การนับเบื้องต้น (Counting)

กฎการนับ • การเรียงสับเปลี่ยน • การจัดหมู่

None W. (Yuan)

สารบัญ (Outline)

1. หลักการนับเบื้องต้น
   - หลักการบวก (Addition Principle)
   - หลักการคูณ (Multiplication Principle)
2. การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น (Linear Permutation)
   - แฟกทอเรียลและนิยาม
3. การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม (Circular Permutation)
4. การจัดหมู่ (Combination)
5. หลักการรังนกพิราบ (Pigeonhole Principle)
6. สรุป

ก่อนเรียน (Prerequisites)

สิ่งที่ควรรู้ก่อนเรียน

- **เซต** — การดำเนินการของเซต, จำนวนสมาชิกของเซต
- **จำนวนเต็ม** — การคูณและการหาร, แฟกทอเรียล ($n!$)

หัวใจของการนับ

การนับเบื้องต้นคือ **การหาจำนวนวิธีทั้งหมด** ที่เหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้น โดยไม่ต้องนับทีละตัวอย่าง การนับมีประโยชน์ตั้งแต่การคำนวณความน่าจะเป็น ไปจนถึงการวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

หลักการนับเบื้องต้น

หลักการบวก (Addition Principle)

หลักการบวก (Addition Principle)

หลักการบวก

ถ้าต้องการทำงานอย่างหนึ่ง โดยสามารถเลือกทำได้จาก **กรณีที่แยกจากกัน** จำนวนวิธีทั้งหมด = **ผลรวม**ของจำนวนวิธีในแต่ละกรณี

ตัวอย่าง: เลือกของว่าง

มีเค้ก 3 แบบ คุกกี้ 4 แบบ และขนมปัง 2 แบบ ถ้าต้องการเลือกขนมเพียง **1 ชิ้น** จะมีทั้งหมดกี่วิธี?

วิธีคิด: เลือกเค้ก **หรือ** คุกกี้ **หรือ** ขนมปัง (คำว่า "หรือ" = บวก)

$$3 + 4 + 2 = 9 \text{ วิธี}$$

คิดง่าย ๆ

"หรือ" แปลว่า **บวก** — แต่ละกรณีแยกจากกัน ไม่ซ้อนทับกัน

หลักการคูณ (Multiplication Principle)

หลักการคูณ (Multiplication Principle)

หลักการคูณ

ถ้าการทำงานประกอบด้วย **หลายขั้นตอนต่อเนื่องกัน** จำนวนวิธีทั้งหมด = **ผลคูณ**จำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอน

ตัวอย่าง: เลือกชุดเสื้อผ้า

มีเสื้อ 4 ตัว และกางเกง 3 ตัว จะแต่งตัวด้วยเสื้อ 1 ตัว **และ** กางเกง 1 ตัว ได้ทั้งหมดกี่แบบ?

วิธีคิด: เลือกเสื้อ (4 วิธี) **และ** เลือกกางเกง (3 วิธี)

$$4 \times 3 = 12 \text{ แบบ}$$

คิดง่าย ๆ

"และ" แปลว่า **คูณ** — แต่ละขั้นตอนทำต่อเนื่องกัน

ตัวอย่าง: การโยนเหรียญ (Coin Tossing)

โจทย์

โยนเหรียญบาท 1 เหรียญ 3 ครั้ง จะมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ?

วิธีทำ

แต่ละครั้ง เหรียญออกได้ 2 แบบ: หัว (H) หรือ ก้อย (T)

ครั้งที่ 1: 2 แบบ **ครั้งที่ 2:** 2 แบบ **ครั้งที่ 3:** 2 แบบ

ใช้หลักการคูณ (แต่ละครั้งเป็นขั้นตอนต่อเนื่อง):

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 \text{ แบบ}$$

ผลลัพธ์ทั้งหมด: HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT

ตัวอย่าง: การทอยลูกเต๋า (Dice Rolling)

โจทย์

ทอยลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง จงหา

(ก) จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมด

(ข) จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มเป็นเลขคู่

วิธีทำ

(ก) แต่ละครั้งออกได้ 6 หน้า: $6 \times 6 = 36$ แบบ

(ข) ผลรวมเป็นเลขคู่ เกิดจาก:

- คู่ + คู่: $3 \times 3 = 9$ แบบ (แต้มคู่: 2, 4, 6)
- คี่ + คี่: $3 \times 3 = 9$ แบบ (แต้มคี่: 1, 3, 5)

รวม (ใช้หลักการบวก): $9 + 9 = 18$ แบบ

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น

Linear Permutation

แฟกทอเรียลและนิยาม

แฟกทอเรียล (Factorial)

นิยาม: แฟกทอเรียล

สำหรับจำนวนเต็มบวก n,

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

ตัวอย่าง: $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120$

นิยามเพิ่ม: $0! = 1$

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นคืออะไร?

