S. 154

(1) $T(t) = T_u + (T_0 - T_u)\, e^{kt}$

$T(30) = 24{,}7$

$T(t) = 20 + (80 - 20)\, e^{kt}$

$= 20 + 60\, e^{kt}$

$\Rightarrow \quad 20 + 60 \cdot e^{k \cdot 30} = 24{,}7 \quad | -20$

$60\, e^{k \cdot 30} = 4{,}7 \quad | :60$

$e^{k \cdot 30} = \frac{4{,}7}{60} \quad | \ln$

$k \cdot 30 = \ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right) \quad | :30$

$k = \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}$

$$T(t) = 20 + (80 - 20)\, e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t}$$

$30 = 20 + (80 - 20) \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t}$

$30 = 20 + 60$

$30 = 80\, e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t} \quad | :80$

$\frac{30}{80} = e^{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t} \quad | \ln$

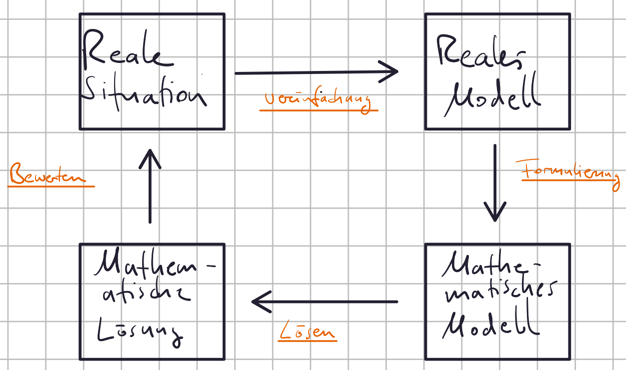
$\ln\left(\frac{30}{80}\right) = \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30} \cdot t \quad | : \frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}$

$\frac{\ln\left(\frac{30}{80}\right)}{\frac{\ln\left(\frac{4{,}7}{60}\right)}{30}} = t$

$t = 11{,}6$ Minuten

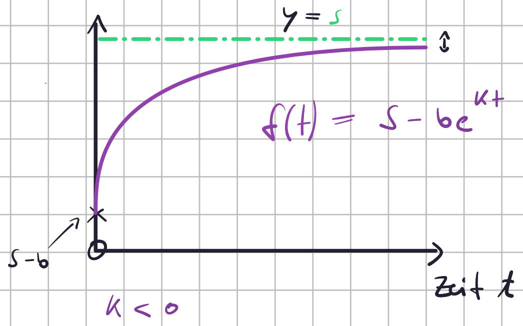
A: Nach 11,6 Minuten ist der Körper auf 30 °C gesunken.

Modellierung

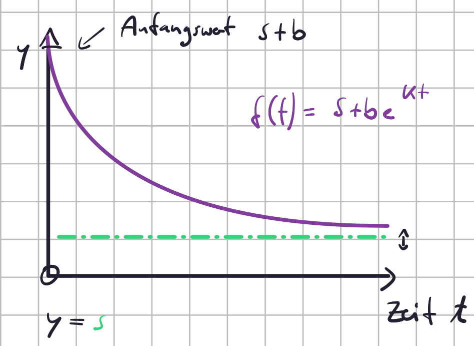


Beschränktes Wachstum / beschränkter Zerfall

a) Beschränktes Wachstum



b) Beschränkter Zerfall



Bsp: Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen (8°C) und erwärmt sich auf 21°C Zimmertemperatur.

Nach 10 min. beträgt die Temperatur 14°C

Braucht weniger als 10 min zum Abkühlen.

$\Rightarrow \quad f(t) = 21 - be^{kt}$

$f(0) = 8$

$f(0) = 21 - b \cdot e^{k0} = 8 \qquad 21 - b = 8 \quad | +b - 8$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 13 = b$

$f(t) = 21 - 13 \cdot e^{kt} = 10$

aus Aufgabe

$f(10) = 14$

$\Rightarrow 21 - 13 \cdot e^{k \cdot 10} = 14 \quad | -14 + 13e^{k \cdot 10}$

$7 = 13e^{k \cdot 10} \quad | :13$

$\frac{7}{13} = e^{k \cdot 10} \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{7}{13}\right) = k \cdot 10 \quad | :10$

$\frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{10} = k$

Einsetzen:

$$f(t) = 21 - 13e^{\frac{\ln\left(\frac{7}{13}\right)}{10} \cdot t}$$

Bsp 2:

Eine Tasse Tee wird zubereitet und kühlt in Folge auf Zimmertemp. ab (21°C). Nach 15 Minuten hat die Anfangstemperatur um 20°C abgenommen.

