion f′. Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

a)

Aussage	wahr	falsch
$f(-1) > f(1)$	☒	☐
$f(0) > f'(0)$	☒	☐
Es gibt keinen Punkt auf K_f, in dem K_f eine Steigung von -3 aufweist.	☐	☒
Im Schnittpunkt mit der y-Achse hat K_f die Steigung -2.	☒	☐
$f(2) \cdot f'(2) < 0$	☒	☐

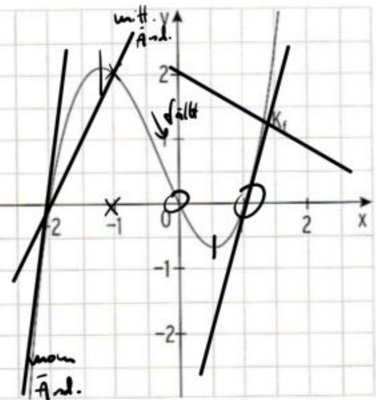


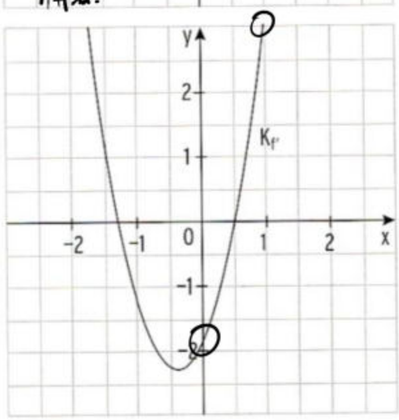


b)

Aussage	wahr	falsch
K_f ist bei $x = 1$ steiler als die Gerade mit $y = -0{,}5x + 2$.	☒	☐
Die momentane Änderungsrate von f ist bei x=0 negativ.	☒	☐
$f(1) > f'(1)$	☐	☒
~~Es gibt einen Punkt auf K_f mit y-Wert 2, in dem K_f eine Steigung von -1 hat.~~	☐	☐
Die mittlere Änderungsrate auf $[-2; -1]$ ist größer als die momentane Änderungsrate in $x = -2$.	☐	☒

4g





7. Bilden Sie die erste Ableitung.

$f(x) = 2\cos(x) + 1$	$f'(x) = -2\sin(x)$
$f(x) = -3\sin(x) - x$	$f'(x) = -3\cos(x) - 1x^{1-1}$
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^4 + 3$ ← fällt weg	$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 4x^3$
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + x^2 + x - 4$ ← fällt weg	$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + 2x + 1$
$f(x) = 5e^x + 2x - 1$	$f'(x) = 5e^x + 2$
$f(x) = ae^x + b$	$f'(x) = ae^x$

8. Bilden Sie die erste Ableitung mithilfe der Kettenregel.

$f(x) = 2\sin(3x)$	$f'(x) = 2 \cdot 3\cos(3x) = 6\cos(3x)$
$f(x) = \frac{5}{3}e^{-4x}$	$f'(x) = -4 \cdot \frac{5}{3}e^{-4x} = -\frac{20}{3}e^{-4x}$
$f(x) = -0{,}25e^{8x} + 2$	$f'(x) = -2e^{8x} = -0{,}25e^{8x}$
$f(x) = -1{,}2e^{-3x} + 5x$	$f'(x) = -1{,}2\,e^{-3x} \cdot (-3) + 5 = 3{,}6e^{-3x} + 5$
$f(x) = 2ae^{bx} + c$	$f'(x) = 2ae^{bx} \cdot b = 2abe^{bx}$
$f(x) = -\pi\cos(0{,}5x)$	$f'(x) = \pi\sin(0{,}5x) \cdot 0{,}5 = \frac{\pi}{2}\sin(0{,}5x)$
$f(x) = x - \sin(0{,}3\pi x)$	$f'(x) = -\cos(0{,}3\pi x) \cdot 0{,}3\pi = -0{,}3\pi\cos(0{,}3\pi x)$
$f(x) = \frac{9}{5}e^{-x} + x^2$	$f'(x) = -\frac{9}{5}e^{-x} + 2x = -\frac{9}{5}e^{-x} + 2x$
$f(x) = 4\sin(2x) + 1$	$f'(x) = 4\cos(2x) \cdot 2 = 8\cos(2x)$
$f(x) = 1 - 2\cos(2x)$	$f'(x) = 2\sin(2x) \cdot 2 = 4\sin(2x)$
$f'(x) = 4\cos(\frac{x}{\pi})$	$f'(x) = -4\sin\left(\frac{x}{\pi}\right) : \pi = -\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$

9. Bilden Sie die erste und die zweite Ableitung.

$f(x) = 2\cos(4x) + 2x$	$f'(x) = -8\sin(4x) \cancel{+2}$ Nichts abziehen	$f''(x) = -32\cos(4x)$
$f(x) = 6e^{2x} - x^2$	$f'(x) = 12e^{2x} - 2x$	$f''(x) = 12e^{2x} - 1$
$f(x) = \frac{1}{4}\cos(3x)$	$f'(x) = -\frac{3}{4}\sin(3x)$	$f''(x) = -\frac{9}{4}\cos(3x)$
$f(x) = \frac{1}{16}(x^4 + x^2 - 8)$	$f'(x) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x$	$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}$

10. Entscheiden Sie, ob hier richtig oder falsch abgeleitet wurde. Beschreiben Sie gegebenenfalls kurz, worin der Fehler besteht.

Funktionsterme	richtig falsch	richtig wäre ...	Was wurde nicht beachtet?
$f(x) = 2x^4 + 2x^2$ $f'(x) = 8x^4 + 4x^2$	☐ (r) ☒ (f)	$f'(x) = 8x^3 + 4x$	Potenzregel: $(x^4)' = 4x^3$
$f(x) = 3x^6 - 3x^4 + x$ $f'(x) = 18x^5 - 12x^3$	☐ (r) ☒ (f)	$f'(x) = 18x^5 - 12x^3 + 1$	Potenzregel $x = 1x^0 = 1$
$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ $f'(x) = e^{2x}$	☒ (r) ☐ (f)	$f'(x) =$	Kettenregel
$f(x) = \sin(2x) + 1$ $f'(x) = \cos(2x)$	☐ (r) ☒ (f)	$f'(x) = 2\cos(2x)$	Kettenregel
$f(x) = e^{2x} - x^2$ $f'(x) = e^{2x} - 2x$	☐ (r) ☒ (f)	$f'(x) = 2e^{2x} - 2x$	Potenzregel Kettenregel
$f(x) = \cos(\pi x)$ $f'(x) = \sin(\pi x)$	☐ (r) ☒ (f)	$f'(x) = -\pi \sin(\pi x)$	Kettenregel
$f(x) = 2x(x^3 + 4x^2)$ $f'(x) = 2(3x^2 + 8x)$	☐ (r) ☒ (f)	$f'(x) = 8x^3 + 24x^2$	Potenzregel

$f(x) = 2x^4 + 8x^3$

11. Sind die Aussagen wahr (w) oder falsch (f)?

$f(x) = 2x^2 + 1$
$f'(x) = 2x$
↑
Steigung

Der Funktionswert von f mit $f(x) = x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$, entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Ableitungsfunktion.	☐ (w) ☒ (f)
Der y-Wert $f'(x)$ entspricht an jeder Stelle x der Steigung des Graphen der Funktion f.	☒ (w) ☐ (f)
Die Ableitungsfunktion einer linearen Funktion ist eine konstante Funktion.	☒ (w) ☐ (f)
Es gibt keine zwei Funktionen, welche beide die gleiche Ableitungsfunktion haben.	☐ (w) ☒ (f)
Bei der Funktion f mit $f(x) = e^x$ entspricht der y-Wert an jeder Stelle der Steigung des zugehörigen Schaubildes.	☐ (w) ☐ (f)

1. Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f an der Stelle x = u.

$f(x) = 3x - 2x^2$ $u = -2$	$f(-2) = 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2 = -14$ $f'(x) = 3 - 4x$; $f'(-2) = 3 - 4(-2) = 11$; also $m_t = 11$ Tangentengleichung: $y = 11x + b$ Punktprobe mit $B(-2 \mid -14)$: $-14 = 11 \cdot (-2) + b \;\Rightarrow b = 8$ Tangentengleichung: $y = 11x + 8$
$f(x) = x - 2e^{0,25x}$ $u = 4$ $f(4) = -1,44$ $b = (4 \mid -1,44)$	$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{0,25 \cdot x}$ $\quad f'(4) = 1 - \frac{1}{2}e^{0,25 \cdot 4} = -0,3591 \approx -0,36$ Steigung $y = -0,36x + b \;\Rightarrow -1,44 = -0,36 \cdot 4 + b \mid +1,44$ $\Rightarrow b = 0$ $y = -0,36x$
$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x) + 1$ $u = \frac{\pi}{6}$ $b = \left(\frac{\pi}{6} \mid 1,5\right)$ $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$	$f'(x) = 1,5\cos(3x)$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,5\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 0$ $y = 0x + b$ $\quad \frac{3}{2} = 0\frac{\pi}{6} + b$ $y = 1,5$

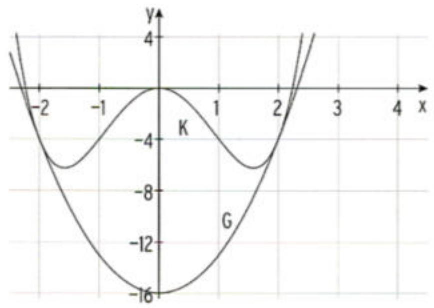
2. Berechnen Sie die Gleichung der Normale an das Schaubild von f an der Stelle x = u.

$f(x) = x^3 - x^2$ $u = -1$ $\boxed{m_n = -\frac{1}{m_t}}$	$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 = -2$ $f'(x) = 3x^2 - 2x$; $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2(-1) = 5 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{5}$ Normalengleichung: $y = -\frac{1}{5}x + b$ Punktprobe mit $B(-1 \mid -2)$: $-2 = -\frac{1}{5} \cdot (-1) + b \;\Rightarrow b = -\frac{11}{5}$ Normalengleichung: $y = -\frac{1}{5}x - \frac{11}{5}$
$f(x) = 3 - 2e^{-x}$ $u = 0$ $f'(0) = 1$ $B(0 \mid 1)$	① $f'(x) = 2e^{-x}$ ② $f'(0) = 2e^{-0} = 2 = m_T$ ③ $m_n = -\frac{1}{2}$ ④ $y_n = -\frac{1}{2}x + b$ ⑤ $1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + b$ ⑥ $\underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x + 1}}$ $1 = b$
$f(x) = 2\cos(2x) + 2$ $u = \frac{\pi}{4}$ $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ $B = \left(\frac{\pi}{4} \mid 2\right)$	① $f'(x) = -4\sin(2x)$ ② $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -4 = m_T$ ③ $m_n = \frac{1}{4}$ (Kehrbruch) ④ $y_n = \frac{1}{4}x + b$ ⑤ $2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + b \mid -\frac{1}{16}\pi$ ⑥ $\underline{\underline{y_n = \frac{1}{4}x + 1,8}}$ $b = 1,8$

III Differenzialrechnung

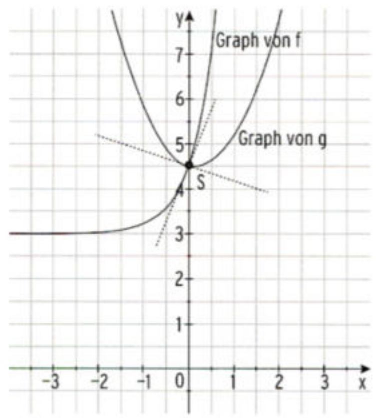
.....

6. Zeigen Sie: Das Schaubild K von f mit $f(x) = x^2(x^2 - 5)$; $x \in \mathbb{R}$, und das Schaubild G von g mit $g(x) = 3x^2 - 16$; $x \in \mathbb{R}$, haben genau zwei gemeinsame Punkte.
Welche besonderen Eigenschaften liegen vor?



Lösung:

7. Schneiden sich die Schaubilder von f mit $f(x) = 1{,}5e^{2x} + 3$ und g mit $g(x) = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{9}{2}$ senkrecht? Begründen Sie durch eine Rechnung.



Lösung:

8. Das Fahrzeug bricht in $x_0 = 10$ aus.
Trifft es das Hindernis im Punkt P(20 I 0,25)?

$f(x) = 5{,}5e^{-0{,}1x}$; $f'(x) = -0{,}1 \cdot 5{,}5\, e^{-0{,}1x} = -0{,}55e^{-0{,}1x}$

Tangente in $x_0 = 10$

$f'(10) = -0{,}55e^{-0{,}1 \cdot 10} = -0{,}2$

$y = -0{,}2x + b$

$f(10) = 5{,}5e^{-0{,}1 \cdot 10} = 2$

Punktprobe mit P:

$2 = -0{,}2 \cdot 10 + b$

$2 = -2 + b \quad |+2$

$4 = b$

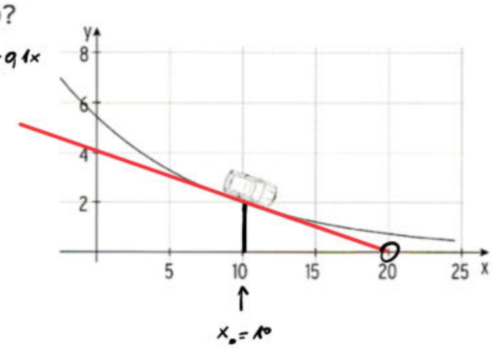
$y = -0{,}2x + 4$

$0 = -0{,}2x + 4 \quad |+0{,}2x$

$0{,}2x = 4 \quad |:0{,}2$

$x = 20$

Skizze:

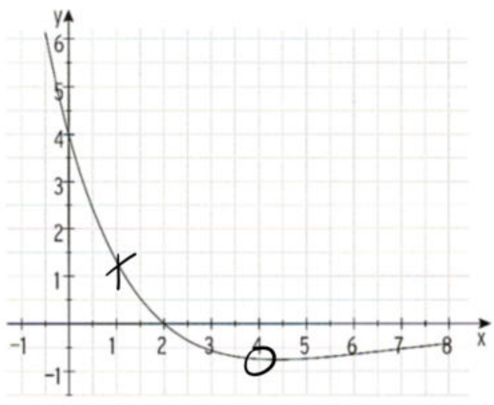


Mathematisch keine Kollision.
Unter realen Bedingungen Kollision, wegen Breite.

3. Gezeichnet ist das Schaubild einer Funktion h mit der Definitionsmenge $D = [-1; 8]$.
Prüfen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

$h'(1) < 0$ ← steigung	☒ (w)	☐ (f)
Das Schaubild von h' geht durch den Punkt $Q(2 \mid 0)$.	☐ (w)	☒ (f)
$h'(7) = -0{,}5$ ← steigung	☐ (w)	☒ (f)
Es gibt ein $x \in D$ für das gilt: $h'(x) = 0$.	☒ (w)	☐ (f)
Die Gleichung $h'(x) = 1$ hat eine Lösung.	☐ (w)	☒ (f)

keine Steigung 1



4. Berührt das Schaubild K von f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$; $x \in \mathbb{R}$, die x-Achse?
Begründen Sie durch Rechnung. Skizzieren Sie das Schaubild von f.

Lösung:

$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

$g(x) = 0$ ↓ einsetzen

$\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 = 0$ | subst.

$x^2 = z$

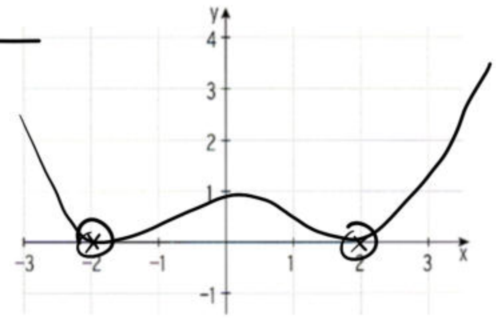
$\frac{1}{16}z^2 - \frac{1}{2}z + 1 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-\frac{1}{2}) \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot 1}}{2 \cdot \frac{1}{16}}$

$z_{1,2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{16}}$

$z_{1,2} = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{z_{1,2}} = \pm\sqrt{4}$

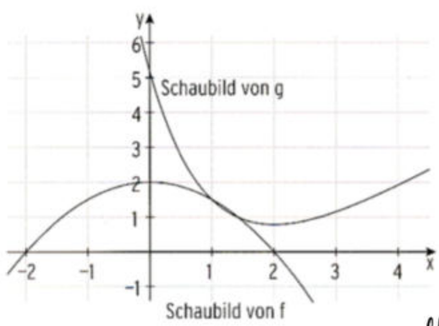
$x_1 = 2$
$x_2 = -2$



$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - x \Rightarrow f'(2) = 0$

$g'(x) = 0$ $\Rightarrow g'(0) = 0$

5. Berühren sich das Schaubild von f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$; $x \in \mathbb{R}$, und das Schaubild von g mit $g(x) = e^{2-x} + x - e + 0{,}5$; $x \in \mathbb{R}$, in $x_0 = 1$?
Begründen Sie rechnerisch.



Lösung:

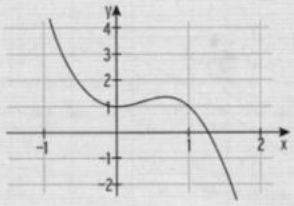
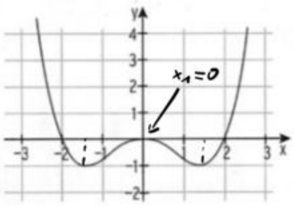
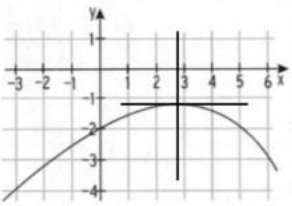
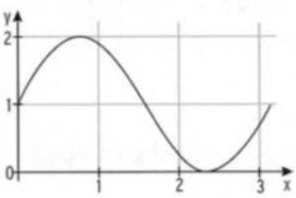
$-\frac{1}{2}x^2 + 2 = e^{2-x} + x - e + 0{,}5$

$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 = \frac{3}{2} \\ e^{2-1} + 1 - e + 0{,}5 = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Berührpunkt

$f'(x): -x$

$g'(x): -e^{-x+2} + 1 \Rightarrow g'(1) = -e^1 + 1 \approx -1{,}7$ ↯

5. Gegeben ist die Funktion f. Das Schaubildvon f heißt K. Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K.

$f(x) = 2x^2 - 2x^3 + 1$; $x \in \mathbb{R}$ 	$f'(x) = 4x - 6x^2$; $f''(x) = 4 - 12x$ Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad 4x - 6x^2 = 0$ Ausklammern: $\quad x(4 - 6x) = 0$ Satz vom Nullprodukt: $\quad x = 0 \vee 4 - 6x = 0$ Stellen mit waagrechter Tangente: $\quad x = 0 \vee x = \frac{2}{3}$ Mit $f''(0) = 4 > 0$ und $f(0) = 1$: $\quad T(0 \mid 1)$ Mit $f''(\frac{2}{3}) = -4 < 0$ und $f(\frac{2}{3}) = \frac{35}{27}$: $\quad H(\frac{2}{3} \mid \frac{35}{27})$
$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$; $x \in \mathbb{R}$ 	$f'(x)=0$; $f'(x) = x^3-2x$ (2) $\quad f''(x)=3x^2-2$ $\Rightarrow x^3-2x=0$ $\quad f''(0)<0 \Rightarrow HP$ $x(x^2-2)=0$ $\quad f''(\sqrt{2})>0 \Rightarrow TP$ $x_1=0$ $\quad x^2-2=0 \quad \mid +2$ $x^2=2 \quad \mid \sqrt{\ }$ $x_2=\pm\sqrt{2}$ $TP_1(-\sqrt{2} \mid -1)$ $HP(0 \mid 0)$ $TP_2(\sqrt{2} \mid -1)$
$f(x) = x - 2e^{0,25x}$; $x \in \mathbb{R}$ 	$f'(x) = -0,5e^{0,25x}+1$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{8}e^{0,25x}$ $0 = -0,5e^{0,25x}+1 \mid +0,5e^{0,25x}$ $\quad f''(2,77) = -\frac{1}{4} < 0 \to HP$ $1 = 0,5e^{0,25x} \quad \mid :0,5$ $2 = e^{0,25x} \quad \mid \ln$ $\quad HP(4 \mid \ln(2))$ $0,69 = 0,25x \quad \mid :0,25$ $\quad -1,227$ $2,77 = x$
$f(x) = \sin(2x) + 1$; $x \in [0; \pi]$ 	$HP = (\frac{\pi}{4} \mid 2)$ $TP = (\frac{3\pi}{4} \mid 0)$

1. Bestimmen Sie die Monotoniebereiche des Graphen von f mit Hilfe der Abbildung.

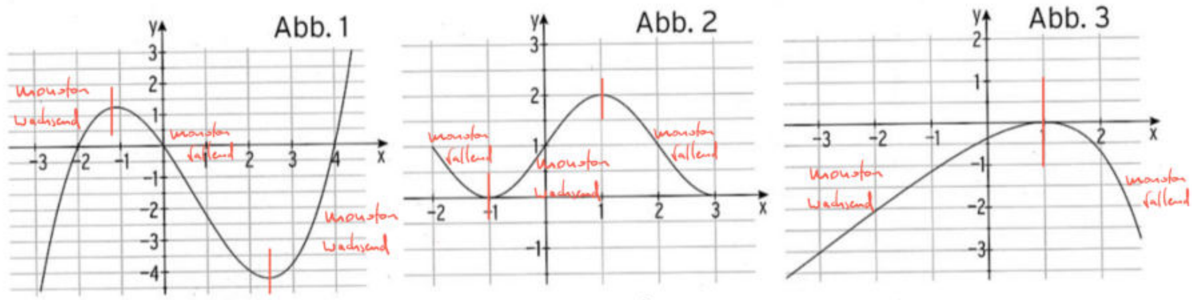
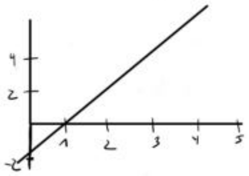


Abb. 1: $-1{,}2\ ;\ 2{,}5$ Abb. 2: $-1\ ;\ 1$ Abb. 3: 1

2. Zeigen Sie, f mit $f(x) = x^2 - 2x$, ist auf [1; 5] monoton wachsend.

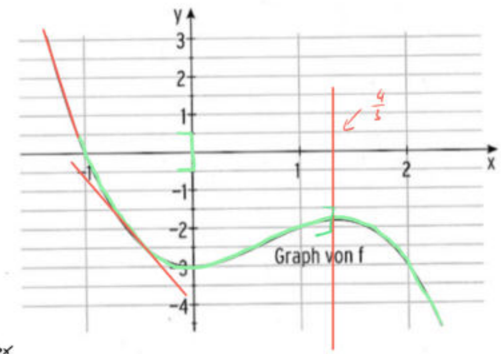
Ableitung: $f'(x) = 2x - 2$

$0 = 2x - 2 \quad |+2$
$2 = 2x \quad |:2$
$1 = x$



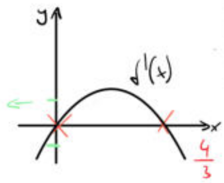
$f(x)$ ist monoton wachsend

3. Zeigen Sie, f mit $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3$ ist für $x < 0$ monoton fallend.



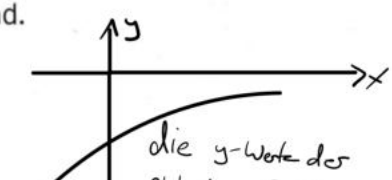
Ableitung: $f'(x) = -3x^2 + 4x$

$0 = -3x^2 + 4x$
$0 = x(-3x+4)$
$x_1 = 0$ $\quad -3x+4 = 0 \quad |+3x$
$4 = 3x \quad |:3$
$x_2 = \frac{4}{3}$



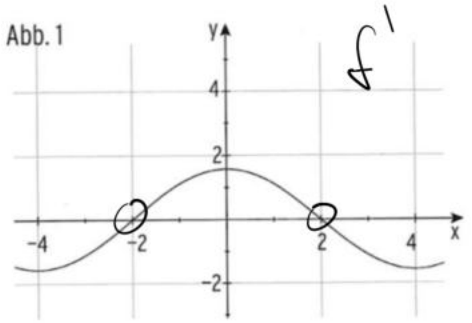
4. Zeigen Sie, f mit $f(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + 1$, ist auf ℝ monoton fallend.

