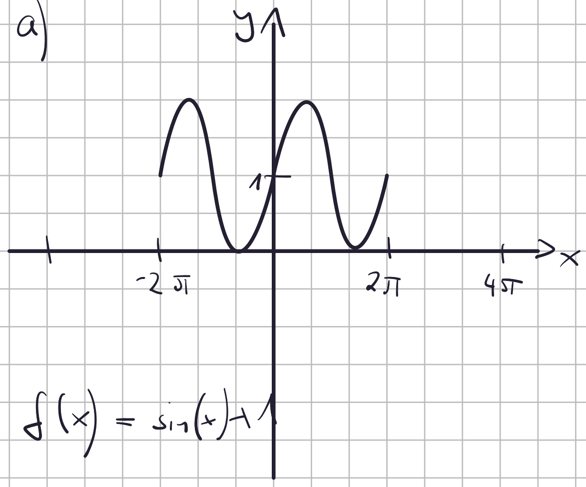
S. 175

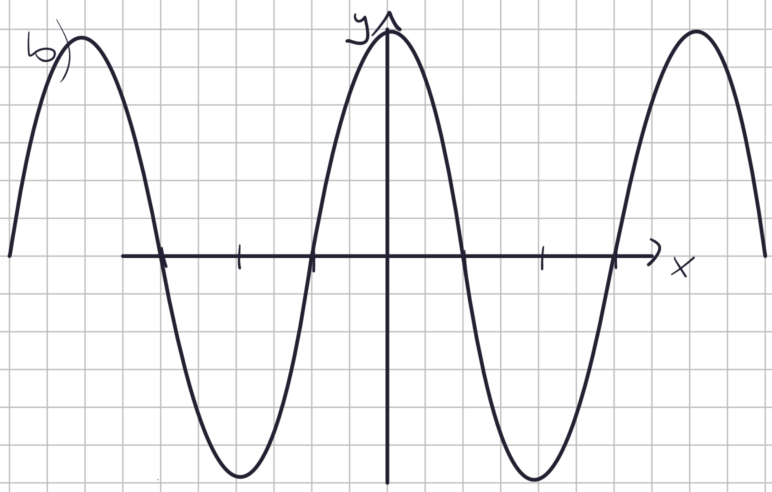
① a) $f(x) = 3\sin(x)$ ← Amplitude   b) Amp: 2   c) -5   d) 4   e) -6   f) -2

② a)



$f(x) = \sin(x) + 1$

b)



$f(x) = 3\cos(2x)$

$\cos(x) = 0{,}88 \quad | \arccos$

$\arccos(\cos(x)) = \arccos(0{,}88)$

$x = 0{,}494$

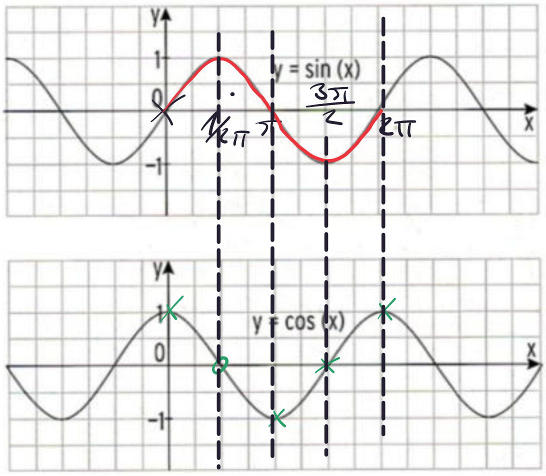
1. Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe des WTR.

x (im Bogenmaß)	sin(x)	cos(x)
1	0,84	0,54
$\frac{1}{6}\pi$	0,5	0,87
$-\frac{1}{6}\pi$	– 0,5	0,87
π oder 0 oder 2π	0	$\cos(0) = 1$ $\cos(\pi) = -1$

x (grad)	sin(x)	cos(x)
28,35°	0,47	0,88
90	1	0
44,42	0,7	0,71
165,93	0,24	– 0,97

2. Vervollständigen Sie die Tabelle mithilfe des WTR. Skalieren Sie die x-Achse.

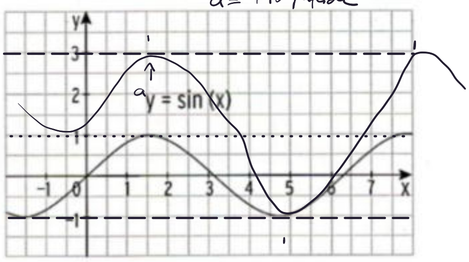
x	sin(x)	cos(x)
0	0	1
2π	0	1
π	0	-1
$\frac{1}{2}\pi$	1	0
$-\frac{1}{2}\pi$	-1	0
$-\frac{3}{2}\pi$	1	0
$\frac{5}{2}\pi$	1	0
7π	0	-1
12π	0	1



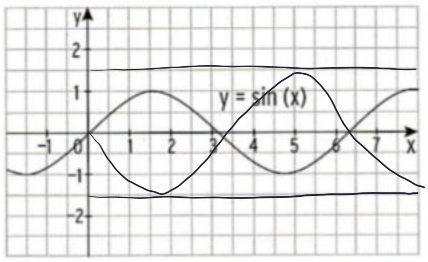
$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

3. Zeichnen Sie das zugehörige Schaubild ein.

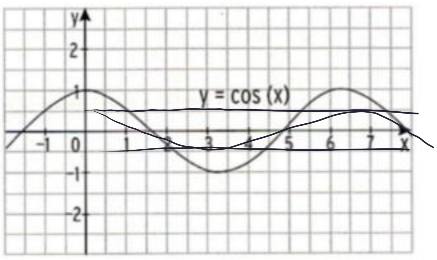
a) $f(x) = 2\sin(x) + 1$ $\quad 2 = a$ $\quad a =$ Amplitude



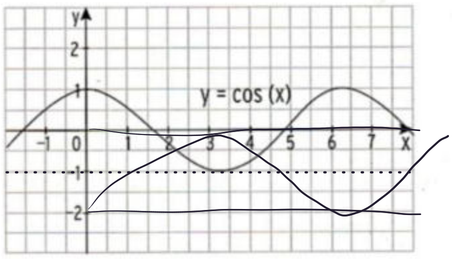
b) $f(x) = -1{,}5\sin(x)$



c) $f(x) = 0{,}5\cos(x)$



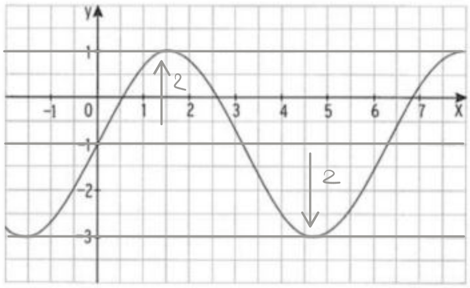
d) $f(x) = -\cos(x) - 1$



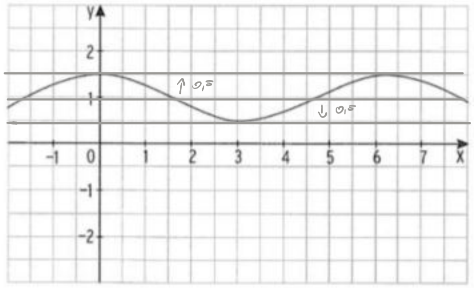
sinus kreuzt y-Achse bei Mittellinie

4. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm der Form f(x) = asin(x) + b bzw. f(x) = acos(x) + b.

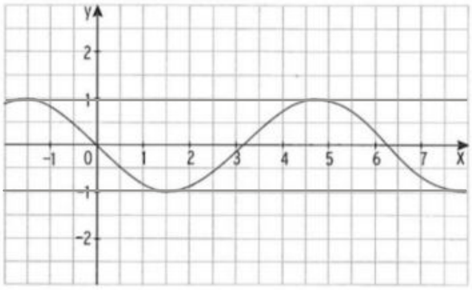
a) f(x) = 2 sin (x) − 1



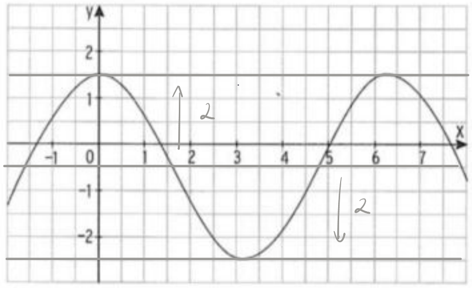
b) f(x) = 0,5 cos(x) + 1



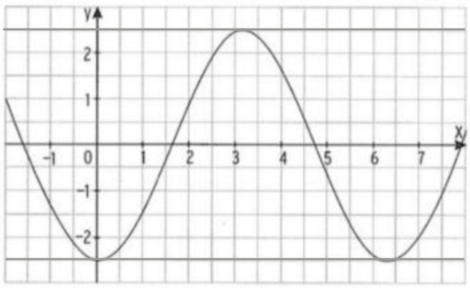
c) f(x) = − sin (x)



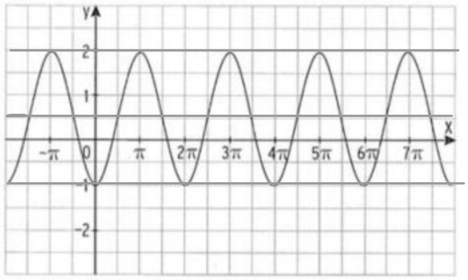
d) f(x) = 2 cos (x) − 0,5



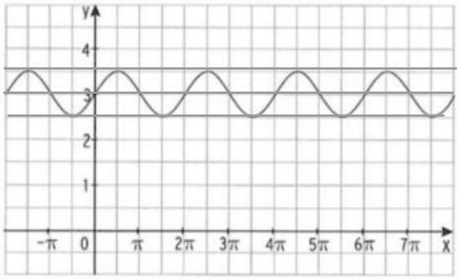
e) f(x) = −2,5 cos (x)



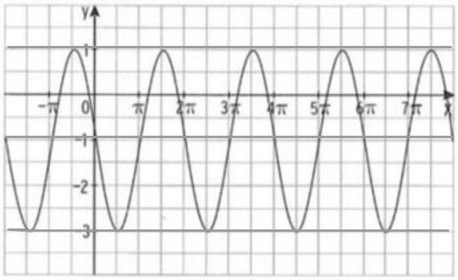
f) f(x) = −1,5 cos (x) + 0,5



g) f(x) = 0,5 sin (x) + 3



h) f(x) = −2 sin (x) − 1



5. Ergänzen Sie die folgenden Sätze.
   a) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 0,5sin(x) − 1 entsteht aus der Sinuskurve (y = sin(x)) durch Streckung mit dem Faktor 0,5 in y-Richtung und durch Verschiebung um 1 nach unten.
   b) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = − cos(x) + 2 entsteht aus der Kosinuskurve (y = cos(x)) durch Spiegelung an der x-Achse und durch Verschiebung um 2 nach oben.
   c) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = 2cos(x) − 3 entsteht aus der Kurve mit y = cos(x) durch Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung und durch Verschiebung um 3 nach unten.
   d) Das Schaubild der Funktion g mit g(x) = − π sin(x) entsteht aus der Kurve mit y = sin(x) durch Spiegelung an der x-Achse und Streckung um π in y-Richtung.