นิยาม: Permutation

การเรียงสับเปลี่ยน คือการจัดเรียงสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด โดย **คำนึงถึงลำดับ** (ลำดับต่าง = วิธีต่าง)

ตัวอย่าง

จัดตัวอักษร A, B, C เรียงเป็นแถวตรง

ตำแหน่งที่ 1: เลือกได้ 3 ตัว $\rightarrow$ 3 วิธี
ตำแหน่งที่ 2: เหลือ 2 ตัว $\rightarrow$ 2 วิธี
ตำแหน่งที่ 3: เหลือ 1 ตัว $\rightarrow$ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมด = $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ แบบ

ได้แก่ ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

สูตรการเรียงสับเปลี่ยน

สูตร

เลือกของ r **ชิ้นจาก** n **ชิ้น เรียงลำดับ** (เรียกว่า $P(n, r)$):

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

เลือกของทั้งหมด n **ชิ้น เรียงลำดับ** (เรียงทุกตัว):

$$P(n, n) = n!$$

ตัวอย่าง: การเลือกกรรมการแบบมีตำแหน่ง

โจทย์

มีคน 10 คน ต้องการเลือกกรรมการ 3 ตำแหน่ง (ประธาน, รองประธาน, เลขานุการ) โดยแต่ละคนดำรงตำแหน่งได้ตำแหน่งเดียว จะมีกี่วิธี?

วิธีทำ

ตำแหน่งต่างกัน $\rightarrow$ ลำดับสำคัญ $\rightarrow$ ใช้ Permutation

$$\mathrm{P}(10,3) = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720 \text{ วิธี}$$

เหตุผล: ตำแหน่งที่ 1 เลือกได้ 10 คน, ตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ 9 คน, ตำแหน่งที่ 3 เลือกได้ 8 คน $\rightarrow 10 \times 9 \times 8 = 720$

ตัวอย่าง: ข้อสอบจริง

โจทย์ปี 67 ข้อ 31

นักเรียนห้องหนึ่งมีชาย 3 คน หญิง 4 คนเรียงแถวถ่ายรูปโดยนักเรียนชายอยู่แถวหลัง นักเรียนหญิงอยู่แถวหน้าได้กี่วิธี

วิธีทำ

นักเรียนชาย 3 คน อยู่แถวหลัง แถวหลังเรียงได้ $3! = 6$ วิธี

นักเรียนหญิง 4 คน อยู่แถวหน้า แถวหน้าเรียงได้ $4! = 24$ วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมด เท่ากับ จำนวนวิธีเรียงแถวหน้า $\times$ จำนวนวิธีเรียงแถวหลัง $= 24 \times 6 = 144$ วิธี

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

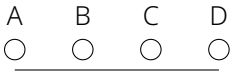
Circular Permutation

การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมคืออะไร?

แนวคิด

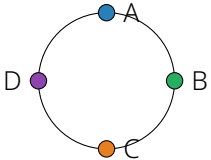
การจัดของ **รอบวงกลม** การหมุนวงกลมทั้งวง **ไม่ถือว่าเป็นวิธีที่ต่างกัน** เพราะตำแหน่งสัมพัทธ์ระหว่างสิ่งของยังคงเดิม

เส้นตรง: ลำดับต่าง = วิธีต่าง



A-B-C-D $\neq$ B-C-D-A

วงกลม: หมุนแล้วเหมือนเดิม



หมุนแล้วได้รูปแบบเดิม

สูตรการเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

สูตร

จำนวนวิธีจัดของ n สิ่งที่แตกต่างกัน **รอบวงกลม**:

$$(n-1)!$$

เหตุผล: จัดของ n สิ่งเป็นเส้นตรงได้ n! วิธี แต่ละวิธีในวงกลมถูกนับซ้ำ n ครั้ง (จากการหมุน) ดังนั้น $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

ตัวอย่าง: จัดคนรอบโต๊ะกลม

จัดคน 5 คนนั่งรอบโต๊ะกลม จะนั่งได้ทั้งหมดกี่วิธี?

$$(5-1)! = 4! = 24 \text{ วิธี}$$

กรณีพิเศษ: สร้อยคอหรือกำไล

ข้อสังเกต

ถ้าวัตถุสามารถ **พลิกด้าน** ได้ (เช่น สร้อยคอ, กำไลข้อมือ) การพลิกด้านก็ไม่ถือว่าเป็นวิธีที่ต่างกัน จำนวนวิธีจะลดลงอีกครึ่งหนึ่ง:

$$\frac{(\mathrm{n}-1)!}{2}$$

ตัวอย่าง: ร้อยลูกปัด

นำลูกปัด 6 สีที่แตกต่างกันมาร้อยเป็นสร้อยคอ จะได้สร้อยคอที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่แบบ?

$$\frac{(6-1)!}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ แบบ}$$

ทำไมสร้อยคอต้องหาร 2?