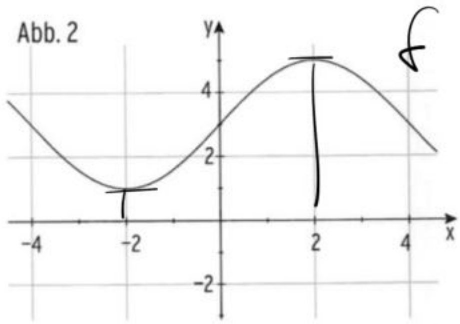
Ableitung: $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ →



die y-Werte der Ableitungsfunktion sind durchgängig fallend!

2. Die folgenden Abbildungen 1 und 2 zeigen die Schaubilder einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion. Welches Schaubild gehört zur Funktion, welches zur Ableitungsfunktion? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

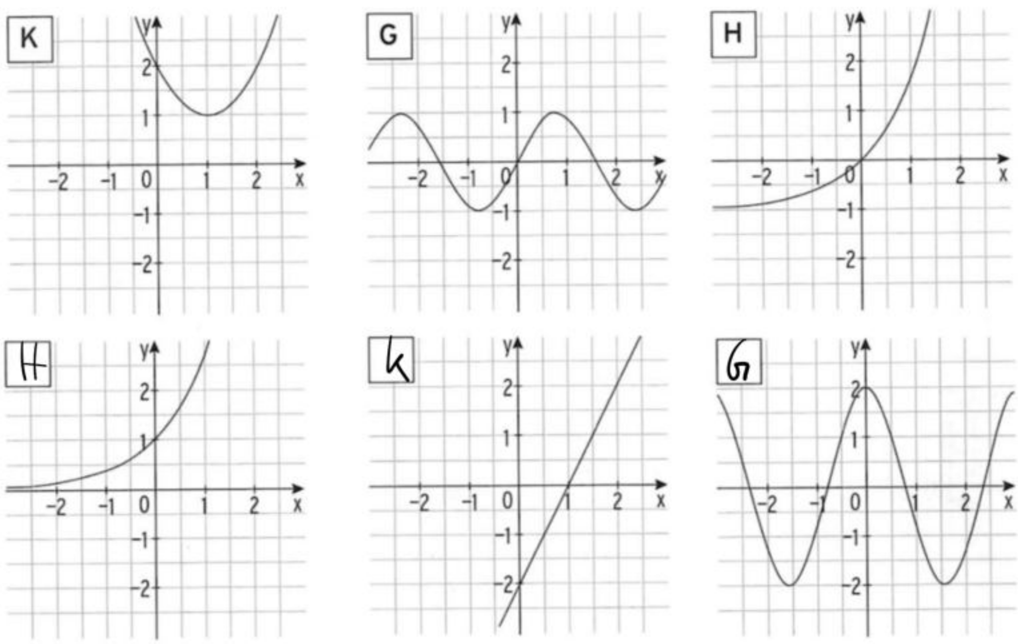




Zuordnung: Abb 1 f' ≙ Abb 2 f

Begründung: Siehe Skizze

3. Die Abbildungen zeigen die Schaubilder K von f, G von g und H von h und die Schaubilder der zugehörigen Ableitungsfunktionen. Ordnen Sie zu und begründen Sie.



Begründung: ____

Abb. 1

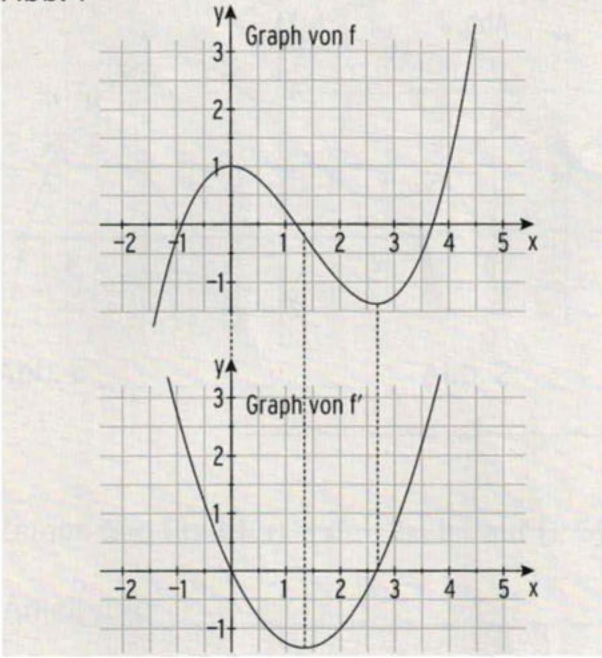
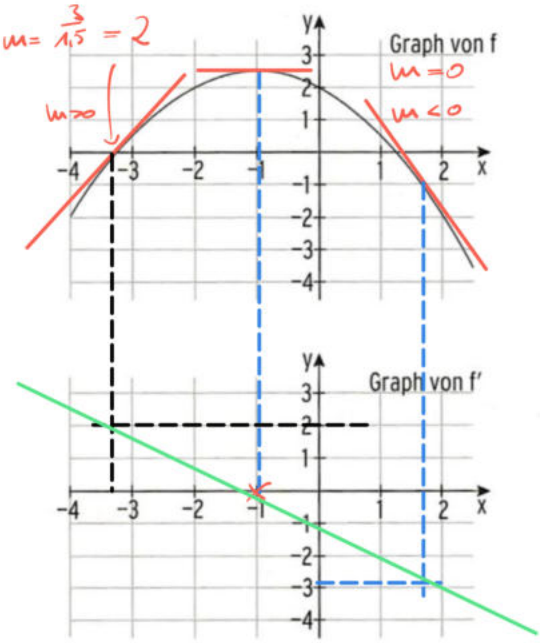


Abb. 2



$f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

Abb. 3

$f'(x) = -1 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

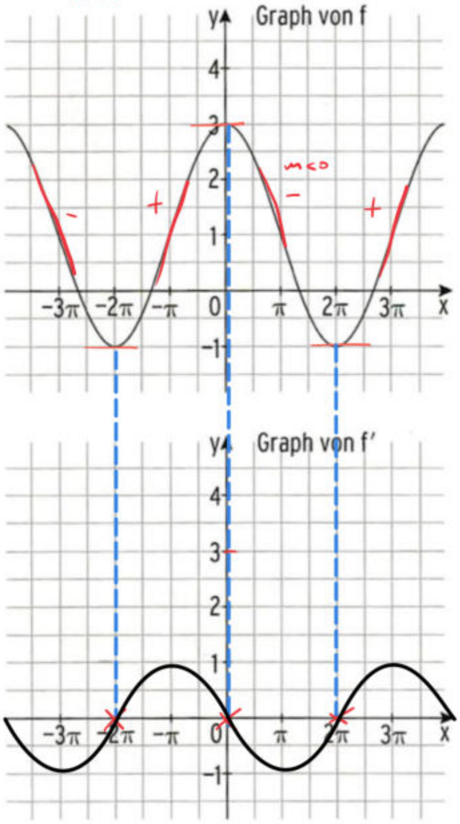
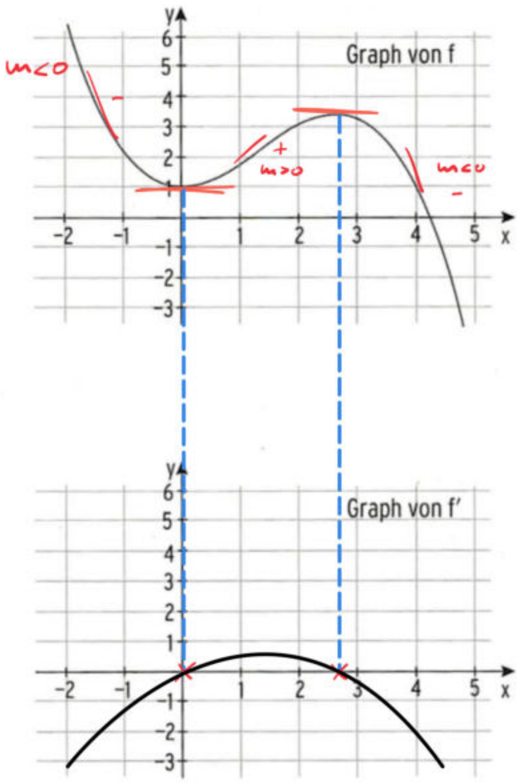


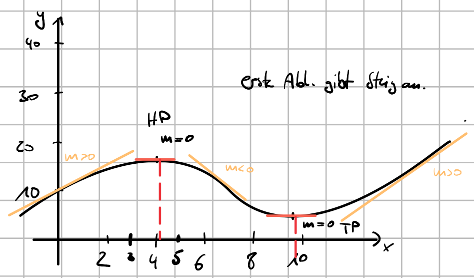
Abb. 4



Extrempunkte

Bsp: Verkaufszahlen von Bohrmaschinen

$$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 10x + \frac{17}{3}$$



Übergang des Verlaufs von

Wachsend zu fallend ⇒ HP

fallend zu wachsend ⇒ TP

⇒ Nachweis für Extrempunkt:

a) notwendig ⇒ $\boxed{f'(x) = 0}$

1 ⇒ $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 10}}{2 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{7}{2} \pm 1{,}5}{0{,}5}$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 10$$

b) Nachweis über Vorzeichenwechsel

⇒ VZW von + → −

↳ Hochpunkt HP

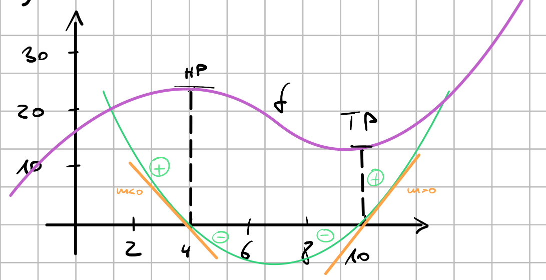
⇒ VZW von − → +

↳ Tiefpunkt TP

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$$

$x = 3$	$x = 5$
$y = 1{,}75$	$y = -1{,}25$
↑ positive Steigung	↑ negative Steigung

c) Nachweis über 2. Ableitung (hinreichend)



$f''(x) < 0 \Rightarrow HP$

$f''(x) > 0 \Rightarrow TP$

$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 10$

$f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ 4/10 einsetzen, für HP od. TP

$f''(x) = -\frac{3}{2} < 0 \rightarrow HP$ (4 eingesetzt)

$f''(x) = +\frac{3}{2} > 0 \rightarrow TP$ (10 eingesetzt)

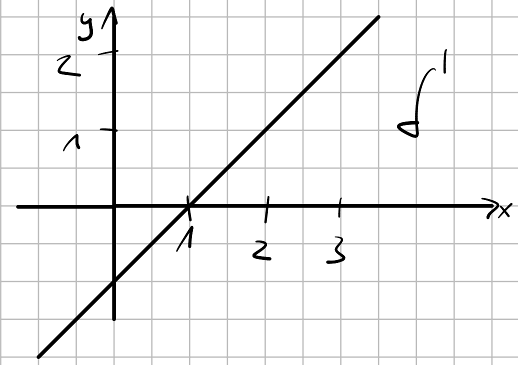
S. 246

(2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

monoton wachsend für $x \geq 1$?

→ (1) Ableitung bilden

⇒ $f'(x) = x - 1$

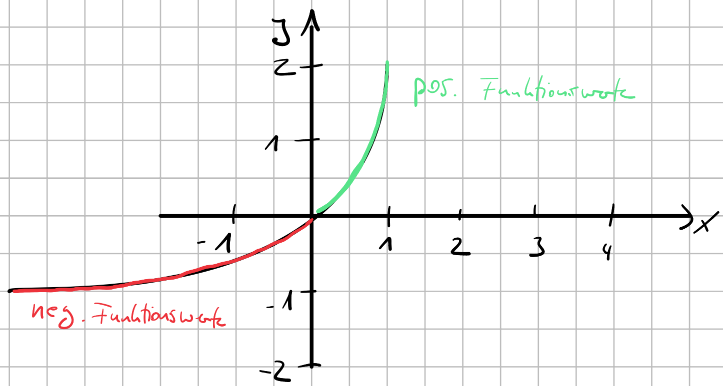


f ist monoton wachsend für $x \geq 1$, da $f'(x) \geq 0$ für $x \geq 1$

(3)

$f(x) = e^x - x$

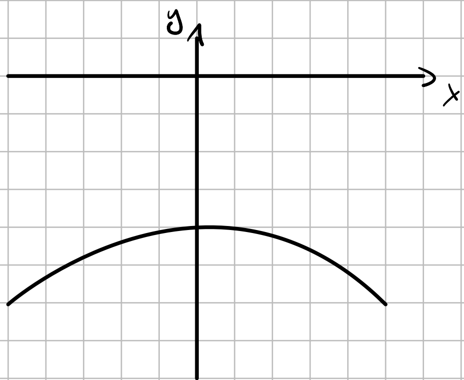
$f'(x) = e^x - 1$



(4)

a) $f(x) = -x^3 - 2x + 3$

$f'(x) = -3x^2 - 2$



$f'(x) < 0$

für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{3}{5}x^5 + x^3 + 4$

$f'(x) = 3x^4 + 3x^2$

nur positive Werte: monoton steigend

c)

immer monoton fallend

$$f(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - 9x\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{6} x 3 - \frac{3}{2} x = \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2}$$

$$0 = \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} \quad \Big| + \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} x^2 \quad | \cdot 2$$

$$3 = x^2 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

① Schritt:
Funktion ableiten und Null setzen

$$f''(x) = 1x$$

$x_1 = \sqrt{3} > 0$ Tiefpunkt $\rightarrow (\sqrt{3} \mid -\sqrt{3})$

$x_2 = -\sqrt{3} < 0$ Hochpunkt $\rightarrow (-\sqrt{3} \mid \sqrt{3})$

② Schritt
Ergebnisse in 2. Ableitung einsetzen

Einsetzen

$$y_1 = \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}^3 - 9 \cdot \sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$y_2 = \frac{1}{6}\left(-\sqrt{3}^3 - 9 \cdot (-\sqrt{3})\right) = \sqrt{3}$$

③ Schritt:
Werte einsetzen und y-Wert bekommen.

Bestimmen von Extrempunkten

① Funktion 2× Ableiten

② 1. Ableitung $=0$ setzen

③ Ergebnisse in die 2. Abl. einsetzen

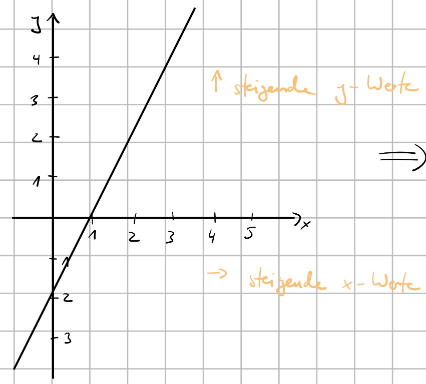
$\Rightarrow$ $f''(x) > 0 \rightarrow$ TP

$f''(x) < 0 \rightarrow$ HP

④ Ergebnisse aus ② in f einsetzen und y-Koordinate berechnen.

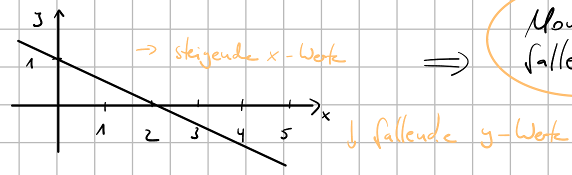
Monotonie

Bsp 1: $f(x) = 2x - 3$



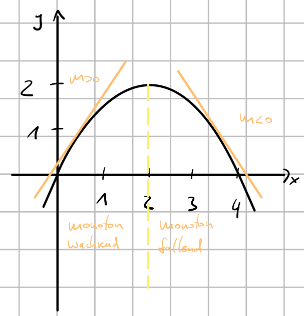
$\Rightarrow$ Monoton wachsend

Bsp. 2: $f(x) = -0{,}5x + 1$



$\Rightarrow$ Monoton fallend

Bsp. 3: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$



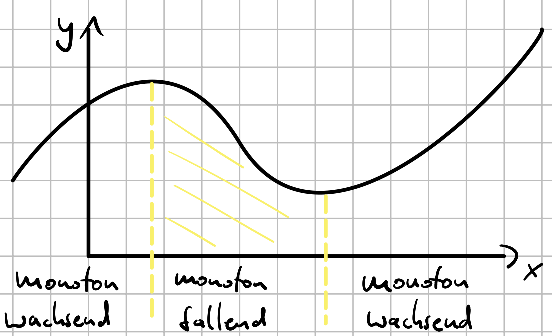
Definition:

Gilt auf einem Bereich I (intervall):

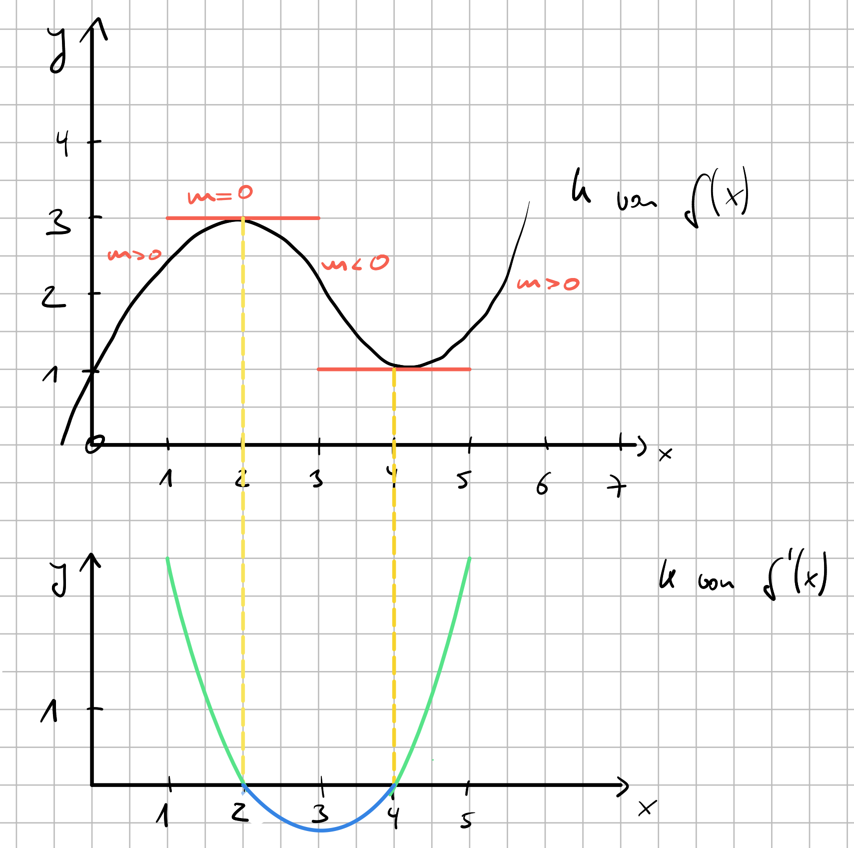
$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ so heißt die Funktion monoton wachsend

$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ so heißt die Funktion monoton fallend

$\Rightarrow$ Monotonieuntersuchung:



Graphisches Differenzieren



Merke:

K ist das Schaubild von $f(x)$.
$f(x)$ ist der y-Wert von K
$f'(x)$ ist die Steigung von K an einer Stelle x.

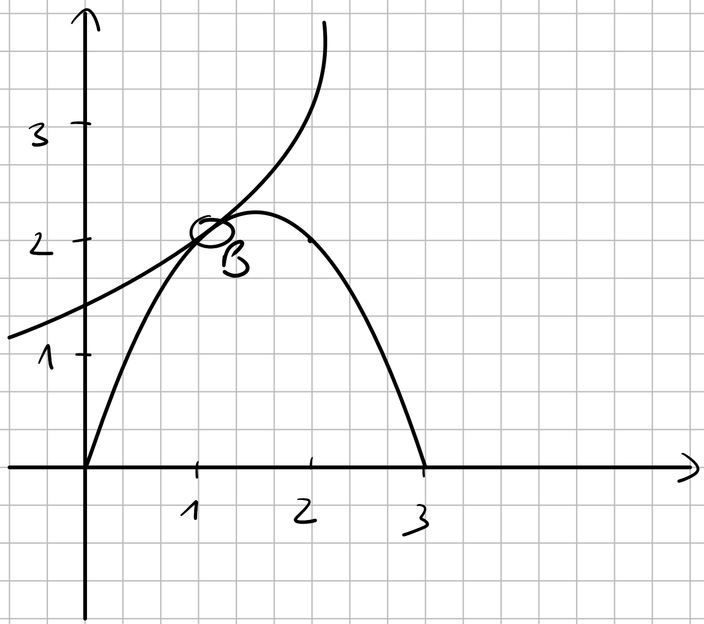
Die Funktionswerte der Ableitungsfunktion $f'(x)$ sind die Steigungswerte von K.

Berührpunkte von Funktionsgraphen

Bsp:

$f(x) = \frac{1}{e} e^x + 1$

$g(x) = -x^2 + 3x$



Schnittpunkte: ?