6. Geben Sie die Amplitude a und die Periode p der Funktion f an.

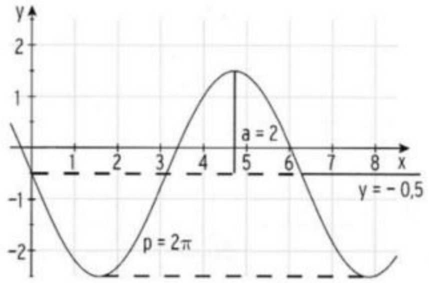
Funktionsterm	a	p	Funktionsterm	a	p
$f(x) = 0{,}25\sin(\pi x)$	$a = 0{,}25$	$p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$	$f(x) = -5\cos(\frac{\pi}{2}x)$	-5	$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$
$f(x) = 6\cos(5x)$	$a = 6$	$p = \frac{2\pi}{5}$	$f(x) = 1{,}6\sin(3x)$	$1{,}6$	$p = \frac{2\pi}{3}$
$f(x) = -4\sin(\frac{x}{3})$	$a = -4$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$	$f(x) = -\frac{4}{3}\sin(\frac{x}{2})$	$-\frac{4}{3}$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
$f(x) = 3\cos(2x)$	$a = 3$	$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$	$f(x) = \cos(x) + 1$	1	$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

7. Geben Sie den Funktionsterm einer trigonometrischen Funktion mit der Periode p und der Amplitude a an.

a	p	$f(x) = a \cdot \sin(kx)$	a	p	$f(x) = a \cdot \cos(kx)$
$a = 2$	$p = 2$	$f(x) = 2\sin(\pi x)$	$a = 6$	$p = 4\pi$	$f(x) = 6\cos(\frac{x}{2})$
$a = \pi$	$p = 1$	$f(x) = \pi\sin(2\pi x)$	$a = 4$	$p = 4$	$f(x) = 4\cos(\frac{\pi}{2}x)$
$a = 0{,}5$	$p = \frac{2}{3}\pi$	$f(x) = 0{,}5\sin(3x)$	$a = \frac{5}{2}$	$p = \frac{3}{4}$	$f(x) = \frac{5}{2}\cos(\frac{8\pi}{3}x)$

8. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

$g(x) = -2\sin(x) - 0{,}5$



Lösungshinweise:
keine Verschiebung in x-Richtung

Mittellinie: $d = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{1{,}5 + (-2{,}5)}{2} = -0{,}5$

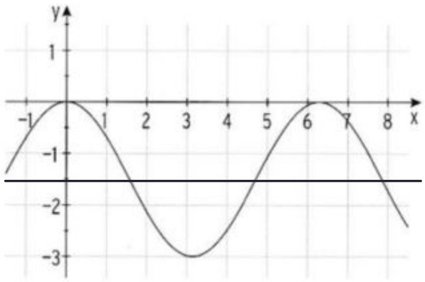
Amplitude: $\frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{1{,}5 - (-2{,}5)}{2} = 2$

Wegen Spiegelung an der x-Achse: $a = -2$

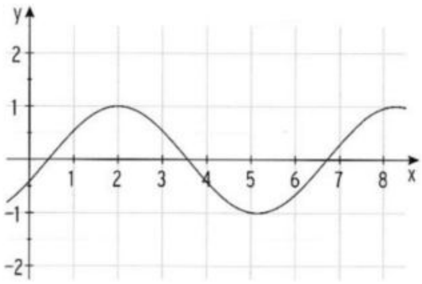
Periode: Differenz benachbarter Minimalstellen
Aus $p = \frac{2\pi}{b}$ folgt $b = \frac{2\pi}{p} = 1$

Einsetzen in $g(x) = a\sin(bx) + d$

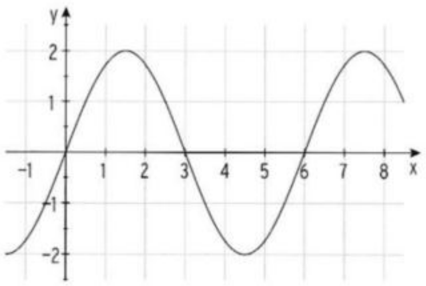
g(x) = ________________



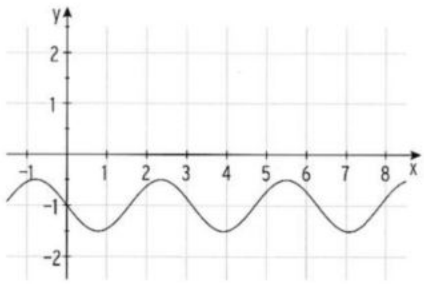
g(x) = ________________



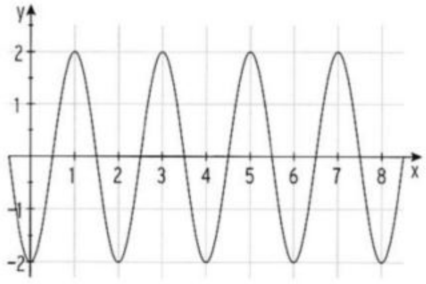
g(x) = ________________



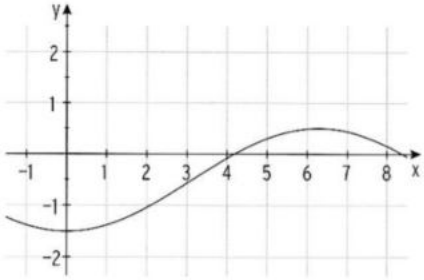
g(x) = ________________



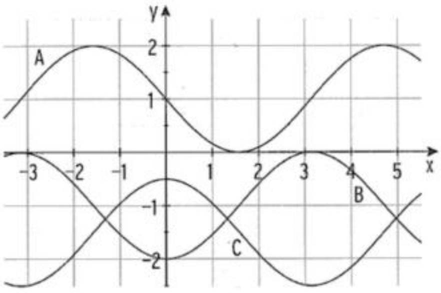
g(x) = ________________



g(x) = ________________



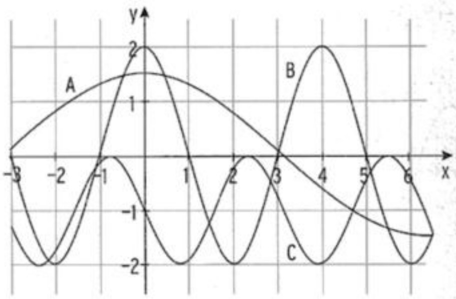
12. Ordnen Sie zu.



____: $f(x) = -\cos(x) - 1$

____: $g(x) = \cos(x) - 1{,}5$

____: $h(x) = -\sin(x) + 1$



____: $f(x) = 1{,}5\cos(0{,}5x)$

____: $g(x) = -1 - \sin(2x)$

____: $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x)$

13. Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

a) Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	☐ w ☐ f
b) Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	☐ w ☐ f
c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	☐ w ☐ f
d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x + 1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	☐ w ☐ f
e) Die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$.	☐ w ☐ f
f) Die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(x) + 4$ hat den Wertebereich $[1; 7]$.	☐ w ☐ f

14. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

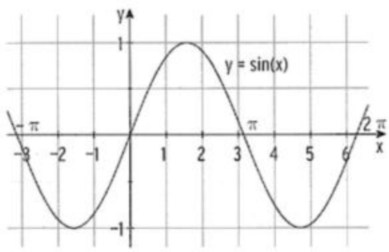
a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x =$

____

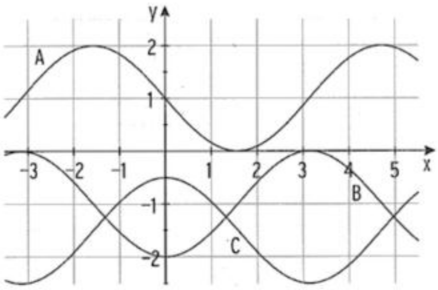
b) $\sin(x) = 0{,}5 \Rightarrow x =$

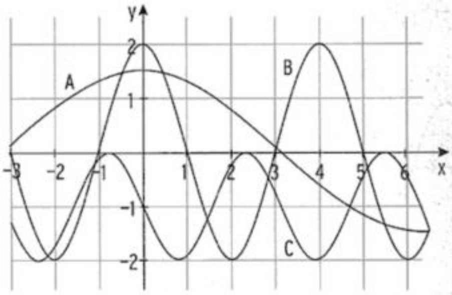
____

c) $\sin(x) = -0{,}5 \Rightarrow x =$



12. Ordnen Sie zu.





____: $f(x) = -\cos(x) - 1$

____: $g(x) = \cos(x) - 1{,}5$

____: $h(x) = -\sin(x) + 1$

____: $f(x) = 1{,}5\cos(0{,}5x)$

____: $g(x) = -1 - \sin(2x)$

____: $h(x) = 2\cos(\frac{\pi}{2}x)$

13. Sind die Aussagen falsch (f) oder wahr (w)?

a) Durch eine Streckung in y-Richtung mit Faktor $\frac{3}{2}$ vergrößert sich die Amplitude einer Funktion.	☐ w ☐ f
b) Durch eine Streckung in x-Richtung mit Faktor 2 vergrößert sich die Periodenlänge einer Funktion.	☐ w ☐ f
c) Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 3\sin(3x)$ geht aus der Sinuskurve durch eine Streckung mit Faktor 3 in x- und y-Richtung hervor.	☐ w ☐ f
d) Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = 2\sin(x + 1)$ geht aus der Sinuskurve durch Streckung in x-Richtung und Verschiebung um eine Einheit nach links vor.	☐ w ☐ f
e) Die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(x) + 1$ hat den Wertebereich $[-2; 2]$.	☐ w ☐ f
f) Die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(x) + 4$ hat den Wertebereich $[1; 7]$.	☐ w ☐ f

14. Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Lesen Sie alle Lösungen der Gleichungen im Intervall $[-\pi; 2\pi]$ aus der Zeichnung ab.