ges. $f(t) = ?$

$\Rightarrow f(t) = 21 + b e^{kt}$

$f(0) = 100$

$f(t) = 21 + 100 \cdot e^{k0} = 100$ $\qquad 21 + b = 100 \quad | -100$

$\qquad b = 79$

$f(t) = 21 + 79 e^{kt}$

$f(15) = 80$

$$f(t) = 21 + 79 e^{k \cdot 15} = 80 \quad | -21$$

$$79 e^{k \cdot 15} = 59 \quad | :79$$

$$e^{k \cdot 15} = \frac{59}{79} \quad | \ln$$

$$k \cdot 15 = \ln\left(\frac{59}{79}\right) \quad | :15$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{59}{79}\right)}{15}$$

$$\underline{\underline{f(t) = 21 + 79 e^{\frac{\ln\left(\frac{59}{79}\right)}{15} \cdot t}}}$$

Exponentielles Wachstum

Bsp.: 1000 € Startkapital

8 % Verzinsung pro Jahr

$$\Rightarrow K(t) = 1000 \cdot \boxed{1{,}08}^{t}$$

Wachstumsfaktor

$$\boxed{e^{\ln(q)} = q}$$

q

in Jahren

$$K(t) = 1000 \cdot e^{\boxed{\ln(1{,}08)} \cdot t}$$

Wachstumskonstante

$K(t) =$

$\Rightarrow$ exponentielles Wachstum wird beschrieben durch:

$$\underline{\underline{f(t) = a \cdot e^{kt}}}\,; \quad t \geq 0$$

$k > 0$ ist die Wachstums Konstante

$a = f(0)$ ist der Anfangsbestand

23. a) Liegt bei den nachfolgenden Vorgängen näherungsweise ein exponentieller Wachstums- bzw. Zerfallsprozess vor?

2011	2012	2013	2014	2015
112,7	132,7	152,7	172,7	192,7

☐ ja ☒ nein

2011	2012	2013	2014	2015
7,80	7,41	7,04	6,69	6,36

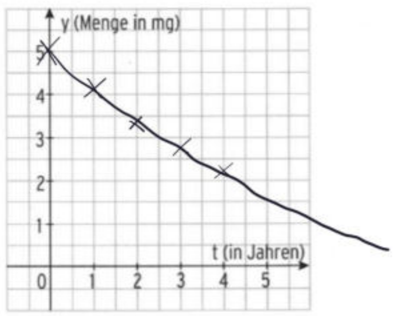
☒ ja ☐ nein

b) Beim exponentiellen Wachstum gilt q $\geq$ 1,
beim exponentiellen Zerfall gilt 0 $\leq$ q $\leq$ 1 .

24. Eine Anfangsmenge von 5 mg des radioaktiven Stoffes Radon 222 zerfällt exponentiell gemäß der Tabelle (t in Tagen; y in mg).

t	0	1	2	3	4
y	5	4,09	3,34	2,73	2,23

a) Stellen Sie den Vorgang im Koordinatensystem dar.



b) Ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm auf 3 Arten.

1. Die Regression am WTR führt zu f(t) = ________

2. Der Anfangsbestand von a = 5 und die Wachstumsfaktor q = 0,82 führen zu
f(t) = $5 \cdot e^{\ln(0{,}82) \cdot t}$. − 18%

3. Das Einsetzen des Anfangsbestandes von a = _____ und der Koordinaten des Punktes P(... | ...) in $f(t) = a \cdot e^{kt}$ führen zu _____ = _____ $\cdot\, e^{k\cdot \ldots}$

$e^{k\cdot \ldots}$ = _______

$k \cdot \ldots = \ln($______$)$

$k = \ln($______$)$

Somit gilt f(t) = ________ .

c) Die Halbwertszeit beträgt t_H = _____ . Überprüfen Sie dies am Schaubild.

21. Die nachfolgenden exponentiellen Wachstums- bzw. Zerfallsvorgänge sollen durch Funktionsterme beschrieben werden. Geben Sie jeweils zwei Funktionsterme an.

Vorgang	$f(t) = a \cdot b^t$	$f(t) = a \cdot e^{kt}$
Ein Kapital von 1500 EUR wird mit einem Zinssatz von 3 % jährlich verzinst.	$f(t) = 1500 \cdot 1{,}03^t$ (t in Jahren)	$e^k = 1{,}03$ $k = \ln(1{,}03) \approx 0{,}03$ $f(t) = 1500 \cdot e^{0{,}03t}$
Ein Auto wird für 20000 EUR gekauft. Pro Jahr verliert es 30 % an Wert.	$f(t) = 20.000 \cdot 0{,}70^t$ (t in Jahren)	$e^k = 0{,}70$ $k = \ln(0{,}70)$ $f(t) = 20.000 \cdot e^{\ln(0{,}70) \cdot t}$
Zu Beginn sind 4 Rechner mit einem Computervirus infiziert. Die Anzahl der insgesamt infizierten Rechner verzehnfacht sich täglich.	$f(t) = 4 \cdot 10^t$ (t in Tagen)	$e^k = 10$ $k = \ln(10)$ $f(t) = 4 \cdot e^{\ln(10) \cdot t}$
Von einem radioaktiven Stoff sind zu Beginn 5 g vorhanden. Die Menge halbiert sich jährlich.	$f(t) = 5 \cdot \frac{1}{2}^t$ (t in Jahren)	$e^k = \frac{1}{2}$ $k = \ln(\frac{1}{2})$ $f(t) = 5 \cdot e^{\ln(\frac{1}{2}) \cdot t}$