$\Rightarrow f(x) = g(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{e} e^x + 1 = -x^2 + 3x \quad | + x^2 - 3x$

$\frac{1}{e} e^x + x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Rightarrow$ Lsg. durch Probe z.B. $x = 1$

$\frac{1}{e} e^1 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow f(1) = g(1)$

$\frac{1}{e} e^2 + 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 0$ ↯

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{e} e^x$

$\Rightarrow g'(x) = -2x + 3$

$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{e} e^1 = 1$

$\Rightarrow g'(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$

Der Berührpunkt B ist ein <u>gemeinsamer</u> Punkt von f und g mit <u>gleicher</u> Steigung

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f'(x) &= g'(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Berührpunkt}$$

Senkrechtes schneiden von Kurven

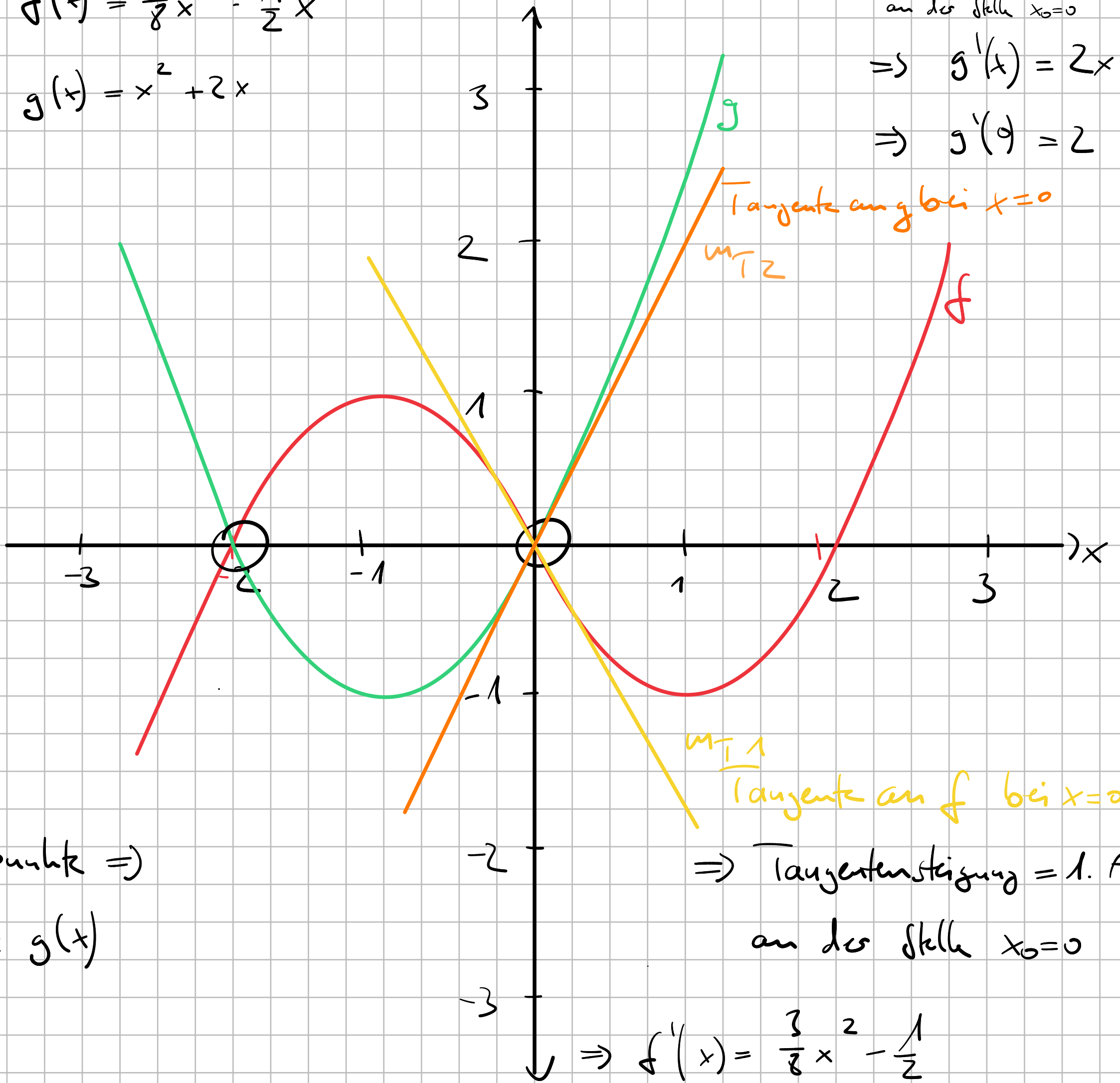
Bsp: $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x$

$g(x) = x^2 + 2x$

$\Rightarrow$ Tangentensteigung = 1. Ableitung an der Stelle $x_0=0$

$\Rightarrow g'(x) = 2x + 2$

$\Rightarrow g'(0) = 2$



Schnittpunkt $\Rightarrow$

$f(x) = g(x)$

$\Rightarrow$ Tangentensteigung = 1. Ableitung an der Stelle $x_0=0$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x = x^2 + 2x \quad | -x^2 - 2x$

$\frac{1}{8}x^3 - x^2 - \frac{5}{2} = 0$

$x\left(\frac{1}{8}x^2 - x - \frac{5}{2}\right) = 0$

$\downarrow$ $x_1 = 0$

$\hookrightarrow x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-\frac{5}{2})}}{1/4}$

$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{1 \pm \frac{3}{2}}{1/4}$

$x_2 = -2$

$x_3 = 10$

$m_{T1} = -\frac{1}{2}$

$m_{T2} = 2$

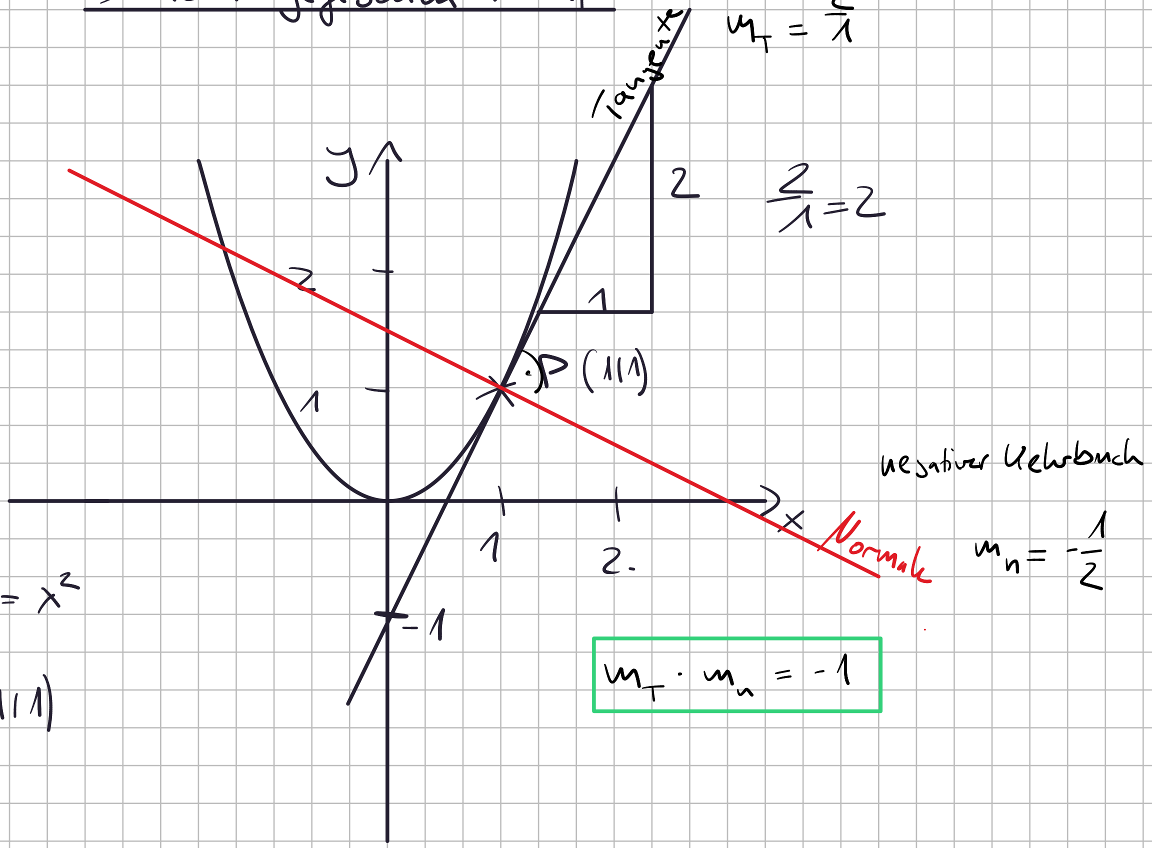
$-\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$ Wahr

$\Rightarrow$ Liegen im Rechten Winkel zueinander

f und g schneiden sich senkrecht, wenn die Tangenten im Schnittpunkt senkrecht aufeinander stehen. es gilt:

$$\boxed{f(x_s) = g(x_s) \text{ und } f'(x_s) \cdot g'(x_s) = -1}$$

Aufstellen einer Tangentengleichung in einem gegebenen Punkt



Bsp. $f(x) = x^2$

Punkt $P(1|1)$

$\boxed{m_T \cdot m_n = -1}$

① Ableitung bilden : $f'(x) = 2x$

② Tangentengleichung : $y = m_T x + b$

$\Rightarrow m_T = f'(x) \Rightarrow m_T = f'(1) = 2$

③ $y = 2x + b$

$1 = 2 \cdot 1 + b \quad | -2$

$-1 = b$

④ $y = 2x - 1$

ges : Normalengleichung

① Ableitung bilden $\Rightarrow f(x) = 2x$

② Ableitung an der Stelle x_0 bestimmen $\Rightarrow f'(1) = 2 = m_T$

$m_n = -\frac{1}{2}$ (neg. Kehrbruch)

③ $y = -\frac{1}{2}x + b$

$\Rightarrow$ Punktprobe $1 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b \quad | + \frac{1}{2}$

$b = \frac{3}{2}$

$y_n = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

227

1

a) $f(x) = 2e^{3x}$ $\quad f'(x) = 3 \cdot 2e^{3x} = 6e^{3x}$

b) $f(x) = 5e^{-x}$ $\quad f'(x) = -1 \cdot 5e^{-x} = -5e^{-x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ $\quad f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} = 1e^{2x}$

d) $f(x) = \frac{3}{2}\sin(3x)$ $\quad f'(x) = \frac{3}{2}\cos(3x) \cdot 3 = \frac{9}{2}\cos(3x)$

e) $f(x) = \cos(6x) + 1$ $\quad f'(x) = -\sin(6x) \cdot 6 = -6\sin(6x)$

f) $f(x) = -\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ $\quad f'(x) = -\sin\left(\frac{x}{3}\right) \cdot 3 = -3\sin\left(\frac{x}{3}\right)$

g) $f(x) = 4\sin(\pi x)$ $\quad f'(x) = 4\cos(\pi x) \cdot \pi = 4\pi\cos(\pi x)$

h) $f(x) = 2 - \cos(0{,}5x)$ $\quad f'(x) = -\sin(0{,}5x) \cdot 0{,}5 = -0{,}5\sin(0{,}5x)$

Die Kettenregel

Bsp: $f(x) = \underbrace{\sin(\overset{\text{lineare Fkt.}}{2x})}_{\text{trigonometrische Fkt.}} \Rightarrow f(x) = h(u(x))$

verkettete Funktion

ges: neue Regel

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{h(u(x_2))-h(u(x_1))}{x_2-x_1} \Rightarrow f'(x) = h'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$= \frac{h(u(x_2))-h(u(x_1))}{x_2-x_1} \cdot \underbrace{\frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_2)-u(x_1)}}_{=1}$$

Merke:
äußere Ableitung
mal
innere Ableitung

$$= \underbrace{\overset{1}{\frac{h(u(x_2))-h(u(x_1))}{u(x_2)-u(x_1)}}}_{= h'(u(x))} \cdot \underbrace{\overset{2}{\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}}}_{= u'(x)}$$

$$\left\{ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{c \cdot b} \right.$$

224

(3) a) $f'(x) = 3\cos(x) - 4$ b) $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$ c) $f'(x) = x^3 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{8}{5}x$

d) $f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{7}$ e) $f'(x) = -4x^3 - 12x$ f) $f'(x) = -\frac{10}{6}x + \frac{2}{3}$

g) $= -(x^2 - 12x + 36)(x+1)$

$= -(x^3 - 1x^2 - 12x^2 - 12x + 36x + 36)$

$= -(x^3 - 11x^2 + 24x + 36)$

$= -x^3 + 11x^2 - 24x - 36$

$f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$

h) $f(x) = 0{,}5(x^2 - 2)^2$

$= 0{,}5(x^4 - 4x^2 + 4)$

$= 0{,}5x^4 - 2x^2 + 2$

i) $f'(x) = \frac{5}{16}x^4 + \frac{3}{16}x^2$

j) $A'(u) = 3u^2 - 3u - u$

k) $l'(t) = 0{,}5t^3 - 3t$

l) $f'(x) = \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\right) \cdot (x^2 - 12x + 16)$

$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 12x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{7}{2}x + 2$

$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{26}{8}x + \frac{7}{2}$

m) $f'(x) = 2ax + b$

n) $h'(x) = 2ax^2 + 2bx + c$

(4) a) $f'(x) = 6e^x$ b) $f'(x) = -7e^x$ c) $f'(x)$ $x + 4 + 5e^x$

d) $f'(x) - \frac{3}{4}e^x - e$ e) $f'(x) = -3e^x$ f) $f'(x) = \frac{1}{4}e^x - 15x^2$

(5) a) $f'(x) = 2 - 3\cos(x)$ b) $f'(t) = 2t^3 - 1 - 5\sin(t)$

c) $f'(x) = -4\sin(x) - 8\cos(x)$ d) $A'(u) = -\frac{1}{2}\cos(u)$

$f(x) = x^3$ $\qquad\qquad$ $x_0 = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)\cdot(1+h)\cdot(1+h) - 1}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+2h+h^2) - 1}{h}$$ $\qquad$ $x_0 = 2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{h}^1 + 2\cancel{h} + 2h^{\cancel{2}} + h^{\cancel{2}} + h^{\overset{3}{\cancel{3}}} - \cancel{1}}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h \to 0} 3 + 3h + h^2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \to 0} 3 + 3h + h^2 = \underline{\underline{3}}$$

Ableitungsregeln

1.) Ableiten von Potenzfunktionen

Bsp. $f(x) = x^2$

Wertetabelle $f(x)$

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

x	m_T
1	2
2	4
3	6
4	8

$m_T = 2x$

Ableitungsberechnung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)^2 - 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}$$

Regel: „Alte" Hochzahl als Faktor vor x "setzen", „neue" Hochzahl = „alte" Hochzahl -

Ableitungsregel für $f(x) = e^x$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Ableitungsregel für trigonom. Funktionen

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = x \Rightarrow f(x) = 1 x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$$

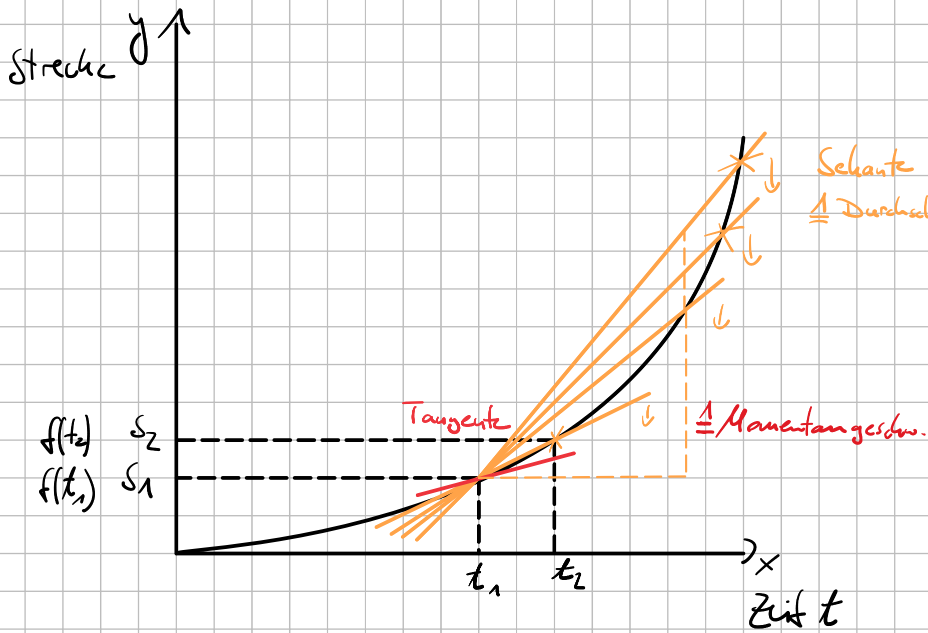
⋮

Einführung in die Differenzialrechnung

Bsp: Geschwindigkeitsmessung

a) Messung der Durchschnittsgeschwindigkeit
(z.B. Streckenabschnittsmessung bei der Durchfahrt eines Tunnels.)

b) Messung der Momentangeschwindigkeit
(z.B. Radargerät am Ortseingang)



Geschw. $= \frac{s}{t}$

Gesucht: Geschwindigkeit zur Zeit t_1

Problem: Die Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ kann an der Stelle t_1 nicht berechnet werden, weil zu einem einzelnen Zeitpunkt die Strecke $= 0$ ist.

Lösung: Man lässt den zweiten Punkt in Richtung des ersten Punktes wandern, die Steigungsdreiecke werden in Folge immer kleiner.
→ Schließlich liegen die beiden Punkte aufeinander. Aus der Sekante wird eine Tangente.

→ Die Steigung der Tangente lässt sich mit folgendem Ausdruck beschreiben:

$$\boxed{m_T = \lim_{t_2 \to t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

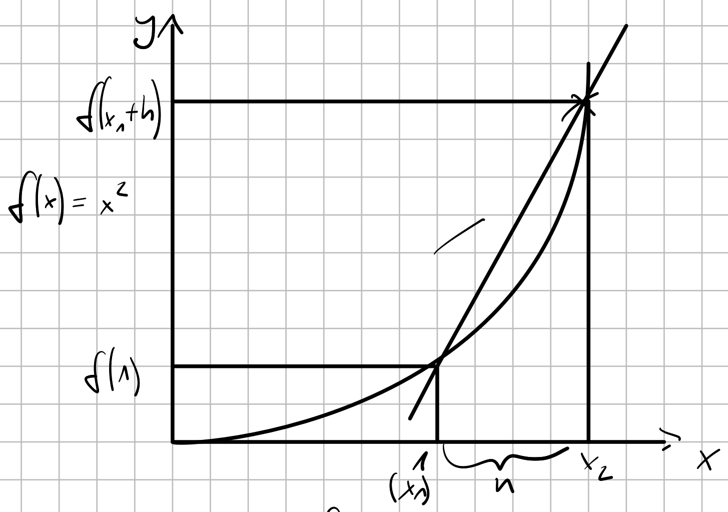
lim = limes
Grenzwert

Differentialquotient

allgemein:

$$m_T = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Die Ableitung



$$m_S = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1}$$

$$= \frac{(1+h^2) - 1^2}{h} = \frac{\cancel{1} + 2\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{1}}{\cancel{h}}$$

$$= 2+h \Rightarrow \lim_{h \to 0} 2+h = 2 = m_S$$

S. 211

(1)

$$2a + 1{,}5k + 3b = 950$$
$$3a + 6k + 2{,}5b = 1590$$
$$a + k + b = 420$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 2 & 1{,}5 & 3 & 950 \\ 3 & 6 & 2{,}5 & 1590 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 110 \\ 0 & 3 & -0{,}5 & 330 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 6 \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 420 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & 5{,}5 & 990 \end{array}\right)$$

$$5{,}5b = 990 \quad |:5{,}5$$
$$\underline{b = 180}$$

$$-0{,}5k + 1 \cdot 180 = 110 \quad |-180$$
$$-0{,}5k = -70 \quad |:(-0{,}5)$$
$$\underline{k = 140}$$

$$1a + 1 \cdot 140 + 1 \cdot 180 = 420 \quad |-320$$
$$a = 100$$

$$\underline{\underline{L = \begin{pmatrix} 100 \\ 140 \\ 180 \end{pmatrix}}}$$

(2)

$$0{,}1P1 + 0{,}15P2 + 0{,}25P3 = 1{,}2$$
$$0{,}2P1 + 0{,}3P2 + 0{,}1P3 = 2$$
$$10P1 + 10P2 + 20P3 = 100$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}25 & 1{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 2 \\ 10 & 10 & 20 & 100 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -\cdot(-0{,}2) \quad -\cdot(-100) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}25 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & -0{,}4 & -0{,}4 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{500}{27} \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}25 & 1{,}2 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & -0{,}4 & -0{,}4 \end{array}\right) \quad \text{Zeilentausch}$$

$$\Rightarrow P3 = 1$$

$$-5P2 + -5\cdot 1 = -20 \quad |+5$$
$$-5P2 = -15 \quad |:(-5)$$
$$P2 = 3$$

$$0{,}1P1 + 0{,}15\cdot 3 + 0{,}25\cdot 1 = 1{,}2 \quad |-0{,}7$$
$$0{,}1P1 = 0{,}5 \quad |:0{,}1$$
$$P1 = 5$$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

0	2	4	6
18	30	42	102

$P1\ (0/18) \Rightarrow d = 18$

$P2\ (2/30)$

$P3\ (4/42)$

$P4\ (6/102)$

$\text{I} \quad 18 = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$

$\text{II} \quad 30 = a\cdot 2^3 + b\cdot 2^2 + c\cdot 2 + 18$

$\text{III} \quad 42 = a\cdot 4^3 + b\cdot 4^2 + c\cdot 4 + 18$

$\text{IV} \quad 102 = a\cdot 6^3 + b\,6^2 + c\cdot 6 + 18$

$\text{II.} \quad 30 = 8a + 4b + 2c + 18$

$\text{III.} \quad 42 = 64a + 16b + 4c + 18$

$\text{IV.} \quad 102 = 216a + 36b + 6c + 18$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 12 \\ 64 & 16 & 4 & 24 \\ 216 & 36 & 6 & 84 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-8) \quad \cdot(-27) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 12 \\ 0 & -16 & -12 & -72 \\ 0 & -72 & -48 & -240 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-4{,}5) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 2 & 12 \\ 0 & -16 & -12 & -72 \\ 0 & 0 & 6 & 84 \end{array}\right)$$

$$6c = 84 \quad |:6$$
$$\underline{c = 14}$$

$$-16b + -12 \cdot 14 = -72 \quad | + 168$$
$$-16b = 96 \quad |:(-16)$$
$$\underline{b = -6}$$

$$8a + 4 \cdot (-6) + 2 \cdot 14 = 12 \quad |-4$$
$$8a = 8 \quad |:8$$
$$\underline{\underline{a = 1}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = 1x^3 - 6x^2 + 14x + 18}}$$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

3. Das lineare Gleichungssystem wird mit dem Gaußverfahren gelöst. Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & \square \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \square \\ 0 & 0 & \square & -9 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & \square & -3 & 7 \\ 0 & -8 & \square & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \\ 0 & \square & 0 & \square \end{array}\right)$

4. Das lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3 hat genau eine Lösung. Bestimmen Sie die Lösung.

a) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$	$3x_3 = -3;\ x_3 = -1$ $2x_2 = 3;\ \ x_2 = 1{,}5$ eingesetzt in $x_1 + 2x_3 = 1$ ergibt: $x_1 + 2 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow x_1 = 3$	Lösung: (3; 1,5; − 1) oder: $x_1 = 3;\ x_2 = 1{,}5;\ x_3 = -1$
b) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$		

5. Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

a) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	Wählen Sie: $x_3 = r$ Eingesetzt in $x_2 - x_3 = 2$: $\ x_2 = 2 + r$ Eingesetzt in $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $x_1 - 2\,(2 + r) + r = 0$: $\ x_1 = 4 + r$	Lösung: $(4 + r;\ 2 + r;\ r)$ oder: $x_1 = 4 + r;\ x_2 = 2 + r;$ $x_3 = r$
b) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$x_3 = r$ $\Rightarrow 1x_2 + 2r = 4 \Rightarrow x_2 = 4 - 2r$ $\Rightarrow x_1 + (4 - 2r) + r = 0$ $x_1 + 4 - r = 0 \Rightarrow x_1 = -4 + r$	$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -4+r \\ 4-2r \\ r \end{pmatrix}$
c) $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	$x_3 = r$ $\Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow 2x_2 = 4 \mid :2 \ \ \underline{x_2 = 2}$ $\Rightarrow x_1 - 1 \cdot (2) + r = 5$ $x_1 - 2 + r = 5 \quad \mid +2 - r$ $x_1 = 7 - r$	$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 7-r \\ 2 \\ r \end{pmatrix}$

2. Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch die Punkte A, B und C. Bestimmen Sie den Funktionsterm der quadratischen Funktion.

a) A(1 | 1), B(3 | 3) und C(− 2 | 1)

Lösung durch Punktprobe in $f(x) = \underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c}$:

A(1 | 1):	$a + b + c = 1$	
B(3 | 3):	$9a + 3b + c = 3$	LGS für a, b, c
C(−2 | 1):	$4a - 2b + c = 1$	

LGS in Matrixform: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\cdot(-9)$ $\cdot(-4)$

Lösung mit dem Gauß-Verfahren: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right)$ $\cdot(-1)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right)$

Aus Zeile 3: $c = \frac{3}{5}$; Einsetzen von c in Zeile 2: $-6b - 8 \cdot \frac{3}{5} = -6 \quad \Rightarrow b = \frac{1}{5}$

Einsetzen von b und c in Zeile 1: $a + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 1 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{5}$

Funktionsterm der quadratischen Funktion: $f(x) = 0{,}2x^2 + 0{,}2x + 0{,}6$

b) A(1 | 2), B(2 | 4) und C(3 | 6,5)

1. Lösung durch Punktprobe in $f(x) = ax^2 + bx + c$:

A(1 | 2):	$a + b + c = 2$	
B(2 | 4):	$4a + 2b + c = 4$	LGS für a, b, c
C(3 | 6,5):	$9a + 3b + c = 6{,}5$	

2. Schreiben Sie das LGS in Matrixform $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 1 & 6{,}5 \end{array}\right)$

3. Lösung mit dem Gauß-Verfahren: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -8 & -11{,}5 \end{array}\right)$ $-\cdot(-4)$ $+$ $\cdot(-9)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right)$ $-\cdot(-3)$ $+$

Aus Zeile 3 $c = 0{,}5$

Einsetzen von c in Zeile 2: $-2b - 3 \cdot 0{,}5 = -4 \quad \Rightarrow b = 1{,}25$

Einsetzen von b und c in Zeile 1: $1a + 1{,}25 + 0{,}5 = 2 \quad \Rightarrow a = 0{,}25$

Funktionsterm der quadratischen Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

Mehrdeutig lösbare LGS

Bsp.