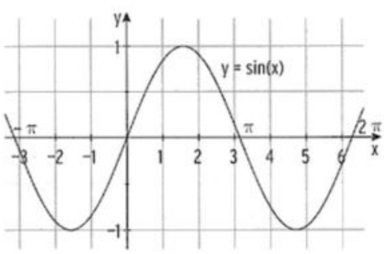
a) $\sin(x) = -1 \Rightarrow x =$

____

b) $\sin(x) = 0{,}5 \Rightarrow x =$

____

c) $\sin(x) = -0{,}5 \Rightarrow x =$



15. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall [0; 2π] an.

a) $2\sin(x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(x) = 0{,}5$	c) $2\sin(x) = -1$	d) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ mithilfe der Sinuskurve: $x_2 = \frac{3\pi}{4}$	WTR: $x = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $x = -\frac{\pi}{3} \notin [0; 2\pi]$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$		

16. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall [0; 2π] an.

a) $2\sin(2x) = \sqrt{2}$	b) $\cos(\frac{x}{2}) = 0{,}5$	c) $2\sin(\frac{\pi}{3}x) = -1$	d) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ WTR: $z_1 = \frac{\pi}{4}$ Mit der Sinuskurve: $z_2 = \frac{3\pi}{4}$ Mit $z = 2x$: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ Periode $p = \pi$: $x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ $x = \frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{11}{8}\pi$ Lösungen: $x_1 = \frac{\pi}{8}$; $x_2 = \frac{3\pi}{8}$ $x_3 = \frac{9\pi}{8}$; $x_4 = \frac{11\pi}{8}$	WTR: $z_1 = \frac{\pi}{3}$ Symmetrie: $z_2 = -\frac{\pi}{3}$ Mit $z = \frac{x}{2}$: $x_{1\|2} = \pm\frac{2\pi}{3}$ Lösung: $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ ($x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi > 2\pi$ keine Lösung)		

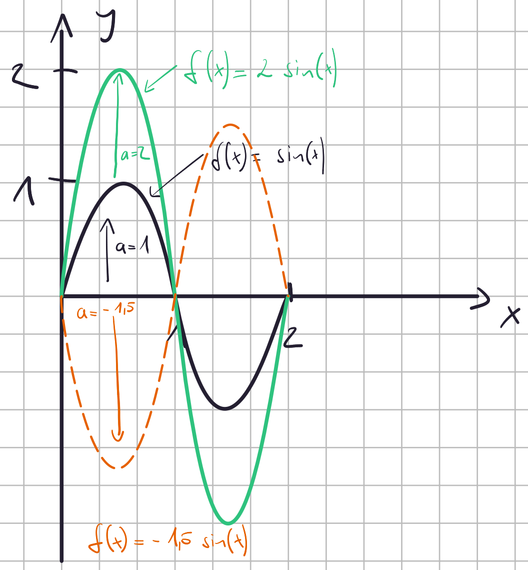
17. Geben Sie alle exakten Lösungen im Intervall [0; 2π] an.

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$	b) $\sin(\frac{\pi}{4}x) = 0$	c) $\cos(\frac{x}{3}) = -0{,}5$	d) $\cos(2x) = 0$

Die allgemeine Sinusfunktion

cos ist um $\frac{\pi}{2}$ von sin verschoben

(1) $\Longrightarrow \quad f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$

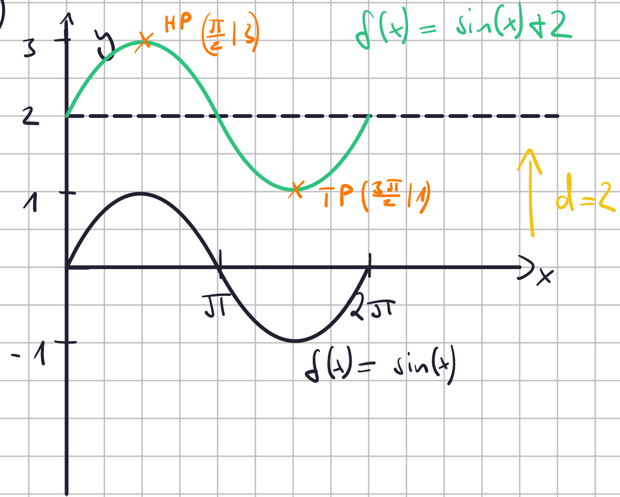


Die Amplitude a berechnet sich aus:

$$\boxed{a = \frac{y_H - y_T}{2}}$$

Streckung in y-Richtung: a

(2)

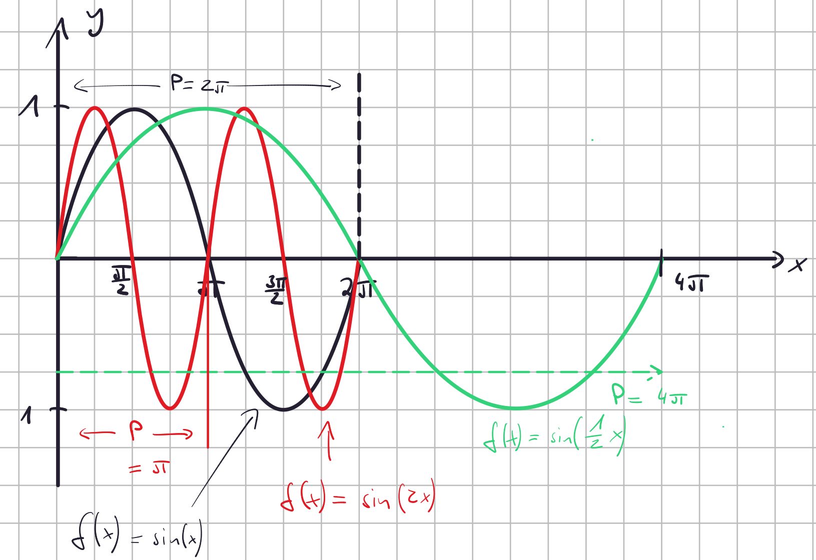


d bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung

$$\boxed{d = \frac{y_H + y_T}{2}}$$

Verschiebung in y-Richtung: d

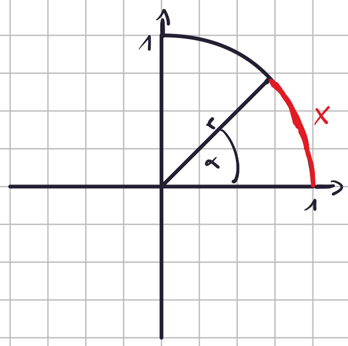
(3)



$\boxed{\text{Periode} \quad p = \frac{2\pi}{b}}$ $\Rightarrow \quad b = \frac{2\pi}{b}$

Streckung in x-Richtung: b

Das Bogenmaß eines Winkels



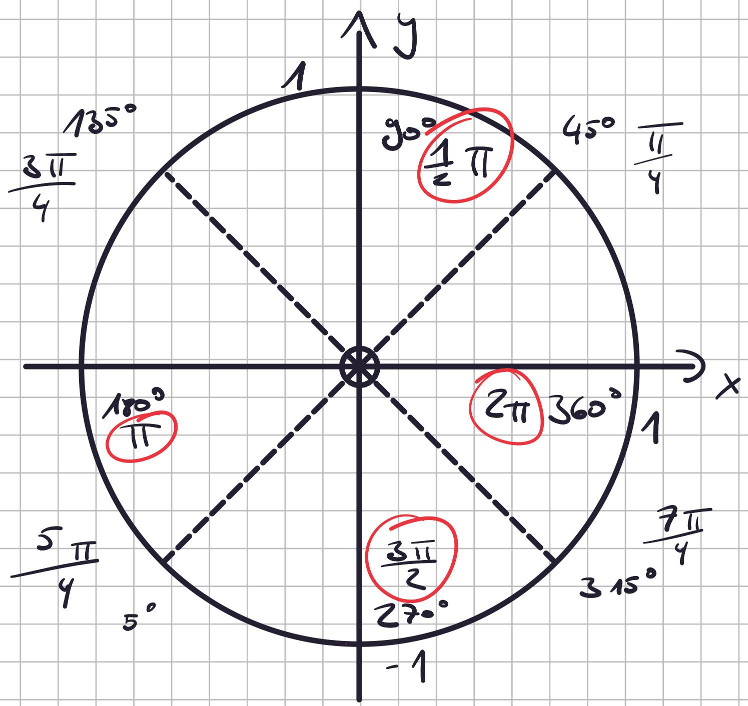
Kreisumfang: $U = 2r \cdot \pi$

mit $r = 1 \Rightarrow U = 2\pi$

Winkelmaß Vollkreis: 360°

$$\Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{2\pi}{360°} \quad \Big| \cdot \alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°} \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{360° \cdot x}{2\pi} = \frac{180° \cdot x}{\pi} \end{aligned}}$$

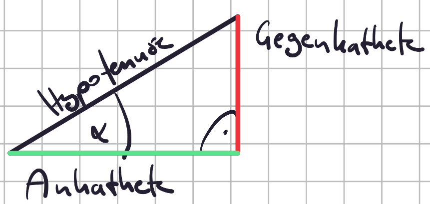


Trigonometrische Funktionen

Bsp.

- Ebbe/Flut
- Atmung
- Pendeluhr
- Wechselstrom

A) Winkelfunktionen für Winkel zwischen 0°–90°

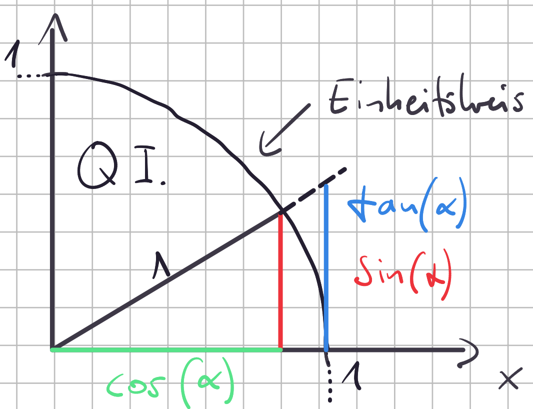


$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

G A G
H H A



für:

$$0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$$

$$0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

$$\sin(0^\circ) = 0$$

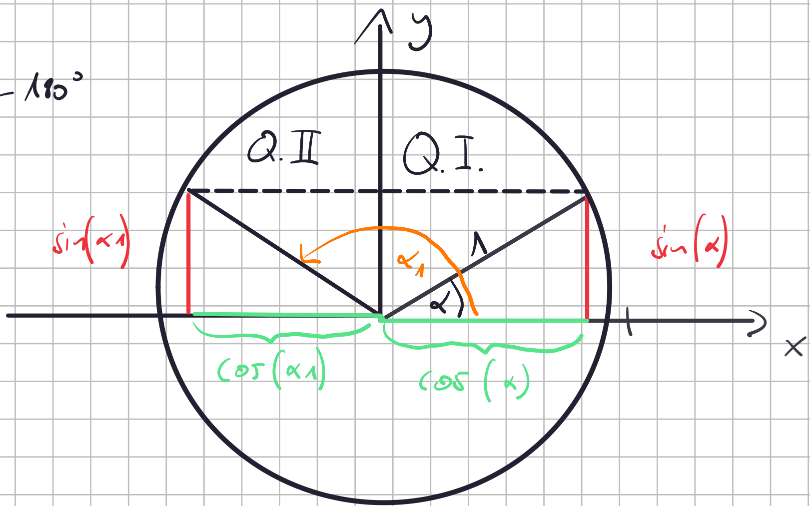
$$\sin(90^\circ) = 1$$

$$\cos(0^\circ) = 1$$

$$\cos(90^\circ) = 0$$

B) Winkelfunktionen in den Quadranten

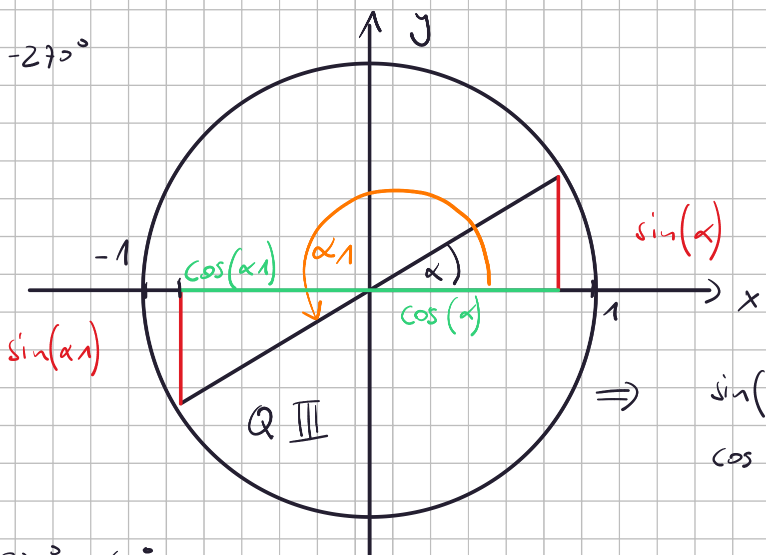
1) $\alpha_1: 90° - 180°$



$\Rightarrow \sin(\alpha_1) = \sin(\alpha)$

$\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha)$

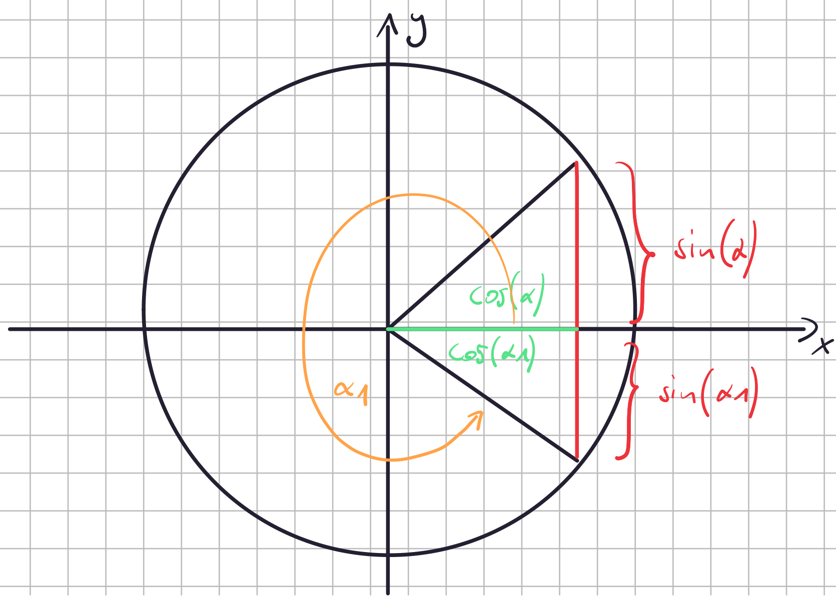
2) $\alpha_1: 180° - 270°$



$\Rightarrow \sin(\alpha_1) = -\sin(\alpha)$

$\cos(\alpha_1) = -\cos(\alpha)$

3) $\alpha_1: 270° - 360°$



$\Rightarrow \sin(\alpha_1) = -\sin(\alpha)$

$\cos(\alpha_1) = \cos(\alpha)$

Trigonometric

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = a \cdot q^{t} \\ f(t) = a \cdot e^{k \cdot t} \end{array}\right\} \text{gleich} \qquad k = \ln(q)$$

Bei Prozentrechnung a immer 1 setzen.

⑤ Ist exponentiell

$q = 1{,}35$

$f(t) = 3{,}9 \cdot 1{,}35^{t}$

$13 = 3{,}9 \cdot 1{,}35^{t} \quad | :3{,}9$

$\frac{13}{3{,}9} = 1{,}35^{t} \quad | \log_{1{,}35}\left(\frac{13}{3{,}9}\right)$

$t = 4{,}01$ Jahren

A: Nach ca 4 Jahren.

S. 151 ②

gesamtgröße 8ha

$8ha = 80.000\,m^2$

Anfangsbestand: $150\,m^2$

$$80.000 = 150 \cdot q^t \quad |:150$$

$$\frac{80.000}{150} = 1{,}3^t \quad |\log$$

$$\log_{1,3}\left(\frac{80.000}{150}\right) = t$$

$$t \approx 23{,}93$$

Wochen

③

$$\% = k \cdot 1{,}046^8$$

Um 43 %

④

$$g(t) = g(0)e^{-0{,}0122 \cdot t}$$

$$g(20) = 24$$

$$g(0)\,e^{-0{,}0122 \cdot 20} = 24 \quad |:e^{-0{,}0122 \cdot 20}$$

$$g(0) = 30{,}63$$

Anfangsbestand = 30,63 Gramm.

$$30{,}63 \cdot e^{-0{,}0122 \cdot t} = 0{,}01 \quad |:30{,}63$$

$$e^{-0{,}0122 \cdot t} = \frac{0{,}01}{30{,}63} \quad |\ln$$

$$-0{,}0122 \cdot t = \ln\left(\frac{0{,}01}{30{,}63}\right) \quad |:-0{,}0122$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{30{,}63}\right)}{-0{,}0122}$$

$$\underline{\underline{t = 657{,}96 \text{ Tage}}}$$

c) $T_h = -\frac{\ln(2)}{k} = -\frac{\ln(2)}{-0{,}0122} = 56{,}8$ Tage

$k = \ln(q) \quad | \; e^{(k)} = e^{\ln(q)}$

$\underline{\underline{q = 0{,}99}}$

Prozentiale abnahme um ca. 1% pro Tag

$f(t) = 30{,}63 \cdot 0{,}99^{t}$

$f(t) = 25{,}05\ \%$

S. 151 ①

Lsg I.

$$30{,}2 = -\frac{\ln(2)}{k} \quad \Big|\cdot k$$

$$30{,}2\cdot k = -\ln(2) \quad \Big|:30{,}2$$

$$k = -\frac{\ln(2)}{30{,}2}$$

$$k = -0{,}022$$

$$f(t) = 1\cdot e^{-0{,}022\cdot t}$$

$$f(t) = 0{,}502 = \underline{\underline{50{,}2\,\%}}$$

$$f(t) = 1\cdot e^{-0{,}022\cdot t} = 0{,}10 \quad \Big|\ln$$

$$-0{,}022\cdot t = \ln(0{,}1) \quad \Big|:(-0{,}022)$$

$$t = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}022}$$

$$\underline{\underline{t = 100{,}32}}$$

A: Nach ungefähr 100 Jahren.

Lsg II.

$$f(t) = a\cdot q^t$$

100%

$$f(t) = 1\cdot q^{30{,}2} = 0{,}5 \quad \Big|:1$$

$$q^{30{,}2} = \frac{0{,}5}{1} \quad \Big|\sqrt[30{,}2]{}$$

$$q = 0{,}977$$

$$f(t) = 1\cdot 0{,}977^{30}$$

$$f(t) = 0{,}502 = \underline{\underline{50{,}2\,\%}}$$

$$f(t) = 1\cdot 0{,}977^{t} = 0{,}1 \quad \Big|\log_{0{,}977}(0{,}1)$$

$$t = 98{,}55$$

S. 144 Nr. 1

1 a) $y: f(0) = 2e^0 - 2 = 0$

$x: \quad 2e^x - 2 = 0 \quad | +2$

$2e^x = 2 \quad | :2$

$e^x = 1 \quad | \ln$

$x = \ln(1)$

b) $y: \quad f(0) = e^{-0} + 3 = 4$

$x: \quad e^{-x} + 3 = -3 \quad | \ln$

↯

c) $f(x) = 4 - 2e^x$

$y \; f(0) = 4 - 2e^0 = 2$

$x \; f(x) = 0 \Rightarrow 4 - 2e^x = 0 \quad | +2e^x$

$4 = 2e^x \quad | :2$

$2 = e^x \quad | \ln$

$x = \ln(2)$

d) $f(x) = e^{-0,4x} - 3$

$y: \quad f(x) = e^{-0,4 \cdot 0} - 3$

$f(0) = -2$

$x: \quad f(x) = 0 \Rightarrow e^{-0,4x} - 3 = 0 \quad | +3$

$e^{-0,4 \cdot x} = 3 \quad | \ln$

$-0,4 \cdot x = \ln(3) \quad | :(-0,4)$

$x = \frac{\ln(3)}{-0,4}$

e) $f(x) = -1 + 2e^{1,25x}$

$f(0) = -1 + 2e^{1,25 \cdot 0}$

$f(0) = 1$

$f(x) = 0 \Rightarrow -1 + 2e^{1,25x} = 0 \quad | +1$

$2e^{1,25x} = 1 \quad | :2$

$e^{1,25x} = \frac{1}{2} \quad | \ln$

$1,25x = \ln(\frac{1}{2}) \quad | :1,25$

$x = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{1,25}$

$f(0) = \frac{e}{2} - e^{0,5x}$

$f(0) = \frac{e}{2} - e^{0,5 \cdot 0}$

$y: \quad \underline{f(0) = \frac{e}{2} - 1}$

$x: \quad \frac{e}{2} - e^{0,5x} = 0 \quad | +e^{0,5x}$

$\frac{e}{2} = e^{0,5x} \quad | \ln$

$0,5x = \ln(\frac{e}{2}) \quad | :0,5$

$x = \frac{\ln(\frac{e}{2})}{0,5}$

⑤ a) $f(x) = -e^{2x}$

$g(x) = -6e^{x}$

Punkte bestimmen :

$\Rightarrow f(x) = g(x)$

$\Rightarrow -e^{2x} = -6e^{x}$

$-e^{2x} = -6e^{x} \quad | +6e^{x}$

$-e^{2x} + 6e^{x} = 0$

$e^{x}(-e^{x} + 6) = 0$

$\downarrow$

$\neq 0$

$\hookrightarrow -e^{x} + 6 = 0 \quad | + e^{x}$

$6 = e^{x} \quad | \ln$

$\underline{\underline{\ln(6) = x}}$

x einsetzen :

$-e^{2 \cdot \ln(6)} = -36$

$S(\ln(6) \mid -36)$

b) $f(x) = e^{2x} + 6$

$g(x) = 5e^{x}$

$e^{2x} + 6 = 5e^{x} \quad | -5e^{x}$

$e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$

$u^2 - 5u + 6 = 0$

$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$u_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$u_1 = 2 = e^{x}$