การพลิกด้านของสร้อยคอ

ลองนึกถึงสร้อยคอ — ถ้าพลิกด้านกลับ หัวกลายเป็นท้าย แต่ลำดับของลูกปัดยังเหมือนเดิม (แค่มองจากอีกด้าน)

ดังนั้น **ทุกแบบถูกนับซ้ำ 2 ครั้ง** (ด้านหน้ากับด้านหลัง) จึงต้องหาร 2

สรุปสูตร

- จัดรอบวงกลม (พลิกไม่ได้ เช่น โต๊ะกลม): $(n-1)!$
- จัดรอบวงกลม (พลิกได้ เช่น สร้อยคอ): $\dfrac{(n-1)!}{2}$

ตัวอย่าง: ข้อสอบจริง

โจทย์ปี 67 ข้อ 24

จำนวนวิธีในการจัดที่นั่งโต๊ะกลม เมื่อมีประธาน นักร้องวง A 4 คน และนักร้องวง B 3 คน และประธานต้องนั่งติดนักร้องทั้งสองวงมีกี่วิธี

วิธีทำ

ขั้นแรก จับกลุ่ม 3 คน โดยให้ประธานอยู่ตรงกลาง โดยกลุ่มนี้จะได้ทั้งสิ้น 12 วิธี มาจากเลือกคนจากวง A 1 คน 4 วิธี วง B 1 คน 3 วิธี และสามารถสลับฝั่งซ้ายขวาได้จึงเป็น $4 \times 3 \times 2 = 12$ วิธี

จากนั้นกลุ่มนี้นับเป็นของ 1 สิ่ง นำมาเรียงสับเปลี่ยนกับคนที่เหลือจากวง A 3 คน วง B 2 คน รวมเป็น ของ 6 สิ่งจะได้ $(6-1)! = 120$ วิธี

วิธีทั้งหมดมาจาก วิธีในกลุ่ม $\times$ วิธีเรียงสับเปลี่ยนในวงกลม $= 12 \times 120 = 1440$ วิธี

การจัดหมู่

Combination

การจัดหมู่คืออะไร?

นิยาม: Combination

การจัดหมู่ คือการเลือกสิ่งของ โดย **ไม่คำนึงถึงลำดับ** (ลำดับต่าง = วิธีเดียวกัน)

Permutation (ลำดับสำคัญ)

เลือก 2 คนจาก {A, B, C} เป็น

ประธาน และ รองประธาน

AB $\neq$ BA

ได้ 6 วิธี = P$(3, 2)$

Combination (ลำดับไม่สำคัญ)

เลือก 2 คนจาก {A, B, C} เป็น

กรรมการ (ตำแหน่งเดียวกัน)

AB = BA

ได้ 3 วิธี = C$(3, 2)$

สูตรการจัดหมู่

สูตร

จำนวนวิธีเลือกของ r ชิ้นจาก n ชิ้น โดยไม่คำนึงถึงลำดับ:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ความสัมพันธ์กับ Permutation:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$

(เลือกมาก่อน $P(n, r)$ แล้วหารด้วยการสลับภายในกลุ่ม $r!$)

ตัวอย่าง: การจัดหมู่

โจทย์

มีนักเรียน 10 คน ต้องการเลือกคณะกรรมการ 4 คน (ทุกคนมีตำแหน่งเท่ากัน) จะมีวิธีการเลือกกี่แบบ?

วิธีทำ

ตำแหน่งเท่ากัน $\rightarrow$ ลำดับไม่สำคัญ $\rightarrow$ ใช้ Combination

$$\mathrm{C}(10,4) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210 \text{ วิธี}$$

ตัวอย่าง: โยนเหรียญ

โจทย์

โยนเหรียญ 1 เหรียญ 5 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่ได้หัว (H) 3 ครั้งพอดี

วิธีทำ

แนวคิด: เลือก **ตำแหน่ง** ที่ได้หัว 3 ครั้งจากทั้งหมด 5 ครั้ง

ตำแหน่งไหนได้หัวไม่สำคัญ (หัวเหมือนกันหมด) $\rightarrow$ Combination

$$\mathrm{C}(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \text{ แบบ}$$

ตัวอย่าง: HHH**TT**, HH**T**H**T**, H**T**HH**T**, ...