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$-7x_2 + 7x_3 = 14$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = -5$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ -1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :7 \leftarrow \\ \\ \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(2) \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$

$\Rightarrow 0 = 0$

gilt für alle x

aus III

$\Rightarrow x_3 = r$

$\Rightarrow$ II $\Rightarrow -x_2 + r = 2$

$-x_2 = 2 - r \quad | \cdot(-1)$

$x_2 = -2 + r$

$\Rightarrow$ in I $\Rightarrow -x_1 + (-2+r) + r = 1$

$-x_1 - 2 + r + r = 1$

$-x_1\ 1 - 2r = 1 \quad | +2-2r$

$-x_1 = 1 - 2r \quad | \cdot(-1)$

$x_1 = -1 + 2r$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -1+2r \\ -2+r \\ r \end{pmatrix}$$

$r = 4$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

LGS ist unlösbar

Bsp:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\
3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\
x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -3 & 2 & 2 \\
3 & 3 & -2 & 1 \\
1 & -6 & 4 & 3
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l}
\cdot(-3) \quad \cdot(-1) \\
+ \\
+
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -3 & 2 & 2 \\
0 & 12 & -8 & -5 \\
0 & -3 & 2 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\cdot\left(\frac{3}{12}\right) \\
+
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -3 & 2 & 2 \\
0 & 12 & -8 & -5 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}
\end{array}\right)
$$

?

↯

$$0 \cdot x_3 = -\frac{1}{4} \quad ↯$$

$$0 = -\frac{1}{4} \qquad \text{f.A.}$$

Regel: Ist ein Diagonalelement der umgeformten Koeffizientenmatrix gleich Null, so ist das LGS unlösbar.

Eindeutig lösbar

1. Lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \cdot(-2)\ \cdot 3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \cdot 3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 18 \end{array}\right)$

$3x_3 = 18 \Rightarrow x_3 = 6$

Einsetzen in $-x_2 - x_3 = 5$ ergibt:

$-x_2 - 6 = 5 \Rightarrow x_2 = -11$

Einsetzen in $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ergibt:

$x_1 - 11 + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$

Lösung: (5; − 11; 6)

b) ① $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 4 & 3 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \cdot 1{,}5$

② $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & -2{,}5 & 4{,}5 & 25{,}5 \end{array}\right) \cdot 2{,}5$

③ $\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -8 & -35 \\ 0 & 0 & -15{,}5 & -62 \end{array}\right)$

aus III $-15{,}5x_3 = -62 \mid :(-15{,}5)$

$x_3 = 4 \Rightarrow$ in II

$\Rightarrow 1x_2 - 32 = -35 \mid +32$

$x_2 = -3 \Rightarrow$ in I

$\Rightarrow 2x_1 - 3 + 20 = 13 \mid -17$

$2x_1 = -4 \mid :2$

$x_1 = -2$

$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4) \\ + \\ + \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -11 & -17 \\ 0 & 1 & 7 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} (:2) \\ + \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -11 & -17 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 1{,}5 \end{array}\right)$

$1{,}5x_3 = 1{,}5 \mid :1{,}5$

$\underline{x_3 = 1}$

$-2x_2 - 11 \cdot 1 = -17 \mid +11$

$-2x_2 = -6 \mid :(-2)$

$\underline{x_2 = 3}$

$1x_1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 5$

$1x_1 + 6 + 3 = 5$

$1x_1 + 9 = 5 \mid -9$

$1x_1 = -4$

$x_1 = -4$

$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

d) ① $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(2) \\ + \\ + \end{array} \cdot(-3)$

② $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-4) \\ + \end{array}$

③ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1{,}75 & -8{,}75 \end{array}\right)$

$-1{,}75x_3 = -8{,}75 \mid :-1{,}75 \quad \underline{= 5}$

$4x_2 - 1 \cdot 5 = 3$

$4x_2 - 5 = 3 \mid +5$

$4x_2 = 8 \mid :4$

$\underline{x_2 = 2}$

$1x_1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1$

$1x_1 + 2 - 5 = 1$

$1x_1 - 3 = 1 \mid +3$

$1x_1 = \underline{4}$

$\mathbb{L} = \{4; 2; 5\}$ ✓

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Eindeutig lösbar

Bsp:

Ein Erzeuger liefert 3 verschiedene Apfelsorten an einen Großhändler (B: Boskop; J: Jonathan; E: Elstar).

Folgende Tabelle zeigt die Liefermenge der letzten 3 Tage:

Tag	B	J	E (kg)	Zahlung (€)
1	40	40	100	320
2	80	40	20	240
3	40	80	40	240

ges: Wie hoch ist der Preis pro kilo für jede Apfelsorte?

R:

LGS

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & 40x_1 + 40x_2 + 100x_3 = 320 \\ 2. & 80x_1 + 40x_2 + 20x_3 = 240 \\ 3. & 40x_1 + 80x_2 + 40x_3 = 240 \end{array}}$$

Lösungsverfahren nach Gauß

Eindeutig lösbar

(1)

$$40x_1 + 40x_2 + 100x_3 = 320 \quad \rightarrow \cdot(-2)$$
$$80x_1 + 40x_2 + 20x_3 = 240 \quad + \quad \cdot(-1)$$
$$40x_1 + 80x_2 + 40x_3 = 240 \quad +$$

(2)

$$40x_1 + 40x_2 + 100x_3 = 320$$
$$0 - 40x_2 - 180x_3 = -400$$
$$0 + 40x_2 - 60x_3 = -80 \quad +$$

(3)

$$40x_1 + 40x_2 + 100x_3 = 320$$
$$\text{II} \quad 0 - 40x_2 - 180x_3 = -400$$
$$\text{III} \quad 0 + 0 - 240x_3 = -480 \quad |:(-240)$$

(*) aus III $\Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow$ in II eingesetzt $\Rightarrow -40x_2 - 180 \cdot 2 = -400$

$$\Rightarrow -40x_2 - 360 = -400 \quad |+360$$
$$-40x_2 = -40 \quad |:(-40)$$
$$x_2 = 1$$

$$40x_1 + 40 \cdot 1 + 100 \cdot 2 = 320$$
$$40x_1 + 240 = 320 \quad |-240$$
$$40x_1 = 80 \quad |:40$$
$$x_1 = 2$$

$\Rightarrow$ Lösungsvektor $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise

Eindeutig lösbar

$$
\begin{array}{cccc}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
40 & 40 & 100 & 320 \\
80 & 40 & 20 & 240 \\
40 & 80 & 40 & 240
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\rightarrow \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\
+ \\
+
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
40 & 40 & 100 & 320 \\
0 & -40 & -180 & -400 \\
0 & 40 & -60 & -80
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
+
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
40 & 40 & 100 & 320 \\
0 & -40 & -180 & -400 \\
0 & 0 & -240 & -480
\end{array}\right)
$$

Weiter Vorgehensweise wie $\ast$

S. 195

① a) $\cos(x) = -1 \quad | \arccos$

$x = \arccos(-1)$

$x = \pi$

$\rightarrow x_1 = \underline{\underline{\pi}}$

$x_2 = \underline{\underline{-\pi}}$ ↯

$\rightarrow x_3 = \pi + 2\pi = \underline{\underline{3\pi}}$

$\rightarrow x_4 = -\pi + 2\pi = \underline{\underline{\pi}}$

$x_5 = 5\pi$ ↯

b) $\sin(2x) = \frac{1}{2} \quad | \arcsin$

$2x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

$2x = \frac{1}{6}\pi \quad | :2$

$x = \frac{1}{12}\pi$

$\rightarrow x_1 = \frac{1}{12}\pi$

$\rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{5}{12}\pi$

$\rightarrow x_3 = \frac{1}{12}\pi + \pi = \frac{13}{12}\pi$

$x_4 = \frac{5}{12}\pi + \pi = \frac{17}{12}\pi$

c) $4\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad | :4$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad | \arccos$

$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\pi \quad | \cdot 2$

$x = \pi$

$x_1 = \pi$

$x_2 = -\pi$

$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$

$x_4 = -\pi + 4\pi = 3\pi$

$P = \frac{2\pi}{0{,}5x} \quad | \cdot 0{,}5x$

$0{,}5x = 2\pi \quad | :0{,}5$

$P = 4\pi$

② a)

$$f(x) = \overset{a}{\downarrow}{-4}\cos\left(\overset{b}{\downarrow}{\tfrac{2}{3}}x\right) \overset{d}{\downarrow}{+3}$$

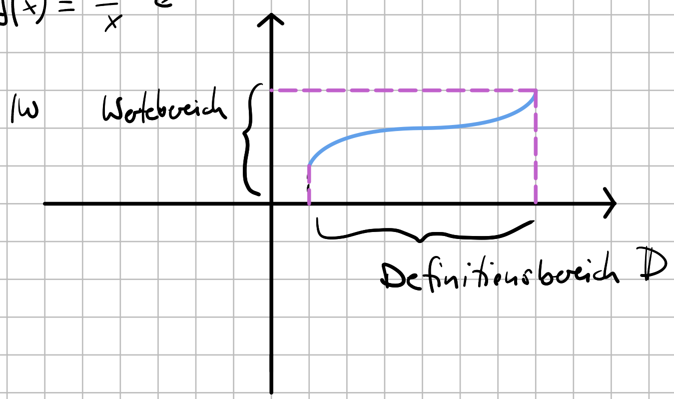
$a = 4$

$b = 3\pi \nearrow \frac{2\pi}{\frac{2}{3}}$

$d = 3$

$\mathbb{W} = [-1; 7]$

$f(x) = \frac{1}{x} \swarrow x \neq 0$



(1) Entstehung des Funktionsgraphen aus $f(x) = \cos(x)$ um den Faktor 4.

(2) Spiegelung an der x-Achse

(3) Verschiebung an der x-Achse um 3

(4) Streckung in x-Richtung um den Faktor 1,5

b)

$g(x) = a \sin(bx) + d$

Höchster Punkt $A(1|5)$
Tiefster Punkt $B(3|-2)$ } Benachbart

$a: \frac{5-(-2)}{2} = 3{,}5$

$b: \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$

$d: \frac{5+(-2)}{2} = 1{,}5$

P folgt aus:

x_H und $x_T \Rightarrow \frac{P}{2} = x_T - x_H$

$= 2$

$\Rightarrow P = 4$

$g(x) = 3{,}5 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) + 1{,}5$

c)

$f(x) = a\cos(bx) + d$

$a = \frac{1-(-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$P = \frac{2\pi}{4\pi}$

$b = \frac{1}{2}$

$d = \frac{1+(-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$$\underline{\underline{f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 1}}$$

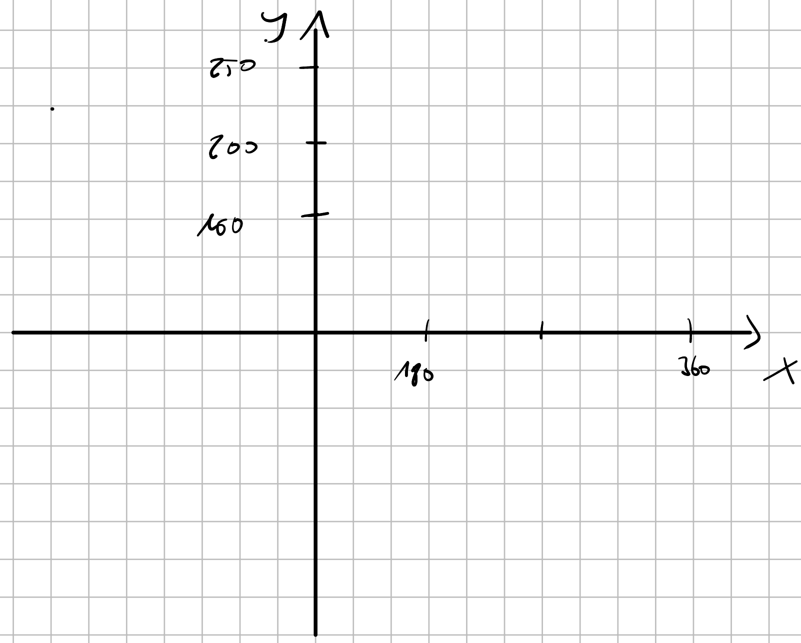
(3) $g(x) = -8 \sin(3x) - 2$

Wertebereich $W = [-10; 6]$

(4)

$f(t) = 50 \cos\left(\frac{\pi}{180} \cdot t\right) + 200 = 175$

$[0; 360]$



S. 193 Nr. 1

$f(t) = a \cdot \cos(k \cdot t) + b$

$a = \frac{y_H - H_T}{2}$

$a = \frac{51 - 1}{2} = 25$

$b = \frac{y_H + y_T}{2}$

$b = \frac{51 + 1}{2} = 26$

$k = 2\pi : 240 = \frac{\pi}{120}$

$\underline{\underline{f(t) = -25 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot t\right) + 26}}$

Wann wird die Höhe von 32 m erreicht?

$32 = -25 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot t\right) + 26 \quad | -26$

$6 = -25 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot t\right) \quad | : -25$

$-\frac{6}{25} = \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot t\right) \quad | \arccos$

$\arccos\left(-\frac{6}{25}\right) = \frac{\pi}{120} \cdot t$

$1,813 = \frac{\pi}{120} \cdot t \quad | : \frac{\pi}{120}$

$t_1 = \underline{\underline{69,257}}$

Nach 69,257 Sek hat man die Höhe von 32 m erreicht.

69,257

$P = 240$

$t_2 = -69,257$

$t_3 = -69,257 + 240 = 170,74$ Sek.

113 ②

$$f(x) = \underset{\uparrow\ \text{amplitude}}{a} \cdot \cos(\overset{\hat{=}\ \text{Periodendauer}}{b}x) + d$$

↑ Verschiebung in y-Richtung

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{y_H - y_T}{2} \\ d &= \frac{y_H + y_T}{2} \\ b &= \frac{2\pi}{P} \end{aligned}}$$

$$a = \frac{41{,}3 - 5{,}6}{2} = 17{,}85$$

$$d = \frac{41{,}3 + 5{,}6}{2} = 23{,}45$$

$$b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

↑ da 1 Tag

$$f(x) = 17{,}85 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 23{,}45$$

Wie lange steht die Sonne höher als 28 Grad

$$17{,}85 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 23{,}45 = 28 \quad | -23{,}45$$

$$17{,}85 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) = 4{,}55 \quad | : 17{,}85$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) = 0{,}254 \quad | \arccos$$

$$\frac{\pi}{12}x = \arccos(0{,}254)$$

$$\frac{\pi}{12}x = 1{,}313 \quad | : \frac{\pi}{12}$$

$$x = 5{,}015$$

$x_1 = 5{,}015$

$x_2 = -5{,}015$

$x_3 = 5{,}015 + 24 = 29{,}\ldots$

$x_4 = -5{,}015 + 24 = 18{,}985 \approx 19$

(3)

$$f(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + b$$

$$a = \frac{16{,}5 - 8}{2} = \underline{\underline{4{,}25}}$$

$$d = \frac{16{,}5 + 8}{2} = \underline{\underline{12{,}25}}$$

$$f(t) = 4{,}25 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 12{,}25$$

Tageslänge am 21 April

$\hookrightarrow f(1) = 4{,}25 \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) + 12{,}25 \approx 14{,}38$ Stunden

Tageslänge am 6. Juni

$\hookrightarrow f(3{,}5) = \dots \approx 16{,}35$ Stunden

(4)

$$f(t) = -1{,}5 \cos\left(\frac{2\pi}{5} t\right) + 3$$

$$a = \frac{4{,}5 - 1{,}5}{2} = 1{,}5$$

$$b = \frac{2\pi}{5} = 1{,}256$$

$$d = \frac{4{,}5 + 1{,}5}{2} = 3$$

$$-1{,}5 \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right) + 3 = 2{,}25 \quad | -3$$

$$-1{,}5 \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right) = -0{,}75 \quad | :(-1{,}5)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot t\right) = 0{,}5 \quad | \arccos$$

$$\frac{2\pi}{5} \cdot t = \arccos(0{,}5)$$

$$\frac{2\pi}{5} \cdot t = \frac{1}{3}\pi \quad | : \frac{2\pi}{5}$$

$$t_1 = \frac{5}{6} \approx 0{,}833$$

$$t_2 = -\frac{5}{6} + P = \frac{25}{6}$$

$$t_3 = \frac{35}{6}$$

15. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $2\sin(x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(x) = 0{,}5$	c) $2\sin(x) = -1 \mid :2$	d) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mid \arccos$
$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ mithilfe der Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$	WTR: $x = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x = -\frac{\pi}{3} \notin [0; 2\pi]$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$	$\sin(x) = -\frac{1}{2} \mid \arcsin$ $x = \arcsin(-\frac{1}{2})$ $x = -\frac{1}{6}\pi$ $x_1 = -\frac{1}{6}\pi$ $x_2 = \frac{P}{2} - x_1$ $= \pi - (-\frac{1}{6}\pi) = -\frac{5}{6}\pi$ $x_3 = x_1 + P = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ $x_4 = x_2 + P = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{7}{6}\pi$	$x = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$ $x = \frac{1}{6}\pi$ $x_1 = \frac{1}{6}\pi$ $x_2 = -\frac{1}{6}\pi$ $x_3 = \frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{1}{6}\pi$ $x_4 = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$

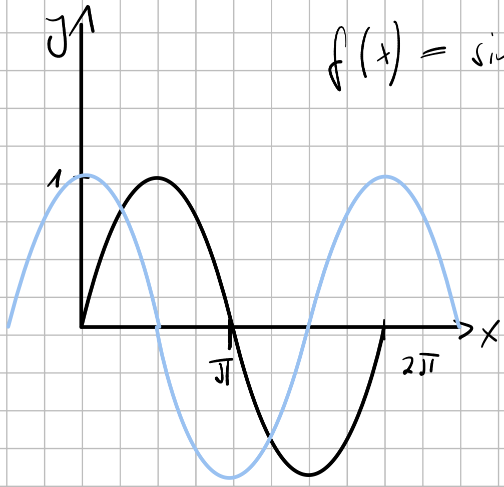
16. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $2\sin(2x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(\frac{x}{2}) = 0{,}5$	c) $2\sin(\frac{\pi}{3}x) = -1 \mid :2$	d) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \mid \arccos$
$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{4}$ Mit der Sinuskurve: $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ Mit $z = 2x$: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ Periode $p = \pi$: $x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ $x = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11}{8}\pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ $x_3 = \frac{9\pi}{8}$; $x_4 = \frac{11\pi}{8}$	WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1\|2} = \pm\frac{2\pi}{3}$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ ($x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi > 2\pi$ keine Lösung)	$\sin(\frac{\pi}{3}x) = -\frac{1}{2} \mid \arcsin$ $\frac{\pi}{3}x = \arcsin(-\frac{1}{2})$ $\frac{\pi}{3}x = -\frac{1}{6}\pi \mid :\frac{\pi}{3}$ $x = -\frac{1}{2}$ $\boxed{P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}}$ $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = -\frac{6}{2} - (-\frac{1}{2})$ $x_2 = -2{,}5$ $x_3 = -\frac{1}{2} + 6 = 5{,}5$ $x_4 = -2{,}5 + 6 = 3{,}5$	$2x = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$ $2x = \frac{1}{6}\pi \mid :2$ $x = \frac{1}{12}\pi$ $x_1 = \frac{1}{12}\pi$ $x_2 = -\frac{1}{12}\pi$ $x_3 = \frac{1}{12}\pi + \pi = \frac{13}{12}\pi$ $x_4 = -\frac{1}{12}\pi + \pi = \frac{11}{12}\pi$ $x_5 = \frac{25}{12}\pi$ $x_6 = \frac{23}{12}\pi$

$\boxed{P: \frac{2\pi}{2} = \pi}$

17. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	b) $\sin(\frac{\pi}{4}x) = 0$	c) $\cos(\frac{x}{3}) = -0{,}5$	d) $\cos(2x) = 0$



$f(x) = \sin(x)$

$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

allgemeine Sinusfunktion: y-Achsen-Verschiebung

$$f(x) = a \sin(b(x-c)) + d$$

Amplitude – wie hoch der Bogen geht.