$u_2 = 3 = e^{x}$

$\Rightarrow$ Resubstitution

$x_1 = \ln(2)$

$x_2 = \ln(3)$

$S_1(\ln(2) \mid 10) \quad S_2(\ln(3) \mid 15)$

c)

$$f(x) = -e^{3x} + 2x$$

$$g(x) = 2x - 5$$

$$-e^{3x} + 2x = 2x - 5 \quad | + e^{3x} - 2x$$

$$0 = e^{3x} - 5 \quad | + 5$$

$$5 = e^{3x} \quad | \ln$$

$$\ln(5) = 3x \quad | : 3$$

$$\frac{\ln(5)}{3} = x$$

$$g(y) = 2 \cdot \frac{\ln(5)}{3} - 5$$

$$g(y) = -3{,}927$$

$$\underline{\underline{S\left(\frac{\ln(5)}{3} \,\middle|\, -3{,}927\right)}}$$

d)

$$f(x) = 2e^{0{,}5x} - 3x$$

$$g(x) = -3x + 1$$

$$2e^{0{,}5x} - 3x = -3x + 1 \quad | + 3x$$

$$2e^{0{,}5x} = 1 \quad | : 2$$

$$e^{0{,}5x} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$

$$0{,}5x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad | : 0{,}5$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}5}$$

$$g(y) = -3 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}5} + 1$$

$$g(y) = 5{,}158$$

$$\underline{\underline{S\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{0{,}5} \,\middle|\, 5{,}158\right)}}$$

(6)

$$5000e^{x} = 80.000 \cdot e^{-x} \quad \Big| -80.000e^{-x}$$

$$5000e^{x} - 80.000e^{-x} = 0$$

$$e^{x} \cdot \left(5000 - 80.000e^{-2x}\right) = 0$$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $5000 - 80.000e^{-2x} = 0 \quad \Big| +80.000e^{-2x}$

$$5000 = 80.000e^{-2x} \quad \Big| :80.000$$

$$\frac{1}{16} = e^{-2x} \quad \Big| \ln$$

$$\ln\left(\frac{1}{16}\right) = -2x \quad \Big| :(-2)$$

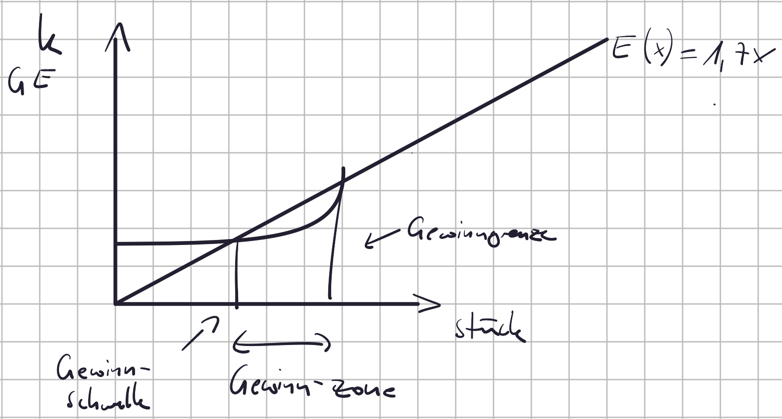
$$\frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{-2} = x$$

$S(1{,}386 \,/\, 20.000)$

$$5000\, e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{-2}} = y$$

(7)

$$K(x) = 0{,}4\, e^{0{,}5x} + 2{,}5$$



$$0{,}4\, e^{0{,}5x} + 2{,}5 = 1{,}7x \quad \Big| -1{,}7x$$

$$0{,}4\, e^{0{,}5x} + 2{,}5 - 1{,}7x = 0$$

nächster Zielwert: 2,1 in TR.

154 Nr. 3

$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t})$$

$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot 0})$$

$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85)$$

$$k(t) = 1000 \cdot 0{,}15$$

$$k(t) = 150$$

A: Zu Beginn gibt es 150 Kaninchen.

Läuft gegen den Bestand von 1000

$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t}) = 250$$

$$1000 \cdot (1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t}) = 250 \quad | : 1000$$

$$1 - 0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t} = \frac{250}{1000} \quad | - 1$$

$$-0{,}85 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t} = -\frac{3}{4} \quad | : (-0{,}85)$$

$$e^{-0{,}0513 \cdot t} = \frac{15}{17} \quad | \ln$$

$$-0{,}0513 \cdot t = \ln\left(\frac{15}{17}\right) \quad | : -0{,}0513$$

$$t = \underline{\underline{2{,}439}}$$

Nach ca. $2\frac{1}{2}$ Monaten hat der Bestand ca. 250 Kaninchen erreicht.

S. 154 Nr. 2

k = Wachstumskonstante

Biomasse wächst:

$\rightarrow \quad g(t) = a - 10e^{-kt}$

Schranke od. Grenzwert.

geg:

$g(0) = 10$

$g(10) = 16,321$

$a - 10e^{-k \cdot 0} = 10$

$a - 10 = 10 \quad | +10$

$a = 20$

$20 - 10e^{-k \cdot 10} = 16,321 \quad | +10e^{-k \cdot 0} - 16,321$

$3,679 = 10e^{-k \cdot 10} \quad | :10$

$\frac{3,679}{10} = e^{-k \cdot 10} \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{3,679}{10}\right) = -k \cdot 10 \quad | :10$

$\frac{\ln\left(\frac{3,679}{10}\right)}{10} = -k \quad | \cdot(-1)$

$-\frac{\ln\left(\frac{3,679}{10}\right)}{10} = k$

$k = 0,099\,954\,412$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{g(t) = 20 - 10e^{-0,099\,954412 \cdot t}}}$

c) $20 \cdot 0,95 = \underline{\underline{19}}$ gesucht: t von 95% des Grenzwertes

$g(t) = 20 - 10e^{-0,099\,95\,4412 \cdot t} = 19 \quad | -20$

$-10e^{-0,099\,95\,4412 \cdot t} = -1 \quad | \cdot(-1)$

$10e^{-0,099\,95\,4412 \cdot t} = 1 \quad | :10$

$e^{-0,099\,95\,4412 \cdot t} = \frac{1}{10} \quad | \ln$

$-0,099\,954412 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \quad | : -0,099\,955442$

$\underline{t = 23,026}$ A: Nach 23 Jahren sind 95% erreicht.

S. 154

(1)

$$T(t) = T_u + (T_0 - T_u)\, e^{kt}$$

$$T(30) = 24{,}7$$

$$T(t) = 20 + (80 - 20)\, e^{kt}$$

$$= 20 + 60\, e^{kt}$$

$$\Rightarrow \quad 20 + 60 \cdot e^{k \cdot 30} = 24{,}7 \quad | -20$$

$$60\, e^{k \cdot 30} = 4{,}7 \quad | :60$$

$$e^{k \cdot 30} = \frac{4{,}7}{60} \quad | \ln$$

$$k \cdot 30 = \ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right) \quad | :30$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}$$

$$\underline{\underline{T(t) = 20 + (80 - 20)\, e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t}}}$$

$$30 = 20 + (80 - 20) \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t}$$

$$30 = 20 + 60$$

$$30 = 80\, e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t} \quad | :80$$

$$\frac{30}{80} = e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t} \quad | \ln$$

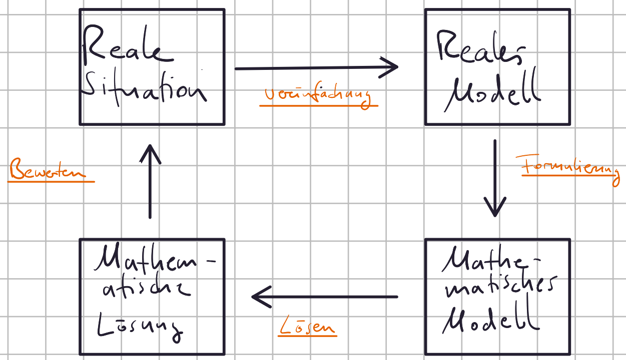
$$\ln\left(\frac{30}{80}\right) = \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t \quad \left| : \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}\right.$$

$$\frac{\ln\left(\frac{30}{80}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}} = t$$

$$\underline{\underline{t = 11{,}6 \text{ Minuten}}}$$

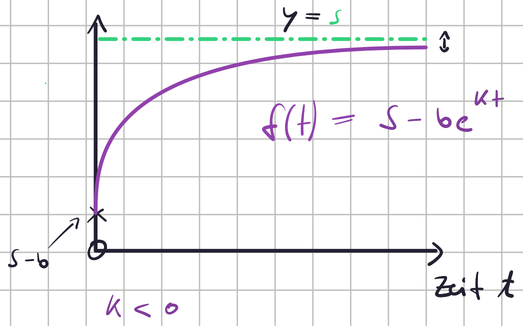
A: Nach 11,6 Minuten ist der Körper auf 30 °C gesunken.

Modellierung

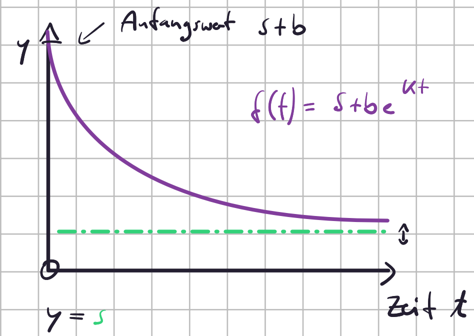


Beschränkter Wachstum / beschränkter Zerfall

a) Beschränktes Wachstum



b) Beschränkter Zerfall



Bsp: Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen (8 °C) und erwärmt sich auf 21 °C Zimmertemperatur. Nach 10 min. beträgt die Temperatur 14 °C

Braucht weniger als 10 min zum Abkühlen.

$$\Rightarrow \quad f(t) = 21 - be^{kt}$$

$$f(0) = 8$$

$$f(0) = 21 - b\cdot e^{k0} = 8 \qquad 21 - b = 8 \quad | +b - 8$$

$$13 = b$$

$$f(t) = 21 - 13\cdot e^{kt} = 10$$

aus Aufgabe

$$f(10) = 14$$

$$\Rightarrow \quad 21 - 13\cdot e^{k\cdot 10} = 14 \quad | -14 + 13e^{k\cdot 10}$$

$$7 = 13e^{k\cdot 10} \quad | :13$$

$$\frac{7}{13} = e^{k\cdot 10} \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{7}{13}\right) = k\cdot 10 \quad | :10$$

$$\frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{10} = k$$

Einsetzen:

$$f(t) = 21 - 13e^{\frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{10}\cdot t}$$

Bsp 2:

Eine Tasse Tee wird zubereitet und kühlt in Folge auf Zimmertemp. ab (21°C). Nach 15 Minuten hat die Anfangstemperatur um 20°C abgenommen.

ges. $f(t) = ?$

$\Rightarrow \quad f(t) = 21 + b e^{kt}$

$f(0) = 100$

$f(t) = 21 + 100 \cdot e^{k0} = 100 \qquad 21 + b = 100 \quad | -100$

$b = 79$

$f(t) = 21 + 79 e^{kt}$

$f(15) = 80$

$$f(t) = 21 + 79 e^{k \cdot 15} = 80 \quad | -21$$

$$79 e^{k \cdot 15} = 59 \quad | :79$$

$$e^{k \cdot 15} = \frac{59}{79} \quad | \ln$$

$$k \cdot 15 = \ln\left(\frac{59}{79}\right) \quad | :15$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{59}{79}\right)}{15}$$

$$\underline{\underline{f(t) = 21 + 79 e^{\frac{\ln\left(\frac{59}{79}\right)}{15} \cdot t}}}$$

Exponentielles Wachstum

Bsp: 1000 € Startkapital

8% Verzinsung pro Jahr

$$\Rightarrow \quad K(t) = 1000 \cdot \boxed{1{,}08}^{\,t}$$

Wachstumsfaktor

$$\boxed{e^{\ln(q)} = q} \quad q$$

$$K(t) = 1000 \cdot e^{\boxed{\ln(1{,}08)} \cdot t}$$

in Jahren

Wachstumskonstante

$K(t) =$

⇒ exponentielles Wachstum wird beschrieben durch:

$$\underline{\underline{f(t) = a \cdot e^{kt}}} \; ; \quad t \geq 0$$

$k > 0$ ist die Wachstums Konstante

$a = f(0)$ ist der Anfangsbestand

Gleichung $e + c = 0$

23. a) Liegt bei den nachfolgenden Vorgängen näherungsweise ein exponentieller Wachstums- bzw. Zerfallsprozess vor?