ตัวอย่าง: การเลือกไพ่

โจทย์

ในการเลือกไพ่ 2 ใบจากสำรับ 52 ใบ จะมีจำนวนวิธีทั้งหมดกี่วิธี?

วิธีทำ

ไพ่ทั้ง 2 ใบไม่มีลำดับ $\rightarrow$ ใช้ Combination

$$\mathrm{C}(52, 2) = \binom{52}{2} = \frac{52 \times 51}{2} = 1326 \text{ วิธี}$$

หลักการรังนกพิราบ

Pigeonhole Principle

หลักการรังนกพิราบ

หลักการ

ถ้ามี **นก** $n + 1$ **ตัว** บินเข้ารังนก n **รัง** จะต้องมีอย่างน้อย **1 รัง** ที่มีนกอย่างน้อย **2 ตัว**

คิดแบบบ้าน ๆ

ถ้ามีถุงเท้า 3 สีในลิ้นชัก แล้วคุณหลับตาหยิบ 4 ครั้ง ยังไงก็ต้องได้สีซ้ำอย่างน้อย 1 คู่แน่นอน

ตัวอย่าง: วันเกิด

ในกลุ่มนักเรียน 13 คน จะต้องมีอย่างน้อย 2 คนที่เกิดเดือนเดียวกัน

เพราะ: 1 ปีมี 12 เดือน (= 12 รัง) นักเรียน 13 คน (= นก 13 ตัว) $13 > 12$ จึงต้องมีเดือนที่มีนักเรียนอย่างน้อย 2 คน

ตัวอย่าง: รังนกพิราบ

โจทย์

ในลิ้นชักมีถุงเท้า 3 สี (แดง, น้ำเงิน, ดำ) อย่างละหลายคู่ ถ้าหลับตาหยิบถุงเท้าทีละข้าง ต้องหยิบอย่างน้อยกี่ข้างจึงจะมั่นใจว่าได้ถุงเท้าสีเดียวกัน 1 คู่?

วิธีทำ

กรณีแย่ที่สุด: หยิบได้สีไม่ซ้ำเลย $\rightarrow$ หยิบ 3 ครั้ง ได้ แดง, น้ำเงิน, ดำ หยิบครั้งที่ 4: จะซ้ำกับสีใดสีหนึ่งแน่นอน

ดังนั้นต้องหยิบอย่างน้อย **4 ครั้ง** จึงมั่นใจว่าได้สีซ้ำ

ตัวอย่าง: ข้อสอบจริง

โจทย์ปี 68 ข้อ 21

เลือกตัวเลขจากเซต $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ต้องเลือกอย่างน้อยกี่จำนวนจึงจะมั่นใจว่ามี 2 จำนวนที่ผลรวมเป็น 8?

วิธีทำ

จับคู่ที่ผลรวมเป็น 8: $(1, 7), (2, 6), (3, 5)$ — มี 3 คู่ และ 4 ที่ไม่มีคู่เพราะห้ามใช้เลขซ้ำ (= 4 รัง)

กรณีแย่ที่สุด: เลือกมา 3 ตัวจากคนละคู่ และเลือก $4 \rightarrow$ ยังไม่มีคู่ไหนรวมเป็น 8
ตัวที่ 5: ต้องซ้ำกับคู่ใดคู่หนึ่ง $\rightarrow$ ผลรวมเป็น 8

ดังนั้นต้องเลือกอย่างน้อย **5 จำนวน**

สรุป

สรุปเนื้อหา

สิ่งที่ได้เรียนรู้

1. **หลักการบวก**: "หรือ" — กรณีแยกจากกัน $\rightarrow$ **บวก**
2. **หลักการคูณ**: "และ" — ขั้นตอนต่อเนื่อง $\rightarrow$ **คูณ**
3. **Permutation**: เรียงลำดับ $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
4. **Circular Permutation**: จัดรอบวงกลม $(n-1)!$
5. **Combination**: ไม่เรียงลำดับ $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
6. **รังนกพิราบ**: นก $n+1$ ตัว $\rightarrow$ อย่างน้อย 1 รังมีนก ≥ 2 ตัว

เอกสารนี้เป็นส่วนหนึ่งของเนื้อหาเตรียมสอบ **สอวน. คอมพิวเตอร์**