Verschiebung auf x-Achse.

Streckung in x-Richtung

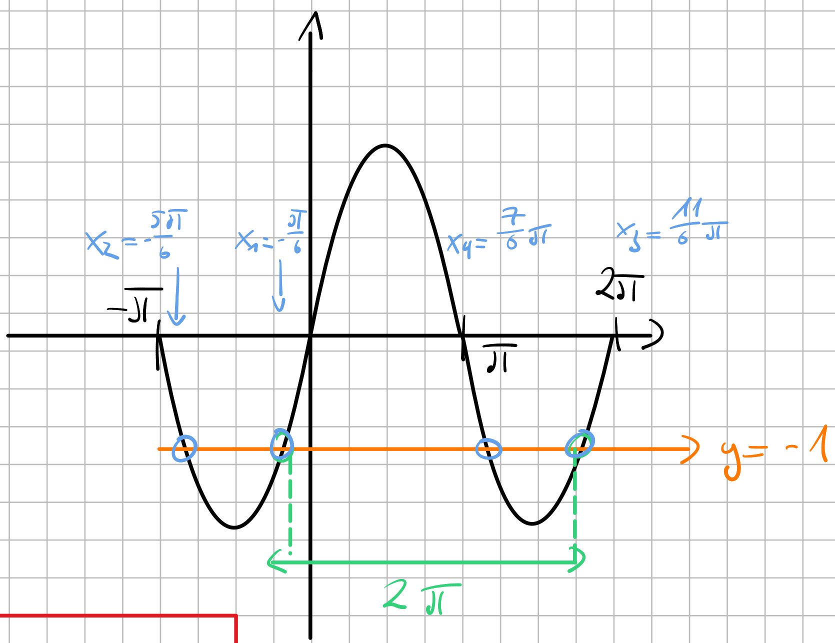
$(1 \cdot x)$ $a = 14$

$$f(x) = 14 \sin(x)$$

$$f(x) = 7$$

$$\Rightarrow 14 \sin(x) = 7$$

$$x_2 = -\frac{P}{2} - x_1$$
$$= -\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= -\frac{5\pi}{6}$$

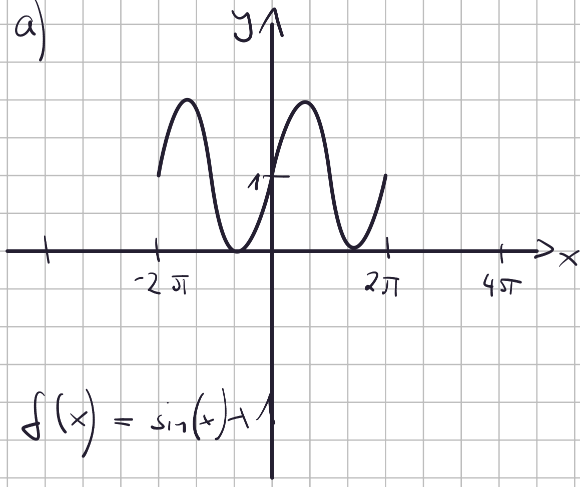


sin:	cos:
$x_2 = \pm \frac{P}{2} - x_1$	$x_2 = -x_1$

S. 175

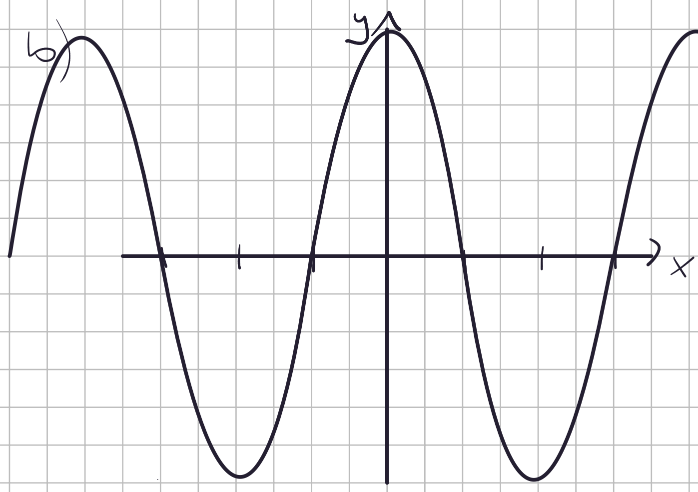
① a) $f(x) = 3\sin(x)$ ← Amplitude   b) Amp: 2   c) −5   d) 4   e) −6   f) −2

② a)



$f(x) = \sin(x) + 1$

b)



$f(x) = 3\cos(2x)$

176

⑪ a) → B
b) → A
c) → C

⑫ a) nicht verschoben
b) Amplitude
c) Amplitude

⑬ $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

$f(x) = 2{,}5\cos(4x)$

$f(x) = 2\cos($

1. Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe des WTR.

$\cos(x) = 0{,}88 \quad | \arccos$

$\arccos(\cos(x)) = \arccos(0{,}88)$

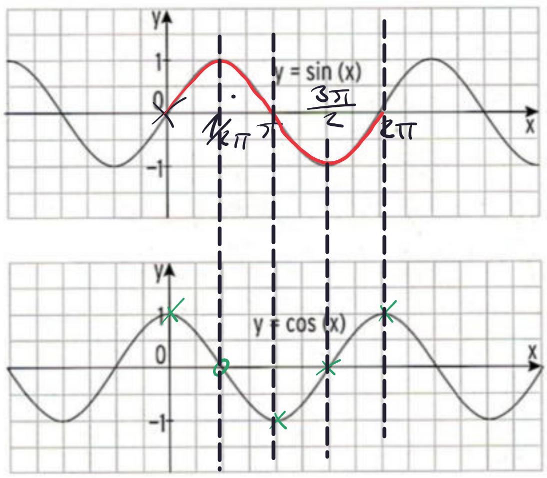
$x = 0{,}494$

x (im Bogenmaß)	sin(x)	cos(x)
1	0,84	0,54
$\frac{1}{6}\pi$	0,5	0,87
$-\frac{1}{6}\pi$	– 0,5	0,87
π oder 0 oder 2π	0	cos(0) = 1 cos(π) = −1

x (grad)	sin(x)	cos(x)
28,35°	0,47	0,88
90	1	0
44,42	0,7	0,71
165,93	0,24	– 0,97

2. Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe des WTR. Skalieren Sie die x-Achse.

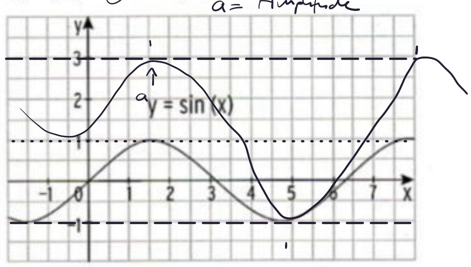
x	sin(x)	cos(x)
0	0	1
2π	0	1
π	0	−1
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$-\frac{1}{2}\pi$	−1	0
$-\frac{3}{2}\pi$	1	0
$\frac{5}{2}\pi$	1	0
7π	0	−1
12π	0	1



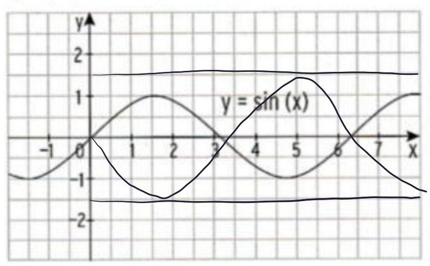
$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

3. Zeichnen Sie das zugehörige Schaubild ein.

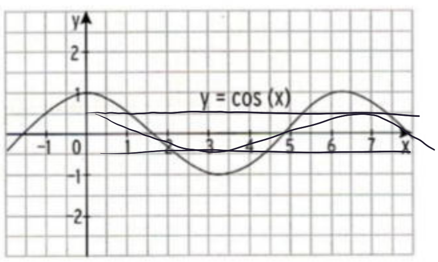
a) f(x) = 2sin(x) + 1 2 = a a = Amplitude



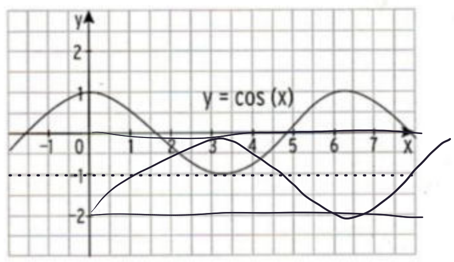
b) f(x) = – 1,5sin(x)



c) f(x) = 0,5cos(x)



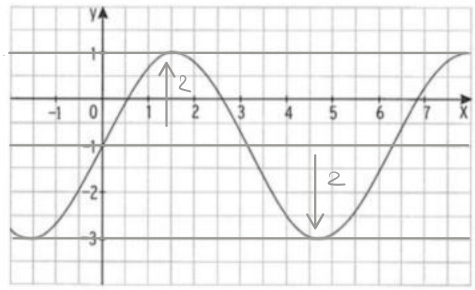
d) f(x) = – cos(x) – 1



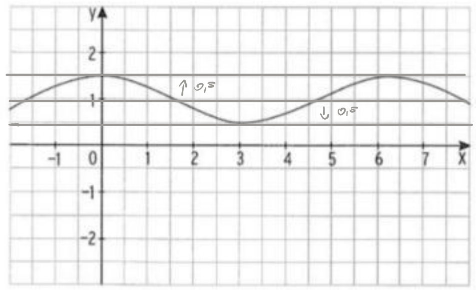
sinus kreuzt y-Achse bei Mittellinie

4. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form f(x) = asin(x) + b bzw. f(x) = acos(x) + b.

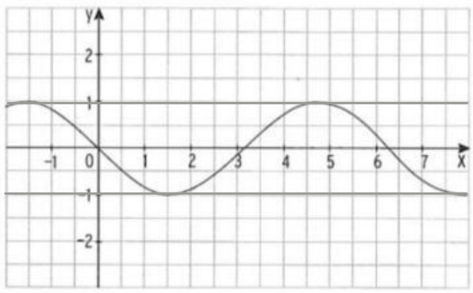
a) f(x) = 2 sin(x) − 1



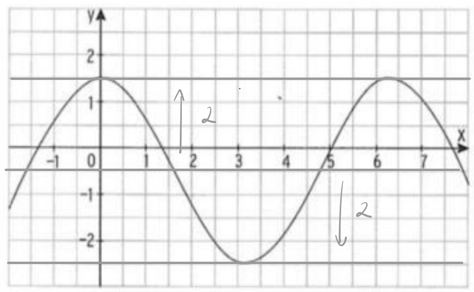
b) f(x) = 0,5 cos(x) + 1



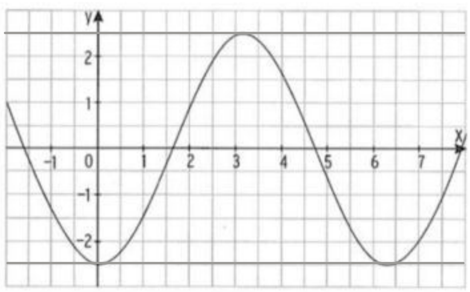
c) f(x) = − sin(x)



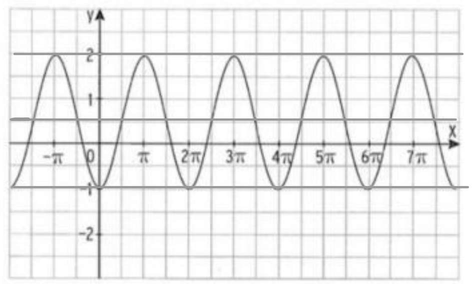
d) f(x) = 2 cos(x) − 0,5



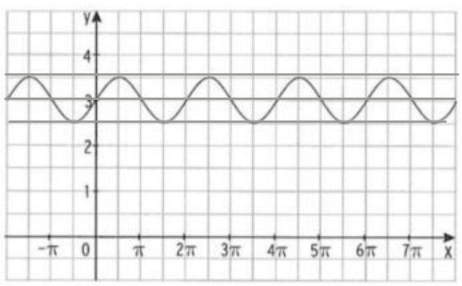
e) f(x) = −2,5 cos(x)



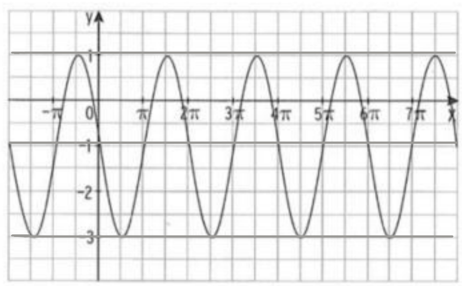
f) f(x) = −1,5 cos(x) + 0,5



g) f(x) = 0,5 sin(x) + 3



h) f(x) = −2 sin(x) − 1



5. Ergänzen Sie die folgenden Sätze.

a) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 0,5sin(x) − 1 entsteht aus der Sinuskurve (y = sin(x)) durch Streckung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung und durch Verschiebung um 1 nach unten.

b) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = − cos(x) + 2 entsteht aus der Kosinuskurve (y = cos(x)) durch Spiegelung an der x-Achse und durch Verschiebung um 2 nach oben.

c) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 2cos(x) − 3 entsteht aus der Kurve mit y = cos(x) durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung und durch Verschiebung um 3 nach unten.

d) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = − π sin(x) entsteht aus der Kurve mit y = sin(x) durch Spiegelung an der x-Achse und Streckung um π in y-Richtung.

6. Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

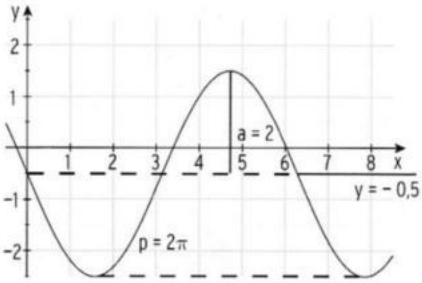
Funktionsterm	a	p	Funktionsterm	a	p
$f(x) = 0{,}25\sin(\pi x)$	$a = 0{,}25$	$p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$	$f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$	-5	$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$
$f(x) = 6\cos(5x)$	$a = 6$	$p = \frac{2\pi}{5}$	$f(x) = 1{,}6\sin(3x)$	$1{,}6$	$p = \frac{2\pi}{3}$
$f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$	$a = -4$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$	$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$	$-\frac{4}{3}$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
$f(x) = 3\cos(2x)$	$a = 3$	$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$	$f(x) = \cos(x) + 1$	1	$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

7. Geben Sie den Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

a	p	$f(x) = a \cdot \sin(kx)$	a	p	$f(x) = a \cdot \cos(kx)$
$a = 2$	$p = 2$	$f(x) = 2\sin(\pi x)$	$a = 6$	$p = 4\pi$	$f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$
$a = \pi$	$p = 1$	$f(x) = \pi\sin(2\pi x)$	$a = 4$	$p = 4$	$f(x) = 4\cos(\frac{\pi}{2}x)$
$a = 0{,}5$	$p = \frac{2}{3}\pi$	$f(x) = 0{,}5\sin(3x)$	$a = \frac{5}{2}$	$p = \frac{3}{4}$	$f(x) = \frac{5}{2}\cos(\frac{8\pi}{3}x)$

8. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

$g(x) = -2\sin(x) - 0{,}5$



Lösungshinweise:
keine Verschiebung in x-Richtung

Mittellinie: $d = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{1{,}5 + (-2{,}5)}{2} = -0{,}5$

Amplitude: $\frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{1{,}5 - (-2{,}5)}{2} = 2$

Wegen Spiegelung an der x-Achse: $a = -2$

Periode: Differenz benachbarter Minimalstellen
Aus $p = \frac{2\pi}{b}$ folgt $b = \frac{2\pi}{p} = 1$

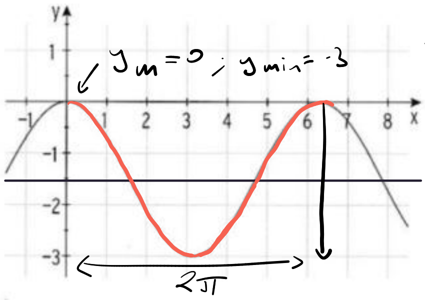
Einsetzen in $g(x) = a\sin(bx) + d$

$a = \frac{0-(-3)}{2}$
$a = 1{,}5$

$g(x) = 1{,}5\cos(x) - 1{,}5$

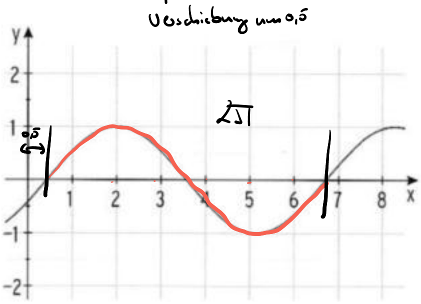
$d = \frac{0+-3}{2}$

$b = \frac{2\pi}{p} = 1$
$b = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$



$g(x) = \sin(x - 0{,}5)$
Verschiebung um 0,5

$d = 0$
$a = 1$
$b = \frac{2\pi}{2\pi}$
$b = 1$

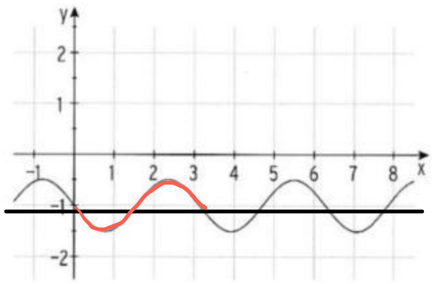


$g(x) = 2\sin(\frac{1}{3}\pi x)$

$b = \frac{2\pi}{6}$
$b = \frac{1}{3}\pi$

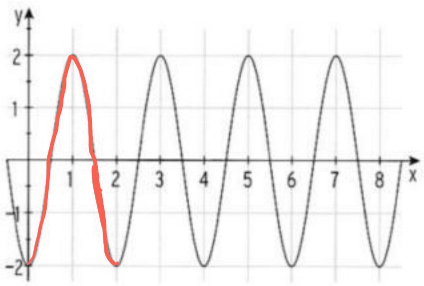
$g(x) = -0{,}5\sin(2x) - 1$

$b = \frac{2\pi}{\pi} = 2$



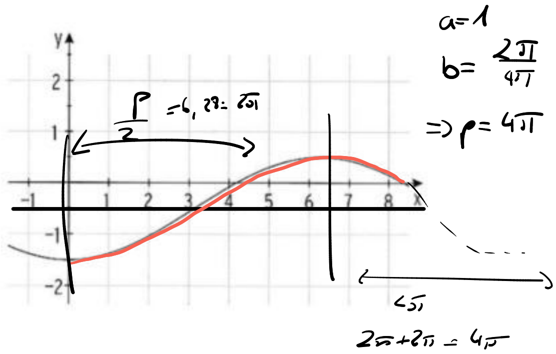
$g(x) = -2\cos(\pi x)$

$b = \frac{2\pi}{2}$
$b = \pi$



$g(x) = -\cos(\frac{1}{2}x) - 0{,}5$

$a = 1$
$b = \frac{2\pi}{4\pi}$ $b = \frac{1}{2}\pi$
$\Rightarrow p = 4\pi$



175

(4)

a) $f(x) = 1 - \frac{4}{5}\sin(2x)$ ↙ Verschiebung $= 1$

$f(x) = -\frac{4}{5}\sin(2x) + 1$

↑ < 1

A: können sich nicht berühren.

b) $+\frac{4}{5}$

$f(x) = -\frac{4}{5}\sin(2x) + \frac{4}{5}$ = min 1 Kontakt mit x

(5)

$a = 3$

$p = \approx 6{,}3$ $\quad f(x) = -3\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

$b = 6\pi$

$p = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

(11)

b) : A

a) : B

c) : C

(12) $f(x) = 2\sin(2x) - 1$

A: fängt nicht bei 1 an

B: Periode 2π, nicht bei 1π

C: Amplitude ist 1,5

(13) (1) $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ $\quad p = 12 \quad \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$

(2) $f(x) = 2{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1$ $\quad p = 4 \quad \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Trigonometrische Gleichungen

Bsp: $f(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow \underbrace{\sin(x) = 0{,}5}_{\text{trigonometrische Gleichung}}$

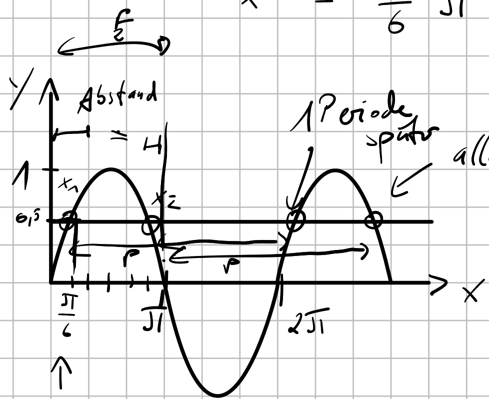
Radialmaß!

$\underline{Lsg.} = \sin(x) = 0{,}5 \quad | \arcsin(\;)$

$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(0{,}5)$

$x = \arcsin(0{,}5) \leftarrow \sin^{-1}$

$x = \frac{1}{6}\pi$



alles Lösungen von $\sin(x) = 0{,}5$ = ∞ Lsg.

bei $\frac{\pi}{6}$: $y = 0{,}5$

Nur bei Sinus!