22. Das gesamte Holzvolumen (in m^3) eines Waldes wächst exponentiell und ist für die Jahre ab 2011 in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

2011	2012	2013	2014	2015
85000	90100	95506	101236	107310

$$\frac{90100}{85000} = \frac{95506}{90100} = \frac{101236}{95506} = \frac{107310}{101236} = 1{,}06$$

6%

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Wachstumsfaktor q für alle Zeitschritte konstant ist.

b) Der zugehörige Funktionsterm (mit t = 0 im Jahr 2011) lautet: $f(t) = 85000 \cdot e^{\ln(1{,}06) \cdot t}$.
Damit wird im Jahr 2020 ein Holzvolumen von 143.605,7115 m^3 erwartet.

19. Lösen Sie die Gleichung.

a) $-2e^{-x} + e^2 = 0$ b) $\frac{1}{4}(e^{2x} - 3) = 0$ c) $-e^{2x} + 11e^x - 28 = 0$

d) $2 - e \cdot e^{0,5x} = 0$ e) $2e^x - 7e^{-x} = 0$ f) $e^{2x} - 5e^x = -6$

a) $-2e^{-x} + e^2 = 0 \quad | -e^2$
$-2e^{-x} = -e^2 \quad | \,\top$
$e^2 = 2e^{-x} \quad | :2$
$\frac{e^2}{2} = e^{-x} \quad | \ln$
$\ln\left(\frac{e^2}{2}\right) = -x \quad | \cdot(-1)$
$\underline{\underline{x = -\ln\left(\frac{e^2}{2}\right)}}$

b) $\frac{1}{4}(e^{2x} - 3) = 0$
$\frac{1}{4}e^{2x} - 3\frac{1}{4} = 0 \quad | +3\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}e^{2x} = 3\frac{1}{4} \quad | :\frac{1}{4}$
$e^{2x} = 3 \quad | \ln$
$2x = \ln(3) \quad | :2$
$\underline{\underline{x = \frac{\ln(3)}{2}}}$

c) $-e^{2x} + 11e^x - 28 = 0$
$-u^2 + 11u - 28 = 0 \quad | \cdot(-1)$
$u^2 - 11u + 21 = 0$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1}$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2}$
$u_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{2}$
$u_1 = \frac{14}{2} = 7 \qquad e^x = 7 \quad | \ln \qquad \underline{\underline{x_1 = \ln(7)}}$
$u_2 = \frac{8}{2} = 4 \qquad e^x = 4 \quad | \ln \qquad \underline{\underline{x = \ln(4)}}$

d) $2 - e \cdot e^{0,5x} = 0 \quad | -2 + e$
$e^{0,5x} = -2 + e \quad | \ln$
$0,5x = \ln(-2+e) \quad | :0,5$
$x = \frac{\ln(-2+e)}{0,5}$

e) $2e^x - 7e^{-x} = 0 \quad | \cdot e^x$
$2e^{2x} - 7 = 0 \quad | +7$
$2e^{2x} = 7 \quad | :2$
$e^{2x} = 3,5 \quad | \ln$
$2x = \ln(3,5) \quad | :2$
$x = \frac{\ln(3,5)}{2}$

f) $e^{2x} - 5e^x = -6 \quad | +6$
$u^2 - 5u + 6 = 0$
$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$
$u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$
$u_1 = \frac{6}{2} = 3 \qquad e^x = 3 \quad | \ln \qquad x_1 = \ln(3)$
$u_2 = \frac{4}{2} = 2 \qquad e^x = 2 \quad | \ln \qquad \ln(2) = x_2$

20. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte und die Asymptote von K_f. Skizzieren Sie K_f.