2011	2012	2013	2014	2015
112,7	132,7	152,7	172,7	192,7

☐ ja ☒ nein

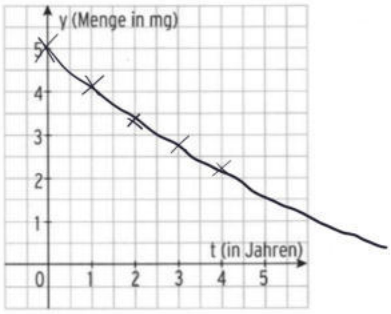
2011	2012	2013	2014	2015
7,80	7,41	7,04	6,69	6,36

☒ ja ☐ nein

b) Beim exponentiellen Wachstum gilt q $\geq$ 1,
beim exponentiellen Zerfall gilt 0 $\leq$ q $\leq$ 1 .

24. Eine Anfangsmenge von 5 mg des radioaktiven Stoffes Radon 222 zerfällt exponentiell gemäß der Tabelle (t in Tagen; y in mg).

t	0	1	2	3	4
y	5	4,09	3,34	2,73	2,23



a) Stellen Sie den Vorgang im Koordinatensystem dar.

b) Ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm auf 3 Arten.

1. Die Regression am WTR führt zu f(t) = ________

2. Der Anfangsbestand von a = 5 und die Wachstumsfaktor q = 0,82 führen zu
- 18%
f(t) = $5 \cdot e^{\ln(0,82) \cdot t}$.

3. Das Einsetzen des Anfangsbestandes von a = _____ und der Koordinaten des Punktes P(3 | 2,73) in f(t) = a · e^{kt} führen zu $5 \cdot e^{k \cdot 3} = 2,73$ $|:5$

$e^{k \cdot 3} = \frac{2,73}{5}$ $|\ln$

$k \cdot 3 = \ln(\frac{2,73}{5})$ $|:3$

$k = \frac{\ln(\frac{2,73}{5})}{3}$ $\Rightarrow k = -0,201$

Somit gilt f(t) = $5 \cdot e^{\frac{\ln(\frac{2,73}{5})}{3} \cdot t}$.

c) Die Halbwertszeit beträgt t_H = _____. Überprüfen Sie dies am Schaubild.

$T_h = \frac{-\ln(2)}{k} \Rightarrow -\frac{\ln(2)}{-0,201}$

21. Die nachfolgenden exponentiellen Wachstums- bzw. Zerfallsvorgänge sollen durch Funktionsterme beschrieben werden. Geben Sie jeweils zwei Funktionsterme an.

Vorgang	$f(t) = a \cdot b^t$	$f(t) = a \cdot e^{kt}$
Ein Kapital von 1500 EUR wird mit einem Zinssatz von 3 % jährlich verzinst.	$f(t) = 1500 \cdot 1{,}03^t$ (t in Jahren)	$e^k = 1{,}03$ $k = \ln(1{,}03) \approx 0{,}03$ $f(t) = 1500 \cdot e^{0{,}03t}$
Ein Auto wird für 20000 EUR gekauft. Pro Jahr verliert es 30 % an Wert.	$f(t) = 20.000 \cdot 0{,}70^t$ (t in Jahren)	$e^k = 0{,}70$ $k = \ln(0{,}70)$ $f(t) = 20.000 \cdot e^{\ln(0{,}70) \cdot t}$
Zu Beginn sind 4 Rechner mit einem Computervirus infiziert. Die Anzahl der insgesamt infizierten Rechner verzehnfacht sich täglich.	$f(t) = 4 \cdot 10^t$ (t in Tagen)	$e^k = 10$ $k = \ln(10)$ $f(t) = 4 \cdot e^{\ln(10) \cdot t}$
Von einem radioaktiven Stoff sind zu Beginn 5 g vorhanden. Die Menge halbiert sich jährlich.	$f(t) = 5 \cdot \frac{1}{2}^t$ (t in Jahren)	$e^k = \frac{1}{2}$ $k = \ln(\frac{1}{2})$ $f(t) = 5 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2}) \cdot t}$

22. Das gesamte Holzvolumen (in m^3) eines Waldes wächst exponentiell und ist für die Jahre ab 2011 in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

2011	2012	2013	2014	2015
85000	90100	95506	101236	107310

$$\frac{90100}{85000} = \frac{95506}{90100} = \frac{101236}{95506} = \frac{107310}{101236} = 1{,}06$$

6%

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Wachstumsfaktor q für alle Zeitschritte konstant ist.

b) Der zugehörige Funktionsterm (mit t = 0 im Jahr 2011) lautet: $f(t) = 85000 \cdot e^{\ln(1{,}06) \cdot t}$.
Damit wird im Jahr 2020 ein Holzvolumen von 143.605,7115 m^3 erwartet.

19. Lösen Sie die Gleichung.

a) $-2e^{-x} + e^2 = 0$ b) $\frac{1}{4}(e^{2x} - 3) = 0$ c) $-e^{2x} + 11e^x - 28 = 0$

d) $2 - e \cdot e^{0,5x} = 0$ e) $2e^x - 7e^{-x} = 0$ f) $e^{2x} - 5e^x = -6$

a) $-2e^{-x} + e^2 = 0 \quad | -e^2$
$-2e^{-x} = -e^2 \quad | \cdot (-1)$
$e^2 = 2e^{-x} \quad | :2$
$\frac{e^2}{2} = e^{-x} \quad | \ln$
$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right) = -x \quad | \cdot (-1)$
$\underline{\underline{x = -\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)}}$

b) $\frac{1}{4}(e^{2x} - 3) = 0$
$\frac{1}{4}e^{2x} - 3\frac{1}{4} = 0 \quad | +3\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}e^{2x} = 3\frac{1}{4} \quad | : \frac{1}{4}$
$e^{2x} = 3 \quad | \ln$
$2x = \ln(3) \quad | :2$
$\underline{\underline{x = \frac{\ln(3)}{2}}}$

c) $-e^{2x} + 11e^x - 28 = 0$
$-u^2 + 11u - 28 = 0 \quad | \cdot (-1)$
$u^2 - 11u + 28 = 0$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1}$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2}$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{2}$
$u_1 = \frac{14}{2} = 7 \qquad e^x = 7 \quad | \ln \qquad \underline{\underline{x_1 = \ln(7)}}$
$u_2 = \frac{8}{2} = 4 \qquad e^x = 4 \quad | \ln \qquad \underline{\underline{x = \ln(4)}}$

d) $2 - e \cdot e^{0,5x} = 0 \quad | -2 + e$
$e^{0,5x} = -2 + e \quad | \ln$
$0,5x = \ln(-2+e) \quad | :0,5$
$x = \frac{\ln(-2+e)}{0,5}$

e) $2e^x - 7e^{-x} = 0 \quad | \cdot e^x$
$2e^{2x} - 7 = 0 \quad | +7$
$2e^{2x} = 7 \quad | :2$
$e^{2x} = 3,5 \quad | \ln$
$2x = \ln(3,5) \quad | :2$
$x = \frac{\ln(3,5)}{2}$

f) $e^{2x} - 5e^x = -6 \quad | +6$
$u^2 - 5u + 6 = 0$
$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$
$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$
$u_1 = \frac{6}{2} = 3 \qquad e^x = 3 \quad | \ln \qquad x_1 = \ln(3)$
$u_2 = \frac{4}{2} = 2 \qquad e^x = 2 \quad | \ln \qquad \ln(2) = x_2$

20. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte und die Asymptote von K_f. Skizzieren Sie K_f.

a) $f(x) = 4e^{-0,25x} - 3$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) =$

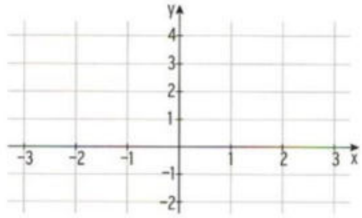
S_y (

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = 0$

N (

Asymptote: y =



b) $f(x) = -\frac{1}{8}e^{3x} + 3$

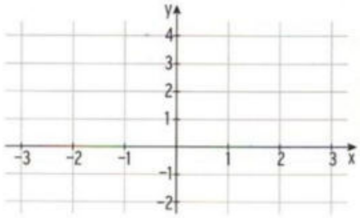
$f(0) =$

S_y (

$f(x) = 0$

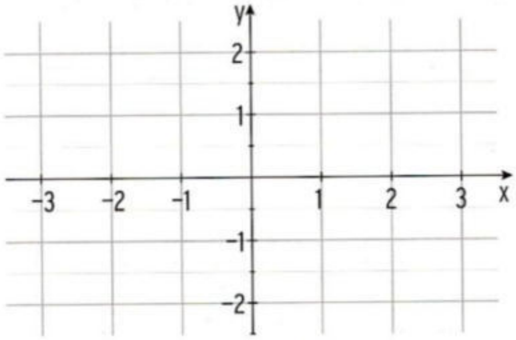
N (

y =



15. Für welche Werte von c hat die Gleichung $e^x + c = 0$ eine Lösung?
Antwort: Für c < 0

Begründen Sie mithilfe einer Skizze:



16. Lösen Sie die Gleichung mithilfe des Logarithmus .

$3e^{2x} = 15$	$2e^{-x} - 3 = 1$	$7 - 2e^{-0,2x} = 0$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1$
$3e^{2x} = 15$ $e^{2x} = 5$ $2x = \ln(5)$ $x = \frac{1}{2}\ln(5)$	$2e^{-x} - 3 = 1 \quad \vert +3$ $2e^{-x} = 4 \quad \vert :2$ $e^{-x} = 2 \quad \vert \ln$ $-x = \ln(2) \quad \vert T$ $x = \ln(2)$	$7 - 2e^{-0,2x} = 0 \quad \vert +2e^{-0,2x}$ $7 = 2e^{-0,2x} \quad \vert :2$ $3,5 = e^{-0,2x} \quad \vert \ln$ $\ln(3,5) = -0,2x \quad \vert :-0,2$ $\frac{\ln(3,5)}{-0,2} = x$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1 \quad \vert -2$ $-e^{\frac{2}{5}x} = -3 \quad \vert T$ $3 = e^{\frac{2}{5}x} \quad \vert \ln$ $\ln(3) = \frac{2}{5}x \quad \vert : \frac{2}{5}$ $\frac{\ln(3)}{\frac{2}{5}} = x$

17. Lösen Sie die Gleichung mit dem Satz vom Nullprodukt.

$e^{2x} - 3e^x = 0$	$e^x - 3e^{-x} = 0$	$e^x - 4e^{2x} = 0$
$e^x(e^x - 3) = 0$ $e^x = 0 \vee e^x - 3 = 0$ $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$ $e^x \neq 0$	$e^x\left(1 - 3e^{-2x}\right) = 0$ $\downarrow \quad \hookrightarrow 1 - 3e^{-2x} = 0 \quad \vert +3e^{-2x}$ $\neq 0 \quad 1 = 3e^{-2x} \quad \vert :3$ $\frac{1}{3} = e^{-2x} \quad \vert \ln$ $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -2x \quad \vert :(-2)$ $-\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = x$	$e^x\left(1 - 4e^x\right) = 0$ $\downarrow \quad \hookrightarrow 1 - 4e^x = 0 \quad \vert +4e^x$ $\neq 0 \quad 1 = 4e^x \quad \vert :4$ $\frac{1}{4} = e^x \quad \vert \ln$ $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = x$

18. Lösen Sie die Gleichung mit Substitution.

$e^{2x} - 4e^x = -3$	$-2e^{2x} + 6e^x + 8 = 0$	$e^x + 4e^{-x} + 5 = 0 \quad \vert \cdot e^x$
$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ $e^x = u \quad (e^{2x} = u^2)$ $u^2 - 4u + 3 = 0$ $u = 1 \vee u = 3$ $e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$ $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$	$-2u^2 + 6u + 8 = 0 \quad \vert :(-2)$ $u^2 - 3u - 4 = 0$ $u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$ $u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$ $u_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ $u_1 = \frac{4}{2} = 2 \quad e^x = 2 \quad \vert \ln \quad \ln(2) = x_1$ $u_2 = \frac{2}{2} = 1 \quad e^x = 1 \quad \vert \ln \quad \ln(1) = x_2$	$e^{2x} + 4 + 5e^x$ $u^2 + 5u + 4 = 0$ $u_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ $u_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$ $u_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$ $u_1 = \frac{-2}{2} = -1 \quad e^x = -1 \quad \vert \ln \quad \ln(-1) = x$ ↯ $u_2 = \frac{-8}{2} = -4 \quad e^x = -4 \quad \vert \ln \quad \ln(-4) = x$ ↯

Verdopplungszeit

$1000€ \Rightarrow 2000€$

Wachstumskonstante

$$1000\,e^{0{,}077\cdot t} = 2000 \quad | :1000$$
$$e^{0{,}077\cdot t} = 2 \quad | \ln$$
$$0{,}077\cdot t = \ln(2) \quad | :0{,}077$$
$$t = 9{,}01 \approx 9 \text{ Jahre}$$

$\Longrightarrow$

allg. $\boxed{T_V = \frac{\ln(2)}{k}}$

Wachstumskonstante

Halbwertszeit

Bsp. 100kg atomarer Brennstoff

Zerfall 5% Jährlich

$\Longrightarrow$ 100kg $\rightarrow$ 50kg

NR:

0,95 Faktor

Wachstumsfaktor: 0,95

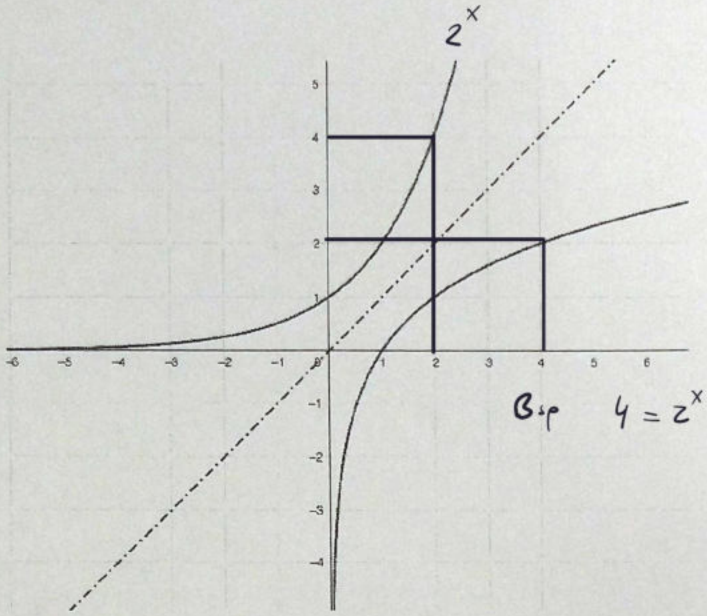
$$100\cdot e^{\ln(0{,}95)\cdot t} = 50 \quad | :100$$
$$e^{\ln(0{,}95)\cdot t} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$
$$\ln(0{,}95)\cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad | :\ln(0{,}95)$$
$$t = 13{,}5 \text{ Jahre}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}6931\ldots$$
$$\ln(2) = 0{,}6931\ldots$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

allg. Halbwertszeit

$$\boxed{T_H = -\frac{\ln(2)}{k}}$$

Beispiel :



$f(x) = 2^x$

$g(x) = \log_2(x)$

Allgemeine Form : $a^x = b$

Lösung : $x = \log_a(b)$

Definition : Der Logarithmus von ‚b' zur Basis ‚a' ist diejenige Hochzahl, mit der man ‚a' potenzieren muss, um ‚b' zu erhalten.

$(a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$

Regeln :

(1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

(2) $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$

(3) $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$

Exponentialgleichungen

1) Der Logarithmus

Bsp $2^x = 8$ ⇒ gesucht ist der Exponent x.

Lösung $x = 3$ ⇒ Logarithmus von 8 zur Basis 2.

Schreibweise: $3 = \log_2(8)$

⟹ Exponentialgleichung zur Basis e

Bsp. $e^x = 4$

Logarithmus naturalis

(Natürlicher Logarithmus)

Lösung: $x = \ln(4)$

$x \approx 1{,}38$

2) Lösen von Exponentialgleichungen

a) Anwendung des Logarithmus

bsp. 1

$\Rightarrow \quad e^x = 5 \quad | \ln$

$\Rightarrow \quad \ln(e^x) = \ln(5)$

$\Rightarrow \quad \underline{x = \ln(5)}$

bsp. 3

$e^{2x} - 2e = 0 \quad | +2e$

$e^{2x} = 2e \quad | \ln$

$2x = \ln(2e) \quad | :2$

$x = \frac{\ln(2e)}{2}$

bsp. 2

$\frac{1}{2}e^{1-x} - 3 = 0 \quad | +3$

$\frac{1}{2}e^{1-x} = 3 \quad | \cdot 2$

$e^{1-x} = 6 \quad | \ln$

$1 - x = \ln(6) \quad | -1$

$-x = \ln(6) - 1 \quad | \cdot(-1)$

$x = -\ln(6) + 1$

bsp 4

$e^{-2x} + 3 = 0 \quad | -3$

$e^{-2x} = -3 \quad | \ln$

$-2x = \ln(-3)$ ↯

$-e^{-2x} - 3 = 0 \quad | +3$

$e^{-2x} = 3 \quad |$ ↯

b)

Ausklammern und SuNP

Bsp. 1

$e^{x} - e^{2x} = 0$

$e^{x} \cdot (1 - e^{x}) = 0$

$\downarrow$

$\neq 0$

$\hookrightarrow 1 - e^{x} = 0 \quad | + e^{x}$

$1 = e^{x} \quad | \ln$

$x = \ln(1)$

$\underline{\underline{x = 0}}$

Bsp. 2

$4e^{-x} - 2e^{x} = 0$

$e^{-x}(4 - 2e^{2x}) = 0$

$\downarrow$

$\neq 0$

$\hookrightarrow 4 - 2e^{2x} = 0 \quad | -4$

$-2e^{2x} = -4$

$e^{2x} = 2 \quad | \ln$

$2x = \ln(2) \quad | :2$

$x = \frac{\ln(2)}{2}$

Potenzregeln

$e^{x} \cdot e^{x} = e^{x+x} = e^{2x}$

$e^{x} \cdot e^{-x} = e^{0} = 1$

$e^{2x} \cdot e^{-x} = e^{x}$

$e^{x} \cdot e^{y} = e^{x+y}$

c)

Lösen durch Substitution

Bsp: $e^{2x}-5e^{x}+6=0$

$e^{x}\cdot e^{x}-5e^{x}+6=0$

Substitution $e^{x}=u$

$u^2-5u+6=0$

$u_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$

$u_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}$

$u_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}$

$u_1=\frac{5+1}{2}=3$ $\Rightarrow$ Resubsitution

$u_2=\frac{5-1}{2}=2$

$u=e^{x}$

$e^{x}=2 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x_1=\ln(2)}}$

$e^{x}=3 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x_2=\ln(3)}}$

weiter Regeln:

$e^{-x}=\frac{1}{e^{x}}$ ← allgemein

$(e^{x})^2=e^{2x}$; $(e^{-x})=e^{-2x}$

Bsp.