$\frac{\pi}{6} = x_1 \quad \Big| \; x_2 = \frac{P}{2} - x_1 = x_2 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \underline{\underline{\frac{5}{6}\pi}}$

P

$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ oder } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z} \right\}$

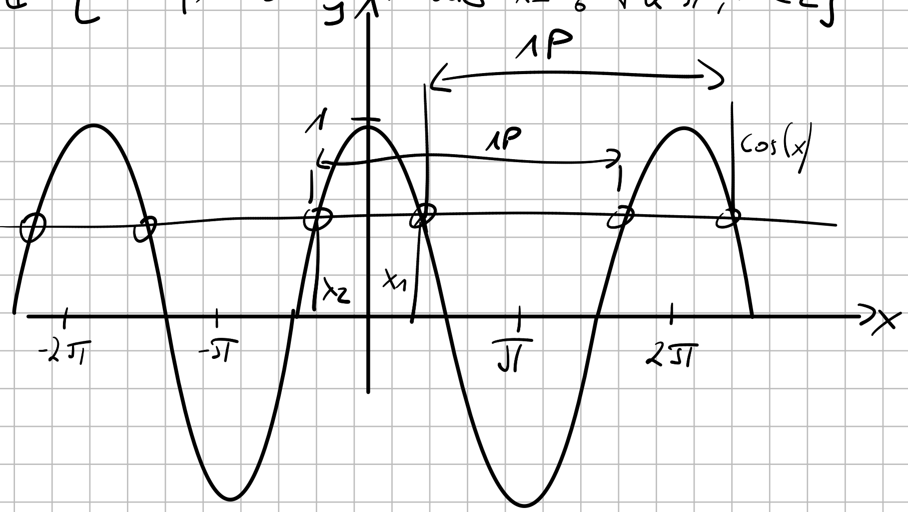
Bsp 2

$f(x) = \cos(x)$

$\cos = 0{,}5 \quad | \arccos$

$\arccos(\cos(x)) = \arccos(0{,}5)$

$x = \frac{1}{3}\pi$



$\Rightarrow x_2 = -x_1$

$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ oder } x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi ; \; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$4\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)+2=27 \quad | -27$

$4\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)-25=0 \quad | +25$

$4\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)=25 \quad | :4$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)=6,25 \quad | \arcsin$

$\frac{\pi}{4}x= \quad ↯$

185

$P=2\pi$

① c) $2\cos(x)=\sqrt{2} \qquad [-\pi; 2\pi]$

$2\cos(x)=\sqrt{2} \quad | :2$

$\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad | \arccos$ liegt drin

$x_1 = \frac{1}{4}\pi$

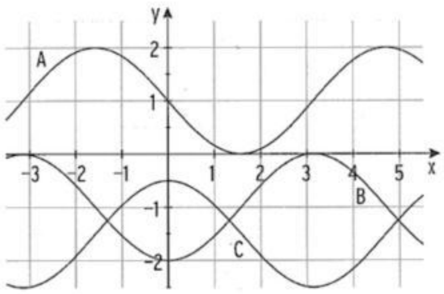
$x_2 = -\frac{1}{4}\pi$ liegt drin mit $P=2\pi$

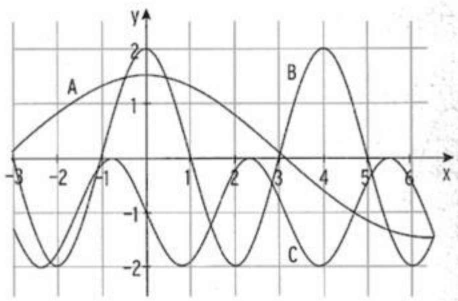
$x_3 = x_1+2\pi = \frac{9}{4}\pi$ - nicht drin

$x_4 = \frac{1}{4}\pi + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$ ← drin

$L=\left\{\frac{1}{4}\pi; -\frac{1}{4}\pi; \frac{7}{4}\pi\right\}$

12. Ordnen Sie zu.





____: $f(x) = -\cos(x) - 1$

____: $g(x) = \cos(x) - 1{,}5$

____: $h(x) = -\sin(x) + 1$

____: $f(x) = 1{,}5\cos(0{,}5x)$

____: $g(x) = -1 - \sin(2x)$

____: $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x)$

13. Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

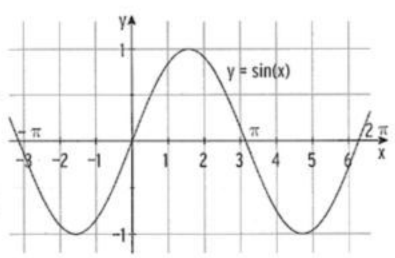
a) Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	☐ w ☐ f
b) Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	☐ w ☐ f
c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	☐ w ☐ f
d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x + 1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	☐ w ☐ f
e) Die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$.	☐ w ☐ f
f) Die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(x) + 4$ hat den Wertebereich $[1; 7]$.	☐ w ☐ f

14. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

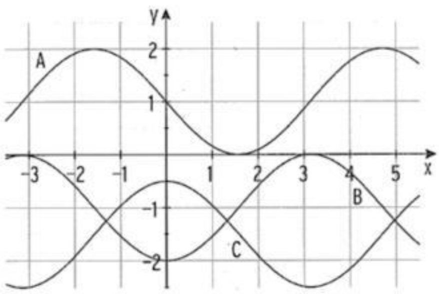
a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x =$ ____________________

b) $\sin(x) = 0{,}5 \Rightarrow x =$ ____________________

c) $\sin(x) = -0{,}5 \Rightarrow x =$



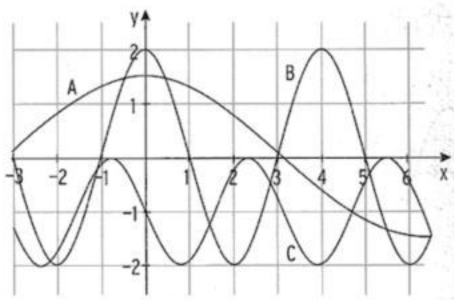
12. Ordnen Sie zu.



____: $f(x) = -\cos(x) - 1$

____: $g(x) = \cos(x) - 1{,}5$

____: $h(x) = -\sin(x) + 1$



____: $f(x) = 1{,}5\cos(0{,}5x)$

____: $g(x) = -1 - \sin(2x)$

____: $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x)$

13. Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

a) Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	☐ w	☐ f
b) Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	☐ w	☐ f
c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	☐ w	☐ f
d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x + 1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	☐ w	☐ f
e) Die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$.	☐ w	☐ f
f) Die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(x) + 4$ hat den Wertebereich $[1; 7]$.	☐ w	☐ f

14. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

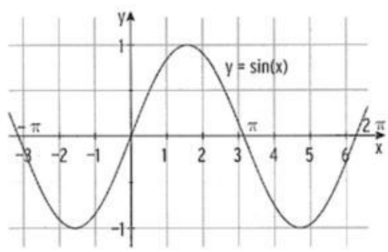
a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x =$

____

b) $\sin(x) = 0{,}5 \Rightarrow x =$

____

c) $\sin(x) = -0{,}5 \Rightarrow x =$



15. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $2\sin(x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(x) = 0{,}5$	c) $2\sin(x) = -1$	d) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ mithilfe der Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$	WTR: $x = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x = -\frac{\pi}{3} \notin [0; 2\pi]$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$		

16. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $2\sin(2x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(\frac{x}{2}) = 0{,}5$	c) $2\sin(\frac{\pi}{3}x) = -1$	d) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{4}$ Mit der Sinuskurve: $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ Mit $z = 2x$: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ Periode $p = \pi$: $x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ $x = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11}{8}\pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ $x_3 = \frac{9\pi}{8}$; $x_4 = \frac{11\pi}{8}$	WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1\|2} = \pm\frac{2\pi}{3}$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ ($x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi > 2\pi$ keine Lösung)		

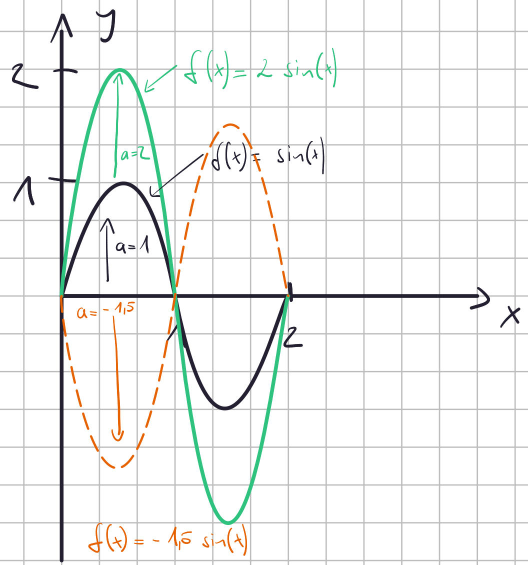
17. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	b) $\sin(\frac{\pi}{4}x) = 0$	c) $\cos(\frac{x}{3}) = -0{,}5$	d) $\cos(2x) = 0$

Die allgemeine Sinusfunktion

cos ist um $\frac{\pi}{2}$ von sin verschoben

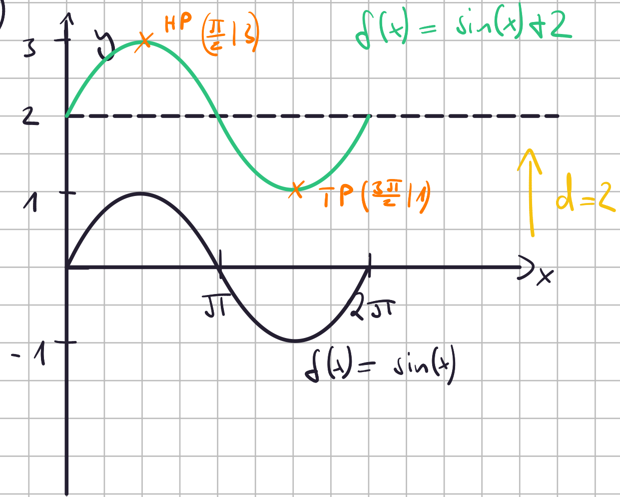
(1) $\Longrightarrow \quad f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$



Die Amplitude a berechnet sich aus: $\boxed{a = \frac{y_H - y_T}{2}}$

Streckung in y-Richtung: a

(2)

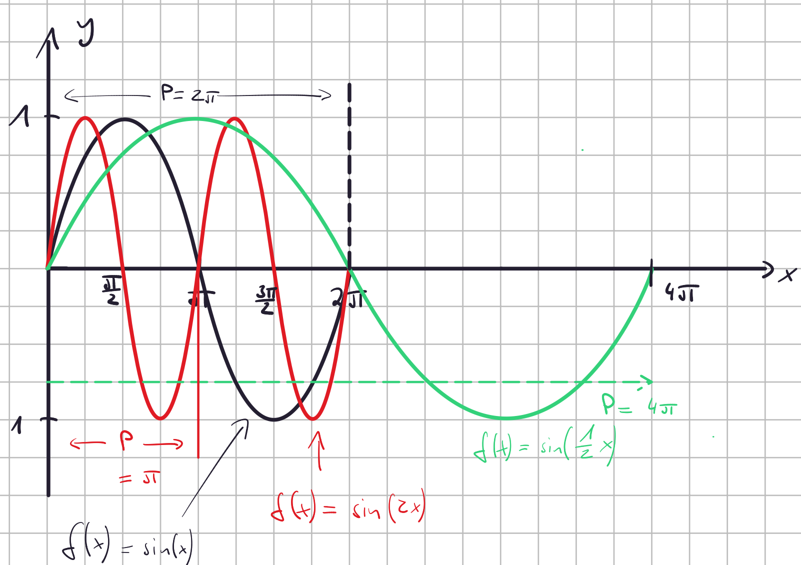


d bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung

$\boxed{d = \frac{y_H + y_T}{2}}$

Verschiebung in y-Richtung: d

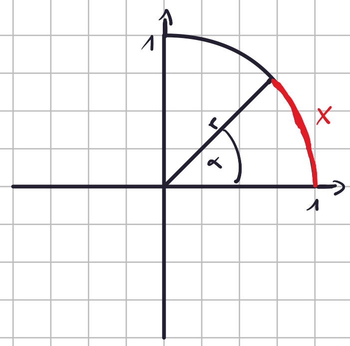
(3)



$\boxed{\text{Periode} \quad p = \frac{2\pi}{b}}$ $\Rightarrow \quad b = \frac{2\pi}{b}$

Streckung in x-Richtung: b

Das Bogenmaß eines Winkels



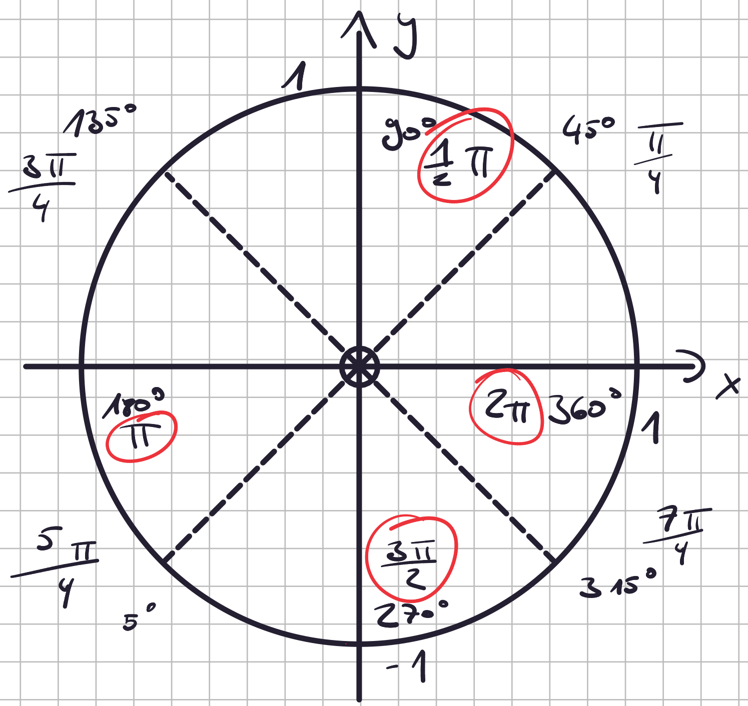
Kreisumfang: $U = 2r \cdot \pi$

mit $r = 1 \Rightarrow U = 2\pi$

Winkelmaß Vollkreis: 360°

$$\Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{2\pi}{360°} \quad | \cdot \alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°} \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{360° \cdot x}{2\pi} = \frac{180° \cdot x}{\pi} \end{aligned}}$$

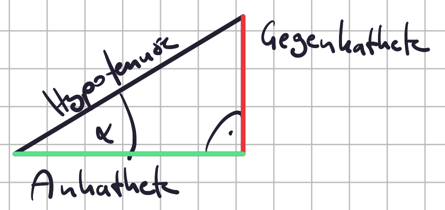


Trigonometrische Funktionen

Bsp.

- Ebbe/Flut
- Atmung
- Pendeluhr
- Wechselstrom

A) Winkelfunktionen für Winkel zwischen 0°–90°

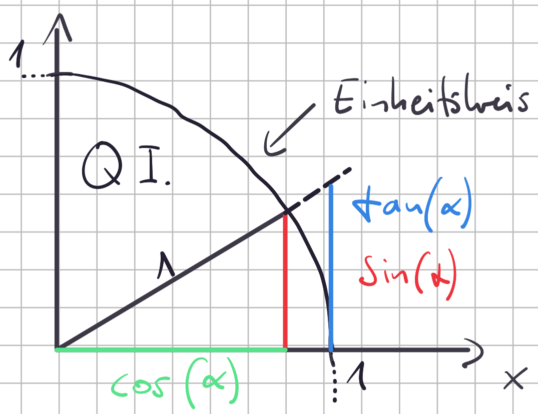


$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

G A G
H H A



für: $0° \leq \alpha \leq 90°$

$0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$

$0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$

$\sin(0°) = 0$

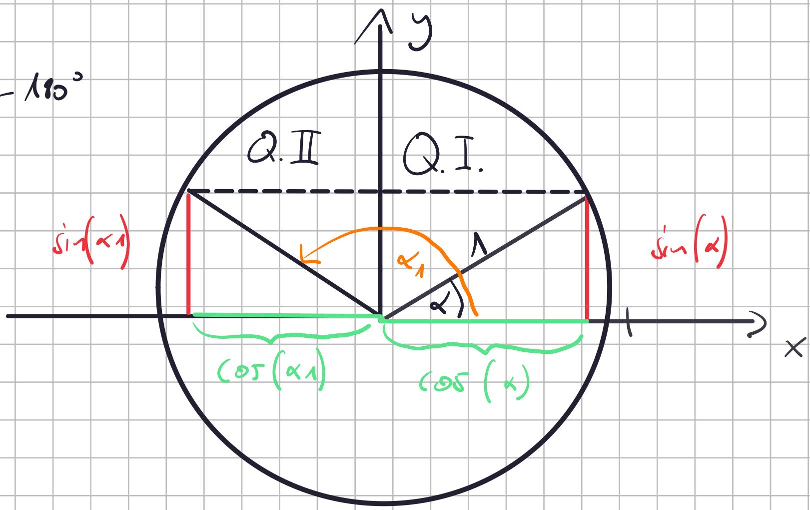
$\sin(90°) = 1$

$\cos(0°) = 1$

$\cos(90°) = 0$

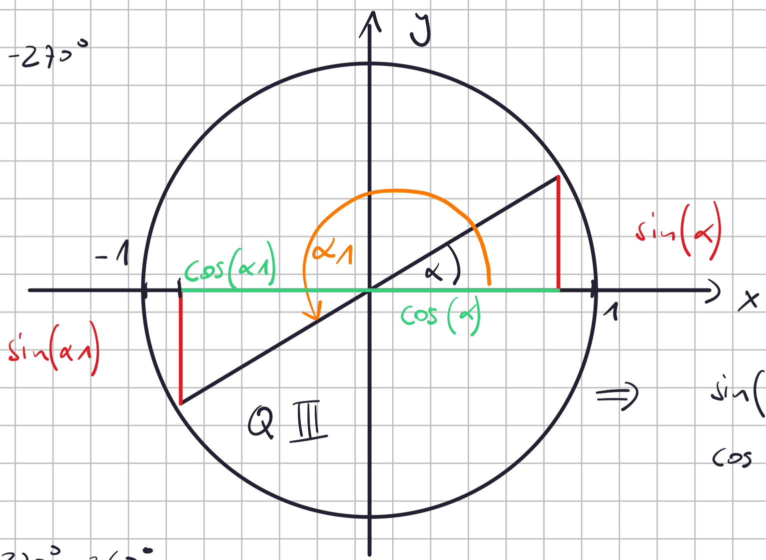
B) Winkelfunktionen in den Quadranten

1) $\alpha_1: 90° - 180°$



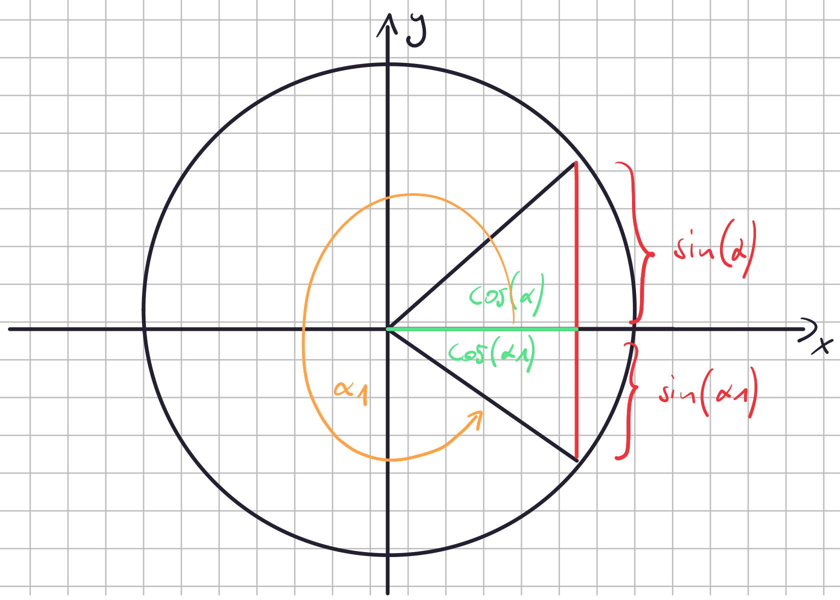
$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha_1) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha)$$

2) $\alpha_1: 180° - 270°$



$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha_1) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha_1) = -\cos(\alpha)$$

3) $\alpha_1: 270° - 360°$



$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha_1) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha)$$

Trigonometric

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= a \cdot q^{t} \\ f(t) &= a \cdot e^{k \cdot t} \end{aligned}\right\} \text{gleich} \qquad k = \ln(q)$$

Bei Prozentrechnung a immer 1 setzen.

(5) Ist exponentiell

$q = 1{,}35$

$$f(t) = 3{,}9 \cdot 1{,}35^{t}$$

$$13 = 3{,}9 \cdot 1{,}35^{t} \quad | :3{,}9$$

$$\frac{13}{3{,}9} = 1{,}35^{t} \quad | \log_{1{,}35}\left(\frac{13}{3{,}9}\right)$$

$$t = 4{,}01 \text{ Jahren}$$

A: Nach ca 4 Jahren.

S. 151 (2)

gesamtgröße 8 ha

$8\,ha = 80.000\,m^2$

Anfangsbestand: $150\,m^2$

$80.000 = 150 \cdot q^t \quad | :150$

$\frac{80.000}{150} = 1{,}3^t \quad | \log$

$\log_{1,3}\left(\frac{80.000}{150}\right) = t$

$t \approx 23{,}93$

Wochen

(3)

$\% = k \cdot 1{,}046^8$

Um 43 %

(4)

$g(t) = g(0)e^{-0{,}0122 \cdot t}$

$g(20) = 24$

$g(0)\,e^{-0{,}0122 \cdot 20} = 24 \quad | : e^{-0{,}0122 \cdot 20}$

$g(0) = 30{,}63$

Anfangsbestand = 30,63 Gramm.

$30{,}63 \cdot e^{-0{,}0122 \cdot t} = 0{,}01 \quad | : 30{,}63$

$e^{-0{,}0122 \cdot t} = \frac{0{,}01}{30{,}63} \quad | \ln$

$-0{,}0122 \cdot t = \ln\left(\frac{0{,}01}{30{,}63}\right) \quad | : -0{,}0122$

$t = \frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{30{,}63}\right)}{-0{,}0122}$

$t = 657{,}96$ Tage

c) $T_h = -\frac{\ln(2)}{k} = -\frac{\ln(2)}{-0{,}0122} = 56{,}8$ Tage

$k = \ln(q) \quad | \; e^{(k)} = e^{\ln(q)}$

$\underline{\underline{q = 0{,}99}}$

Prozentuale abnahme um ca. 1% pro Tag

$f(t) = 30{,}63 \cdot 0{,}99^{t}$

$f(t) = 25{,}05$ %

S. 151 ①

Lsg I.

$30{,}2 = -\frac{\ln(2)}{k} \quad | \cdot k$

$30{,}2 \cdot k = -\ln(2) \quad | : 30{,}2$

$k = -\frac{\ln(2)}{30{,}2}$

$k = -0{,}022$

$f(t) = 1 \cdot e^{-0{,}022 \cdot t}$

$f(t) = 0{,}502 = \underline{\underline{50{,}2\,\%}}$

$f(t) = 1 \cdot e^{-0{,}022 \cdot t} = 0{,}10 \quad | \ln$

$-0{,}022 \cdot t = \ln(0{,}1) \quad | : (-0{,}022)$

$t = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}022}$

$\underline{\underline{t = 100{,}32}}$

A: Nach ungefähr 100 Jahren.

Lsg II.