a) $f(x) = 4e^{-0,25x} - 3$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

f(0) =

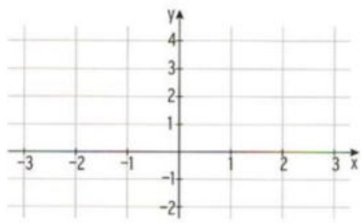
S_y (

Schnittpunkt mit der x-Achse:

f(x) = 0

N (

Asymptote: y =



b) $f(x) = -\frac{1}{8}e^{3x} + 3$

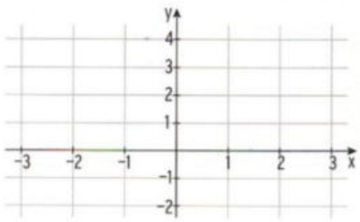
f(0) =

S_y (

f(x) = 0

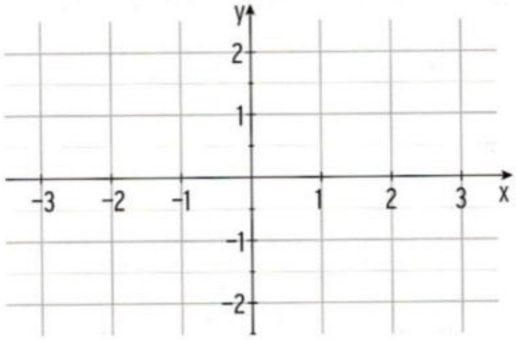
N (

y =



15. Für welche Werte von c hat die Gleichung $e^x + c = 0$ eine Lösung?
Antwort: Für c < 0

Begründen Sie mithilfe einer Skizze:



16. Lösen Sie die Gleichung mithilfe des Logarithmus .

$3e^{2x} = 15$	$2e^{-x} - 3 = 1$	$7 - 2e^{-0{,}2x} = 0$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1$
$3e^{2x} = 15$ $e^{2x} = 5$ $2x = \ln(5)$ $x = \frac{1}{2}\ln(5)$	$2e^{-x} - 3 = 1 \quad \vert +3$ $2e^{-x} = 4 \quad \vert :2$ $e^{-x} = 2 \quad \vert \ln$ $-x = \ln(2) \quad \vert T$ $x = \ln(2)$	$7 - 2e^{-0{,}2x} = 0 \quad \vert +2e^{-0{,}2x}$ $7 = 2e^{-0{,}2x} \quad \vert :2$ $3{,}5 = e^{-0{,}2x} \quad \vert \ln$ $\ln(3{,}5) = -0{,}2x \quad \vert :-0{,}2$ $\frac{\ln(3{,}5)}{-0{,}2} = x$	$-e^{\frac{2}{5}x} + 2 = -1 \quad \vert -2$ $-e^{\frac{2}{5}x} = -3 \quad \vert T$ $3 = e^{\frac{2}{5}x} \quad \vert \ln$ $\ln(3) = \frac{2}{5}x \quad \vert : \frac{2}{5}$ $\frac{\ln(3)}{\frac{2}{5}} = x$

17. Lösen Sie die Gleichung mit dem Satz vom Nullprodukt.

$e^{2x} - 3e^x = 0$	$e^x - 3e^{-x} = 0$	$e^x - 4e^{2x} = 0$
$e^x(e^x - 3) = 0$ $e^x = 0 \lor e^x - 3 = 0$ $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$ $e^x \neq 0$	$e^x\left(1 - 3e^{-2x}\right) = 0$ $\downarrow \neq 0$ $\hookrightarrow 1 - 3e^{-2x} = 0 \quad \vert +3e^{-2x}$ $1 = 3e^{-2x} \quad \vert :3$ $\frac{1}{3} = e^{-2x} \quad \vert \ln$ $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -2x \quad \vert :(-2)$ $-\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = x$	$e^x\left(1 - 4e^x\right) = 0$ $\downarrow \neq 0$ $\hookrightarrow 1 - 4e^x = 0 \quad \vert +4e^x$ $1 = 4e^x \quad \vert :4$ $\frac{1}{4} = e^x \quad \vert \ln$ $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = x$

18. Lösen Sie die Gleichung mit Substitution.

$e^{2x} - 4e^x = -3$	$-2e^{2x} + 6e^x + 8 = 0$	$e^x + 4e^{-x} + 5 = 0 \quad \vert \cdot e^x$
$e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ $e^x = u \quad (e^{2x} = u^2)$ $u^2 - 4u + 3 = 0$ $u = 1 \lor u = 3$ $e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$ $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$	$-2u^2 + 6u + 8 = 0 \quad \vert :(-2)$ $u^2 - 3u - 4 = 0$ $u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$ $u_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$ $u_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ $u_1 = \frac{4}{2} = 2 \qquad e^x = 2 \quad \vert \ln \qquad \ln(2) = x_1$ $u_2 = \frac{2}{2} = 1 \qquad e^x = 1 \quad \vert \ln \qquad \ln(1) = x_2$	$e^{2x} + 4 + 5e^x$ $u^2 + 5u + 4 = 0$ $u_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ $u_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$ $u_{1/2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$ $u_1 = \frac{-2}{2} = -1 \qquad e^x = -1 \quad \vert \ln \qquad \ln(-1) = x \ \text{↯}$ $u_2 = \frac{-8}{2} = -4 \qquad e^x = -4 \quad \vert \ln \qquad \ln(-4) = x \ \text{↯}$