$e^{x}-20e^{-x}=-1 \quad |+1$

$e^{x}-20e^{-x}+1=0 \quad |\cdot e^{x}$

$e^{2x}-20+e^{x}=0$

$u^2+u-20=0$

$u_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot1\cdot(-20)}}{2\cdot1}$

$u_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{2}$

$u_{1,2}=\frac{-1\pm9}{2}$

$u_1=\frac{-1+9}{2}=4$ $\quad e^{x}=4 \quad |\ln$

$\underline{\underline{x=\ln(4)}}$ ✓

$u_2=\frac{-1-9}{2}=-5$ $\quad x_2=\ln(-5)$ ↯

S. 139

① c) $e^{x}-6e^{3x}=0$

$e^{x}(1-6e^{2x})=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $1-6e^{2x}=0 \quad | +6e^{2x}$

$1=6e^{2x} \quad | :6$

$\frac{1}{6}=e^{2x} \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{1}{6}\right)=2x \quad | :2$

$$\underline{\underline{\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{2}=x}}$$

②

b) $0{,}5e^{3x}-5e^{2x}=0 \quad | \cdot 2$

$e^{3x}-10e^{2x}=0$

$e^{2x}(1e^{x}-10)=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $1e^{x}-10=0 \quad | +10$

$e^{x}=10 \quad | \ln$

$$\underline{\underline{x=\ln(10)}}$$

d) $\frac{e^{x}}{2}-\frac{e^{-x}}{4}=0 \quad | +\frac{e^{-x}}{4} \quad | \cdot 4$

$2e^{x}-e^{-x}=0$

$e^{x}\cdot(2-e^{-2x})=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $2-e^{-2x}=0 \quad | +e^{-2x}$

$2=e^{-2x} \quad | \ln$

$\ln(2)=-2x \quad | :(-2)$

$$\underline{\underline{\frac{\ln(2)}{-2}=x}}$$

③

$e^{2x}+e^{x}=0$

④

$e^{5x}(e^{x}-3)=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $e^{x}-3=0 \quad | +3$

$e^{x}=3 \quad | \ln$

$$\underline{\underline{x=\ln(3)}}$$

⑤

$ae^{2x}-e^{x}=0$

$e^{x}(ae^{x}-1)=0$

$\downarrow$ $\neq 0$

$\hookrightarrow$ $ae^{x}-1=0 \quad | +1$

$a\cdot e^{x}=1 \quad | :a$

$e^{x}=\frac{1}{a} \quad | \ln$

$x=\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ $a>0$

nicht lösbar für $a\leq 0$

c) Lösen durch Substitution

138

① a) $e^{x} = 30 \quad |\ln$

$\underline{\underline{x = \ln(30)}}$

b) $e^{3x} = 12 \quad |\ln$

$3x = \ln(12) \quad |:3$

$\underline{\underline{x = \frac{\ln(12)}{3}}}$

c) $e^{1-x} = 1000 \quad |\ln$

$1-x = \ln(1000) \quad |-1$

$-x = \ln(1000) - 1 \quad |\cdot(-1)$

$\underline{\underline{x = -\ln(1000) - 1}}$

f) $e^{5x} - 4 = 0 \quad |+4$

$e^{5x} = 4 \quad |\ln$

$5x = \ln(4) \quad |:5$

$\underline{\underline{x = \frac{\ln(4)}{5}}}$

② a) $\frac{e^{-x}}{2} - 3 = 0 \quad |+3$

$\frac{e^{-x}}{2} = 3 \quad |\cdot 2$

$e^{-x} = 6 \quad |\ln$

$-x = \ln(6) \quad |\cdot(-1)$

$\underline{\underline{x = -\ln(6)}}$

i) $6e^{\ln(3)\cdot x} - 18 = 0 \quad |+18$

$6e^{\ln(3)\cdot x} = 18 \quad |:6$

$e^{\ln(3)\cdot x} = 3 \quad |\ln$

$\ln(3)\cdot x = \ln(3) \quad |:\ln(3)$

$\underline{\underline{x = 1}}$

③ $e^{2x} + 5 = 0 \quad |-5$

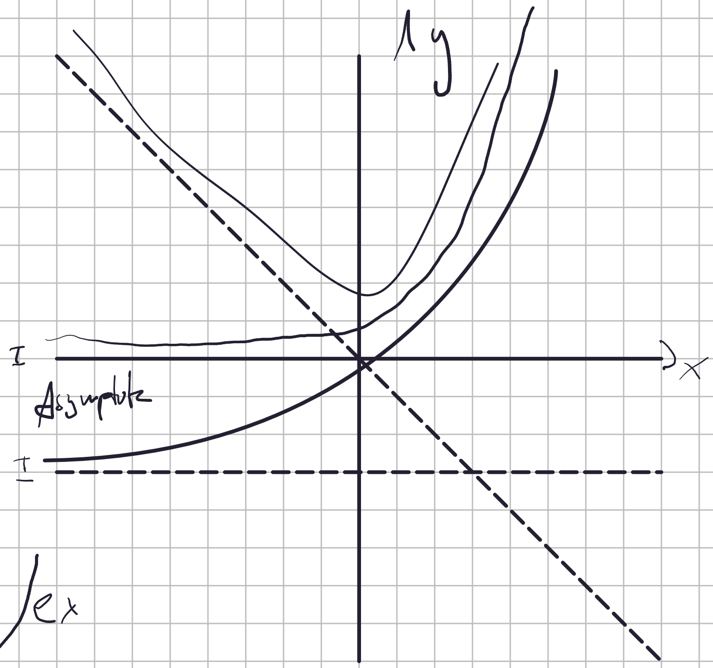
$e^{2x} = -5 \quad |\ln$

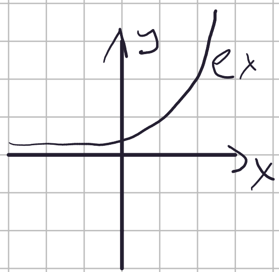
$2x = \ln(-5) \quad ↯$

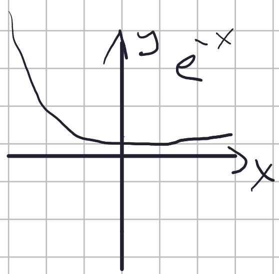
Da in ln nicht minus stehen darf

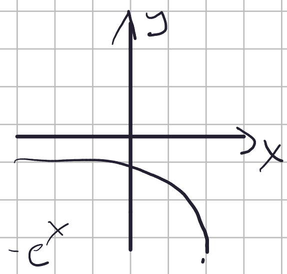
$e^{2x} + a = 0$

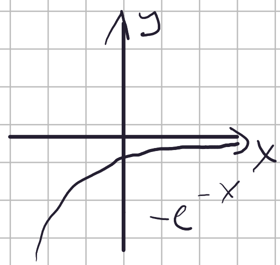
wenn a positiv ist.


y
x
I
Asymptote
I


y
e^x
x


y
e^-x
x


y
x
-e^x


y
x
-e^-x

Mathe I KA

(1)

a) $-2x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$x^2 \cdot \left(-2x - \frac{3}{4}\right) = 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = 0 \quad \hookrightarrow -2x - \frac{3}{4} = 0 \quad | +2x$

$-\frac{3}{4} = 2x \quad | :2$

$-\frac{3}{8} = x_3$

$x_{1,2} = 0$

$x_3 = -\frac{3}{8}$

b) $x^2(x^2 - 4) = 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = 0 \quad \hookrightarrow x_{3,4} = x^2 - 4 = 0 \quad | +4$

$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{}$

$x_{3,4} = \pm 2$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$z_1 = \frac{2}{2} = 1 \quad \pm\sqrt{1} = \quad x_1 = -1, \; x_2 = 1$

$z_2 = \frac{8}{2} = 4 \quad \pm\sqrt{4} = \quad x_3 = 2, \; x_4 = -2$

(2)

a) $f(x) = 3x^4 - 1 = C$

b) $g(x) = -3x^3 - x^2 = B$

c) $f(x) = 0{,}5x^3 + 2x - 3 = F$

d) $i(x) = -3x^3 + 4x = D$

e) $j(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1 = E$

f) $k(x) = 2x^4 - 3x^2 - 0{,}5 = A$

(3)

$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x$

$g(x) = -0{,}5x$

$0{,}5x^3 - 3x = -0{,}5x \quad | +0{,}5x$

$0{,}5x^3 - 2{,}5x = 0$

$x \cdot (0{,}5x^2 - 2{,}5) = 0$

$\hookrightarrow x_1 = 0 \quad \hookrightarrow x_{2,3} = 0{,}5x^2 - 2{,}5 = 0 \quad | +2{,}5$

$0{,}5x^2 = 2{,}5 \quad | :0{,}5$

$1x^2 = 5 \quad | \pm\sqrt{}$

$x_1 = \sqrt{5}$

$x_2 = -\sqrt{5}$

$S_1\left(-\sqrt{5} \;\middle|\; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$y = -0{,}5 \cdot (-\sqrt{5})$

$y = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$S_2(0 \mid 0)$

$y = -0{,}5 \cdot 0$

$S_3\left(\sqrt{5} \;\middle|\; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$y = -0{,}5 \cdot \sqrt{6}$

(4) Funktion dritten Grades

$x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -10 \quad P(2|-6)$

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$

$-6 = a \cdot (2-(-1)) \cdot (2-1) \cdot (2-(-10))$

$-6 = a \cdot (3) \cdot (1) \cdot (12)$

$-6 = 36a \quad |:36$

$a = -\frac{1}{6}$

$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x+10)}}$

(5)

Fkt. 4. Grades

mit $f(0) = 3$; $f(1) = 4$; $f(-2) = -5$

Symmetrisch zur y-Achse

exponenten gerade

$P_1(0|3)$

$P_2(1|4)$

$P_3(-2|-5)$

$f(x) = ax^4 + cx^2 + c$

$3 = e$

I. $4 = a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + 3$

$1 = a + c \quad |\cdot 4$

$4 = 4a + 4c$

II $-5 = a \cdot (-2)^4 + c \cdot (-2)^2 + 3$

$-8 = 16a + 4c$

II - I $\cdot 4$

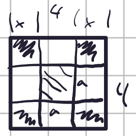
$-12 = 12a \quad |:12$

$-1 = a$

$-1 + c = 1 \quad |+1$

$a = -1 \qquad c = 2 \qquad \underline{\underline{f(x) = -1x^4 + 2x^2 + 3}}$

Mathe II

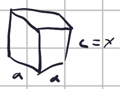


① 4,5 T Sand

$4\,500\,kg : 1500 \frac{kg}{m^3} = 3\,m^3$

⇒ allg: $V = a \cdot b \cdot c$

⇒ $V = (4-2x)^2 \cdot x$

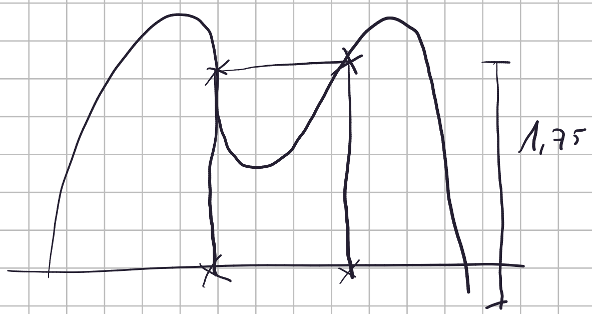


$= (16 - 16x + 4x^2) \cdot x$

$V(x) = 4x^3 - 16x^2 + 16x$

$x_{min} = 0{,}3$

$x_{max} = 1{,}2$



⇒ $f(x) = g(x)$

$-x^4 + 2x^2 + 1 = 1{,}75 \quad | -1{,}75$

$-x^4 + 2x^2 - 0{,}75 = 0 \qquad x^2 = z$

$-z^2 + 2z - 0{,}75 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$

$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{-2}$

$z_1 = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \begin{matrix} x_1 = 0{,}707 \\ x_2 = -0{,}707 \end{matrix}$

$0{,}707 \cdot 2 = \underline{1{,}41\,m}$

$z_2 = \frac{-2-1}{-2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$