$f(t) = a \cdot q^t$

100%

$f(t) = 1 \cdot q^{30{,}2} = 0{,}5 \quad | : 1$

$q^{30{,}2} = \frac{0{,}5}{1} \quad | \sqrt[30{,}2]{}$

$q = 0{,}977$

$f(t) = 1 \cdot 0{,}977^{30}$

$f(t) = 0{,}502 = \underline{\underline{50{,}2\,\%}}$

$f(t) = 1 \cdot 0{,}977^t = 0{,}1 \quad | \log_{0{,}977}(0{,}1)$

$t = 98{,}55$

$f(x) = \sin(x)$

$g(x) = -2{,}5 \sin(\frac{1}{2} x) + 1$

Streckung in y um -3,5

Streckung in x um Faktor 4

S. 144 Nr. 1

1 a) $y: f(0) = 2e^0 - 2 = 0$

$x: 2e^x - 2 = 0 \quad | +2$

$2e^x = 2 \quad | :2$

$e^x = 1 \quad | \ln$

$x = \ln(1)$

b) $y: f(0) = e^{-0} + 3 = 4$

$x: e^{-x} + 3 = -3 \quad | \ln$

↯

c) $f(x) = 4 - 2e^x$

$y \; f(0) = 4 - 2e^0 = 2$

$x \; f(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2e^x = 0 \quad | +2e^x$

$4 = 2e^x \quad | :2$

$2 = e^x \quad | \ln$

$x = \ln(2)$

d) $f(x) = e^{-0,4x} - 3$

$y: f(x) = e^{-0,4 \cdot 0} - 3$

$f(0) = -2$

$x: f(x) = 0 \Rightarrow e^{-0,4x} - 3 = 0 \quad | +3$

$e^{-0,4 \cdot x} = 3 \quad | \ln$

$-0,4 \cdot x = \ln(3) \quad | :(-0,4)$

$x = \frac{\ln(3)}{-0,4}$

e) $f(x) = -1 + 2e^{1,25x}$

$f(0) = -1 + 2e^{1,25 \cdot 0}$

$f(0) = 1$

$f(x) = 0 \Rightarrow -1 + 2e^{1,25x} = 0 \quad | +1$

$2e^{1,25x} = 1 \quad | :2$

$e^{1,25x} = \frac{1}{2} \quad | \ln$

$1,25x = \ln(\frac{1}{2}) \quad | :1,25$

$x = \underline{\frac{\ln(\frac{1}{2})}{1,25}}$

$f(0) = \frac{e}{2} - e^{0,5x}$

$f(0) = \frac{e}{2} - e^{0,5 \cdot 0}$

$y: \underline{f(0) = \frac{e}{2} - 1}$

$x: \frac{e}{2} - e^{0,5x} = 0 \quad | +e^{0,5x}$

$\frac{e}{2} = e^{0,5x} \quad | \ln$

$0,5x = \ln(\frac{e}{2}) \quad | :0,5$

$x = \underline{\frac{\ln(\frac{e}{2})}{0,5}}$

⑤

a) $f(x) = -e^{2x}$

$g(x) = -6e^{x}$

Punkte bestimmen:

$\Longrightarrow f(x) = g(x)$

$\Longrightarrow -e^{2x} = -6e^{x}$

$-e^{2x} = -6e^{x} \quad | +6e^{x}$

$-e^{2x} + 6e^{x} = 0$

$e^{x}(-e^{x} + 6) = 0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow -e^{x} + 6 = 0 \quad | +e^{x}$

$6 = e^{x} \quad | \ln$

$\underline{\underline{\ln(6) = x}}$

x einsetzen:

$-e^{2 \cdot \ln(6)} = -36$

$S(\ln(6) \mid -36)$

b) $f(x) = e^{2x} + 6$

$g(x) = 5e^{x}$

$e^{2x} + 6 = 5e^{x} \quad | -5e^{x}$

$e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$

$u^2 - 5u + 6 = 0$

$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$u_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$u_1 = 2 = e^{x}$

$u_2 = 3 = e^{x}$

$\Longrightarrow$ Resubstitution

$x_1 = \ln(2)$

$x_2 = \ln(3)$

$S_1(\ln(2) \mid 10) \quad S_2(\ln(3) \mid 15)$

c)

$$f(x) = -e^{3x} + 2x$$

$$g(x) = 2x - 5$$

$$-e^{3x} + 2x = 2x - 5 \quad | + e^{3x} - 2x$$

$$0 = e^{3x} - 5 \quad | + 5$$

$$5 = e^{2x} \quad | \ln$$

$$\ln(5) = 3x \quad | :3$$

$$\frac{\ln(5)}{3} = x$$

$$g(y) = 2 \cdot \frac{\ln(5)}{3} - 5$$

$$g(y) = -3{,}927$$

$$\underline{\underline{S\left(\frac{\ln(5)}{3} \;\middle|\; -3{,}927\right)}}$$

d)

$$f(x) = 2e^{0{,}5x} - 3x$$

$$g(x) = -3x + 1$$

$$2e^{0{,}5x} - 3x = -3x + 1 \quad | + 3x$$

$$2e^{0{,}5x} = 1 \quad | :2$$

$$e^{0{,}5x} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$

$$0{,}5x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad | :0{,}5$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}5}$$

$$g(y) = -3 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}5} + 1$$

$$g(y) = 5{,}158$$

$$\underline{\underline{S\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}5} \;\middle|\; 5{,}158\right)}}$$

144

(6)

$5000e^{x} = 80.000 \cdot e^{-x} \quad | -80.000e^{-x}$

$5000e^{x} - 80.000e^{-x} = 0$

$e^{x} \cdot (5000 - 80.000e^{-2x}) = 0$

$\downarrow$

$\neq 0$

$\hookrightarrow 5000 - 80.000e^{-2x} = 0 \quad | +80.000e^{-2x}$

$5000 = 80.000e^{-2x} \quad | :80.000$

$\frac{1}{16} = e^{-2x} \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{1}{16}\right) = -2x \quad | :(-2)$

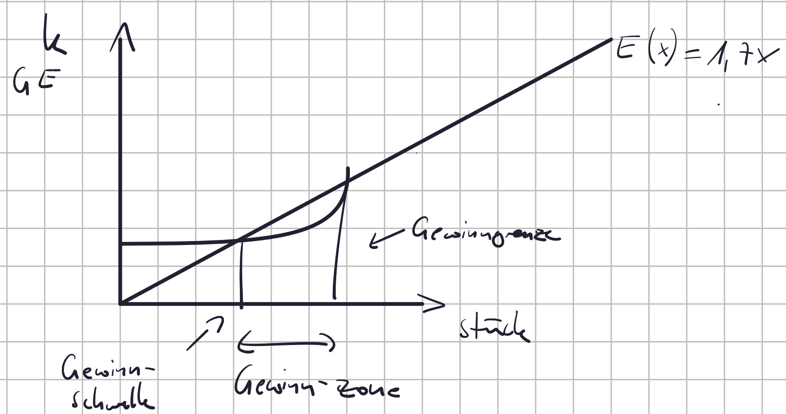
$\frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{-2} = x$

$\underline{\underline{S(1{,}386 \,/\, 20.000)}}$

$5000e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{-2}} = y$

(7)

$K(x) = 0{,}4e^{0{,}5x} + 2{,}5$



$0{,}4e^{0{,}5x} + 2{,}5 = 1{,}7x \quad | -1{,}7x$

$0{,}4e^{0{,}5x} + 2{,}5 - 1{,}7x = 0$

nächster Zielwert: 2,1 in TR.

154 Nr. 3

$$k(t) = 1000 \cdot \left(1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t}\right)$$

$$k(t) = 1000 \cdot \left(1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot 0}\right)$$

$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85)$$

$$k(t) = 1000 \cdot 0{,}15$$

$$k(t) = 150$$

A: Zu Beginn gibt es 150 Kaninchen.

Läuft gegen den Bestand von 1000

$$k(t) = 1000 \cdot \left(1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t}\right) = 250$$

$$
\begin{aligned}
1000 \cdot \left(1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t}\right) &= 250 && \mid :1000 \\
1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t} &= \frac{250}{1000} && \mid -1 \\
-0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t} &= -\frac{3}{4} && \mid :(-0{,}85) \\
e^{-0{,}0513 \cdot t} &= \frac{15}{17} && \mid \ln \\
-0{,}0513 \cdot t &= \ln\left(\frac{15}{17}\right) && \mid :-0{,}0513 \\
t &= \underline{\underline{2{,}439}}
\end{aligned}
$$

Nach ca. $2\frac{1}{2}$ Monaten hat der Bestand ca. 250 Kaninchen erreicht.

S. 154 Nr. 2

k = Wachstumskonstante

Biomasse wächst:

$\rightarrow \quad g(t) = a - 10e^{-kt}$

a: Schranke od. Grenzwert.

geg:

$g(0) = 10$

$g(10) = 16,321$

$a - 10e^{-k \cdot 0} = 10$

$a - 10 = 10 \quad |+10$

$a = 20$

$20 - 10e^{-k \cdot 10} = 16,321 \quad | + 10e^{-k \cdot 0} - 16,321$

$3,679 = 10e^{-k \cdot 10} \quad |:10$

$\frac{3,679}{10} = e^{-k \cdot 10} \quad |\ln$

$\ln\left(\frac{3,679}{10}\right) = -k \cdot 10 \quad |:10$

$\frac{\ln\left(\frac{3,679}{10}\right)}{10} = -k \quad | \cdot(-1)$

$-\frac{\ln\left(\frac{3,679}{10}\right)}{10} = k$

$k = 0,099\,954\,412$

$\Rightarrow \quad g(t) = 20 - 10e^{-0,099\,954412 \cdot t}$

c) $20 \cdot 0,95 = 19$ gesucht: t von 95% des Grenzwertes

$g(t) = 20 - 10e^{-0,099\,95\,4412 \cdot t} = 19 \quad | -20$

$-10e^{-0,099\,95\,4412 \cdot t} = -1 \quad | \cdot(-1)$

$10e^{-0,099\,95\,4412 \cdot t} = 1 \quad |:10$

$e^{-0,099\,95\,4412 \cdot t} = \frac{1}{10} \quad | \ln$

$-0,099\,954412 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \quad |: -0,099\,955442$

$t = 23,026$ A: Nach 23 Jahren sind 95% erreicht.

S. 154

1. $T(t) = T_u + (T_0 - T_u)\, e^{kt}$

$T(30) = 24{,}7$

$T(t) = 20 + (80 - 20)\, e^{kt}$

$= 20 + 60\, e^{kt}$

$\Rightarrow \quad 20 + 60 \cdot e^{k \cdot 30} = 24{,}7 \quad | -20$

$60\, e^{k \cdot 30} = 4{,}7 \quad | :60$

$e^{k \cdot 30} = \frac{4{,}7}{60} \quad | \ln$

$k \cdot 30 = \ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right) \quad | :30$

$k = \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}$

$$\underline{\underline{T(t) = 20 + (80 - 20)\, e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t}}}$$

$30 = 20 + (80 - 20) \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t}$

$30 = 20 + 60$

$30 = 80\, e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t} \quad | :80$

$\frac{30}{80} = e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t} \quad | \ln$

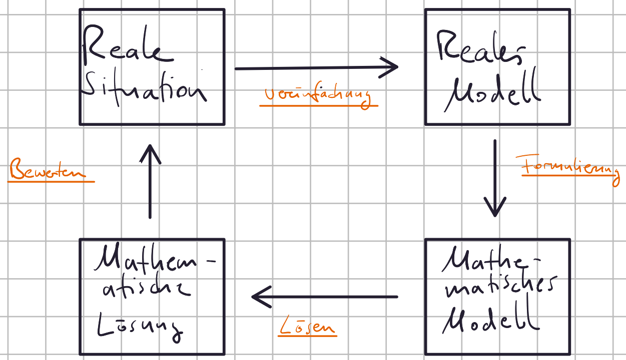
$\ln\left(\frac{30}{80}\right) = \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t \quad | : \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}$

$\frac{\ln\left(\frac{30}{80}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}} = t$

$$\underline{\underline{t = 11{,}6 \text{ Minuten}}}$$

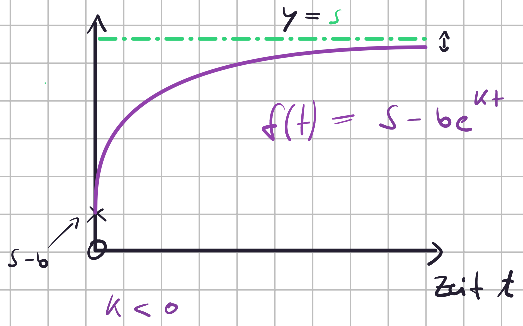
A: Nach 11,6 Minuten ist der Körper auf 30 °C gesunken.

Modellierung

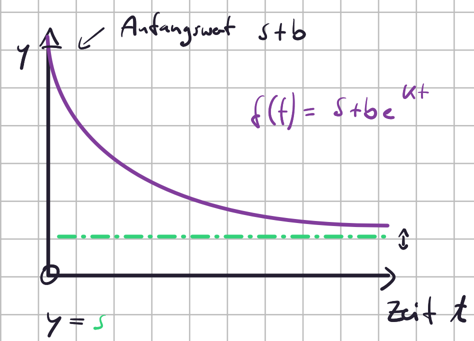


Beschränktes Wachstum / beschränkter Zerfall

a) Beschränktes Wachstum



b) Beschränkter Zerfall



Bsp.: Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen (8°C) und erwärmt sich auf 21°C Zimmertemperatur. Nach 10 min. beträgt die Temperatur 14°C.

Braucht weniger als 10 min zum Abkühlen.

$\Rightarrow \quad f(t) = 21 - be^{kt}$

$f(0) = 8$

$f(0) = 21 - b \cdot e^{k0} = 8 \qquad 21 - b = 8 \quad | +b - 8$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 13 = b$

$f(t) = 21 - 13 \cdot e^{kt} = 10$

aus Aufgabe

$f(10) = 14$

$\Rightarrow 21 - 13 \cdot e^{k \cdot 10} = 14 \quad | -14 + 13e^{k \cdot 10}$

$7 = 13e^{k \cdot 10} \quad | :13$

$\frac{7}{13} = e^{k \cdot 10} \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{7}{13}\right) = k \cdot 10 \quad | :10$

$\frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{10} = k$

Einsetzen:

$f(t) = 21 - 13e^{\frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{10} \cdot t}$

Bsp 2:

Eine Tasse Tee wird zubereitet und kühlt in Folge auf Zimmertemp. ab (21°C). Nach 15 Minuten hat die Anfangstemperatur um 20°C abgenommen.

ges. $f(t) = ?$

$\Rightarrow \quad f(t) = 21 + b e^{kt}$

$f(0) = 100$

$f(t) = 21 + 100 \cdot e^{k0} = 100 \qquad 21 + b = 100 \quad | -100$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b = 79$

$f(t) = 21 + 79 e^{kt}$

$f(15) = 80$

$$f(t) = 21 + 79 e^{k \cdot 15} = 80 \quad | -21$$

$$79 e^{k \cdot 15} = 59 \quad | :79$$

$$e^{k \cdot 15} = \frac{59}{79} \quad | \ln$$

$$k \cdot 15 = \ln\left(\frac{59}{79}\right) \quad | :15$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{59}{79}\right)}{15}$$

$$\underline{\underline{f(t) = 21 + 79 e^{\frac{\ln\left(\frac{59}{79}\right)}{15} \cdot t}}}$$

Exponentielles Wachstum

Bsp: 1000 € Startkapital

8% Verzinsung pro Jahr

$$\Rightarrow \quad K(t) = 1000 \cdot \boxed{1{,}08}^{\,t}$$

Wachstumsfaktor

$$\boxed{e^{\ln(q)} = q} \quad q$$

in Jahren

$$K(t) = 1000 \cdot e^{\boxed{\ln(1{,}08)}\cdot t}$$

Wachstumskonstante

$$K(t) =$$

$\Rightarrow$ exponentielles Wachstum wird beschrieben durch:

$$\underline{\underline{f(t) = a \cdot e^{kt}}}\,; \quad t \geq 0$$

$k > 0$ ist die Wachstums Konstante

$a = f(0)$ ist der Anfangsbestand

23. a) Liegt bei den nachfolgenden Vorgängen näherungsweise ein exponentieller Wachstums- bzw. Zerfallsprozess vor?

2011	2012	2013	2014	2015
112,7	132,7	152,7	172,7	192,7

☐ ja ☒ nein

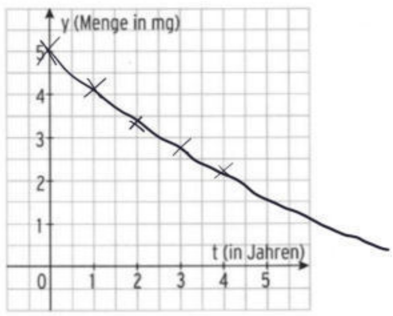
2011	2012	2013	2014	2015
7,80	7,41	7,04	6,69	6,36

☒ ja ☐ nein

b) Beim exponentiellen Wachstum gilt q $\geq$ 1,
beim exponentiellen Zerfall gilt 0 $\leq$ q $\leq$ 1 .

24. Eine Anfangsmenge von 5 mg des radioaktiven Stoffes Radon 222 zerfällt exponentiell gemäß der Tabelle (t in Tagen; y in mg).

t	0	1	2	3	4
y	5	4,09	3,34	2,73	2,23



a) Stellen Sie den Vorgang im Koordinatensystem dar.

b) Ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm auf 3 Arten.

1. Die Regression am WTR führt zu f(t) = ________

2. Der Anfangsbestand von a = 5 und die Wachstumsfaktor q = 0,82 führen zu
- 18%
f(t) = $5 \cdot e^{\ln(0{,}82)\cdot t}$.

3. Das Einsetzen des Anfangsbestandes von a = _____ und der Koordinaten des Punktes P(3 | 2,73) in f(t) = a · e^{kt} führen zu $5 \cdot e^{k\cdot 3} = 2{,}73$ | :5

$e^{k\cdot 3} = \frac{2{,}73}{5}$ | ln

$k \cdot 3 = \ln\left(\frac{2{,}73}{5}\right)$ | :3

$k = \frac{\ln\left(\frac{2{,}73}{5}\right)}{3}$ $\Rightarrow$ k = -0,201

Somit gilt f(t) = $5 \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{2{,}73}{5}\right)}{3}\cdot t}$.

c) Die Halbwertszeit beträgt t_H = _____. Überprüfen Sie dies am Schaubild.

$T_h = \frac{-\ln(2)}{k} \Rightarrow -\frac{\ln(2)}{-0{,}201}$

21. Die nachfolgenden exponentiellen Wachstums- bzw. Zerfallsvorgänge sollen durch Funktionsterme beschrieben werden. Geben Sie jeweils zwei Funktionsterme an.

Vorgang	$f(t) = a \cdot b^t$	$f(t) = a \cdot e^{kt}$
Ein Kapital von 1500 EUR wird mit einem Zinssatz von 3 % jährlich verzinst.	$f(t) = 1500 \cdot 1{,}03^t$ (t in Jahren)	$e^k = 1{,}03$ $k = \ln(1{,}03) \approx 0{,}03$ $f(t) = 1500 \cdot e^{0{,}03t}$
Ein Auto wird für 20000 EUR gekauft. Pro Jahr verliert es 30 % an Wert.	$f(t) = 20.000 \cdot 0{,}70^t$ (t in Jahren)	$e^k = 0{,}70$ $k = \ln(0{,}70)$ $f(t) = 20.000 \cdot e^{\ln(0{,}70) \cdot t}$
Zu Beginn sind 4 Rechner mit einem Computervirus infiziert. Die Anzahl der insgesamt infizierten Rechner verzehnfacht sich täglich.	$f(t) = 4 \cdot 10^t$ (t in Tagen)	$e^k = 10$ $k = \ln(10)$ $f(t) = 4 \cdot e^{\ln(10) \cdot t}$
Von einem radioaktiven Stoff sind zu Beginn 5 g vorhanden. Die Menge halbiert sich jährlich.	$f(t) = 5 \cdot \frac{1}{2}^t$ (t in Jahren)	$e^k = \frac{1}{2}$ $k = \ln(\frac{1}{2})$ $f(t) = 5 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2}) \cdot t}$

22. Das gesamte Holzvolumen (in m^3) eines Waldes wächst exponentiell und ist für die Jahre ab 2011 in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

2011	2012	2013	2014	2015
85000	90100	95506	101236	107310

$$\frac{90100}{85000} = \frac{95506}{90100} = \frac{101236}{95506} = \frac{107310}{101236} = 1{,}06$$

6%

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Wachstumsfaktor q für alle Zeitschritte konstant ist.

b) Der zugehörige Funktionsterm (mit t = 0 im Jahr 2011) lautet: $f(t) = 85000 \cdot e^{\ln(1{,}06) \cdot t}$.
Damit wird im Jahr 2020 ein Holzvolumen von 143.605,7115 m^3 erwartet.