Verdopplungszeit

1000€ ⟹ 2000€

Wachstumskonstante

$$1000\, e^{0{,}077 \cdot t} = 2000 \quad | :1000$$

$$e^{0{,}077 \cdot t} = 2 \quad | \ln$$

$$0{,}077 \cdot t = \ln(2) \quad | :0{,}077$$

$$\underline{\underline{t = 9{,}01}} \approx 9 \text{ Jahre}$$

⟹

<u>allg.</u> $\boxed{T_V = \frac{\ln(2)}{k}}$

Wachstumskonstante

Halbwertszeit

Bsp. 100kg atomarer Brennstoff

Zerfall 5% jährlich

⟹ 100kg → 50kg

NR:

0,95 Faktor

Wachstumsfaktor: 0,95

$$100 \cdot e^{\ln(0{,}95) \cdot t} = 50 \quad | :100$$

$$e^{\ln(0{,}95) \cdot t} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$

$$\ln(0{,}95) \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad | :\ln(0{,}95)$$

$$\underline{\underline{t = 13{,}5 \text{ Jahre}}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}6931\ldots$$

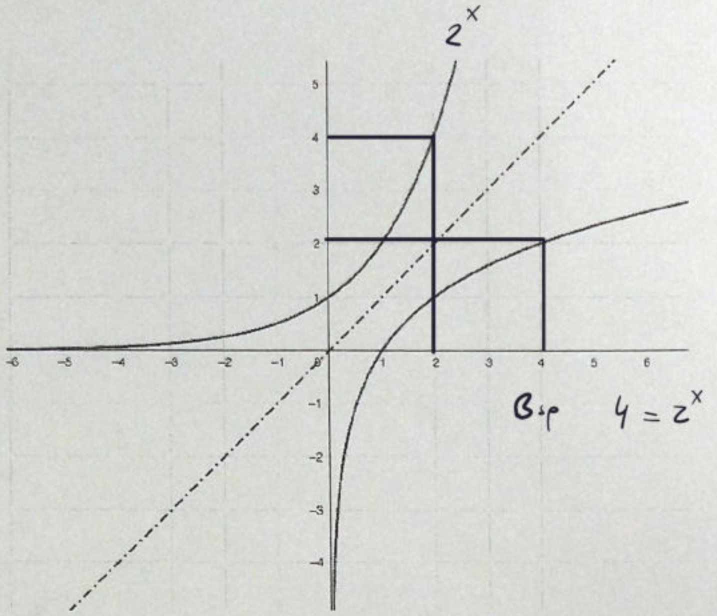
$$\ln(2) = 0{,}6931\ldots$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

allg. Halbwertszeit

$$\boxed{T_H = -\frac{\ln(2)}{k}}$$

Beispiel :



$f(x) = 2^x$

$g(x) = \log_2(x)$

Allgemeine Form : $a^x = b$

Lösung : $x = \log_a(b)$

Definition :

Der Logarithmus von ‚b' zur Basis ‚a' ist diejenige Hochzahl, mit der man ‚a' potenzieren muss, um ‚b' zu erhalten.

$(a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0)$

Regeln :

(1) $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

(2) $\log_a(u : v) = \log_a(u) - \log_a(v)$

(3) $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$

Exponentialgleichungen

1) Der Logarithmus

Bsp $2^x = 8$ $\Rightarrow$ gesucht ist der Exponent x.

Lösung $x = 3$ $\Rightarrow$ Logarithmus von 8 zur Basis 2.

Schreibweise: $3 = \log_2(8)$

$\Longrightarrow$ Exponentialgleichung zur Basis e

Bsp. $e^x = 4$

Lösung: $x = \ln(4)$ — Logarithmus naturalis (Natürlicher Logarithmus)

$x \approx 1{,}38$

2) Lösen von Exponentialgleichungen

a) Anwendung des Logarithmus

bsp. 1

$\Rightarrow$ $e^x = 5 \quad | \ln$

$\Rightarrow$ $\ln(e^x) = \ln(5)$

$\Rightarrow$ $\underline{x = \ln(5)}$

bsp. 3

$e^{2x} - 2e = 0 \quad | +2e$

$e^{2x} = 2e \quad | \ln$

$2x = \ln(2e) \quad | :2$

$x = \frac{\ln(2e)}{2}$

bsp. 2

$\frac{1}{2}e^{1-x} - 3 = 0 \quad | +3$

$\frac{1}{2}e^{1-x} = 3 \quad | \cdot 2$

$e^{1-x} = 6 \quad | \ln$

$1-x = \ln(6) \quad | -1$

$-x = \ln(6) - 1 \quad | \cdot(-1)$

$x = -\ln(6) + 1$

bsp. 4

$e^{-2x} + 3 = 0 \quad | -3$

$e^{-2x} = -3 \quad | \ln$

$-2x = \ln(-3)$ ↯

$-e^{-2x} - 3 = 0 \quad | +3$

$e^{-2x} = 3 \quad |$ ↯

b)