19. Lösen Sie die Gleichung.

a) $-2e^{-x} + e^2 = 0$ b) $\frac{1}{4}(e^{2x} - 3) = 0$ c) $-e^{2x} + 11e^x - 28 = 0$

d) $2 - e \cdot e^{0,5x} = 0$ e) $2e^x - 7e^{-x} = 0$ f) $e^{2x} - 5e^x = -6$

a)
$-2e^{-x} + e^2 = 0 \quad | -e^2$
$-2e^{-x} = -e^2 \quad | \cdot(-1)$
$e^2 = 2e^{-x} \quad | :2$
$\frac{e^2}{2} = e^{-x} \quad | \ln$
$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right) = -x \quad | \cdot(-1)$
$\underline{\underline{x = -\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)}}$

b)
$\frac{1}{4}(e^{2x} - 3) = 0$
$\frac{1}{4}e^{2x} - 3\frac{1}{4} = 0 \quad | +3\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}e^{2x} = 3\frac{1}{4} \quad | :\frac{1}{4}$
$e^{2x} = 3 \quad | \ln$
$2x = \ln(3) \quad | :2$
$\underline{\underline{x = \frac{\ln(3)}{2}}}$

c)
$-e^{2x} + 11e^x - 28 = 0$
$-u^2 + 11u - 28 = 0 \quad | \cdot(-1)$
$u^2 - 11u + 28 = 0$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1}$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2}$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{2}$
$u_1 = \frac{14}{2} = 7$ $e^x = 7 \quad | \ln$ $\underline{\underline{x_1 = \ln(7)}}$
$u_2 = \frac{8}{2} = 4$ $e^x = 4 \quad | \ln$ $\underline{\underline{x = \ln(4)}}$

d)
$2 - e \cdot e^{0,5x} = 0 \quad | -2 + e$
$e^{0,5x} = -2 + e \quad | \ln$
$0,5x = \ln(-2+e) \quad | :0,5$
$x = \frac{\ln(-2+e)}{0,5}$

e)
$2e^x - 7e^{-x} = 0 \quad | \cdot e^x$
$2e^{2x} - 7 = 0 \quad | +7$
$2e^{2x} = 7 \quad | :2$
$e^{2x} = 3,5 \quad | \ln$
$2x = \ln(3,5) \quad | :2$
$x = \frac{\ln(3,5)}{2}$

f)
$e^{2x} - 5e^x = -6 \quad | +6$
$u^2 - 5u + 6 = 0$
$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$
$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$
$u_1 = \frac{6}{2} = 3$ $e^x = 3 \quad | \ln$ $x_1 = \ln(3)$
$u_2 = \frac{4}{2} = 2$ $e^x = 2 \quad | \ln$ $\ln(2) = x_2$

20. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte und die Asymptote von K_f. Skizzieren Sie K_f.

a) $f(x) = 4e^{-0,25x} - 3$ b) $f(x) = -\frac{1}{8}e^{3x} + 3$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) =$ $f(0) =$

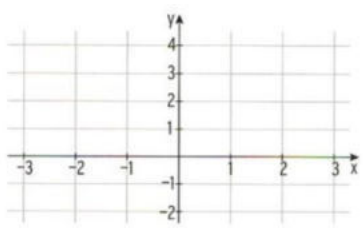
$S_y($ $S_y($

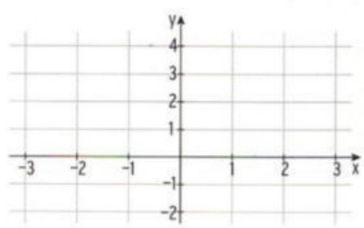
Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = 0$ $f(x) = 0$

$N($ $N($

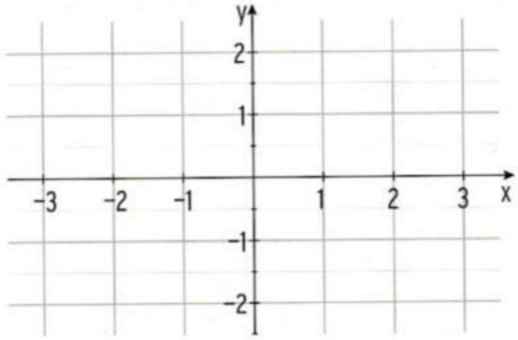
Asymptote: $y =$ $y =$





15. Für welche Werte von c hat die Gleichung $e^x + c = 0$ eine Lösung?
Antwort: Für c < 0

Begründen Sie mithilfe einer Skizze:



16. Lösen Sie die Gleichung mithilfe des Logarithmus .

$3e^{2x} = 15$	$2e^{-x} - 3 = 1$	$7 - 2e^{-0,2x} = 0$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1$
$3e^{2x} = 15$ $e^{2x} = 5$ $2x = \ln(5)$ $x = \frac{1}{2}\ln(5)$	$2e^{-x} - 3 = 1 \mid +3$ $2e^{-x} = 4 \mid :2$ $e^{-x} = 2 \mid \ln$ $-x = \ln(2) \mid T$ $x = \ln(2)$	$7 - 2e^{-0,2x} = 0 \mid +2e^{-0,2x}$ $7 = 2e^{-0,2x} \mid :2$ $3,5 = e^{-0,2x} \mid \ln$ $\ln(3,5) = -0,2x \mid :-0,2$ $\frac{\ln(3,5)}{-0,2} = x$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1 \mid -2$ $-e^{\frac{2}{5}x} = -3 \mid T$ $3 = e^{\frac{2}{5}x} \mid \ln$ $\ln(3) = \frac{2}{5}x \mid :\frac{2}{5}$ $\frac{\ln(3)}{\frac{2}{5}} = x$

17. Lösen Sie die Gleichung mit dem Satz vom Nullprodukt.

$e^{2x} - 3e^x = 0$	$e^x - 3e^{-x} = 0$	$e^x - 4e^{2x} = 0$
$e^x(e^x - 3) = 0$ $e^x = 0 \vee e^x - 3 = 0$ $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$ $e^x \neq 0$	$e^x(1 - 3e^{-2x}) = 0$ $\downarrow$ $\neq 0$ $\hookrightarrow 1 - 3e^{-2x} = 0 \mid +3e^{-2x}$ $1 = 3e^{-2x} \mid :3$ $\frac{1}{3} = e^{-2x} \mid \ln$ $\ln(\frac{1}{3}) = -2x \mid :(-2)$ $-\frac{\ln(\frac{1}{3})}{2} = x$	$e^x(1 - 4e^x) = 0$ $\downarrow$ $\neq 0$ $\hookrightarrow 1 - 4e^x = 0 \mid +4e^x$ $1 = 4e^x \mid :4$ $\frac{1}{4} = e^x \mid \ln$ $\ln(\frac{1}{4}) = x$

18. Lösen Sie die Gleichung mit Substitution.

$e^{2x} - 4e^x = -3$	$-2e^{2x} + 6e^x + 8 = 0$	$e^x + 4e^{-x} + 5 = 0 \mid \cdot e^x$
$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ $e^x = u \;\; (e^{2x} = u^2)$ $u^2 - 4u + 3 = 0$ $u = 1 \vee u = 3$ $e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$ $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$	$-2u^2 + 6u + 8 = 0 \mid :(-2)$ $u^2 - 3u - 4 = 0$ $u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$ $u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$ $u_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ $u_1 = \frac{4}{2} = 2$ $\quad e^x = 2 \mid \ln$ $\quad \ln(2) = x_1$ $u_2 = \frac{2}{2} = 1$ $\quad e^x = 1 \mid \ln$ $\quad \ln(1) = x_2$	$e^{2x} + 4 + 5e^x$ $u^2 + 5u + 4 = 0$ $u_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ $u_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$ $u_{1/2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$ $u_1 = \frac{-2}{2} = -1$ $\quad e^x = -1 \mid \ln$ $\quad \ln(-1) = x$ ↯ $u_2 = \frac{-8}{2} = -4$ $\quad e^x = -4 \mid \ln$ $\quad \ln(-4) = x$ ↯

Verdopplungszeit

1000€ ⇒ 2000€

Wachstumskonstante

$$1000\,e^{0{,}077\cdot t} = 2000 \quad | :1000$$

$$e^{0{,}077\cdot t} = 2 \quad | \ln$$

$$0{,}077\cdot t = \ln(2) \quad | :0{,}077$$

$$\underline{\underline{t = 9{,}01}} \approx 9 \text{ Jahre}$$

⇒

allg. $\boxed{T_V = \frac{\ln(2)}{k}}$

Wachstumskonstante

Halbwertszeit

Bsp. 100kg atomarer Brennstoff

Zerfall 5% jährlich

⇒ 100kg → 50kg

NR:

0,95 Faktor

Wachstumsfaktor: 0,95

$$100\cdot e^{\ln(0{,}95)\cdot t} = 50 \quad | :100$$

$$e^{\ln(0{,}95)\cdot t} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$

$$\ln(0{,}95)\cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad | :\ln(0{,}95)$$

$$\underline{\underline{t = 13{,}5 \text{ Jahre}}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}6931\ldots$$

$$\ln(2) = 0{,}6931\ldots$$

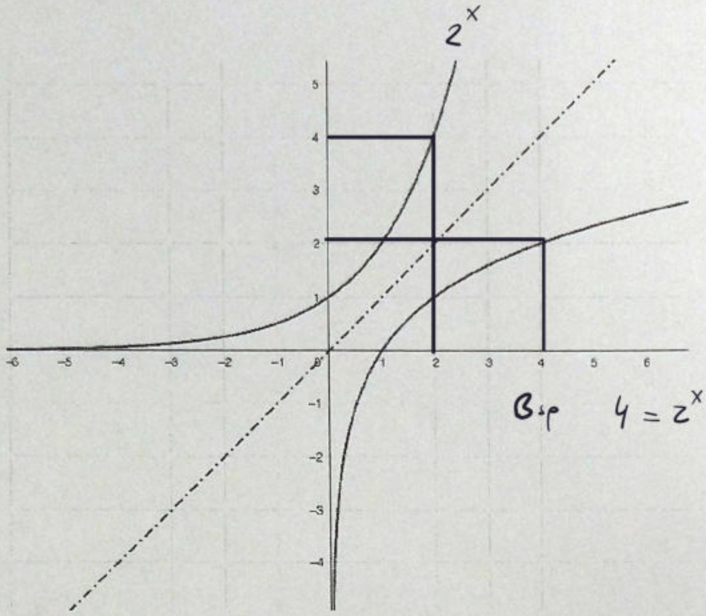
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

allg. Halbwertszeit

$$\boxed{T_H = -\frac{\ln(2)}{k}}$$

Thema Exponentialgleichungen

Beispiel :



f(x) = 2^x

g(x) = $\log_2(x)$

Allgemeine Form : $a^x = b$

Lösung : $x = \log_a(b)$

Definition : Der Logarithmus von ‚b' zur Basis ‚a' ist diejenige Hochzahl, mit der man ‚a' potenzieren muss, um ‚b' zu erhalten.

$(a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$

Regeln :

(1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

(2) $\log_a(u:v) = \log_a(u) - \log_a(v)$

(3) $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$

Exponentialgleichungen

1) Der Logarithmus

Bsp $2^x = 8$ $\Rightarrow$ gesucht ist der Exponent x.

Lösung $x = 3$ $\Rightarrow$ Logarithmus von 8 zur Basis 2.

Schreibweise: $3 = \log_2(8)$

$\Longrightarrow$ **Exponentialgleichung zur Basis e**

Bsp. $e^x = 4$

Logarithmus naturalis

(Natürlicher Logarithmus)

Lösung: $x = \ln(4)$

$x \approx 1{,}38$

2) Lösen von Exponentialgleichungen

a) Anwendung des Logarithmus

bsp. 1

$\Rightarrow$ $e^x = 5 \quad | \ln$

$\Rightarrow$ $\ln(e^x) = \ln(5)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x = \ln(5)}}$

bsp. 3

$e^{2x} - 2e = 0 \quad | +2e$

$e^{2x} = 2e \quad | \ln$

$2x = \ln(2e) \quad | :2$

$x = \frac{\ln(2e)}{2}$

bsp. 2

$\frac{1}{2}e^{1-x} - 3 = 0 \quad | +3$

$\frac{1}{2}e^{1-x} = 3 \quad | \cdot 2$

$e^{1-x} = 6 \quad | \ln$

$1 - x = \ln(6) \quad | -1$

$-x = \ln(6) - 1 \quad | \cdot(-1)$

$x = -\ln(6) + 1$

bsp 4

$e^{-2x} + 3 = 0 \quad | -3$

$e^{-2x} = -3 \quad | \ln$

$-2x = \ln(-3)$ ↯

$-e^{-2x} - 3 = 0 \quad | +3$

$e^{-2x} = 3 \quad |$ ↯

b)

Ausklammern und SuNP

Bsp. 1 $e^{x} - e^{2x} = 0$

$e^{x} \cdot (1 - e^{x}) = 0$

$e^{x} \neq 0$

$1 - e^{x} = 0 \quad | + e^{x}$

$1 = e^{x} \quad | \ln$

$x = \ln(1)$

$\underline{\underline{x = 0}}$

Bsp. 2

$4e^{-x} - 2e^{x} = 0$

$e^{-x}(4 - 2e^{2x}) = 0$

$e^{-x} \neq 0$

$4 - 2e^{2x} = 0 \quad | -4$

$-2e^{2x} = -4$

$e^{2x} = 2 \quad | \ln$

$2x = \ln(2) \quad | :2$

$x = \frac{\ln(2)}{2}$

Potenzregeln

$e^{x} \cdot e^{x} = e^{x+x} = e^{2x}$

$e^{x} \cdot e^{-x} = e^{0} = 1$

$e^{2x} \cdot e^{-x} = e^{x}$

$e^{x} \cdot e^{y} = e^{x+y}$

c)

Lösen durch Substitution

Bsp: $e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$

$e^{x} \cdot e^{x} - 5e^{x} + 6 = 0$

Substitution $e^{x} = u$

$u^2 - 5u + 6 = 0$

$u_{1_2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$u_{1_2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$u_{1_2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$u_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ $\Rightarrow$ Resubsitution

$u_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

$u = e^{x}$

$e^{x} = 2 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x_1 = \ln(2)}}$

$e^{x} = 3 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x_2 = \ln(3)}}$

Weitere Regeln:

$e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$ ← allgemein

$(e^{x})^2 = e^{2x}$; $(e^{-x}) = e^{-2x}$

Bsp.

$e^{x} - 20e^{-x} = -1 \quad | +1$

$e^{x} - 20e^{-x} + 1 = 0 \quad | \cdot e^{x}$

$e^{2x} - 20 + e^{x} = 0$

$u^2 + u - 20 = 0$

$u_{1_2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$

$u_{1_2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$

$u_{1_2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$

$u_1 = \frac{-1+9}{2} = 4$ $\quad e^{x} = 4 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x = \ln(4)}}$ ✓

$u_2 = \frac{-1-9}{2} = -5$ $\quad x_2 = \ln(-5)$ ↯

S. 139

① c) $e^{x}-6e^{3x}=0$

$e^{x}(1-6e^{2x})=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $1-6e^{2x}=0 \quad |+6e^{2x}$

$1=6e^{2x} \quad |:6$

$\frac{1}{6}=e^{2x} \quad |\ln$

$\ln\left(\frac{1}{6}\right)=2x \quad |:2$

$\underline{\underline{\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{2}=x}}$

② b) $0{,}5e^{3x}-5e^{2x}=0 \quad |\cdot 2$

$e^{3x}-10e^{2x}=0$

$e^{2x}(1e^{x}-10)=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $1e^{x}-10=0 \quad |+10$

$e^{x}=10 \quad |\ln$

$\underline{\underline{x=\ln(10)}}$

d) $\frac{e^{x}}{2}-\frac{e^{-x}}{4}=0 \quad \left|+\frac{e^{-x}}{4}\right| \cdot 4$

$2e^{x}-e^{-x}=0$

$e^{x}\cdot(2-e^{-2x})=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $2-e^{-2x}=0 \quad |+e^{-2x}$

$2=e^{-2x} \quad |\ln$

$\ln(2)=-2x \quad |:(-2)$

$\underline{\underline{\frac{\ln(2)}{-2}=x}}$

③ $e^{2x}+e^{x}=0$

④ $e^{5x}(e^{x}-3)=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $e^{x}-3=0 \quad |+3$

$e^{x}=3 \quad |\ln$

$\underline{\underline{x=\ln(3)}}$

⑤ $ae^{2x}-e^{x}=0$

$e^{x}(ae^{x}-1)=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $ae^{x}-1=0 \quad |+1$

$a\cdot e^{x}=1 \quad |:a$

$e^{x}=\frac{1}{a} \quad |\ln$

$x=\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ $a>0$

nicht lösbar für $a\leq 0$

c) Lösen durch Substitution

① a) $e^{x} = 30 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x = \ln(30)}}$

b) $e^{3x} = 12 \quad | \ln$

$3x = \ln(12) \quad | :3$

$\underline{\underline{x = \frac{\ln(12)}{3}}}$

c) $e^{1-x} = 1000 \quad | \ln$

$1-x = \ln(1000) \quad | -1$

$-x = \ln(1000) - 1 \quad | \cdot(-1)$

$\underline{\underline{x = -\ln(1000) - 1}}$

f) $e^{5x} - 4 = 0 \quad | +4$

$e^{5x} = 4 \quad | \ln$

$5x = \ln(4) \quad | :5$

$\underline{\underline{x = \frac{\ln(4)}{5}}}$

② a) $\frac{e^{-x}}{2} - 3 = 0 \quad | +3$

$\frac{e^{-x}}{2} = 3 \quad | \cdot 2$

$e^{-x} = 6 \quad | \ln$

$-x = \ln(6) \quad | \cdot(-1)$

$\underline{\underline{x = -\ln(6)}}$

i) $6e^{\ln(3)\cdot x} - 18 = 0 \quad | +18$

$6e^{\ln(3)\cdot x} = 18 \quad | :6$

$e^{\ln(3)\cdot x} = 3 \quad | \ln$

$\ln(3)\cdot x = \ln(3) \quad | :\ln(3)$

$\underline{\underline{x = 1}}$

③ $e^{2x} + 5 = 0 \quad | -5$

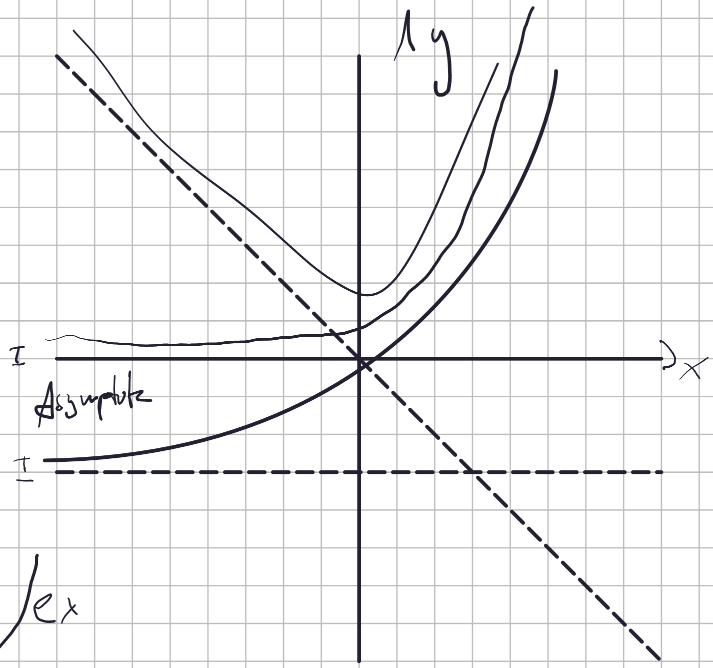
$e^{2x} = -5 \quad | \ln$

$2x = \ln(-5) \quad ↯$

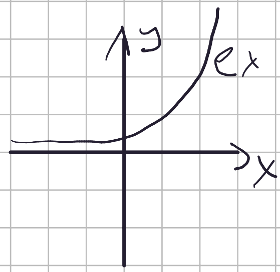
Da in ln nicht minus stehen darf

$e^{2x} + a = 0$

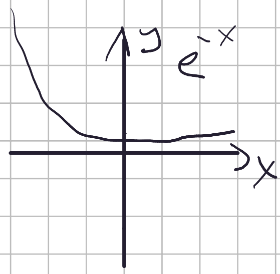
wenn a positiv ist.



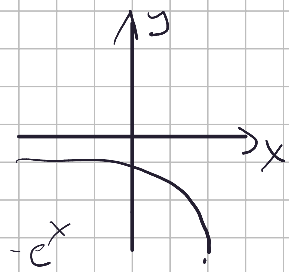
y
x
I
Asymptote
I



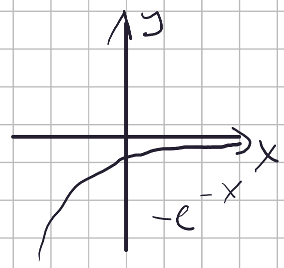
y
ex
x



y
e^{-x}
x



y
x
-e^x



y
x
-e^{-x}

Mathe I KA

1 a) $-2x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$x_{1,2} = 0$

$x_3 = -\frac{3}{8}$

$x^2 \cdot \left(-2x - \frac{3}{4}\right) = 0$

↳ $x_{1,2} = 0$ ↳ $-2x - \frac{3}{4} = 0 \quad | +2x$

$-\frac{3}{4} = 2x \quad | :2$

$-\frac{3}{8} = x_3$

b) $x^2(x^2 - 4) = 0$

↳ $x_{1,2} = 0$ → $x_{3,4} = x^2 - 4 = 0 \quad | +4$

$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x_{3,4} = \pm 2$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $\qquad x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$z_1 = \frac{2}{2} = 1 \quad \pm\sqrt{1} = \quad x_1 = -1, \; x_2 = 1$

$z_2 = \frac{8}{2} = 4 \quad \pm\sqrt{4} = \quad x_3 = 2, \; x_4 = -2$

2

a) $f(x) = 3x^4 - 1 =$ C

b) $g(x) = -3x^3 - x^2 =$ B

c) $f(x) = 0{,}5x^3 + 2x - 3 =$ F

d) $i(x) = -3x^3 + 4x =$ D

e) $j(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1 =$ E

f) $k(x) = 2x^4 - 3x^2 - 0{,}5 =$ A

3

$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x$

$g(x) = -0{,}5x$

$0{,}5x^3 - 3x = -0{,}5x \quad | +0{,}5x$

$0{,}5x^3 - 2{,}5x = 0$

$x \cdot (0{,}5x^2 - 2{,}5) = 0$

↳ $x_1 = 0$ ↳ $x_{2,3} = 0{,}5x^2 - 2{,}5 = 0 \quad | +2{,}5$

$0{,}5x^2 = 2{,}5 \quad | :0{,}5$

$1x^2 = 5 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x_1 = \sqrt{5}$

$x_2 = -\sqrt{5}$

$S_1\left(-\sqrt{5} \;\middle|\; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$y = -0{,}5 \cdot (-\sqrt{5})$

$y = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$S_2(0 \mid 0)$

$y = -0{,}5 \cdot 0$

$S_3\left(\sqrt{5} \;\middle|\; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$y = -0{,}5 \cdot \sqrt{6}$

(4) Funktion dritten Grades

$x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -10 \quad P(2|-6)$

$f(x) = a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)$

$-6 = a \cdot (2-(-1)) \cdot (2-1) \cdot (2-(-10))$

$-6 = a \cdot (3) \cdot (1) \cdot (12)$

$-6 = 36a \quad | : 36$

$a = -\frac{1}{6}$

$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x+10)}}$

(5)

Fkt. 4. Grades

mit $f(0) = 3$; $f(1) = 4$; $f(-2) = -5$

Symmetrisch zur y-Achse

exponenten gerade

$P_1(0|3)$

$P_2(1|4)$

$P_3(-2|-5)$

$f(x) = ax^4 + cx^2 + c$

$3 = e$

I. $4 = a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + 3$

$1 = a + c \quad | \cdot 4$

$4 = 4a + 4c$

II $-5 = a \cdot (-2)^4 + c \cdot (-2)^2 + 3$

$-8 = 16a + 4c$

II - I · 4

$-12 = 12a \quad | : 12$

$-1 = a$

$-1 + c = 1 \quad | + 1$

$a = -1 \quad c = 2$

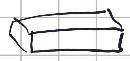
$\underline{\underline{f(x) = -1x^4 + 2x^2 + 3}}$

Mathe II

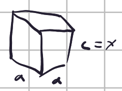
(1) 4,5 T Sand

$4500\,kg : 1500 \frac{kg}{m^3} = 3\,m^3$

$\Rightarrow$ allg: $V = a \cdot b \cdot c$



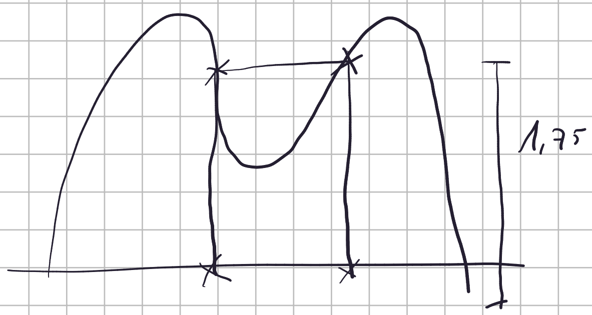
$\Rightarrow V = (4-2x)^2 \cdot x$



$= (16 - 16x + 4x^2) \cdot x$

$V(x) = 4x^3 - 16x^2 + 16x$

$x_{min} = 0{,}3$
$x_{max} = 1{,}2$



$\Rightarrow f(x) = g(x)$

$-x^4 + 2x^2 + 1 = 1{,}75 \quad | -1{,}75$

$-x^4 + 2x^2 - 0{,}75 = 0 \qquad x^2 = z$

$-z^2 + 2z - 0{,}75 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$

$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{-2}$

$z_1 = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \begin{matrix} x_1 = 0{,}707 \\ x_2 = -0{,}707 \end{matrix}$

$z_2 = \frac{-2-1}{-2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$0{,}707 \cdot 2 = \underline{\underline{1{,}41\,m}}$