Ausklammern und SvNP

Bsp. 1 $e^{x} - e^{2x} = 0$

$e^{x} \cdot (1 - e^{x}) = 0$

$e^{x} \neq 0$

$1 - e^{x} = 0 \quad | + e^{x}$

$1 = e^{x} \quad | \ln$

$x = \ln(1)$

$\underline{\underline{x = 0}}$

Bsp. 2

$4e^{-x} - 2e^{x} = 0$

$e^{-x} (4 - 2e^{2x}) = 0$

$e^{-x} \neq 0$

$4 - 2e^{2x} = 0 \quad | -4$

$-2e^{2x} = -4$

$e^{2x} = 2 \quad | \ln$

$2x = \ln(2) \quad | :2$

$x = \frac{\ln(2)}{2}$

Potenzregeln

$e^{x} \cdot e^{x} = e^{x+x} = e^{2x}$

$e^{x} \cdot e^{-x} = e^{0} = 1$

$e^{2x} \cdot e^{-x} = e^{x}$

$e^{x} \cdot e^{y} = e^{x+y}$

c) Lösen durch Substitution

Bsp: $e^{2x} - 5e^{x} + 6 = 0$

$$e^x \cdot e^x - 5e^x + 6 = 0$$

Substitution $e^x = u$

$$u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$u_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ $\Rightarrow$ Resubstitution

$u_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

$u = e^x$

$e^x = 2 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x_1 = \ln(2)}}$

$e^x = 3 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x_2 = \ln(3)}}$

Weitere Regeln:

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ← allgemein

$(e^x)^2 = e^{2x}$; $(e^{-x}) = e^{-2x}$

Bsp.

$$e^x - 20e^{-x} = -1 \quad | +1$$

$$e^x - 20e^{-x} + 1 = 0 \quad | \cdot e^x$$

$$e^{2x} - 20 + e^x = 0$$

$$u^2 + u - 20 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$

$$u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

$u_1 = \frac{-1+9}{2} = 4$ $\quad e^x = 4 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x = \ln(4)}}$ ✓

$u_2 = \frac{-1-9}{2} = -5$ $\quad x_2 = \ln(-5)$ ↯

S. 139

① c)

$$e^{x} - 6e^{3x} = 0$$

$$e^{x}(1 - 6e^{2x}) = 0$$

$e^{x} \neq 0$

$$1 - 6e^{2x} = 0 \quad | +6e^{2x}$$

$$1 = 6e^{2x} \quad | :6$$

$$\frac{1}{6} = e^{2x} \quad | \ln$$

$$\ln\left(\frac{1}{6}\right) = 2x \quad | :2$$

$$\underline{\underline{\frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{2} = x}}$$

② b)

$$0{,}5e^{3x} - 5e^{2x} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$e^{3x} - 10e^{2x} = 0$$

$$e^{2x}(1e^{x} - 10) = 0$$

$e^{2x} \neq 0$

$$1e^{x} - 10 = 0 \quad | +10$$

$$e^{x} = 10 \quad | \ln$$

$$\underline{\underline{x = \ln(10)}}$$

d)

$$\frac{e^{x}}{2} - \frac{e^{-x}}{4} = 0 \quad \left| + \frac{e^{-x}}{4} \right| \cdot 4$$

$$2e^{x} - e^{-x} = 0$$

$$e^{x} \cdot (2 - e^{-2x}) = 0$$

$e^{x} \neq 0$

$$2 - e^{-2x} = 0 \quad | +e^{-2x}$$

$$2 = e^{-2x} \quad | \ln$$

$$\ln(2) = -2x \quad | :(-2)$$

$$\underline{\underline{\frac{\ln(2)}{-2} = x}}$$

③

$$e^{2x} + e^{x} = 0$$

④

$$e^{5x}(e^{x} - 3) = 0$$

$e^{5x} \neq 0$

$$e^{x} - 3 = 0 \quad | +3$$

$$e^{x} = 3 \quad | \ln$$

$$\underline{\underline{x = \ln(3)}}$$

⑤

$$ae^{2x} - e^{x} = 0$$

$$e^{x}(ae^{x} - 1) = 0$$

$e^{x} \neq 0$

$$ae^{x} - 1 = 0 \quad | +1$$

$$a \cdot e^{x} = 1 \quad | :a$$

$$e^{x} = \frac{1}{a} \quad | \ln$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

$a > 0$

nicht lösbar für $a \leq 0$

c) Lösen durch Substitution

138

① a) $e^{x} = 30 \quad | \ln$

$\underline{\underline{x = \ln(30)}}$

b) $e^{3x} = 12 \quad | \ln$

$3x = \ln(12) \quad | :3$

$\underline{\underline{x = \frac{\ln(12)}{3}}}$

c) $e^{1-x} = 1000 \quad | \ln$

$1-x = \ln(1000) \quad | -1$

$-x = \ln(1000) - 1 \quad | \cdot(-1)$

$\underline{\underline{x = -\ln(1000) - 1}}$

f) $e^{5x} - 4 = 0 \quad | +4$

$e^{5x} = 4 \quad | \ln$

$5x = \ln(4) \quad | :5$

$\underline{\underline{x = \frac{\ln(4)}{5}}}$

② a) $\frac{e^{-x}}{2} - 3 = 0 \quad | +3$

$\frac{e^{-x}}{2} = 3 \quad | \cdot 2$

$e^{-x} = 6 \quad | \ln$

$-x = \ln(6) \quad | \cdot(-1)$

$\underline{\underline{x = -\ln(6)}}$

i) $6e^{\ln(3)\cdot x} - 18 = 0 \quad | +18$

$6e^{\ln(3)\cdot x} = 18 \quad | :6$

$e^{\ln(3)\cdot x} = 3 \quad | \ln$

$\ln(3)\cdot x = \ln(3) \quad | :\ln(3)$

$\underline{\underline{x = 1}}$

③ $e^{2x} + 5 = 0 \quad | -5$

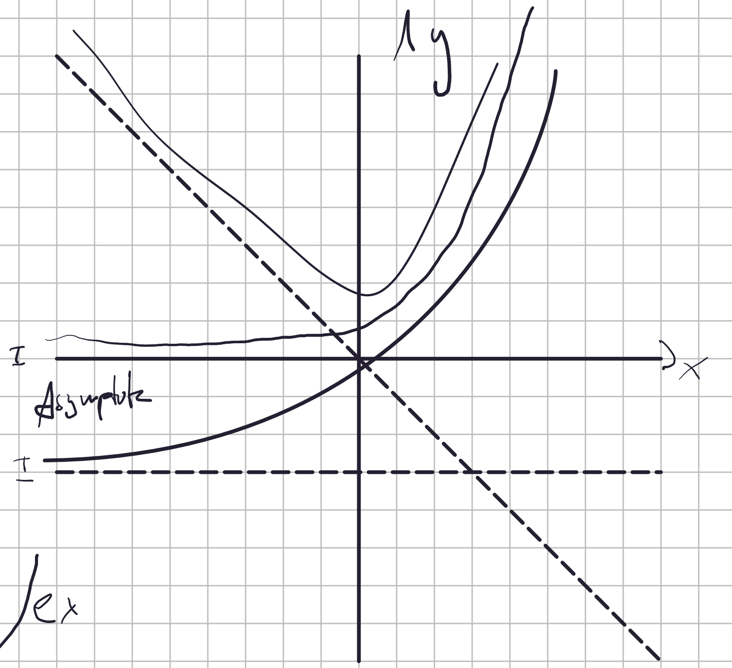
$e^{2x} = -5 \quad | \ln$

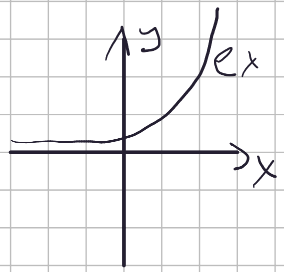
$2x = \ln(-5)$ ↯

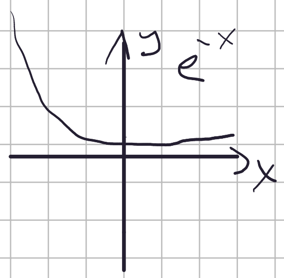
Da in ln nicht minus stehen darf

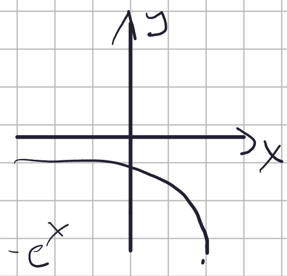
$e^{2x} + a = 0$

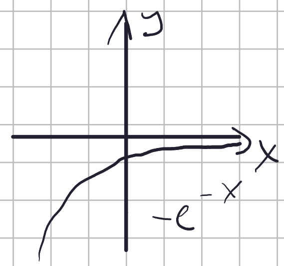
wenn a positiv ist.


y
x
Asymptote


y
ex
x


y
e^{-x}
x


y
x
$-e^{x}$


y
x
$-e^{-x}$

Mathe I KA

① a) $-2x^3 - \frac{3}{4}x^2 = 0$

$x^2 \cdot \left(-2x - \frac{3}{4}\right) = 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = 0 \quad \hookrightarrow -2x - \frac{3}{4} = 0 \quad | +2x$

$-\frac{3}{4} = 2x \quad | :2$

$-\frac{3}{8} = x_3$

$x_{1,2} = 0$

$x_3 = -\frac{3}{8}$

b) $x^2(x^2 - 4) = 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = 0 \quad \rightarrow x_{3,4} = x^2 - 4 = 0 \quad | +4$

$x^2 = 4 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x_{3,4} = \pm 2$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \qquad x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$

$z_1 = \frac{2}{2} = 1 \quad \pm\sqrt{1} = \quad x_1 = -1, \; x_2 = 1$

$z_2 = \frac{8}{2} = 4 \quad \pm\sqrt{4} = \quad x_3 = 2, \; x_4 = -2$

②

a) $f(x) = 3x^4 - 1 = C$

b) $g(x) = -3x^3 - x^2 = B$

c) $f(x) = 0{,}5x^3 + 2x - 3 = F$

d) $i(x) = -3x^3 + 4x = D$

e) $j(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1 = E$

f) $k(x) = 2x^4 - 3x^2 - 0{,}5 = A$

③

$f(x) = 0{,}5x^3 - 3x$

$g(x) = -0{,}5x$

$0{,}5x^3 - 3x = -0{,}5x \quad | +0{,}5x$

$0{,}5x^3 - 2{,}5x = 0$

$x \cdot (0{,}5x^2 - 2{,}5) = 0$

$\hookrightarrow x_1 = 0 \quad \hookrightarrow x_{2,3} = 0{,}5x^2 - 2{,}5 = 0 \quad | +2{,}5$

$0{,}5x^2 = 2{,}5 \quad | :0{,}5$

$1x^2 = 5 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x_1 = \sqrt{5}$

$x_2 = -\sqrt{5}$

$S_1\left(-\sqrt{5} \;\middle|\; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$y = -0{,}5 \cdot (-\sqrt{5})$

$y = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$S_2(0 \mid 0)$

$y = -0{,}5 \cdot 0$

$S_3\left(\sqrt{5} \;\middle|\; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$y = -0{,}5 \cdot \sqrt{6}$

(4) Funktion dritten Grades

$x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -10 \quad P(2|-6)$

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$

$-6 = a \cdot (2 - (-1)) \cdot (2 - 1) \cdot (2 - (-10))$

$-6 = a \cdot (3) \cdot (1) \cdot (12)$

$-6 = 36a \quad | : 36$

$a = -\frac{1}{6}$

$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x+10)}}$

(5)

Fkt. 4. Grades

mit $f(0) = 3$; $f(1) = 4$; $f(-2) = -5$

Symmetrisch zur y-Achse

exponenten gerade

$P_1(0|3)$
$P_2(1|4)$
$P_3(-2|-5)$

$f(x) = ax^4 + cx^2 + c$

$3 = e$

I. $4 = a \cdot 1^4 + c \cdot 1^2 + 3$

$1 = a + c \quad | \cdot 4$

$4 = 4a + 4c$

II $-5 = a \cdot (-2)^4 + c \cdot (-2)^2 + 3$

$-8 = 16a + 4c$

II - I $\cdot 4$

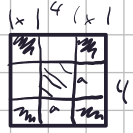
$-12 = 12a \quad | \cdot 12$

$-1 = a$

$-1 + c = 1 \quad | + 1$

$a = -1 \qquad c = 2 \qquad \underline{\underline{f(x) = -1x^4 + 2x^2 + 3}}$

Mathe II

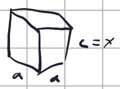


(1) 4,5 T Sand

$4500\,kg : 1500 \frac{kg}{m^3} = 3\,m^3$

$\Rightarrow$ allg: $V = a \cdot b \cdot c$

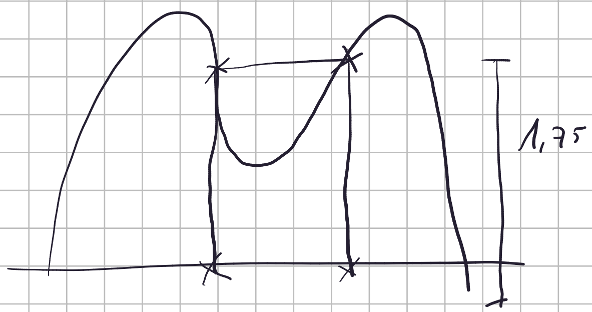
$\Rightarrow V = (4-2x)^2 \cdot x$



$= (16 - 16x + 4x^2) \cdot x$

$V(x) = 4x^3 - 16x^2 + 16x$

x min = 0,3
x max = 1,2



$\Rightarrow f(x) = g(x)$

$-x^4 + 2x^2 + 1 = 1{,}75 \quad | -1{,}75$

$-x^4 + 2x^2 - 0{,}75 = 0 \qquad x^2 = z$

$-z^2 + 2z - 0{,}75 = 0$

$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-0{,}75) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$

$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{1}}{-2}$

$z_1 = \frac{-2+1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \begin{matrix} x_1 = 0{,}707 \\ x_2 = -0{,}707 \end{matrix}$

$0{,}707 \cdot 2 = \underline{1{,}41\,m}$

$z_2 = \frac{-2-1}{-2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$